RESOLVIENDO ECUACIONES CUADRÁTICAS, UNA APROXIMACIÓN DESDE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

ASTRITH JURANNY OROZCO MERA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2015

RESOLVIENDO ECUACIONES CUADRÁTICAS, UNA APROXIMACIÓN DESDE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

ASTRITH JURANNY OROZCO MERA

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Directora:

Gabriela Inés Arbeláez Rojas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2015

Nota de Aceptación

Vo. Bo Yenny Leonor Rosero

Coordinadora de Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Directora de grado

Vo. Bo Martha Lucia Bobadilla Forero

Evaluadora

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a Dios por estar conmigo en cada paso que doy, por darme la fortaleza, sabiduría y perseverancia para poder llegar a este momento de mi vida.

A mis padres y mis hermanos que con su confianza y apoyo incondicional siempre me motivaron para seguir adelante.

A mi directora de práctica pedagógica Gabriela Arbeláez Rojas por su paciencia, dedicación y sabiduría en mi proceso de formación.

A mi evaluadora Martha Lucia Bobadilla por aceptar el compromiso de evaluar el presente trabajo de práctica pedagógica.

A mis amigos, por ser parte de mi vida, de mis momentos tristes y alegres, por apoyarme y por estar siempre ahí.

Y finalmente a todas y cada una de las personas que de alguna u otra manera contribuyeron a que lograra esta meta que me propuse.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

1. LO PLANEADO........ 8
1.1 JUSTIFICACIÓN 8
1.2 REFERENTES TEÓRICOS........ 12
1.2.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS........ 12
1.2.2 ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, UNA MIRADA DESDE LA HISTORIA........ 17
1.3 METODOLOGÍA........ 22
2. LO ACONTECIDO........ 26
2.1 MARCO CONTEXTUAL........ 26
2.2 BITÁCORA........ 27
2.2.1 BITÁCORA 1........ 27
2.2.2 BITÁCORA 3........ 43
2.2.3 BITÁCORA 4........ 49
2.2.4 BITÁCORA 5........ 56
2.2.5 BITÁCORA 6........ 59
3. CONCLUSIONES........ 68
4. BIBLIOGRAFIA........ 71
5. ANEXOS........ 72
ANEXO 1. PRUEBA DIAGNOSTICA........ 72
ANEXO 2. TALLER 1........ 73
ANEXO 3. TALLER 2........ 74
ANEXO 4. TALLER 3........ 75
ANEXO 5. TALLER 4........ 76
ANEXO 6. TALLER 5........ 77
ANEXO 7. EJERCICIOS........ 78
ANEXO 8. EVIDENCIAS........ 79

INTRODUCCIÓN

El presente documento da a conocer la sistematización del proceso de práctica pedagógica; el cual fue desarrollado en cuatro etapas. En la primera etapa se abordaron algunos aspectos de lo que trata la metodología de resolución de problemas, esto nos proporcionó ideas para desarrollar adecuadamente la segunda etapa, pues en ésta se logró planear el proyecto de práctica pedagógica titulada *“Resolución De Ecuaciones Cuadráticas, Una Aproximación Desde La Historia De Las Matemáticas”*. Dicho proyecto fue llevado a cabo en la tercera etapa, en la Institución Educativa De Julumito con estudiantes de grado decimo; el análisis, los resultados, y las reflexiones de esta experiencia, junto a la información anterior hacen parte de la cuarta etapa, la cual es presentada en este documento

El documento se divide en tres capítulos. En el primer capítulo se expone lo planeado durante la práctica pedagógica. En la sección 1.1, se presentan las razones que me llevaron a tratar el tema de ecuaciones cuadráticas. Los estudiantes memorizan la fórmula que resuelve una ecuación cuadrática sin detenerse a pensar en su significado. Por ello, me he propuesto guiarlos a reconstruir de manera didáctica la fórmula mencionada. En la sección 1.2 se habla de los referentes teóricos que guiaron esta propuesta. Dichos referentes están relacionados con la resolución de problemas, y la historia de las matemáticas en la enseñanza. El primero se plantea como un elemento importante para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues esta actividad permite que el estudiante construya sus propios conocimientos. Para ello, se toma como base el libro *Cómo Plantear Y Resolver Problemas* del matemático George Polya, el cual nos da a conocer las estrategias heurísticas para la resolución de problemas. En el segundo referente se toman dos artículos, *Usos De La Historia En La Enseñanza De La Matemática”*, escrito por

Margot Martínez Rodríguez[1] y Jesennia Chavarría Vásquez[2], y *Second Degree Equations In The Classroom: A Babylonian Approach*, de Luis Radford[3] y Georges Guerette[6] El primero brinda algunas razones para implementar la historia en la enseñanza de las matemáticas, y el segundo, me permite disponer de un modelo didáctico para la enseñanza de ecuaciones cuadráticas. Dicho modelo está relacionado con la historia de las matemáticas de los escribas babilónicos y la civilización árabe; todo lo concerniente a él, es expuesto en la sección 1.3 que también hace parte de este primer capítulo. Teniendo en cuenta este modelo, se diseñaron las actividades que fueron presentadas en cada sesión de clase.

En el segundo capítulo, se reflexiona sobre el proyecto de aula tal como fue desarrollado en la institución. En la sección 2.1 se da a conocer la institución educativa, y los estudiantes que fueron participes de este proyecto, y en la sección 2.2 se presentan las bitácoras, que son el fruto de esta propuesta, pues en ellas se recopilan los resultados y las reflexiones de las actividades desarrolladas en cada sesión

Finalmente, en el tercer capítulo se exponen las conclusiones generadas después de implementar este proyecto de práctica pedagógica.

[1] Margot Martínez. Master en educación, académica-investigadora
[2] Jessenia C. Vásquez, profesora en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica
[3] Luis Radford. Profesor de la Universidad Laurentian, Ontario, Canadá. Sus intereses de investigación abarcan entre otras cosas la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas [6] Georges Guerette. Profesor de matemáticas, interesado en nuevas maneras de llegar a los estudiantes motivados en aprender matemáticas.

1. LO PLANEADO

1.1 JUSTIFICACIÓN

Hoy en día los estudiantes en el área de matemáticas tienen la costumbre de memorizar cuanta información perciben, sin comprender lo que en verdad significa, e ignorando la importancia que tiene. Tal es el caso de las fórmulas, y en particular la fórmula que resuelve una ecuación de segundo grado, así como también los métodos de factorización que resuelven la misma. Tanto la fórmula como los métodos de factorización son aprendidos de memoria por el estudiante en los momentos que le son convenientes, como es el caso de los exámenes. Pero en esta situación, el estudiante sólo memoriza la fórmula y las técnicas de factorización sin hacer una interiorización de ellas, lo cual traerá como consecuencia que las olvide rápidamente y tenga que aprenderlas una vez más.

Decimos que la forma general de la ecuación de segundo grado corresponde a la expresión: $ax^2+bx+c=0$ donde los términos a, b, c son llamados coeficientes que toman valores numéricos, con $a\neq 0$ y c es denominado el término independiente. Es evidente que cada ecuación será diferente, pues ello depende de los valores se le sean asignados a los coeficientes. Así que para hallar la solución de una ecuación se debe hacer la debida elección entre la fórmula cuadrática $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la solución gráfica o un método de factorización. Sin embargo, el método de solución más utilizado y de mayor preferencia es el de la fórmula cuadrática, pues cuando se trata de soluciones en términos radicales es inútil utilizar el método de factorización o la solución gráfica.

Aun así, sería sorprendente ver un método de solución distinto a los ya mencionados, como por ejemplo, la solución de algunos problemas a lo largo de la historia que implícitamente involucran ecuaciones de segundo grado. Para vislumbrar la solución de estos problemas primero realizaré un acercamiento a algunos elementos matemáticos en la historia de los pueblos antiguos: orientales y medievales, en particular los babilonios, los griegos y los árabes, pretendiendo así, obtener una visión más amplia sobre la solución de aquellos problemas históricos de tipo geométrico y algebraico que hoy en día dan lugar a una ecuación cuadrática.

Con la resolución de problemas que involucran ecuaciones cuadráticas se busca que los estudiantes conozcan, y se apropien de dos métodos geométricos que tienen sus raíces en la época de la civilización babilónica. Dichos métodos no solo darán las soluciones de algunas ecuaciones, sino que también le permitirá a los estudiantes “reconstruir” la fórmula que resuelve una ecuación cuadrática.

En coherencia con los planteamientos anteriores, el presente trabajo trae consigo una secuencia didáctica, cuyo propósito principal es guiar a los estudiantes a “reinventar” la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que resuelve la ecuación cuadrática general $ax^2+bx+c=0$. La secuencia se basa principalmente en el método retórico que dieron inicialmente los escribas babilónicos, y que siglos más tarde fue retomado y desarrollado geométricamente por la civilización árabe. El método al que se hace referencia fue denominado por J. Høyrup[4] como geometría intuitiva[5], que a su vez la clasificó en dos técnicas: primera y nueva técnica de la geometría intuitiva, las cuales serán expuestas minuciosamente en la metodología.

La secuencia didáctica consta esencialmente de cinco partes. En la primera, se mostrará a los estudiantes un problema de tipo geométrico que surgió en

[4] Jens Hoyrup. Historiador danés de las matemáticas. Ha realizado una interpretación geométrica de los problemas matemáticos de los escribas babilónicos y de la respectiva solución propuesta por los mismos.

[5] Se denomina geometría intuitiva, cuando la solución de un problema de tipo geométrico se da con la observación y manipulación de figuras geométricas.

la civilización babilónica, cuya solución está dada por la primera técnica de la geometría intuitiva. En la segunda se presentará un compendio de problemas similares al anterior, pretendiendo con ello que el estudiante se apropie de la primera técnica. Pero pronto podrán verificar que no todos los problemas pueden ser resueltos por el primer método; esto se reflejará en la tercera parte de la secuencia, ya que en ella se presentará un problema de tipo geométrico que surgió en la civilización árabe. Dicho problema se resolverá con la nueva técnica de la geometría intuitiva. En la cuarta parte, se dará a los estudiantes una serie de problemas con el propósito de que comprendan la nueva técnica. Finalmente, en la quinta parte se resolverá de manera general el problema árabe. Este resultado, y la solución de dos problemas dados en el lenguaje algebraico conducirán a los estudiantes a "reconstruir" la fórmula esperada $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

En el proceso anterior se espera que sean los propios estudiantes quienes utilicen conceptos de algebra y geometría para explorar y encontrar una estrategia que les permita resolver los problemas mencionados. Si bien estos problemas dan lugar a ecuaciones cuadráticas se evitará utilizar la fórmula general y los métodos de factorización para hallar su solución.

Se decidió que el presente proyecto estuviera orientado a estudiantes de grado décimo de bachillerato porque se pretende reforzar sus conocimientos en cuanto al tema de ecuaciones cuadráticas, pero también, porque cuentan con los conceptos requeridos para la secuencia didáctica que se pretende implementar.

Esta propuesta se caracteriza por traer consigo un dialogo constructivo, donde el estudiante hace preguntas y sugerencias al profesor, se intercambian ideas con los mismos compañeros, sus puntos de vista y sus opiniones para conseguir llegar a la solución correcta del problema. De igual manera, se debe tener presente que para enseñar y aprender matemáticas es imprescindible que en el aula de clase se propicien ambientes donde sea posible partir del conocimiento previo del estudiante, para así lograr la discusión de diferentes ideas que favorezcan el desarrollo del mismo.

Los talleres propuestos en la secuencia de enseñanza serán manejados bajo la metodología de resolución de problemas de George Polya, en paralelo con el resultado de algunos acercamientos a la historia de las matemáticas en lo que respecta a las ecuaciones cuadráticas. En general estos talleres se centran en la resolución de problemas de tipo geométrico pues están involucrados con figuras geométricas rectangulares y cuadradas.

1.2 REFERENTES TEÓRICOS

1.2.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Para nadie es un secreto que gran parte de los estudiantes de la educación media consideran las matemáticas como la asignatura más difícil. Esto los ha llevado no sólo mostrar desinterés hacia ella, sino también a que se dediquen a aprender de memoria los algoritmos de solución sin lograr una verdadera comprensión. Sin embargo, el profesor matemático George Polya en su obra *“Como Plantear Y Resolver Problemas”* ofrece conocer las matemáticas desde una perspectiva diferente como lo es la resolución de problemas. De esta forma, será el propio estudiante, quien deberá explorar para descubrir las posibles estrategias de solución de un problema determinado, al igual que va despertando ese genuino interés por la disciplina matemática. El deseo del autor es que los estudiantes aprendan de sí mismos, corrijan y mejoren el proceso de solución. De igual manera, que identifiquen aquellos errores con los que tropiezan para evitar generarlos nuevamente. Por otro lado, es importante que los estudiantes aprecien los conocimientos que poseen, pues aunque no lo crean tienen un gran valor en el momento de solucionar un problema, es decir, que no sólo se dediquen a conservar la mera posesión de la información, sino que logren interiorizarla y utilizarla en el momento adecuado.

El contenido del libro también ofrece una gran oportunidad para los docentes que deseen desarrollar aptitudes en los alumnos, pues como dice Polya: hacer matemáticas es resolver problemas (Polya, 1965). Es decir, que el estudiante aprenderá matemáticas a través de la resolución de problemas, por ello, no sólo debe contemplarse como una más de nuestras rutinas para hacer agradable el proceso de enseñanza aprendizaje, sino que también se debe considerar como un elemento fundamental en este proceso, pues es el instrumento que permite al estudiante construir sus conocimientos. Así que, para dar una idea a los alumnos de lo que es hacer matemáticas hay que ofrecerles problemas que les permitan explorar distintas formas de solución. En esta propuesta no es suficiente proponer problemas únicamente con el propósito de resolverlos, ineludiblemente también se deben analizar las estrategias y las técnicas de solución utilizadas. Además, es necesario que cada estudiante sea participe de las distintas situaciones que se presenten, como por ejemplo la discusión de una solución, esto con el fin de que el profesor distinga su modo de pensamiento.

El papel del docente durante este proceso consiste en ser un guía, quien pretende que cada alumno de lo mejor de sí mismo, logrando de esta manera que tenga seguridad en sus conocimientos, se vuelvan perseverantes y creativos, que no se detengan hasta encontrar la solución del problema.

En general, cuando se habla de un “problema matemático” no debe aludirse a problemas que se resuelven mediante algoritmos mecánicos, todo lo contrario, son problemas con cierto grado de dificultad, los cuales buscan que el estudiante ponga en juego su pensamiento analítico para hallar su respectiva solución.

Pero desde el punto de vista de Polya ¿Qué es un problema? Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata (Polya, 1965). Lo cual quiere decir, que Polya concibe un problema como cada una de las acciones que el sujeto desarrolla en su mente para la solución de dicho problema.

Polya en el desarrollo de sus ideas también menciona los problemas de rutina, refiriéndose a ellos como problemas mecánicos y repetitivos. Los problemas de rutina, incluso empleados en gran número, pueden ser útiles en la enseñanza de la matemática, pero sería imperdonable proponer a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo. Limitar las matemáticas a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarlas por debajo del nivel de un “libro de cocina” ya que las recetas culinarias reservan una parte a la imaginación y al juicio del cocinero, mientras que las recetas matemáticas no permiten tal cosa (Polya 1965). Esto nos lleva a concluir que los profesores debemos idear estrategias para que los estudiantes exploren, y sean personas críticas en cuanto a sus propias ideas, y ¿Qué mejor estrategia que la resolución de problemas?

En el desarrollo de sus planteamientos Polya introduce el término “heurística”, el cual tiene un papel importante en la resolución de problemas. Según la perspectiva de Polya, la heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso (Polya, 1965). En otras palabras, la “heurística” permite explorar los posibles caminos o estrategias que conducen a la solución del problema, pero en dichas estrategias también entran en juego las ideas que actúan intuitivamente en el problema a resolver.

Según Polya en el momento de resolver un problema se deben seguir cuatro fases:

COMPRENDER EL PROBLEMA: El estudiante debe realizar una lectura exhaustiva del enunciado del problema, entendiendo cada expresión de este y diferenciando los datos de la incógnita. Para que el estudiante pueda lograr lo anterior Polya sugiere que le realicemos las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos y las condiciones? Con ello se pretende que el estudiante conozca los datos y lo que pide hallar el problema, para así continuar a la siguiente fase.

CONCEBIR UN PLAN: Es aquí donde el estudiante pone en juego su intuición para explorar el problema y así descubrir un camino de llegada para su solución. Para ello, debemos preguntar al estudiante lo siguiente: ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Se podría enunciar el problema de otra forma? ¿Se ha empleado todos los datos?

EJECUTAR EL PLAN: Es la etapa donde el estudiante debe acoplar las fases anteriores para emprender una posible solución del problema, al igual que irá verificando si los resultados son correctos. Para que el estudiante logre lo anterior debemos formularle la siguiente pregunta ¿puede usted ver que el paso es correcto? Porque si hay dificultades deberá iniciar nuevamente con la fase anterior para corregir el error del plan, y si es necesario cambiarlo completamente.

EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA: Después que el estudiante halla encontrado una solución al problema debe verificar que los datos proporcionados por el enunciado hayan sido utilizados. Para ello, debemos preguntar al estudiante lo siguiente: ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? Consiguiendo con ello que analice minuciosamente el resultado y el camino que condujo a este.

Es conveniente aclarar que las fases anteriores no son reglas, ni mucho menos un procedimiento algorítmico que debamos seguir para la solución inmediata de todos los problemas, por el contrario, solo ofrece unas pautas que el estudiante debe seguir para hacerse una idea de la solución del problema

Los matemáticos resuelven problemas teniendo en cuenta otros ya resueltos, situación que les da la posibilidad para la concepción de nuevas nociones. Así que lo anterior refleja una vez más el valor que tiene implementar la resolución de problemas en el aula, pues como dice Polya, sólo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento (Polya, 1965). Es decir que la resolución de problemas puede convertirse en una herramienta importante para dar comienzo al desarrollo del pensamiento matemático, ya que al resolver un problema no solo encontramos la solución, sino que también encontramos nuevas ideas las cuales enriquecerán nuestra capacidad matemática.

En el proyecto de aula que se pretende ejecutar, además de utilizar la metodología de resolución de problemas, también se va a dar cabida al valor que tiene la historia de las matemáticas en la enseñanza. Esto último con el propósito de dar una idea a los estudiantes de que algunos conceptos algebraicos también se pueden ver de forma geométrica.

1.2.2 ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, UNA MIRADA DESDE LA HISTORIA

Las interpretaciones que algunos matemáticos han realizado a los escritos de las antiguas civilizaciones como la babilónica, indican que por el siglo 2000 ac ya se resolvían problemas de tipo geométrico que modernamente dan lugar a ecuaciones de segundo grado. Tales interpretaciones han mostrado a la humanidad dichos problemas y su respectiva solución. Indiscutiblemente esta civilización desconocía por completo el lenguaje simbólico, por ello se vio en la necesidad de recurrir al lenguaje natural, para especificar la solución de los problemas mencionados.

La civilización griega por su parte tuvo personajes como Euclides, y Diofanto, quienes obtuvieron importantes resultados en el tema de las ecuaciones cuadráticas. Euclides (330 ac–275 ac) desde el punto de vista geométrico dio resultados significativos para el desarrollo de las ecuaciones de segundo grado, resultados que fueron publicados en la obra que lleva su nombre "Elementos de Euclides". Diofanto (200 – 290 ac) por su parte desarrolló una amplia gama de ecuaciones cuadráticas, cuyas soluciones las efectúa mediante la aritmética para justificar sus afirmaciones.

Finalmente, la civilización árabe mantiene e interpreta los conocimientos alcanzados por la civilización babilónica y la civilización griega en lo que compete a la solución de ecuaciones. Estos estudios fueron establecidos por el matemático árabe Mohamed ibn Musa Al-Khowarizmi[6] (s. IX) en su libro Aljabr Wa`l Muqabalah, el cual tiene como propósito la solución de

---

[6] Matemático árabe. Escribió una obra titulada *Libro de la reducción*, En ella indicó las primeras reglas del cálculo algebraico: la transposición de los términos de uno a otro miembro de una ecuación, previo cambio de signo, y la anulación de términos idénticos en ambos miembros. También estudió las ecuaciones de segundo grado y otras cuestiones matemáticas

problemas prácticos de herencia. El libro se divide en tres partes: En la primera parte AlKhowarizmi expone los supuestos teóricos generales para calcular por aljabr y al-muqabalah, esto consiste respectivamente en la transposición de términos de un lado a otro de una ecuación y la cancelación de términos iguales. En la segunda parte aborda cuestiones geométricas, y la tercera parte está dedicada a los problemas de herencia. Sin embargo, es la primera parte la que tiene más relevancia para el desarrollo de este proyecto, pues en ella Al-Khowarizmi distingue distintas formas de ecuaciones cuadráticas para las cuales establece métodos de solución tanto algebraicos como geométricos, esta última basada en la igualación de áreas de figuras cuidadosamente seleccionadas.

Es evidente que cada civilización aportó un “granito de arena” para introducir por primera vez en la historia de las matemáticas lo que se denomina modernamente como ecuaciones de segundo grado, mostrando su respectiva solución ya fuese mediante el lenguaje natural, la geometría o el álgebra fundamental.

Pero indudablemente la fórmula que modernamente utilizamos para resolver una ecuación cuadrática, fue presentada por primera vez por el matemático hindú Bhaskara (1114-1185) en el libro “Siddhanta Siroman” durante el año 1150. La fórmula mencionada es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Después de este breve recuento histórico de la ecuación cuadrática me permito presentar dos artículos que serán relevantes para la práctica a desarrollar. El primer artículo se denomina *Using History to teach Mathematics: An International Perspective* editado por Víctor Katz[7] y el segundo titulado *Usos De La Historia En La Enseñanza De La Matemática*,

[7] Victor Katz. Profesor de matemáticas en la Universidad del Distrito de Columbia, se ha interesado en la historia de las matemáticas y en su uso en la enseñanza.

escrito por Margot Martínez Rodríguez y Jesennia Chavarría Vásquez. El primero para disponer de un modelo de enseñanza en la práctica a realizar, es decir, que de este se tomarán elementos históricos, para "reconstruir" en el aula de clase la fórmula cuadrática; y el segundo con el fin de mostrar la importancia de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

Para desarrollar de manera satisfactoria los aspectos históricos de las matemáticas concernientes con el tema de las ecuaciones cuadráticas tendré como referente el libro: *Using History to teach Mathematics: An International Perspective*, el cual recopila una serie de artículos desarrollados por matemáticos de talla internacional que incluyen la historia de las matemáticas en la enseñanza. Particularmente me centraré en el capítulo III, y tomaré el artículo de Luis Radford y Georges Guerette denominado Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach. En este artículo se integran problemas geométricos de la civilización babilónica y árabe. Dichos problemas involucran ecuaciones de segundo grado cuya solución dada por un método geométrico, el cual fue planteado implícitamente por la civilización babilónica y más tarde desarrollado geométricamente por la civilización árabe. El trabajo de estos investigadores tiene como objetivo principal guiar a los estudiantes a "reinventar" la fórmula que resuelve la ecuación cuadrática general. El objetivo mencionado se logra a través de una secuencia didáctica, la cual será expuesta en la metodología.

Pero, ¿Por qué implementar la historia de las matemáticas en la enseñanza? Rodrigues y Chavarria en su artículo "*Usos De La Historia En La Enseñanza De La Matemática"* nombran a Evelyn Barbin[8], quien ofrece dos razones para incorporar la historia en la enseñanza de la matemática. Según Barbin, la historia provee una oportunidad para desarrollar nuestra visión de lo que es realmente la matemática y nos permite tener una mejor comprensión de

[8] Evelyn Barbin, estudió matemáticas en la Universidad de Paris e Historia de las matemáticas en la Universidad de Maine en Francia

los conceptos y teorías (Martinez, Margot, 2012). Es decir que una vez se implemente la historia como un elemento en la enseñanza, los docentes y los estudiantes no sólo conocerán cuidadosamente la forma en que se lograron construir los conceptos y teorías, sino que también podrán comprenderlos mejor. Esto permitirá que el estudiante empiece a concebir las matemáticas como una disciplina que surgió con el objetivo de dar solución a los problemas cotidianos que la antigua sociedad afrontaba.

Para corroborar lo anterior Barbin decide implementar la historia para enseñar matemáticas a los estudiantes de secundaria, lo cual le permitió obtener óptimos resultados. Según esta investigadora, luego de usar la historia, un estudiante reporta que la matemática deja de ser una ciencia muerta y pasa a tener vida, con un desarrollo histórico que incluye aplicaciones prácticas (Martinez, Margot, 2012). Además, Barbin pudo evidenciar que los estudiantes aprenden mejor y le dan importancia a los conceptos, encuentran el porqué y el para qué de estos.

Para finalizar, debo decir que la motivación del estudiante juega un papel importante en el proceso de enseñanza, pues de ella depende el interés que el alumno tenga por aprender. En este sentido, los profesores debemos evitar proponer a los estudiantes problemas que se resuelvan con los mismos algoritmos. Por ello, la historia de las matemáticas en la enseñanza también se presenta como un elemento motivador, pues nos permite ofrecer a los estudiantes problemas históricos cuyo método de solución puede llamar su atención. Para reafirmar la necesidad de la historia de las matemáticas en la enseñanza, me permito citar las siguientes palabras de Vicente Meavilla Seguí[9]“La historia de las Matemáticas permite descubrir el

[9] Vicente Meavilla Seguí. Nació en Mahon, España en 1949. Licenciado en Matemáticas y doctor en pedagogía, autor de diversos libros sobre la historia, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

lado ameno de las Matemáticas y puede influir favorablemente en la motivación de los estudiantes”.

1.3 METODOLOGÍA

Los docentes debemos ser conscientes de que enseñar matemáticas va mucho más allá de enseñar fórmulas, es inducir al estudiante a construir sus propios conocimientos y convertirlo en una persona crítica en cuanto a los conceptos y procedimientos que va concibiendo. Pero si queremos encaminar al estudiante a todo lo anterior ¿cómo debemos enseñar matemáticas? Una forma novedosa e interesante de enseñar y aprender matemáticas radica en la resolución de problemas, pues como ya he dicho resolver problemas conlleva al estudiante a la búsqueda de estrategias para la posible solución del problema, y simultáneamente le permite tener un mejor aprendizaje de sus conocimientos.

Sin embargo, enseñar matemáticas es un reto. Un reto que implica poner en juego nuestra creatividad para innovar día a día la forma en que frecuentemente enseñamos matemáticas. Debemos buscar la mejor forma de que los estudiantes comprendan un saber, pues como he expuesto en párrafos anteriores uno de los problemas que tienen los estudiantes en matemáticas es que memorizan todo tipo de información, sin siquiera detenerse a interiorizar el conocimiento. Justamente esto es lo que ocurre con las fórmulas y en especial con la fórmula general que resuelve una ecuación de segundo grado.

Siendo coherentes con lo anterior, he querido que los estudiantes reconstruyan la fórmula de Bhaskara, pero ¿cómo lograr dicha reconstrucción? Para ello me guiaré con la secuencia didáctica expuesta en el artículo denominado Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach de Luis Radford y Georges Guerette. La secuencia se centra en resolver algunos problemas de tipo geométrico que surgieron en la civilización babilónica y la civilización árabe; además inicia con problemas particulares, es decir problemas que constan de valores numéricos fijos, pretendiendo con ello que los estudiantes comprendan los métodos de solución. Una vez se consiga lo anterior se procede a resolver el caso general de algunos de estos problemas. En lo que sigue se describirá las fases de la secuencia que implementaré en el aula de clase.

La primera fase busca mostrar un problema de tipo geométrico procedente de la civilización babilónica, así como también, el método de solución que dicha civilización propuso. Método que como se dijo anteriormente fue denominado por J. Høyrup como primera técnica de la geometría intuitiva. Dicho problema debe ser resuelto por cada estudiante utilizando el método que prefieran. Una vez hayan encontrado la solución, se procede a resolver el problema con la técnica mencionada; para garantizar que logren familiarizarse con el método expuesto, se propone resolver algunos problemas similares al anterior. Además, se pide al estudiante realizar un escrito donde quede explícito cada uno de los pasos que se deben seguir para resolver este tipo de problemas. Para finalizar la primera fase, se discutirán cada una de las soluciones con el fin de escuchar las dudas y comentarios de los estudiantes.

En la segunda fase se presentarán problemas similares a los anteriores, con el fin de que los estudiantes contemplen soluciones en fraccionarios e irracionales, y así terminen apropiándose de la primera técnica.

Como se dijo anteriormente el método de los escribas babilónicos fue heredado siglos después por la civilización árabe. En realidad fue el matemático árabe Al-Khowarizmi quien logró dar un desarrollo geométrico al método mencionado. Tal procedimiento fue identificado por J. Høyrup como nueva técnica de la geometría intuitiva.

Teniendo en cuenta lo anterior, la tercera fase tiene como propósito presentar la nueva técnica de la geometría intuitiva. Es bien sabido que en el momento de resolver un problema siempre tratamos de utilizar un procedimiento conocido, algunas veces el método escogido funciona, pero hay otras en que es inútil su aplicación. Esta misma situación la contemplarán los estudiantes en la tercera parte de la secuencia cuando se les proponga uno de los problemas atribuidos a la civilización árabe. Tal problema deben intentar resolverlo con la técnica vista en la primera parte, pero ellos podrán observar que el procedimiento no soluciona el problema árabe. He aquí la necesidad de introducir la nueva técnica de la geometría intuitiva, la cual dará solución a este tipo de problemas. Después de la explicación, se presentará a los estudiantes problemas análogos al anterior, buscando así que logren apropiarse del nuevo método. Por supuesto, también se pide realizar una descripción minuciosa de la forma cómo se deben resolver los nuevos problemas.

En la cuarta fase los estudiantes resolverán problemas similares al anterior, pero teniendo en cuenta algunas condiciones. De esta manera se busca que logren comprender la nueva técnica en su totalidad.

Por último, en la quinta fase los estudiantes resolverán el problema general de la tercera y cuarta parte de la secuencia. Teniendo en cuenta el proceso de solución resolverán dos problemas más, los cuales les permitirá hallar la fórmula que resuelve la ecuación cuadrática general.

En el proyecto de aula se orientarán talleres compuestos por problemas que están relacionados con el contenido de la secuencia didáctica, y para la solución de dichos problemas se tendrá en cuenta cada una de las fases de la metodología de Polya.

En ocasiones se propondrá realizar las actividades individuales y otras en parejas, las primeras con el fin de que sea el propio estudiante quién utilice sus conocimientos previos para tratar de dar una primera solución a los problemas, pero también, que logre apropiarse de los métodos de solución explicados. Con las actividades grupales se espera que los estudiantes, opinen y realicen discusiones constructivas para dar solución a los problemas, además que mutuamente aclaren sus dudas sobre los métodos dados.

El desarrollo del primer taller permitirá identificar qué conceptos previos tiene cada estudiante en relación a las ecuaciones cuadráticas, y al cálculo de áreas tanto del cuadrado como del rectángulo, pues téngase en cuenta que esto último es importante en la secuencia a seguir. Además, se incluyen algunos problemas que en el lenguaje algebraico se involucran con las ecuaciones de segundo grado, lo cual permitirá reconocer qué hace y cómo hace el estudiante para resolver dichos problemas

En el segundo y tercer taller los estudiantes utilizarán la primera técnica de la geometría intuitiva para resolver algunos problemas de tipo geométrico. Con ello se pretende que den sus comentarios, realicen preguntas para esclarecer las dudas, y finalmente se apropien de la primera técnica.

El cuarto y quinto taller tendrá como propósito que los estudiantes empleen la nueva técnica de la geometría intuitiva y terminen apropiándose de ella.

El sexto taller estará propuesto para que los estudiantes relacionen lo que se ha venido implementando. La solución de estos problemas permitirá que los estudiantes “reconstruyan” la fórmula cuadrática.

2. LO ACONTECIDO

2.1 MARCO CONTEXTUAL

La práctica docente fue realizada en la sede principal de la Institución Educativa Julumito, localizada al occidente de la ciudad de Popayán en el corregimiento que lleva su mismo nombre. Esta institución ofrece sus niveles de formación en básica primaria, básica media y secundaria.

El proyecto de practica pedagógica se desarrolló en horas extra clases, durante 12 semanas con un periodo de 24 horas; estuvo dirigido a los estudiantes del grado Décimo A, en un comienzo, se contó con la asistencia de 18 estudiantes, pero al final solo quedaron 11 de ellos.

Los estudiantes que fueron participes de esta propuesta pedagógica, eran de zonas rurales. Ellos manifestaban que esta propuesta les agradaba y les parecía novedosa, pues en la clase de matemáticas habitualmente se les exponía un tema, se mostraban algunos ejemplos del mismo, y finalmente se proponían ejercicios para aplicar lo aprendido. En todo este proceso siempre se preocuparon por dar lo mejor de cada uno, por aprender, por participar en las distintas discusiones que surgían, y por corregir los errores matemáticos que cometían.

2.2 BITÁCORA

En este proyecto de práctica pedagógica titulada *“Resolviendo ecuaciones cuadráticas, una aproximación desde la historia de las matemáticas”*, una bitácora es una reflexión de las actividades desarrolladas en cada sesión. En otras palabras, cada bitácora es un escrito en el cual se anota la forma en que se desarrolló cada sesión, el análisis de los talleres abordados en cada una de ellas, y una reflexión sobre la respectiva intervención de aula. A continuación se presentan las seis bitácoras que se realizaron durante el desarrollo de la práctica pedagógica.

2.2.1 BITÁCORA 1

Para esta actividad tener en cuenta el taller 1 (ver anexo 1).

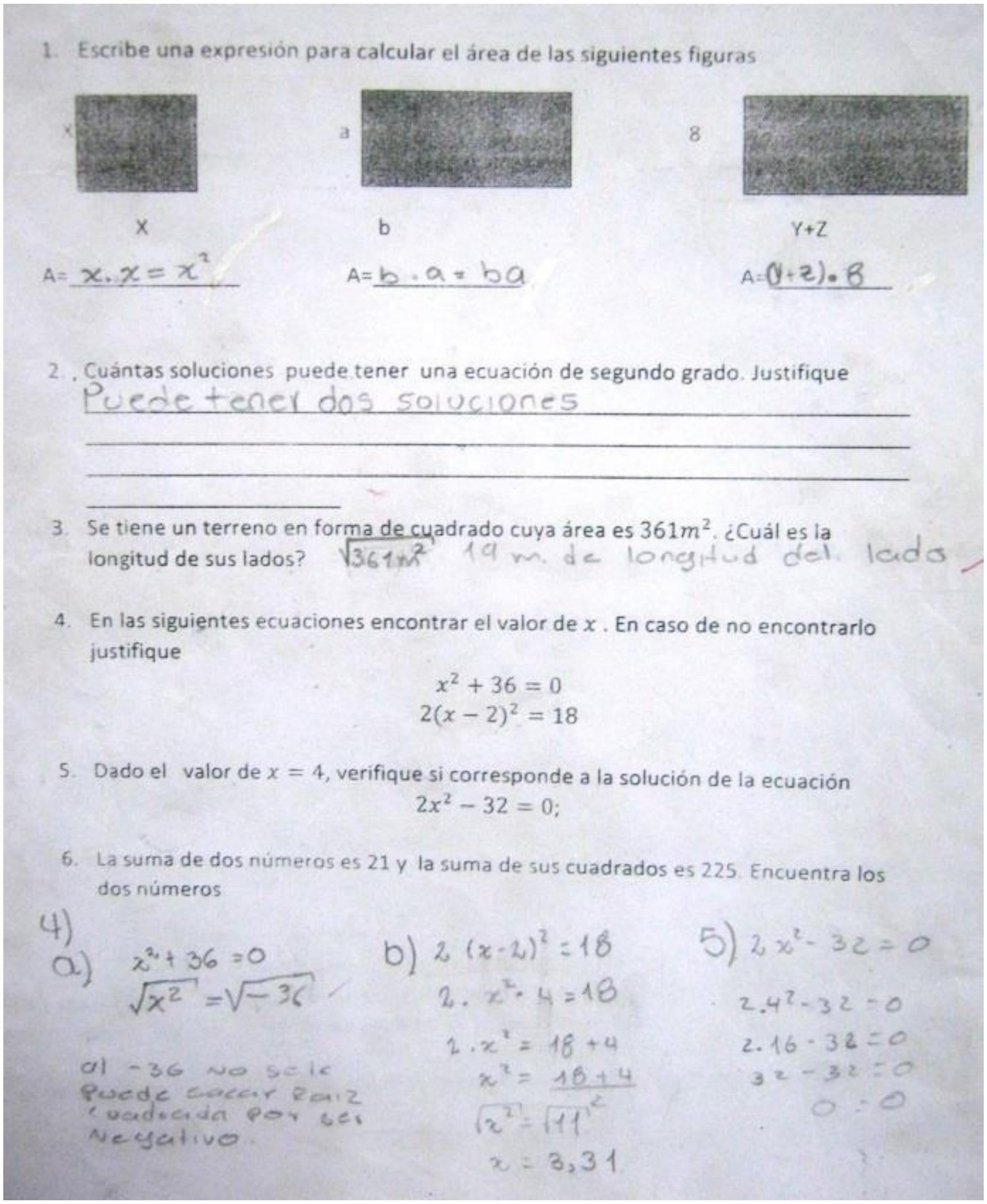
Durante mi formación como docente siempre me pregunté cómo sería mi primer día como profesora. El solo hecho de que debía enfrentarme a un grupo de personas desconocidas hacía que me invadiera de temor, pero también de una gran emoción por el primer día de mí práctica pedagógica. Sin embargo, era claro que tenía que dominar estos sentimientos, y mostrar plena seguridad a los estudiantes, pues debía dar lo mejor de mí en este proceso de enseñanza.

Esta actividad inició con el desarrollo de un taller individual, con el propósito de distinguir las nociones que cada estudiante tenía hasta el momento en lo concerniente al cálculo de áreas y al tema de ecuaciones cuadráticas.

En el desarrollo de la prueba pude apreciar que la mayoría de los estudiantes presentaban dificultades en la comprensión lectora, en el cálculo del área del rectángulo, y en los distintos procesos algebraicos para hallar el valor correcto de la incógnita de una ecuación cuadrática. No obstante, siempre estaba a la expectativa de las dudas, y los obstáculos que tenían los estudiantes, entonces con las debidas recomendaciones avanzaban poco a poco en la solución del taller.

A continuación se muestran las soluciones más usuales de la prueba diagnóstica, seguida de una reflexión de la misma.

Figura 1



1. Escribe una expresión para calcular el área de las siguientes figuras

x ... X ... A= $x . x = x^2$

a ... b ... A= $b . a = ba$

8 ... Y+Z ... A= $(y+z) . 8$

2. ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado. Justifique

Puede tener dos soluciones

3. Se tiene un terreno en forma de cuadrado cuya área es $361m^2$. ¿Cuál es la longitud de sus lados? $\sqrt{361m^2}$ 19 m. de longitud del lado

4. En las siguientes ecuaciones encontrar el valor de x. En caso de no encontrarlo justifique

$$x^2 + 36 = 0$$
$$2(x-2)^2 = 18$$

5. Dado el valor de $x = 4$, verifique si corresponde a la solución de la ecuación

$$2x^2 - 32 = 0;$$

6. La suma de dos números es 21 y la suma de sus cuadrados es 225. Encuentra los dos números

4)

a) $x^2 + 36 = 0$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-36}$

al -36 no se le puede sacar raiz cuadrada por ser negativo.

b) $2(x-2)^2 = 18$

$2 . x^2 - 4 = 18$

$2 . x^2 = 18 + 4$

$x^2 = \frac{18+4}{2}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{11}$

$x = 3,31$

5) $2x^2 - 32 = 0$

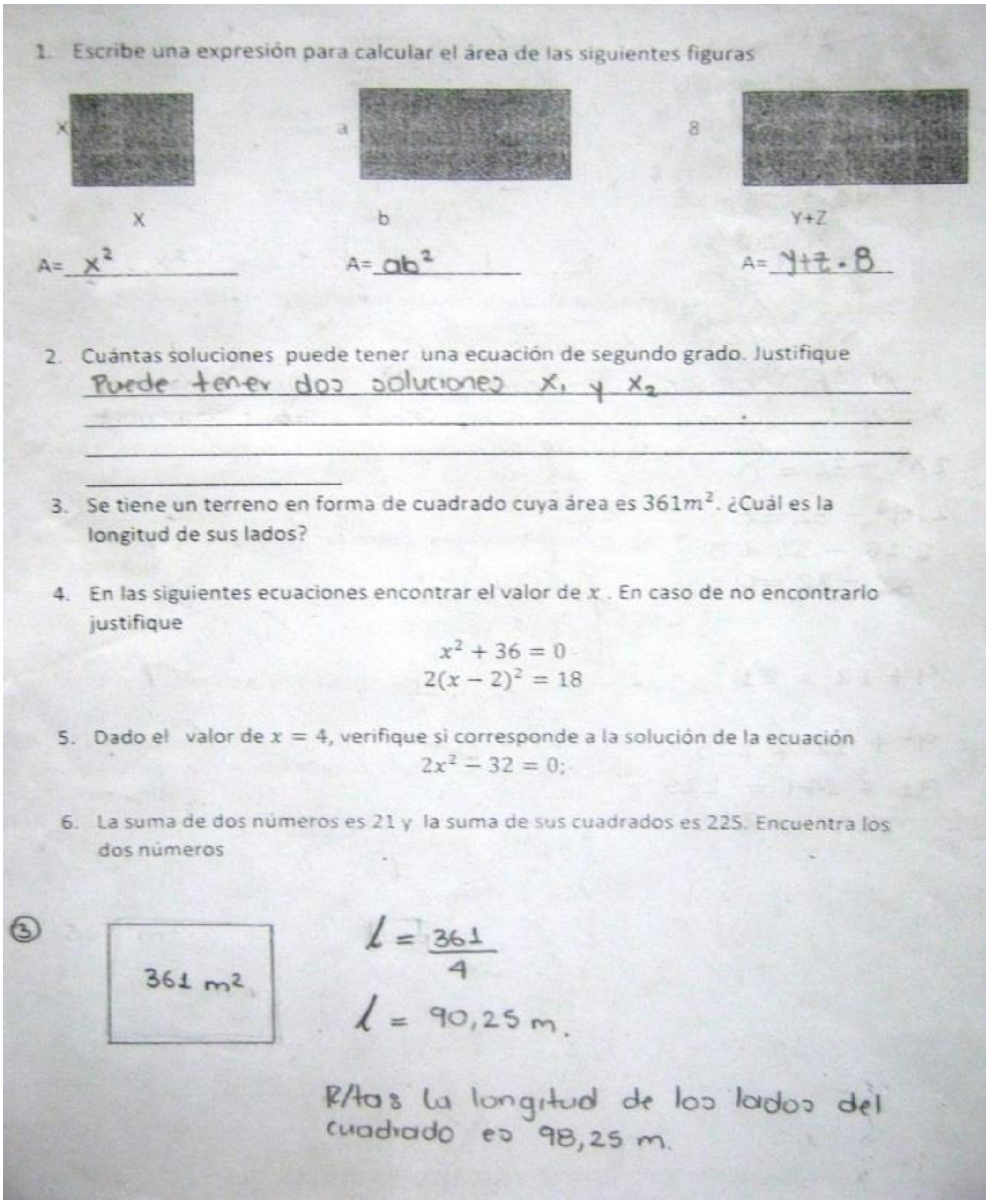
$2.4^2 - 32 = 0$

$2.16 - 32 = 0$

$32 - 32 = 0$

$0 = 0$

Figura 2



1. Escribe una expresión para calcular el área de las siguientes figuras

x   a   8

X   b   Y+Z

A= x^2 A= ab^2 A= $y+z \cdot 8$

2. Cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado. Justifique

Puede tener dos soluciones x_1 y x_2

3. Se tiene un terreno en forma de cuadrado cuya área es $361m^2$. ¿Cuál es la longitud de sus lados?

4. En las siguientes ecuaciones encontrar el valor de x. En caso de no encontrarlo justifique

$$x^2 + 36 = 0$$
$$2(x-2)^2 = 18$$

5. Dado el valor de $x = 4$, verifique si corresponde a la solución de la ecuación

$$2x^2 - 32 = 0;$$

6. La suma de dos números es 21 y la suma de sus cuadrados es 225. Encuentra los dos números

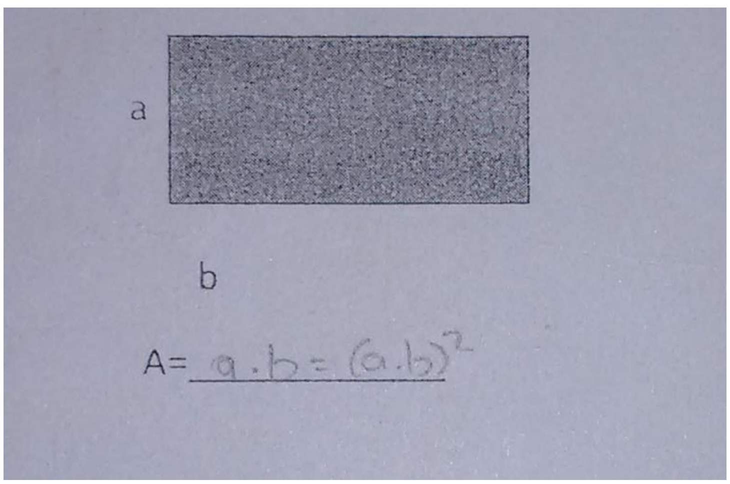
③ 361 m^2

$l = \frac{361}{4}$

$l = 90{,}25$ m.

R/ta: la longitud de los lados del cuadrado es 98,25 m.

El desarrollo del primer punto es significativo, ya que en la metodología a desarrollar está inmerso el cálculo de áreas tanto del cuadrado como del rectángulo. En la solución que presentan los estudiantes, se evidencia que no tienen mayor dificultad para hallar el área del cuadrado ya que todos recuerdan la respectiva fórmula. En este sentido observan que la figura proporciona el valor de cada lado, entonces lo único que deben hacer es multiplicar lado por lado (ver figura 1). Sin embargo, no ocurre lo mismo con los rectángulos, solo cinco estudiantes recordaron la fórmula para calcular el área de la figura, dando por supuesto una respuesta correcta para ambos rectángulos (ver figura 1). Lo anterior se da gracias a que han hecho un buen uso de la fórmula que recuerdan, pero esto no asegura que entiendan la noción de área. En lo que respecta al resto del grupo, seis estudiantes dieron el área correcta del primer rectángulo pero no del segundo; seis dieron la respuesta correcta del segundo rectángulo pero no del primero, y finalmente, dos estudiantes no dieron el área correcta para ninguno de los rectángulos. En las respuestas de estos últimos, se puede observar que no se percatan del significado de igualdad, pues asemejan expresiones que son totalmente diferentes. Esta situación se refleja en la siguiente imagen.



Este análisis me permite inferir una vez más, que los estudiantes memorizan las fórmulas, en este caso la fórmula para calcular el área del cuadrado y del rectángulo; tan solo una parte de ellos recordaron con exactitud cada una de estas, y otros por el contrario hicieron todo el esfuerzo por recordarlas, pero solo obtuvieron recuerdos que eran imprecisos.

Por otra parte, se sabe que el uso de los paréntesis es de suma importancia en el lenguaje de las matemáticas, principalmente para dar prioridad a las operaciones que se hallan en expresiones algebraicas. Sin embargo, algunos estudiantes omiten su utilidad ofreciendo una respuesta que tiende a ser confusa (ver figura 2).

No debemos olvidar que el propósito de mi proyecto es “reconstruir” la fórmula que resuelve una ecuación cuadrática, teniendo como base conceptos o ideas que el estudiante tenga de esta ecuación Por ello, la respuesta del segundo punto es importante, y tiene un gran significado para el desarrollo del proyecto, pues será un primer indicio para reconocer los conceptos que el estudiante tiene sobre el tema de ecuaciones cuadráticas. En la respuesta de la pregunta, veinte alumnos respondieron de forma concreta pero sin una justificación que una ecuación cuadrática tiene dos soluciones (ver figura 1). Solo hubo dos estudiantes que tuvieron dificultades con la respuesta, el primero de ellos no comprendió el enunciado de la pregunta optando por dejar el espacio en blanco, y el segundo respondió que una de las soluciones de la ecuación cuadrática era “factorización”, quizá este estudiante escribe lo primero que se le viene a la mente, o quizá recordó, que alguna vez él o su profesora en la clase de matemáticas resolvió una ecuación cuadrática haciendo uso de la factorización, que como se sabe es uno de los métodos de solución de una ecuación cuadrática, y por ello dio dicha respuesta.

Con el tercer punto puedo concluir, que los estudiantes están acostumbrados a que el problema les proporcione los datos para remplazarlos en la fórmula, y así obtener el área de la figura. Pero tienen dificultades cuando el proceso es inverso; en este caso la figura es un cuadrado, se ofrece el área de este, y se pide hallar uno de sus lados. Sólo cinco estudiantes hallan la relación entre el área dada por el problema y la fórmula usual para calcular el área del cuadrado, así que enseguida toman la raíz cuadrada del área dada, y obtienen la respuesta correcta (ver figura 1). Diez estudiantes notaron que el cuadrado tiene cuatro lados, entonces dividen el área dada entre el número de lados, de aquí concluyen que la respuesta del problema es la longitud del lado del cuadrado (ver figura 2). Esta solución me lleva a inferir que el estudiante no sólo tiende a confundir el concepto de área con el de perímetro, sino que también desconoce que esta relacionando dos unidades de medida diferentes. Por último, cuatro estudiantes no dieron ninguna respuesta, optando por dejar el espacio en blanco, pero ¿por qué no dieron una respuesta? Especulando sobre esta situación, supongo que tal vez los estudiantes comprendieron el problema, pero no lograron ejecutar un plan para resolverlo, es decir, no hallaron la relación mencionada.

En el cuarto punto, catorce estudiantes justificaron correctamente porque la primera ecuación no tiene solución; ellos emplearon las operaciones inversas de la suma y la potenciación, y llegaron finalmente a la raíz de un número negativo, enseguida concluyeron que de un número negativo no era posible extraer la raíz cuadrada (ver figura 1). Los estudiantes distinguieron y coincidieron en que un número negativo no tenía raíz cuadrada, es decir, no tenía solución en los números reales; pero de forma convincente advirtieron que si tenía solución en los números complejos. Cinco estudiantes no llegaron a la respuesta esperada, ellos tenían claro el proceso que debían hacer para hallar la incógnita, pero desde el inicio no tuvieron en cuenta o tal vez no recordaron la operación inversa de la suma, entonces hicieron una operación incorrecta, y llegaron finalmente a una supuesta solución de la ecuación. Es claro que los estudiantes habían podido verificar la supuesta solución, remplazando dicho valor en la ecuación y percatándose de que cumpliera la igualdad, pero no fue así, quizá fue porque no quisieron hacerlo o quizá porque estaban seguros de su procedimiento. En la segunda ecuación todos los estudiantes optaron por desarrollar el cuadrado del binomio, pero dicho desarrollo no era correcto (ver figura 1). Se observa que el estudiante olvido el término lineal, y el término independiente lo muestra con el signo negativo, pero se sabe que independientemente del signo que tenga el segundo término del binomio al desarrollar el cuadrado de la expresión el término independiente siempre es positivo. Finalmente, se nota que el estudiante no concibe la operación inversa de la suma. Es evidente que el desarrollo de la expresión binomial es redundante, pues para hallar el valor de la incógnita se debe factorizar esta última expresión, o se debe optar por utilizar la fórmula cuadrática. El análisis de estas respuestas me permite inferir, que cuando se dice hallar el valor de la incógnita, los estudiantes se proponen un solo objetivo, despejar la incógnita sin percatarse de las operaciones que están realizando en el proceso.

En el quinto punto 14 estudiantes comprendieron lo que en realidad pedía el problema, y expresaron que solo debían remplazar el valor dado donde se encontraba la x (ver figura 1). Solo hubo un estudiante que hizo algo diferente a lo esperado, pues tomo la ecuación dada, hizo todas las operaciones correctas y encontró el valor de la incógnita, el cual era igual al valor dado. El análisis de lo anterior me lleva a inferir dos posibles razones de la solución, la principal, que la palabra verificar no fue comprendida por el estudiante, y la segunda, porque tal vez pensó que como los valores coincidían entonces el valor dado era solución de la ecuación, pero ¿cuál hubiera sido la respuesta del estudiante si los valores no hubieran coincidido? Quizá la respuesta del estudiante hubiera sido no es solución, o tal vez hubiera acudido a verificar las operaciones realizadas. Finalmente 4 estudiantes no hicieron el problema y pienso que posiblemente se debió porque no comprendieron la palabra verificar.

Para finalizar, en el sexto punto 13 estudiantes eligieron como procedimiento de solución el método del tanteo. A pesar que dicho método no es erróneo ni mucho menos su respuesta, les mostré que es bastante dispendioso cuando se tienen cantidades muy grandes. Por último, 6 estudiantes no dieron ninguna solución, posiblemente porque no entendieron el problema, y si lo entendieron entonces no lograron encontrar un método para hallar los números.

Al observar las distintas dificultades que tuvieron los estudiantes durante el desarrollo de la prueba, opte por resolverla colectivamente. En la solución de cada punto, voluntarios pasaban al tablero para compartir y justificar la respuesta a sus compañeros. Esta estrategia condujo a óptimos resultados en lo concerniente al proceso de interacción profesor-alumno. De un lado porque pude relacionarme con ellos, y por otro, porque dio lugar a la intervención del resto de los estudiantes, algunos de ellos que buscaban opinar y compartir su respuesta, y otros intentaban entender porque era la respuesta correcta. Hubo ocasiones en que el resultado era incorrecto, entonces se buscaba el error, enseguida se hacía una discusión constructiva, y con la opinión de todos se procedía a hallar la respuesta correcta.

Este primer encuentro con los estudiantes me permitió concluir que no todo sucede de acuerdo a lo planeado, pues de una u otra manera se presentaron situaciones que no estaban previstas. Con lo anterior, me estoy refiriendo a las múltiples ocasiones en que los estudiantes no comprendieron ciertas palabras que eran claves para la solución del problema, que no recordaban tanto la fórmula para calcular el área de una figura geométrica, como algunos conceptos matemáticos. Con la presencia de estas circunstancias, opte por recordar los conceptos olvidados y explicar aquellos que no comprendían. Además, pude observar que para lograr la participación de todos los estudiantes se debe socializar las respuestas en el tablero, con ello surge un espacio de discusión constructiva en el cual se comprende totalmente la solución del problema.

2.2.2 BITÁCORA 2

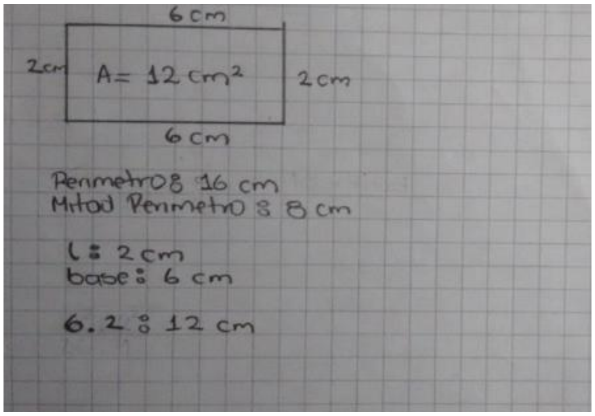
Para esta actividad tener en cuenta el taller 2 (ver anexo 2).

Como se planteó en la metodología esta actividad tuvo el propósito de mostrar a los estudiantes la primera técnica de la geometría intuitiva, la cual les permitió resolver algunos problemas que involucraban ecuaciones cuadráticas. Se ha dicho en planteamientos anteriores, que esta técnica surgió a partir de las instrucciones que establecieron los escribas babilónicos, así que ahora, los estudiantes tendrían un método geométrico histórico bastante interesante para solucionar algunas ecuaciones cuadráticas.

Antes de explicar el método geométrico cada estudiante debía resolver el siguiente problema, si la mitad del perímetro de un rectángulo es 20 y su área es 96 unidades cuadradas, ¿Cuáles son los lados del rectángulo? Para ello, podían utilizar el método que creyeran más conveniente, pues de acuerdo a esto se haría un análisis de cómo el estudiante exploró para descubrir la estrategia de solución. En esta ocasión se recordó el concepto de perímetro y se precisó la noción de unidad cuadrada. Desde el inicio se pudo apreciar que los estudiantes presentaban dificultades con la comprensión lectora, pues no lograban diferir los datos de la incógnita. Aquí se encontró el primer momento de poner en juego la primera fase de la metodología de Polya. Se sugirió leer cuidadosamente una y otra vez el enunciado del problema, pero también se propuso responder las siguientes preguntas ¿Cuál es la incógnita de problema? ¿Qué nos pide hallar el problema? ¿Cuáles son las condiciones del problema? De esta manera se consiguió que los estudiantes terminaran por comprender el enunciado del mismo.

Al analizar cada una de las respuestas se pudo observar que todos los estudiantes hallaron esta al tanteo, tal vez porque era el método más sencillo, pues con él no era necesario recurrir a ningún tipo de ecuaciones.

Con este procedimiento sólo debían encontrar los valores correspondientes a los lados del rectángulo mediante el ensayo-error. La siguiente figura ilustra una solución de este tipo.



Se observa que primero hacen la figura rectangular, la cual les permite visualizar tanto la incógnita como las condiciones del problema, teniendo en cuenta esto comienzan a dar los posibles valores que puede tomar cada lado del rectángulo.

Si bien un dibujo es una herramienta de gran utilidad en el momento de solucionar un problema, este no es considerado como una solución. Lo único que se puede decir con seguridad, es que hacer un esquema del problema permite dar una idea de las posibles estrategias de solución. Tal vez los estudiantes se interesaron más por encontrar la respuesta, que por mostrar el proceso que los llevo a ella. Sin embargo, se debe resaltar que al realizar un esquema del problema anterior los estudiantes lograron comprender lo que pedía el enunciado, diferenciando así los datos de la incógnita e identificando las condiciones.

Teniendo en cuenta que los estudiantes habían comprendido el enunciado del problema, se procedió a pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico, para así plantear la ecuación cuadrática correspondiente al problema. La ecuación hallada fue $x^2-8x+12=0$. Así que, las soluciones de esta ecuación serían los mismos valores de los lados del rectángulo buscado.

Una vez se obtuvo la ecuación cuadrática se presentó la primera técnica de la geometría intuitiva, la cual daría las soluciones de la ecuación anterior. Pretendiendo que los estudiantes entendieran y pudieran visualizar este procedimiento se hizo uso de un recurso didáctico como lo es la cartulina. Esta explicación inicio tomando el coeficiente sin signo del término lineal, el cual se dividido entre dos. Este resultado fue la longitud del lado de un cuadrado dibujado en la cartulina (véase la figura 1).

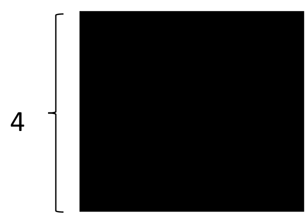


Figura 1

Evidentemente el área del cuadrado era mucho mayor al área requerida el problema, por ello se debía eliminar un cuadrado con el área sobrante. En este caso correspondía a un cuadrado con un área de cuatro unidades cuadradas. De esta forma se obtuvo una figura geométrica con un área de 96 unidades cuadradas, satisfaciendo así una de las condiciones del problema. La figura obtenida fue la siguiente.

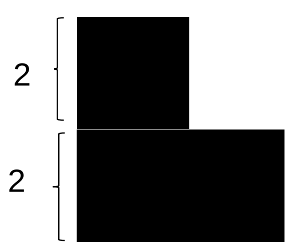
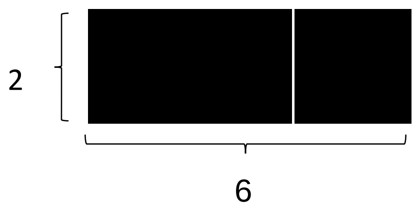


Figura 2

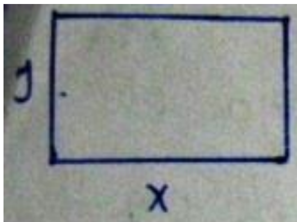
Se observó que la figura aun no era rectangular, entonces se recortó y se pegó convenientemente hasta hallar el rectángulo que pedía el problema (véase figura 3)



De esta forma se encontró el rectángulo, cuyos lados satisfacían todas las condiciones del problema, y por ende, también correspondían a las raíces de la ecuación cuadrática.

Después de esta explicación se incluyó en la actividad el primer taller. Para resolver los problemas contenidos en él se sugirió seguir paso a paso la solución anterior.

Es cierto que el uso de la técnica implicaba seguir unas fases precisas, pero ello no significa que sólo debía ser aprendida de memoria, también era necesario que los estudiantes interiorizaran cada uno de los conceptos que en ella se involucraban. Al seguir la solución del problema anterior los estudiantes no tuvieron gran dificultad en hallar la solución de los problemas propuestos, de esta forma las únicas dudas que surgieron en el proceso se relacionaron con cálculos algebraicos y no con el método en sí. En las siguientes figuras se presentan algunas de las soluciones para el primer y segundo problema.



$x \cdot y = 96 \quad (1)$

$\frac{2x+2y}{2} = 20$

$x + y = 20 \quad (2)$

$y = 20 - x$

$x \cdot y = 96$

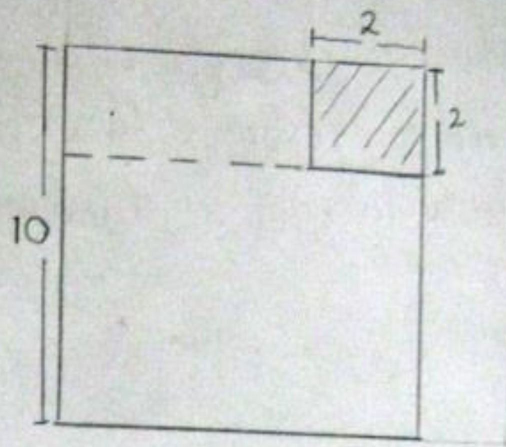
$x(20-x) = 96$

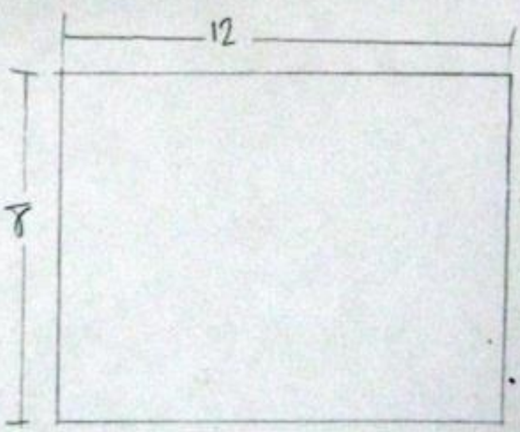
$20x - x^2 = 96$

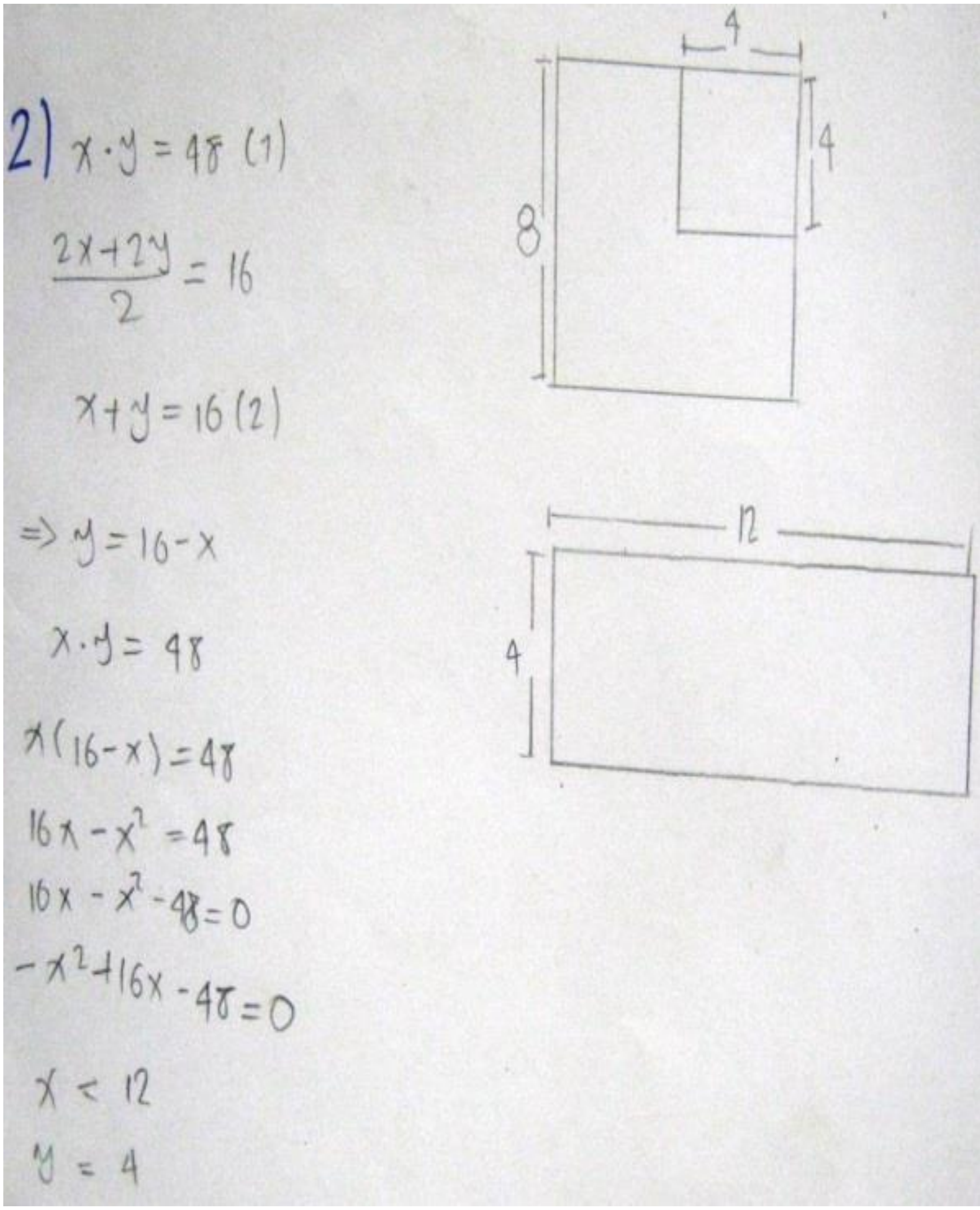
$20x - x^2 - 96 = 0$

$-x^2 + 20x - 96 = 0$

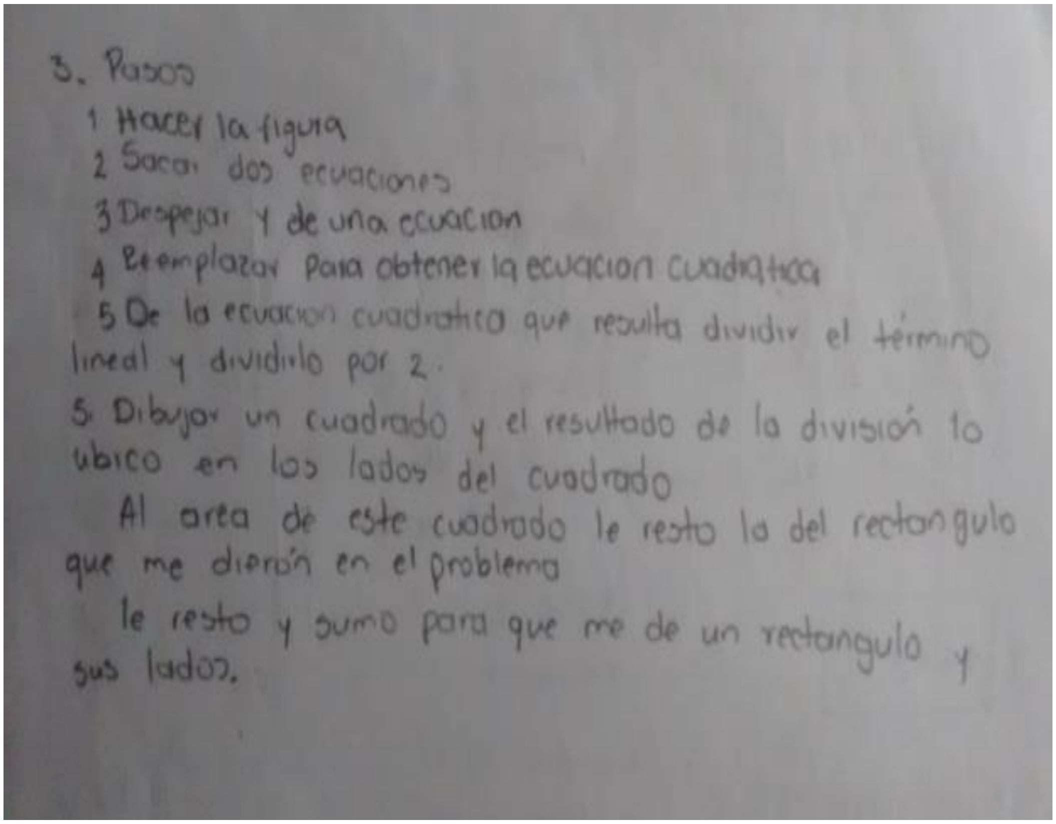
$x = 12$
$y = 8$







En lo que respecta al tercer punto, es notable que cada estudiante escribe los pasos que considera más importantes para la solución de estos problemas, unos más explícitos y más breves que otros, pero en general se puede decir que comprendieron lo que debían hacer. A continuación se muestra el escrito de uno de los estudiantes.



3. Pasos
1 Hacer la figura
2 Sacar dos ecuaciones
3 Despejar y de una ecuacion
4 Reemplazar para obtener la ecuacion cuadratica
5 De la ecuacion cuadratica que resulta dividir el término lineal y dividirlo por 2.
5. Dibujar un cuadrado y el resultado de la división lo ubico en los lados del cuadrado
Al area de este cuadrado le resto la del rectangulo que me dierón en el problema
le resto y sumo para que me de un rectangulo y sus lados.

Como en esta ocasión no surgieron dudas con respecto a la técnica utilizada, es incierto si los estudiantes la comprendieron en su totalidad. Por ello, se propuso que el taller fuera resuelto en el tablero, donde todos tuvieran la oportunidad participar, y así escuchar sus dudas y comentarios. En la solución de cada problema todos los estudiantes salían al tablero para aportar en el desarrollo de la solución. Sin duda, se pudo notar que había estudiantes que se les dificultaba entender algunos pasos de la técnica, pues hacían preguntas como por ejemplo, ¿cómo se halla el lado del cuadrado? ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? Con esto corrobore lo que suponía, algunos estudiantes habían intentado aprender de memoria el procedimiento sin siquiera detenerse a preguntar el por qué y el para qué de lo realizado. Esta situación permitió crear un espacio de discusión constructiva donde los demás estudiantes se interesaban por explicar a sus compañeros, y por ello opinaban y pasaban al tablero para dar respuesta a estos interrogantes.

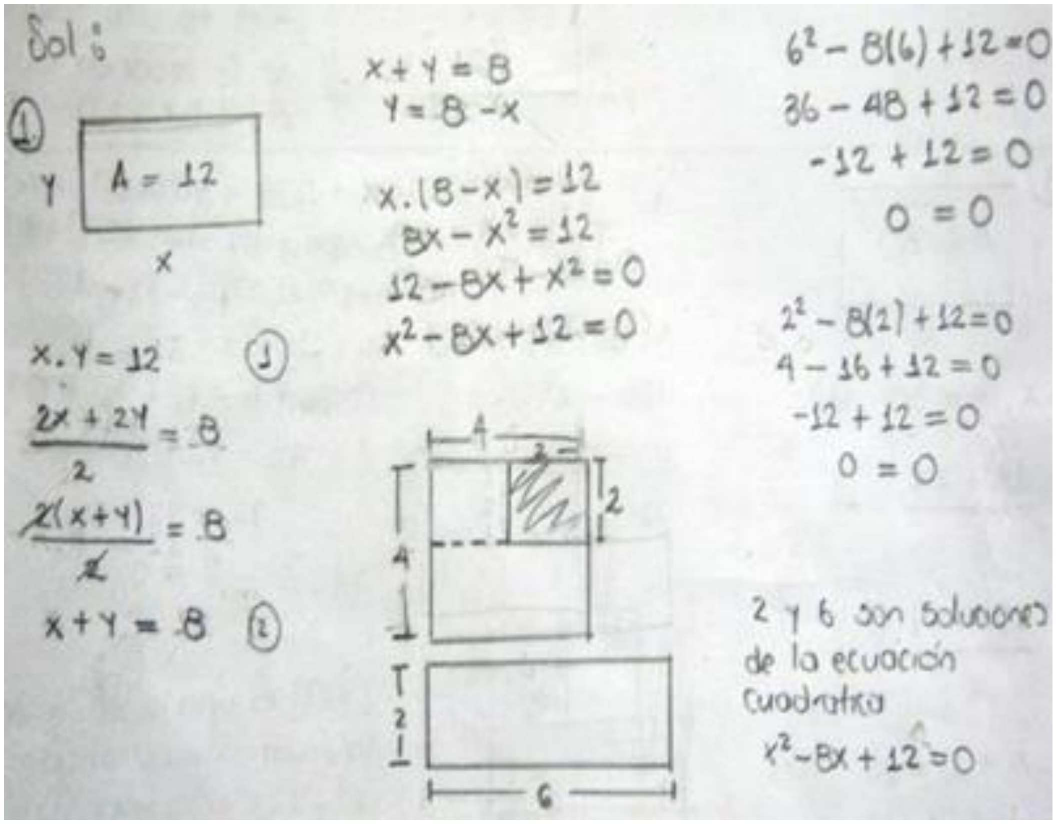
Después de reflexionar sobre esta actividad, se puede decir que los estudiantes conciben la idea de que para aprender matemáticas solo basta con memorizar tanto los conceptos como los procedimientos, y en el momento de solucionar el problema solo deben recordarlos. Pero, ¿qué pasaría si los estudiantes no lo recuerdan, o si recuerdan tan solo una parte? Pues claramente no podrán solucionar el problema, y posiblemente opten por preguntar al profesor o quizás decidan entregar una hoja en blanco. Es aquí donde el profesor debe intervenir, para hacer entender que para aprender matemáticas se debe empezar por mirar minuciosamente tanto conceptos como procedimientos, no dejar por alto ningún detalle, y así tener una mirada crítica de los mismos.

2.2.2 BITÁCORA 3

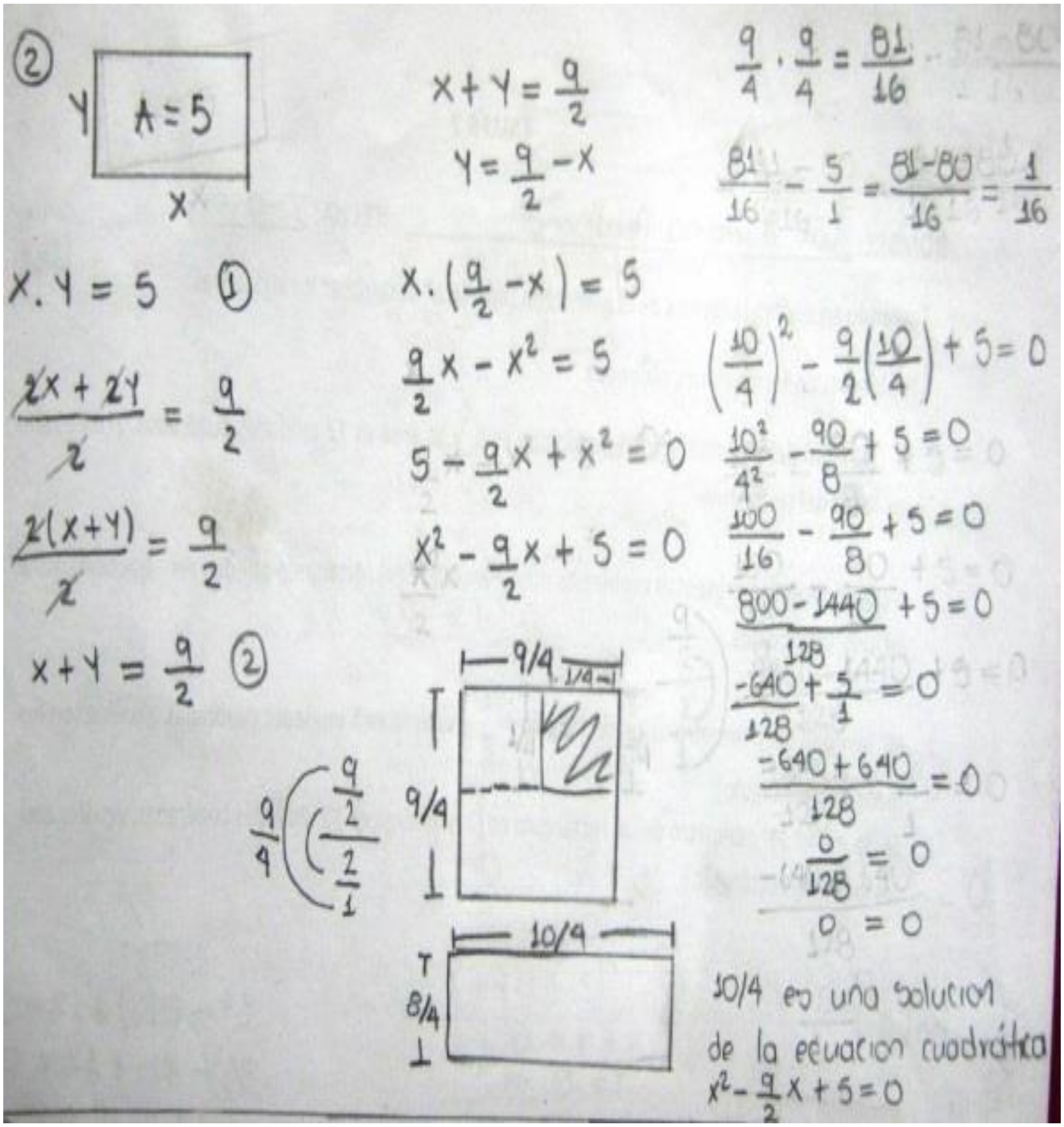
Para esta actividad tener en cuenta el taller 3 (Ver anexo 3).

En la actividad anterior se evidenció que los estudiantes estaban dispuestos a aprender. Algunos ya concebían tan solo una parte de los interrogantes que propone Polya en su metodología, pues la primera técnica de la geometría intuitiva da algunas pautas para ello. Sin embargo hay otros a los que se debía encaminar poco a poco, pues el hecho de implementar una metodología distinta a la que habitualmente están acostumbrados es un cambio drástico, como también lo es, dejar de lado la idea tradicional de que para aprender matemáticas se debe memorizar toda la información recibida. Así que no se debe pretender que lo anterior sea asimilado de un día para otro. Por ello, el objetivo del tercer taller era que los estudiantes se involucraran completamente con la metodología de Polya, y más aún alcanzaran la apropiación de la técnica.

El respectivo esquema en la solución de los problemas permitió que cada estudiante tomara agilidad en plantear la ecuación cuadrática. Sin embargo, en el primer problema surgieron dudas respecto al método geométrico, aunque tenían la idea que debían buscar el rectángulo a partir de un cuadrado, no sabían cómo hallar el lado de este último. Esto llevo a recordarles cómo encontrar este valor. Una vez se hizo esta aclaración, los estudiantes emplearon la técnica vista y hallaron los lados del rectángulo, verificando que estos valores correspondieran a las raíces de la ecuación. A continuación se presenta la solución.



Con el segundo y tercer problema los estudiantes tuvieron algunas dificultades. El inconveniente con el segundo problema fue a causa de las operaciones entre números fraccionarios, debido a esto fue necesario dejar por un momento el problema, y recordar en el tablero estas operaciones a través de algunos ejemplos. Luego de esta explicación los estudiantes retornaron a la solución del problema. En la siguiente figura se presenta la respectiva solución.



②

Y $A=5$ X

$X \cdot Y = 5$ ①

$\frac{\cancel{2}X+2Y}{\cancel{2}} = \frac{9}{2}$

$\frac{\cancel{2}(X+Y)}{\cancel{2}} = \frac{9}{2}$

$X+Y=\frac{9}{2}$ ②

$X+Y=\frac{9}{2}$

$Y=\frac{9}{2}-X$

$X\cdot\left(\frac{9}{2}-X\right)=5$

$\frac{9}{2}X-X^2=5$

$5-\frac{9}{2}X+X^2=0$

$X^2-\frac{9}{2}X+5=0$

$9/4$ $1/4$

$9/4$

$\frac{9}{4}\left(\frac{\frac{9}{2}}{\frac{2}{1}}\right)$

$10/4$

$8/4$

$\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{81}{16}$

$\frac{81}{16}-\frac{5}{1}=\frac{81-80}{16}=\frac{1}{16}$

$\left(\frac{10}{4}\right)^2-\frac{9}{2}\left(\frac{10}{4}\right)+5=0$

$\frac{10^2}{4^2}-\frac{90}{8}+5=0$

$\frac{100}{16}-\frac{90}{8}+5=0$

$\frac{800-1440}{128}+5=0$

$\frac{-640}{128}+\frac{5}{1}=0$

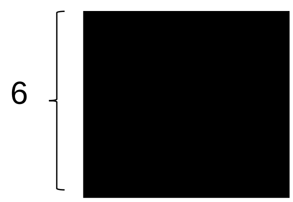
$\frac{-640+640}{128}=0$

$\frac{0}{128}=0$

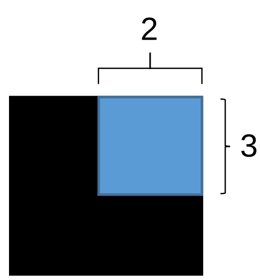
$0=0$

10/4 es una solucion de la ecuacion cuadrática $x^2-\frac{9}{2}x+5=0$

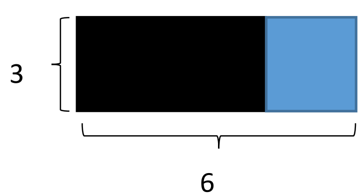
En el tercer problema, los estudiantes plantearon las ecuaciones y llegaron a la ecuación cuadrática correspondiente al enunciado. Tal ecuación fue $x^2-12x=30$. Después emplearon la técnica ya conocida, y construyeron el siguiente cuadrado.



Luego observaron que debían retirar una figura geométrica con un área de 6 unidades cuadradas. En este caso, los estudiantes notaron que la figura indicada debía ser un rectángulo. A continuación se muestra la figura rectangular que identificaron en el cuadrado.



Después de recortar y pegar obtuvieron la siguiente figura rectangular.



Enseguida procedieron a verificar los resultados obtenidos. En esta fase, observaron que los lados de la figura no satisfacían todas las condiciones del problema, pues la mitad de su perímetro era 13, y la condición del problema era que debía ser 12. Con ello concluyeron que los valores no correspondían a los lados del rectángulo buscado, y en consecuencia tampoco correspondían a las soluciones de la ecuación. Pero ¿dónde estaba el error del plan? Los estudiantes regresaron al procedimiento y emprendieron la búsqueda del error. Efectivamente notaron que no habían ejecutado correctamente el procedimiento, pues las seis unidades cuadradas correspondían a un rectángulo. Aquí estaba el error del proceso, ya que el área debía ser el de una figura cuadrada. A partir de aquí los estudiantes se centraron en buscar el lado del cuadrado. Para ello recurrieron al tanteo, pero después de dar todas las posibilidades en números naturales y fraccionarios positivos no lograron hallar dicho valor, entonces concluyeron que este método no era el adecuado. Para encontrar el valor de lado del cuadrado se decidió recurrir a la metodología de Polya, con el propósito de escuchar las ideas y comentarios de los estudiantes, y así guiarlos a encontrar dicho valor. De esta manera se encontró que el valor del lado del cuadrado debía ser $\sqrt{6}$. Justamente aquí estaba la dificultad que presentaban los estudiantes al intentar hallar el valor al tanteo, ya que los únicos valores que utilizaron eran números naturales y fraccionarios positivos.

Al reflexionar sobre esta situación, considero que tal vez los estudiantes conciben la noción de que las magnitudes solo pueden tomar valores en números naturales y fraccionarios positivos, y no números irracionales. Pero, también pudo haber sucedido, que quizá se encaminaron solo en buscar números naturales y fraccionarios positivos, y no contemplaron que los números irracionales también podrían ser otra posibilidad.

Finalmente puedo decir que el desarrollo de esta actividad fue productivo tanto para los estudiantes como para mí como futura docente. Las dificultades que surgieron durante la solución de los problemas 3 y 4 permitieron que los estudiantes apreciaran y dieran significado a los conocimientos que ya poseían. A pesar de haber comprendido la técnica de solución notaron que ella no garantizaba la solución a los obstáculos que surgían en el proceso. Esta situación les permitió reconocer la importancia de sus conocimientos previos, pues debían ponerlos en juego para dar solución a las dificultades que tuvieron. Por ello, los estudiantes reflexionaron sobre las consecuencias que trae aprender los conceptos de memoria, pues no solo deben tener la información sino que también deben interiorizarla y hacer uso de ella en el momento adecuado.

Cuando el estudiante intenta resolver un problema, tal vez ponga en juego toda su concentración para hallar la solución sin ninguna dificultad. Sin embargo, esto no siempre sucede, pues habrá ocasiones en que surjan dificultades que les impida seguir con el proceso de solución. En tal situación, ¿qué debemos hacer los docentes? El desarrollo de la actividad me permitió concluir que debemos intervenir, bien sea para resolver completamente las dificultades, o para dar algunas pautas que permitan al estudiante vislumbrar una solución, pues de no ser así, seguramente comenzarán a desmotivarse hasta desistir de ello.

2.2.3 BITÁCORA 4

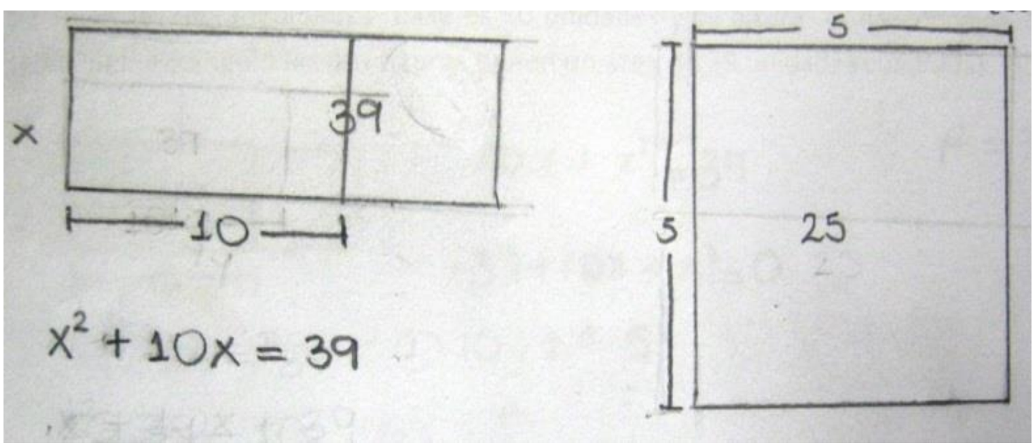
Para esta actividad tener en cuenta en taller 4 (ver anexo 4)

El desarrollo de esta actividad me permitió dar inicio a la segunda parte de mi proyecto, pues los estudiantes pudieron percatarse que la primera técnica no podía ser utilizada para resolver determinados problemas, situación que me llevo a mostrar la nueva técnica de la geometría intuitiva. En esta oportunidad se propuso el tercer taller, con el propósito de que los estudiantes se familiarizaran con el nuevo método, esclarecieran las dudas, y emprendieran una apropiación del mismo.

Para empezar la actividad se propuso resolver el siguiente problema: se tiene un rectángulo cuya base es 10 unidades y su altura es desconocida. Si ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo las dos figuras tienen un área de 39 unidades cuadradas. ¿Cuál es la altura del rectángulo? Aunque el problema era distinto a los que se habían abordado en las sesiones anteriores, los estudiantes lograron entenderlo y plasmar tanto sus datos como condiciones en una figura geométrica, obteniendo finalmente un rectángulo. Pero desafortunadamente no lograron plantear la ecuación, lo cual me llevo a inferir que tenían dificultad en pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Así que, se sugirió leer detenidamente el problema y observar la figura, con ello se dieron cuenta que los términos de la ecuación se obtenían del área del rectángulo y del cuadrado. Algunos llegaron a la ecuación correcta pero otros se precipitaron, y por terminar apresuradamente la actividad omitieron elementos tan importantes como lo es el signo de igualdad. Esta situación creó un espacio de discusión, en el que todos los estudiantes participaron para hacer comentarios acerca de la noción de igualdad. Las intervenciones les permitieron concluir que el signo de igualdad en una ecuación es lo más importante, pues de lo contrario no es una ecuación. La ecuación hallada por los estudiantes fue $x^2+10x=39$.

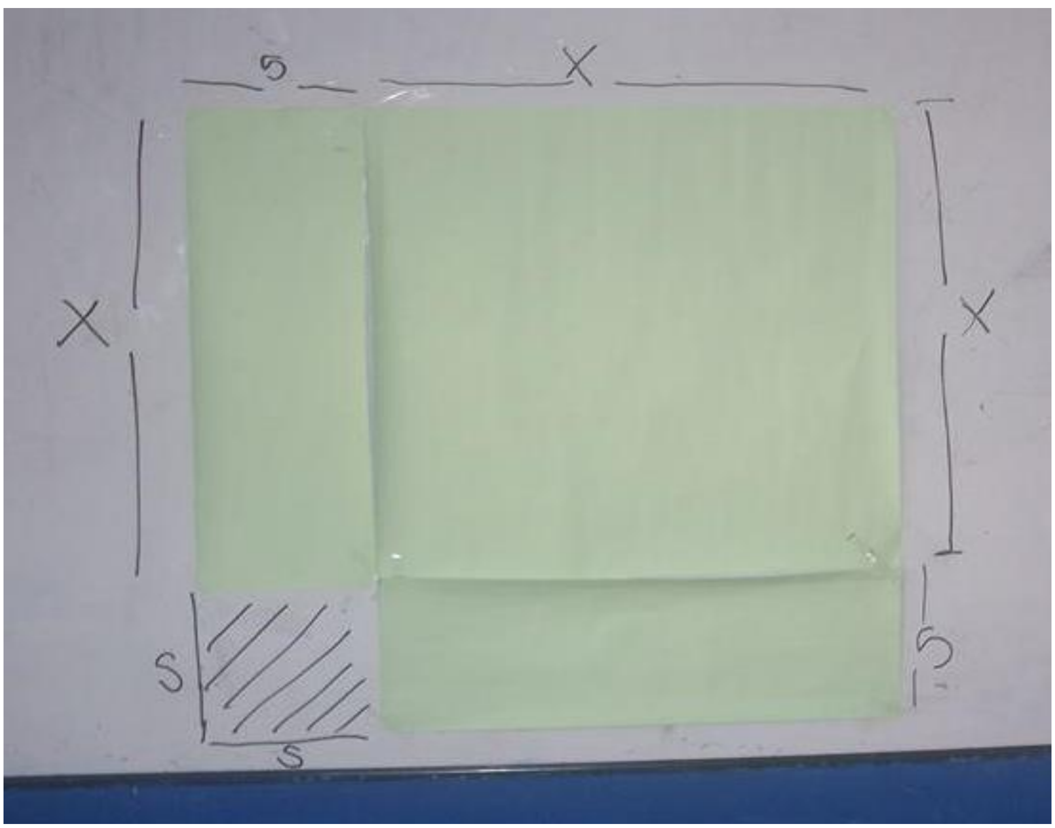
En esta ocasión había muchos estudiantes dispuestos a dar solución al problema, como fue el caso de dos niñas que la dieron por tanteo. Ante esto no se desmerito su esfuerzo, al contrario, se les resalto, pues eran estudiantes que en ocasiones habían expresado no entender matemáticas, razón que hacia desmotivarlas mostrando un disgusto hacia ellas. Sin embargo, se indicó que la intención del problema era utilizar la técnica que se había explicado.

En la búsqueda de la solución los estudiantes se mostraron atentos y concentrados en cada uno de los pasos que debían realizar. Así que no les fue difícil notar que el área del cuadrado formado era inferior al área requerida por el problema, motivo que les impedía seguir utilizando la primera técnica. Todos los estudiantes coincidieron en esta justificación, lo cual me permitió concluir que habían comprendido completamente la primera técnica de la geometría intuitiva. A continuación se muestra el cuadrado obtenido por los estudiantes mediante la técnica vista.



Antes de resolver el problema anterior mediante la nueva técnica de la geometría intuitiva, quise mencionar el legado matemático de la civilización árabe, en especial, los aportes del matemático Alkhwarizmi al tema de ecuaciones cuadráticas.

Retornando a la solución del problema, se partió tanto de la ecuación como del rectángulo que obtuvieron los estudiantes, y se dio paso a la explicación de la nueva técnica. Se inició dibujando el rectángulo en cartulina, con el propósito de que los estudiantes pudieran tener una mejor comprensión del método. Se procedió a recortar la mitad de la base del rectángulo, y una de estas piezas fue colocada en la base del cuadrado, de esta forma se obtuvo una figura geométrica que estaba cerca de ser un cuadrado, pues carecía de un cuadrado de lado 5. Finalmente, después de completar el cuadrado se obtuvo la siguiente figura.

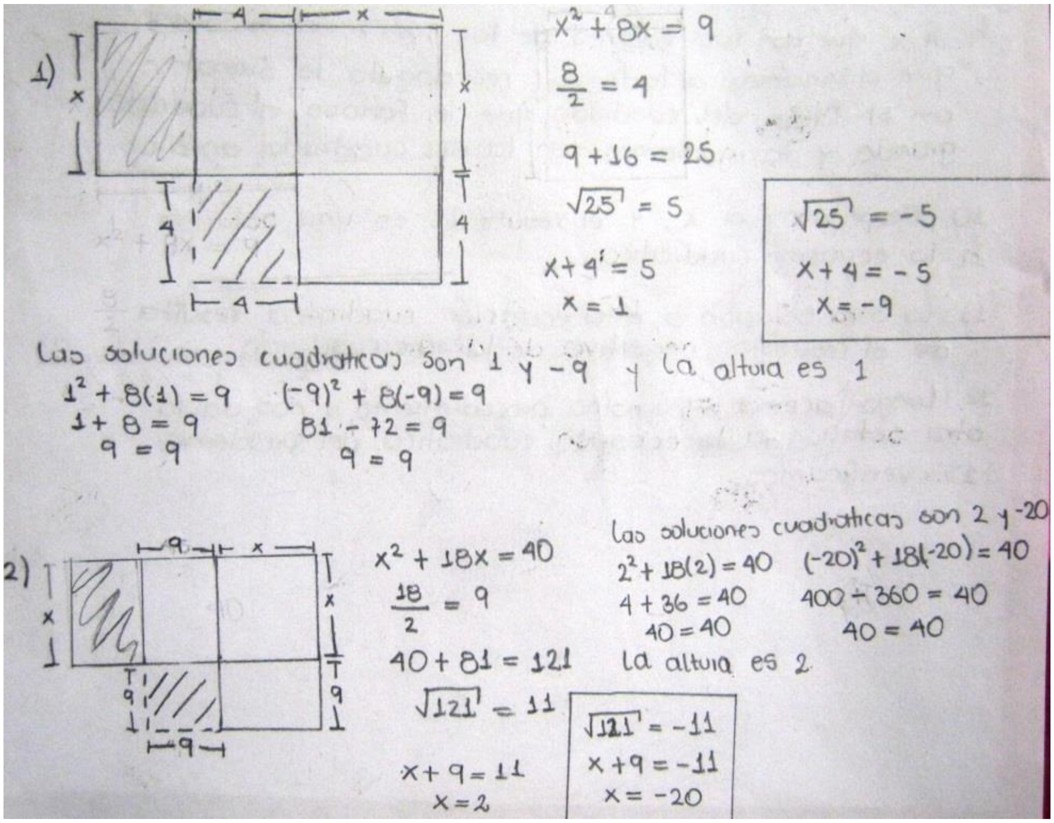


Teniendo en cuenta la información anterior y los datos del problema, se obtuvo que el área del cuadrado era $(x+5)^2 = 64$, luego $x=8$ era el lado del rectángulo buscado. Pero ¿cómo verificarlo? Claramente los estudiantes notaron que el valor debía cumplir las condiciones del problema, en otras palabras debía satisfacer la ecuación.

Se ha dicho anteriormente que esta técnica es el desarrollo geométrico que hace siglos establecieron los matemáticos árabes, ellos no consideraban los números negativos, así que, las soluciones de las ecuaciones debían ser solo números positivos. Por ello, el procedimiento solo daba la solución positiva de la ecuación. Sin duda alguna, la otra solución debía ser un valor negativo, pero ¿cómo hallar dicho valor? Para ello era necesario hacer uso de los números negativos, y tomar tanto la expresión del lado, como el valor del área del cuadrado, pero esta vez con un papel distinto, pues de ningún modo se relacionaría con el cuadrado.

Teniendo en cuenta lo anterior, el siguiente paso fue tomar un número negativo que cumpliera la siguiente condición: el número negativo elevado al cuadrado debía ser 64. Entonces, tal número debía ser -8, este valor se relacionó con una de las expresiones del cuadrado, pues en ella se involucraba la incógnita de la ecuación. La relación hallada fue $x+5=-8$. Entonces la otra solución de la ecuación era $x=-13$. Fue así como se hallaron las soluciones de la ecuación cuadrática.

Al igual que en la primera técnica, después de esta explicación los estudiantes resolvieron el taller cuatro, siguiendo de forma estricta la solución del problema anterior. Con ello se esperaba que cada estudiante expresara las dudas acerca de la nueva técnica y comenzará a apropiarse de ella. Una vez más, durante el desarrollo del taller se pudo apreciar que los estudiantes no tenían mayor dificultad en resolver los problemas, salvo algunos errores de cálculo que les impedía continuar con el procedimiento o les proporcionaba una solución incorrecta. En consecuencia, debían regresar al comienzo de la ejecución de la técnica para observar y corregir los errores. A continuación se presenta algunas de las respuestas del punto 1 y 2 del taller.



Es conveniente resaltar la solución del punto 3 del taller. Al parecer algunos estudiantes no comprendieron en qué consistía su respuesta, ya que rescriben la solución de un problema, quizá tendrían dificultades para describir los pasos en forma general, pues bien se sabe que pasar de lo particular a lo general es uno de los muchos problemas que presentan los estudiantes en esta disciplina. Sin embargo, hay otros que si describieron los pasos, pero sin de recurrir a ningún tipo de símbolos algebraicos, la siguiente figura muestra esta descripción.

3) 1. Dibujar el rectangulo con las medidas que se dan en el problema
2. Dibujar un cuadrado en uno de los lados del rectangulo dibujado
3. El rectangulo dibujado lo dividimos en dos y una de las mitades la colocamos en un lado del cuadrado, (esto es para formar un cuadrado mas grande con las medidas del rectangulo y el cuadrado que esta unido en uno de sus lados
4. Luego como le queda faltando un cuadradito al cuadrado grande que estamos haciendo, se lo agregamos.
5. Formulamos la ecuación cuadratica del problema
6. Dividimos el termino lineal entre dos
7. Sumamos el area de las dos figuras iniciales con el area del cuadrado que faltaba para formar el cuadrado grande
8. La suma de lo anterior le sacamos la raiz cuadrada
9. A x que son los valores de los lados del cuadrado que dibujamos al lado del rectangulo lo sumamos con el lado del cuadrado que le faltaba al cuadrado grande y lo igualamos con la raiz cuadrada anterior
10. Despejamos a x, y el resultado es una solución a la ecuación cuadratica
11. La otra solución a esta ecuación cuadratica resulta de el resultado negativo de la raiz cuadrada
12. Luego hacemos el mismo procedimiento y nos da la otra solución a la ecuación cuadratica del problema.
13. Verificamos.

El desarrollo de esta actividad me permite reflexionar acerca de mi rol como futura docente. Muchos estudiantes piensan que los profesores y más aún los de matemáticas nunca se equivocan, que todo lo que dicen y hacen es correcto sin siquiera poner en duda sus acciones. Sin embargo, me atrevo a decir que los docentes de matemáticas, en particular los que estamos iniciando esta profesión también nos equivocamos, pero tal vez por la confianza que los estudiantes depositan en nosotros no se atreven o les da temor cuestionarnos. Estoy segura que si los estudiantes pusieran en duda nuestros actos, sería provechoso por las discusiones que pudieran surgir en el desarrollo de la clase.

No debo dejar de lado que el desarrollo de esta actividad permitió a cada estudiante comprobar que no todos los problemas pueden ser resueltos por la primera técnica. También se pudo evidenciar que la nueva técnica logró persuadir el interés de los estudiantes, pues ahora contemplaban una forma distinta de resolver algunas ecuaciones cuadráticas.

2.2.4 BITÁCORA 5

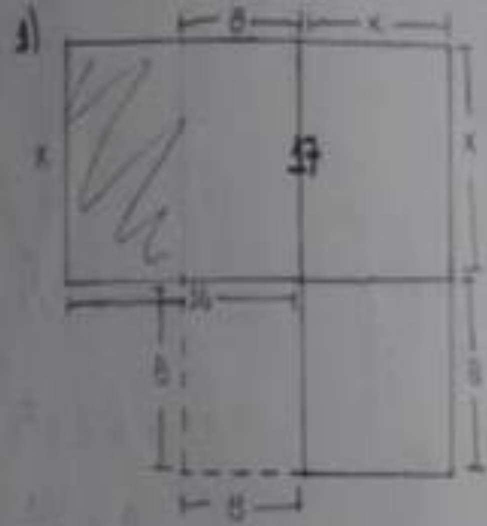
Para esta actividad tener en cuenta en taller 5 (ver anexo 5)

Con los problemas de este taller los estudiantes pudieron apreciar que la nueva técnica de la geometría intuitiva no solo es útil cuando los datos del problema son valores enteros, sino que funciona igual cuando los valores son fraccionarios e incluso irracionales.

El desarrollo de este taller deja concluir que los estudiantes han logrado apropiarse de algunos aspectos de la metodología de Polya y de la nueva técnica, pues comprenden el problema, determinan los datos y la incógnita, hacen un esquema de lo que pide el problema, plantean la ecuación, ejecutan la nueva técnica para hallar el dato desconocido, y finalmente verifican la solución comprobando que cumpla las condiciones del problema. Si el valor hallado no cumple las condiciones del problema, los estudiantes ya intuyen que el error se encuentra en alguna parte de la técnica desarrollada.

A continuación se presentan algunas soluciones de los problemas.

1)



Las dos soluciones de la ecuación cuadrática son: 1 y -17

Verificación:

$1^2 + 16 \cdot 1 = 17$

$1 + 16 = 17$

$17 = 17$

$x^2 + 16x = 17$

$\frac{16}{2} = 8$

$17 + 64 = 81$

$\sqrt{81} = 9$

$(-17)^2 + 16(-17) = 17$

$289 - 272 = 17$

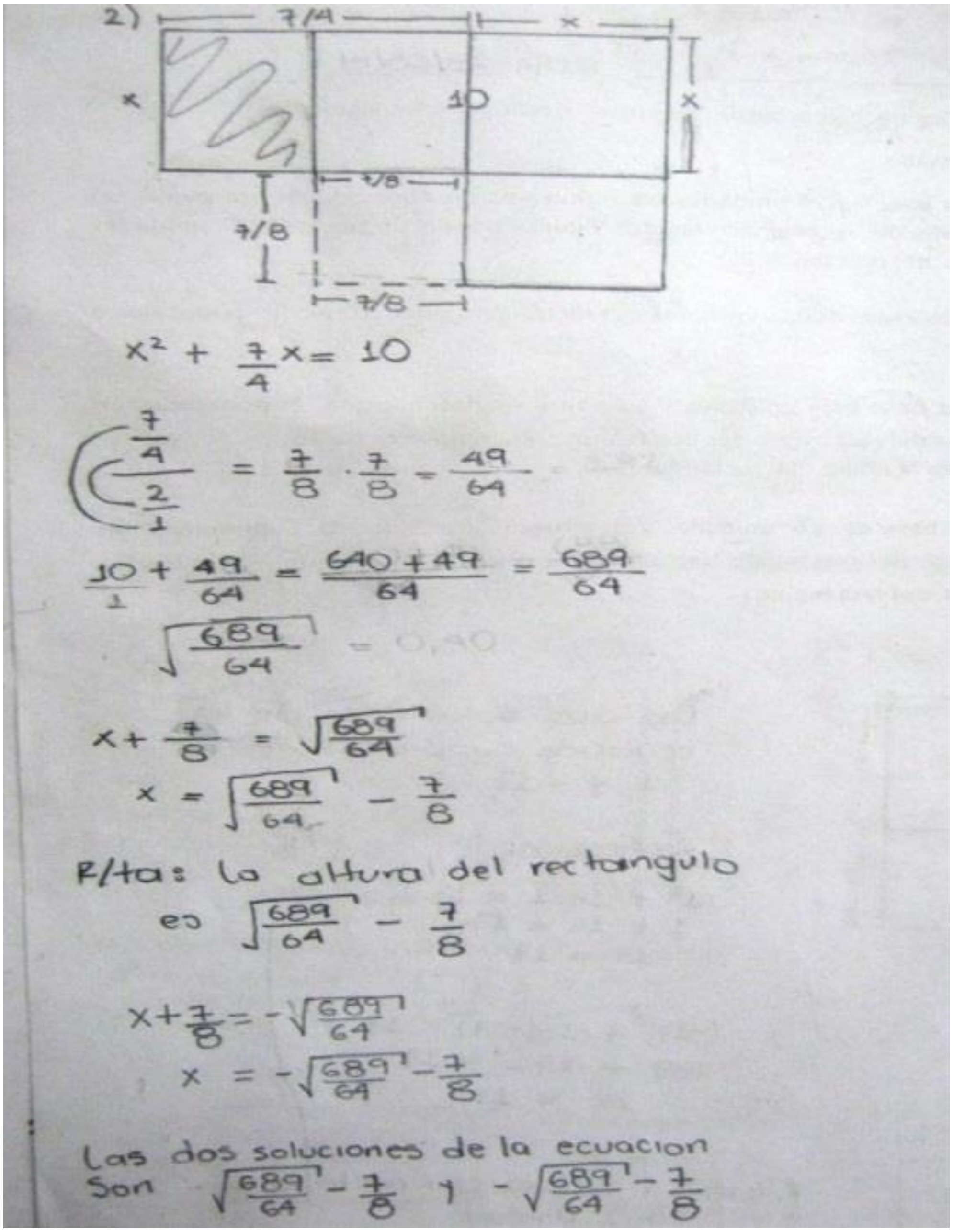
$17 = 17$

$x + 8 = 9$

$x = 1$

$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{81} = -9 \\ x + 8 = -9 \\ x = -17 \end{array}}$

R/tas La altura del rectángulo es 1 Unidad.



$$x^2 + \frac{7}{4}x = 10$$

$$\left(\frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{1}}\right) = \frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8} = \frac{49}{64}$$

$$\frac{10}{1} + \frac{49}{64} = \frac{640+49}{64} = \frac{689}{64}$$

$$\sqrt{\frac{689}{64}}$$

$$x + \frac{7}{8} = \sqrt{\frac{689}{64}}$$

$$x = \sqrt{\frac{689}{64}} - \frac{7}{8}$$

R/ta: la altura del rectangulo es $\sqrt{\frac{689}{64}} - \frac{7}{8}$

$$x + \frac{7}{8} = -\sqrt{\frac{689}{64}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{689}{64}} - \frac{7}{8}$$

Las dos soluciones de la ecuacion Son $\sqrt{\frac{689}{64}} - \frac{7}{8}$ y $-\sqrt{\frac{689}{64}} - \frac{7}{8}$

En la actividad se pudo observar que el entusiasmo de los estudiantes deja entrever sus deseos de aprender. Algunos errores algebraicos durante la ejecución de la técnica y en el momento de verificar la solución, permite que cada uno se esmere por hallar y corregir los errores hasta encontrar la solución correcta, pero a su vez, también permiten que el estudiante reflexione a cerca de sus acciones, para evitar cometerlos nuevamente.

2.2.5 BITÁCORA 6

Para esta actividad tener en cuenta el taller 6 (ver anexo 6)

En los problemas de la actividad anterior se pudo percibir que los estudiantes conciben dos métodos para resolver algunas ecuaciones cuadráticas, recurren a la nueva técnica de la geometría intuitiva para hallar la solución positiva, y utilizan un método no geométrico para la solución negativa.

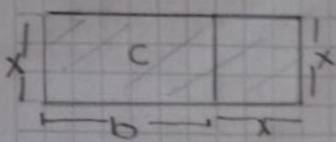
Lo anterior tiene gran importancia para el desarrollo de la presente actividad, pues me permitirá cumplir el propósito principal de este proyecto de práctica pedagógica: "reconstruir" la fórmula que da solución a la ecuación de segundo grado. Para ello, es importante que los estudiantes primero resuelvan el problema general de la sesión anterior. La solución de dicho problema no solo les permitirá resolver cualquier problema de este tipo, sino que también les dará algunas ideas para que resuelvan los problemas del taller 6, y así hallar la fórmula mencionada.

Como se puede observar, hasta el momento los estudiantes han resuelto únicamente problemas particulares, pero ¿qué conseguí al proponer este tipo de problemas? Al presentar inicialmente los problemas particulares, logre que los estudiantes entendieran cada problema, comprendieran y se apropiaran de su respectiva técnica de solución, y de algunos aspectos de la metodología de Polya. Ahora, en esta actividad espero que acoplen lo anterior, en particular lo concerniente a los problemas de la sesión anterior, para que así logren tener una mejor comprensión de la forma general del problema árabe, y de los problemas del taller 6 que también están generalizados.

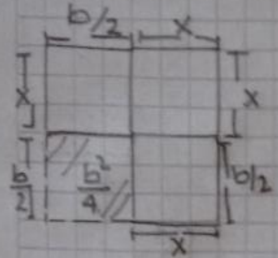
El desarrollo de esta actividad inició con el problema árabe en su forma general. El problema es el siguiente: Se tiene un cuadrado cuya base es b unidades y su altura es desconocida. Si ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo, se tiene que juntas las dos figuras tienen un área de c unidades cuadradas. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

Desde el momento en que los estudiantes dan la primera lectura al enunciado del problema, observan que es el caso general de los problemas abordados en la sesión anterior. Esto y algunos comentarios de los propios estudiantes como "vamos de lo pequeño lo grande" me permitieron inferir que estaban contemplando la posibilidad que la solución del problema era algo más que un valor numérico. A continuación se muestra la solución de este problema.

altura = x



$x^2+bx=c$



$\frac{b^2}{4}+\frac{c}{1}=\frac{b^2+4c}{4}$

$\left(x+\frac{b}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2}\right)=\frac{b^2+4c}{4}$

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2+4c}{4}$

$x+\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}$

$x=\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}$ altura rectangulo y solucion de la ecuacion

Verificacion

$\left(\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}\right)^2+b\left(\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}\right)=c$

$\left(\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}\right)+b\left(\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}\right)=c$

$\frac{b^2+4c}{4}-\frac{b}{2}\left[\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}\right]-\frac{b}{2}\left[\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}\right]+\frac{b^2}{4}+b\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b^2}{2}=c$

$\frac{b^2}{4}+c-b\left[\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}\right]+\frac{b^2}{4}+b\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}=c$

$c=c$

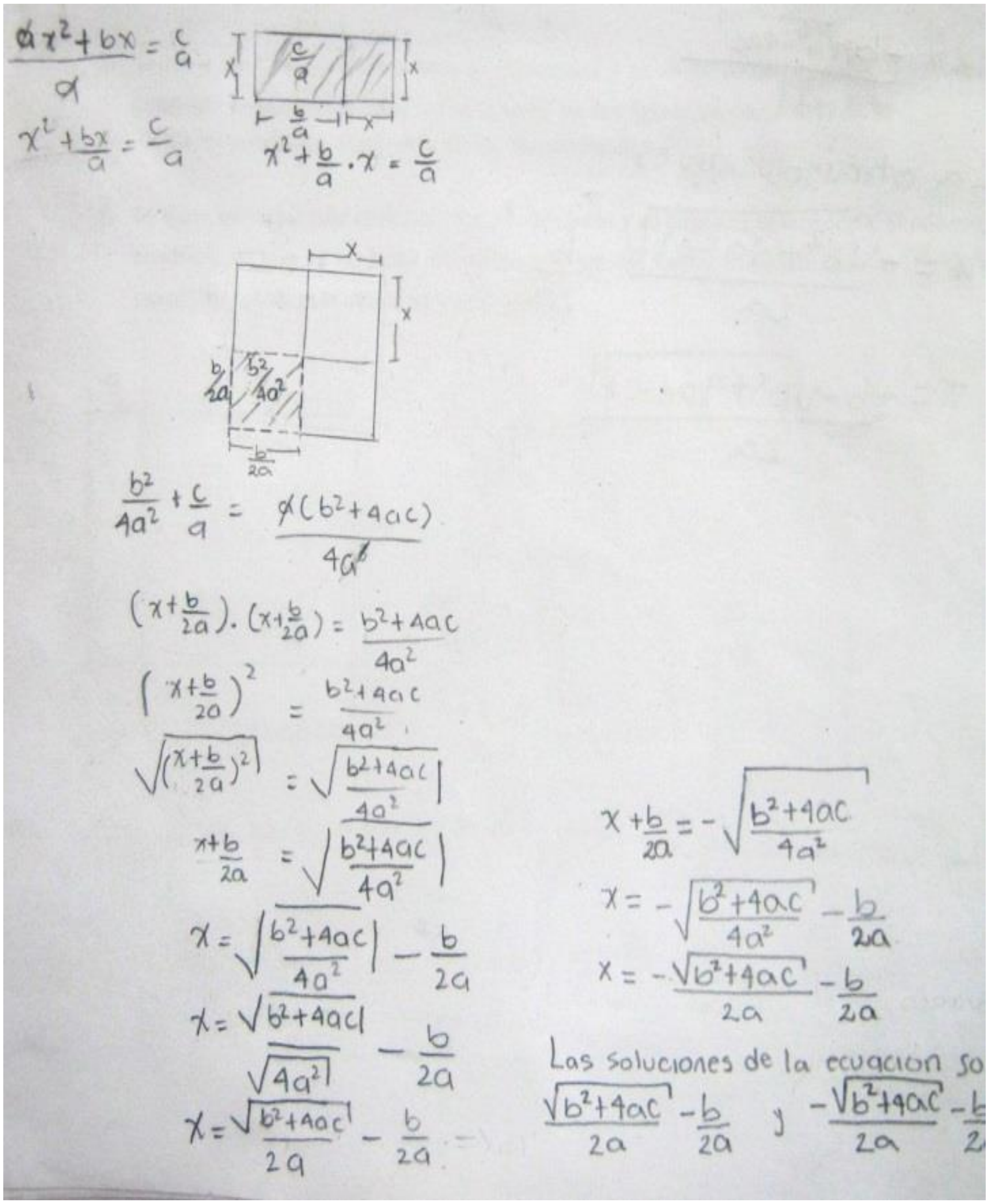
La otra solucion es

$x+\frac{b}{2}=-\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}$

$x=-\sqrt{\frac{b^2+4c}{4}}-\frac{b}{2}$

Al hallar las raíces de la ecuación cuadrática los estudiantes concluyeron que eran expresiones algebraicas, las cuales serían de gran utilidad para resolver rápidamente ecuaciones similares a la ecuación general, en particular las que se habían planteado en los problemas de las actividades anteriores. Pero también infirieron que solo la expresión positiva les permitiría hallar el dato desconocido de cada problema.

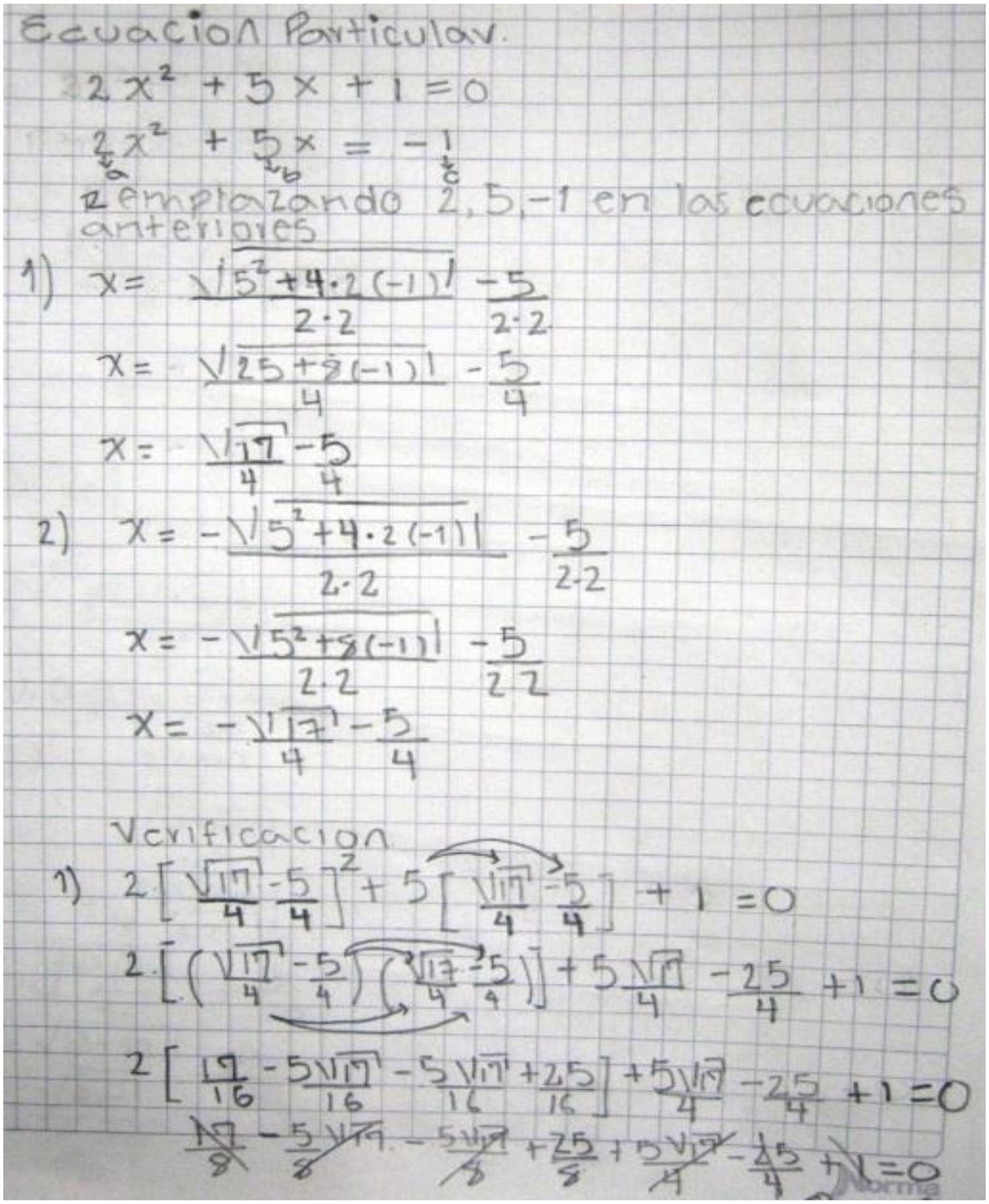
Cuando estamos buscando la solución de un problema Polya sugiere relacionar este con problemas ya conocidos, por ello debemos preguntarnos si sabemos de un problema semejante, o si hemos visto el mismo problema planteado de forma diferente. Los estudiantes pusieron en marcha estas ideas para resolver los problemas del taller 6. En el primer problema, los estudiantes observaron que la ecuación generalizada era similar a la del problema árabe anterior, por ello no dudaron en relacionarla con el enunciado de un problema parecido a este. Fue así como concluyeron que el primer problema podía ser resuelto con el procedimiento que se venía implementando. Sin embargo, aún no podían utilizar el método geométrico debido a la forma de la ecuación, pero, ¿cuál era la diferencia de la ecuación con la del problema árabe? Evidentemente notaron que la única diferencia era el coeficiente del término cuadrático. Así que, después de algunos cálculos algebraicos, obtuvieron una nueva ecuación en la cual era posible utilizar la nueva técnica de la geometría intuitiva. A continuación se presenta la respectiva solución.



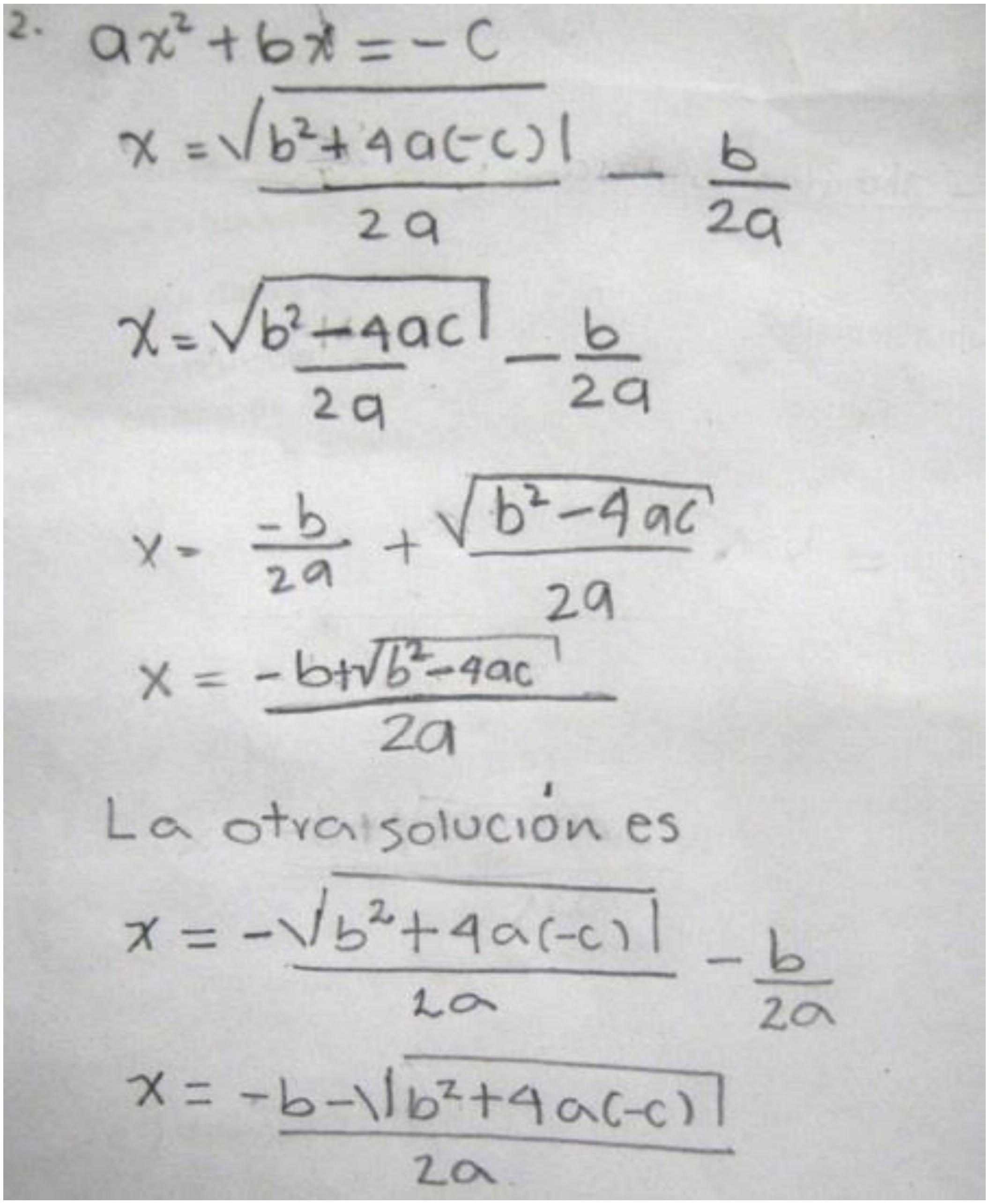
En la ecuación del segundo problema los estudiantes reconocieron que era análoga a la anterior, salvo el signo del término independiente, y por ello quisieron valerse del mismo procedimiento. Al dividir por el coeficiente del término cuadrático, y después de algunos procedimientos algebraicos obtuvieron la siguiente ecuación $x^2 + \frac{b}{a} = -\frac{c}{a}$. Sin embargo, al recurrir a la técnica notaron que esta no podía ser utilizada, pues justamente cuando realizaban la figura geométrica, observaron que el área no podía ser un valor negativo. Entonces, ¿cómo resolverla? Teniendo en cuenta que los estudiantes habían observado que la ecuación era parecida a la primera ecuación de este taller se sugirió particularizar el problema, es decir, dar cualquier valor positivo para a, b, y c. Pretendiendo con ello, que explorarán el problema y lograrán visualizar una posible estrategia de solución para el problema inicial.

En la búsqueda de la solución se pudo percibir el interés y el esfuerzo de los estudiantes por resolver el problema. Sin embargo sólo hubo dos estudiantes que al particularizarlo descubrieron la estrategia de solución.

A continuación se muestra el proceso que los llevo a encontrar dicha estrategia.



En el bosquejo se puede observar que la estrategia de solución surge cuando el estudiante resuelve la ecuación utilizando las fórmulas halladas en el primer problema de este taller. Tal vez decidieron utilizarlas, porque tenían presente que la ecuación era parecida al primer problema salvo el signo negativo. De esta forma concluyeron que para hallar la solución del problema general solo debían remplazar cuidadosamente a, b y $-c$ en las fórmulas mencionadas. Finalmente, después de algunos cálculos algebraicos lograron hallar la fórmula que resuelve la ecuación cuadrática general. A continuación se presenta la solución del problema general.



2. $ax^2 + bx = -c$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4a(-c)}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La otra solución es

$$x = -\frac{\sqrt{b^2 + 4a(-c)}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a(-c)}}{2a}$$

En vista que no todos los estudiantes hallaron dicha estrategia se lanzó el siguiente interrogante ¿puede resolver la ecuación particular con alguna de las fórmulas halladas? Esto les dio ideas para resolver los casos particulares, y por ende, vislumbrar la estrategia de solución del problema general.

Una vez los estudiantes hallaron la fórmula se propuso resolver algunas ecuaciones, con el propósito de que se apropiaran y vieran la utilidad de dicha fórmula. (Ver anexo 7)

El desarrollo de la actividad permitió que los estudiantes se percataran de lo útil que puede ser particularizar, y luego generalizar un determinado problema. Cuando se aborda un problema en su forma general seguramente puedan surgir buenas ideas que permitan hallar su solución. Sin embargo, hay situaciones en las que no resulta tan fácil encontrar dicha solución, así que lo más indicado es reducir el problema, y resolver algunos casos particulares utilizando algún método ya conocido. La solución de estos últimos con plena seguridad permitirá descubrir la estrategia de solución del problema inicial. La solución del problema general cobrará gran importancia partir de ahora, pues resolverá cualquier problema particular.

Aunque en la actividad se halló la fórmula que permite resolver rápida y brevemente cualquier ecuación cuadrática, no se debe ignorar que la técnica de la geometría intuitiva fue un método útil y de gran interés para encontrar dicha fórmula. Ahora, tal vez los estudiantes decidan memorizar la fórmula, y con el tiempo puede que sea olvidada, pero posiblemente este no sea el caso de la técnica de la geometría intuitiva, la cual les permitirá deducir la fórmula una vez más.

Finalmente, puedo decir que si bien los estudiantes no terminaron siendo expertos en resolver problemas, por lo menos logré involucrarles algunas ideas de la metodología de Polya, que estoy segura les serán de gran ayuda en el momento de resolver cualquier tipo problema.

3. CONCLUSIONES

El momento más anhelado de un estudiante que se forma para profesor es el momento de desarrollar su práctica pedagógica, pues en ella ve una primera oportunidad para asumir el rol de docente. El hecho de enfrentarme a un grupo tan numeroso por primera vez me ocasionaba temor y nervios. Sin embargo, era claro que debía controlar estos miedos y mostrar seguridad frente a los estudiantes. Ahora sé la alegría que se siente cuando se ejerce como docente. Me di cuenta que ser docente no es imponer conceptos y definiciones que probablemente serán olvidadas, ser docente de matemáticas va más allá de esto, es formar a los estudiantes sembrando en cada uno de ellos conocimientos que le ayudarán a defenderse en la vida diaria, es sentir ese orgullo cuando tu estudiante aprende matemáticas gracias a ti, y te dice: gracias profe por su explicación, o cuando dice: esto lo aprendí de mi profesora de matemáticas; en fin, son tantas las emociones que se sienten que son inexpresables.

Por ello, mi experiencia de práctica pedagógica ha sido uno de los momentos más emotivos e inolvidables, pues en ella aprendí muchas cosas tanto personal como para la vida profesional.

Ahora sé en realidad lo bonito de esta profesión, pues se tiene la completa certeza de que algunos estudiantes no solo mostraron interés frente a esta metodología, sino que también, lograron reforzar sus conocimientos, conocer y aprender de sus errores. Sin embargo, otros estudiantes no tenían este mismo ritmo, lo que ocasionaba un atraso frente a los otros alumnos, situación que me llevo a implementar estrategias metodologías acorde a las necesidades de cada estudiante.

Es notable que el ambiente en el aula no puede ser continuamente el mismo, debido a los múltiples factores en los que puede estar inmerso el entorno y la actitud emocional del estudiante; estos componentes inciden de una u otra manera en la disciplina de los estudiantes haciendo que la clase se torne algo dispendiosa. En situaciones así, no sólo basta con conocer los conceptos teóricos vistos en las clases de didáctica, sino también hacer de ellos la mejor aplicabilidad para dar una solución. Confieso que esta era una de las situaciones que más me preocupaba, pues me causaba temor no saber abordarla. Sin embargo opte por mantener que cada estudiante estuviera ocupado con los talleres y así evitar desorden en el aula.

La participación de los estudiantes durante el proceso siempre fue activa. Les gustaba salir al tablero para exponer sus resultados, allí se evidenciaban algunos errores algebraicos pero siempre se buscaba la forma de corregirlos colectivamente. Los estudiantes mostraron motivación por aprender, pues además de conocer un método que para ellos era diferente, sabían que a través de este podían reforzar el tema de ecuaciones cuadráticas.

La metodología implementada despertó un genuino interés de los estudiantes, pues imaginaban que esta sería similar a la enseñanza tradicional. En el transcurso de este proceso manifestaron que a través de la geometría comprendían mejor el procedimiento para resolver ecuaciones.

El objetivo principal de mi proyecto, era “reinventar” la fórmula que resuelve cualquier ecuación cuadrática haciendo uso de algunos problemas históricos. Desde el inicio de este proceso se propusieron problemas particulares, con el objetivo de que los estudiantes se familiarizaran con algunos aspectos de la metodología de Polya, y se apropiaran de las técnicas de la geometría intuitiva. Al final, esto les permitió comprender la generalización, y la solución de algunos problemas; soluciones que los condujeron a hallar la fórmula mencionada. Es cierto que para lograr este propósito los estudiantes necesitaron de algunas sugerencias, pero aun así, fueron ellos quienes utilizaron lo que sabían y lo que habían aprendido, hicieron sus propias conclusiones, y llegaron a la fórmula cuadrática.

Este es el momento para decir, que introducir la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas permite que el estudiante construya los conceptos matemáticos, y de paso que aprenda de los errores que comete en el proceso. Más aún, esta actividad de la mano con la historia de las matemáticas, logra que los estudiantes no solo construyan los conceptos matemáticos, sino que también logren comprenderlos mejor, viendo lo que en verdad hay en el trasfondo de ellos. Es cierto que construir todos los conceptos sería algo inalcanzable debido al poco tiempo que se tiene para abordar la clase de matemáticas, pero se debería tener en cuenta para implementarla así sea algunas veces, pues está visto que las actividades mencionadas traen resultados óptimos.

Definitivamente puedo decir que esta experiencia fue fructífera tanto para los estudiantes como para mí como futura docente, pues los estudiantes aprendieron de mí y yo aprendí de ellos. No obstante, esto fue sólo un inicio de lo que debo enfrentar, pues ser docente es una gran responsabilidad, no sólo porque de mí depende el aprendizaje de los estudiantes, sino que también debo estar preparada para las múltiples situaciones que pueden surgir en el aula de clase, y que con mucho profesionalismo debo saber manejar.

4. BIBLIOGRAFIA

Katz, V. (2000). *Using History To Teach Mathematics An International Perspective.* Washington DC.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas, S.A. de C.V.

Martinez, M. (Junio de 2012). Usos de la historia en la enseñanza de la matemática. Liberia, Costa Rica.

Seguí, V. M. (s.f.). Algunas razones para introducir la historia de las matemáticas en las aulas de secundaria. *Sigma*

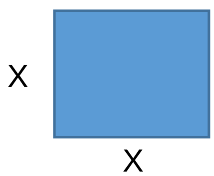
https://www.google.com.co/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=ecuaciones%20en%20la%20antiguedad

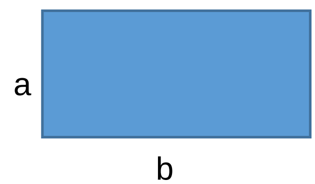
http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

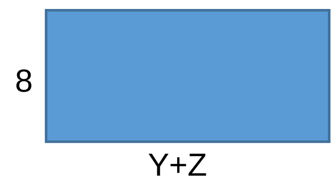
5. ANEXOS

ANEXO 1. PRUEBA DIAGNOSTICA

1. Escribe una expresión para calcular el área de las siguientes figuras







A=______________ A=_____________ A=___________

2. Cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado. Justifique

____

____

____

Se tiene un terreno en forma de cuadrado cuya área es $361m^2$. ¿Cuál es la longitud de sus lados?

3. En las siguientes ecuaciones encontrar el valor de x. En caso de no encontrarlo justifique

$$x^2 + 36 = 0$$

$$2(x-2)^2 = 18$$

4. Dado el valor de $x = 4$, verifique si corresponde a la solución de la ecuación

$$2x^2 - 32 = 0;$$

5. La suma de dos números es 21 y la suma de sus cuadrados es 225. Encuentra los dos números

ANEXO 2. TALLER 1

1. Si la mitad del perímetro de un rectángulo es 20 y su área es 96 unidades cuadradas. ¿cuáles son los lados del rectángulo?

2. Si la mitad del perímetro de un rectángulo es 16 y su área es 48 unidades cuadradas. ¿cuáles son los lados del rectángulo?

3. Intente explicar por escrito los pasos que se deben seguir para resolver este tipo de problemas

ANEXO 3. TALLER 2

1. Si la mitad del perímetro de un rectángulo es 8 y su área es 12 unidades cuadradas. ¿cuáles son los lados del rectángulo?

   A continuación se presentan problemas donde los lados del rectángulo pueden ser fraccionarios e incluso irracionales.

2. Si la mitad del perímetro de un rectángulo es $\frac{9}{2}$ y su área es 5 unidades cuadradas. ¿cuáles son los lados del rectángulo?

3. Si la mitad del perímetro de un rectángulo es 2 y su área es 30 unidades cuadradas. ¿cuáles son los lados del rectángulo?

ANEXO 4. TALLER 3

1. Se tiene un rectángulo cuya base es 8 unidades y su altura es desconocida. Si ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo las dos figuras tienen un área de 9 unidades cuadradas. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

2. Se tiene un rectángulo cuya base es 18 unidades y su altura es desconocida. Si ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo las dos figuras tienen un área de 40 unidades cuadradas. ¿Cuál es el la altura del rectángulo?

3. Realizar una explicación por escrito donde cuente los pasos que se deben seguir para resolver este tipo de problemas

ANEXO 5. TALLER 4

1. Se tiene un rectángulo cuya base es 16 unidades y su altura es desconocida. Si ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo las dos figuras tienen un área de 17 unidades cuadradas. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

   A continuación se presentan problemas donde los lados del rectángulo pueden ser fraccionarios e incluso irracionales.

2. Se tiene un rectángulo cuya base es $\frac{7}{4}$unidades y su altura es desconocida. Si ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo las dos figuras tienen un área de 10 unidades cuadradas. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

3. Se tiene un rectángulo cuya base es $\sqrt{6}$ unidades y su altura es desconocida. Si ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo las dos figuras tienen un área de $\frac{15}{2}$unidades cuadradas. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

ANEXO 6. TALLER 5

1. $ax^2 + bx = c$

2. $ax^2 + bx + c = 0$

ANEXO 7. EJERCICIOS

1. $x^2 + 2x + 1 = 0$
2. $2x^2 + 4x - 8 = 0$
3. $4x^2 + 2x + 1 = 0$
4. $x^2 - 5x - 2 = 0$
5. $10x^2 + x + 2 = 0$

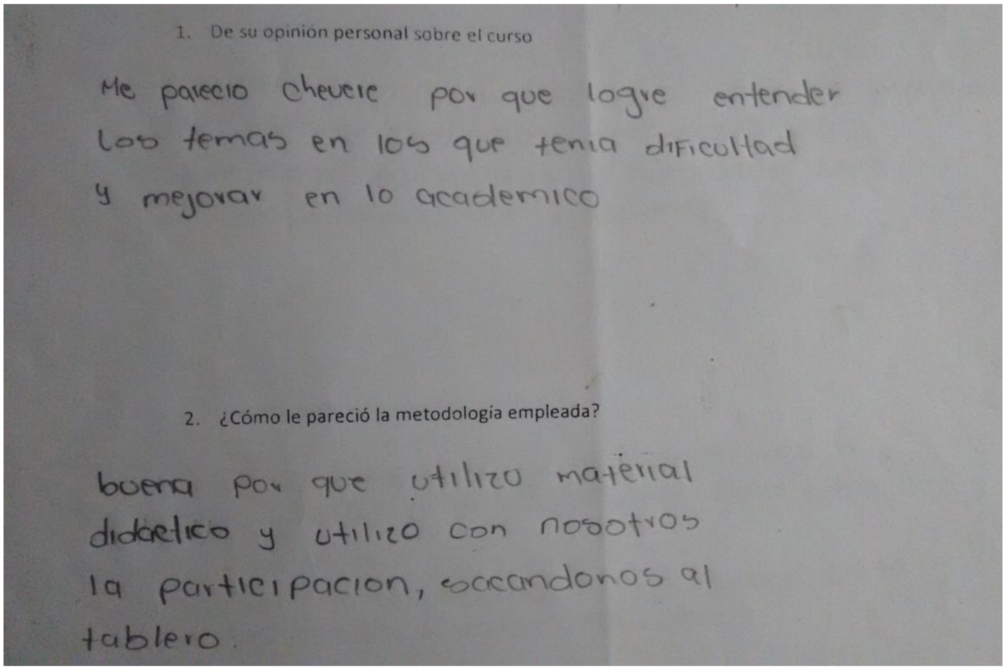
ANEXO 8. EVIDENCIAS

Imagen 1. Institución Educativa de Julumito

Imagen 2. Taller en parejas.

Imagen 3. Intervención en el aula de clase.

Imagen 4. Comentarios de los estudiantes sobre la propuesta pedagógica.

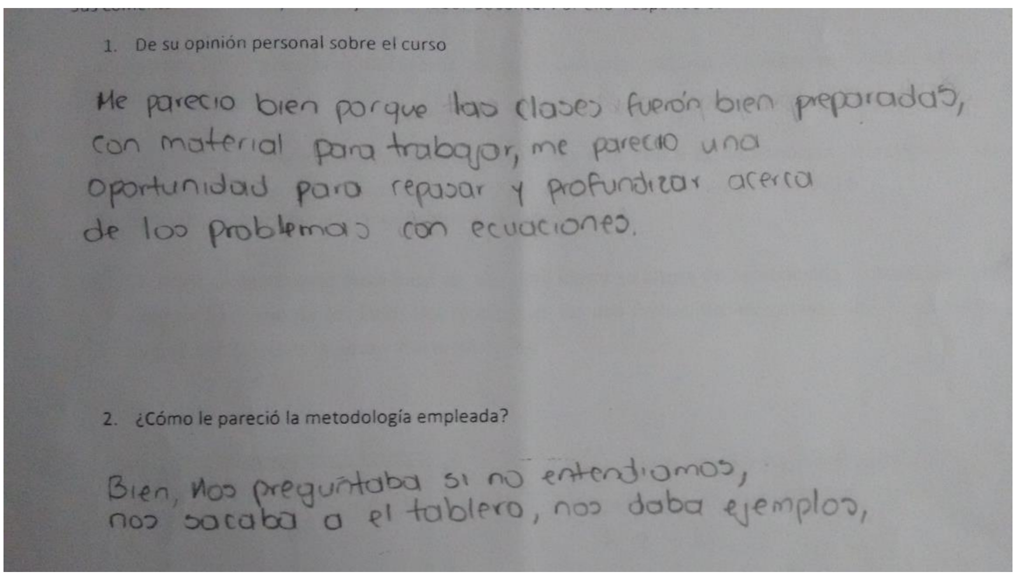


1. De su opinión personal sobre el curso

Me parecio chevere por que logre entender los temas en los que tenia dificultad y mejorar en lo academico

2. ¿Cómo le pareció la metodología empleada?

buena por que utilizo material didactico y utilizo con nosotros la participacion, sacandonos al tablero.



1. De su opinión personal sobre el curso

Me parecio bien porque las clases fuerón bien preparadas, con material para trabajar, me parecio una oportunidad para repasar y profundizar acerca de los problemas con ecuaciones.

2. ¿Cómo le pareció la metodología empleada?

Bien, Nos preguntaba si no entendiamos, nos sacaba a el tablero, nos daba ejemplos,