CUADRADOS MÁGICOS:
UNA FORMA LÚDICA DE ACERCARSE A LAS MATEMÁTICAS

ERIKA VARGAS CRUZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2013

CUADRADOS MÁGICOS:

UNA FORMA LÚDICA DE ACERCARSE A LAS MATEMÁTICAS

ERIKA VARGAS CRUZ

ASESORA:

Gabriela Arbeláez Rojas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo de
Grado fue aprobado
Por la asesora y
Respectivo evaluador

Vo. Bo. Wilmer Molina Yepes
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Gabriela Arbeláez Rojas
Asesora

Vo. Bo. Eruín Alonso Sánchez Ordoñez
Evaluador

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia importante en la vida del ser humano, a diario se hace uso de ésta. Los niños desde los primeros años de vida van construyendo el pensamiento matemático en forma gradual y sistemática, convirtiéndose en observadores de su entorno y siendo partícipes a la hora de manipular objetos.

Las matemáticas tienen muchas características que las asemejan a los juegos. Aunque no se puede afirmar que las matemáticas sean un juego[1], esencialmente porque su finalidad y sus aplicaciones van mucho más allá del carácter estrictamente lúdico de la mayoría de los juegos. Cuando se trata de resolver un problema, se tiene un objetivo, comparable al de la mayoría de los juegos (hallar la solución o lograr ganar una partida), y se dispone también de unas reglas claramente definidas, sobre aquello que se puede y no hacer, para lograr el objetivo.

Los juegos, las recreaciones matemáticas, las adivinanzas lógicas, los problemas de pensar y en general las diversas actividades lúdicas[2] alrededor de las matemáticas constituyen en su conjunto un recurso altamente valioso para la enseñanza de las matemáticas. Para que lo anterior sea posible, las actividades, recreativas o no, deberían tener dos fases complementarias: la acción y la reflexión. Es decir, toda actividad propuesta debería contener una parte de trabajo de los alumnos, donde estos, individualmente o en grupos, construyan, propongan

---

[1]: “Ejercicio recreativo sometido a reglas y en el que se gana o se pierde”. (Diccionario de la Real Academia).

[2] “La actividad lúdica constituye el potenciador de los diversos planos que configuran la personalidad del niño o niña o adolescente. El desarrollo sicosocial, la adquisición de saberes, la conformación de una personalidad, son características que se van adquiriendo o apropiando a través del juego y en el juego. La actividad lúdica es una condición para acceder a la vida, al mundo que nos rodea” (Jiménez, 1996: 15).

ideas, soluciones. La otra parte, que en ocasiones puede presentarse interrelacionada con la anterior, es la que tiene que ver con la reflexión implicada en el juego en donde se discute y cuestiona sobre lo que se ha hecho y especialmente sobre su significación matemática. Se presenta así, un proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas como una secuencia de actividades propuestas y formalizadas por el docente, teniendo en cuenta la participación e intervención de los estudiantes.

Desde la antigüedad los pasatiempos numéricos se han destacado en las matemáticas, en gran parte por su aspecto lúdico y además porque algunos de ellos han dado lugar al nacimiento de nuevas ramas de esta ciencia. Un interesante y entretenido tema que ha atraído la atención de muchos matemáticos y aficionados a la matemática, ha sido la construcción de cuadrados mágicos.

Los cuadrados mágicos, más allá de un juego, un pasatiempo, de tener ciertas propiedades y formulas para su construcción, son una herramienta en el aprendizaje de las matemáticas.

El tema de los cuadrados mágicos permite trabajar de manera entretenida en distintos ámbitos de la matemática: aritmética, algebra y geometría, generando actividades propensas a que el alumno desarrolle diversas capacidades, habilidades y actitudes tales como curiosidad, perseverancia, creatividad, ingenio, autonomía, trabajo colaborativo. Esto, seguramente, le permitirá mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en el tema, enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos. Practicar los algoritmos de las operaciones, así como el cálculo y la estimación mental de resultados, haciendo uso de ecuaciones con una incógnita, lo cual le va a permitir también al estudiante desarrollar estrategias para la resolución de problemas. Por ende, se fomenta el amor por las matemáticas, ya que los estudiantes aprenden jugando, explorando y además descubriendo ciertas propiedades matemáticas.

Es necesario romper con la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil.

En este documento se sistematiza la experiencia de la Práctica Pedagógica que tuvo una duración de cuatro semestres y cuyo eje central fue la elaboración de un proyecto de aula para implementarlo a estudiantes de la educación media del departamento del Cauca. Después de asumir prácticamente el 60% de los cursos de la licenciatura en matemática, tenemos un bagaje teórico que nos debería dotar de una cierta capacidad conceptual y metodológica para sistematizar esta primera experiencia de aula.

La realización del proyecto de aula que se desarrolló en el colegio Champagnat de la ciudad de Popayán, intenta implementar la lúdica[3], como una estrategia metodológica para la enseñanza de la matemática, a partir de la construcción de algunos cuadrados mágicos.

El documento esta constituido por cinco capítulos. El primer capítulo hace referencia a la institución donde se implementó el proyecto de aula y los

[3] "Lúdica dícese de lo perteneciente o relativo al juego. El juego es lúdico, pero no todo lo lúdico es juego. La lúdica se entiende como una dimensión del desarrollo de los individuos, siendo parte constitutiva del ser humano. El concepto de lúdica es tan amplio como complejo, pues se refiere a la necesidad del ser humano, de comunicarse, de sentir, expresarse y producir en los seres humanos una serie de emociones orientadas hacia el entretenimiento, la diversión, el esparcimiento, que nos llevan a gozar, reír, gritar e inclusive llorar es una verdadera fuente generadora de emociones. Para muchos el jugar equivale a perder el tiempo, y no están equivocados si en la aplicación del juego no hay estructura, sentido y contenido". (Yturralde, 2001, www.yturralde.com)

estudiantes con los cuales se llevó a cabo el mismo. En el segundo capítulo se exponen los referentes teóricos, haciendo mención de la importancia del juego en la enseñanza de las matemáticas, tomando como referente a Miguel de Guzmán. En el tercer capitulo se dará a conocer la metodología, presentando los talleres que se trabajaron en el aula. En el cuarto capítulo se presenta el trabajo de los estudiantes en el desarrollo de los talleres, haciendo una respectiva reflexión, lo cual se plasmó en lo que se le designó como Bitácora. Finalmente, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones generales del proyecto de aula.

I. CONOCIENDO LA INSTITUCIÓN

1.1 Presentado el colegio donde se hizo la intervención

Marcelino José Benito Champagnat Chirat (20 de mayo de 1789 Francia – 6 de junio de 1840), fue quien dio vida a la educación Marista. Sacerdote de la sociedad de María y fundador de los Hermanos Maristas de la enseñanza o hermanitos de María. La propuesta educativa de Champagnat se fundamentó en el interés por el alumno, tanto en su condición física como espiritual, idea que se resume en la versión simplificada de su intención educativa, “se trata de formar excelentes cristianos y comprometidos ciudadanos”. Su metodología, se denominó “pedagogía de la presencia”, que exige de los educadores, un acompañamiento continuo de los estudiantes aún fuera de las aulas.

El 27 de septiembre de 1932 fue fundado el Colegio Champagnat, de carácter privado, bajo la dirección del Hermano francés Acacio, como Director. Las clases se iniciaron el 10 de octubre del mismo año, con cuarenta alumnos distribuidos en tres sesiones de primaria: elemental, media y superior.

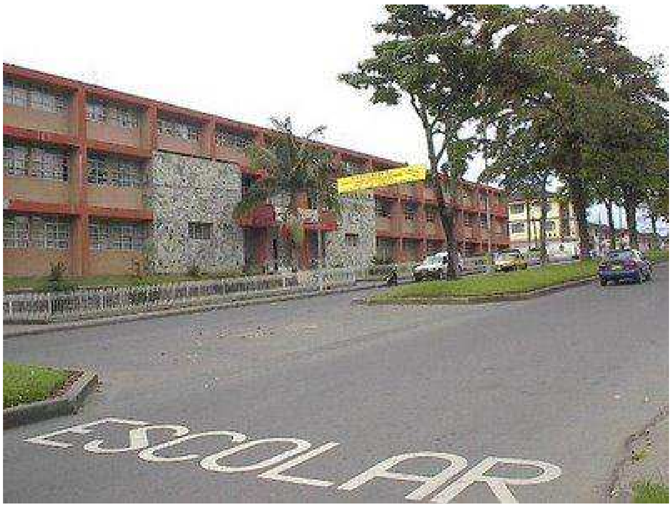


Figura 1. Colegio Champagnat

El colegio Champagnat de Popayán comenzó a funcionar en el año 1967, en la actual sede sobre la carrera 9ª. No. 5 N- 51. Actualmente el Colegio, sigue siendo dirigido por la Comunidad de los Hermanos Maristas de la Enseñanza, la cual continúa su labor cultural, bajo los principios de la Filosofía educativa Champagnat, formando Buenos Cristianos y excelentes ciudadanos, según reza en sus documentos institucionales.

El Colegio Champagnat de Popayán es una institución educativa, que a través de la pedagogía marista caracterizada por el amor a maría, el espíritu de familia, el amor al trabajo, la sencillez de vida y la presencia, pretende que los niños y jóvenes conozcan y amen a Jesucristo, para ayudarles a ser buenos cristianos y buenos ciudadanos, haciendo así realidad, el sueño de San Marcelino Champagnat.[4]

[4] (www.champagnatpopayan.edu.co)

1.2 Presentando los estudiantes que hicieron parte del proyecto de aula

El proyecto de aula se implementó en el Colegio Champagnat con estudiantes de grados 6° y 7° y versó sobre los cuadrados mágicos, tomando en cuenta su historia y extrayendo de ellos ciertas propiedades matemáticas que podían convertirse en una herramienta didáctica para la enseñanza de algunos conceptos de las matemáticas elementales.

A la sesión asistió un grupo no tan numeroso de estudiantes, hay que resaltar que desde el primer día hasta el último que se llevó a cabo el proyecto, se destacó un grupo de nueve estudiantes que sin falta asistieron a todas las actividades. A los nueve estudiantes se les hizo un seguimiento, sin demeritar el trabajo de los demás.

El proyecto de aula se convirtió en un interesante tema para trabajar, una actividad motivadora, ya que el estudiante podía descubrir ciertas estrategias, propiedades, haciendo uso de algunas operaciones de aritmética. Al mismo tiempo, el estudiante fue creativo e ingenioso. Lo cual le permitió salir un poco de la rutina. Por ende, se espera que el estudiante haya cambiado un poco la perspectiva que traía hacia la matemática, rígida y aburrida.

Este trabajo en el aula fue enriquecedor tanto para los estudiantes, como para mí. Los estudiantes al principio pensaron o llegaron con la idea de que iban a tener un refuerzo en el área de matemáticas y además que se encontrarían con una clase tradicional. El trabajo resultó totalmente distinto, la construcción de los distintos cuadrados mágicos fue algo dinámico, donde el estudiante se tomó el tiempo para pensar, construir su cuadrado mágico a partir del ensayo y error; generando así curiosidad e interés. Los estudiantes recurrieron a conocimientos previos, lo cual, les permitió argumentar, hacer algunos juicios de valor, sacar conclusiones, conjeturar, confrontar estrategias y dar la solución del problema.

El grupo de estudiantes se puede describir como un grupo interesado por el trabajó que se realizó con la construcción de los cuadrados mágicos, muy participativos, puntuales, respetuosos, colaboradores, juiciosos. Hay que resaltar que algunos mencionaron que no les gustaban las matemáticas y sin embargo trabajaron muy bien. En todo el proceso se observó la disponibilidad para trabajar tanto individual como en forma grupal.

El trabajar en la construcción de algunos cuadrados mágicos fue muy ameno, porque cada día que transcurría, aprendía tanto de los estudiantes como de las dificultades que se podían presentar. Hay detalles que como ser humano se escapan, se olvida, y sobre todo que ayudan para ser mejor cada día.

Algunas de las dificultades que se presentaron en este proceso, fue que en el desarrollo de las actividades iban llegando nuevos estudiantes de los grados 6° y 7°. Por un momento llegue a pensar que este suceso cambiaria un poco la actividad, pero no fue así. Debido a que los dos grupos se integraron y se colaboraron unos con otros.

Hay que mencionar que los días festivos y algunas actividades que se presentaron en el colegio, impidieron un poco la continuidad del proyecto, motivo por el cual los estudiantes se olvidaban que a la semana siguiente había taller. Sin embargo no fue un obstáculo para el desarrollo del trabajo de aula.

II. REFERENTES TEÓRICOS

> ¿Dónde acaba el juego y dónde empieza la matemática seria? (...) Para muchos que la ven desde fuera, la matemática, mortalmente aburrida no tiene nada que ver con el juego. En cambio, para la mayoría de los matemáticos, la matemática nunca deja de ser totalmente un juego, aunque, además, pueda ser muchas otras cosas. Miguel de Guzmán (1988). (Deulofeu)

2.1 Impacto de los juegos en el desarrollo de la matemática[5]

La historia de las matemáticas ha sido en general proclive a preservar aquellos elementos solemnes de la actividad científica, pero en muchos casos los desarrollos se han dado a través del juego y de actividades lúdicas. Por ejemplo, los pitagóricos estructuraron toda una teoría sobre los números a través del juego con configuraciones diferentes que formaban con las piedras.

En la Edad Media, Leonardo de pisa (1170 –1250) conocido como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, sorprendió a sus contemporáneos.

En la edad Moderna, Geronimo Cardano 1501-1576) el mejor matemático de su tiempo, escribió el Liber de Ludo Aleae, un libro sobre juegos de azar con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue (Guzmán, 1989) un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: << Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos… seria deseable que hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente>> escribía en una carta en 1715.

[5] (Guzmán M. d., Juegos matemáticos en la enseñanza, Septiembre 1984)

En 1735, Euler (1707-1787) escucho hablar del problema de los siete puentes de Konigsberg. Este consistía en afirmar o refutar la posibilidad de recorrer los puentes de esta ciudad sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida. Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de Grafos, y con ella la topología general. **La teoría de grafos** es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. Nació con los puentes de Konigsberg mencionado anteriormente, se encuentra en el juego de Hamilton, da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos, como el del pastor, la oveja, la col y el lobo, el de los maridos celosos, y resuelve también muchos otros más modernos como el de los cuatro cubos del llamado Locura Instantánea.

Hilbert (1862-1943), uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo, es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

Son muchos los juegos con un contenido matemático, una gran parte de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que se asimila extraordinariamente al juego[6]. **La aritmética** por ejemplo está inmersa en los cuadrados mágicos, **la combinatoria** es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún.

[6] Un juego comienza con la introducción de una serie de reglas, un cierto número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, exactamente de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática por definición implícita: «Se nos dan tres sistemas de objetos. Los del primer sistema los llamaremos puntos, los del segundo rectas [...].» (Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*). (Guzmán, Enseñanza de las ciencias y la matemática , 2007, 44)

La teoría de matrices está íntimamente relacionada también con los grafos y juegos emparentados con ellos. **La probabilidad** es, por supuesto, la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació. **La lógica** da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.

Martínez Recio y otros (1989), dan a conocer la importancia del juego en las matemáticas:

> *"La metodología tradicional no contempla este aspecto de la enseñanza por considerar al juego como una actividad poco seria, de recreo y que tiene sentido en horario extraescolar. Es obvio que el juego es una forma especial de relación entre los niños, y que tiene un claro valor educativo. Sin embargo, el juego por sí solo no lo es todo. Produce una motivación inicial, origina situaciones didácticamente aprovechables, pero posterior a la fase del juego tiene que haber otra de aprendizaje, una fase de reflexión teórica inducida por el juego. Para que esta reflexión teórica pueda interesar realmente a los alumnos debe tener un sentido para ellos, sentido que se intenta suscitar desde el juego. E inversamente para que el juego no se convierta en una finalidad en sí mismo, debe estar orientado por los objetivos de aprendizaje; debe ser un elemento motivador de la reflexión teórica sobre lo que se pretende enseñar. Es necesario, pues, planificar algún instrumento de reflexión teórica, dando una continuidad a las actividades de carácter lúdico".* (pág.25)

De lo anterior, se podría inferir que la implementación del juego como herramienta en el aprendizaje de las matemáticas puede ser interesante, ya que se deja de un lado la rutina y se involucra al estudiante en una actividad lúdica que le va a permitir apropiarse de ciertos elementos matemáticos. Sin embargo el juego no debe quedarse solo en la parte recreativa, sino que debe ir orientado hacia un aprendizaje significativo. Éste puede ser usado para introducir un tema, ayudar al estudiante a comprender mejor ciertos conceptos o procesos, como también a afianzar los que ya se han adquirido, así mismo ganar ciertas destrezas en algún algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad. Además, el juego ayuda en el desarrollo intelectual, fomentando así la creatividad y el ingenio en el estudiante.

El tener un acercamiento de la matemática a través de lo lúdico, le permitirá al estudiante de una manera u otra enfrentarse a problemas matemáticos, presentándose así, la necesidad de pensar, analizar y razonar para resolverlo.

El juego permite juzgar al mismo estudiante, sus aciertos y desaciertos. Además, ejercitar su inteligencia en la construcción de relaciones, permitiendo así la participación activa de cada integrante, y la interacción entre pares, durante la realización del juego.

La matemática puede ser presentada al estudiante como un gran desafío que admite reglas particulares, suscitando así, en él la apropiación de técnicas y estrategias personales, como también formas innovadoras para jugar.

En cuanto al juego, existe una diversidad de juegos en la vida diaria que encierran conocimientos o procedimientos propios de la matemática o que pueden ser adaptados, algunos de estos son:

Los juegos de procedimientos conocidos, pero que pueden ser enriquecidos y variados para profundizar los contenidos matemáticos (dominó, lotería, bingo, batalla naval, entre otros.). Los que implican la creación de estrategias por parte de los alumnos como son muchos juegos bipersonales de tablero en los que puede determinarse una estrategia ganadora (Ta-te-ti, Nim, llegar a 10, Ludo, entre otros).

La primera recopilación de rompecabezas y pasatiempos apareció en 1612, cuando se publicó *Problémes plaisants et delectables quie se Font par les nombres* (Los problemas placenteros y deleitosos que se hacen con números), del francés Claude-Garpard Bachet (9-X-1581, 26-II-1638). Curiosamente, cuando se cita a este autor en la historia de las Matemáticas suele ser por otra de sus obras, su traducción de la Arithmetica de Diofanto (1621), ya que en un comentario a este libro Fermat escribió su famosa nota marginal, conocida como “El último teorema de Fermat”.

En el sentido de Miguel de Guzmán[7] :

> *Relaciona al juego y la enseñanza de la matemática mediante el siguiente pensamiento: “El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se la han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática a través del juego y de la belleza?”.* (Guzmán, Juegos y Matemáticas, 1989)

Trabajar con cuadrados mágicos entretiene y motiva, rompe la rutina, permite desarrollar en el estudiante su creatividad e ingenio y el razonamiento, adquiriendo así altos niveles de destreza en el desarrollo del pensamiento matemático. Además fortalece la socialización entre estudiantes, puesto que se presenta interacción de unos con otros. Desarrollando un espíritu crítico y autocrítico, la disciplina, el respeto, la perseverancia, la cooperación, el compañerismo, la seguridad, entre otros valores y actitudes

Retomando nuevamente a Miguel de Guzmán, él se hace la siguiente pregunta: **“¿Dónde termina el juego y dónde comienza la Matemática?”**, es una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Miguel de Guzmán afirma que para muchos de los que ven la Matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los matemáticos, su

---

[7] **Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004)**

Nació en Cartagena, era catedrático de Análisis de la Universidad Complutense de Madrid, miembro numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde 1982, miembro correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de la República Argentina desde 1985. En la década de los 90, desde el 91 al 98, fue presidente de la ICMI, Comisión Internacional de Instrucción Matemática. La preocupación de Miguel de Guzmán por la educación matemática fue la característica principal del trabajo de toda su vida. (Guzmán L. M.)

disciplina nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas. Considera que el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático.

2.2 Cuadrados Mágicos

Los cuadrados mágicos han atraído el interés de las personas desde tiempos antiguos, la mayoría de los historiadores señalan que tuvo su origen en China siglos antes del nacimiento de Cristo. El origen exacto se ha perdido. Los cuadrados mágicos se conocen aproximadamente desde la antigüedad (año 2800 a.C.) por los chinos.

Cuenta la leyenda que cierto día el emperador Yu se hallaba de pie a la orilla del rio Lo (el actual río Amarillo), cuando de repente apareció una tortuga como se muestra en la figura 2; con un símbolo místico grabado sobre su caparazón en forma de cuadrado mágico 3x3, con lo que dedujeron que el número adecuado era precisamente el 15, suma de todas las filas, columnas y diagonales. Este símbolo se conoce en China con el nombre de "Lo- Shu", que significa libro en chino.

Un cuadrado mágico es, un cuadrado formado por casillas dispuestas en filas y columnas que contienen una serie de números naturales de modo que todas las filas, todas las columnas y las diagonales suman un mismo número, llamado constante mágica. Generalmente suelen colocarse los números entre 1 y n^2 siendo n el número de filas y columnas del cuadrado. Un ejemplo de un cuadrado mágico es de orden tres (el orden es el lado del cuadrado), constituido por los números del 1 al 9, donde la constante es 15, como lo muestra la figura 3.

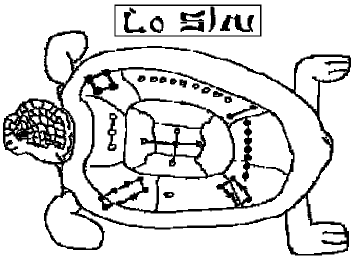


Figura 2. Lo Shu

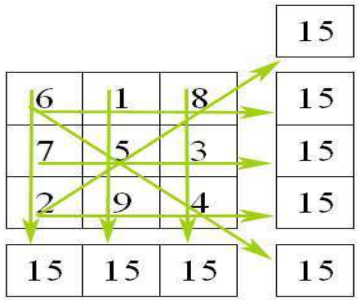


Figura 3. Cuadrado mágico de 3x3

Cuadrados mágicos de orden tres sólo hay uno (los demás pueden obtenerse rotando o reflejando este). Para los de orden cuatro Frenicle De Bessy estableció en 1693 que existen 880 cuadrados mágicos. Se ha demostrado que existen 275.305.224 cuadrados mágicos de orden cinco. Para órdenes más grandes sólo se tienen estimaciones.

Existen muchas variantes de cuadrados mágicos, el famoso creador de acertijos Henry Ernest Dudeney, en su Amusement in Mathematics, reclama haber sido el primero en considerar cuadrados mágicos cuyas casillas sean números primos, él proporciona muchos resultados, pero como en esa época el número uno era considerado primo, muchos de sus resultados lo contienen en alguna casilla. Aceptada la convención actual de que el número uno no es primo, el único cuadrado mágico formado por números primos de orden tres, con la constante más baja (C = 177).

III. METODOLOGÍA

"La matemática ha sido y es **arte y juego** y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma que cualquier campo del desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable". (Guzmán M. d., Juegos y Matemáticas, 1989)

Los cuadrados mágicos pueden convertirse en una alternativa para que el estudiante se familiarice con algunos conceptos matemáticos. Mediante esta herramienta divertida se pretende que el joven desarrolle un pensamiento numérico[8], el cual va evolucionando gradualmente en la medida en que tiene la oportunidad de pensar en los números y hacer uso de ellos en diferentes contextos.

El tema de los cuadrados mágicos permite trabajar de manera entretenida en distintos ámbitos de la matemática: aritmética, algebra y geometría, generando actividades que encaminan al estudiante hacia el desarrollo de diversas capacidades, habilidades y actitudes tales como curiosidad, perseverancia, creatividad, ingenio, autonomía, trabajo colaborativo. Esto, seguramente, le permitirá mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en el tema, enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos. Practicar los algoritmos de las operaciones, así como el cálculo y la estimación mental de resultados, haciendo uso de ecuaciones con una incógnita, como expresiones que explicitan un patrón de variación[9], lo

[8] Mcintosh (1992) afirma que "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones". (Matemáticas – Lineamientos curriculares. (MEN, 1998)

[9] Pensamiento variacional y sistemas algebraicos "utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones". (MEN, 2006)

cual le va a permitir también al estudiante desarrollar estrategias para la resolución de problemas.

En la metodología que se va a implementar se diseñaron cinco talleres. Los puntos a desarrollar tienen que ver con la construcción de cuadrados mágicos como se ha explicitado anteriormente. Para que el trabajo en el aula sea más dinámico, los estudiantes realizarán un trabajo grupal para luego hacer una socialización de cada punto del taller.

Antes de iniciar con los talleres, se hará un recuento sobre el origen de los cuadrados mágicos y se dará a conocer a los estudiantes algunos cuadrados mágicos que se han construido a través del tiempo.

En el primer taller, el estudiante trabajará en la construcción de un cuadrado mágico, formado por los números naturales. Donde se espera que el estudiante a partir de la manipulación, del ensayo y error se familiarice con el concepto de cuadrado mágico y las respectivas propiedades que éste cumple.

En el segundo taller, dado un cuadrado mágico, el estudiante lo transformará. Para ello, deberá hacer uso de los números reales y de las cuatro operaciones fundamentales de la matemática. Se espera que el estudiante encuentre estrategias para la solución del nuevo cuadrado mágico que deberá construir.

En el tercer taller, el estudiante hará uso de expresiones algebraicas para luego llegar a una ecuación lineal, encontrando así el valor de la incógnita. Lo cual le permitirá la construcción del respectivo cuadrado mágico. A su vez, se trabajará con una rueda algebraica para fortalecer el trabajo con las ecuaciones lineales. La rueda algebraica es un hexágono que tiene la propiedad de que los tres números sobre cada lado y sobre cada radio de la figura sumen lo mismo. Con ella, se pueden presentar muchas ecuaciones del grado de dificultad que se quiera. Se trata de calcular el valor de las incógnitas que aparecen en todos los radios y lados, resolviendo las ecuaciones, sucesivamente, utilizando el dato de partida que proporciona el lado de uno de los triángulos del hexágono, en este caso la línea inferior de la rueda algebraica, ver anexo D.

En el cuarto taller, se propondrá la construcción de un cuadrado mágico con números primos. Se busca que el estudiante se familiarice de nuevo con el concepto de número primo, igualmente que pueda identificar estos números, los números compuestos y reconocer sus propiedades.

Para terminar, se propone a los estudiantes analizar las propiedades de un cuadrado mágico de orden ocho, inventado por el señor Benjamín Franklin. Con este tipo de cuadrado mágico, el estudiante tendrá la posibilidad de explorar cuadrados mágicos de orden 3, 4, 5,6 y 7 que están inmersos en él y tienen propiedades matemáticas interesantes. Se espera que el estudiante a partir de la observación pueda percibir regularidades, como también, encontrar las respectivas propiedades que éste cumple.

En todos los talleres el estudiante debe verificar que cada cuadrado obtenido cumpla con las propiedades de ser cuadrado mágico.

Las actividades sugeridas en éste trabajo son posibles de implementar en distintos niveles, profundizando de acuerdo a las características del grupo. Es importante que el estudiante valore los aportes de las matemáticas y el papel que ha jugado la matemática recreativa en algunas ramas de esta ciencia.

IV. PROYECTO DE AULA

4.1 Bitácora 1: Acercándonos al concepto de cuadrado mágico

Los juegos, las recreaciones matemáticas, los problemas de pensar, los concursos de problemas y en general las diversas actividades lúdicas alrededor de las matemáticas constituyen en su conjunto un recurso altamente valioso para la enseñanza de las matemáticas. Su gran variedad y versatilidad hace que puedan ser utilizados en clase de matemáticas, ayudando a introducir un concepto, para practicar una técnica, o para desarrollar estrategias de resolución de problemas. “La utilización de juegos y la organización de actividades de carácter lúdico alrededor de las matemáticas, constituye un elemento educativo importante que puede incidir en la visión que los alumnos se forman sobre las matemáticas, ayudándoles a conocerlas como una ciencia
cuya práctica puede provocar placer y diversión”. [10]

Para llevar a cabo este primer taller, se inició con una breve reseña histórica sobre el origen de los cuadrados mágicos, que es en realidad una leyenda que proviene de la cultura china antigua. Luego se ilustraron algunos ejemplos de cuadrados mágicos que han sido desarrollados a través del tiempo.

En la etapa de socialización con los estudiantes, la mayoría comentó que aunque no conocían los cuadrados mágicos sí habían tenido la oportunidad de hacer los sudokus que aparecen en los periódicos.

[10] (Deulofeu, pág. 1)

Para la implementación del taller N.1 los estudiantes formaron grupos de trabajo, a cada grupo se le hizo entrega del taller y del material con el que se iba a trabajar (cuadrados de orden tres con sus respectivas fichas).

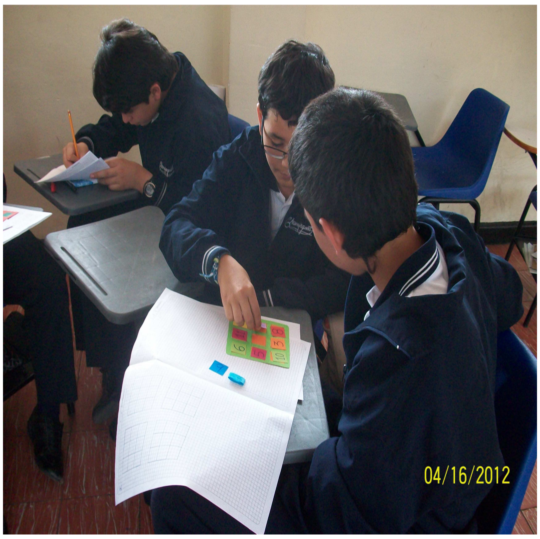


Figura 4. Estudiantes de grado 7° del Colegio Champagnat.

El trabajo consistía en construir un cuadrado mágico de orden tres con los dígitos del 1 al 9. A los estudiantes se les planteó la pregunta inicial: ¿Es esta la única forma de arreglar los dígitos del 1 al 9 para obtener un cuadrado mágico? y ¿Por qué la suma constante debe ser quince?,

Con respectó a este punto un estudiante rápidamente respondió: “a *partir del cuadrado mágico dado se pueden construir ocho cuadrados mágicos*”, puesto que, “*se van rotando*”. De acuerdo a la respuesta dada por estudiante, los demás estudiantes comenzaron a trabajar con los cuadrados para verificar lo que el compañero había mencionado.

En el transcurso de la sesión, cuando algún estudiante construía un cuadrado mágico, salía al tablero para presentarlo inmediatamente a sus compañeros y así poder verificar entre todos que la suma de las filas, columnas y diagonales daba cómo resultado quince,   obteniendo así los ocho cuadrados mágicos.

Finalmente, los estudiantes dijeron que sólo hay un cuadrado mágico de orden tres formado por los dígitos del 1 al 9, los demás que se formaron son rotaciones que surgieron a partir de un cuadrado y sus respectivas imágenes; logrando así obtener ocho cuadrados mágicos rotados y girados como se muestra a continuación:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 5.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 6.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 7.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figura 8.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 9.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 10.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Figura 11.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Figura 12.

De lo anterior, los estudiantes observaron algunas regularidades, deduciendo:

- Solo hay ocho cuadrados.
- El número cinco en cualquier caso se encuentra ubicado en la celda del medio.
- Los números pares van en las esquinas.
- Los números impares 1, 3, 7,9 van como en cruz (es decir laterales).

Luego para probar mediante argumentos sencillos la unicidad de nuestro cuadrado mágico, los estudiantes listaron todas las ternas de números que sumen 15, como se muestra en la Tabla N.1.

Tabla N.1

9+**5**+1	8+4+3
9+4+2	7+6+2
8+6+1	7+**5**+3
8+**5**+2	6+**5**+4

Tabla N.2

Número	Número de veces
1	2
2	3
3	2
4	3
5	4
6	3
7	2

Lo anterior les permitió a los estudiantes reafirmar que el número cinco aparece en cuatro ternas, por lo que debe estar en el centro del cuadrado, ya que se necesita que el dígito central pertenezca a cuatro sumas mágicas. El dígito 1 aparece sólo en dos ternas, por lo que no debe ocupar una esquina, sino una celda lateral, lo mismo le ocurre al 9, al 3 y al 7, los números pares (2, 4, 6,8) se ubican en las esquinas.

Para concluir el primer punto del taller, se discutió la pregunta: ¿Por qué la suma constante debe ser quince?

Con respecto a la pregunta se les dio a los estudiantes algunas pautas, debido a que después de un tiempo de pensar y escribir se les dificultó dar la respuesta. Construido el cuadrado mágico y conociendo que cada fila debe sumar la misma cantidad, entonces la suma de tres filas seria el triple de la cantidad, pero la suma de tres filas coincide con la suma de todos los elementos del cuadrado. Lo cual, les permitió a los estudiantes deducir lo siguiente:

El triple de la cantidad es igual a la suma de todo el cuadrado, es decir:

Fórmula 1: $3\mathbf{c}= 1+2+3+4+5+6+7+8+9$, donde **c** es la constante mágica.

Entonces, $3\mathbf{c} = 45$

Logrando así obtener la constante mágica **c** = 15.

De lo anterior, se pone a consideración del grupo el hecho decidir si la fórmula **1** se podría generalizar a otros cuadrados mágicos de orden distinto. Los estudiantes comenzaron a generalizar "*no seria ya 3c sino 4c, 5c igualando a la suma del cuadrado respectivamente"*. Es necesario resaltar, la pauta que se le dio a los estudiantes no les permitió de inmediato escribir la formula 1.

Debido a la dificultad que los estudiantes presentaron al dar respuesta a la pregunta planteada, se les dio a conocer una formula matemática para encontrar la constante mágica[11] de un cuadrado mágico cualquiera. En consecuencia, para un cuadrado mágico de orden tres se tiene $M = \frac{3(3^2+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

Para el punto dos del taller, se transformó un cuadrado mágico de orden tres, pero, con los números 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. En este punto los estudiantes expresaron que se podían formar ocho cuadrados mágicos a partir de uno, además, estos tenían en común el número siete en el centro, los números pares se ubicaban en las esquinas y los números impares se ubicaban en cruz (laterales).

Las conclusiones obtenidas fueron similares al anterior trabajo (punto uno del taller) que se había realizado con el cuadrado mágico de orden tres formado con los dígitos del 1 al 9.

Sin embargo, para algunos estudiantes transformar un cuadrado mágico, ya no con los dígitos del 1 al 9 si no con los números 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 los indujo a pensar como construirlo. Los estudiantes hacían cálculos como por ejemplo: sacaron ternas que al sumarlas dieran como resultado la constante mágica, lo cual permitió ver que estaban siguiendo el modelo del primer cuadrado mágico que se había trabajado. Además, algunos estudiantes expresaban que no se podía

---

[11] La constante mágica de un cuadrado mágico sólo depende de n, y tiene el valor de $M = \frac{(n^3+n)}{2}$. Dado un cuadrado mágico nxn, donde M sea el valor que debe sumar cada fila, columna y diagonal. Como hay n filas la suma de *todos* los números en el cuadrado mágico debe ser $n \cdot M$. Teniendo en cuenta que los números que se añade son $1,2,3,\ldots n^2$.

Por lo tanto $1+2+3+\cdots+n^2 = n \cdot M$, es decir, $\sum_{i=1}^{n^2} i = n \cdot M$

Utilizando la fórmula para esta suma, se tiene $n \cdot M = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, obteniendo así: $M = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

formar el cuadrado mágico, debido a que después de varios intentos para construirlo, la suma de las filas, columnas y diagonales no les coincidían.

Cuando un grupo obtuvo el primer cuadrado mágico de orden tres formado por los números 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, fue como el detonador para que los demás estudiantes comenzarán a indagar, si se podían construir mas cuadrados mágicos de ese estilo. Obteniendo así los ocho cuadrados mágicos, coincidiendo con la conclusión del punto uno del taller.

En vista que los estudiantes tenían una idea con el anterior cuadrado mágico que habían construido, se esperaba que ellos trabajarán sin ser guiados, sin embargo a algunos estudiantes había que inducirlos para que dijeran qué observaban y que podían concluir.

En el momento en que los estudiantes se ven enfrentados a la construcción de los cuadrados mágicos, surgen varias ideas, dudas, alternativas, opiniones. Se hace presente el ensayo y error, debido a que los estudiantes van ajustando los números en las celdas del cuadrado hasta encontrar la solución.

Los cuadrados mágicos han motivado a los estudiantes, los ha llevado a pensar, a escribir, a formular, a conjeturar, justificar o refutar esas conjeturas, como también a detectar propiedades matemáticas ocultas, a sacar sus propias conclusiones, todo en un trabajo grupal.

4.2 Bitácora 2: Transformación de un cuadrado Mágico en otro

El segundo taller situaba de nuevo a los estudiantes en lo que se había trabajado anteriormente, permitiendo así, que quedara claro qué es un cuadrado mágico y porqué se llama cuadrado mágico.

En el desarrollo del Taller 2 los estudiantes trabajaron en forma individual con muy buena disposición. Éste consistió en, dado un cuadrado mágico de orden tres, transformarlo según la operación y el número respectivo que se le asignó a cada estudiante. Adicional a este punto, el estudiante debía pensar en cualquier número y transformar el cuadrado según la operación correspondiente. (Ver anexo B)

El cuadrado mágico a transformar fue igual para todos los estudiantes, pero en el momento de transformarlo cada estudiante en su hoja de desarrollo tenía dos puntos a trabajar. El primer punto planteaba lo siguiente: por ejemplo, suma el número 3, multiplica por el número 1/2, restar el número 2. Por ende, todos tenían una operación distinta con un número distinto. En el segundo punto a desarrollar, el estudiante tomaba el mismo cuadrado mágico del taller y lo transformaba de acuerdo al número que él eligiera.

Obteniendo así los siguientes cuadrados mágicos:

12	2	16	30
14	10	6	30
4	18	8	30
30	30	30	

Figura 13. Multiplico por el Número 2

21	16	23	60
22	20	18	60
17	24	19	60
60	60	60	

Figura 14. Sumo el Número 15

30	5	40	75
35	25	15	75
10	45	20	75
75	75	75	

Figura 15. Multiplico por el Número 5

4	-1	6	9
5	3	1	9
0	7	2	9
9	9	9	

Figura 16. Resto el Número 2

-1	-6	1	-6
0	-2	-4	-6
-5	2	-3	-6
-6	-6	-6	

Figura 17. Resto el Número 7

-2	-7	0	-9
-1	-3	-5	-9
-6	1	-4	-9
-9	-9	-9	

Figura 18. Resto el Número 8

5	0	7	12
6	4	2	12
1	8	3	12
12	12	12	

Figura 19. Resto el Número 1

12	7	14	33
13	11	9	33
8	15	10	33
33	33	33	

Figura 20. Sumo el Número 6

8	3	10	21
9	7	5	21
4	11	6	21
21	21	21	

Figura 21. Sumo el Número 2

18	3	24	45
21	15	9	45
6	27	12	45
45	45	45	

Figura 22. Multiplico por el Número 2

9	4	11	24
10	8	6	24
5	12	7	24
24	24	24	

Figura 23. Sumo Número 3

-10	-15	-8	-33
-9	-11	-13	-33
-14	-7	-12	-33
-33	-33	-33	

Figura 24. Resto Número 16

11	6	13	30
12	10	8	30
7	14	9	30
30	30	30	

Figura 25. Sumo el Número 5

-12	-2	-16	-30
-14	-10	-6	-30
-4	-18	-8	-30
-30	-30	-30	

Figura 26. Multiplico por el Número -2

6	1	8	15
7	5	3	15
2	9	4	15
15	15	15	

Figura 27. Multiplico por el Número 2

3	-2	5	6
4	2	0	6
-1	6	1	6
6	6	6	

Figura 28. Resto el Número 3

14	**9**	**16**	**39**
15	**13**	**11**	**39**
10	**17**	**12**	**39**
39	**39**	**39**	

Figura 29. Multiplico por el Número 8

En el momento de transformar el cuadrado mágico, los estudiantes hicieron algunas observaciones:

- Es un cuadrado mágico porque todas las filas, columnas y las diagonales suman un mismo número.
- En las esquinas se ubican los números pares.
- Los impares están en cruz del siguiente cuadrado mágico.
- El cero no suma nada.
- El cero es inválido.
- Los números de sus esquinas son pares excepto el cero.
- Tiene números pares negativos en las esquinas.

Posteriormente, contestaron las preguntas que se formularon para este tema.

A la pregunta ¿que puedes decir del nuevo cuadrado? Los estudiantes, argumentaban que los tres cuadrados mágicos, eran distintos.

- ✓ Comparen sus soluciones: ¿Todas son iguales?

Los estudiantes respondieron que no se parecen.

- ✓ Si no son iguales: ¿En qué se parecen?, ¿En qué son distintas?. ¿Hay alguna manera especial de acomodar los números para que el cuadrado sea mágico?.

La respuesta de los estudiantes, si se pueden acomodar. A partir de un cuadrado mágico se pueden obtener los demás rotando los cuadrados.

Al transformar el cuadrado mágico respectivo, surgieron algunos razonamientos por parte de los estudiantes que me llamó la atención:

- 3-4-5-6- **7** -8-9-10-1, el número siete va en el centro.
- 4-5-6-7- **8** -9-10-11-12, el número ocho va en el centro.
- En uno de los cuadrados mágicos de orden 3, la constante mágica dio 39/2, el estudiante relaciono el numerado es par y el denominador es impar.
- Un estudiante tomo las fracciones 18/2, 8/2, 22/2, 20/2, 16/2, 12/2, 10/2, 24/2, 14/2 como números pares.
- En uno de los cuadrados mágicos había que restar el número -3 y el estudiante sumo 3, ya que según él, como menos por menos es igual a más, por ende se suma la cantidad.

Cada estudiante obtuvo así dos cuadrados mágicos distintos, algunos estudiantes pasaron al tablero, para exponer el cuadrado mágico que había transformado. Se dieron a conocer cuadrados mágicos constituidos por números fraccionarios, naturales, enteros positivos y negativos. Donde la constante mágica también podía dar un número natural, fraccionario o negativo.

Este trabajo con los cuadrados mágicos, dio muestra de que existen ciertas falencias en los estudiantes, en cuanto a operar con signos, fracciones, concepto de números pares y números enteros.

Esta sesión de entrada permitió cerrar la anterior, donde se transformó un cuadrado mágico en otro. Los distintos cuadrados que surgieron por cada estudiante, llevaron a que se apropiaran de las propiedades de los cuadrados mágicos. Además los estudiantes se dieron cuenta que la constante mágica puede ser positiva, negativa, racional, en fin puede tomar cualquier valor numérico. Lo cual permitió concluir que se puede transformar un cuadrado mágico con cualquier número, haciendo uso de las operaciones como suma resta, multiplicación y división.

Un cuadrado mágico como se dijo anteriormente se puede transformar a partir de ciertas operaciones, asimismo las ecuaciones lineales por ejemplo se pueden implementar. La idea es poder encontrar el valor de una incógnita (x), a partir de ciertos datos que se tiene del cuadrado mágico, como el orden del cuadrado y la constante mágica.

Figura 30. Transformando un cuadrado mágico.

En la construccion de los cuadrados magicos se trabajó con expresiones algebraicas para luego llegar a una ecuación lineal, encontrando así el valor de la incógnita. Para ello se le preguntó a los estudiantes si habían trabajado con ecuaciones lineales, algunos dijeron que sí otros que no. Pero en el momento que los estudiantes comenzaron a trabajar con el cuadrado mágico se pudo percibir que algunos no tenían claro lo que es una ecuación. Por ende encontrar el valor de la incógnita fue algo dispendioso. Por consiguiente, se explicó a los estudiantes como trabajar con las ecuaciones lineales.

Los estudiantes encontraron el valor de la incógnita x, lo hicieron a través del tanteo, ensayo y error. La idea era que los estudiantes pensaran un poco mas, se le dejó que pensaran de qué forma podían encontrar el valor de x, excluyendo por un momento el tanteo. Para lo cual se les dio una pauta, si la constante mágica es 15, entonces como pueden hallar el valor de x.

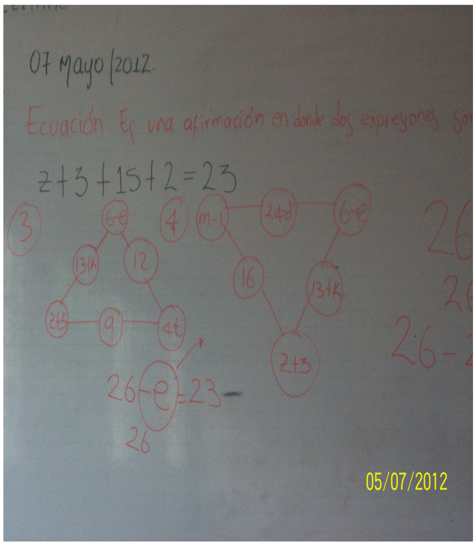
De acuerdo a la sugerencia que se hizo, un estudiante sumó toda la fila y la igualó a la constante, pero al momento de realizar el algoritmo, no sabían como sumar las variables, sumar números del mismo signo o, de signo distinto.

En seguida, a cada estudiante se le indicó como encontrar el valor de x, sumando la fila e igualándola a la constante, además se les comentó que existía otra forma de hallar el valor de x. Qué pasa si multiplico el orden del cuadrado mágico por el número del centro y lo igualo a la constante mágica.

Lo anterior, permitió encontrar el valor de x y así verificar si en realidad se trataba de un cuadrado mágico.

Al taller se le adicionó una rueda algebraica debido a los inconvenientes que los estudiantes habían presentado al trabajar con ecuaciones lineales. Se trabajó individualmente, y para el desarrollo de la rueda mágica ésta se subdividió en seis triángulos, para lo cual se empezó con el triangulo inferior y posteriormente con los demás en sentido contrario a las manecillas del reloj. El trabajar primero con el triángulo inferior permitiría encontrar de una manera más sutil los valores de cada incógnita.

El empezar en cierto orden la rueda algebraica, les permitió a los estudiantes plantear todas las ecuaciones de los respectivos lados de la rueda, encontrando así los valores de las incógnitas.



Figuras. 31 – 32. Actividad con la Rueda algebraica.

Esta actividad con la rueda algebraica mágica se convirtió en un trabajo tanto de escritura como de conocimiento, ya que los estudiantes no podían usar el ensayo y el error, plantear la ecuación fue para muchos un esfuerzo, escribir para ellos es algo aburrido y quieren hacer las cosas de la forma más fácil, que no les implique ningún esfuerzo.

Sin embargo, los estudiantes plantearon sus ecuaciones, tuvieron errores al sumar números del mismo signo, de signo contrario, no sabían que signo dejar si el del número mayor o menor. Más que errores fue una oportunidad para que cada uno de los estudiantes revisara dónde estaban fallando.

La rueda algebraica, le permitió a los estudiantes aclarar el trabajo con las ecuaciones, además permitió ver desde otra perspectiva el uso de las ecuaciones.

4.3 Bitácora 3: Cuadrados mágicos cuyos componentes son números primos

> "...la Matemática tiene un valor formativo, que ayuda a estructurar todo el pensamiento y a agilizar el razonamiento deductivo, pero que también es una herramienta que sirve para el accionar diario y para muchas tareas específicas de casi todas las actividades laborales. Frecuentemente se menciona su utilidad para la vida cotidiana y para las aplicaciones científicas y técnicas; su capacidad para formar un espíritu crítico o estético; su presencia en los procesos de matematización de las ciencias sociales...". (Gervasi, 1995, 11)

Los estudiantes hasta el momento han trabajado alrededor de los cuadrados mágicos conformados por números naturales, enteros, junto con todas las operaciones involucradas en la manipulación de este tipo de cuadrados. Luego, en un taller posterior se introdujeron variables algebraicas para que los jóvenes llegaran al planteamiento de ecuaciones lineales. En el siguiente taller se manipularán los cuadrados mágicos formados por los números primos.

Para el desarrollo del taller los estudiantes listaron los primeros 78 números primos, puesto que los iban a necesitar.

El primer punto del taller consistía en construir un cuadrado mágico de orden tres con los números primos inferiores a cien donde la constante mágica se conocía (111). Este cuadrado ya contenía por anticipado dos números 1 y 31.

Los estudiantes empezaron a sumar, restar, a pensar un poco que pasa si coloco cierto número en una celda, sin olvidar que debe cumplir con la característica que lo hace ser un cuadrado mágico. La constante mágica les indicaba de cierta manera que números debería elegir para completarlo.

Los estudiantes usaron de nuevo el tanteo, ensayo y error. Construyendo así el cuadrado mágico. En este cuadrado mágico el número uno se tomó como número primo, debido a que anteriormente se consideraba así.

Para el segundo punto del taller, ya se utilizó la convención actual de que el número uno no es primo, y por ende existe un único cuadrado mágico de orden tres que se puede construir con la constante mas baja C=177.

El cuadrado previamente tenía tres números. Dado que en el punto uno los estudiantes usaron el tanteo, se les dijo que buscaran otra forma para completarlo. No obstante, al construir el cuadrado mágico, también se hizo por ensayo y error, donde se presento mayor dificultad para encontrar los números.

Para el tercer punto los estudiantes debían construir un cuadrado mágico 4x4 compuesto por los números primos finalizados en siete, tomando los números primos desde el 17 hasta el 397. El cuadrado mágico ya tenía algunos números, lo cual les facilitaba un poco la construcción de éste.

Para el cuadrado 4x4, los estudiantes dijeron:

- La constante mágica termina en 8.
- El orden de los sumandos no altera el resultado.
- La suma de los cuatro números del centro da el valor de la constante mágica.
- La suma de la constante mágica debe ser mayor que el número 571.

Al ver que los estudiantes trataban de una forma u otra de encontrar el valor de la constante mágica y no la hallaban, se les dijo cual era, lo cual les permitió construir el cuadrado mágico. Sin embargo, no fue fácil construirlo, requirió de tiempo, de ensayos con los números y de razonamiento lógico.

Los estudiantes, tienen presente que al construir cualquier cuadrado mágico éste debe cumplir con la propiedad que la suma de sus filas, columnas y diagonales debe ser igual, por ello los estudiantes al ubicar los números en las celdas, piensan inmediatamente que posibles números pueden ir, números que les permita cumplir con la propiedad.

El trabajo de construir cuadrados mágicos haciendo uso de los números primos, permitió a los estudiantes traer a su mente los conocimientos previos que tienen acerca de números primos, lo cual fue muy satisfactorio, puesto que los estudiantes tenían muy clara esta parte.

Figura 33. Actividad con los números primos.

Aunque el método de tanteo, ensayo y error, es problemático para hacer deducciones en matemáticas, la construcción del cuadrado mágico que se pedía, se prestaba para ello y resultaba intuitivo para los estudiantes. El problema no es que haga uso de él, sino que se debe hacer conciencia de que por la misma naturaleza de los objetos matemáticos no es conveniente usarlo indiscriminadamente, sino que sirve para hacer conjeturas que luego se deben probar.

4.4 Bitácora 4: Otro tipo de Cuadrado Mágico: El cuadrado Mágico de Franklin

> Un juego comienza con la introducción de una serie de reglas, un cierto número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, exactamente de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática por definición implícita: «Se nos dan tres sistemas de objetos. Los del primer sistema los llamaremos puntos, los del segundo rectas [...].» (Hilbert, Grundlagen der Geometrie).
>
> (Guzmán M. d., Enseñanza de las ciencias y la matemática. , 2007, 14)

Cuadrado mágico de orden ocho, inventado por Benjamin Franklin[12], formado con los 64 primeros números naturales, donde las filas y las columnas suman lo mismo, siendo la constante 260, pero no cumple con la suma de las diagonales principales.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 34. Cuadrado Mágico de Benjamín Franklin

[12] Benjamín Franklin, (Boston, 17 de enero de 1706 - Filadelfia, 17 de abril de 1790) uno de los grandes próceres del proceso de Independencia de los Estados Unidos y uno de los autores de la Constitución Norteamericana, recordado político e inventor norteamericano del pararrayos y de un tipo de lentes bifocales. (Cronida, 2009)

Para el trabajo con el cuadrado mágico de Franklin, los estudiantes tenían en una hoja ocho cuadrados, el trabajo consistió en pintar la propiedad respectiva en cada cuadrado.

Usar colores, para distinguir las propiedades del cuadrado como se muestra en la figura 36, despertó el interés en los estudiantes, por ende se motivaron a participar en la actividad.

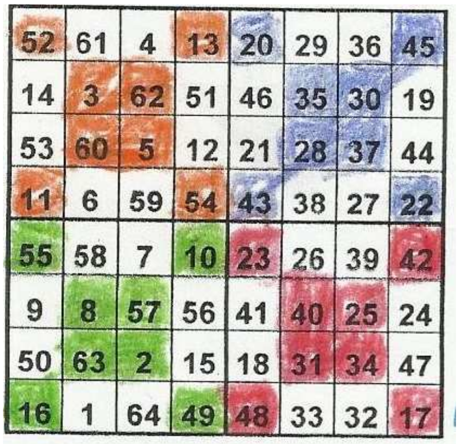


Figura 35-36. Propiedad pintada por un estudiante.

Los estudiantes encontraron cuadrados de distinto orden 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Sin embargo, se centraron más en la parte de descubrir las propiedades en el cuadrado 8x8 y en especial en los subcuadrados, de orden 4, que se encontraban en éste.

Encontrando así las siguientes propiedades:

- Es un cuadrado de ocho filas por ocho columnas, 64 espacios.
- Un cuadrado formado por enteros positivos, naturales del 1 al 64, uno en cada celda.

- Los elementos de cada fila suma 260.
- Los elementos de cada columna suman también 260.
- Los cuatro números de las esquinas más los cuatro números del centro suman 260.
- Si de la construcción se toma cualquier sub cuadrado de orden dos por dos, suman siempre 130, la mitad del total por fila y por columnas, se pueden obtener 49 subcuadrados de este orden.
- Si del cuadrado estudiado se toman subcuadrados de orden cuatro por cuatro, sus elementos siempre sumara 520, el doble de la suma de los elementos por fila o por columna, existen veinticinco subcuadrados de ese tipo.
- Si del cuadrado de Franklin se extraen subcuadrados de seis por seis, sus elementos siempre sumara 1170, 4.5 veces la suma de cada fila o columna, existen nueve subcuadrados de ese orden.

Nota: Cuando el orden de los subcuadrados es impar, la condición de que sus elementos sumen un valor constante, no se cumple,

- Si desde la mitad de cada fila trazamos líneas a las diagonales, los números suman 260. (considerando las dos líneas).

El cuadrado de Franklin permitió a los estudiantes reflexionar sobre los procesos implicados, como el desarrollo del razonamiento lógico, que permitió percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar las mismas. Como también proponer, interpretar y dar algunas posibles respuestas. Así mismo, tener en cuenta ciertos conceptos involucrados en la actividad (cuadrado mágico, números pares, suma de números par e impar…).

Para esta actividad los estudiantes hicieron uso de la calculadora, herramienta que les fue de gran ayuda en el momento de hacer los respectivos cálculos, permitiéndoles así, encontrar más propiedades.

Los estudiantes encontraron las siguientes propiedades:

1. Los cuatro números de las esquinas más los cuatro números del centro suman 260.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 37.

2. Al dividir el cuadrado en cuatro partes iguales, cuadrados de 4x4 cada una de las filas y columnas de cada subcuadrado suman 130.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 38.

3. En cada subcuadrado 4x4 las sumas de la diagonal de izquierda superior a derecha inferior suman 114.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 39.

4. En cada cuadrado 4x4 si se suma las diagonales de derecha superior a izquierda inferior da el mismo resultado 146 en cada uno.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 40.

5. Cada diagonal con su otra diagonal que sube respetivamente en **V** da 260.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 41.

6. Los cuatro números de cada diagonal que sube de un cuadrado 4x4 con la respectiva diagonal que baja suman 260.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 42.

7. La suma de las diagonales de cada subcuadrado 4x4 da 260.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 43.

Un estudiante encontró otras propiedades distintas a las anteriores:

1. Hay cuatro cuadrados mágicos de orden 2.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 44.

2. Los cuatro números de cada diagonal que baja de un subcuadrado 4x4 con la respectiva diagonal que sube suman 260.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 45.

3. Al sumar las diagonales que bajan y suben (viceversa) en cada subcuadrado 4x4 da como resultado 260.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 46-47.

4. Los números pares van intercalados horizontalmente.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 48.

5. Si se suma en forma rombo da como resultado 520. (En V 260 hacia arriba y 260 hacia a bajo que equivale a 520).

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 49.

V. Conclusiones: El juego como estrategia metodológica

Una de las primeras conclusiones que deja esta experiencia de aula y que fue avizorada en los referentes teóricos es que los cuadrados mágicos se convirtieron en una herramienta de aprendizaje que permitió a los estudiantes acercarse de otra manera a las matemáticas y apropiarse aunque sea de una pequeña parte de ella. El hecho de construir distintos cuadrados mágicos hizo que los jóvenes se apropiaran de ciertos elementos matemáticos de una forma divertida y además tuvieran la posibilidad de interactuar, pensar, analizar, formular, razonar de una manera lógica, como también detectar algunas propiedades matemáticas ocultas en los cuadrados mágicos.

En la construcción de los distintos cuadrados mágicos que se trabajaron en el aula, se pudo observar en los estudiantes una inclinación a usar el método de ensayo y error. Este método les permitió de cierta manera percibir regularidades y relaciones; que los llevaron a hacer algunas predicciones y conjeturas, justificar o refutar las mismas y sacar sus propias conclusiones.

En el momento de construir un cuadrado mágico, los estudiantes verificaban de manera individual o grupal si en realidad cumplía con sus propiedades básicas, para luego socializar su respectiva construcción. Con este tipo de trabajo en el aula, se movilizaron cuestiones asociadas al pensamiento numérico, presentándose en los jóvenes una apropiación, evocación y uso de algunos conceptos asociados a la propiedad de ser número par o impar, operaciones como suma, resta, multiplicación y división con respectivas fracciones, ecuación lineal, entre otros.

Construir los cuadrados mágicos en grupo, permitió que los estudiantes se familiarizarán con el problema, buscarán posibles estrategias y seleccionarán la más adecuada, discutiendo entre ellos. Con esta metodología de trabajo grupal, es pertinente resaltar la eficacia que tuvo en el desarrollo del pensamiento numérico, en la aplicación de números y operaciones, al decidir qué tipo de respuesta era apropiada (exacta o aproximada), qué herramienta de cálculo es eficiente y accesible (la calculadora o el cálculo mental).

El hacer uso de los cuadrados mágicos como una herramienta lúdica en el aprendizaje de cierta parte de las matemáticas, dejó ver en los estudiantes por un momento el entusiasmo de trabajar en este maravilloso mundo. El jugar, con los números, con las operaciones, despertó interés en resolver en cada sesión el respectivo taller. Fueron espacios, donde se trabajó, se aprendió, se jugó, socializó, se corrigió, entre otras más; que hicieron de este trabajo un ambiente agradable para enseñar y aprender.

La experiencia de trabajar con un grupo de estudiantes fue muy enriquecedora. En primer lugar se llegó al aula con muchas expectativas y con una temática a desarrollar, la cual había tenido días de trabajo. Puesto que se requiere de tiempo para pensar como se va implementar en el aula.

El primer día, no se tiene idea de cómo van a ser los estudiantes con los que se va a interactuar. Sin embargo, cuando se llega al aula, hay una apariencia de niños tiernos, amables, carismáticos, sencillos, inteligentes, unos disciplinados y otros no. Finalmente un curso con toda la diversidad de opciones como espera uno encontrárselo en esta situación.

Cuando se está en el aula, algunas situaciones se prestan para que el panorama cambie de cierta manera, como el número de estudiantes, la disposición por parte de ellos, factores tecnológicos, entre otros, realidad, con la cuál día a día se ve enfrentado un profesor.

El acercamiento hacia las matemáticas a través de lo lúdico reside en la manera de transmitir al estudiante la forma de enfrentarse a ciertos problemas matemáticos. Para su aprendizaje, se puede utilizar de muy buena forma, sus aplicaciones, su historia, las biografías de los matemáticos más interesantes, sus relaciones con la filosofía o con otros aspectos de la mente humana, pero posiblemente ningún otro camino puede transmitir cuál es el espíritu correcto para hacer matemáticas como lo es un juego bien escogido.

ANEXOS

Anexo A: TALLER N.1

CUADRADOS MÁGICOS

1. En el caso del cuadrado de tres por tres, cabe preguntarse, ¿Por qué la suma constante debe ser quince?, ¿Es esta la única forma de arreglar los dígitos del 1 al 9 para obtener un cuadrado mágico?

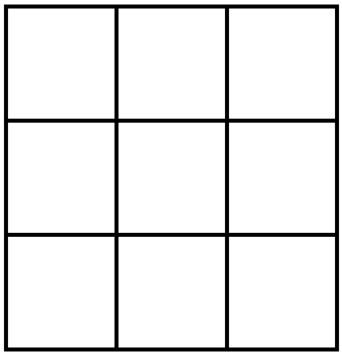


Figura 1. Cuadrado mágico de 3x3

2. Escriban los números 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 dentro de las casillas del siguiente cuadrado, de tal manera que la suma de cada columna, renglón o diagonal sea 21.

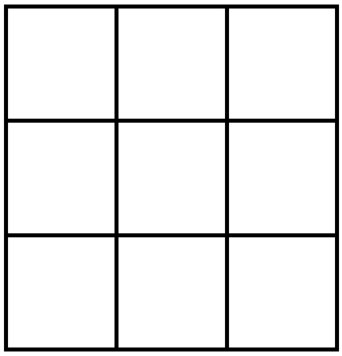


Figura 2. Cuadrado mágico de orden 3x3

- ¿Qué se puede concluir?
- ¿Qué sucederá si se suma el mismo número a cada uno de los números de un cuadrado mágico? Para ello tomemos como ejemplo el cuadrado que ya construimos.

Anexo B: TALLER N.2

TRANSFORMAR UN CUADRADO MÁGICO EN OTRO

Por definición, un **cuadrado mágico** de orden **n** es un tablero cuadrado formado por **n filas** y **n columnas** en las que se escriben los n^2 primeros números naturales, de modo que sea constante la suma de los números de cualquier fila, cualquier columna y cualquiera de las dos diagonales.

Hay varias maneras de transformar el cuadrado mágico "Lo-shu":

6	**1**	**8**
7	**5**	**3**
2	**9**	**4**

Figura 1. Cuadrado mágico de 3x3

1. Con el cuadrado mágico chino (Figura 1), piensa en el número que tú quieras, súmale, réstale o multiplícalo con cada uno de los números del cuadrado original, acomodando los resultados en los mismos lugares.[13]

Que puedes decir del nuevo cuadrado:

- ¿El cuadrado que queda también es mágico?

Comparen sus soluciones:

- ¿Todas son iguales?

Si no son iguales:

- ¿En qué se parecen?, ¿En qué son distintas?
- ¿Hay alguna manera especial de acomodar los números para que el cuadrado sea mágico?

[13] Tomado de la página: http://redescolar.ilce.edu.mx

Anexo C: TALLER N. 3

Construcción de Cuadrados mágicos Haciendo

Uso de las ecuaciones lineales

2x+2	**x**	**X+1**
x-2	**X+2**	**5x-6**
3x-3	**2x+1**	**x-1**

Figura 1. Cuadro algebraico

1. Cuadrado mágico algebraico N. 1

El cuadrado (figura 1) es un cuadrado mágico de orden 3, todas sus filas, columnas y diagonales suman 15 (constante mágica).

Para el cuadrado mágico N.1 tenga en cuenta lo siguiente:

1. Escriba las sumas de cada una de las ocho líneas del cuadrado mágico.
2. Todas las líneas no dan la misma expresión. Sin embargo, al tratarse de un cuadrado mágico, debe existir un valor de x que haga que todas esas expresiones tomen el mismo valor. Para ello calcule el valor de x.

2.

3(1+ 2m)	3-m	4(m+1) -1
3+ m	3(m +1)	5(1+ m) –2
2 + (1+2m)	3 +7m	3

Figura 2. Cuadro Algebraico N.2

4(m+1)	m	2(m+2)
4m-1	2m+3	4m+3
2(m+1)	3(m+2)	m+1

Figura 3. Cuadro Algebraico N.3

a. Escribe las sumas de las ocho líneas del cuadrado mágico.
b. Calcula el valor de **m** para que sea cuadrado mágico.
c. Halla el cuadrado numérico correspondiente.
d. Para el cuadrado algebraico N.3: Si **m** = 2, escribe el cuadrado mágico correspondiente. ¿Cuánto vale entonces el número mágico?

3. Cuadrado mágico de orden 3 con Z > 4 un número natural[1].

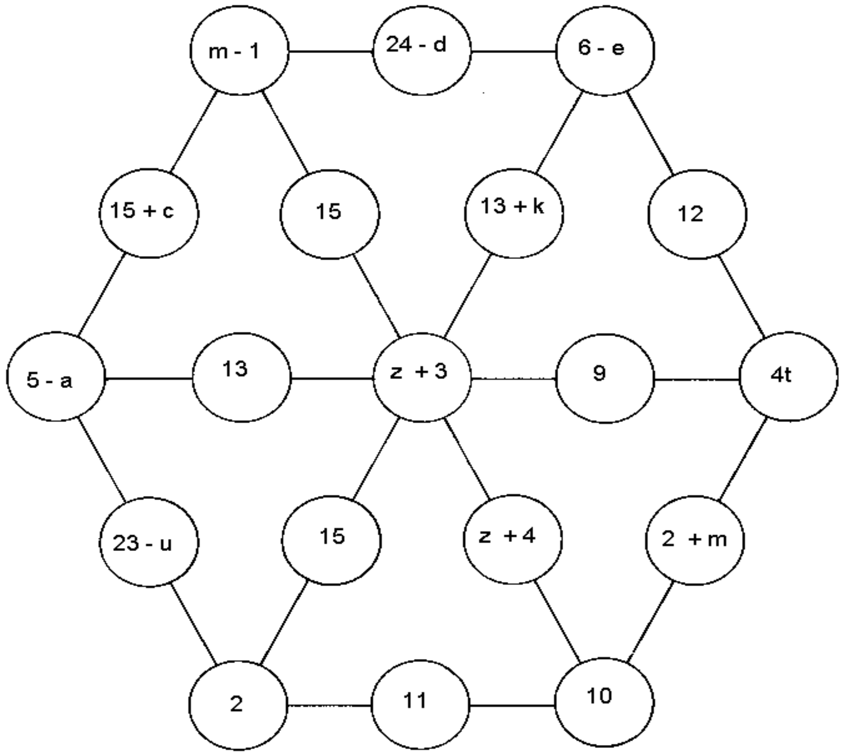
Z+3	Z-4	Z+1
Z-2	Z	Z+2
Z-1	Z+4	Z-3

Figura 4. Cuadrado Algebraico N.4

a. ¿Cuánto vale el número mágico?
b. ¿Por qué el valor que puede tomar **Z** debe ser mayor que 4?

[1] Tomado de la Revista del Profesor de matemática. Cuadrados Mágicos S. Acuña, M. Arellano y R. Barahona.

Anexo D: LA RUEDA ALGEBRAICA



1. Si los tres números sobre cada lado y cada radio de la rueda suman lo mismo, calcular el valor de todas las letras. Escribe la rueda numérica correspondiente.

Anexo E: TALLER N. 4

Construcción de Cuadrados mágicos Haciendo

Uso de Los números primos

Existen muchos cuadrados mágicos, el famoso creador de acertijos Henry Ernest Dudeney, considero cuadrados mágicos cuyas casillas sean números primos, él proporciona muchos resultados, pero como en esa época el 1 era considerado primo, muchos de sus resultados contienen al 1 en alguna casilla.

1. Construya un cuadrado mágico de orden 3 con los números primos inferiores a cien. (Constante mágica 111).

	1	
31		

Figura 1. Cuadrado mágico de 3x3

2. Aceptada la convención actual de que el 1 no es primo, el único cuadrado mágico primo de orden tres, con la constante más baja C = 177 (Martin Gardner).

17		47
		101

Figura 2. Cuadrado mágico

3. Construya el siguiente cuadrado mágico 4x4 compuesto por números primos finalizados en siete, tomando los números primos desde el 17 hasta el 397.

17		**127**	
			47
	107		
67		**137**	**367**

Figura 3. Cuadrado mágico de 4x4

Anexo F: TALLER N. 5

1. Este cuadrado mágico de orden 8 fue inventado por Benjamín Franklin, formado con los 64 primeros números naturales y tiene ciertas propiedades:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura.1 Cuadrado mágico de 8x8

Encuentra las propiedades de este cuadrado mágico.

Por ejemplo:

- Los cuatro números de las esquinas más los cuatro números del centro suman **260.**

Bibliografía

Acuña, S., M, A., & R., B. (2010. Chile). *Cuadrados Mágicos*. Revista del Profesor de Matemática, Año 1. N°1 , 29.

BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. (2010). *MATARRAÑA.* (Número 23).

Cronida, A. (2009). *Los Cuadrados Mágicos (8). El cuadrado de Benjamin Franklin.*

Deulofeu, J. *Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas: Diversidad de opciones y de recursos.* Barcelona.

Educación, M. d. (2007). *Materiales educativos y el aprendizaje de la matemática.* (Primera ed.). Van de Velde 160, San Borja. Fascículo 5.

Enseñanza de las ciencias y la matemática, Septiembre 1984, *Publicado en Actas IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas.* Santa Cruz de Tenerife*.* Pág.3

Gervasi, L. (1995). *¿Cuál es el papel del profesor de matemática frente a los problemas de la educación matemática?* Buenos Aires (Argentina): SED del GCBA.

Guzmán, M. d. (2007). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN*. N. º 43.* , Pág. 19. .

Guzmán, M. D. (Real academia de ciencias). *Polivalencia de la matemática: ciencia, técnica, arte, juego, filosofía.*

Guzmán, M. d. (Septiembre 1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Publicado en Actas IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas. Santa Cruz de Tenerife*.* , 10-14.

Guzmán, M. d. (1989). *Juegos y Matemáticas*. Revista SUMA. N°4 , 61-64.

H, E., S, G., & M., G. (2004). *El fichero de actividades didáctica*. Pág.25. México, D.F: Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría y Normal de la Secretaría de Educación Pública.

I, P. Y. *Problemas y Experimentos Recreativos*. En P. B.-A. Bravo.

M., T. (Noviembre 2001). *El juego en el aula: una experiencia de perfeccionamiento docente en Matemáticas a nivel institucional*. *SUMA 38* , 23-29.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencia matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

P, A. (septiembre 2009). *La Magia de los Cuadrados Mágicos*. Revista Sigma 34 *,* pág. 107.

Ramirezparis, X. (2009). *La lúdica en el aprendizaje de las matemáticas*. ZONA PRÓXIMA (Nº 10), 138-145.

Salvador, A. *El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas.* Madrid: Universidad Politécnica.

Trigo, V. A. (s.f.). *Cuadrados Mágicos*. Recuperado en Enero de 2013, de <http://www.vicentetrigo.com>

Yturralde, E. (2001). Obtenido de www.yturralde.com: http://www.aprendizajeexperiencial.com