LA FUNCIÓN AFIN Y SUS REGISTROS DE REPRESENTACIÓNENESTUDIANTES DE GRADO DECIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO

GUILLERMO ALBERTO GALINDEZ CÓRDOBA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2013

LA FUNCIÓN AFIN Y SUS REGISTROS DE REPRESENTACIÓNEN ESTUDIANTES DE GRADO DECIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO

GUILLERMO ALBERTO GALINDEZ CÓRDOBA

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

ASESOR: ORLANDO RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

POPAYÁN

2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo de grado

Fue aprobado por el asesor y el

Respectivo evaluador

Vo. Bo. Jenny Leonor Rosero

Coordinadora de Licenciatura en matemáticas

Vo.Bo. Orlando Rodríguez

Asesor

Vo.Bo. Evaluador (a)

Evaluador (a)

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN

La práctica pedagógica es el proceso mediante el cual la universidad del Cauca en uso de sus facultades legales como Institución de Educación Superior, acerca a sus estudiantes a través de la docenciaa conocer la realidad subyacente en el sistema educativo nacional, para así permitir que docentes en formación sienten posiciones críticas y reflexivas a lo largo de dicho ejercicio, y particularmente al interior de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Alrededor de los procesos anteriores existenfactores que determinan significativamente el normal desarrollo de los mismos. Algunos de estos factores están relacionados con la forma de transmitir el conocimiento dentro del aula de clase.Por tanto, el presente documento está direccionado a analizar la problemática existente en el aprendizaje de la función Afína través de los diferentes registros de representación semióticaen estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Julumito.

Para esto se diseñaron diversas actividades que dieron a conocer algunos problemas al realizar conversiones entre los registros de representación dela función Afín, dado que resulta pertinente tomar los correctivos necesarios para mejorar elaprendizaje de dicha función, ya que al identificar tales dificultades, se hace más fácil el diseño y aplicación de estrategias metodológicas con las que se pueda solucionar esta problemática.

Ahora bien, la elección de la función Afín como objeto de estudio del presente escrito recae en su importancia como objeto matemático, debido a que se puede articular través del uso de registros de representación. Así mismo y aunque dicha función sea considerada como el tipo más simple de función,es también uno de los más importantes en matemáticas, física y otras disciplinas, pues su gráfica permite modelar problemas para favorecer su interpretación y posterior comprensión.

Por tanto, y con el objetivo de favorecer esencialmente el aprendizaje de la función lineal, se determinó hacer uso de los textos serie MATEMÁTICA PROGRESIVA (Londoño & Bedoya) y ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA(G.Zill & M. Dewar) porconsiderar que son libros en los cuales se aborda el estudio de la función Afín de forma completa y sistematizada, y en los que se hace uso del proceso de conversión entre registros de representación.

De igual forma,porque son textos que facilitan al docente transmitir de forma clara y concisacada uno de los elementos (definición, ejemplos, etc.) Ligados a un concepto matemáticocon el cual se busca favorecer su comprensión y aprendizaje. Por último, porque su composición permite abordar algunas teorías previas, necesarias para la aprehensión del concepto función Afín.Así, Para contribuir a lacomprensión del documento, este se ha organizado en los siguientescinco capítulos:

En el capítulo uno se presenta, el planteamiento del problema, la justificación que favorece el estudio de la función Afín y los objetivos generales y específicos dispuestos para el proceso. En el capítulo dos (fase de intervención**)** se presenta el contexto de la práctica docente, es decir, el lugar en donde se desarrolló la tercera fase de la práctica pedagógica, destacando algunas características propias del colegio Julumito, así como también del lugar en donde está ubicada dicha institución.

En el capítulo tres se presentan los referentes teóricos que apoyan este trabajo de investigación, a saber, los registros de representación semióticasligados a los objetos matemáticos. Adicionalmente, la metodología empleada para el desarrollo de esta investigación.

En el capítulo cuatro se presentan los resultados que se derivan de las diferentes actividades que se desarrollaron durante la intervención en el aula. En el quinto y último capítulo se presentan las conclusiones obtenidas a partir de los resultados que arrojó el análisis de dichas actividades; recomendaciones y referencias bibliográficas utilizadas en la investigación.

Por último se presentan los anexos de cada una de las actividades (diagnóstico, talleres, evaluaciones, etc.) que se implementaron en la institución, imágenes del lugar de trabajo y evidencias fotográficas del proceso realizado.

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 La función Afín en la Educación Básica Secundaria

Se podría decir que históricamente las matemáticas han sido visualizadascomo la ciencia por excelencia, quizá por la alta gama de aplicaciones que esta poseeo simplemente por la aparente perfección de su construcción. Lo único cierto es que esta disciplina ha desempeñado un papel de vital importancia en la evolución del ser humano, pues su utilidad al interior dediversas culturas, ha favorecido su desarrollo en aéreas como la economía, el comercio, la agrimensura, etc.

En el campo de la investigación científica, las matemáticas se han convertido en un baluarte esencial para la ejecución de numerosos proyectos que han permitido avances significativos para la humanidad. Por ejemplo, en los avances tecnológicos que se consiguen paulatinamente gracias al empleo de teorías matemáticas, en la posibilidad de ejecutar investigaciones científicas referidas al espacio y a sus componentes, y en el desarrollo de experimentos relacionados a la especie humana ya sus elementos.

Asimismo, en el campo de la educación, las matemáticas han ido evolucionando al vaivén de las necesidades que demanda la fenomenología presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje.Es decir, cada día surgen nuevas formas (metodologías) con las que se busca ampliar las posibilidades de que el estudiante participe activamente en las clases. Por tanto, ya es normal la utilización de algunas herramientas tecnológicas como software, videobeam, entre otras, que ayuden al educando a apropiarse de un concepto en particular, fomentando así el interés por el estudio de las matemáticas y contribuyendo con la solución de dicha problemática.

Pero si bien es cierto que el empleo de tales estrategias en el aula de clase resulta pertinente a la hora de transmitir un conocimiento,este no disminuye el papel del docente como mero transmisor del saber. Al contrario, reafirma su importancia en el proceso, ya que se hace indispensable su experiencia y creatividad para el diseño o búsqueda de una estrategia idónea que refuerce de alguna manera lo hecho mediante la enseñanza tradicional.

En lo relacionado al estudio de la función Afín, primordialmente en la Educación Básica Secundaria, existen diversas estrategias que facilitan su enseñanza y aprendizajedebido a su importancia y utilidad. Cabe aclarar que la intención de este documento no es identificarqué tipo deestrategia podría servir para satisfacer las necesidades de aprendizaje de dicho concepto, sino analizar las dificultades que se tienen al efectuarprocesos de conversión, haciendo distinciones entre los mismos, y entre el objeto y su representación, ya que segúnDuval (1999)¨No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Desde esta perspectiva es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir los números, las funciones, las rectas, etc., con sus representaciones, es decir las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras… pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes¨.

Por lo tanto, teniendo en cuenta el planteamiento anterior y como se mencionó anteriormente, el objetivo de este documento es analizar las dificultades que presentan los estudiantes de grado décimo dela Institución Educativa Julumito al trabajar con registros de representación semiótica de la función Afín.En consecuencia se formula el siguiente interrogante:

¿Cuáles son las dificultades subyacentes en los estudiantes de grado decimo de la institución educativa Julumito, al trabajar los distintos registros de representación semiótica de la función lineal?

1.2 JUSTIFICACIÓN

El estudio de la función Afín y sus registros de representaciónsobresale predominantemente al interior de las matemáticas y otras disciplinas. Su importancia se desprende del concepto de función, el cual permite establecerrelaciones entre registros de representación tales como: Registro algebraico, registró gráfico,representación tabular y el lenguaje natural.

En las ciencias, la función Afín se destaca por considerarse la piedra angular que permite modelar diversos comportamientos de la naturaleza. Algunos de estos comportamientos pueden establecerse mediante el uso de modelos lineales, los cuales son esquemas de representaciónentre una variable Y (variabledependiente) y una variable X (variable independiente) que se establecen a partir de ecuaciones lineales.

En la física por ejemplo, lafunción Afín facilitan el estudio de algunos conceptos tales como:movimiento (movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado), resistencia eléctrica de un cable determinado en función de su longitud, ley de dilataciónlineal, Ley de Ohm, entre otras. En conclusión, las ecuaciones lineales permiten la modelación de problemas que involucran dos cantidades. A continuación se ilustran algunos ejemplos de aplicación:

Ejemplo 1- Función Afín entre las escalas Fahrenheit y Celsius

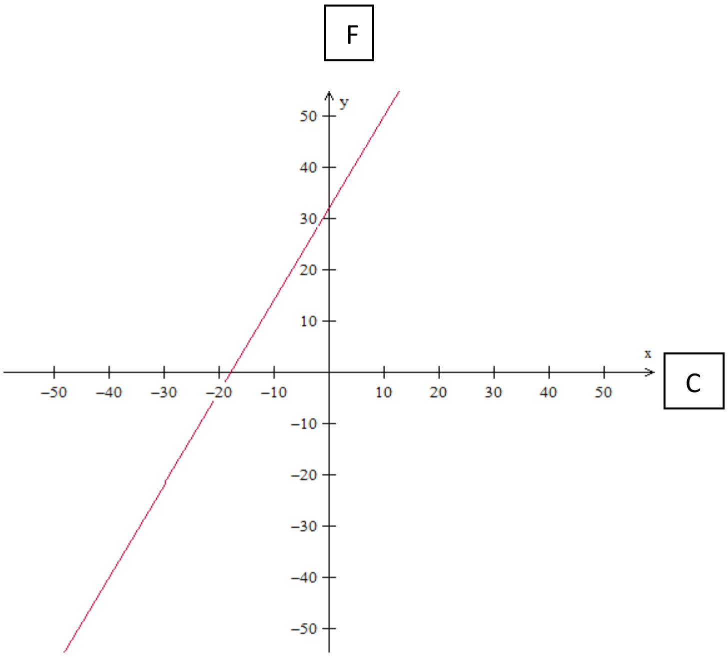
La función Afín entre las escalas Fahrenheit (F)y Celsius (C) esta dada por la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Trace la gráfica de esta ecuación con los valores de C en el eje horizontal, y los de F en el eje vertical.
b) ¿Cuál es la pendiente de esta gráfica y que representa?, ¿Cuál es la intersección en F y que representa?

Solución

a) Esta es una ecuación lineal, por lo que su grafica es una recta. En lugar de x e y (le llamamos C y F a las coordenadas, lo cual no modifica la forma de la gráfica). Puesto que dos puntos definen una recta, primero determinamos dos que satisfagan la ecuación y luego los graficamos trazando una recta que los una. Cuando $C = 0$, entonces, $F = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$ y cuando $C = 5$ tenemos $F = \frac{9}{5}(5) + 32 = 41$. Por lo tanto, los puntos (0,32) y (5,41) pertenecen a la recta. Estos puntos y la recta se muestran en la siguiente figura:

Gráfica



b) Puesto que la ecuación está dada en la forma pendiente intercepto, vemos que la pendiente es $\frac{9}{5}$ y que la intersección en F es 32. La pendiente representa el cambio en°F por cada °C; entonces, unincremento de 9^0 F corresponde a un aumento de 5^0 C. la intersección en F es el punto sobre la grafica cuya coordenada en Ces 0. Así, 32^0F es lo mismo que 0^0C (punto de congelación del agua).

Ejemplo 2- Función Afín entre temperatura y altitud

a) Conforme el aire seco se eleva, se expande y enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de 20^0C y a una altitud de 1 km es de 10^0C, exprese la temperatura T (en grados C) en función de la altitud h(en kilómetros). (Suponga que la expresión es lineal)
b) Trace la gráfica de la ecuación lineal ¿Que representa su pendiente?
c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 Km?

Solución

a) Puesto que estamos suponiendo una relación entre h y T, la ecuación debe ser de la forma:

$$T = mh + b$$

Donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, se tiene que $T = 20$, por lo que:

$$20 = m(0) + b$$

$$b = 20$$

Entonces tenemos:

$$T = mh + 20$$

Para $h = 1$ corresponde $T = 10$, y por lo tanto:

$$10 = m(1) + 20$$

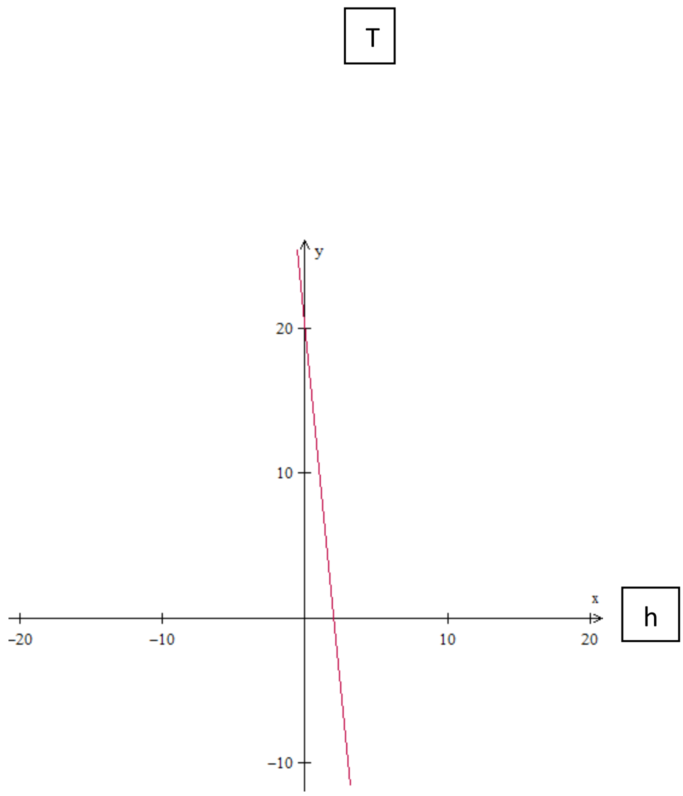
$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es:

$$T = -10h + 20$$

b) En la siguiente gráfica se aprecia que el valor de la pendiente es $m = -10^0\ {}^{C}/_{Km}$, y esta representa la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia por encima del nivel del suelo.

Gráfica:



c) A una altitud de $h = 2.5$ Km, la temperatura es:

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5^0C$$

En la economía su utilidad se ve reflejada en la modelación de la oferta y la demanda de un artículo utilizando ecuaciones lineales. Por ejemplo se podría tener:

$$Ecuacion\ de\ oferta\ \ y = 8p - 10$$

$$Ecuacion\ de\ demanda\ \ y = -3p + 15$$

Donde p es el precio del artículo. En la ecuación de oferta, y ($la\ cantidad\ producida$) aumenta conforme se incrementa el precio ya que si este es elevado se producirán más artículos. La ecuación de demanda indica que y ($la\ cantidad\ vendida$) se reduce al elevarse el precio. El punto de equilibrio es el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones de oferta y demanda; en éste la cantidad producida es igual a la vendida.

Ejemplo- Oferta y demanda para el trigo

Un economista modela el mercado del trigo mediante las ecuaciones siguientes:

- $Ecuacion\ de\ oferta\ \ y = 8.33p\ - 14.58$
- $Ecuacion\ de\ demanda\ \ y = -1.39p + 23.35$

Aquí p es el precio por bushel (en dólares) y la cantidad de bushels producidos y vendidos (en millones).

a) ¿En qué punto el precio es tan bajo que no se produce trigo?
b) ¿En qué punto el precio es tan elevado que no se vende trigo?
c) Trace las gráficas de oferta y demanda en el mismo rectángulo de visualización y determine el punto de equilibrio. Estime el precio de equilibrio y las cantidades producidas y vendidas en este punto.

Solución.

a) Si no se produce trigo, entonces $y = 0$ en la ecuación de la oferta.

$0 = 8.33p - 14.58$ (Haciendo $y = o$ en la ecuación de oferta)

$p = 1.75$ (Resolviendo para p)

Por lo tanto el bajo precio de $ 1.75 por bushel la producción de trigo se detiene totalmente.

b) Si no se vende trigo, entonces $y = 0$ en la ecuación de la demanda.

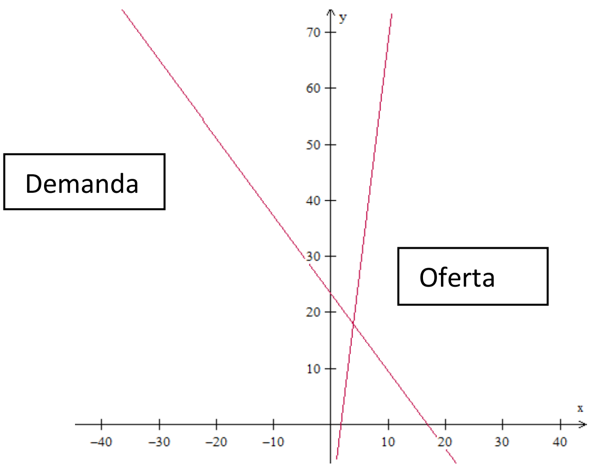
$0 = -1.39p\ + 23.35$ (Haciendo $y = 0$ en la ecuación de la demanda)

$p = 16.80$ (Resolviendo para p)

Por lo tanto, al elevado precio de $ 16.80 por bushel no se vende trigo.

c) En la siguiente figura se muestran las gráficas tanto de la oferta como de la demanda en el mismo rectángulo de visualización. Al mover el cursor al punto de intersección, encontramos que este es, aproximadamente $(3.9, 17.9)$. por lo tanto, el puno de equilibrio ocurre en $ 3.90 por bushel, y se producen y venden 17.9 millones de bushels.

Grafica



Por otra parte, al indagar sobre la importancia de la investigación, y principalmente sobre el por qué y para qué de la misma, la justificación de este documento no solo respondea la pregunta de investigación planteada anteriormente, sino que también da lugar a otro tipo de interrogantes como los que se ilustran a continuación

¿Por qué investigar a cerca de las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar registros de representación de funciones lineales?

Porque resulta pertinente tomar los correctivos necesarios para la articulación y aprendizaje de los registros de representaciónde funciones lineales y demás, ya que según Duval (1999) ¨ En matemáticas las representación es semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la matemática misma¨¿Para qué se realiza esta investigación?

Para que a partir de la identificación de las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con registros de representación de funciones lineales, se puedan diseñar estrategias metodológicas que permitan subsanar tales dificultades, y por ende favorecer la comprensión y articulación de cada uno de estos registros.

1.3 OBJETIVO GENERAL

Identificarlas dificultades que presentan los estudiantes de grado decimo de la Institución Educativa Julumito, al trabajar con registros de representación semiótica de la función afín.

1.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar que registros de representación semiótica de la función afínconocen los estudiantes de grado decimo de la Institución Educativa Julumito.
- Desarrollar actividades con el fin de articular cada uno de los registros de representaciónsemiótica de la función afín.

CAPÍTULO II

CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

La institución educativa JULUMITO se encuentra localizada en el corregimiento JULUMITO, ubicado a 8 km al occidente de la ciudad de Popayán sobre la cuenca del rio Cauca. Este corregimiento cuenta con un área de 1.152.17 hectáreas y se caracteriza por su diversidad cultural y económica, y por el trabajo arduo de sus habitantes en la agricultura, la ganadería, la producción agrícola, etc.

Además de lo anterior, existen otros aspectos a destacar como los que se muestran a continuación:

- **Localización y Límites**

  El corregimiento de Julumito se encuentra limitado de la siguiente forma: Al norte con los corregimientos de San Rafael y Santa Rosa, al oriente con el corregimiento de San Bernardino, al occidente con el corregimiento de la Meseta, y al sur con los corregimientos de Charco y Cajete.

- **Núcleos Poblados que lo conforman**

La cabecera del corregimiento corresponde al caserío de Julumito, el cual lo conforman, Julumito, Julumito alto y los Tendidos.

- **Aspectos ambientales**

El territorio del corregimiento de Julumito está conformado por la cuenca del rio Cauca, su rio principal es el rio Satè, las quebradas de la Buitrera, Filipina, La paz, el Uvo, Garrachal o Pambazo, Quita calzón, etc.

Geología y Geomorfología

- **Topografía y calidad agrícola del suelo**

En las tres veredas solo existe bosque en muy pequeñas áreas ubicadas en las riberas de las fuentes de agua. El corregimiento de Julumito, tiene la siguiente distribución agrícola:Café, Caña, Plátano, Pasto, Maíz, Hortalizas, Frijol, etc.Las cuales hacen de este corregimiento, una región rica en productos agrícolas, de fácil producción y cosecha, favoreciendo el sustento de sus habitantes y de algunas zonas del departamento del Cauca.

- **Población y aspectos socioculturales**

La población de este corregimiento en el año 1998 era de 1.547 habitantes, los cuales estaban distribuidos en 198 familias y 252 viviendas según un estudio realizado por el DANE, en el año 1998.

- **Servicios sociales en la región**

El corregimiento de Julumito, cuenta con el siguiente equipamiento de servicios sociales:

- Una Escuela primaria
- Un Puesto de salud
- Una Iglesia
- Servicios públicos (agua, energía, servicios telefónicos, internet, etc.)
- Un Salón comunal
- Un Parque infantil.
- Servicios de transporte urbano. Etc.

Adicionalmente, el corregimiento de Julumito cuenta con tres establecimientos educativos (Dos colegios y una escuela) destinados a la formación académica de sus habitantes en los niveles de educación básica primaria y básica secundaria. La institución educativa Julumito fue fundada en el año 1994 como COLEGIO DEPARTAMENTAL AGRÍCOLA DE JULUMITO, debido a las gestiones hechas por la comunidad para consolidar una institución educativa en su corregimiento, que satisficiera sus necesidades educativas.

Misión y Visión de la institución educativa Julumito

- **Misión**

La institución educativa Julumito proyectará personas con conocimientos que les permitirán continuar con sus estudios universitarios y capaces de realizar oficios que le permitan ingresar en el mercado laboral y con mentalidad empresarial, seres con pensamiento autónomo, critico, capaces de elaborar juicios propios para poder determinar por si mismos que deben hacer en las diferentes circunstancias de la vida. Seres con una visión real del mundo para descubrirse así mismo, entender a los demás, participar en obras colectivas y la vida en sociedad. Seres capaces de desempeñarse honrada y eficazmente en las diferentes tareas de la sociedad.

- **Visión**

La institución educativa tiene una responsabilidad permanente con la comunidad de formar un ser humano integral, ético y solidario y así ayudar a construir una sociedad más justa.

Otros aspectos importantes que se deben destacar de dicha instrucción, es que consta de cuatro sedes las cuales están constituidas de la siguiente forma:

- **Sede principal**

Esta sede consta de 340 estudiantes repartidos en seis grados. Sexto, séptimo, octavo, noveno, decimo y once. También costa de un amplio terreno en donde se llevan a cabo los procesos de siembra y cosecha que realiza la institución en compañía de estudiantes y padres de familia.

- **Sede Julumito**

Consta de 227 estudiantes, repartidos en los grados transición, primero, segundo, tercero, cuarto y quinto.

- **Sede la Laja**

Esta sede tiene 28 estudiantes distribuidos en seis grados. A saber: transición, primero, segundo, tercero, cuarto y quinto. Se encuentra ubicada en la vereda la Laja muy cerca del corregimiento de Julumito.

- **Sede los Tendidos**

Esta sede consta de 49 estudiantes distribuidos en los grados, transición, primero, segundo, tercero, cuarto y quinto.

- **Modalidad**

La modalidad de la institución educativa Julumito es académica presencial, en jornada diurna (mañana y tarde).

- **Convenios**

Este plantel educativo posee convenios con la Universidad Autónoma del Cauca, la Universidad del Cauca, Computadores para educar, Proyecto postulado fondo indígena, entre otros.

- **Directivas y Cuerpo Docente**

En total este plantel educativo consta de 30 docentes con formación académica calificada para ejercer la docencia (licenciados). 644 estudiantes y tres administrativos (Rector, Coordinadora y Secretaria).

CAPÍTULO III

REFERENTES TEÓRICOS

Teniendo en cuenta que el objetivo de esta investigación está sujeto a los registros de representación que se trabajan enmatemáticas, es aconsejable seguir como fundamento teórico a Duval (1999), puesto que su teoría permite comprender de mejor forma el lenguaje de las representaciones. Adicionalmente, se consideran algunos planteamientos puntuales de Pedro Javier Rojas(2009),relacionados con registros de representación en aras de complementar el marco teórico de este trabajo de investigación.

En el texto SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO registros semióticos y aprendizajes intelectuales,Duval (1999)plantea que ¨el aprendizaje de las matemáticas constituye evidentemente un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas e incluso la compresión de textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación, distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes¨.

Asimismo, Rojas (2009) en su documento SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS, menciona que el aprendizaje de los objetos en matemáticas es conceptual, es decir, el sujeto no entra en contacto directo con un determinado objeto, sino con una representación particular de este objeto matemático. Por ejemplo, cuando se estudia el concepto de función, el sujeto se enfrenta a las diversas formas de representación de dicho concepto, el cual puede ser representado a través de diagramas o curvas en el plano. Así, las diversas formas de representar este concepto articulan de alguna manera los registros de representación Semiótica subyacentes en el mismo (representación tabular, representación algebraica y representación geométrica).

¿Pero qué es la Semiosis o semiología?

La Semiosis es la ciencia que estudia los sistemas de signos, lenguas códigos, señalizaciones, etc. No obstante, Saussure (1916) la concibe como¨ La ciencia que estudia la vida de los signos en el seno de la vida social¨

Por lo tanto, las representaciones semióticas según Duval (1999), son aquellas producciones constituidas por un conjunto de signos como: el lenguaje, la escritura algebraica, o los gráficos cartesianos, que permiten exteriorizar las representaciones mentales. Es decir, hacerlas visibles y comunicarlas con otros. La noción derepresentación semiótica admite la consideración de sistemas semióticos diferentes que permita la conversión de una representación de un sistema semiótico a otro, entendiendo esta operación como "cambio de forma en que un conocimiento está representado".

Y ¿Qué son las actividades cognitivas? Para responder a esta pregunta, se debe conocer que es una habilidad cognitiva, y cuál es su función dentro de las actividades cognitivas.

- **Habilidad cognitiva**

  Las habilidades cognitivas son aquellas que se ponen en marcha para analizar y comprender la información recibida, cómo se procesa y cómo se estructura en la memoria. Desde el punto de vista cognitivo, se concibe el aprendizaje como un conjunto de procesos que tienen como objeto el procesamiento de la información

Por tanto las actividades cognitivas son los campos en donde se ponen en juego las habilidades cognitivas, es decir, son los procesos, métodos o técnicas, cuya función es la de articular las habilidades cognitivas en aras de procesar una información recibida.

Ahora bien, Duval (1999) menciona como actividades cognitivas fundamentales, la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos.

- **Conceptualización**

La conceptualización no es más que una perspectiva abstracta y simplificada del conocimiento que tenemos del mundo. El cual se busca representar de alguna manera a través de las relaciones verbales que puedan establecerse entre conceptos. Estas relaciones se pueden establecer a partir de relaciones de atributo. Relaciones jerárquicas como la categorización. Entre otras. Así conceptualizar es la construcción de ideas abstractas a partir de la experiencia.

- **Razonamiento**

Es la facultad que posee un individuo para solucionar problemas, obtener conclusiones y aprender conscientemente de los sucesos o acontecimientos, estableciendo relaciones de conexión causales entre los mismos.

Se habla de dos tipos de razonamiento: Razonamiento argumentativo y el Razonamiento lógico o causal**.** El primero es la actividad mental que corresponde a la actividad lingüística para argumentar. El segundo es un proceso lógico en el cual de uno o más juicios se deriva una validez, la posibilidad o la falsedad de otro juicio diferente.

- **La resolución de problemas.**

Es el proceso mental mediante el cual se supone la conclusión de un proceso más amplio, que tiene como pasos previos la identificación del problema y su respectiva modelación.

- **Comprensión de textos.**

La comprensión de textos es un proceso mental que está sujeto a determinados factores de conocimiento que favorecen o no el normal desarrollo del proceso. Con esto podría decirse que la necesidad de que las actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación, distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes, se debe a que dichos lenguajes son limitados a la hora de explicar algunos eventos matemáticos, que requieren del lenguaje de las representaciones para su comprensión.

En consecuencia, las representaciones semióticas no cumplen el papel simplemente de soporte para las representaciones mentales y es insatisfactorio estimar que se pasa espontáneamente de la representación al contenido representado, es como si el contenido fuera separado fácilmente de su forma semiótica y el cambio de forma seria una operación intrínsecamente secundaria, activa por sí. Luego la noesis, considerada como la aprehensión conceptual de un objeto, no debe ser separada de la Semiosis, concebida como la aprehensión o la producción de una representación semiótica. Por ende, la operación de conversión de los distintos registros de representación, no es ni trivial ni cognitivamente neutra, o sea, no se puede suponer que el contenido representado es separable de la forma que lo representa, como si la noesis fuera independiente de la Semiosis.

3.1. LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Para Duval (1999), el aprendizaje de las matemáticas constituye, evidentemente, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como las descritas anteriormente. Adicionalmente plantea, si ¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y de expresión, o al contrario, no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales O, si ¿Este funcionamiento cognitivo en sus actividades de aprehensión conceptual, de razonamiento o de comprensión de enunciados, es o no es independiente de la existencia de una pluralidad de registros semióticos de representación?

El primero de estos interrogantes, según Duval (1999) sobrepasa ampliamente el dominio de las matemáticas y de su aprendizaje. En realidad, apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano. Mientras que el aprendizaje de las matemáticas constituye el dominio en el que el segundointerrogante es másnotorio y más agudo.

Para responder al segundo cuestionamiento, dicho autor afirma que existen argumentos muy potentes que parecen imponer la respuesta incluso antes de que haya habido tiempo para plantear la pregunta.Algunos de ellos son:

1. No puede haber comprensión en matemáticas sino se distingue un objeto de su representación.

Ya que toda confusión entre el objeto y su representación, provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión.

Por su parte, Rojas (2009) afirma que se debe tener en cuenta que es diferente la representación de un objeto (ya sea concreto o abstracto) y el objeto propiamente dicho. Así, una cosa es Juan como sujeto concreto (perceptible directamente) y otra una fotografía, una caricatura o una descripción verbal, oral o escrita que se haga de él. En consecuencia, una cosa es el concepto de estado y otra, cada una de las representaciones que de este concepto se puedan tener. De lo anterior, se puede inferir que tanto Duval (1999) como Rojas (2009) coinciden significativamente en que la distinción entre el objeto matemático y su respectiva representación, debe hacerse de forma diáfana y concisa, ya que el desarrollo normal de la actividad matemática demanda tal distinción, debido a que un mismo objeto matemático puede darse a través de diversas representaciones.

Sumado a esto, al afirmar Rojas (2009) que el aprendizaje de los objetos matemáticos es conceptual, reafirma de algún modo lo planteado por Duval (1999), en cuanto a que el aprendizaje de las matemáticas requieren de alguna forma de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes. Entendiéndose esto, como el mecanismo que permite afianzar en la comprensión de un objeto matemático, materializado en sus distintas formas de representación.

2. La existencia de las representaciones mentales como el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado.

Con esta afirmación Duval (1999) llama la atención a cerca de la relación que se puede llegar a establecer entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas, ya que podría considerarse a las representaciones semióticas como aquel mecanismo que permite exteriorizar las representaciones mentales. Es decir, pareciera ser que las representaciones semióticas cumplen solamente funciones de comunicación de todo aquello que puede llegar a concebir la mente humana. Por tanto, de ser así, estas noserían más que producciones constituidas por el uso de signos en enunciados propios del lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc., con las cuales,un individuo exterioriza o hace visibles o accesibles a otros, sus representaciones mentales.

No obstante, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. En efecto, es innegable que la evolución de esta disciplina se debe en parte a la diversidad de registros semióticos de representación. La aritmética, el álgebra, la geómetra, el análisis, la teoría de conjuntos, entre otras, han desarrollado diversas teorías mediante el empleo de registros de representación, los cuales satisfacentres actividades cognitivas fundamentales inherentes a toda representación. Ellas son:

1. Construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosaen un sistema determinado.
2. Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. Convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Cabe aclarar que no todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales, como por ejemplo, el lenguaje Morse, o la codificación de transito;pero el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc., si las permiten. Se hablara entonces de los registros de representación semiótica.

Ahora bien, particularizando un poco,Rojas (2009) plantea que la representación en matemáticas está subordinada por tres elementos fundamentales, los cuales, y desde lo planteado por Duval (1999)determinan los polos que constituyen la representación.

- **Representación en matemáticas.**

Las representaciones en matemáticas quedan determinadas por las siguientes etapas:

a) El objeto representado.

b) El contenido de la representación, es decir, lo que una representación particular presenta del objeto.

c) La ¨forma¨ de la representación, es decir, su modalidad o su registro.

El objeto representado hace referencia al objeto matemático que se está representado a través de un sistema específico de representación. El contenido de la representación da lugar a las especificaciones o atributos que se ilustran del objeto. Y la forma de la representación, hace referencia al tipo de registro que se está utilizando para ilustrar el objeto. Por ejemplo el número seis suele ser representado por el signo ¨6¨, pero este signo, esta marca, no es el número seis, tan solo es una de las diversas maneras de representarlo. Podría escogerse otros signos como:

IIIIII SIX VI

O cualquier otro con el cual se pueda representar el número seis.

Lo que realmente se debe destacar, es que la variedad de representaciones en las que se puede presentar un objeto, permiten extraer distintas características o elementos diferenciadores del objeto que pretenden representar, o mejor, diferentes ¨*unidades significantes*¨. O como lo plantea Duval (1999) en su texto, ¨la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales¨ Pág. 16.

De esta manera, Rojas (2009) controvierte a Duval (1999) afirmando que para efectos de la comunicación de tipo general, puede ser suficiente el uso de un sistema de representación, como el lenguaje natural oral o escrito, pero no desconoce la utilidad de usar otro sistema de representación (iónico, grafico, tabular, etc.) exclusivamente con el fin de destacar propiedades diferentes de un mismo objeto. En relación a esto, Duval

(1999) reconoce también que el uso de más de un sistema de representación y la posibilidad de realizar transformaciones entre los diferentes sistemas resulta ser ¨una exigencia cognitiva necesaria y fundamental¨; más aún plantea explícitamente que ¨estos sistemas semióticos son tan necesarios para el desarrollo del pensamiento matemático como la innovación y el perfeccionamiento de instrumentos de óptica o de medida en otras disciplinas científicas¨

En conclusión, para el aprendizaje de las matemáticas, el uso y la compresión de los sistemas de representación son imprescindibles ya que:

a) Los objetos matemáticos están dispuestos en una gran variedad de registros.
b) La naturaleza de los objetos matemáticos hace que la manera de acceder a ellos sea vía la representación.
c) La representación en un sistema hace ¨visible¨ unas características del objeto y no otras, así que, entre más sistemas de representación ¨coordinados¨ tenga un sujeto, su conocimiento del objeto matemático será más potente y más complejo.

Todo esto, debido a que el progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el primero de ellos, el de la lengua natural.

- **Registros de representación semióticos**

Para Duval (1999), los registros de representación semiótica constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor. De igual forma, Un signo puede representar algo solo gracias a las relaciones de oposición que puede tener con otros signos. Un signo es tal, solo al interior de un conjunto de otros signos; su sentido está ligado a un valor de elección en relación con otros posibles.
En el contexto de las matemáticas, y ligado a lo anterior, se tiene que algunas de las notaciones utilizadas provienen de un sistema (como en el caso de las cifras de notación posicional de base n) y otras no (como en el caso del empleo de las letras como

variables, donde cada vez debe explicitarse que conjunto de números puede representar) en tanto son netamente convencionales.

Por tanto, y según esto, Rojas (2009) resalta la necesidad de trabajar con sistemas de representación, o específicamente con registros como les denomina Duval (1999), teniendo en cuenta que en matemáticas los registros pueden ser de dos tipos:

1. **Registros discursivos.**

Los registros discursivos están determinados por el empleo del lenguaje natural, el cual constituye el sistema semiótico por excelencia, o en su defecto, por una lengua formal. Por ejemplo, para dar una definición, para anunciar una proposición o para realizar cálculos algebraicos, etc.

2. **Registros no discursivos.**

Los registros no discursivos son aquellos que quedan determinados por formas o configuraciones de formas. Por ejemplo, las figuras geométricas, los sistemas de coordenadas etc.

Simultáneamente, en matemáticas se pueden efectuar diversas transformaciones entre diferentes registros de representación semiótica, pero fundamentalmente se pueden efectuar transformaciones de dos tipos, denominados transformación de tratamiento o transformación de conversión.

Por otra parte, la cuestión de la relación entre Semiosis y noesis concierne únicamente a los sistemas que permiten las tres actividades de representación y no a todos los sistemas semióticos. Así mismo, Duval (1999) hace remembranza al análisis del desarrollo de los conocimientos y los obstáculos encontradosen los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, dentro del cual se encuentran tres fenómenos estrechamente ligados que determinan de algún modo su consecución.
Estos fenómenos son:

1. La diversificación de los registros de representación semiótica

2. Diferenciación entre representante y representado, o al menos entre forma y contenido de una representación semiótica.
3. La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles.

Dentro de la diversificación de los registros de representación semiótica, se encuentra la relación entre el nacimiento de la representación al desarrollo de la función semiótica. Simultáneamente, la oposición clásica entre lengua e imagen como una primera aproximación a esta diversificación. Esto se debe a que el empleo de un registro en particular, permite la obtención de algún tipo de información relativa al aprendizaje. Así, el lenguajenatural y las lenguas simbólicas no pueden considerarsecomo formando un único y mismo registro; como tampoco los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas.

El segundo fenómeno (diferenciación entre representante y representado) se caracteriza porque la diferenciacióngeneralmenteestá asociada a la comprensión de lo que una representación representa y por tanto a la posibilidad de asociar otras representaciones y de integrarlas en los procesos de tratamiento, por consiguiente, es esencial a la hora de operar objetos matemáticos, tener en cuenta el tipo de registro que se va a utilizar.

Por ejemplo, supongamos que se desea sumar dos números cualesquiera, la suma de estos está sujeta al sistema de representación semiótica determinado por las características de los mismos, o sea, no se suman dos números fraccionarios de la misma forma en que se suman dos números decimales. Ya que es indispensable el sistema de escritura escogido, debido a que en la naturaleza de la operación, están inmersas propiedades que cada sistema ha determinado para su aplicación.

Por lo tanto, no se efectúa de la misma manera la suma $\frac{5}{2}+\frac{5}{2}$y $2.5 + 2.5$, puesto que los métodos de tratamiento para dicha operación no son iguales.

En consecuencia, se puede inferir que todo sistema de representación posee sus propias *reglas, las cuales permiten hacer combinación de signos (operar) al interior del registro,* para así, obtener como resultado un signo de la misma naturaleza.

El tercer fenómeno resalta, que el conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos diferentes, no es suficiente para que puedan ser movilizados y utilizados conjuntamente. El mayor obstáculo que imposibilita la realización espontanea de esta coordinación según Duval (1999) recae en la importancia de los fenómenos de no- congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas.

Seguidamente, este autor afirma que el paso de un sistema de representación a otro, o la movilización simultanea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recurrido intelectual, fenómenos tan familiares y tan frecuentes en la actividadmatemática para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos

Al respecto, nace el siguiente interrogante: ¿Por qué es difícil para un estudiante el paso de un sistema de representación a otro? Quizá porque aún no está bien cimentada la conceptualización del objeto matemático que se está trabajando, o tal vez, porque alrededor de este proceso existen dificultadesque entorpecen el normal desarrollo del mismo. Indistintamente, así Duval (1999) concluye afirmando que¨la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación de las representaciones de un mismo objeto¨

Ahora obsérvese cuales son los tipos de representaciones:

3.1.1. CLASIFICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES.

Para caracterizar las representaciones, se tiene en cuenta una de las dos oposiciones clásicas siguientes:

1. La oposición consciente/ no consciente
2. La oposición interno/ externo

Para Duval (1999), la oposición consciente/ no consciente es la oposición entre lo que aparece a un sujeto y el observa, de una parte, y lo que a él se le escapa y no puede observar, de otra. En este sentido, la consciencia se caracteriza por la visión de ¨*alguna cosa*¨qué ipso facto toma el estatus de objeto para el sujeto que mira. El pasaje de lo no-consciente a la consciencia, corresponde a un proceso de objetivación para el sujeto que toma consciencia. La objetivación corresponde al descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otro se lo hubiera explicado. Las representaciones conscientes son aquellas que presentan este carácter intencional y que cumplen una función de objetivación.

En tanto que la oposición interno/ externo, es la oposición de lo que de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente visible y observable y lo que, por elcontrario no lo es. Esta oposición permite dividir el dominio de las representaciones mediante dos precisiones suplementarias. La primera es que todas las representaciones llamadas ¨externas¨ son representaciones producidas como tales por un sujeto o por un sistema. La segunda es que la producción de una representación externa solo puede efectuarse a través de la aplicación de un sistema semiótico. Las representaciones externas son, por naturaleza, representaciones semióticas. En conclusión, se tiene lo siguiente:

- **Representaciones semióticas**

Se llaman representaciones semióticas, a aquellas representaciones que permiten la visión de alguna cosa. Estas representaciones son a la vez representaciones conscientes y externas. En efecto, permiten una ¨mirada del objeto¨ a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos)que tienen el valor de ¨significantes¨.

- **Representaciones mentales**

Son representaciones cognitivas que permiten mirar el objeto en ausencia total del significante perceptible. Por lo general se igualan con las ¨*imágenes mentales*¨ pero que cubren un dominio más amplio que las de las imágenes. Según Duval (1999), es necesario incorporar en ellas no solo los conceptos, las nociones, las ideas, sino también las creencias y las fantasías.

- **Representaciones computacionales**

Son representaciones en las cuales sus significantes no requieren de la mirada del objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie. En este contexto, se expresa la información externa en un sistema de manera tal que la hace direccionable, recuperable y combinable en el interior de dicho sistema.

3.1.2 REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS, TRANSFORMACIONES INTENCIONALES Y APRENDIZAJE.

Aunque haya una gran similitud entre las representaciones computacionales y las representaciones semióticas, estas no tienen la misma naturaleza. Unas sonrepresentacionesinternas, sujetas a un sistema, e independiente de toda visión del objeto. Otras son representaciones conscientes, inseparables de la visión de alguna cosa que topa ipso facto el estatus de objeto.

Esta diferencia de naturaleza es expresable mediante la existencia de dos tipos de transformaciones, cuya complementariedad es indispensable para dar cuenta, tanto del funcionamiento, como del desarrollo cognitivo del pensamiento humano; las transformaciones cuasi- instantáneas y las transformaciones intencionales.

- **Transformaciones cuasi-instantáneas**

Estas transformaciones según Duval (1999), son aquellas que se efectúan incluso antes de haber sido observadas y producen las informaciones y las significaciones de las cuales un sujeto toma inmediatamente consciencia. Su característica fundamental es que se pueden efectuar al mismo tiempo, y a si sr insensibles a la cantidad de elementos que se deben integrar.

Análogamente, las transformaciones cuasi- instantáneas corresponden netamente a la familiaridad, o ala experiencia resultante de un proceso largo de practica o de una competencia adquirida en un dominio.

- **Transformaciones intencionales**

Para Duval (1999), las transformaciones intencionales, son aquellas que para ser efectuadas toman al menos el tiempo de un control consciente y que se dirigen exclusivamente a los datos previamente observados, incluso en el caso de una visión furtiva del objeto.

Adicionalmente, las transformaciones intencionales solo pueden dirigirse exclusivamente a todo aquello que es observable por el sujeto, o que observa de manera cuasi- instantánea.

Se caracterizan fundamentalmente, porque solo pueden ser efectuadas una después de la otra. Así mismo, estas representaciones, resultan ser muy sensibles al número de elementos que se desea integrar.

Sumado a esto, existen algunas actividades cognitivas ligadas a la Semiosis, las cuales resulta pertinente traerlas a colación.

3.1.3 ACTIVIDADES COGNITIVAS LIGADAS A LA SEMIOSIS.

Existen tres actividades cognitivas que estánestrechamente relacionadas con laSemiosis:

1. **La formación de representaciones en un registro semiótico particular.**

En este caso para expresar una representación mental, o bien para ¨evocar¨ un objeto real. Para Duval (1999), esta formación implica siempre una selección en el conjuntode los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se ¨quiere¨ representar.

Las otras dos actividades (tratamiento y conversión) según el autor, están relacionadas con la propiedad fundamental de las representaciones semióticas, su Transformabilidad.

- **Transformabilidad**

La Transformabilidad, es la actividad que permite transformar una representación en otras representaciones que conserven el contenido completo de la representación inicial o en su defecto una parte de su contenido.

2. **Tratamiento**.

El tratamiento es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la seria de las transformaciones afectadas O sea, el tratamiento es una transformación de la representación al interior de un sistema, o la trasformación estricta interna de un registro, ya sea esta, de escritura, simbólica, de letras, o de números.Se sigue entonces, que todo tratamiento depende del funcionamiento del registro de representación que se considere. En conclusión, el tratamiento es la transformación de una representación inicial en otra terminal concerniente ya sea a una cuestión, a un problema, o una necesidad. Más concretamente, el tratamiento se realiza cuando se efectúan conversiones al interior de un mismo registro de representación semiótica. Un ejemplo de ello se puede observar al formular de dos maneras diferentes una proposición ambas en lenguaje natural; o la realización de un cálculo algebraico, como $n(n+1)=n^2+n$.

3. **Conversión**

La conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. Específicamente, la conversión es una transformación externa, referente al registro inicial, o de partida. En otras palabras, la transformación de conversión queda determinada cuando el sujeto realiza la transformación entres dos registros semióticos diferentes. Por ejemplo, transformar una relación escrita en lenguaje natural, como ¨$n\ es\ un\ numero\ positivo$¨ en una relación expresada en lenguaje algebraico, como ¨$n>0$¨
Ahora véanse otros ejemplos para complementar lo planteado anteriormente:

Considérese el siguiente registro semiótico 1. El lenguaje natural. Y considérese las siguientes representaciones:

- Representación A: La mitad.
- Representación B: Una de dos
- Representación C: Un medio.

Este es un ejemplo de una transformación de tratamiento. Ahora véase el siguiente ejemplo relativo a una transformación de conversión:

- Registro semiótico 2. Lenguaje aritmético.

- Representación A: $\frac{1}{2}$ (fraccionaria)
- Representación B: 0.50 (Decimal)
- Representación C: 5×10^{-1} (Exponencial)

Registro semiótico 3: lenguaje algebraico.

- Representación A: $\{x \in Q^{+} \,/\, 2x - 1 = 0\}$

Representación B: $y = f(x): x \rightarrow \frac{x}{2}$

Seguidamente, la conversión puede entenderse como el proceso mediante el cual se hace la representación de un registro inicial en un nuevo registro, pero diferente al inicial. Por ejemplo, llamando c a la suma de dos números a y b como registro inicial, puede hallarse un nuevo registro representado mediante la expresión $a + b,$ en este caso la última expresión resulta ser una representación distinta a la representación establecida en el registro inicial.O también, dada una ecuación lineal en dos variables (registro algebraico), al efectuar una transformación de dicha ecuación se obtiene como resultado una función lineal en el plano cartesiano.

Sin embargo, el proceso de conversión requiere que se establezca la diferencia entre el sentido y la referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que ésta representa. Ya que según el autor, si no se establece o se percibe esta diferencia, la actividad de conversión resulta imposible o incomprensible. Un ejemplo de ello, se ilustra a continuación:

Con frecuencia se puede encontrar que los alumnos que llegan al grado decimo, no saben operar cálculos numéricos. El fracaso de tal evento, está sujeto no a la actividad de tratamiento, sino a la actividad de conversión. Pues aunque los estudiantes sepanefectuar la adición de dos números en su escritura decimal o en su escritura fraccionaria, existen algunos alumnos que no se les ocurre pensar en la posibilidad de convertir la escritura decimal de un numero en su escritura fraccionaria, y recíprocamente. Fracasando así en el proceso, cuando esto es completamente necesario para el desarrollo de un cálculo.

Ahora bien, hasta este punto los dos autores validan los procesos de tratamiento y conversión dentro del desarrollo de la actividad matemática misma. No obstante, Rojas (2009) considera que desde la propuesta hecha por Duval (1999), no se puede concluir que los problemas del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas están resueltos, posiblemente, esta problemática aún permanece intacta debido, entre otras razones, a que la formulación hasta aquí presentada, lleva al parecer a lo que se conoce como una ¨paradoja cognitiva¨ la cual según Rojas (2009)fue planteada por DUVAL a través de la siguiente pregunta:

¿Cómo puede aprender un estudiante a no confundir un objeto matemático con la representación particular que le da acceso (por ejemplo, un número y su escritura, una figura y la situación representada, un grafo y la función,…) si para acceder a los objetos representados no hay más que representaciones semióticas para manipular?

Así, en un trabajo reciente (Rojas)ha puesto de manifiesto que las transformaciones de tratamiento pueden ser tan complejas como las de conversión, y por tanto, ser fuente de dificultades en los procesos de comprensión de la matemática escolar. Así, Rojas (2009) plantea que si bien muchos estudiantes de último grado de educación básica y media (15-17 años) reconocen que la expresión algebraica $(n-1)+n+(n+1)$, que representa o puede ser interpretada como la suma de tres números enteros consecutivos, y la expresión $3n$, que representa o puede ser interpretada como el triple de un numero entero, son expresiones equivalentes en tanto pueden usarse propiedades del sistema de los números enteros para probar que en efecto se cumple la igualdad, es decir, que:

$$(n-1)+n+(n+1)=3n$$

Para todo numero entero n.

Sin embargo, lo planteado anteriormente no garantiza de ante mano que los estudiantes reconozcan, por ejemplo, que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se pueda interpretar sin dificultad como el triple de un número, en tanto dicha equivalencia sintáctica de las expresiones no siempre posibilita que el educando puedan efectuar un proceso idóneo de articulación de las interpretaciones o significados asignados a cada una de las anteriores expresiones y puedan reconocer una equivalencia semántica. En consecuencia, la problemática ligada al significado de los objetos matemáticos, los procesos de representación y los procesos de aprendizaje, continúan siendo temas importantes, en relación con el aprendizaje de la matemática escolar.

En relación con lo anterior, Duval (1999) afirma que la transformación de tratamiento depende exclusivamente de las reglas de funcionamiento que permiten trasformar expresiones al interior de un mismo registro dado que solo se moviliza un solo registro de representación. O sea, para trasformar una expresión en un registro de representación particular, basta con conocer los elementos que permitan manipular tales expresiones, a saber (propiedades, axiomas, teoremas, etc.). Por ejemplo una ecuación lineal en las variables x e y se puede transformar en la ecuación punto pendiente relativa a la función lineal, una vez que sea posible efectuar las operaciones necesarias para tal fin.

En contraposición a lo anterior, Rojas (2009) afirma que a pesar de que el estudiante tenga la capacidad suficiente de efectuar operaciones en un mismo registro de representación para trasformar expresiones previamente establecidas. No hay garantías que conlleven a afirmar que aunque este proceso se efectué de forma diáfana, el educando pueda interpretar el significado real de las expresiones con las que se está trabajando, como se evidencio en el ejemplo descrito anteriormente, concerniente a la suma de tres enteros consecutivos.

En conclusión, aunque dichos autores coinciden en diversas posiciones relativas a los registros semióticos de representación. También controvierten en algunos elementos puntuales relativos a dicha temática. Fundamentalmente, en lo relacionado con lapluralidad de los registros de representación, así como también, en lo concerniente a la transformación de tratamiento y a los elementos que giran en torno a este proceso.

En síntesis

DUVAL	ROJAS
Los procesos tratamiento y conversión son fundamentales para solucionar los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	Aunque los procesos tratamiento y conversión son esenciales en matemáticas, estos no solucionan la problemática inmersa en la enseñanza delas matemáticas.
El tratamiento es una operación simple que se efectúa al interior de un mismo registro.	El tratamiento es una operación que puede ser tan compleja como la operación de conversión.
El tratamiento depende netamente de las reglas de funcionamiento de cada registro.	No es suficiente con conocer las reglas de funcionamiento de cada registro, para comprender el significado del concepto con el cual se está trabajando.
La pluralidad de registros de representación permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto.	Puede ser suficiente el uso de un sistema de representación como el lenguaje natural (oral o escrito) para efectos de la comunicación, de tipo general.

Ahora bien, sentando una postura personal en relación a los planteamientos de cada autor, se considera esencialmente importante que para efectos de este trabajo de investigación, lo planteado por Duval (1999) se acerca significativamente al objetivo de ese proyecto. Pues se quiere analizar las dificultades en los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Julumito, frente al manejo de los registros de representación de la función afín, a partir de las transformaciones de tratamiento y conversión. De igual forma, aunque resulta importante lo planteado por Rojas (2009), en relación a que las transformaciones de tratamiento y conversión no son suficientes para comprender el significado real de un objeto matemático, se considera que esta afirmación posee un sentido macro, el cual involucra áreas como la sicología, la filosofía, etc., que se salen del campo de estudio de las matemáticas y por ende de este proyecto de investigación.

Ahora véanse algunas características de las transformaciones tratamiento y conversión, y otras teorías referidas al tema, que se desprenden exclusivamente de la teoría de Duvalista.

- **Características fundamentales de los procesos tratamiento y conversión.**

1. La ocurrencia de los procesos tratamiento y conversión no se da de manera espontánea. Esto debido a las complicaciones que pueden existir al pasar de una representación a otra.
2. El tratamiento de una representación semiótica corresponde a su expansión informacional, esto es particularmente claro en el caso del lenguaje.
3. La conversión es una transformación externa relativa al registro de representación de partida. La ilustración es la puesta en correspondencia de una palabra, una frase, un enunciado, con una figura o con uno de sus elementos.
4. La conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos
5. El tratamiento de una representación semiótica corresponde a una expansión informacional.
6. Las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en que se efectué el cambio de registro.

3.1.4PROBLEMAS ESPECÍFICOS A LOS CAMBIOS DE REGISTRO

Según Duval (1999) los incesantes vaivenes entre frases en lenguaje natural, formulas literales, expresiones en lenguaje formal, figuras geométricas o gráficos cartesianos que se pueden encontrar en los textos escolares de matemáticas, determinan la importancia de los cambios de registro para recalcar la frecuencia con que la actividad cognitiva de conversión es necesaria en al menos unas disciplinas.

Con esto, el autor resalta que se recurre a la actividad cognitiva de conversión de las representaciones como si fuera una actividad natural o adquirida desde los primeros grados de la enseñanza por todos los alumnos; como si fuera una actividad sobre la cual los aprendizajes de tratamiento y los aprendizajes conceptuales pudieranapoyarse. Se afirma entonces, que en general, la actividad de conversión es unaactividad menos inmediata de lo que se podría llegar a creer. Como prueba de ello, persiste la necesidad de analizar la manera en que puede darse la puesta en correspondencia sobre la cual reposa toda conversión de representación.

Sumado a esto, se tiene que la puesta en correspondencia de dos tipos de representación que pertenecen a distintos registros, se puede establecer de manera local, mediante una correspondencia asociativa que involucra las unidades significantes elementales constituidas de cada uno de estos registros.

Ahora, dado que el cambio de registroses una operación ineludibleque permite afianzar la comprensiónde contenidos estructurados a través de la combinación de expresiones en lengua natural, lenguaje algebraico, figuras geométricas, entre otras. El autor afirma, que se recurre a la actividad cognitiva de conversión de las representaciones,como si fuera una actividad natural o adquirida, desde los primeros grados de la enseñanza por todos los estudiantes.
Simultáneamente Duval (1999) afirma que los procesos de tratamiento y conversión no se dan de manera espontánea, debido a la congruencia o no congruencia de las representaciones. Por tanto, el paso de una representación a otra es inmediato, si las representaciones involucradas (registro de partida y registro de llegada) son congruentes. Pero si no lo son, dicho proceso no es tan inmediato.

3.1.5 REPRESENTACIONES CONGRUENTES Y NO CONGRUENTES

- **Representaciones congruentes**

Se llaman representaciones congruentes, a aquellas representaciones que satisfacen las siguientes condiciones:

- Existe correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen.

La correspondencia semántica se da cuando a cada unidad significante simple de una representación, le es asociada una unidad significante elemental. Entendiéndose por unidad significante elemental, a toda unidad que depende del **léxico** del registro.

- Igual orden posible de aprehensión de unidades en las dos representaciones.

- Convierte una unidad significante en la representación de partida, en una sola unidad significante en la representación de llegada.

Ejemplos:

a) Considérese la siguiente expresión en lenguaje natural:

´´*El conjunto de puntos cuya ordenada es superior a la abscisa*``

En este caso, para llevar a cabo el proceso de conversión solo basta establecer una correspondencia término a término entre las unidadessignificantesrespectivas, para obtener la expresión representativa en lenguaje simbólico:

$$y > x$$

Para este caso, es posible encontrar la expresión inicial del registro de partida.

b) Sea la función lineal $y = 2x$. En este caso se tiene una recta cuya pendiente $m = 2$, indica que la curva se traza desde el tercer cuadrante al primercuadrante. Por tanto, dada la relación existente entre la gráfica y el signo de supendiente (positivo) se determina que ésta es de naturaleza creciente. Ahora, supóngase que se formula una pregunta a un grupo de estudiantes, relacionada con la monotonía de la función. Por supuesto, la gran mayoría de los educandos, dará una respuesta en favor de una monotonía creciente. Ya que la correspondenciatérmino a término entre las unidades significantes, así como también, la congruencia entre el esquema de la curva y a la noción intuitiva de crecimiento ligada a la postura de la curva, permiten establecer este tipo de relación

- **Representaciones no congruentes**

Se llaman representaciones no congruentes, aquellas representaciones que no son congruentes. Es decir, aquellas que no satisfacen alguna de las condiciones ligadas a la congruencia.

Ejemplos:
Dada la expresión:

¨*El conjunto de puntos que tengan una abscisa positiva*¨

$$x > 0$$

Dado que en la escritura algebraica no está inmersa una unidad significante correspondiente a la expresión `` positivo`` se tiene entonces que para sopesar la ausencia de dicha unidad, se hace necesario recurrir a la paráfrasis ¨ > 0¨ como la combinación de dos unidades significantes.

a) Considéresela función dada por la ecuación $y = 2x + 5$. Si se le solicita al estudiante graficar dicha función a partir de la función lineal $y = 2x$, se podrá notar que dicho proceso resulta ser complejo y engorroso para algunos de ellos. Dado que al sumarle 5a la ecuación $y = 2x$, existe la tendencia a pensar que la curva representativa de la misma, debe estar trasladada cinco unidades hacia la derecha del eje x y no hacia arriba. Ya que los estudiantes relacionan el signo $+$ como una operación que debe efectuarse a lo largo del eje positivo de las x.

En resumen, Duval (1999) plantea que la distribución de los aciertos y los fracasos que se observan en los cuestionarios de evaluación, permiten verificar que la congruencia o la no congruencia corresponden a factores muy fuertes para el acierto o el fracaso en todas las preguntas que implican un cambio de sistema semiótico de representación.

Por otro lado, existen dos tipos de registros que son importantes en matemáticas; los registros discursivos y los no discursivos

3.1.6 REGISTROS DISCURSIVOS Y NO DISCURSIVOS

- **Registros discursivos**

Como se dijo anteriormente los registros discursivos son aquellos registros cuyo elemento fundamental es el lenguaje. Estos registros permiten la formulación de proposiciones y la modificación de expresiones.En este tipo de registros, el carácter de las proposiciones es de verdad o de falsedad, y pueden ser derivables unas de otras.

Dentro de los registros discursivos se encuentra:

- **La Representación verbal**

El objeto fundamental de la representación verbal es el lenguaje. Este es esencial para comunicar soluciones a problemas planteados, para la aplicación de fórmulas o algoritmos que permiten darles solución, etc.

- **Registros no discursivos**

Como ya se había dicho anteriormente, los registros no discursivos sonaquellos en los cuales se exhiben formas o configuraciones de formas. Así, los registros no discursivos permiten visualizar lo que no ha sido dado en forma visible.

Un ejemplo de un registro no discursivo es:

- **Representación gráfica**

Esta representación se fundamenta en la tabulación. Este proceso se refiere a la asignación de valores que generalmente se hace a la variable independiente, para encontrar el respectivo valor de la variable dependiente. Posteriormente al ubicar los puntos en el plano cartesiano, y al unirlos mediante una línea suave se encuentra la curva representativa de dicha tabulación.

En síntesis, existen otros tipos de representaciones que son esenciales para establecer relaciones entre objetos matemáticos, a saber:

- **Representación simbólica**

Ésta se fundamenta en el empleo de signos para representar ecuaciones, operaciones y expresiones canónicas.

Ejemplo:

$$ax \pm b = c$$

- **Representación tecnología**

Se caracteriza fundamentalmente por la utilización de software, u otras herramientas tecnológicas las cuales ayudan a la aprehensión de conceptos matemáticos.

A continuación se hace la presentación de la función afín, según el textoserie MATEMÁTICA PROGRESIVA (Londoño & Bedoya) y ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA (G.Zill & M. Dewar).

3.2 LA FUNCIÓN AFIN

Una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ con $A, B, C \in R$,$A \neq 0$,x e y variables se denomina ecuación lineal.

Al despejar la variable y tenemos una función afín:

$$y = \frac{-A}{B}\ x\ - \frac{C}{B}$$

Se identifican los coeficientes $\frac{-A}{B} = m$ y $\frac{-C}{D} = b$.

Luego la función afín se puede representar como $y = mx + b$. En consecuencia se tiene la siguiente definición.

- **Definición:**

Una función afín es una expresión de la forma: $f(x) = mx + b$, con m y $b\ constantes, m \neq 0$, y donde:

$-\ m$Representa la pendiente de la curva.

$-\ b$ El intercepto o punto de corte con el eje Y.

$-\ x$ La variable independiente.

$-\ y$ La variable dependiente.

- **Características fundamentales de la función afín.**

La función afín posee las siguientes características fundamentales:

- Su representación gráfica en el plano cartesiano es una línea recta.
- Es una función polinómica.
- Es una función inyectiva.
- Su inversa está dada por la expresión: $f(x)^{-1} = \frac{x-b}{m}$. con $m \neq 0$
- Se expresar como un conjunto de parejas ordenadas dado por:

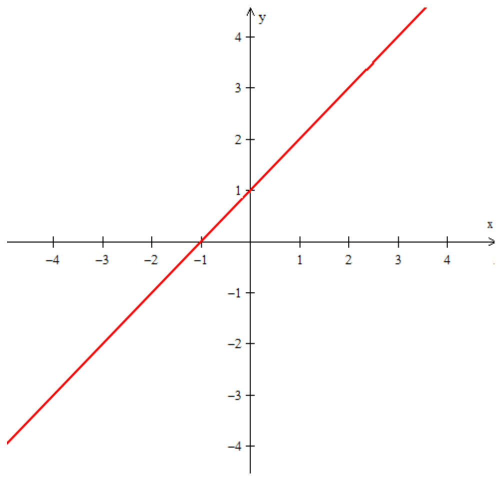
$$L = \{(x, y): y = mx + b, m, b, constantes, x\ real\}$$

- **Naturaleza de la recta**

La naturaleza de la curva (recta) de una función afín, queda determinada por el signo de su pendiente, es decir:

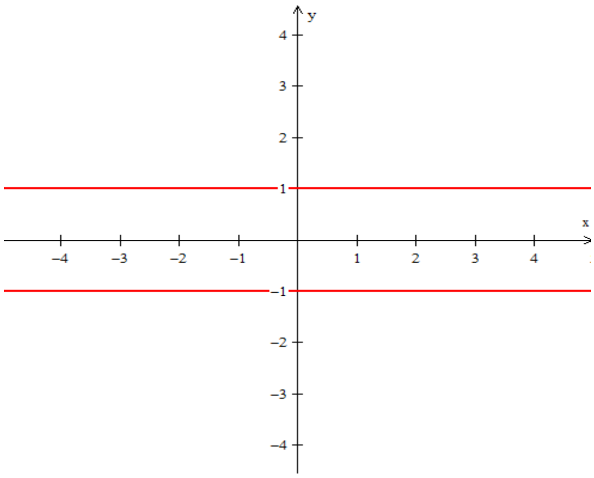
- Si $m > 0$ (positiva) la recta es creciente. Su curva se traza desde el tercer cuadrante al primer cuadrante, cortando el eje X en aquellos valores para los cuales $y = 0$, y al eje Yen la coordenada $y = b$.

Gráficamente:



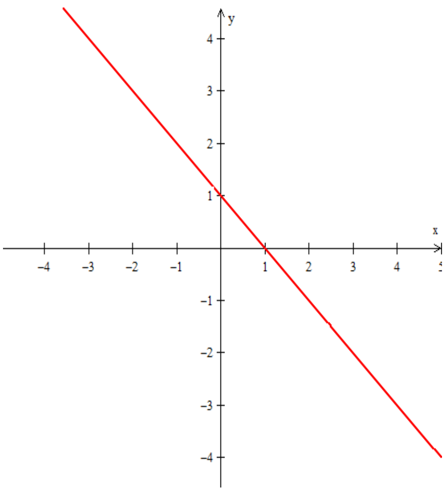
- Si $m = 0$la recta es pararla al eje x. Su curva está ubicada b unidades por encima del eje X, ob unidades por debajo del mismo eje, según sea b positivo o negativo.

Gráficamente:



- Si $m < 0$ (negativa) la recta es decreciente. Su curva se traza desde el cuarto cuadrante al primer cuadrante, cortando el eje X en aquellos valores para los cuales $y = 0$, y al eje Y en la coordenada $y = b$.

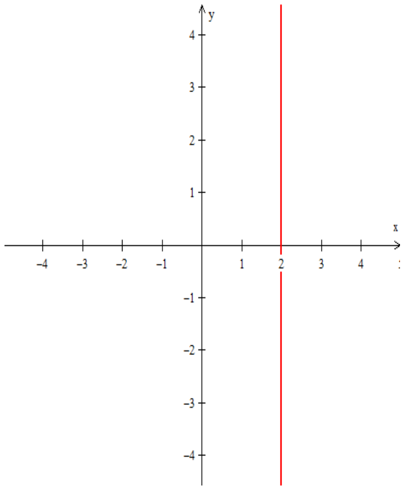
Gráficamente:



- **Observación.**

En trigonometría se dice que una recta es paralela al eje Y (recta vertical) si $m = 90^0$

Gráficamente:



3.2.1 PENDIENTE DE UNA RECTA

- **Definición:**

Se llama pendiente de una recta$L$, a la tangente del ángulo formado por la recta L, y el eje positivo de las X. Simbólicamente se representa por: $m = tan\phi$

- **Teorema**

La pendiente m de una recta que pasa por los puntos (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2) está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ Con } x_2 \neq x_1$$

Demostración:

Supongamos que los puntos (x_1 , y_1) y (x_2, y_2) están sobre la grafica de la función afín:

$$L = \{(x, y): y = mx + b, m \; y \; b \; constantes, x \; real\}$$

Puesto que $(x_1, y_1) \in L$, entonces al remplazar x por x_1 e y por $y_1$en la ecuación $y = mx + b$se debe cumplir la igualdad. Esto es:

$$y_1 = mx_1 + b \qquad (1)$$

Similarmente, si $(x_2, y_2) \in L$, entoncs:

$$y_2 = mx_2 + b \qquad (2)$$

Ahora, restando ordenadamente de la relación (2) la relación (1) se tiene:

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + b) - (mx_1 + b)$$

$$= mx_2 + b - mx_1 - b$$

$$= mx_2 - mx_1 = m(x_2 - x_1)$$

Esto es: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por $x_2 - x_1$, con la condición de que $x_2 \neq x_{1,}$se obtiene la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(2,3) \; y \; (1,2)$.

Solución.

La pendiente m de esta recta según el teorema está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En este caso, el punto $(x_1, y_1) = (2,3)$ y el punto $(x_2, y_2) = (1,2)$. Luego $x_1 = 2$, $y_1 = 3, x_2 = 1, y_2 = 2$, y aplicando la ecuación de la pendiente se obtiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{1-2} = 1$$

3.2.2 ECUACIONES ALTERNATIVAS DE UNA RECTA.

- **Ecuación punto pendiente.**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplos

a) Halle una ecuación de la recta con pendiente 4 que pase por el punto ($\frac{-1}{2}$, 2).

Solución.

Siendo $m = 4, x_1 = -\frac{1}{2}$ y $y_1 = 2,$ obtenemos de la ecuación punto pendiente la siguiente expresión:

$$y - 2 = 4[x - \left(-\frac{1}{2}\right)]$$

Simplificando nos da $y - 2 = 4(x + \frac{1}{2})$ o $y = 4x + 4$.

b) Halle una ecuación de la recta que pase por los puntos $(4,3) y\ (-2,5)$.

Solución.

Primero calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos.

$$m = \frac{5-3}{-2-4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Luego, según la ecuación punto pendiente con $x_1 = 4\ y\ y_1 = 3$ tenemos:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$$

$$3y - 9 = -x + 4$$

$$x + 3y - 13 = 0$$

O despejando y. $\quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.

- **Observación:**

Se obtendrá la misma ecuación de la recta, si las coordenadas $x\ e\ y$ del punto $(-2{,}5)$ se substituyen por $x_1\ \ y\ \ y_1$ en la ecuación punto pendiente.

- **Rectas horizontales y verticales.**

  - Una ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (a, b) es $x = a$.
  - Una ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto (a, b) es $y = b$.

- **Rectas paralelas.**

Dos rectas l_1 y l_2 no verticales con pendientes $m_1\ y\ m_2$ son paralelas si y solo si

$$m_1 = m_2$$

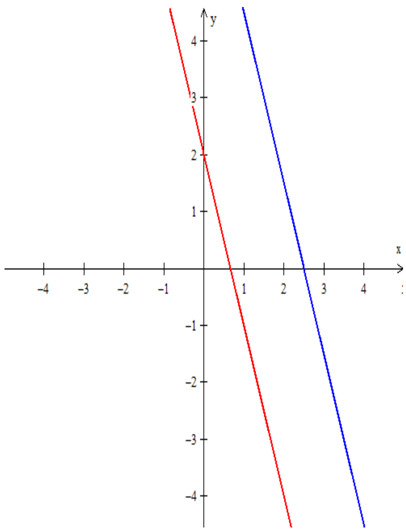
Ejemplo.

Las ecuaciones $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ pueden escribirse en la forma pendiente intercepto.

$$y = -3x + 2\text{e}y = -3x + \frac{15}{2}$$

Respectivamente. Se observa que la pendiente de cada recta es -3. Por tanto las rectas dadas son paralelas.

Esta situación se puede apreciar en la siguiente gráfica:



- **Rectas perpendiculares.**

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares, si y solo si $m_1 m_2 = -1$, esto es, sus pendientes son reciprocas negativas:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \text{o} m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También una recta horizontal (pendiente igual 0)es perpendicular a una recta vertical (pendiente no definida).

Ejemplo.

Halle la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ que es perpendicular a la recta $4x - 3y + 6 = 0$.

$\boldsymbol{Solución}$:

´´Expresemos la ecuación dada en la forma pendiente intercepto``

$$4x - 3y + 6 = 0$$

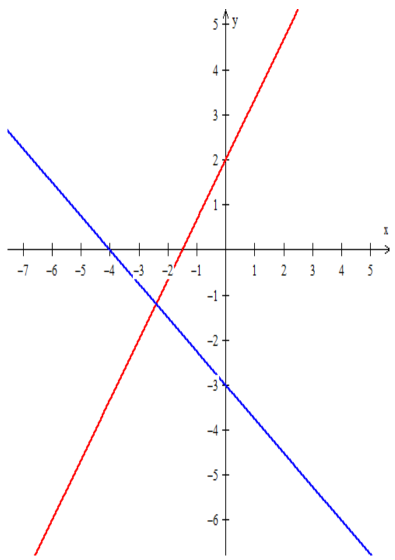
$$3y = 4x + 6$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2$$

Ahora, según la ecuación pendiente intercepto, la pendiente de esta recta es $\frac{4}{3}$. Así, la pendiente de una recta perpendicular a ella será igual al reciproco negativo de $\frac{4}{3}$, esto es, $-\frac{3}{4}$. Por lo tanto la recta buscada tiene pendiente $-\frac{3}{4}$ e intercepto y en -3. Su ecuación es:

$$y = -\frac{3}{4}x - 3.$$

Gráficamente esta situación se puede apreciar en la siguiente figura



3.2.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2

Un sistema de ecuaciones lineales 2×2, es un sistema de la forma:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A^{\prime}x + B^{\prime}y + C^{`} = 0 \end{cases}$$

Donde $A.B.C.A^{`}, B^{`}\ y\ C^{`}$ son constantes reales, y $A, B, A^{`}\ y\ B^{`}$ no son cero simultáneamente.

- **Solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2**

La solución de un sistema lineal 2×2 està dado por el par ordenado(x_1, y_1), que hace que las ecuaciones involucradas en el sistema se satisfaga simultáneamente. Geométricamente, (x_1, y_1) representa el punto de intersección de las rectas que representan, si ellas no son paralelas.

Para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, existen algunos métodos algebraicos, los cuales se describen a continuación:

Métodos de solución de sistemas lineales 2×2

- **Método de eliminación**

Consiste en eliminar una de las variables, mediante operaciones de adición o sustracción, a fin de obtener una sola ecuación con una variable y de esta manera calcular el valor de ella.

- **Método de sustitución.**

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de sustitución, se procede de la siguiente forma:

1. Se despeja una variable en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye o remplaza esta variable en la otra ecuación.

3. Se soluciona la ecuación.
4. Se remplaza el valor obtenido en el paso 3, en una de las ecuaciones originales.
5. Se comprueban los valores obtenidos remplazándolos en las ecuaciones originales.

- **Método de igualación**

Para resolver un sistema lineal 2×2, se procede así:

1. Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones.
2. Se igualan los valores y se soluciona la ecuación.
3. Se remplaza el valor obtenido enuna de las ecuaciones, y se halla el otro valor.
4. Se comprueba o verifica la respectiva respuesta.

- **Método gráfico**

Para solucionar sistemas de ecuaciones lineales mediante el método gráfico, se procede de la siguiente forma:

1. Expresar ambas ecuaciones en la forma $y = mx + b$.
2. Tabular las dos funciones y graficarlas en el mismo plano cartesiano.
3. Determinar el punto de intersección de las dos rectas.
4. El punto donde se intersecan las dos rectas, es la respectiva solución al sistema lineal propuesto.

3.3 METODOLOGÍAPARA LA INVESTIGACIÓN.

La función lineal es un concepto que reúne en su estructura muchas nociones matemáticas fundamentales para su comprensión. Por ende, y dado que lo se busca esencialmente es identificar cuáles son las dificultades más frecuentes en los estudiantes al operar con registros de representación semiótica de la función lineal, se da a esta investigación un enfoque cualitativo, en aras de realizar una descripción general de tales deficiencias, presentes en los siguientes estudiantes:

No	NOMBRES	**APELLIDOS**
1	Karol Viviana	Iles Gaviria
2	Lidy Vanesa	Rivera Chocue
3	Diana Marcela	Rivera Pisamina
4	María de los Ángeles	Rivera Pisamina
5	Gloria Milena	Chamizo Medina
6	Francy Lorena	Chantre Mariaca
7	Roxana	Macias
8	Sandra	Rivera

Se hace necesario entonces, indagar a cerca de algunas nociones esenciales relacionadas con una investigación cualitativa.

3.4 INVESTIGACIÓN CUALITATIVA.

Antes de referirse a cualquier concepto ligado a la investigación cualitativa, es importante conocer primeramente que significa investigar.

- **Investigación**

Es el proceso metódico y sistemático dirigido a la solución de problemas o preguntas científicas, mediante la producción de nuevos conocimientos, los cuales constituyen la solución o respuesta a talesinterrogantes. (Palacios).

Dentro de una investigación pueden encontrarse dos tipos de metodologías. La metodología cualitativa y la metodología cuantitativa.

- **Metodología cualitativa**

La metodología o investigación cualitativa,es aquella en la cual se enfatiza que la producción de conocimientos está supeditada a la interacción que se pueda establecer entre un individuo y su entorno. Esta investigación es inductiva, es decir, que a partir de premisas generales o supuestos establecidos se pueden obtener conclusiones particulares. Análogamente, posee una perspectiva holística, esto significa que la investigación considera el fenómeno en cuestión, como un todo.

Otras características de dicha metodología, es que trata de estudios en pequeña escala que solo se representan a sí mismos. Igualmente, Hace énfasis en la validez de las investigaciones a través de la proximidad a la realidad empírica que brinda la metodología, y no suele probar teorías o hipótesis. Es principalmente un método de generar teorías o hipótesis. No tiene reglas de procedimiento, el método de recogida de datos no se especifica previamente. Las variables no quedan definidas operativamente ni suelen ser susceptibles a medición, y los investigadores cualitativos participan de la investigación, a través de la interacción con los sujetos que estudian el instrumento de medida.

- **Metodología cuantitativa**

La metodología o investigación cuantitativa, es aquella que permite examinar los datos de manera científica o específicamente en forma numérica. Este proceso se desarrolla generalmente, mediante el empleo de conceptos estadísticos.

Adicionalmente, y para la existencia de una metodologíacuantitativa, es necesario que entre los elementos del problema de investigación, se pueda establecer una relación cuya naturaleza se pueda representar a través de algún modelo matemático, ya sea este, lineal o de otra índole. Esto significa, claridad entre los elementos de investigación que constituyen el problema.

3.4.1 MÉTODOS EMPLEADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Para la ejecución de una investigación es importante determinar el método (o métodos) a utilizar durante su desarrollo, ya que existen diversas técnicas con los cuales se pueden obtener resultados y conclusiones referidas a una problemática específica, la cual está siendo objeto de investigación.

El empleo del método está sujeto a diversas característicasinmersas en la investigación que se va a realizar. Es decir, en el objeto a investigar. E ha aquí algunas técnicassignificativasque suelen ser utilizados en muchas investigacionescientíficas, y culturales. Pero especialmente en investigaciones académicas.

- **Método de la observación no estructurada**

Radica en la observación hecha por el investigador a la comunidad que se va a investigar. Este proceso está supeditado por ciertos niveles de observación que según Bachelard (2008), no son más que una vigilancia epistemológica, la cual queda determinada por los siguientes aspectos.

En primer lugar, según el texto Métodos de Investigación en Educación(Restrepo & Tabares Idagarra)**,** la vigilancia directa que se ejerce sobre el objeto observado la cual debe ser identificada tanto en su unidad como en los elementos que los componen. En segundo lugar, la vigilancia refleja que es el cuidado que debe mantener el observador sobre su propia acción; cómo puede ser corregida o reorientada para adquirir una información pertinente. Análogamente, la vigilancia reduplicada la cual obliga al observador a revisar su método de trabajo y de su propia observación. Y por último, el observador debe pensar el tema-problema y en cierto modo construirlo y tener claro algunos aspectos como por ejemplo:

1. Observación del lugar donde se aplicará la observación.
2. Cómo acceder y penetrar al lugar.
3. Promedio de personas que entran y salen del lugar.
4. Composición de los visitantes.
5. Acciones que realizan.
6. Objetos, discursos y significados que se implementan en la comunidad.

- **La observación participante**

Se caracteriza por que se tiene una participación directa en la cotidianidad de la comunidad. Aquí se hacen observaciones referidas al conjunto de actividades y a las interacciones socioculturales de los residentes. Para obteneruna visión inmersa en la observación participante, y comprender los significado de las costumbres y prácticas de la misma manera que las comprenden sus habitantes.

Es necesario que el investigador sea aceptado por la comunidad a investigar. Esto es posible siempre y cuando se susciten algunos factores, tales como:

- Aceptación o rechazo,
- Actitudes y apariencias.

- **Método etnográfico**

El método etnográfico es una técnica que permite estudiar un grupo social analizando el comportamiento individual y colectivo de sus individuos, con el propósito de inferir y describir, características propias de su cultura. Por ejemplo, sus problemáticas, su filosófica, sus creencias, sus fortalezas, sus debilidades, su perspectiva, etc.

En el contexto educativo, la categoría del método sobresale predominantemente al permitir laidentificación, el análisis y la solución de un problema establecido. En este campo esta metodología recibe el nombre de etnografía educativa.

Por otra parte, el método etnográfico direcciona la investigación teniendo en cuenta que el objeto de estudio es abordado para facilitar la comprensión e interpretación de una realidad, con el objetivo de obtener argumentos teóricos, más que para encontrar soluciones a diversos problemas.Simultáneamente, analiza e interpreta los resultados obtenidos derivadosde un trabajo de campo, en donde la información verbal y no verbal está sujeta a la experiencia del protagonista del fenómeno, para entender el comportamiento del o de los actores involucrados.

3.5 PROCESO DE EJECUCIÓN

En el proceso de ejecución se hace una descripción detallada de cada una de las actividades a implementar en las sesiones estipuladas para el desarrollo de la práctica pedagógica. Estas actividades se diseñaron para cumplir con los objetivos establecidos para este trabajo de investigación. Asimismo, bajo la perspectiva idealista de incentivar la participación activa de los estudiantes en cada sesión. Haciendo de éstas, clases másdinámicasen las que predomine la interacción docente-estudiante.

Análogamente, con el propósito de acercar al educando al estudio de la función lineal y a sus diversas formas de representación, buscando consigo desarrollar habilidades en los escolares, de tal manera que puedan efectuar tratamientos y conversiones entre tales representaciones de forma rápida y espontánea.

Cada actividadestá subordinada por la teoría Duvalistaconcerniente a registros de representación. Inicialmente se elaboró una prueba diagnóstico con el fin de conocer el nivel académico de los estudiantes al iniciar el proceso, y posteriormente, se elaboraron 9 actividades en las que se estudió cada una de las temáticas relativas a la función afín.
Igualmente, para la implementación de las mismas se necesitaron 6 sesiones de clase, cuyo horario reglamentario era de 8 de la mañana a 12 del mediodía, con un descanso de 30 minutos que iniciaba a las 10 de la mañana.

- **Primera sesión:**

En la primera sesión se hizo la prueba diagnostico después de llevar a cabo un conversatorio con los estudiantes, en donde se conocieron algunos aspectos importantes tales como: Nombre del colegial, apellido, edad, expectativas, entre otros.

- **Segunda, tercera, cuarta y quinta sesión**

En cada una de estas clases se desarrollaron dos actividadescon un tiempo establecido de 45 minutos para su solución.

- **Sexta sesión.**

En esta sesión se desarrolló una actividad general relativa a las actividades anteriores, la cual dio cuenta de la efectividad del proceso a lo largo de su ejecución.

A continuación se hace la descripción de las actividades implementadas,y del propósito fundamental para el cual fueron diseñadas:

- **Prueba diagnóstico**

Como se dijo anteriormente, la prueba diagnostico permite conocer el nivel académico de los estudiantes al iniciar el proceso, para así, identificar las primeras dificultades que presentan los educandos al trabajar con registros de representación, y por tanto, analizar y clasificar el tipo de dificultad más común subyacente en los escolares.

Esta prueba se desarrolló en el segundo bloque de la primera sesión de clases, es decir entre las 10: 30 de la mañana y las 12 del mediodía, y tuvo una duración de hora y media; mientras que para las demás actividades, se estipulo para su consecución un tiempo máximo de 45 minutos.

- **Primera actividad**

Con esta actividad se buscaque elestudiante identifique y opere números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales. De igual forma, que tenga un acercamiento alconcepto de función y a sus componentes. Simultáneamente, que identifique el dominio y el rango de algunas funciones expresadas mediante diagramas sagitales, y de algunas funciones lineales representadas geométricamente en el plano cartesiano

- **Segunda actividad**

Esta actividad está dirigida a la manipulación de registros de representación de funciones afín, a saber, registro algebraico, registro tabular y el registro geométrico, pero básicamente, a la conversión entre registros de representación, es decir, al paso de un registro a otro. Por último, a identificar la pendiente y los interceptos de una recta, a partir de una ecuación lineal en dos variables.

- **Tercera actividad**

Con esta actividad se busca estudiar y analizar el comportamiento de una función lineal de la forma $y = mx$ a partir del signo de su pendiente. Por tanto, se trabajara con funciones lineales cuya pendiente es positiva o negativa. Adicionalmente,analizar el comportamiento de funciones afín de la forma $y = mx + b$, teniendo en cuenta tanto el signo de la pendiente, como el signo del término independiente, para así analizar las modificaciones que al respecto se obtienen.Finalmente, estudiar el comportamiento de algunas rectas cuya pendiente es igual a cero, a partir de su representación tabular.

- **Cuarta actividad.**

El objetivo de esta actividad es que el estudiante identifique analíticamente cuando dos rectas son paralelas o perpendicularesa partir de ecuaciones lineales. Análogamente, que encuentreel punto de intersección si existe, entre dos rectas representadas en un mismo plano cartesiano haciendo uso de sistemas de ecuaciones lineales. Con esto también se quiere observar la viabilidad del proceso de convertir una ecuación lineal en dos variables (registro algebraico), a una ecuación de la forma $y = mx + b$, para posteriormente tabular dicha ecuación, y asíencontrar su respectiva representación gráfica (registro geométrico).

- **Quinta actividad.**

Este ejercicio tiene como propósito fundamental,incorporar al estudio de la función afínlas ecuaciones alternativas de la recta, en particular, la ecuación punto pendiente. Es decir, con la realización de este taller se busca que el estudiante interprete y modele enunciados en lenguaje natural relativos a rectas paralelas y perpendiculares, haciendo uso de dicha ecuación.

- **Sexta actividad**

El propósito de esta actividad está dirigido a efectuar transformaciones inversas entre registros de representación. Por ejemplo entre el registro gráfico y el registroalgebraico. Es decir, dada la gráfica de una función afín, se quiere que el estudiante pueda encontrar su respectiva ecuación, a partir de los datos que se obtienen al visualizar en el plano la representación gráfica de dicha función.

- **Séptima actividad**

Esta actividad buscafundamentalmente a través de la modelación de diversos problemas y el uso de sistemas de ecuaciones, efectuar conversiones del lenguaje natural al lenguaje simbólico, con el fin de permitir la aplicación de métodos algebraicos, esencialmente, de los métodos eliminación y sustitución para encontrar su respectiva solución. Y así concluir si el sistema tiene o no tiene solución.

- **Octava actividad**

Con el desarrollo de esta actividadse buscael mismo objetivo descrito anteriormente, esta vez haciendo uso de los métodos igualación y grafico para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Adicionalmente, estudiar analíticamente la inyectividad de la función afín, y por consiguiente, la existencia de funciones inversas.

- **Novena actividad**

Con la implementación de esta actividad se culminó el procesoreferente al estudio de la función afín con estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Julumito.

El objetivo fundamental de este taller está encaminado a recopilar los puntos en los que se evidenció la mayor complejidad a la hora de encontrar su solución,brindándoleal estudiante, una oportunidad adicional de reforzar sus falencias, para así apropiarse de una mejor forma de tales temáticas. Igualmente,analizar que conceptosreferidos a la función afín tuvieron mayor aprehensión por parte de los estudiantes asistentes a cada una de las sesiones. Por último, poder analizar con mayor claridad la validez del proceso a lo largo de su ejecución.

3.6 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para el análisis de la informaciónse tendrá en cuenta un punto fundamental inmerso en el desarrollo de la investigación. Este aspecto tiene que ver con los procesossemiótica y cognición, y con la interacción entre estos. En otras palabras, con la manipulación de registros de representación y con el tratamiento yconversión entre registros.

Dado que el objeto de estudio de este trabajo de investigación es la función afín, el análisis pertinente que se debe efectuar, está sujeto a las representaciones semióticas ligadas a este concepto, las cuales se describen a continuación:

- **Representación algebraica**

Dentro de la representación algebraica se analiza la manipulación de ecuaciones lineales en dos variables para obtener función afín $y = mx + b$. Análogamente, observar el manejo de lenguaje algebraico a la hora de simbolizar enunciados expresados en lenguaje natural.

- **Representación tabular**

El aspecto central que se debe analizar en la representación tabular está ligado al manejo de las variables independiente y depende en una función afín.

- **Representación geométrica**

En la representación geométrica se analiza la capacidad y habilidad del estudiante para graficar funciones lineales, así como también, para establecer relaciones entre dos rectas representadas en un mismo plano cartesiano.

- **Representación verbal**

La representación verbal está enfocada a la interpretación de enunciados en lenguaje algebraico y a la extracción de conclusiones de representaciones graficas de funciones afín hechas en el plano cartesiano.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.

Al aplicar las actividades descritas anteriormente,y teniendo en cuenta que el propósito central de esta investigación es conocer que dificultades presentanlosestudiantes degrado decimo de la instituciónеducativa Julumitoal trabajar con registros de representación de la función lineal. Se ilustran a continuación los resultados de este proceso para su respectivo análisis, en los cuales se tendrán en cuenta las siguientes categorías:

- Aspectos evaluados.
- Número de estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad.
- Número de estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad
- Dificultad.

La última categoría (Dificultad) recae sobre el número de estudiantes que no tuvo éxito al desarrollar la actividad.

4.1 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICO.

Los resultados arrojados por la prueba diagnosticopermiten inferir que la gran mayoría de los estudiantes poseen problemasfundamentalmente al operar números enteros y fraccionarios.En lo referente al estudio de funciones, se evidencia que los escolares no distinguen una función de una relación, a partir de surepresentacióngráfica en el plano cartesiano o en un diagrama sagital, así mismo, hay total desconocimiento de los conceptos dominio y rangodeuna función.

En lo relacionado a funciones afín, se puede decir que no existe claridad del concepto, ya que ningún estudiante dio su definición exacta, aunque geométricamente, la gran mayoría no tiene dificultad en clasificar como tal, una curva representada en el plano, o las distintas relaciones que entre estas se puedan establecer. Sumado a esto, se evidencio que no hay un tratamiento acorde entre registros de representación ligados a la función afín, especialmente al pasar del registro algebraico al registro tabular y del registro algebraico al grafico o geométrico.

No obstante, Duval (1999) afirma que el primero es el tipo de conversión más fácil de efectuar entre registros de representación, pero los resultados obtenidos durante el proceso reflejan lo contrario. Así, de esta manera se evidencia que la aseveración hecha por Rojas (2009), en la que plantea que la operación de tratamiento puede ser tan compleja como la operación de conversión, es totalmente cierta, ya que se pudo constatar que la imposibilidad de efectuar operaciones de tratamiento es muy grande.

Adicionalmente, aunque algunos estudiantes conocen los elementos fundamentales de una función lineal (variable independiente, variable dependiente, pendiente e intercepto) no tienen claro cuál es el papel que desempeña cada uno de ellos a la hora de graficar este tipo de funciones.

En relación a sistemas de ecuaciones, se notó que algunos de los estudiantes habían olvidado por completo los métodos de solución de tales sistemas, optando por resolver cada ecuación de manera independiente. Otros por el contrario aunque recordaban la estructura del método a seguir, tenían dificultades al operar las ecuaciones,debido al manejo inadecuado de operaciones aritméticas y algebraicas.

Todo esto se puede evidenciar en la memoria del trabajo realizado por la estudiante Sandra Rivera, el cual se presenta en el (Anexo 4.1).Ahora se analizaran tres de los ejercicios propuestos en la prueba diagnóstico, con el ánimo de corroborar lo dicho anteriormente.

4.1.1 Ejercicio 1

Esta pregunta está enfocada al manejo de registros de representación de la función lineal. En particular, el paso del registro algebraico al registro tabular. Por tanto, se le solicitó al estudiante efectuar una tabulación de la función lineal $y = -x - 1$, tomando valores enteros mayores o iguales a -5 y menores o iguales a 5. Simbólicamente esta relación se representa mediante la siguiente expresión:

$$-5 \leq x \leq 5$$

Gráficamente se obtiene la siguiente tabla de valores:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

Con esto se quiere observar la capacidad del estudiante para realizar operaciones entre números enteros referidas a la evaluación que se debe efectuar en la variable independiente, para obtener el respectivo valor de la variable dependiente. Por tanto, no se consideró permitente trabajar con el teorema de la geometría euclidiana concerniente a la determinación de una recta dados dos puntos.

Ahora bien, a pesar de que algunos estudiantes desarrollaron esta operación de manera rápida y espontánea, la gran dificultad al efectuar este proceso recae indiscutiblemente en el manejo inadecuado de operaciones aritméticas relativas al conjunto de los números enteros. Fundamentalmente, a la suma de enteros negativosy a la adición de enteros de distinto signo al interior del registro algebraico. Simultáneamente se evidenció dificultad al operar signos de agrupación, particularmente los paréntesis.

Para contextualizar un poco véase la siguiente tabla:

Aspectos evaluados	**No de Estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**No de Estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Determina con éxito los puntos (x, y) relativos a la tabulación.	2	6	Adición de enteros negativos y de signo contrario
Opera debidamente signos de agrupación	3	5	Ley de los signos

4.1.2 Ejercicio 2

En este ejercicio se le pide al estudiante obtener la gráfica correspondiente a la funciónlineal $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 1$, determinando los puntos de corte con los ejes $X\ e\ Y$, el valor de la pendiente y la naturaleza de la recta.

Los resultados de esta actividad se ilustran a continuación en la siguiente tabla:

Aspectos evaluados	**No de Estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**No de Estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Transforma ecuaciones de la forma $Ax + By + c = 0$, en expresiones de la forma $y = mx + b$.	2	6	Solución de ecuaciones lineales en dos variables y Operaciones aritméticas
Determina correctamente los interceptos con los ejes coordenados.	2	6	Solución de ecuaciones
Determina con éxito el valor de la pendiente.	2	6	Solución de ecuaciones
Determina con éxito la naturaleza de la gráfica correspondiente.	3	5	Tabulación incorrecta de los respectivos valores de la curva.

Esencialmente se puede inferir del primer ejercicio, que a pesar de que algunos estudiantes realizaron con éxito las operaciones permitentes para encontrar la ecuación de la función afín, esto no fue suficiente para comprender el significado del objeto con el cual se estaba tratando, tal y como lo afirmo (Rojas)en el marco teórico de este trabajo de investigación.

4.1.3 Ejercicio 3

En este ejercicio se le dio al estudiante un conjunto de parejas ordenadas las cuales representan el registro tabular de una función. El objetivo primordial de esta actividad es hacer que el estudiante ubique correctamente los puntos en el plano cartesiano de tal manera que al unirlos obtenga como resultado una línea recta.

Conjunto de parejas ordenadas.

$$\{(-4,-7),(-3,-6),(-2,-5),(-1,-4),(0,-3),(1,-2),(2,-1),(3,0),(4,1)\}$$

Los resultados obtenidos para esta actividad se muestran en la siguiente tabla:

Aspectos evaluados	**No de Estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**No de Estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Ubica correctamente los puntos (x,y) en el plano cartesiano	6	2	Manejo inadecuado de los signo de los ejes coordenados
La grafica correspondiente a tales puntos es una línea recta	8	0	Ninguna

4.2. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS EN LA INSTITUCIÓN.

A partir de la prueba diagnostico se diseñaron nueve actividades (ver anexo 3) con el objetivo de solucionar las dificultades encontradas en la solución de cada uno de los ejercicios propuestos en esta prueba.

Para el análisis respectivo de cada actividad, se consideran algunos puntos planteados en las mismas (ejercicios), con el objetivo de extraer los aspectos más relevantes relativos al proceso de enseñanza-aprendizaje de la función afín, tomando en cuentaeltratamiento y conversión de los distintos registros de representación semiótica mediados por la teoría Duvalista.

Cabe resaltar que cada una de estas actividades se desarrolló de manera individual, por considerarlo más provechoso para la viabilidad del proceso.

4.2.1 PRIMERA ACTIVIDAD

Con esta actividad se buscaba que el estudiante se nivelara en cuanto a las operaciones aritméticas elementales que se pueden efectuar entre números enteros, número racionales (fraccionarios) y sus combinaciones. Por tanto, se plantearon los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1.

Dados los siguientes grupos de números, efectué las cuatro operaciones elementales de la aritmética.

a) $-3,\ 8.-1, 9$
b) $\frac{1}{2},\ \frac{-2}{5},\frac{3}{7},\frac{-7}{2}$
c) $-9,\ \frac{3}{11}, 3,\ \frac{-1}{3}$
d) $-2\frac{3}{2},\ 3,\ \frac{-5}{6}$

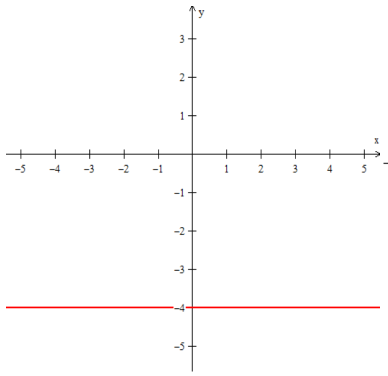
Los resultados pertinentes al desarrollo de esta actividad se presentan a continuación en la siguiente tabla:

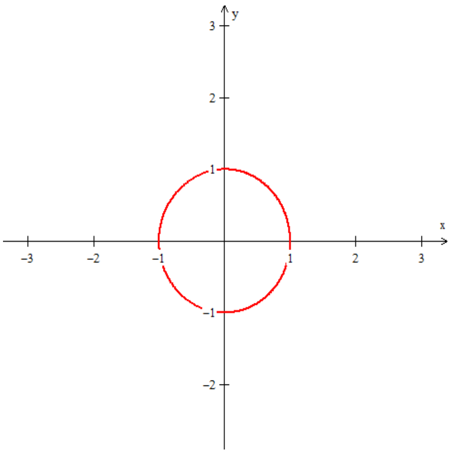
Aspecto valuado	**No de Estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**No de Estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Adición de números enteros y fraccionarios	5	3	Incomprensión de las formulas aritméticas para la adición de fraccionarios y ley de los signos.
Resta de números enteros y fraccionarios	4	4	Ley de los signos y manejo de las fórmulas para la sustracción de fraccionarios.
Multiplicación de números enteros y fraccionarios	6	2	Ley de los signos
División de números enteros y fraccionarios	5	3	Ley de los signos

Ejercicio 2

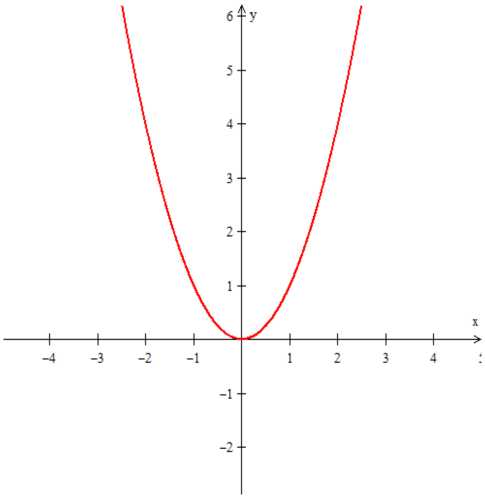
Dada las siguientes gráficas, determine cuáles de ellas representanfunciones. En caso positivo encuentre el dominio y el rango.

Recta $y = -4$ Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$





$y = x^2$



Los resultados concernientes al desarrollo de esta actividad se ilustran en la siguiente tabla:

Aspectos evaluados	**No de Estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**No de Estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Diferencia gráficamente una función de una relación	8	O	Ninguna
Determina el	5	3	Incomprensión del

dominio de una función			concepto
Determina el rango de una función	3	5	Incomprensión del concepto

Como prueba de loa anterior véase (anexo 4.2)concerniente al trabajo realizado por la estudiante Roxana Macías.

4.2.2 SEGUNDA ACTIVIDAD

En esta actividad se le pidióal estudiante, que dada la función$y = \frac{1}{2}x - 1$complete la tabla de valores correspondiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Inicialmente se observa que algunos estudiantes todavía persisten en el manejo inadecuado de operaciones aritméticas. Más precisamente, al sumar, restar y multiplicar números fraccionarios. Adicionalmente, un pequeño grupo de escolares presenta dificultad para representar en el plano los puntos obtenidos mediante el proceso de tabulación. Esto quizá, porque tales estudiantes desconocen de alguna manera cada un de las reglas que se debe tener en cuenta para representar en el plano cartesiano una pareja ordenada.

En lo relacionado con la primera cuestión, y según los planteamientos expuestos por Duval (1999)existe unano apropiación de las herramientas básicas, fundamentales para efectuar diversos tratamientos al interior de un mismo registro.Así mismo, y refiriéndonos a la segunda cuestión, el autor en mención destaca que dicha dificultad está sujeta al desconocimiento o no apropiación de las reglas internas del registro de llegada. En este caso del plano cartesiano.

Por otra parte, se le pide al estudiante que completando la tabla anterior, obtenga la gráfica dela función $y = -\frac{1}{2}x - 1$, y determine la diferencia entre esta curva y la primera.

Se observa inicialmente que los estudiantes reflexionan con relación al signo negativo que presenta el primer término del miembro derecho de laecuación dada. Ya que al hacer la respectiva tabulación, se presentan diversas modificaciones en la tabla de valores que hacen que la curva inicial varíe considerablemente, al ubicar estos puntos en el plano cartesiano.

Con esta actividad los estudiantes notaron la diferenciaentre dos rectas con pendiente positiva y negativa respectivamente. Para memoria de lo anterior, véase (anexo 4.3) que corresponde al trabajo de Francy Lorena Chantre Mariaca.

4.2.3 TERCERA ACTIVIDAD

En esta actividad se trabaja primeramente con funciones lineales cuyo intercepto con el eje$Y$es igual a cero. Y posteriormente con funciones lineales completas.

Ejercicio 1

En este ejercicio se pide que el estudiante grafique las funciones $y = x$ y $y = -x$ en un mismo plano cartesiano a partir de la siguiente tabulación.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Posteriormente, que responda cada uno de los siguientes interrogantes:

1. Qué conclusiones se pueden obtener al graficar tales rectas en un mismo plano.
2. ¿Son estas rectas perpendiculares?
3. ¿En que influye el hecho de que las rectas tengan término independiente nulo?
4. ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de ellas?

La coherencia de las respuestas dadas por los estudiantes para cada una de las preguntas, estádeterminada por la comprensión de los conceptos inmersos en elejercicio. Es decir, si el alumno ha aprehendido las nociones evaluadas en el ejercicio, entonces podrá dar una respuesta acorde con la temática enseñada. En caso contrario, el proceso a desarrollar culminara sin éxito.

Ahora bien, para la primera pregunta se obtuvieron algunas respuestas que vale la pena destacar, e ha aquí algunas de ellas.

- Las rectas no son parales
- Las rectas no cortan en ningún punto al eje Y.
- La primera recta es creciente, en tanto que la segunda es decreciente.
- El único punto de intercepción de las rectas es el origen.
- El dominio y el rango de las rectas son iguales.
- El dominio y el rango delas rectas difieren por el signo $(-)$ que aparece en la variable x de la segunda recta.

En la segunda pregunta se evidenció un punto que resulta importante traer a colación, y tiene que ver con la noción geométrica deperpendicularidad que algunos estudiantes construyen. Es decir, muchos de ellos relacionan geométricamente la perpendicularidad de dos rectas en un sentido semejante a la perpendicularidad que se observa entre los ejes coordenados $X\ e\ Y$. Pero si la posición de dichas rectas se somete a un proceso de rotación, entonces es más difícil para el estudiante ver la perpendicularidad de las mismas. Por lo tanto, la respuesta más común a la pregunta ¿son las rectas $f(x) = x, f(x) = -x$ perpendiculares? Fue, ¨*No, porque no están de la misma forma que las rectas X e Y* ¨.

En la tercera pregunta,casi la totalidadde los estudiantes evaluados concluyo que al ser el término independiente igual a cero ($b = 0$), la gráfica correspondiente a cada recta no cortael eje Y en ningún punto.

En el cálculo del dominio y rango de las rectas, correspondiente a la pregunta número 4, los estudiantes mostraron diversos problemas al desarrollar este proceso. Por ejemplo, muchos de ellos relacionan el dominio de una función con la forma de la gráfica correspondiente a la curva, de ahí que muchos delos colegiales no vacilaron en afirmar que el dominio de las funciones dadas era una recta.

Otros por el contrario estaban muy cerca de la respuesta esperada, afirmando que ¨el dominio de una función era la parte en donde ella se podía graficar en el eje X¨ mientras que solo un estudiante no dio respuesta a la pregunta.

En cuanto al rango de las funciones, las respuestas fueron más favorables, ya que muchos de los estudiantes no dudaron en afirmar que el rango de una función ¨es la parte donde hay gráfica en el eje Y¨

Ejercicio 2

Grafique las funciones $y = x + 4$e $y = x - 4$ a partir de la siguiente tabla de valores en un mismo plano cartesiano.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

¿Qué se puede concluir gráficamente del hecho que el término independiente sea positivo para la primera función y negativo para la segunda función?

Algunos estudiantes dieron respuestas tales como:

- Las rectas son paralelas porque tienen la misma pendiente, independientemente del signo del término independiente.
- Si el término independiente es positivo, la gráfica corta el eje positivo de las Y, y si es negativo la gráfica corta el eje negativo de las Y.
- Entre más grande sea el termino independiente, más inclinada es la recta, ya sea hacia arriba o hacia abajo.

Las anteriores fueron las respuestas de aquellos estudiantes que desarrollaron esta operación, mientras que otros no pudieron desarrollarla debido a la imposibilidad de pasar correctamente del registro tabular al registro gráfico. Esto gracias a que los puntos obtenidos al completar la tabla de valores se calcularon de forma errónea.Esto se puede ver en la memoria del trabajo realizado por la estudiante Gloria Milena Chamizo (ver anexo 4.4).

Aquí se puede apreciar un proceso de conversión entre dos registros de representación, a saber, el registro de representación tabular y el registro grafico o geométrico.

4.2.4 CUARTA ACTIVIDAD

Con esta actividad se pretende introducir al estudiante al trabajo con rectas paralelas y perpendiculares desde un enfoque gráfico. De igual forma a la determinación del punto de intersección entre dos rectas. Por tanto se plantearon los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1

Determine gráficamentesi las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares:

$$3x + 2y = 3$$
$$6x + 4y = 24$$

En el tratamiento analítico que algunos estudiantes le dieron al sistema, se evidencio mal manejo de algunos elementos fundamentales para desarrollar con éxito la actividad. Principalmente cuando se enfrentan a la solución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que no tienen claro los métodos a utilizar.

Esto hizo que los alumnos solicitaran al docente, la solución en el tablero de uno de los sistemas propuesto en el taller, para así, y según ellos, tener una base para poder acceder a la solución de los sistemas restantes.

Así, dentro de los aspectos evaluados se obtuvieron los resultados que se ilustran a continuación:

Aspectos evaluados	No de Estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad	No de Estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad	Dificultad
Soluciona correctamente sistemas de ecuaciones lineales	5	3	Transposición de términos.
Interpreta correctamente la solución de un sistema lineal en	5	3	Incomprensión del concepto rectas paralelas

relación al paralelismo de las rectas			

Ejercicio 2

Encuentre gráfica y analíticamente el punto de intersección de las siguientes rectas.

$$2x + y = 5$$

$$x - y = 4$$

¿Qué relación existe entre el punto de intersección, y las rectas?

Inicialmente, en la solución del sistema lineal se observó que algunos estudiantes siguen presentando dificultades para operar términos semejantes, otros para estructurar el sistema de tal forma que se obtenga su solución. Es decir, algunos estudiantes escogen un método específico sin tener claro la manera en que funciona, o sea, si escogen el método de igualación no hay claridad en que primero se deben igualara las ecuaciones para comenzar a resolver el sistema. Si escogen el método de eliminación, desconocen que lo primero que se debe hacer es eliminar una de las variables para encontrar el respectivo valor de la otra variable; y así sucesivamente con los demás métodos.

En lo concerniente a la pregunta que se planteó, hubo más de una respuesta coherente, y algunas incoherentes. Por ejemplo:

- Las rectas pasan por el punto de intersección al mismo tiempo.
- Las coordenadas del punto de intersección hacen que al sustituiros en las variables, la ecuación se convierta en una identidad.
- El punto de intersección entre dos rectas siempre es único.
- Al remplazar las coordenadas del punto en las respectivas variables de cada ecuación, hace que esta se haga cero.
- Si las coordenadas del punto son positivas entonces las rectas son crecientes, y son negativas entonces las rectas son decrecientes.
- Si las dos rectas se cortan entonces el dominio y el rango son iguales

Ahora bien, con relación a la búsqueda del punto de intersección de las dos rectas a través de la graficación de dichas funciones, la mayor dificultad que presentaron los estudiantes, fue pasar de las ecuaciones establecidas a la forma pendiente intercepto, es decir a la ecuación $y = mx + b$.

Al respecto Duval (1999) plantea que cuando no hay congruencia entre el registro de partida y el registro de llegada como en este caso, entonces ¨no solo aumente el tiempo de tratamiento, si no que la conversión puede resultar imposible de efectuar, o incluso de comprender, si no ha habido un aprendizaje previo concerniente a las especificidades semióticas de formación y de tratamiento de la representación, propias de cada uno de los registros presentes¨

Como prueba de lo anterior véase (anexo 4.5) concerniente al trabajo realizado por la estudiante María de los Ángeles Rivera.

4.2.5 QUINTA ACTIVIDAD

La interpretación de diversos problemas es una actividad necesaria al interior de las matemáticas y otras disciplinas. Por ende, con el desarrollo de esta actividad se busca afirmar o afianzar la destreza de los estudiantes para solucionar problemas referentes a rectas paralelas y perpendiculares desde un punto de vista analítico y geométrico.

Ejercicio 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,4)$ y es paralela a la recta $x + 3y - 2 = 0$.

Quizá la dificultad más grande que posee un estudiante a la hora de resolver este tipo de ejercicios, es el análisis que se debe hacer en cuanto a las características del ejercicio y condiciones del mismo. Es decir, reflexionar en relación a lo que se pide, a las herramientas que se tiene para abordarlo, y a los datos expuestos en el mismo, los cuales permiten emplear algunas teorías para llegar a su respectiva solución.

Para este caso concreto, es importante cuestionarse sobre lo siguiente:

- ¿Qué significa que una recta pase por un punto de coordenada (x, y)?
- ¿Qué herramientas se tienen para solucionar el ejercicio? O sea, que ecuación o ecuaciones se pueden aplicar para su solución?.

Al respecto se evidencio que la gran mayoría de estudiantes no tuvo en cuenta las indicaciones anteriores. Análogamente, la no apropiación de algunos conceptos matemáticos, y el desconocimiento de las ecuaciones alternativas de la recta, fueron fundamentales para que la actividad se desarrollara en gran parte sin éxito.

Ejercicio 2

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(-5,4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(3,7)$.

Esta vez no se presenta la recta en forma canónica, sino que se hace necesario encontrarla a través de la búsqueda de su respectiva pendiente, y posteriormente mediante la aplicación de la ecuación punto pendiente.

En conclusión, la dificultad general para solucionar ambos ejercicios radicó en la interpretación correcta de los mismos, y por consiguiente, en el empleo de las ecuaciones alternativas de la recta dispuestas para su solución.

Esto se puede ver en el trabajo realizado por la estudiante Diana Marcela Rivera (ver anexo 4.6).

4.2.6 SEXTA ACTIVIDAD

En matemáticas algunas veces es posible determinar la forma canónica de una ecuación a partir de una de sus representaciones. Por tanto esta actividad esta direccionada en ese sentido, y por ende se planteó los siguientes ejercicios.

Ejercicio

Hallar la ecuación de la recta que satisfaga las siguientes condiciones:

a) Su intercepto en el eje X es igual a -2.

b) Su intercepto con el eje Y es igual a 7.

La dificultad fundamental para desarrollar con éxito esta actividad esta relaciona nuevamente con la interpretación del ejercicio, y con la estrategia o metodología que se debe seguir para su consecución.

En principio resulta interesante que cuando se le da a un estudiante la representación gráfica de una función lineal, la mayoría de estos observan dos características fundamentales de la misma:

1. La recta es creciente o decreciente
2. La recta corta los ejes coordenados.

Lo realmente complejo para los estudiantes, es que a pesar de que conozcan algunos datos esenciales como los ilustrados anteriormente, no pueden relacionarlos a través del empleo de la ecuación pendiente intercepto. Es decir, aunque muchos estudiantes tengan claro la naturaleza de la recta, o sea es creciente o decreciente, muchos no relacionan esta característica con el signo de su pendiente.

Además de esto, se evidencia que un alto porcentaje de los estudiantes no han asimilado con claridad que significa que una recta corte cualquiera de los ejes coordenados, teniendo en cuenta que durante el transcurso de la clase, se hicieron las especificaciones pertinentes en relación al tema.

Lo que se esperaba con esta actividad, era que los alumnos hicieran uso de la ecuación punto pendiente, y de cada uno de las condiciones dadas por el ejercicio, para encontrar los datos restantes, y así determinar su ecuación. Por ejemplo, una de las condiciones dadas por el ejercicio es que la recta corta el eje X en (-2). Si el estudiante tuviese claro el significado de dicha relación, no dudaría en plantear una ecuación sustituyendo el valor de la variable x por (-2) e igualar a cero, ya que si una curva cualquiera corta el eje X, es porque dicho valor es solución de la ecuación respectiva. Y por lo tanto, sustituyendo el valor de la variable y por 7 se encuentra el valor de la pendiente.

Lo mismo ocurrió con otros ejercicios planteados en esta actividad,en los cuales se daba el valor de la pendiente y el corte con uno de los ejes coordenados, con el fin de encontrar la función afín correspondiente que satisface tales condiciones.

Una vez más se evidencia que la problemática existente al interior de esta actividad, está inmersa en el tratamiento inadecuado que se hace de cada registro, en especial, del registro de llegada.

Lo anterior se corrobora en la memoria del trabajo realizado por la estudiante Lidy Vanesa Rivera (ver anexo 4.7).

4.2.7 SÉPTIMA ACTIVIDAD.

El lenguaje algebraico desempeña un papel de vital importancia en matemáticaspuesto que permite la modelación de diversos problemas para la aplicación de algoritmos o métodos que conlleven a su solución. En tal caso, la aplicación de un método determinado depende de la estructura del modelo con el cual se va trabajar.

Para el desarrollo de esta actividad se consideran problemas matemáticos cuya modelación se ajusta exclusivamente a sistemas de ecuaciones lineales. Por tanto, con esta actividad se quiere visualizar y analizar el dominio del lenguaje algebraico en los estudiantes, y la destreza de los mismos a la hora de manipular sistemas de ecuaciones a través de los métodos igualación y sustitución.

Ejercicio

Modele y resuelva los siguientes problemas haciendo uso de los métodos eliminación o sustitución.

1. La suma de las edades de Adriana y Juan es igual a 33 años. Si la edad de Adriana equivale a la edad de juan más 9 años ¿cuántos años tiene cada uno?

2. la semisuma de dos números es igual a la diferencia entre el número mayor y $\frac{1}{3}$ del número menor. Si $\frac{2}{5}$ de su diferencia equivale al doble del número menor sumado con 6 ¿cuáles son los números?

3. El perímetro de un rectángulo es de 48 cm. Si el largo del rectángulo equivale al doble del ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Para el primer ejercicio no se presentaron mayores dificultades relacionadas con la modelación que inicialmente se pedía obtener. Esto se evidencio en la participación activa de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad, pues se vieron motivados, y pidieron la oportunidad de salir al tablero a desarrollar dicho ejercicio.

Se podría decir entonces, que la gran dificultad que mostraron los estudiantes fue a la hora de solucionarel sistema lineal mediante los métodos que se especificaron anteriormente.

Ya en la modelación del segundo ejercicio se presentaron dificultades relativas al manejo del lenguaje algebraico. Es decir, al desconocimiento de la expresión algebraica correspondiente para representar la situación. Por tanto, el comentario más escuchado entre los estudiantes fue: *¿qué es la semisuma?,* o también *¿profe a que se refiere con la semisuma?*

Por otro lado, llamó mucho la atención el hecho de que un estudiante preguntara a cerca de la diferencia entre dos números, lo cual hizo pensar que todavía existen alumnos que no están familiarizados con los nombres alternativos de las operaciones fundamentales, más concretamente, con la resta (diferencia), multiplicación (producto) y división (cociente). Y un acontecimiento adicional, que una alumna preguntara ¨*si es lo mismo ser equivalente a ser igual*¨

Ahora bien, como ya se ha venido diciendo, la solución de sistemas de ecuaciones lineales sigue siendo para algunos alumnos un proceso complejo de desarrollar. Por ende fue necesario volver a retomar cada una de las metodologías de solución de dichos sistemas para favorecer el normal desarrollo de la actividad.Luego deesto, se pudo apreciar que un alto porcentaje de estudiantes logro culminar con éxito la solución de los dos sistemas de ecuaciones, haciendo uso de los métodos descritos anteriormente.

En lo que se refiere al ejercicio número tres, se comprobó la ausencia de algunos conceptos geométricos, fundamentales para su solución. De ahí que algunos estudiantes optaron por no resolverlo, ya que según ellos no recordaban su significado. Otros por el contrario comenzaron a indagar al respecto, tanto con sus compañeros de clase, como con los docentes que acompañaban el desarrollo de la actividad.En esencia, el concepto más comentado fue el de perímetro.

Aquí se pudo apreciar diversas interpretaciones al respecto. Por ejemplo, para algunos estudiantes, el perímetro es igual a la suma de los lados de una figura geométrica, que en este caso, y según su apreciación, sería igual a 4. Un estudiante por el contrario, acertó al afirmar que ¨*el perímetro es igual a la adición de las dimensiones de los lados de una figura geométrica*¨. Mientras que un tercero se abalanzo a la discusión afirmando, que ¨*el perímetro estaba relacionado con el área de la figura*¨

Otro aspecto importante que se pudo apreciar durante la solución del ejercicio, es la falta de comprensión del significado de rectángulo, ya que hubo alumnos que al intentar modelar el problema, consideraron los cuatro lados del rectángulo como si estos fuesen desiguales, olvidando que la idea intuitiva de rectángulo no es más que una figura geométrica en la cual según (BALDOR, Geometría plana y del espacio) tiene sus cuatro ángulos iguales y los lados contiguos desiguales. En tanto que los lados no contiguos (paralelos) son iguales.

Así, al hacer un primer intento por modelar el ejercicio, se obtuvo como resultado expresiones como esta:

$$x + y + z + w = 48$$

Lo cual constituye a una modelación distinta del problema.

Como prueba de lo anterior, véase (anexo 4.8) concerniente al trabajo realizado por la estudiante karol Viviana Iles.

4.2.8 OCTAVA ACTIVIDAD.

Poder clasificar una función en matemáticas resulta fundamental para establecer relaciones entre la función y algunas de sus caracterizaciones. Por ejemplo, dada la función $y = f(x)$, si ésta es inyectiva, entonces se podrá hablar de función inversa. Es decir, esta propiedad garantiza la existencia de la inversa de una función, mas no laexhibe como tal. No obstante, si la función $y = f(x)$no cumple con esta propiedad, entonces no se puede garantizar en primera medida la existencia de la inversa de dicha función. Sin embargo, al efectuar un proceso de restricción del dominio de la función inicial, es posible determinar su inversa mediante algún método grafico o analítico.

En consecuencia, al constituir particularmente una relación de composición entre la función $y = f(x)$ y su inversa, se obtiene como resultado de dicha operación, la función identidad $f(x) = x$.

Así, y de acuerdo con lo planteado anteriormente, en esta octava actividad se quiere que el estudiante determine analíticamente si una función afín $y = mx + b$ es inyectiva, y posteriormente que establezca una relación de composición entre dicha función y su inversa respectiva, de tal forma, que al componerlas se obtenga la función identidad.

Por lo tanto se planteó el siguiente ejercicio:

Ejercicio

Determine la inversa de la función $y = 5x - 7$ teniendo en cuenta los siguientes pasos:

a) Pruebe analíticamente que la función dada es inyectiva

b) Una vez encontrada la función buscada, verifique mediante una relación de composición que tales funciones son inversas.

c) Grafique cada una de las funciones en un mismo plano cartesiano y obtenga conclusiones al respecto.

En primer lugar, en la solución del literal a) se observaron falencias en muchos estudiantes referentes al manejo inadecuado de la definición de función inyectiva. Esto se pudo apreciar durante el desarrollo de la actividad misma, así como también, al evaluar los trabajos realizados por los escolares.

Pero quizá la mayor dificultad reside en la confusión del concepto de función y de función inyectiva. Pues pareciera ser que para algunos alumnos, estas nociones matemáticas no difieren en lo absoluto, lo cual demostró un alto grado de incomprensión de dichos conceptos.

Para ejemplificar un poco, uno de los estudiantes asistentes a esta sesión intento darle solución al ejercicio tomando como punto de partida la expresión:

$$si\ \ a = b\ entonces\ f(a) = f(b)$$

Evidentemente, y después de un intento infructuoso por resolver el ejercicio, el estudiante se dio cuenta que no estaba empleando debidamente la defunción de función inyectiva, que previamente se había dado.

¿Pero que lo hizo cambiar de parecer? en principio el llamado de atención por parte de uno de los docentes auxiliares, y posteriormente, el exhibir un ejemplo en el tablero a través de un diagrama sagital, en el cual se le mostro que lo que pretendía usar era nada más y nada menos la definición de función.

Similarmente, otros estudiantes trataron de abordar el problema utilizando la expresión:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

En este caso, aunque al parecer los alumnos comprendieron muy bien lo que se quería demostrar, no tuvieron éxito en el manejo de la expresión anterior. Sustancialmente, se notó dificultad en la conducción de las expresiones $f(a)$ y $f(b)$, debido a que unos no comprendían su significado, o carecían de las herramientas aritméticas y algebraicas, básicas para solucionar correctamente el problema.

En cuanto a la búsqueda de la inversa de la función dada, se pudo percibir gran dificultad en el manejo de las variables correspondientes a la ecuación lineal, principalmente, al efectuarse la transposición de términos con miras a despejar la viable dependiente y, después de haber efectuado la sustitución entre las variables x e y en la ecuación inicial. Cabe resaltar que dos estudiantes desarrollaron con éxito la actividad, evidenciándose en estos, un afianzamiento considerable en aspecto tales como:

- Comprensión del tema.
- Solución de ecuaciones.
- Operaciones aritméticas y algebraicas.
- Transposición de términos.
- Identificación de la inversa de una función.

Por lo tanto, fue necesario tomar un nuevo ejemplo del texto guía, y dar una explicación a través del mismo de lo que se pedía hacer en la actividad.

En lo referente a la composición que debía hacerse entre la función dada y su inversa respectiva. La mayor dificultad que se presento fue la comprensión de composición de funciones, de ahí que muchos estudiantes exclamaron ¨*¿profe que es una composición?*¨o también, ¨*profe no entiendo esta parte*¨ o en el peor de los casos ¨p*rofe no puedo*¨...

Cabe aclarar, que para el desarrollo de las actividades se dio una inducción previa de los temas que se iban a tratar en cada uno de los talleres, con sus respectivos ejemplos. Y se solicitó al estudiante que para la solución de los mismos, tuviera en cuenta los conceptos y ejemplos que en las sesiones de clase se habían estudiado.

Por último, en la gráfica de las dos funciones (la función lineal y su inversa) se evidenciaron problemas específicamente al tabular la función inversa. Quizá porque la estructura de dicha función no era fácil de manipular para muchos estudiantes.

$$y = \frac{x - b}{m}$$

Que por notación de funciones inversas se representa por:

$$(f)^{-1}(x) = \frac{x-b}{m}, m \neq 0$$

Ya que en primer lugar se debe operar una diferencia de números enteros, y posteriormente hacer la respectiva división entre el valor obtenido, y el valor fijo de m. Adicionalmente, llamo mucho la atención el trato que unos pocos alumnos intentaron darle al exponente que hace alusión a la función inversa.

Por último, y luego de superados los impases anteriores, los estudiantes graficaron las dos funciones y obtuvieron conclusiones tales como:

- Las dos funciones son crecientes ya que tienen la misma pendiente positiva.
- Las dos funcione son iguales.
- El dominio y el rango de las funcione son totalmente iguales.
- Las dos rectas son paralelas.
- Si una función corta el eje Y en un número positivo, su inversa lo cortara en un número negativo.
- Si una función corta el eje X en un número negativo, su inversa lo cortara en un número positivo.
- Las funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.
- La grafica de la función inversa se obtiene reflejando la gráfica de la función $y = f(x)$.

Las últimas dos conclusiones se obtuvieron en el aula de clase, mediante algunos ejemplos que al respecto se hicieron.

Como prueba de lo anterior, véase (anexo 4.9) concerniente al trabajo realizado por la estudiante Sandra Rivera.

4.2.9. NOVENA ACTIVIDAD.

La realización de la novena actividad está dirigida a recopilar las temáticas en donde se evidencio la mayor dificultad por parte de los estudiantes, a la hora de resolver los ejercicios relativos a tales temas. Esto en aras de analizar por segunda vez, cuáles fueron las mayores dificultades que presentaron los alumnos al enfrentarse a diversos ejercicios concernientes a la función lineal y a sus registros de representación. Así como también, para tratar de corregir las deficiencias que a lo largo de las actividades anteriores se pudieron apreciar.

Pues aunque el objetivo de este trabajo de investigación, es el de identificar las deficiencias o dificultades que tienen los alumnos al trabajar con registros de representación, este no debe aislarse de la responsabilidad que subyace en el docente, no solo como mero transmisor de conocimiento, sino como el encargado en gran parte, de buscar alternativas de enseñanzas que conlleven a superar tales dificultades, una vez se hallan identificado.

Ahora bien, durante el desarrollo de las actividades previas se notó mayor dificultad en la manipulación de algunos registros tales como, el registro algebraico, fundamentalmente al pasar de una ecuación lineal en dos variables a la ecuación pendiente intercepto. Elregistró tabular, para la determinación de algunos puntos en aras de graficar la función, y el registro gráfico, para analizar la influencia de los elementos fundamentales de una función lineal (pendiente, interceptos) en su gráfica.

Adicionalmente, en la simbología de ciertos problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales.

En resumen, y bajo el propósito de conseguir mejores resultados en esta actividad, se diseñaron 8 ejercicios con los que se cubrió toda la temática que se dispuso para eldesarrollo del proceso. De los cuales se analizaran cinco de estos, ya que los demás se estructuraron de forma similar. Análogamente, se dispuso de una sesiónadicional, en la que se hizo un recorrido general, por cada uno de los conceptos que a su tiempo se estudiaron.

Ejercicio 1

Este ejercicio hizo pate del conjunto de ejercicios que se propusieron en la prueba diagnóstico, con la cual se dio inicio a la práctica docente-investigativa.

Grafique la función lineal $\frac{3}{8}x + \frac{1}{9}y = 5 - \frac{7}{9}$ completando la siguiente tabla de valores, y determine el valor de la pendiente y del intercepto con el eje y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

En general la actividad se desarrolló sin ningún problema. Esta vez se notó un gran avance en los estudiantes al despejar la variable dependiente para conseguir la ecuación de la función lineal. Al mismo tiempo, al efectuar las operaciones permanentes entre números enteros y fraccionarios.

Los resultados de los aspectos evaluados en la actividad se ilustran en la siguiente tabla:

Aspecto evaluado	**Número de estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**Número de estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Encuentra la ecuación de una función lineal a partir de una ecuación lineal en dos variables.	6	2	Manejo de signos al transponer términos.
Encuentra correctamente los puntos correspondientes a través del registro tabular	8	0	Ninguna
Identifica sin dificultad la pendiente de una recta	8	0	Ninguna

Identifica sin dificultad los interceptos de una recta	8	0	Ninguna
Realiza la gráfica de una función lineal, sin dificultad.	8	0	Ninguna

Ejercicio 2

Grafique la función $2x - 4y = x - y$ única y exclusivamente determinando los interceptos con los ejes coordenados.

Al igual que en el ejercicio anterior, no se evidenciaron mayores dificultades a la hora de resolverlo. Por el contrario, se notó un grupo más entusiasmado y más comprometido con el desarrollo de esta actividad, lo cual hizo pensar que el proceso ejecutado comenzaba a tener buenos resultados.

Los resultados de esta actividad se ilustran a continuación en la siguiente tabla:

Aspecto evaluado	**Número de estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**Número de estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Encuentra la ecuación de una función lineal a partir de una ecuación lineal en dos variables.	7	1	Manejo de signos al transponer términos.
Determina	8	0	Ninguna

correctamente el intercepto con el eje X.			
Determina correctamente el intercepto con el eje Y.	8	0	Ninguna
Realiza la gráfica de una función, lineal sin dificultad.	8	0	Ninguna

Ejercicio 3

Encuentre la ecuación de la recta que intercepta el eje Y en 6, y es paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$.

Como se puede apreciar, este ejercicio contiene un detalle que lo diferencia de los que hasta ahora se han tratado. Y su solución requiere de la necesidad de haber comprendido muy bien, cuáles son los elementos fundamentales de una función afin, y de qué manera se pueden determinar.

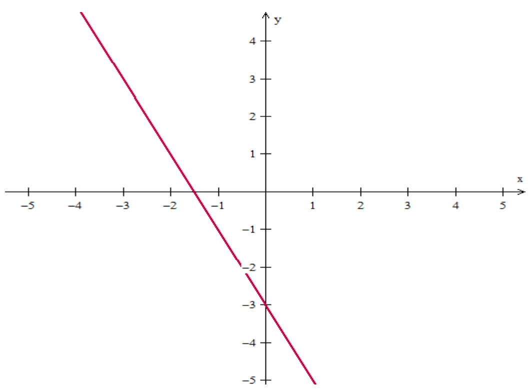
Aunque se esperaba que los estudiantes no tuvieran dificultad al resolver este ejercicio, se pudo apreciar que algunos de ellos presentaron problemas, fundamentalmente en la relación que se debía establecer entre la ecuación dada y la ecuación a buscar. Debido a la confusión que genero el hecho de que la curva cortara el eje Y, y al mismo tiempo fuese paralela a la recta dada.

Los resultados referidos a esta actividad se ilustran a continuación en la siguiente tabla:

Aspecto evaluado	**Número de estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**Número de estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Encuentra la ecuación de una función lineal a partir de una ecuación lineal en dos variables.	8	0	Ninguna
Determina correctamente la ecuación de una recta paralela a una recta dada	5	3	Mala interpretación del ejercicio, asociada a la imposibilidad de relacionar y articular ciertos datos.

Ejercicio 4

Obtenga la ecuación de la recta graficada:



En la solución de este ejercicio no se evidenciaron mayores dificultades. Pues con la realización de las actividades anteriores, y el refuerzo que se hizo antes de afrontar esta actividad, se contribuyó substancialmente a que muchas de las deficiencias relativas a esta situación fueran superadas.
Los resultados pertinentes a los aspectos evacuados en esta actividad, se muestran en la siguiente tabla.

Aspecto evaluado	**Número de estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**Número de estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Interpreta analíticamente los interceptos de una recta para establecer su ecuación.	6	2	Manejo de la ecuación punto pendiente
Relaciona la naturaleza decreciente de una recta, con una ecuación de pendiente negativa.	8	0	Ninguna.
Interpreta correctamente el termino independiente de una función lineal, como el punto de corte de la recta con el eje Y.	8	0	Ninguna

Ejercicio 5

La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 7. Cuando se invierten los dígitos, el número aumenta en 27. Determine el primer número.

Probablemente las actividades en donde más se evidenciaron problemas fue en aquellas en las cuales se consideraron ejercicios relacionados con sistemas de ecuaciones lineales, en particular, con aquellos problemas que debían ser modelados para acceder a su solución.

Tal vez estas dificultades residen en el desconocimiento de algunas entidades algebraicas que favorecen la modelación de una determinada situación, es decir, en representar simbólicamente una suma, una diferencia, un producto, un cociente, una semisuma, un semiproducto, etc. Sumado a esto, la diversidad de problemas matemáticos, hace necesario el manejo adecuado de distintas herramientas con las cuales se puede simbolizar un determinado problema. Estas herramientas pueden ser de varios tipos. Por ejemplo,algebraico, geométrico y aritmético.

Ahora bien, para comprender mejor lo dicho anteriormente, supóngase que se desea modelar el cuadrado de la suma de dos cantidades cualesquiera. En este caso, la expresión simbología que representa esta situación es $(x+y)^2$, lo que hace necesarioal menos el conocimiento de los productos notables. Análogamente, si se quiere simbolizar una situación referida al perímetro de un rectángulo, es inevitable conocer la definición tanto de perímetro como de rectángulo, para favorecer una correcta representación simbólica. Por último, considérese el enunciado referente a este ejercicio. Se puede ver que es fundamental conocer el significado de numero digito para poder acceder a una posible simbolización de tal situación, de lo contrario sería imposible obtener una modelación al respecto, y más aún encontrar su solución.

Por lo tanto, los resultados obtenidos en la solución de este ejercicio fueron los siguientes:

Aspecto evaluado	**Número de estudiantes que desarrollaron con éxito la actividad**	**Número de estudiantes que desarrollaron sin éxito la actividad**	**Dificultad**
Diferencia correctamente un numero digito de un polidigito.	3	5	Incomprensión del concepto.
Simboliza sin dificultad problemas matemáticos empleando herramientas aritméticas	0	8	No conocimiento de ciertas defunciones, y manejo inadecuado del lenguaje algebraico.
Obtiene sin dificultad la solución respectiva del sistema generado por el proceso de simbolización.	0	8	Tratamiento inadecuado de la respectiva representación simbólica del enunciado.

Como prueba delo anterior véase (Anexo 4.10) correspondiente al trabajo realizado por la estudiante Roxana Macías.

En resumen, en cada uno de las nueve actividades se evidenciaron dificultades a la hora de solucionar los ejercicios que en estas se propusieron referentes al tratamiento y conversión entre registros de representación. Se pudo notar que en lo referente a la operación de tratamiento (operación que se efectúa dentro de un mismo registro) las falencias recaen fundamentalmente en la ineficiencia que presentan los estudiantes al efectuar operaciones dentro del registro.Principalmente, por el desconocimiento de las reglas que permiten la transformación de una expresión a otra, y que para Duval (1999)no son más que propiedades, axiomas, teoremas, etc.Asimismo, se pudo notar que a pesar de que paulatinamente los estudiantes fueron superando sus dificultades para operar registros de representación, el significado real del concepto todavía sigue en construcción.

Además de lo anterior, se podría pensar en que la pluralidad de los registros de representación entorpece de alguna manera el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ya que para muchos estudiantes resulta engorroso manipular propiedades y herramientas propias de cada registro, ya que en uno de los planteamientos de Rojas (2009) afirma que ¿cómo puede aprender un estudiante a no confundir un objeto matemático con la representación particular que le da acceso (por ejemplo un número, una escritura simbólica, una función) si para acceder a los objetos representados no hay más que representaciones semióticas por manipular.

Por último, en lo concerniente a la operación de conversión se puede decir que tanto ambos autores aceptan que es una operación compleja y tediosa a pesar de que se conozcan las propiedades de cada registro. Esto se puede observar en los resultados de las actividades desarrolladas a lo largo del proceso. En conclusión, y teniendo en cuenta tales resultados, pareciera que el proceso de conversión entre registros es más complejo que el proceso de tratamiento.

CAPÍTULO V

5.1 CONCLUSIONES

La problemática existente al interior de la enseñanza de las matemáticas resulta ser un tema de carácter importante que debe analizarse con tiempo y detenimiento. Con la puesta en marcha de este proyecto de investigación, se pudo constatar que los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Julumito que participaron en cada una de las actividades, presentan dificultades al trabajar con registros de representación de la función afín. No obstante, con la implementación de las actividades descritas a lo largo del documento, las cuales se direccionaron hacia la trasformación de registros de representación, se contribuyó al mejoramiento del aprendizaje de la función afín, a través de la manipulación de cada uno de sus registros.

Seguidamente, los resultados que se obtuvieron durante la ejecución del proceso permiten inferir que a través de la transformaciónde registros de representación, es posible consolidar un aprendizaje significativo. Por eso, el diseño y aplicación de este trabajo de investigación resulta importanteporque además de cumplir con los objetivos propuestos, da lugar a la creación y aplicación de estrategias metodológicas en donde se visualice lo dicho anteriormente. Cabe aclarar que para (Rojas)la manipulación correcta de registros de representación no es suficiente para solucionar la problemática existente relativa a la enseñanza de las matemáticas.

En relación con lo anterior, Duval (1999) reflexiona acerca de la necesidad de ejecutar un proceso de discriminación de las unidades significantes en las representaciones semióticas, que en el caso de los gráficos,están decretadas por la visualización de ciertas características en las figuras geométricas. Por ejemplo, dentro del estudio de la función lineal sobresalen algunos elementos fundamentales para la articulación del concepto, tales como, naturaleza de la recta, interceptos con los ejes, entre otros.Teniendo en cuenta que la transformación de las representaciones semióticas, es un proceso que demanda la identificación de tales unidades en los registros de partida y llegada respectivamente. Así, el diseño de cada una de las actividades se hizo a partir delo ya planteado, y con el objetivo fundamental de hacer que el educando relacione las unidades significantes entre los distintos registros de representación.

5.1.1 CONCLUSIONES CONCERNIENTES A LAS NUEVE ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS EN LA INSTITUCIÓN.

Con la realización de cada una de las actividades que se desarrollaron con el grupo de estudiantes grado décimo de la Institución Educativa Julumito asistentes a las sesiones durante las jornadas establecidas para el desarrollo de la práctica pedagógica investigativa, se puede concluir en primer lugar, que en un sentido general el proceso ejecutado en dicha institución fue efectivo. Ya que se consolidaron en primer lugar,cada uno de los propósitos previamente establecidos al inicio de la investigación, y en segundo lugar, porque a través de las actividades implementadas se contribuyó al mejoramiento del aprendizaje de la función afín, a partir de sus registros de representación, y de la puesta en correspondencia de las unidades significativas propias de cada registro.

Con la primera actividad se consiguió prácticamente que los estudiantes afianzaran en el manejo adecuado de las operaciones aritméticas fundamentales, principalmente, al operar números enteros y números fraccionarios. Pues se consideró necesario la implementación de una actividad enfocada hacia tal fin, ya que para el tratamiento normal de los registros de representación es indispensable operar con números de este tipo. Sumado a esto, debido a que el tema central del presente trabajo de investigación es el concepto de función afín, y en aras de facilitar la comprensión del mismo, se decidió iniciar su estudio a partir del concepto de función y de los elementos que giran en torno a este.

Esto con el propósito de encaminar al estudiante al concepto de función afín, y a la manipulación de registros de representación estudiados en la segunda actividad, con los cuales se realizaron diversas conversiones. Simultáneamente, con la tercera actividad,

se logró que el estudiante identificara el comportamiento de funciones lineales a través de la diversidad de sus gráficas, determinadas por el signo de su pendiente, o en su defecto porque ésta es igual a cero. Así mismo, por el signo relativo de su término independiente.

Con el trabajo desarrollado en la cuarta actividad se consiguió que el estudiante analizara, interpretara y visualizara gráfica y analíticamente las posiciones relativas de dos rectas (paralelismo y perpendicularidad) a partir de una recta, dada en la forma $Ax + By + C = 0$. Asimismo, se logró un avance significativo en lo referente a la búsqueda del punto de intersección de dos rectas expresadas a través de ecuaciones lineales siempre y cuando este existiese.

La quinta actividad permite concluir que para los estudiantes de grado decimo de esta Institución que participaron en el proceso, es fundamental y esencial el trabajo con ecuaciones alternativas de la recta. No solo por su utilidad a la hora de resolver problemas enfocados a la brusquedad de rectas paralelas y perpendiculares, sino porque su utilidad se extiende a otros contextos matemáticos como el cálculo y la trigonometría.

De la sexta actividad se infiere que la manipulación inversa entre registros de representación es una operación muy importante que fue acogida de buena forma por los estudiantes, a pesar que en su momento se cometieron errores a la hora de efectuar las conversiones respectivas. Anexo a esto, con esta actividad se abrió el camino para que los estudiantes encuentren formas más generales de establecer ecuaciones a partir de la representación gráfica de una función.

De la séptima actividad y octava actividad se pudo concluir que el manejo del lenguaje algebraico es una de las dificultades más notorias y trascendentales presentes en el estudiante. No obstante con esta actividad se quiso allanar y fortalecer sus deficiencias a través del ejercicio docente, y por consiguiente, mediante los problemas expuestos en cada actividad. Esto con el fin de encaminarlos hacia una cultura matemática más amplia y fortalecida.

5.1.2 CONCLUSIONES CONCERNIENTES A LA PRUEBA DIAGNÓSTICO Y A LA ACTIVIDAD FINAL.

La prueba diagnóstico es quizá una de las herramientas más importantes para la consecución de investigaciones, destinadas a estudiar, identificar o analizar, las dificultades presentes en un grupo de estudiantes, al trabajar con un concepto matemático previamente establecido.

Su importancia queda determinada debido a que permite conocerel panorama académico de los estudiantes, relativo a la forma de trabajar con distintos conceptos matemáticos. Es decir, la prueba diagnóstico ayuda a identificar el nivel académico de un estudiante, antes de someterse a un proceso de nivelación que favorezca la comprensión y aprendizaje de aquellas nociones que no han sido aprehendidas durante el transcurso de su vida escolar.

Ahora bien, con respecto al ejercicio uno del diagnóstico, se evidenció grandes dificultades al trabajar con números enteros y números racionales principalmente. En particular al operar con enteros de signo contrario, o con fracciones no homogéneas, esto es, fraccionario cuyos denominadores no son iguales.De igual forma, los estudiantes mostraron diversas dificultades al solucionar ecuaciones lineales en una sola variable, notándose gran confusión al intercambiar la posición de la incógnita, o al modificarla por otra letra. Es decir, con este ejercicio se pudo concluir que algunos alumnos tienen mayor tendencia a confundirse, si en lugar de ubicar la incógnita en el miembro izquierdo de la ecuación, ésta se ubica en el miembro derecho de la misma, o si en lugar de presentar una ecuación en la variable x, se presenta otra en la variable y, z, u otra.

De igual forma, en el ejercicio tres del diagnóstico (dos en el análisis del mismo) se evidenció gran dificultad al pasar del registro algebraico al registro tabular. Esto debido fundamentalmente a que los estudiantes no desarrollaron correctamente las operaciones entre números enteros.

En el ejercicio cuatro de la prueba diagnostico (tres en el análisis del mismo) se pudo observar en primera instancia que los estudiantes no identificaban funciones afín a partir de su ecuación. Adicionalmente, la graficación de expresiones de la forma $Ax + By + C = 0$ resulta engorroso, puesto que se debe llevar a la forma pendiente intercepto, o sea, a la ecuación $y = mx + b$, y posteriormente encontrar los interceptos con los ejes coordenados, para así obtener la respectiva gráfica.

Respecto a los ejercicios cinco, seis y siete concernientes a rectas paralelas y perpendiculares, sistemas de ecuaciones lineales y funciones inversas, no mostraron resultados positivos concernientes a su solución. Igualmente, se evidencio dificultad al operar ecuaciones, términos semejantes, métodos de solución de sistemas de ecuaciones, composición de funciones, entre otros.

Por último, de la actividad final (actividad número nueve), se puede concluir que los resultados que se obtuvieron al respecto fueron satisfactorios y acertados. Mostrando consigo un avance significativo en los estudiantes, con referencia a la prueba diagnóstico efectuada al iniciare la práctica docente. Y con relación a las operaciones inmersas en cada uno delos registros de representación, fundamentales para su tratamiento y conversión.

A continuación unos de esos resultados:

1. Los estudiantes efectúan correctamente operaciones entre números enteros y números fraccionarios.
2. Identifican y encuentran sin dificultad la pendiente de una recta, y los interceptos con los ejes coordenados.
3. Encuentran la ecuación de una función lineal a partir de una ecuación lineal en dos variables.
4. Grafican sin dificultad funciones lineales ya sea tabulando suficientes puntos, o exclusivamente encontrando los interceptos con los ejes coordenados.
5. Resuelven sistemas de ecuaciones lineales haciendo uso de cualquiera de los métodos vistos en clase.

5.2 RECOMENDACIONES.

- Efectuar y desarrollar las actividades relativas al estudio de la función lineal en los periodos normales de clase, para poder contar con la totalidad de los estudiantes, y así efectuar al respecto un trabajo más general.

- Ejecutar las actividades de manera individual y no colectiva. Pues generalmente cuando se efectúan trabajos en grupo, al menos uno de los estudiantes no participa activamente de la dinámica, lo que hace que el proceso pierda efectividad.
- Desarrollar al inicio de toda intervención una prueba diagnóstico, y al culminar la misma una prueba final, con miras a evaluar la efectividad del proceso a lo largo de su consecución.
- Ejecutar actividades para favorecer la relación docente-estudiante, y en consecuencia, crear en cada clase un ambiente ameno apto para estudiar.

BIBLIOGRAFIA

Armella, L. M. (Enero de 2002). Recuperado el 1 de Marzo de 2013, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-81040_archivo2.pdf

Bachelard, G. (2008). La noción de obstáculo epistemológico.

Berrio, I. (1996). *Matemática universal.* Bogotá: BEDOUT EDITORES S.A.

Cruz, J. D. (s.f.). *La didactica de las matematicas: Una vision general.*

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.*CALI: Peter Lang.

G.Zill, D., & M. Dewar, J. (s.f.).

Godino, J. D. (s.f.). *Perspectiva de la didactica de las matematicas como disciplina tecnocientifica.*

Gutierrez, A. (s.f.). *La didactica en colombia*.

Gutierrez, R. (2012). Recuperado el 22 de Enero de 2013, de http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/23.pdf

Hohenwater, M. (Septiembre de 2009). Recuperado el 4 de Marzo de 2013, de https://www.geogebra.org/help/docues.pdf

Londoño, N., & Bedoya , H. (s.f.).

Mothelet, M. G. (s.f.). Recuperado el 11 de Febrero de 2013, de http://www.astraph.com/udl/biblioteca/antologias/semiotica.pdf

Murillo, J. (30 de Noviembre de 2010). Recuperado el 20 de febrero de 2013, de http://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/I_Etnografica_Trabajo.pdf

P, J. E. (Mayo de 2009). Recuperado el 15 de Febrero de 2013, de http://www.upnfm.edu.hn/bibliod/images/stories/Tesis/Jose%20Enrique%20Rivera%20Pavon%20Nuevo.pdf

Palacios, R. M. (s.f.). *Investigacion cualitativa y cuantitativa - diferencias y limitaciones.*

Restrepo, M. C., & Tabares Idagarra, L. (s.f.). Metodos de Investigacion en Educacion .

Rey, F. G. (julio de 2006). Recuperado el 18 de febrero de 2013, de http://www.odhag.org.gt/pdf/R_INVESTIGACION%20CUALITATIVA.pdf

Rojas, P. J. (s.f.). *Sistemas de representacion y aprendizaje de las matematicas.*

Salgado, Z. L. (22 de Marzo de 2012). Recuperado el 6 de Febrero de 2013, de http://revistas.ojs.es/index.php/didascalia/article/download/796/678

Santos, W. M. (Junio de 2008). Recuperado el 4 de Febrero de 2013, de http://biblioteca.unisucre.edu.co:8080/dspace/bitstream/123456789/383/1/515.252H557.pdf

Saussure, F. d. (s.f.).

Anexos

Anexo 1. Institución educativa Julumito.

ANEXO 1.1. Estudiantes de grado decimo de la institución educativa Julumito.

ANEXO 2: DIAGNÓSTICO

ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO

Primera sesión ___________________________

Estudiante: ____

Prueba diagnóstico

Desarrollar las siguientes actividades:

Ejercicio 1.

Dados los siguientes grupos de números, efectué las cuatro operaciones elementales de la aritmética entre ellos.

a) $-3,\ 8.-1, 9$
b) $\frac{1}{2},\ \frac{-2}{5},\frac{3}{7},\frac{-7}{2}$
c) $-9,\ \frac{3}{11}, 3,\ \frac{-1}{3}$
d) $-2\frac{3}{2},\ 3,\ \frac{-5}{6}$

Ejercicio 2.

Resolver las siguientes ecuaciones lineales.

a) $3x\text{-}11 = 23$
b) $30 + 15y = 15$
c) $\frac{2}{7}z\text{-}\frac{1}{4} = \text{-}\frac{3}{7} + 12z$
d) $\frac{3}{4}x + \frac{6}{9} = \frac{7}{2}x\text{-}1$

Ejercicio 3.

Obtenga la gráfica correspondiente de la función lineal $\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}\,y = 1$, determinando los puntos de corte con los ejes X e Y, el valor de la pendiente y la naturaleza de la recta.

Ejercicio 4

Dado el siguiente conjunto de parejas ordenadas, ubíquelas correctamente en el plano cartesiano de tal forma que al unirlas obtenga como resultado una línea recta.

- Conjunto de parejas ordenadas.
- $\{(-4,-7),(-3,-6),(-2,-5),(-1,-4),(0,-3),(1,-2),(2,-1),(3,0),(4,1)\}$

Ejercicio 5

Identifique las variables dependiente e independiente, los interceptos con los ejes, y la pendiente de las siguientes rectas:

a) $x + y = 3$

b) $\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{3}y + 1 = 0$

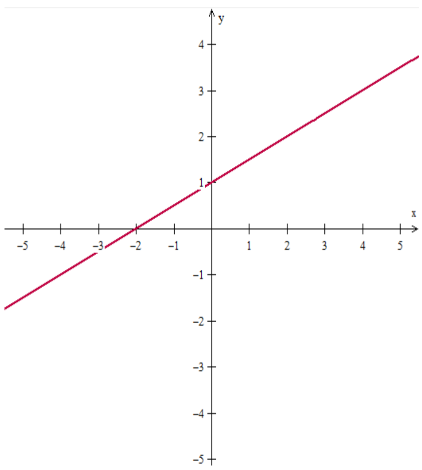
c) $2x\text{-}4y = x\text{-}y$

d) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{9}y = 5\text{-}\frac{7}{9}y$

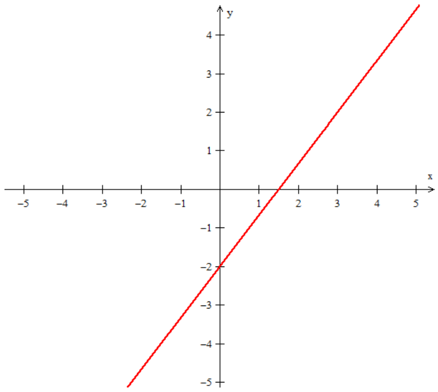
Ejercicio 6.

Obtenga la ecuación de las rectas graficadas:

a)



b)



Ejercicio 7

a) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5,2)$ y es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$

b) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5,2)$ y es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5$.

ANEXO 3: GUÍA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LINEAL Y SUS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN.

- **Primera Actividad**

Ejercicio 1.

Dados los siguientes grupos de números, efectué las cuatro operaciones elementales de la aritmética entre ellos.

a) $-3,\ 8.-1, 9$

b) $\frac{1}{2},\ \frac{-2}{5},\frac{3}{7},\frac{-7}{2}$

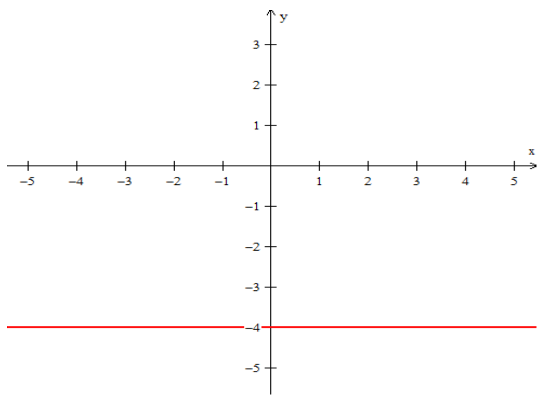
c) $-9,\ \frac{3}{11}, 3,\ \frac{-1}{3}$

d) $-2\frac{3}{2},\ 3,\ \frac{-5}{6}$

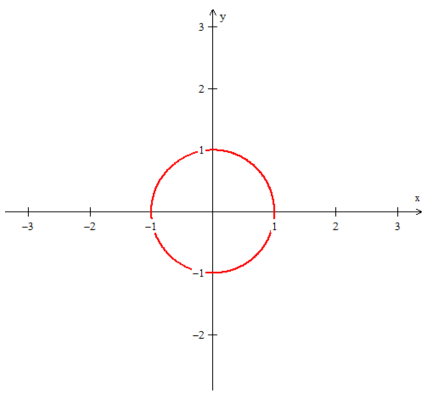
Ejercicio 2

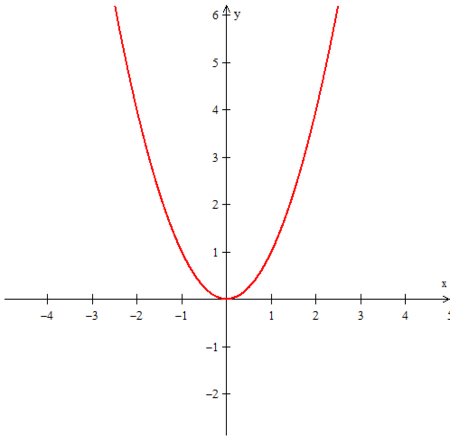
Dadas las siguientes gráficas, determine cuáles de ellas representan funciones. En caso positivo encuentre el dominio y el rango para cada una de ellas.

$x^2 + y^2 = 1$



$y = -4$



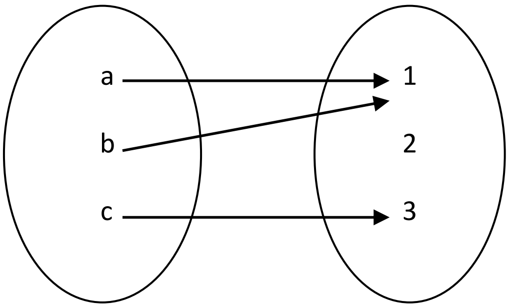


$y = x^2$

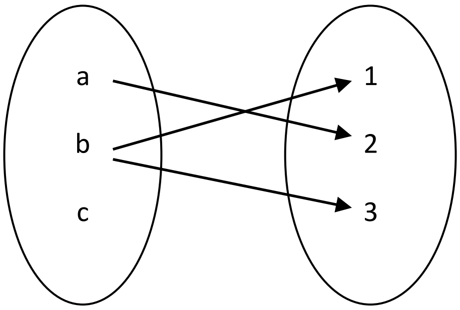
Ejercicio 3

De los siguientes diagramas sagitales, cual no representa una función. Explique su respuesta.

a)



b)



Ejercicio 4.

Grafique las siguientes funciones y determine el dominio y el rango.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \log x$

d) $f(x) = -x + 11$

Ejercicio 5.

Encuentre el dominio y el rango de las siguientes funciones lineales:

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = -3$

c) $f(x) = 0$

d) $f(x) = 3x-4$

Ejercicio 6.

Determine el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$

b) $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$

c) $h(x) = \sqrt{2-x-x^2}$

Ejercicio 7.

Evalúe la función $f(x) = \frac{-3}{5}x-3$ para cada uno de los siguientes valores:

a) $f(a)$

b) $f(a + h)$

c) $f(-a)$

d) $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $h \neq 0$

- **Segunda actividad**

Ejercicio 1.

Dada la función $y = \frac{1}{2}x - 1$ complete la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Ejercicio 2.

Complete la tabla del ejercicio anterior para grafique la función $y = -\frac{1}{2}x - 1$. En qué se diferencia esta curva a la anterior.

Ejercicio 3

Grafique las siguientes funciones lineales, únicamente encontrando los interceptos con los ejes coordenados.

a) $y = 2$
b) $5x + \frac{1}{8}y = 0$
c) $x + y = 9x - y$
d) $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = 1 - \frac{2}{5}x$

Ejercicio 4

Determine la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos:

a) $P(2,4), Q(4,12)$
b) $P(-1,3), Q(1,-6)$
c) $P(2,2), Q(0,0)$
d) $P(-2,3), Q(5,5)$

Ejercicio 5

Grafique las rectas que pasan por le punto de coordenadas $(0,0)$ y tiñen pendiente $1, 0, \frac{1}{2}, 2$ y -1

- **Tercera actividad**

Ejercicio 1

Grafique las funciones $y = x$ y $y = -x$ en un mismo plano cartesiano a partir de la siguiente tabulación.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Y responda:

1. Qué conclusiones se pueden obtener al graficar tales rectas en un mismo plano.
2. ¿Son estas rectas perpendiculares?
3. ¿En que influye el hecho de que ambas rectas tengan término independiente nulo?
4. ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de ellas?

Ejercicio 2

Grafique las funciones $y = x + 4$ e $y = x-4$ a partir de la siguiente tabla de valores en un mismo plano cartesiano.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

¿Qué se puede concluir gráficamente del hecho que el término independiente sea positivo para la primera función y negativo para la segunda función?

Ejercicio 3

Demuestre que los puntos $A(1,1), B(7,4), C(5,10), D(-1,7)$ son los vértices de un paralelogramo.

Ejercicio 4

Demuestre que los puntos $A(1,1), B(1,3), C(10,8)$ y $D(0,6)$ son los vértices de un rectángulo.

Ejercicio 5

Utilice el concepto de pendiente para determinar si los puntos dados son colineales (pertenecen a una misma recta).

a) $(1,1), (3,9), (6,21)$
b) $(-1,3), (1,7), (4,15)$

- **Cuarta actividad**

Ejercicio 1

Determine si las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares, haciendo uso del método grafico para la solución de sistemas lineales:

$$3x + 2y = 3$$
$$6x + 4y = 24$$

Ejercicio 2

Encuentre gráfica y analíticamente el punto de intersección de las siguientes rectas.

$$2x + y = 5$$
$$x - y = 4$$

¿Qué relación existe entre el punto de intersección y las rectas?

Ejercicio 3

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,6)$ y es perpendicular a la recta $y = 1$.

Ejercicio 4

Determine si las rectas $8x - y = -7x + 1$ y $y = -\frac{1}{15}x + 11$ son paralelas o perpendiculares.

Ejercicio 5

Determine si las rectas $x + y - 1 = 0$ y $-x - y + 1 = 0$ son paralelas o perpendiculares.

- **Quinta actividad**

Ejercicio 1.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,4)$ y es paralela a la recta $x + 3y - 2 = 0$.

Ejercicio 2.

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(-5,4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(3,7)$.

Ejercicio 3

Encuentre la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones:

a) Intercepta el eje X en -8 y el eje Y en 6.

b) Intercepta el eje X en 1 y el eje Y en -3.

c) Pasa por los puntos (0,0) y (1,1)

d) Pasa por los puntos (-1,0) y (0,1)

Ejercicio 4

Encuentre la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto (4,5) y es paralela al eje X

b) Pasa por el punto (4,5) y es paralela al eje Y

c) Pasa por el punto (-1,2) y es paralela a la recta $x = 5$

Ejercicio 5

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por le punto (-2,11) y es perpendicular a la recta que pasa por el punto (1,1) y (5, -1).

- **Sexta actividad**

Ejercicio 1

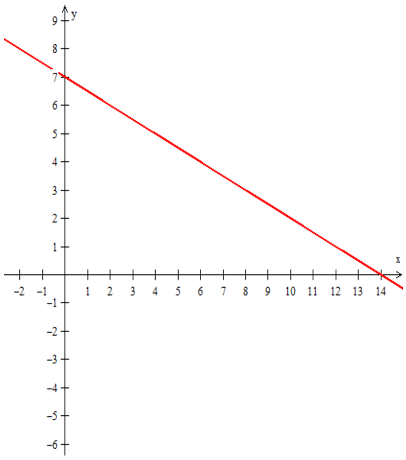
Hallar la ecuación de la recta que satisfaga las siguientes condiciones:

a) Su intercepto en el eje X es igual a -2.

b) Su intercepto con el eje Y es igual a 7.

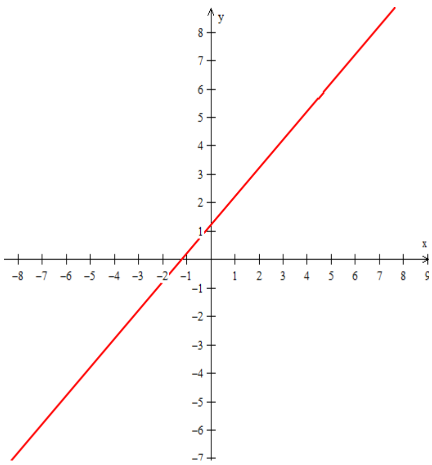
Ejercicio 2

Obtenga la ecuación de la recta indicada



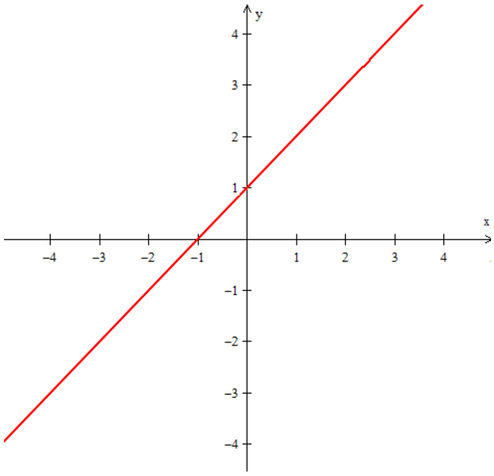
Ejercicio 3.

Obtenga la ecuación de la recta indicada



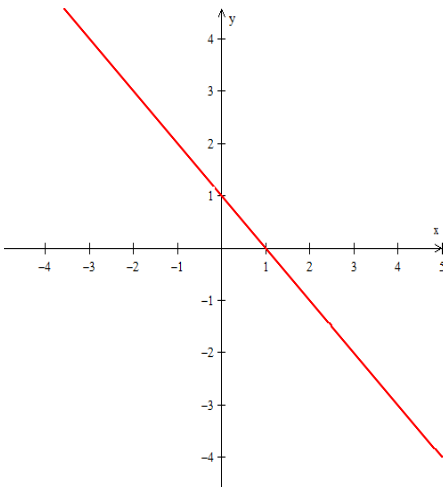
Ejercicio 4

Obtenga la ecuación de la recta indicada



Ejercicio 5

Obtenga la ecuación de la recta indicada



- **Séptima actividad**

Modele los siguientes enunciados en lenguaje algebraico, y determine la solución de los sistemas lineales generados.

a) La suma de dos números reales es 18 y su diferencia es 4. Hallar los números.
b) La diferencia de dos números enteros es 25 y su suma es 1; encontrar los números.
c) Si Pedro tiene el triple de dinero que tiene Juan, y ambos suman $200. ¿Cuánto tiene cada uno?
d) La suma de los dígitos de un numero entero de dos cifras es 9, si se invierten las cifras el numero queda aumentado en 27. Encontrar el número.
e) La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 10, y al invertir los dígitos el número queda aumentado en 27. Encontrar el número.
f) La relación entre dos números es de 5 a 8. Si al menor se le suman 4 y al mayor se le restan 2, la relación es de 4 a 5. ¿Cuáles son estos números?
g) La suma de los inversos de dos números es 20 y la diferencia es 6. ¿Cuáles son los números?

- **Octava actividad**

1. Usando cualquiera de los métodos vistos en clase para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Determine la solución de cada uno de los siguientes sistemas.

a. $\begin{cases} x-2y = -1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x-y = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x-y = 0 \\ \frac{x}{4} + 5y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ \frac{3x}{4} + y = -1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 21 \end{cases}$

2. Dado que la función lineal es una inyectiva, encuentre la inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 2x + 1$

b) $2x + 3y = \frac{1}{2}$

c) $x + \frac{1}{2}y = -1$

d) $y = x$

e) $\frac{2}{7} - \frac{1}{5}y = \frac{3}{2}x$

- **Novena actividad**

Ejercicio 1

Realice las siguientes operaciones aritméticas:

a) $\big((-11)-(-17)\big)-((-3) + 6)$

b) $((-7)-(-5))^3 - (13-15)^2$

c) $((\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) \div \frac{5}{6}) - (\frac{3}{4} + 2)$

d) $\frac{(\frac{8}{7}+\frac{3}{5})}{(\frac{2}{8}-\frac{1}{9})^3} - \frac{11}{12}$

e) $(0^{1000}-7^2) + (\frac{21}{9} + \frac{1}{10})(\frac{3}{4})$

Ejercicio 2

Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a) $x + 6 = -1$
b) $2x - \frac{1}{2} = 9$
c) $-\frac{3}{2} = x - 1$
d) $2z - 5\frac{5}{7} = 13 + \frac{1}{8}z$
e) $2 + w = 3w + 8$

Ejercicio 3

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(0,1), Q(-6,3)$
b) $P(-3,0), Q(0,4)$
c) $P(1,2), Q(3,4)$
d) $P\left(\frac{2}{3}, 2\right), Q(-7, -\frac{1}{2})$
e) $P\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right), Q(\frac{7}{2}, \frac{6}{7})$

Ejercicio 4

Grafique las rectas que pasan por el punto $(-1,1)$ y tiene pendiente $-1, 0, \frac{1}{2}, 1$.

Ejercicio 5

Obtenga la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

a) Pasa por el punto $P(2,3)$ y tiene pendiente1.
b) Pendiente $\frac{2}{3}$ e intercepción con el eje Y igual a 4.
c) Pasa por el punto $P(0,-1)$ y es paralela a la recta $x + 3y-1 = 0$.
d) Pasa por el punto $P(0,-1)$ y es perpendicular a la recta $x + 3y-1 = 0$.
e) Pasa por el punto $P(0,0)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $P(0,1)$ y $Q(1,7)$.

Ejercicio 6

Determine la pendiente, los interceptos con los ejes coordenadas y la grafica de la siguiente recta.

a) $x + y = 3$.
b) $3x-2y = 12$
c) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y + 1 = 0$
d) $y = 4$
e) $x = -5$

Ejercicio 7

Determine analíticamente si las siguientes rectas son paralelas:

a) $3x-y + 2 = 0$, $x-3y + 2 = 0$.
b) $x + 5y = 1$, $x + y = 0$
c) $-x-y-7$, $x + 9y-30 = 0$
d) $y = -\frac{11}{13}x + 1y + \frac{11}{3}x= 1$
e) $y = 2$, $y = -2$

Ejercicio 8

Determine analíticamente si las siguientes rectas son perpendiculares:

a) $y = -x \;\; , \;\; y = x$

b) $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} \;\; , \;\; y = -\frac{5}{2} - 2$

c) $2x + y + 1 = 0 \;\; , \;\; x - \frac{2}{3}y = 0$

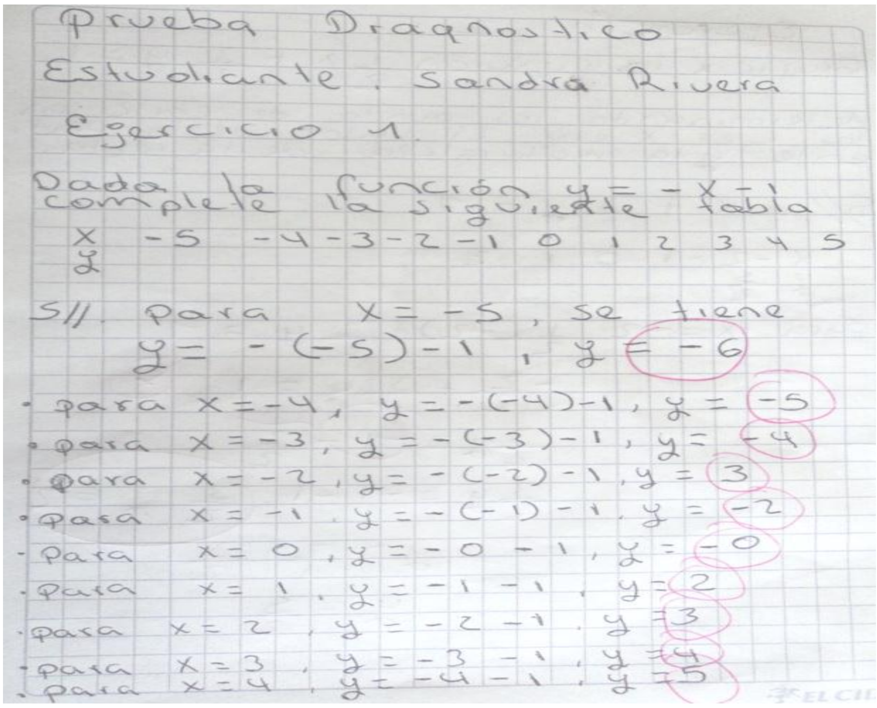
d) $\frac{6}{9}x + \frac{2}{7}y + \frac{5}{6} = 1 \;\; , \;\; \frac{9}{6}x + \frac{7}{2}y + \frac{6}{5} = 2$

e) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - \frac{5}{6} = 1 \;\; , \;\; \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{6}{5} = 2$

ANEXO 4

ANEXO 4.1 IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE SANDRA RIVERA.

Ejercicio 1



Prueba Diagnostico

Estudiante. Sandra Rivera

Ejercicio 1.

Dada la función $y = -x - 1$ complete la siguiente tabla

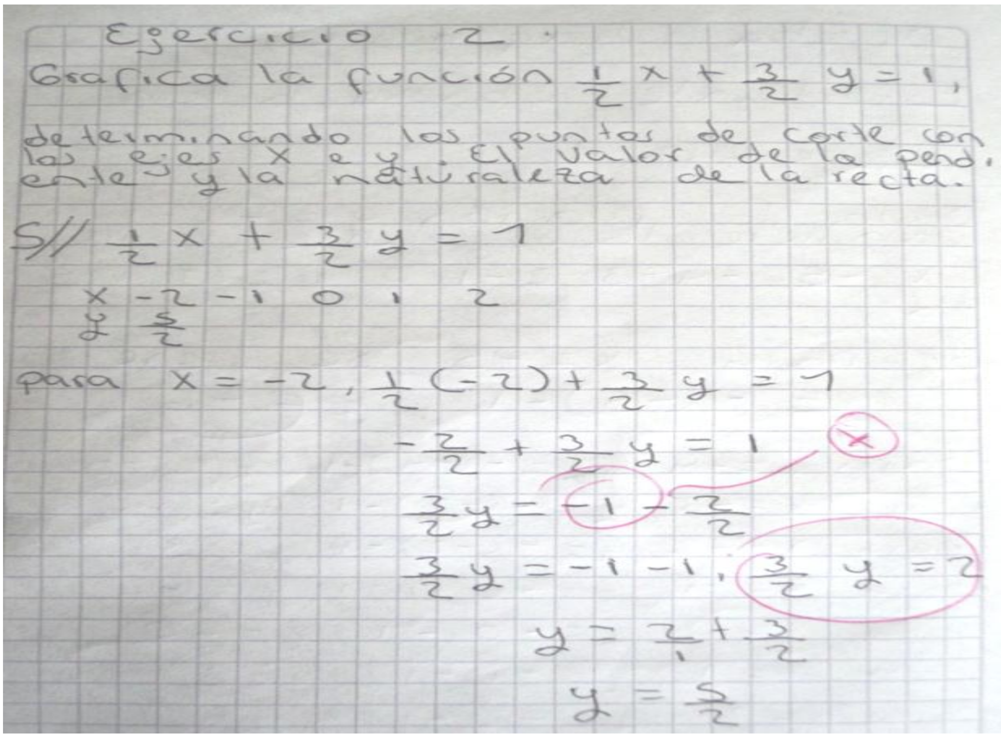
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

S// para $x = -5$, se tiene

$y = -(-5) - 1$, $y = -6$

- para $x = -4$, $y = -(-4) - 1$, $y = -5$
- para $x = -3$, $y = -(-3) - 1$, $y = -4$
- para $x = -2$, $y = -(-2) - 1$, $y = 3$
- para $x = -1$, $y = -(-1) - 1$, $y = -2$
- para $x = 0$, $y = -0 - 1$, $y = -0$
- para $x = 1$, $y = -1 - 1$, $y = 2$
- para $x = 2$, $y = -2 - 1$, $y = 3$
- para $x = 3$, $y = -3 - 1$, $y = 4$
- para $x = 4$, $y = -4 - 1$, $y = 5$

Ejercicio 2



Ejercicio 2.

Grafica la función $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 1$, determinando los puntos de corte con los ejes x e y. El valor de la pendiente y la naturaleza de la recta.

S// $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{5}{2}$				

para $x = -2$, $\frac{1}{2}(-2) + \frac{3}{2}y = 1$

$-\frac{2}{2} + \frac{3}{2}y = 1$

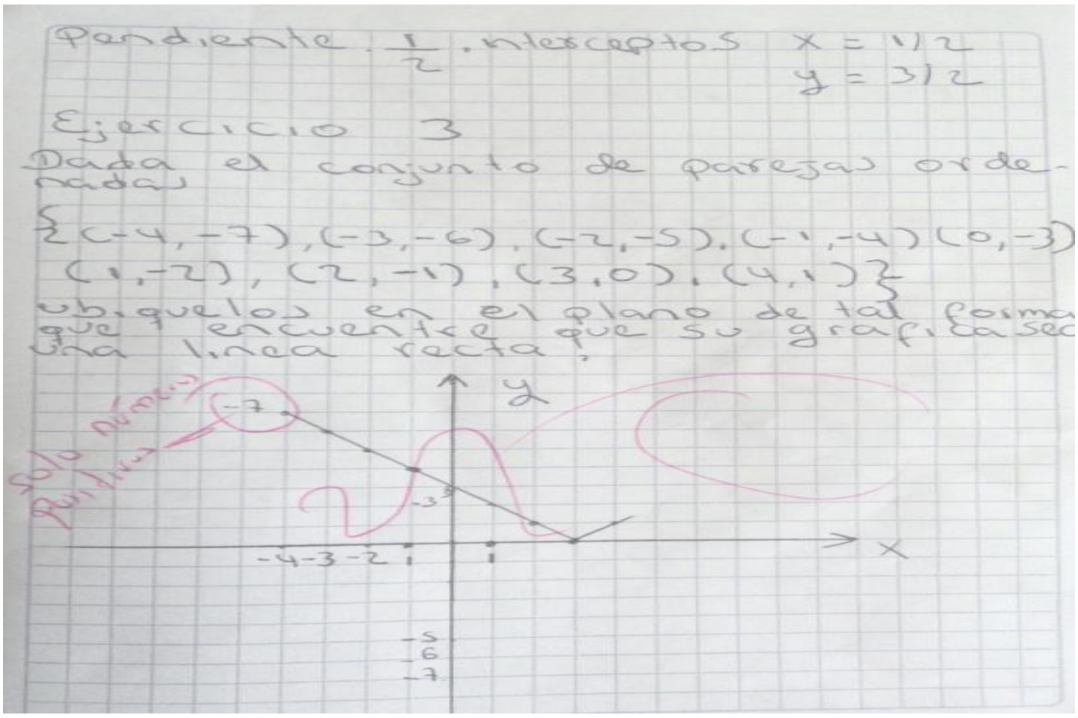
$\frac{3}{2}y = -1 - \frac{2}{2}$

$\frac{3}{2}y = -1 - 1$, $\frac{3}{2}y = 2$

$y = \frac{2}{1} + \frac{3}{2}$

$y = \frac{5}{2}$

Ejercicio 3



Pendiente. $\frac{1}{2}$. interceptos $x = 1/2$

$y = 3/2$

Ejercicio 3

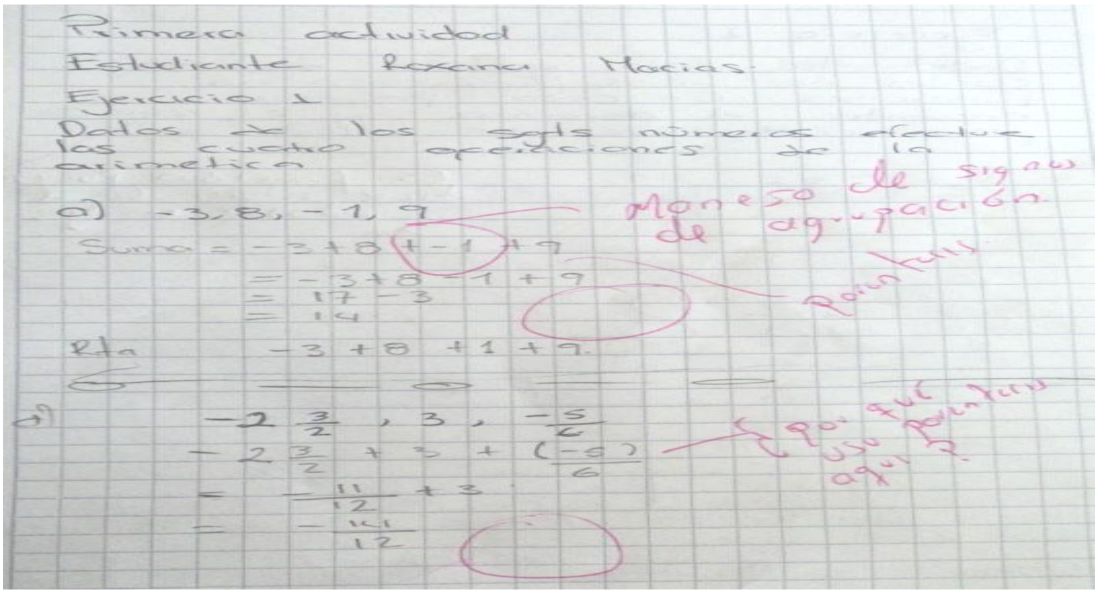
Dada el conjunto de parejas ordenadas

{(-4,-7), (-3,-6), (-2,-5), (-1,-4) (0,-3)
(1,-2), (2,-1), (3,0), (4,1)}

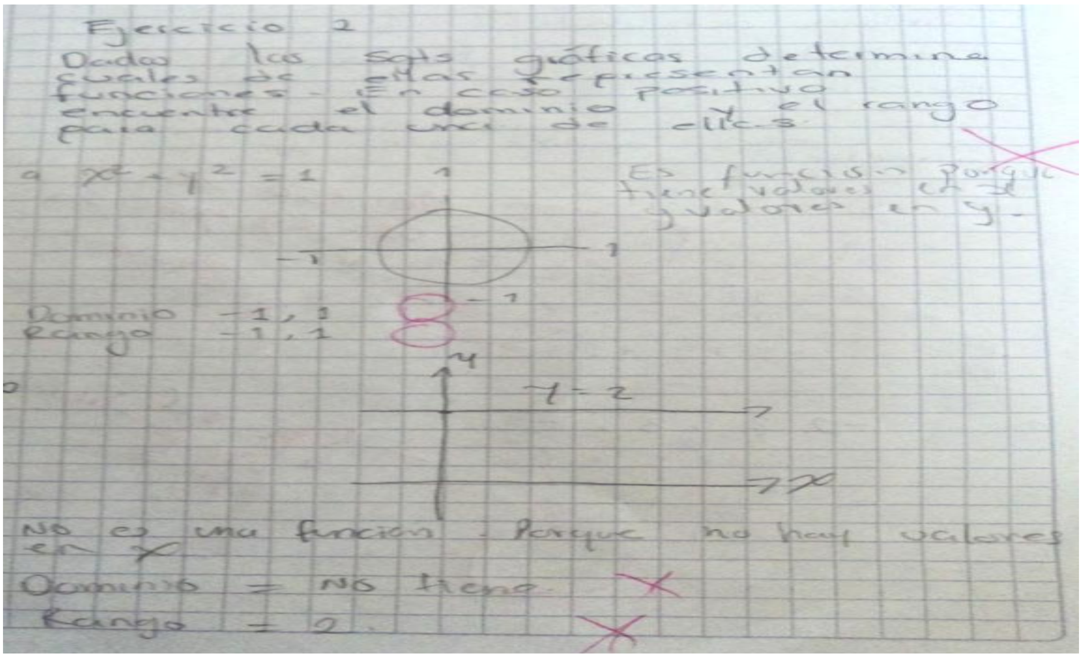
ubíquelos en el plano de tal forma que encuentre que su gráfica sea una línea recta.

ANEXO 4.2. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE ROXANA MACIAS

Ercicio 1

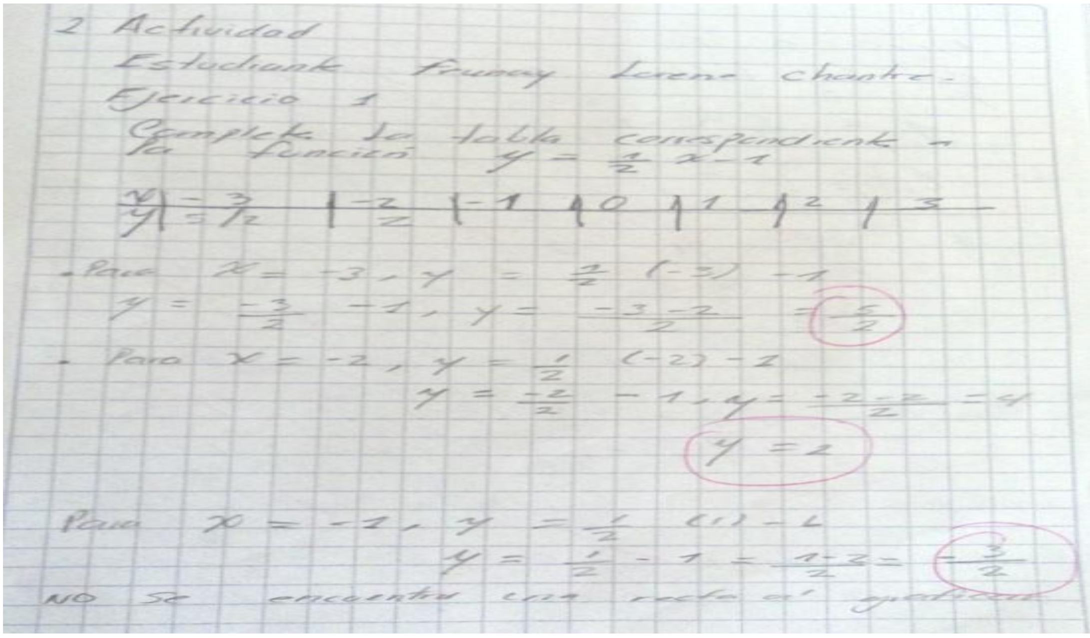


Ercicio 2



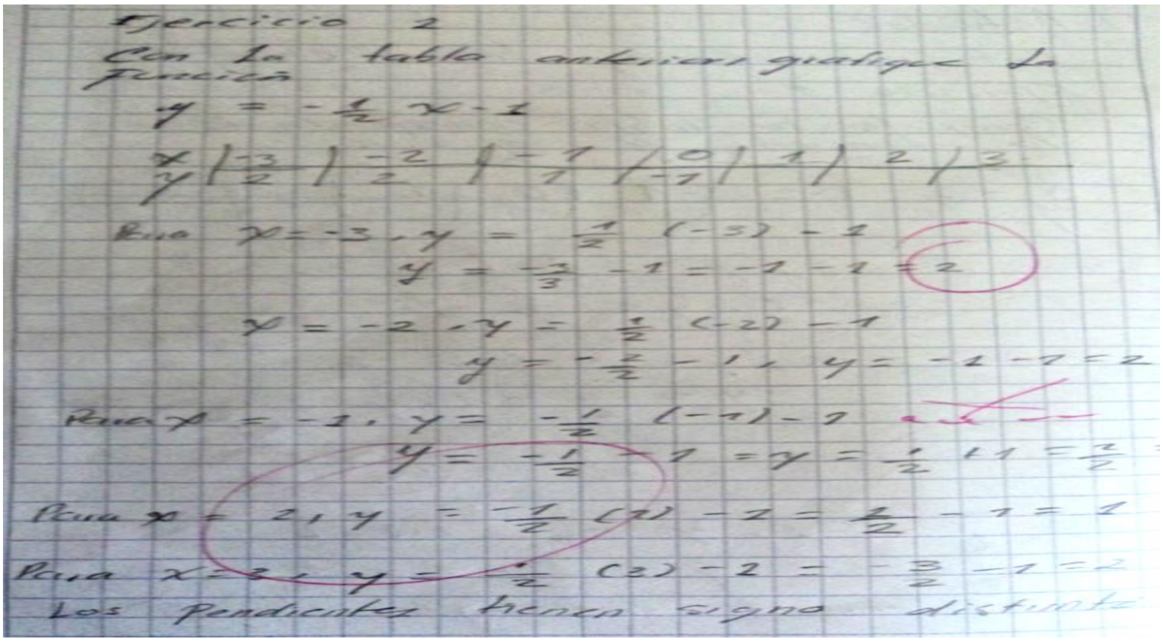
ANEXO 4.3. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE FRANCY LORENA CHANTRE MARIACA.

Ercicio 1



2 Actividad
Estudiante Francy Lorena Chantre.
Ejercicio 1
Complete la tabla correspondiente a la función $y = \frac{1}{2}x - 1$

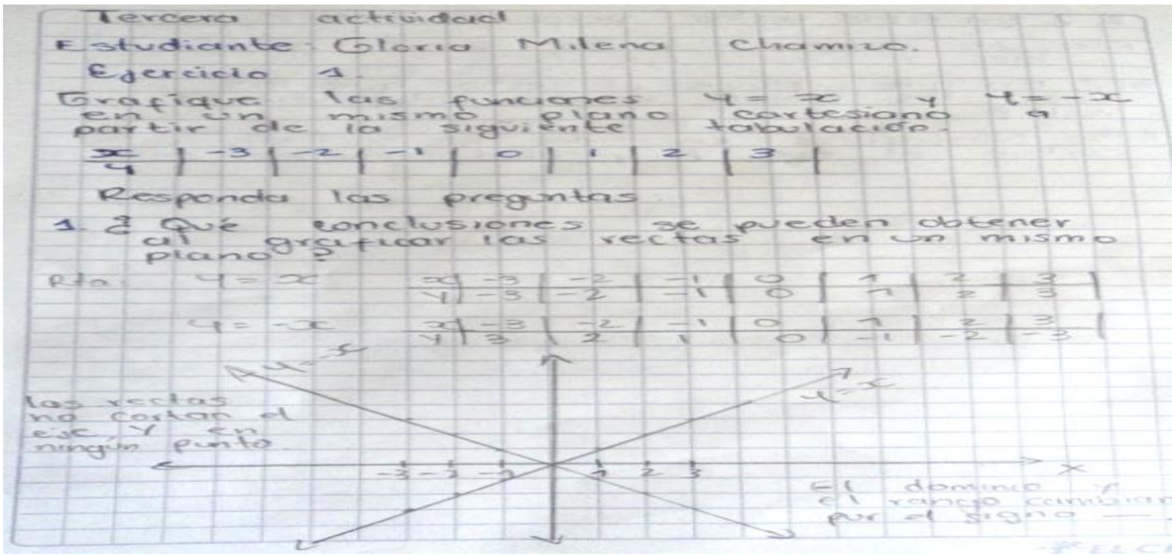
Ercicio 2



Ejercicio 2
Con la tabla anterior grafique la función
$y = -\frac{1}{2}x - 1$
Los pendientes tienen signo distinto

ANEXO 4.4. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE GLORIA MILENA CHAMIZO.

Ercicio 1



Tercera actividad

Estudiante: Gloria Milena Chamizo.

Ejercicio 1

Grafique las funciones y = x y y = -x en un mismo plano cartesiano a partir de la siguiente tabulación.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Responda las preguntas

1. ¿Qué conclusiones se pueden obtener al graficar las rectas en un mismo plano?

Rta: y = x

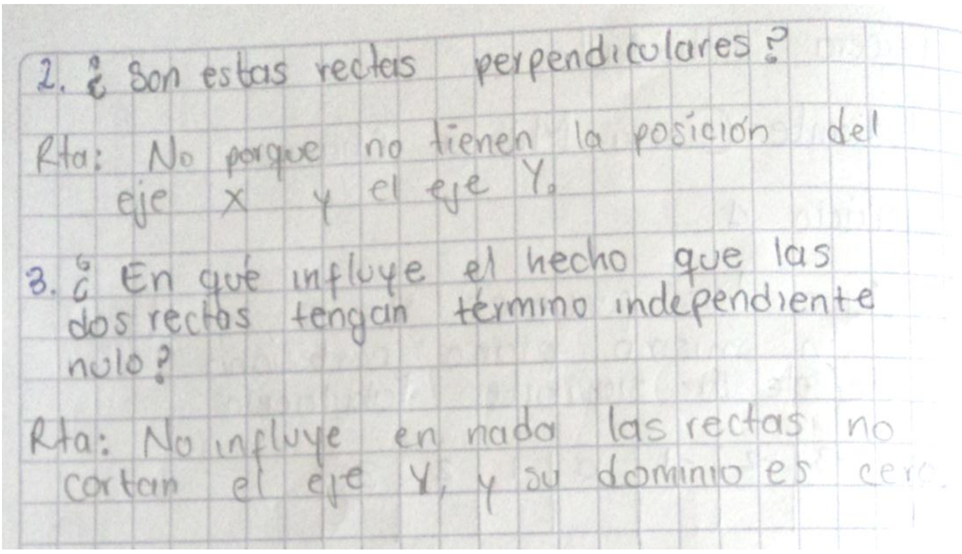
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

y = -x

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

Las rectas no cortan el eje Y en ningún punto

El dominio y el rango cambian por el signo



2. ¿Son estas rectas perpendiculares?

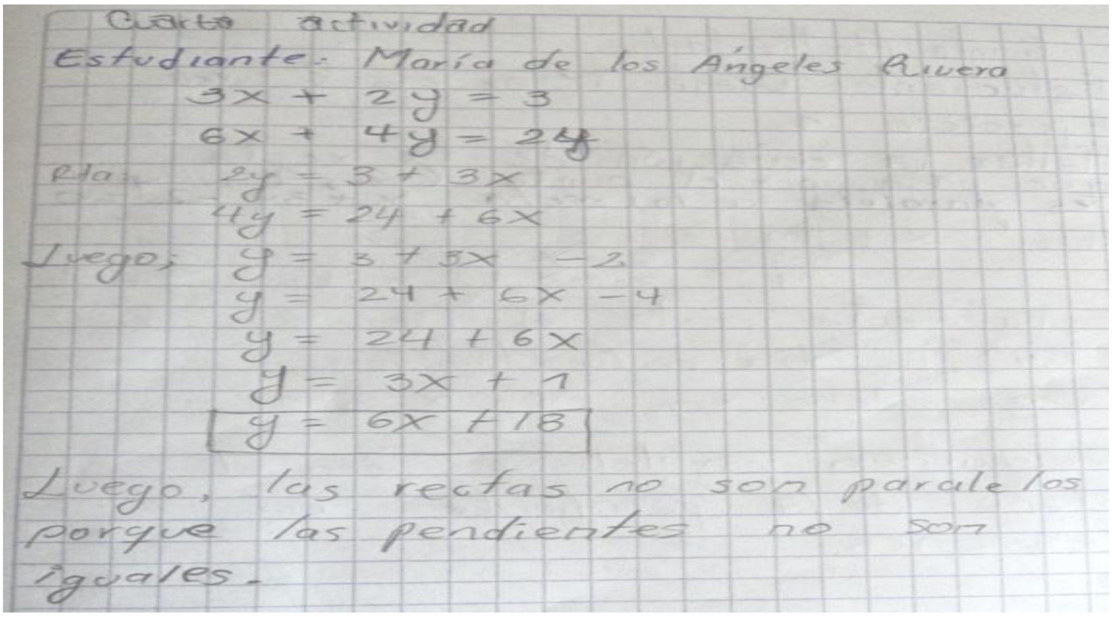
Rta: No porque no tienen la posición del eje X y el eje Y.

3. ¿En qué influye el hecho que las dos rectas tengan término independiente nulo?

Rta: No influye en nada las rectas no cortan el eje Y, y su dominio es cer

ANEXO 4.5. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE MARÍA DE LOS ÁNGELES RIVERA.

Ercicio 1



Cuarta actividad

Estudiante: María de los Ángeles Rivera

$3x + 2y = 3$

$6x + 4y = 24$

Rta. $2y = 3 + 3x$

$4y = 24 + 6x$

Luego; $y = \frac{3 + 3x}{2}$ -2

$y = \frac{24 + 6x}{4}$ -4

$y = 24 + 6x$

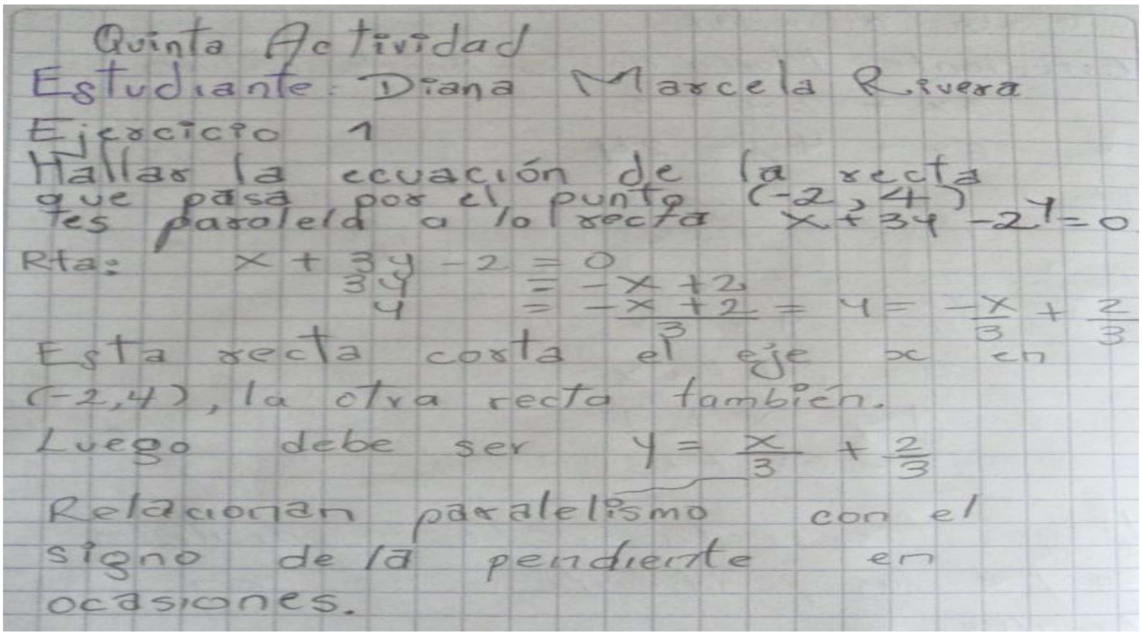
$y = 3x + 1$

$\boxed{y = 6x + 18}$

Luego, las rectas no son paralelos porque las pendientes no son iguales.

ANEXO 4.6. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE DIANA MARCELA RIVERA

Ercicio 2



Quinta Actividad

Estudiante: Diana Marcela Rivera

Ejercicio 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 4)$ y es paralela a la recta $x + 3y - 2 = 0$

Rta: $x + 3y - 2 = 0$

$3y = -x + 2$

$y = \frac{-x + 2}{3} = y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

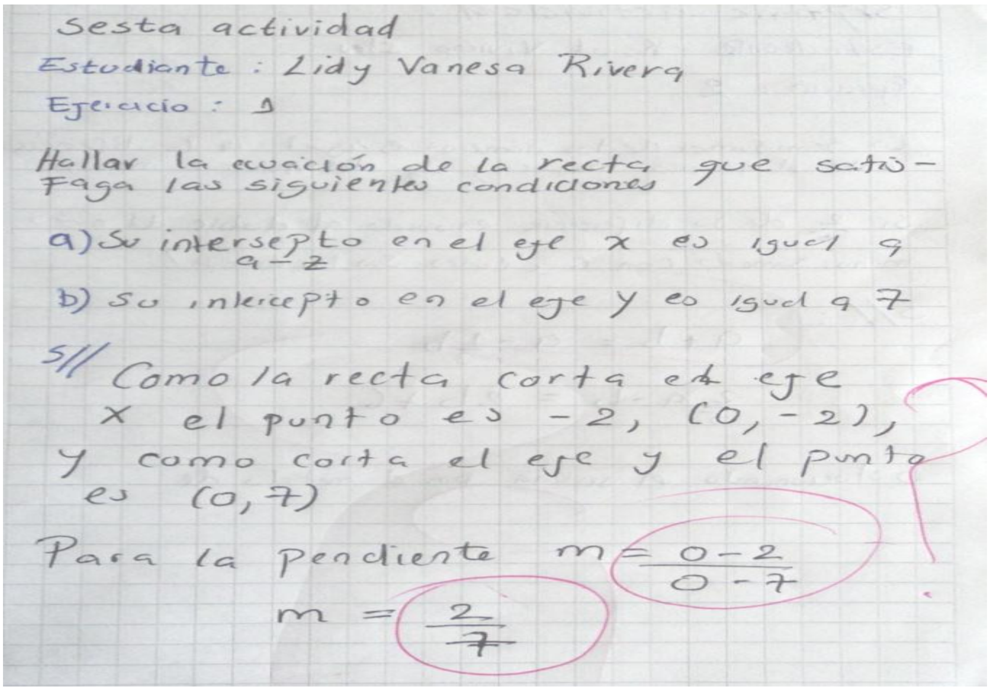
Esta recta corta el eje x en $(-2, 4)$, la otra recta también.

Luego debe ser $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

Relacionan paralelismo con el signo de la pendiente en ocasiones.

ANEXO 4.7. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE LIDY VANESA RIVERA.

Ercicio 1


Sesta actividad
Estudiante: Lidy Vanesa Rivera
Ejercicio: 1

Hallar la ecuación de la recta que satis-
Faga las siguientes condiciones

a) Su intersepto en el eje x es igual a -2

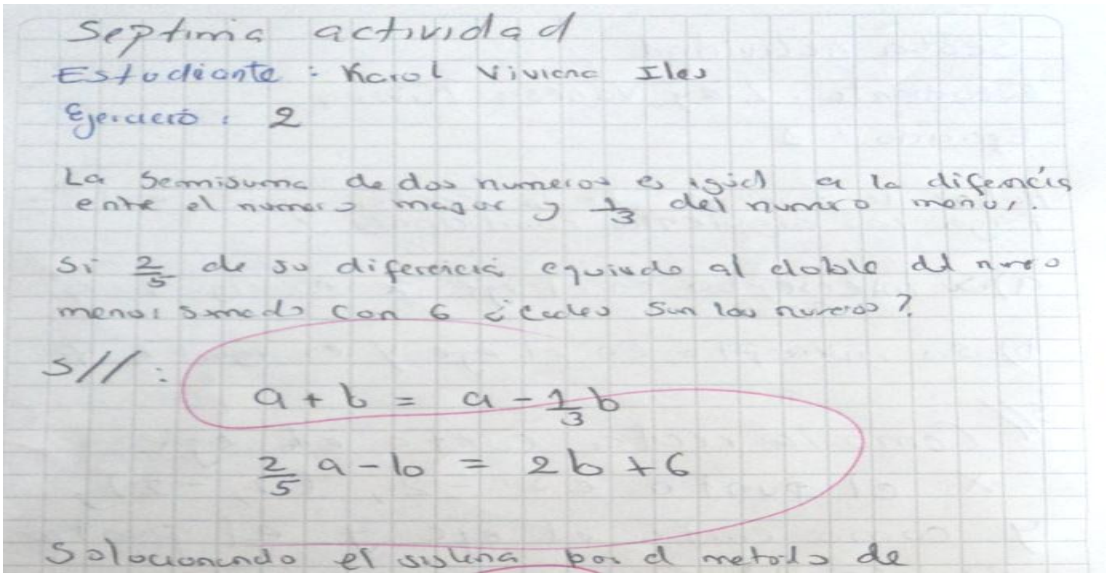
b) Su intercepto en el eje y es igual a 7

S// Como la recta corta el eje x el punto es -2, $(0,-2)$, y como corta el eje y el punto es $(0,7)$

Para la pendiente $m = \frac{0-2}{0-7}$

$m = \frac{2}{7}$

ANEXO 4.8. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE KAROL VIVIANA ILES.


Septima actividad
Estudiante: Karol Viviana Iles
Ejercicio: 2

La semisuma de dos numeros es igual a la diferencia entre el numero mayor y $\frac{1}{3}$ del numero menor.

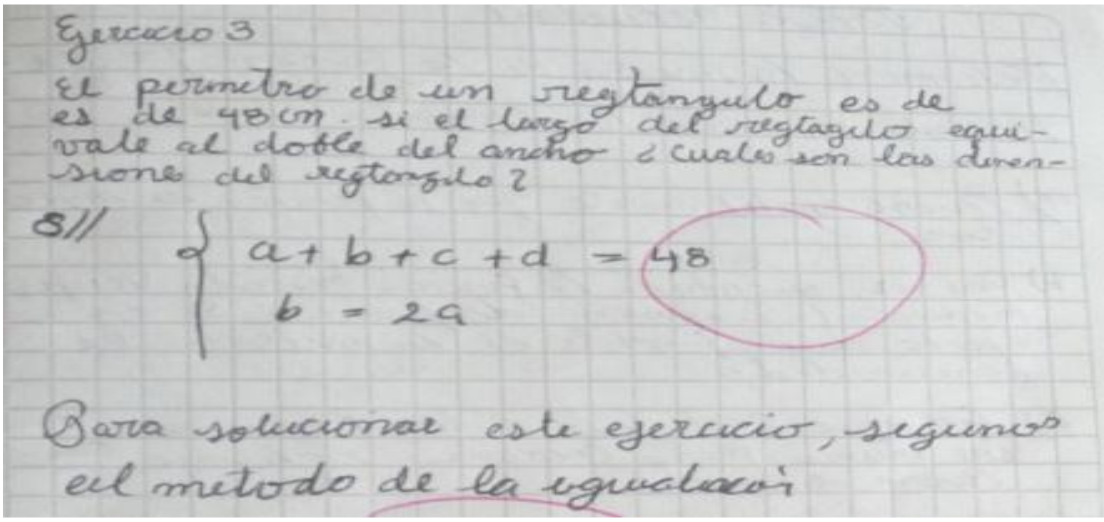
Si $\frac{2}{5}$ de su diferencia equivale al doble del numero menor sumado con 6 ¿Cuales son los numeros?

S//:

$a+b = a - \frac{1}{3}b$

$\frac{2}{5}a - b = 2b+6$

Solucionando el sistema por el metodo de



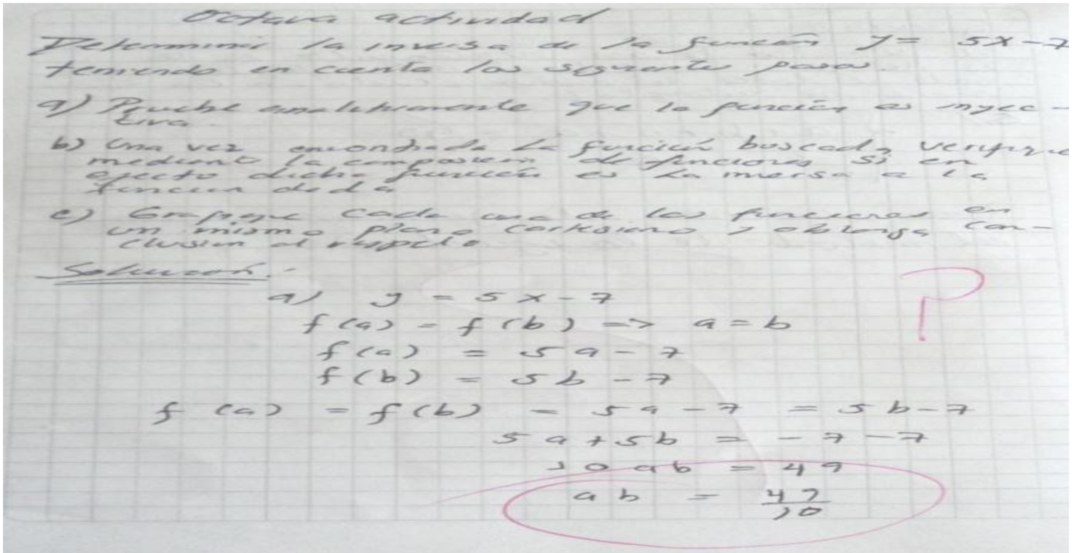
Ejercicio 3

El permetro de un regtangulo es de es de 48cm. si el largo del regtangulo equivale al doble del ancho ¿Cuales son las dimensiones del regtangulo?

S// $\begin{cases} a+b+c+d = 48 \\ b = 2a \end{cases}$

Para solucionar este ejercicio, seguimos el metodo de la igualación

ANEXO 4.9. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE SANDRA RIVERA.



Octava actividad

Determinar la inversa de la función y = 5x − 7 teniendo en cuenta los siguientes pasos.

a) Pruebe analíticamente que la función es inyectiva.

b) Una vez encontrada la función buscada verifique mediante la composición de funciones, si en efecto dicha función es la inversa a la función dada.

c) Grafique cada una de las funciones en un mismo plano cartesiano y obtenga conclusiones al respecto

Solución:

a) $y = 5x - 7$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$f(a) = 5a - 7$

$f(b) = 5b - 7$

$f(a) = f(b) = 5a - 7 = 5b - 7$

$5a + 5b = -7 - 7$

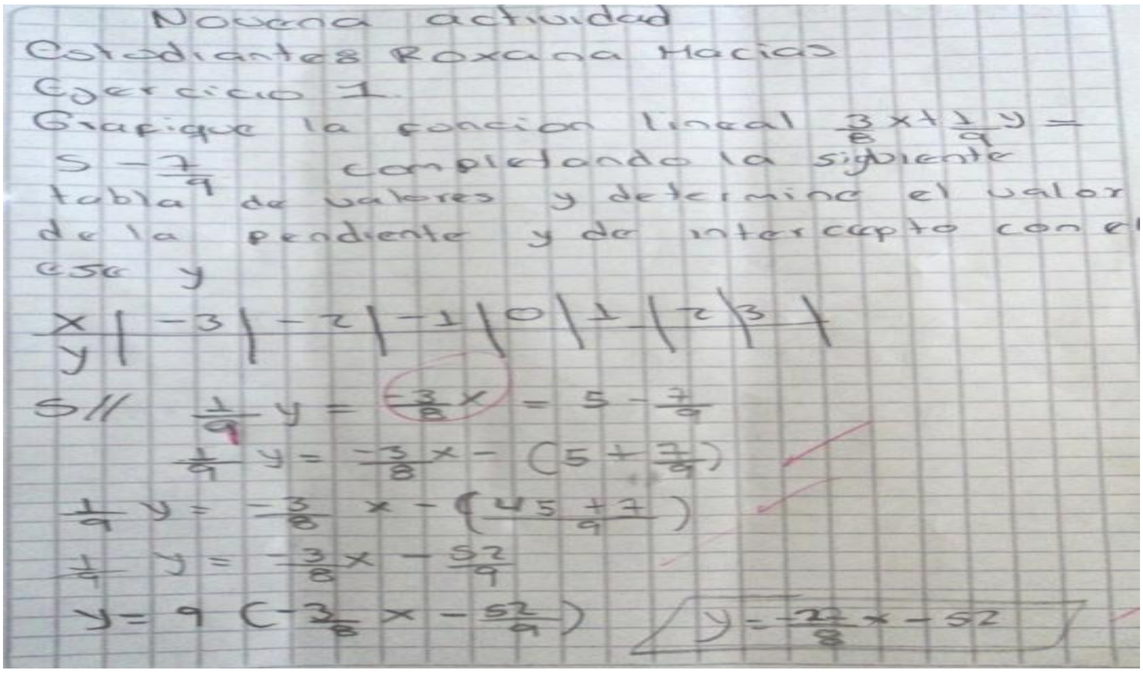
$10ab = 49$

$ab = \frac{47}{10}$

?

ANEXO 4.10. IMÁGENES DEL TRABAJO REALIZADO POR LA ESTUDIANTE ROXANA MACIAS.

Ercicio 1


Novena actividad

Estudiantes Roxana Macias

Ejercicio 1.

Grafique la funcion lineal $\frac{3}{8}x+\frac{1}{9}y = 5-\frac{7}{9}$ completando la siguiente tabla de valores y determine el valor de la pendiente y de intercepto con el eje y

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

S// $\frac{1}{9}y = -\frac{3}{8}x = 5-\frac{7}{9}$

$\frac{1}{9}y = -\frac{3}{8}x - (5+\frac{7}{9})$

$\frac{1}{9}y = -\frac{3}{8}x - (\frac{45+7}{9})$

$\frac{1}{9}y = -\frac{3}{8}x - \frac{52}{9}$

$y = 9(-\frac{3}{8}x - \frac{52}{9})$

$\boxed{y = -\frac{27}{8}x - 52}$