DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE TRES PROBLEMAS CLÁSICOS.

DAVID FERNANDO DAZA URBANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2015

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE TRES PROBLEMAS CLÁSICOS.

DAVID FERNANDO DAZA URBANO

Directora de trabajo:
Dra: Gabriela Inés Arbeláez Rojas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2015

NOTA DE ACEPTACION

El presente trabajo
fue aprobado por:

Vo. Bo. Yeny Leonor Rosero
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Gabriela Arbeláez Rojas
Directora

Vo. Bo. Carlos Alberto Trujillo
Evaluador

Índice

INTRODUCCION

En este proyecto he querido explorar una idea diferente respecto a las prácticas educativas, intentado llevar al aula contenidos matemáticos que usualmente no se orientan a nivel de la educación básica y media; Temas que en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca son poco desarrollados o en su defecto no se orientan, como por ejemplo la teoría de grafos.

Ahora bien, si la humanidad avanza y la matemática a su vez con ella, ¿por qué no considerar otras áreas como la teoría fractal, la teoría de códigos, la teoría de grafos, el infinito, la historia de las matemáticas, entre otras y buscar estrategias para implementarlas en el aula de forma adecuada? quizás con ello pueda abolirse la creencia de que las matemáticas son aburridas, pues cambiaría lo que de generación en generación hemos venido viendo en la escuela. Soy consciente de la complejidad de lo que he escrito, pues existen estándares que ciñen los currículos de una institución, sin embargo estoy seguro que hacia allá iremos en el futuro.

Basándome en la idea anterior, para llevar a cabo este proyecto seleccioné tres problemas que estuvieran al alcancé de los conocimientos que como estudiante de pregrado he adquirido. Además que fueran atractivos para los estudiantes y se encontraran en una presentación de fácil acceso para el nivel de la educación básica y media. Los problemas tienen que ver con:

1. El infinito numerable.
2. Teoría de códigos.
3. Teoría de grafos.

Antes de pasar a describir el contenido del documento, es preciso mencionar que este es el resultado de la sistematización de la práctica pedagógica PP, asignatura que se orienta durante cuatro semestres en la universidad del Cauca y es uno de los requisitos para optar al título de Licenciatura en Matemáticas.

El primer capítulo del documento trata aspectos relevantes de la institución educativa donde se llevó a cabo este proyecto, se da información sobre su enfoque, los convenios que actualmente maneja, sus sitios web y su ubicación.

En el segundo capítulo doy la razón por la cual decidí trabajar alrededor de estos tres problemas, así como también cual es la metodología a seguir en torno a ellos y bajo que referente teórico. Además de ello, la importancia del proyecto a nivel social y matemático.

El tercer capítulo corresponde al Marco Teórico, en él se inicia dando una breve introducción a la actividad de resolver problemas, luego se resalta cómo esta actividad y las matemáticas casi que en paralelo contribuyeron para que las condiciones de vida de un individuo mejoraran. Además de ello se comenta la importancia que es concedida a esta actividad por la educación matemática y para terminar se hace alusión a Polya y Schoenfeld dos autores que han trabajado sobre la resolución de problemas, pero ahondando en la labor realizada por Polya en su libro como plantear y resolver problemas. En esta parte se presentan las cuatro faces que propone Polya, pero bajo una interpretación personal y se finaliza con un comentario sobre lo que para mí Polya nos trasmite con su libro.

Por otro lado, en el cuarto capítulo, se exhibe el procedimiento a seguir en la realización del proyecto, de que trata cada uno de los problemas, lo que se pretende alcanzar con los estudiantes trabajando alrededor de ellos y un contexto, donde se tocan aspectos relevantes de cada uno de ellos. Para mayor facilidad de lectura, la metodología se ha subdividido de la siguiente manera, al inicio se encuentra ¿transmisión del pensamiento o sistema binario?, seguidamente una mirada al infinito y para finalizar puentes de Könisberg.

Posteriormente en el quinto capítulo se encuentran, las actividades y los enunciados explícitos de los problemas, así como también los materiales necesarios para presentar de forma agradable y asequible cada uno de ellos a los estudiantes. Para facilitar la lectura se ha considerado una apartado para cada actividad, en el siguiente orden, inicialmente está el truco de magia, seguidamente el hotel de Hilbert y para finalizar el teorema de Euler. Ahora bien, el truco de magia y el hotel infinito de Hilbert se trabajarían alrededor de las propuestas que libremente sugirieran los estudiantes en el desarrollo de las sesiones, por el contrario, el trabajo sobre el teorema de Euler es más constructivo en el sentido en que se obtendría a partir de exploración, observación y análisis de casos particulares.

En el sexto capítulo, denominado bitácoras, se hace una presentación de lo acontecido en cada una se las sesiones en el aula, tratando de recopilar, mostrar y analizar en extenso el proceder de los estudiantes frente a cada uno de los problemas planteados.

Además se hace una reflexión personal de la experiencia en el aula.

En el séptimo capítulo se encuentran las conclusiones, donde se hace reflexión sobre el trabajo de los estudiantes en el aula, así como también el trabajo acontecido y los aprendizajes adquiridos por parte mía a través de esta experiencia.

Enseguida se encuentran las referencias, donde podrán consultarse y verificarse en detalle afirmaciones o comentarios que se encuentran a lo largo del documento.

y por ultimo tenemos los anexos, donde reposan las evidencias de lo acontecido en el aula, así como también los materiales necesarios para llevar a cabo cada una de ellas.

1. LA INSTITUCION EDUCATIVA

La realización de este proyecto de aula tuvo lugar en la institución educativa el Mirador ubicada en el barrio el Mirador en la carrera 28 con calle 16 esquina de la ciudad de Popayán, departamento del Cauca y a cargo de la rectora Irma Polanco. Esta institución es de carácter oficial académica con énfasis en gestión empresarial. Este establecimiento educativo hace parte del programa todos a aprender creado por el gobierno, el cual busca dotar de recursos y soluciones a las escuelas con mayores necesidades de Colombia. Necesidades que afectan el desempeño de los estudiantes, su permanencia en ellas y su entorno.

En su sede principal la institución maneja jornada diurna y nocturna; La jornada diurna se divide, básica primaria en la mañana y secundaria en la tarde. En la jornada nocturna solo se maneja la secundaria.

El énfasis de la institución es desarrollar perfiles de líderes empresariales mediante el desarrollo de la personalidad y de los valores, el estímulo de la creatividad, la autonomía y el sentido emprendedor.

Actualmente la institución cuenta con un convenio con el SENA y otro con el grupo ALGEBRA, TEORIA DE NUMEROS Y APLICACIONES (ALTENUA), del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, con el ánimo de fortalecer el nivel educativo de la misma. A través del convenio con el Sena, los estudiantes tienen la posibilidad de salir con una titulación técnica cuando finalicen sus estudios de secundaria, además en un futuro tendrán facilidades para continuar con su desarrollo formativo hasta alcanzar un nivel tecnológico. Por otra parte, el convenio con el grupo ALTENUA busca fortalecer y desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes a través de la metodología de resolución de problemas, con miras a obtener mejores resultados en las pruebas icfes.

Por otro lado, dado que el enfoque de este proyecto es bajo la metodología de resolución de problemas y muy semejante a lo desarrollado por la universidad del Cauca en dicha institución, el docente a cargo Carlos Trujillo, facilito los espacios necesarios para trabajar con un grupo de estudiantes. De esta manera el grado asignado fue el 10b y con él se llevó a cabo el desarrollo del proyecto los días miércoles en el horario de 4:30 pm a 6:15 pm y los días sábados en la franja de 10:00 am a 12:00 pm, durante el periodo del 7 de mayo del 2014 al 7 de junio del 2014, con un total de 16 horas.

Para finalizar, puede consultarse información detallada sobre la institución en los siguientes sitios web:

- http://www.institucioneducativaelmirador.edu.co/
- http://todosaaprender.com/index.php?seccion=perfil&cd=119001002845

2. JUSTIFICACION

No es un secreto que a nivel de la secundaria, la clase de matemáticas para algunos alumnos tiende a tornarse un poco aburrida, ¿pero a qué se debe esto? quizás a la forma tradicional[1] en la que suelen presentarse algunos contenidos matemáticos. Tal situación motivó que surgiera esta propuesta de aula, mediante la cual quiero explorar sí en la secundaria es posible introducir temas matemáticos como, el sistema de los números binarios, el infinito y algo muy básico sobre la teoría de grafos a través de tres problemas matemáticos muy famosos, que no requieren de profundos conocimientos en el área para ser resueltos.

La idea central del proyecto será, trabajar con los estudiantes alrededor de estos tres problemas utilizando la metodología de resolución de problemas que propone Polya [1]. Esta metodología parece ser la adecuada, ya que los problemas además de presentarse en una forma agradable y divertida, se prestan para aplicar todo lo referente a la actividad de resolver problemas.

Por medio de estos tres problemas, deseo que los estudiantes compartan y discutan con todo el grupo las estrategias que utilicen en la búsqueda de la solución, así como también observar cual es la concepción que tienen de los conceptos matemáticos que en ellos se involucran.

Para implementar este proyecto utilizaré, algunos de los conocimientos y experiencias que a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje, como estudiante de pregrado en la universidad del Cauca he adquirido. En otras palabras, este proyecto representa mi primer acercamiento hacia el aspecto profesional.

Ahora bien, a través de los problemas elegidos, los estudiantes podrán visualizar, por ejemplo como las matemáticas implícitamente, intervienen en el funcionamiento de diferentes artefactos que diariamente utilizamos, así como también que las matemáticas no son alejadas del medio que nos rodea y en verdad muy útiles.

Por otra parte y teniendo en cuenta que los problemas que seleccioné no requieren de profundos conocimientos en matemáticas para ser resueltos, considero que cualquier grado entre 6 y 11 sería adecuado para desarrollarlo. Aun así, opte por realizarlo en el grado 10, ya que los estudiantes a estas alturas han pasado por una serie de cursos que

[1] Entiéndase por forma tradicional, aquella donde el docente plasma en el tablero una definición y seguidamente presenta un ejemplo.

se espera los dotaran de herramientas que permitan que el trabajo sea más fructífero y enriquecedor.

El tiempo con el que se cuenta para llevar a cabo este trabajo de aula es aproximadamente 30 horas, que es equivalente a 15 sesiones de 2 horas por día de trabajo.

Finalmente y con mí mayor deseo, espero que este proyecto pueda contribuir en algo a todos aquellos que estén interesados, en adentrarse en el aprendizaje y enseñanza de contenidos bajo una metodología enfocada en la resolución de problemas.

3. MARCO TEORICO: RESOLUCION DE PROBLEMAS

Primero que todo, debemos resaltar que la actividad de resolver problemas puede considerarse igual o más antigua que la misma humanidad y no es ajena a ninguna criatura que pueda existir. En particular nos interesa lo que al ser humano concierne.

Revisando la historia de las matemáticas, podremos observar que esta ciencia y la actividad de resolver problemas, casi que en paralelo han servido como mediadores para que el razonamiento del ser humano avance en pro de prever mejores condiciones de vida. Ahora bien, dado que algunos de estos problemas sirvieron como el pilar para sentar las bases de las matemáticas y aún más los avances que actualmente se producen sobre esta ciencia son el producto de la resolución de algún problema, esta actividad es considerada como un verdadero motor en el desarrollo de las matemáticas.

Actualmente para la educación matemática, la actividad de resolver problemas representa una de sus partes más esenciales, ya que por medio de ella los estudiantes experimentan la potencia y utilidad, que tienen las matemáticas en el mundo que los rodea.[2].

Debido al reconocimiento que adquirió esta actividad, algunos investigadores como Polya y Alan Schoenfeld elaboraron algunas propuestas sobre su enseñanza. Aquí haremos alusión al trabajo realizado por Polya.

George Polya[3]nació el 13 de diciembre de 1887 en Budapest, Hungría, y murió el 7 de septiembre de 1985 en Palo Alto, California, Estados Unidos. Fue un matemático que trabajó en diferentes áreas como, la teoría de números, la geometría, el álgebra, el análisis matemático, la combinatoria y la probabilidad. Polya redacto tres libros en los que trato de mostrar cómo se debe aprender y enseñar a resolver problemas. En particular nos interesa el libro como plantear y resolver problemas publicado en 1945 en la Universidad de Princeton.

En este libro, Polya recoge "casi en su totalidad" las estrategias que usualmente se le pueden ocurrir a una persona que se encuentra ante un problema. Además de ello, nos enseña cómo emplear cada una. Sin embargo en él, no da definición alguna de lo que es

[2] http://www.ecured.cu/index.php/Resoluci%C3%B3n_de_Problemas_Matem%C3%A1ticos

[3] http://paginas.matem.unam.mx/cprieto/index.php/es/matematicos/matematicos-p/145-polya-george

un problema, fue en el año 1961 en su libro descubrimiento matemático que definió un problema “como aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata”.

De esta manera e interpretando un poco a Polya, resolver un problema será encontrar caminos adecuados, que nos permitan llegar a ese fin deseado, que no logramos obtener con tan solo un parpadear de ojos. Es decir, resolver problemas no es cuestión de “soplar y hacer botellas”.

Polya describió las siguientes cuatro fases para resolver problemas:

- **Comprender el problema:** Expresar con nuestras propias palabras y en forma clara a que debemos llegar.
- **Concebir un plan:** Esbozar un camino en forma de cadena, donde cada eslabón que avancemos, nos lleve cada vez más y más cerca de lo pedido.
- **Ejecución del plan:** Avanzar por dicho camino, teniendo precaución de que cada vez que se avance de un eslabón a otro los razonamientos sean correctos.
- **Visión retrospectiva:** Devolverse por dicho camino, revisando, discutiendo y verificando lo realizado en cada uno de los eslabones.

Para cada fase sugiere una serie de preguntas que el profesor puede hacerle al estudiante o que el mismo estudiante puede hacerse. También indica algunos aspectos que se deben considerar para avanzar en la resolución de problemas, como por ejemplo utilizar el razonamiento heurístico, el cual es considerado como aquellos procedimientos informales que se emplean para avanzar en problemas desconocidos y no usuales.

Polya propone estrategias como dibujar figuras, introducir una notación adecuada, explorar el problema, buscar analogías, trabajar con problemas auxiliares, introducir elementos auxiliares, generalizar, particularizar y trabajar hacia atrás. Aquel que lo desee puede consultar en detalle cada una de ellas en [1].

Finalmente, considero que Polya a través de su libro como plantear y resolver problemas, nos está diciendo, “miren esto es lo que realmente hacemos cuando resolvemos problemas, seamos conscientes o no de ello”.

4. METODOLOGIA

El procedimiento a seguir en este proyecto de aula, será trabajar con un grupo de estudiantes alrededor de tres problemas que históricamente han contribuido al desarrollo de diferentes ramas de las matemáticas. A continuación me propongo esbozar cada uno de ellos.

4.1. ¿TRANSMISION DEL PENSAMIENTO O SISTEMA BINARIO?

El primero de ellos es conocido como truco de magia (Ver 6.1), el matemago o a vista de pájaro y consta de dos partes.

1. Deducir con ayuda de 6 cartas un método que permita hallar siempre, el número que una persona piense de entre 0 y 63.

2. Explicar porque funciona dicho método.

A través de este problema pretendo trabajar con los estudiantes la representación de números naturales en el sistema binario, las operaciones elementales que en dicho conjunto se pueden definir y finalmente por medio de un video, mostrar lo útil que ha sido el sistema binario para la humanidad.

Ahora bien, en un principio más que un problema, pareciera que se tratase de un simple juego. Un juego en el que encontrar el número se reduce a tener "ciertas" capacidades mágicas o quizás un poco de buena suerte. Sin embargo si se examinan en detalle las cartas y se conoce sobre el sistema de los números binarios, el apelativo mágico o recurrir a la suerte es puesto a prueba, ya que más que adivinación o azar, lo que se utiliza es la representación de un número natural en el sistema binario. Y no ha de ser raro, "pues entre las matemáticas y la magia existe cierta relación, ya que en el trasfondo de muchos trucos subyacen las matemáticas para hacerlos funcionar."(Hans, Muñoz y Redondo, p.296)

Sorprendentemente, sin saberlo durante el truco de magia, la persona trasmite el número que pensó. ¿Pero por qué sucede esto? En realidad es muy fácil, lo que pasa es que cuando utilizamos las 6 cartas y preguntamos a una persona si su número esta en ella o no, sin que lo note, por medio de las respuestas si y no la estamos "obligando" a que nos revele el número que lleva en su mente. Siempre y cuando se convenga que la palabra si representa un uno en binario y la palabra no un cero. En otras palabras, la persona descubre ante nosotros su número, comunicándose en lenguaje binario.

Pasemos a ver de qué trata el sistema binario.

Como su nombre lo indica, alude a un conjunto de objetos cuya representación está dada por combinaciones de dos cifras a las que designamos por 0 y 1. Puede surgir al lector la pregunta, ¿01 y 10 representan el mismo número?; la respuesta es no y se debe a que el sistema binario es posicional, es decir que dependiendo del lugar que ocupe el 0 o el 1 en la representación del número este puede variar.

Para ver esto con más detalle, hagamos una analogía a lo que pasa en el sistema decimal. En este sistema, existen las unidades, las decenas, las centenas,... etc. Las unidades están representadas por 10^0, las decenas por 10^1 y las centenas por 10^2, luego cada posición esta mediada por una potencia de la base que en este caso es 10 ya que se trabaja con los dígitos. Algo similar sucede en el sistema binario, pero la base es 2 puesto que trabajamos con el 0 y el 1. Así cada posición estará dada de derecha a izquierda por potencias enteras y no negativas de 2. Por tanto el $01 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 = 1$ y el $10 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 2$, en consecuencia $01 \neq 10$.

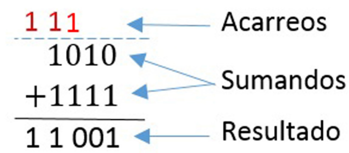
Algo que puede ser verificado usando inducción completa, es que la representación de un número entero en el sistema binario es única. Este resultado está estrechamente relacionado con la forma en que los números del 0 al 63 se han ubicado en las seis cartas (Ver 6.1). Además en el fondo es el que permite, que el truco funcione.

Por otro lado, en el sistema binario también es posible definir las operaciones elementales; es decir, la suma, la resta, la multiplicación y la división que normalmente usamos en el sistema decimal. Para ello se deben tener en cuenta las siguientes convenciones.

Para la suma,

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0, \\ 0+1 &= 1, \\ 1+0 &= 1, \\ 1+1 &= 0 \quad \text{Y llevo o acarreo 1.} \end{aligned}$$

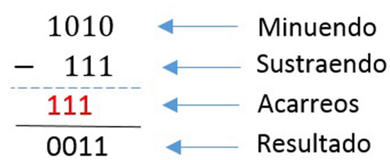
Ejemplo.



Para la resta,

$$
\begin{aligned}
0 - 0 &= 0, \\
0 - 1 &= 1 \qquad\qquad \text{Y llevo 1,} \\
1 - 0 &= 1, \\
1 - 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo.



Observemos que lo único diferente es que 0 – 1=1 y debemos acarrear un 1. La razón de ello es que a 0 no le podemos quitar 1, por lo que es necesario tomar una unidad prestada de la posición siguiente para obtener 10 - 1 =1 que equivale a decir en el sistema decimal 2 - 1 = 1, como tomamos prestado 1, debemos llevar o acarrear un 1.

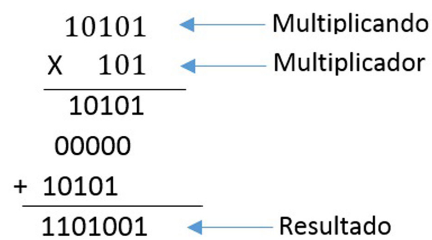
Observación: 1 en binario se representa por 1 y 2 en binario por 10.

Nota: 10 debe interpretarse como un 1 pegado con un 0 y no como el número decimal 10.

Para la multiplicación,

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 0 &= 0, \\
1 \cdot 0 &= 0, \\
0 \cdot 1 &= 0, \\
1 \cdot 1 &= 1.
\end{aligned}
$$

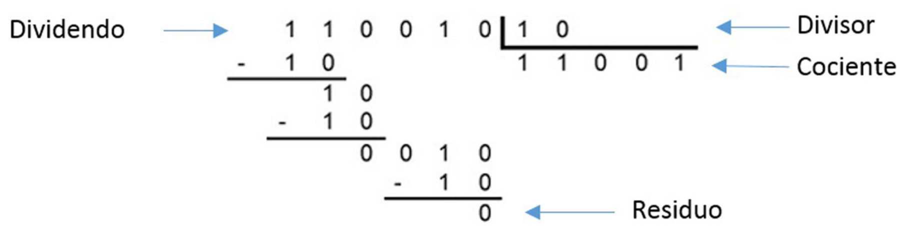
Ejemplo.



Como podemos ver en el ejemplo, primero se realiza el producto siguiendo las reglas establecidas y luego todo se reduce a sumar en binario.

Y finalmente la división funciona igual que en el sistema decimal, solo se debe tener cuidado y realizar la resta para obtener el residuo en forma binaria.

Ejemplo.



Problemas como el truco de magia y similares a él, que involucran transmisión de mensajes de forma codificada, han sido algunos de los motivadores para establecer lo que hoy en día se conoce como la teoría de códigos, ¿pero qué es esto? ¿De qué trata? Primero que nada es una disciplina matemática muy reciente que socialmente ha generado grandes aportes en pro de conseguir métodos fiables, que generen seguridad a nuestras cuentas bancarias, redes sociales, computadores,. . . etc. Además de ello, es la que permite que tengamos acceso a internet, nos comuniquemos por celular; en fin esta disciplina interviene en todo aquello que involucre transmisión y recepción de información que pueda ser codificada.

Por último, el auge de esta teoría ha sido el siglo XXI, debido al gran avance en cuanto a las tecnologías de la comunicación.

4.2. UNA MIRADA AL INFINITO

El segundo problema es conocido como el hotel infinito de Hilbert y consiste en resolver cuatro paradojas que encontró el matemático Georg Cantor en sus trabajos sobre el infinito numerable (Ver 6.2).

A través de este hotel pretendo examinar con los estudiantes algunas propiedades importantes que poseen los conjuntos infinitos numerables. La primera de ellas es que al agregar un elemento a un conjunto de esta clase, este no se modifica. La segunda es que agregar una cantidad infinita de elementos tampoco altera el total y finalmente que agregar una cantidad infinita de infinitos también deja invariante la cantidad total. En nuestro caso, el hotel sigue siendo el mismo y con la misma cantidad de habitaciones. Además de ello mostrar que en lo relacionado a este tipo de conjuntos, la intuición puede jugarnos una mala pasada, puesto que allí, el todo puede ser igual que una parte. En este hotel la cantidad de habitaciones pares e impares será igual a la cantidad total de habitaciones. Observaciones como las anteriores dieron pie a una teoría sobre los infinitos que permitió que la matemática avanzara de forma sorprendente.

Pasemos a ver como se originó el Hotel infinito de Hilbert. Todo empezó con George Cantor pionero de la teoría de conjuntos quien al realizar distintas investigaciones sobre los conjuntos infinitos numerables encontró hechos que contrariaban la intuición.

Aunque los trabajos de Cantor eran innovadores y de gran importancia, la complejidad con que estaban presentados hacía difícil su comprensión. A razón de ello, el matemático David Hilbert ideó un hotel de infinitas habitaciones a través del cual fuese más simple exhibir algunas de las paradojas relacionadas con el infinito numerable con las que pudo haberse encontrado Cantor.

Pero ¿qué es el infinito? ¿De dónde proviene?, ¿puede algo real ser infinito?

El infinito es algo que ha sido rechazado, condenado y estudiado con detalle a lo largo de los tiempos. Es un concepto que le ha costado la vida, la libertad o la carrera algunos que se atrevieron a hablar de él. Puede que sea la idea más extraña que los seres humanos hemos podido pensar alguna vez, la fuente de inspiración de algunos artistas o la obsesión de algunos filósofos, teólogos, físicos y matemáticos.

Algunas personas suelen asociar el infinito erróneamente a cosas que son tremendamente grandes o que no pueden ser contadas, como por ejemplo el mar o los granos de arena en una playa. Otros lo asocian a lo que no tiene fin, lo ilimitado o inabarcable.

Pero lo cierto es que el infinito es algo abstracto, una idealización que no puede ser corroborada a través de la experiencia.

En el siglo IV antes de cristo, Aristóteles pone fin a la disputa sobre el infinito diciendo que el infinito no es real, no está allí afuera esperándonos, solo es concebible en potencia. Por aquella época se manejaban dos tipos de infinito, el infinito en acto y el infinito potencial. El primero de ellos es aquel que existe en absoluto, es decir en el que es posible tener todos los elementos agrupados en un solo paquete, por aquel entonces solo era atribuido a Dios. El segundo es aquel que nunca es completo, es decir en el que siempre es posible añadir más y más elementos, sin que se llegue a un último. Este se encuentre en estrecha relación con la idea de sucesión, por lo cual permea todo lo que involucre el concepto de límite.

La imposibilidad de constatar el infinito en acto a través de la experiencia, logro que la noción de infinito potencial fuera la que prevaleciera. Sin embargo, George Cantor en 1883 escribió una de sus más grandes obras titulada los fundamentos de la teoría de conjuntos, donde argumenta desde un punto de vista filosófico la necesidad de considerar y de trabajar con el infinito actual. En este libro cantor expresa que debe considerarse lo infinitamente grande no solo como algo que crece sin límites, sino también fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma determinada de lo completamente infinito.

Para Cantor deben considerarse tres tipos diferentes de infinito, cada uno con características muy propias.

"primero cuando es realizado en la forma más completa, en un ser independiente de otro mundo, en Dios, al cual llamo el infinito absoluto o simplemente absoluto; segundo cuando ocurre en lo contingente, en el mundo físico; tercero cuando la mente lo aprehende en abstracto como una magnitud matemática, número, o tipo de orden. Quiero hacer un claro contraste entre el absoluto y lo que yo llamo transfinito, es decir, los infinitos actuales de las dos últimas clases los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por tanto relacionados con lo finito. Cantor, citado en"(Ferreiros, 2006, p. 32).

Cantor dice que tras lo finito hay un transfinito, esto es, una jerarquía ilimitada de modos determinados por números bien definidos y distinguibles entre sí. Los números transfinitos son utilizados por Cantor para describir cantidades infinitas que difieren de las asociadas al infinito real o al infinito absoluto.

Para finalizar, veamos lo que se considera un conjunto infinito siguiendo a Cantor.

Cantor expresa que un conjunto será infinito siempre que sea posible encontrar una regla de asignación biyectiva que relacione los elementos del conjunto con los de uno de sus subconjuntos propios. Este importante hecho, abre la posibilidad de que en los conjuntos infinitos el todo pueda ser igual a una parte, cosa que no se cumple en los conjuntos finitos.

Veamos un ejemplo para entender mejor la definición de Cantor.

Suponga que un día cualquiera pasa por un supermercado y decide comprar 7 peras. Cuando se dirige al lugar donde están ubicadas, sin esfuerzo alguno las toma ¿pero cómo logro escoger la cantidad deseada? Es muy sencillo, lo que hizo fue asociar a cada pera un número natural hasta llegar a 7. En lenguaje formal se dice que estableció una biyección entre el conjunto de peras y el conjunto de los números naturales hasta el número 7. La idea de Cantor fue extender esta noción de igual cantidad de elementos entre dos conjuntos al caso de conjuntos infinitos.

Por ejemplo, se puede establecer una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares, de la siguiente manera.

Ejemplo.

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots\ldots. \end{array}$$

En consecuencia se puede afirmar que el número de elementos (para Cantor el cardinal) del conjunto de los números naturales es infinito; más aún que los dos conjuntos representan el mismo infinito ya que poseen la misma cantidad de elementos.

En otras palabras, generar una biyección entre dos conjuntos es una forma de verificar si tienen la misma cantidad de elementos; representan el mismo infinito. ¿Entonces existe un orden entre infinitos? La respuesta es sí, pero el tema se sale del objetivo de este trabajo, el lector que lo desee puede ilustrarse más sobre ello a través de un libro que trate sobre el tema o puede consultar en el siguiente enlace http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/7103/1/7412-0430850.pdf

4.3. PUENTES DE KÖNISBERG

El tercer problema es conocido como el teorema de Euler y consiste en deducir una regla general que permita establecer cuándo un grafo tiene un circuito euleriano o un camino euleriano. (Ver 6.3).

A través de este problema, pretendo que los estudiantes después de analizar ciertos casos particulares, logren establecer una regla general que permita decidir, bajo qué condiciones es posible trazar el recorrido de una figura, que pueda ser representada utilizando una cantidad finita de vértices y aristas, sin levantar el lápiz del papel y trazando cada arista una única vez. Además que apliquen dicha regla a casos como, el caso de las joyas de la condesa, los puentes de Manhattan y los puentes de Königsberg (Ver 6.3). Por otra parte, iniciar a los estudiantes en nociones que posiblemente nunca antes han escuchado como la de grafo, camino euleriano, circuito euleriano, entre otras.

Ahora bien, el problema de los puentes de Könisberg dio lugar a lo que se conoce como el teorema de Euler. Por tal motivo, para entrar en contexto, en las siguientes líneas trataré sobre este.

Primero que todo, el problema de los puentes de Königsberg fue formulado en el siglo XVIII y no parecía pertenecer a ninguno de los campos de estudio de las ciencias con mayor prestigio de aquella época, por ejemplo en el campo de las matemáticas no estaba relacionado con la geometría analítica, con el análisis, o con el álgebra abstracta, entre otras, sin embargo Leibniz había presentado un tipo especial de geometría a la que llamó la "geometría de la posición"hoy conocida como topología, y fuese a través de ella que el matemático Euler diera solución a este. En palabras de Euler, "Este problema es tan banal, pero me pareció digno de atención el hecho de que ni la geometría, ni el álgebra, ni siquiera el arte de contar es suficiente para resolverlo".

A decir verdad este problema fue el que dio origen a la hoy conocida teoría de grafos.

El problema es conocido comúnmente como el problema de los puentes de Königsberg y debe su nombre a Königsberg, el antiguo nombre que recibía la ciudad rusa de Kaliningrado, que durante el siglo XVIII formaba parte de Prusia Oriental, como uno de los ducados del Reino de Prusia.

Por aquel entonces el problema estaba formulado en los siguientes términos:

"En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla A, llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes, a, b, c, d, e, f y g, que cruzan los dos brazos del río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes una sola vez". [Tomado de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/15-1-o-p.html].

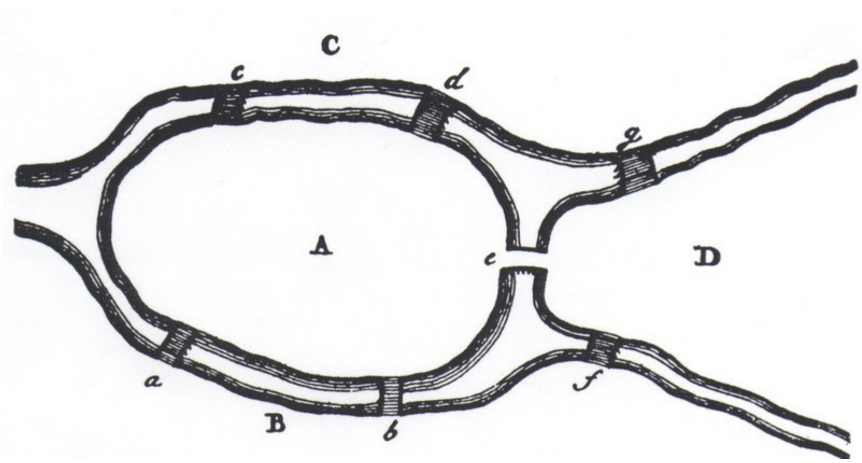


Figura 1

Muchos negaron la posibilidad de llevar a cabo dicho recorrido, otros lo dudaron, pero nadie sostenía que fuese posible hacerlo. Este problema podría ser solucionado de una manera poco "elegante" realizando una tabla que contenga todos los posibles recorridos y luego revisar si alguno cumple lo exigido, pero esta tarea es bastante ardua y no serviría si se quisiese generalizar el resultado a una cantidad cualquiera de puentes y una distribución cualquiera del rio. Esto motivó a Euler a buscar un método más "simple" que mostrase solamente si era posible llevar a cabo el paseo con las condiciones indicadas.

El 26 de agosto de 1735 en un artículo llamado "Solutio problematis and geometriam situs pertinentis" Euler presentó la solución al problema de los puentes de Königsberg, pero además, la solución al problema más general, que consistía en realizar un paseo con las mismas condiciones que antes, pero contemplando cualquier distribución de los brazos del rio y cualquier cantidad de regiones conectadas a través de puentes. Sin embargo este artículo fue publicado solo hasta el año 1741.

Este artículo está dividido en 21 párrafos numerados, en los que Euler paso a paso muestra como construyó la solución del problema. En lo que sigue trataré de exhibir de forma breve, las ideas más esenciales que utilizó Euler para deducir bajo qué condiciones era posible realizar o no un recorrido con las características anteriormente mencionadas. A medida que avance en mí cometido, colocaré en negrilla las estrategias que empleó Euler para abordar el problema.

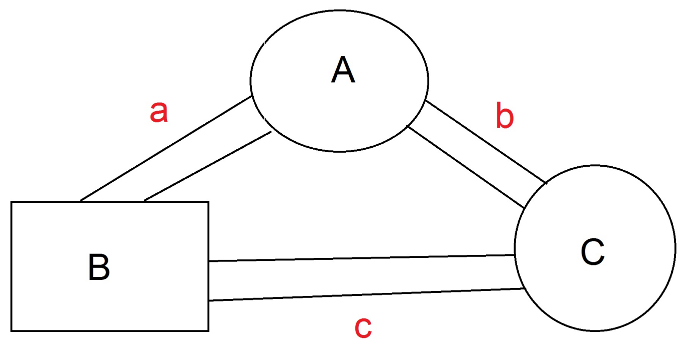
En primer lugar, Euler formuló el problema en forma general; explícitamente esto fue lo que planteó:

"Dada una configuración cualquiera del río y de los brazos en los que pueda dividirse, así como un número cualquiera de puentes, determinar si es posible o no cruzar cada puente exactamente una vez".
Aquí podemos ver como Euler fue un poco más "ambicioso" y se propuso resolver un problema que contemplara todos los casos posibles; La **generalización** característica que poseen algunos matemáticos.

Luego de generalizar el problema, Euler conservó sus partes más esenciales, dejando de lado todo posible "adorno inoficioso", que pudiera existir. Para lograrlo, **introdujó una notación adecuada** que permitiera representar la situación de una forma más "simple". A saber, consideró solo los puentes y las regiones que quedaban separadas por los brazos del rio. Los puentes los designo con las letras minúsculas a, b, c,... etc y las regiones por las letras mayúsculas A, B, C,... etc

Enseguida de esto, Euler menciona que solo va a utilizar letras mayúsculas para designar el paso de una región a otra, verbigracia, si se desea pasar de la región A a la región B, esto se representará como AB indicando que se visitó primero A y luego B. Posterior a ello Euler empieza a analizar cuantos puentes son necesarios para pasar de una región a otra, en términos de las veces que aparezcan las letras mayúsculas. Por ejemplo, si se tiene la siguiente secuencia, ABCD, se tiene que una persona paso de la región A a la B, luego de la B a la C y por último paso de la C a la D. Puede corroborarse observando la figura 1, que para el recorrido ABCD, solo se a atraviesan tres puentes. Después de **explorar** varias situaciones como la anterior, Euler **procedió por razonamiento inductivo** y logro concluir lo siguiente:

Si tenemos una cantidad finita n de puentes y deseamos representar el recorrido pedido, siempre va a ser necesario utilizar $n + 1$ de las letras empleadas para designar las regiones. Verbigracia, supongamos que tenemos tres regiones A, B y C como en la siguiente figura, además que las letras a, b y c representan los puentes que las unen.



Podemos realizar el siguiente recorrido, partimos de la región B, pasamos a la región A luego a la región C y para finalizar nuevamente a la región B. Que siguiendo a Euler, puede representarse como BACB, vemos como se cumple la tesis de Euler, pues a pesar de que tenemos tres puentes nada más n=3, se requieren n+1=3+1=4 letras para representar el trayecto.

Ahora bien, bajo este punto de vista y considerando que en el problema de los puentes de Königsberg se tienen siete puentes, entonces la cantidad de letras que deben utilizarse para describir dicho paseo serían ocho. Esta conclusión es una de las más valiosas a las que pudo haber llegado Euler, pues a partir de ella pudo dar solución al problema de los puentes de Königsberg.

Por otra parte, otro aspecto importante que tuvo en cuenta Euler fue el número de puentes que conducen a cada región designada con una letra mayúscula, ya que a través de ello pudo determinar el número de veces que dicha letra se repetiría en la representación del trayecto. Euler obtuvo la siguiente conclusión respecto a esto:
"Si el número de puentes que conducen a una determinada región es impar, entonces el número de veces que se repetirá la letra que represente esta región será el equivalente a sumar 1 a este impar y luego dividirlo entre dos". Por ejemplo, en el problema de

los puentes de Königsberg, hay 5 puentes que conducen a la región A (ver figura 1), luego la cantidad de veces que aparecerá esta letra en la representación del recorrido se calcula de la siguiente manera,
Número de veces que estará la letra A= $\frac{5+1}{2}$, o sea 3 veces.

Y siguiendo ese orden de ideas,

Número de veces que estará la letra B= $\frac{3+1}{2}$, o sea 2 veces.

Número de veces que estará la letra C= $\frac{3+1}{2}$, o sea 2 veces.

Número de veces que estará la letra D= $\frac{3+1}{2}$, o sea 2 veces.

Recordemos que en el problema de los puentes de Königsberg el número de regiones es cuatro y el número de puentes es siete.

Ahora bien, según los cálculos obtenidos tenemos que el número de letras que deben emplearse para representar el recorrido utilizando cada puente una vez es 3+2+2+2=9, sin embargo líneas arriba concluimos que para poder realizar el recorrido son necesarias solamente ocho letras, por lo tanto dicho trayecto no puede realizarse y el problema de los puentes de Königsberg es irresoluble.

Veamos a través de la siguiente tabla, algunas de las ideas que pueden haber conducido a Euler, a obtener la solución al problema general que líneas más arriba citamos. Para el problema de los siete puentes de Königsberg tenemos los siguientes datos:

Número de puentes	Número de puentes + 1
7	8

Región	Puentes	N° de veces letra que representa la región
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
Total	14	9

En la anterior tabla, la casilla puentes ubicada en la segunda columna indica la cantidad de puentes que conducen a cada región, la celda N° de veces letra que representa la región, da información de la cantidad de veces que aparecerá la región en la representación del recorrido. Por otro lado, la celda total es el resultado de sumar verticalmente todos los datos de la columna 2 y la columna 3 respectivamente.

Ténganse en cuenta las siguientes observaciones:

1. El número de puentes coincide con el total de la columna puentes, dividida por 2, es decir, $7 = \dfrac{14}{2}$.
2. El total de la tercera columna es 9, distinto de la cantidad de puentes+1= 8.

A través de la segunda observación, Euler concluyó que si el total de la tercera columna excede en uno o más la cantidad de puentes+1, entonces el recorrido no puede realizarse.

Después de analizar y explorar diferentes situaciones, Euler obtuvo lo siguiente:

Si $M :=$ Número de veces que aparecerá la letra de una región en el recorrido y n el número de puentes que conducen a la región. Entonces,

$$M = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par y no se inicia el recorrido en la región.} \\ \dfrac{n}{2}+1 & \text{si } n \text{ es par y se inicia el recorrido en la región.} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar y se inicie o no el recorrido en la región.} \end{cases} \tag{1}$$

Veamos por medio de la siguiente tabla en forma abstracta cuando un recorriendo con las características pedidas puede realizarse.

Considérese que se tienen las regiones $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ donde $n \in \mathbb{N}$ y que a cada región conducen un número par de puentes. En la siguiente tabla se organiza de manera ordenada esta información.

Región	Puentes	N° de veces letra que representa la región
A_1	$2k_1$	k_1+1
A_2	$2k_2$	k_2
A_3	$2k_3$	k_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	$2k_n$	k_n
Total	$2(k_1+k_2+\cdots+k_n)$	$k_1+1+k_2+\cdots+k_n$

La tercera columna se obtuvo a través de (1), suponiendo que el recorrido se inicia en la región A_1. Ahora bien, el total de la columna dos dividido entre 2 nos da la cantidad de puentes, luego se tienen $k_1+k_2+\cdots+k_n$ puentes, líneas arriba dijimos que para que el recorrido pudeda llevarse acabo el total de la tercera columna tiene que exceder en uno la cantidad total de puentes. En nuestro caso el total de la tercera columna es $k_1+1+k_2+\cdots+k_n = k_1+k_2+\cdots+k_n+1$, es decir el recorrido puede realizarse sin ningún problema.

Ahora supongamos que tenemos las mismas regiones que antes, pero que a la región A_1 conducen una cantidad impar de puentes y a las regiones $A_2, A_3 \ldots A_n$ conducen una cantidad par de puentes. Si realizamos la tabla con esta información obtenemos:

Región	Puentes	N° de veces letra que representa la región
A_1	$2k_1+1$	k_1+1
A_2	$2k_2$	k_2
A_3	$2k_3$	k_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	$2k_n$	k_n
Total	$2(k_1+k_2+\cdots+k_n)+1$	$k_1+1+k_2+\cdots+k_n$

La tercera columna se obtuvo a través de (1), suponiendo que el recorrido se inicia en la región A_1. Ahora bien, el total de la columna dos dividido entre 2 nos da la cantidad de puentes, luego se tienen $k_1+k_2+\cdots+k_n+\frac{1}{2}$ puentes, líneas arriba dijimos que para que el recorrido pudiese llevarse acabo el total de la tercera columna tiene que exceder en uno la cantidad total de puentes. En nuestro caso el total de la tercera columna es $k_1+1+k_2+\cdots+k_n = k_1+k_2+\cdots+k_n+1$, es decir el recorrido no puede realizarse.

Ahora supongamos que tenemos las mismas regiones que antes, pero que a la región A_1 y A_2 conducen una cantidad impar de puentes y a las regiones $A_3, A_4 \ldots A_n$ conducen una cantidad par de puentes. Si realizamos la tabla con esta información obtenemos:

Región	Puentes	N° de veces letra que representa la región
A_1	$2k_1+1$	k_1+1
A_2	$2k_2+1$	k_2+1
A_3	$2k_3$	k_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	$2k_n$	k_n
Total	$2(k_1+k_2+\cdots+k_n)+2$	$k_1+1+k_2+1+\cdots+k_n$

La tercera columna se obtuvo a través de (1), suponiendo que el recorrido se inicia en la región A_1. Ahora bien, el total de la columna dos dividido entre 2 nos da la cantidad de puentes, luego se tienen $k_1+k_2+\cdots+k_n+1$ puentes, líneas arriba dijimos que para que el recorrido pudiese llevarse acabo el total de la tercera columna tiene que exceder en uno la cantidad total de puentes. En nuestro caso el total de la tercera columna es $k_1+1+k_2+1+\cdots+k_n = k_1+k_2+\cdots+k_n+2$, es decir el recorrido puede realizarse, ya que la cantidad de puentes es $k_1+k_2+\cdots+k_n+1$, luego la cantidad de puentes+1 es igual a $k_1+k_2+\cdots+k_n+1+1{=}k_1+k_2+\cdots+k_n+2$.

Explorando las diferentes posibilidades que pueden darse para la cantidad de puentes que conducen a una región, Euler pudo concluir que solo es posible realizar el recorrido cuando a todas las regiones conducen un número par de puentes o cuando a dos regiones conducen una cantidad impar de puentes y a las restantes una cantidad par de puentes. En los demás casos el recorrido no puede efectuarse.

En los anteriores párrafos, pueden observase algunas de las características de como procede un matemático ante un problema, como piensa, como actúa frente a este.

Por último, en la reconstrucción de la solución del problema de los puentes de Könisberg que he esbozado, pueden reconocerse algunas de las estrategias que Polya recoge en su libro como plantear y resolver problemas, tales como: la generalización, la introducción de una notación adecuada, la exploración del problema, el razonamiento inductivo, entre otras.

5. ACTIVIDADES

5.1. TRUCO DE MAGIA

El juego consiste en adivinar números entre 0 y 63.

Para hacerlo necesitaras estas cartas.

CARTA 1							
1	9	17	25	33	41	49	57
3	11	19	27	35	43	51	59
5	13	21	29	37	45	53	61
7	15	23	31	39	47	55	63

CARTA 4							
8	12	24	28	40	44	56	60
9	13	25	29	41	45	57	61
10	14	26	30	42	46	58	62
11	15	27	31	43	47	59	63

CARTA 2							
2	10	18	26	34	42	50	58
3	11	19	27	35	43	51	59
6	14	22	30	38	46	54	62
7	15	23	31	39	47	55	63

CARTA 5							
16	20	24	28	48	52	56	60
17	21	25	29	49	53	57	61
18	22	26	30	50	54	58	62
19	23	27	31	51	55	59	63

CARTA 3							
4	12	20	28	36	44	52	60
5	13	21	29	37	45	53	61
6	14	22	30	38	46	54	62
7	15	23	31	39	47	55	63

CARTA 6							
32	36	40	44	48	52	56	60
33	37	41	45	49	53	57	61
34	38	42	46	50	54	58	62
35	39	43	47	51	55	59	63

a). Pídele a un compañero que piense un número entre 0 y 63.

b). Toma las 6 cartas y de una en una, ve preguntándole si su número está allí.

Observación: En los anexos se encuentran los materiales necesarios para llevar a cabo la actividad.

5.2. EL HOTEL INFINITO DE HILBERT

El Hotel infinito de Hilbert, es una construcción abstracta que inventó el matemático David Hilbert con la intención de exhibir de forma simple e intuitiva, hechos paradójicos[4] que pueden encontrarse cuando se trabaja alrededor del infinito numerable.

Hilbert describe por medio de este hotel, cuatro paradojas[5] relacionadas con el infinito numerable con las que pudo haberse encontrado Cantor.

En este hotel las habitaciones son inagotables, existen tantas como números naturales hay y a cada habitación se le asigna uno de ellos. El "origen"de este hotel se remonta a cierto dialogo entre dos grandes hoteleros que un día cualquiera tuvieron la gran idea de construir un hotel que fuese el más grande del mundo y que además garantizara una habitación a cada nuevo huésped que arribara a él. Pensaron los hoteleros, el hotel no puede tener una cantidad finita n de habitaciones, ya que otros empresarios agregando una habitación más, lograran un hotel más grande que el nuestro, un hotel de $n + 1$ habitaciones. Por tal motivo, establecieron que el hotel debía tener una cantidad infinita de habitaciones, con lo cual "ningún" otro hotel podría superar su tamaño.

Sin embargo, en un hotel de infinitas habitaciones no siempre todo es color de rosa. Tan pronto se abrieron sus puertas la gente comenzó a abarrotarlo y pronto se encontraron con que el hotel se encontraba lleno de infinitos huéspedes. Para evitar ciertos problemas que pudieran surgir, los hoteleros establecieron que los huéspedes tendrían que cambiar de habitación cada vez que se les pidiera.

Nota: En los anexos se encuentran los materiales necesarios para llevar a cabo la actividad.

[4] `http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja`

[5] 1) El hotel más grande del mundo, 2) infinito más uno, 3) dos infinitos, 4) infinito número de infinitos.

5.3. EL TEOREMA DE EULER

Esta actividad fue tomada de los materiales curriculares que ha recopilado el proyecto alianza para el aprendizaje de ciencias y matemáticas de Puerto Rico (ALACiMa) y puede consultarse en el enlace: `http://alacima.uprrp.edu/alfa/materiales%20curriculares/MatematicaSoluciondeProblemas/SoluciondeProblemasMatematicos.pdf`

Entre las características de esta actividad se destaca que tiene múltiples aplicaciones prácticas. Provee modelos que sirven para resolver problemas reales en muchas áreas de las ciencias sociales y la comunicación. Además, es accesible a todos los estudiantes. No tiene prerrequisitos y puede incorporarse fácilmente en diversos momentos de cualquier curso. Unos pocos elementos de Aritmética y de Geometría es todo lo que se necesita. Reta y motiva a todos los estudiantes. También se presta para implementar muchas de las recomendaciones de los estándares en términos de exploración, experimentación y resolución de problemas.

Observación: En los anexos se encuentran los materiales necesarios para llevar a cabo la actividad.

PROCEDIMIENTO

1. La clase debe comenzar con la lectura o la representación del caso de la desaparición de las joyas de la condesa. Después de esta lectura, el maestro debe entregar el mapa y recalcar la importancia de responder a las dos preguntas que aparecen al final de la lectura. Debe obtener las respuestas de todos los estudiantes y hacer una tabla con ellas. Esta tabla debe guardarse para compararla con las respuestas que se obtendrán cuando termine la actividad.

   Materiales:

   - El caso de las joyas de la condesa
   - El mapa de Sherlock

2. Debe haber un tiempo corto de clase dirigida en que el maestro explique a los estudiantes el significado del vocabulario básico que se utilizará en la actividad. Debe recalcar que un camino euleriano implica que el grafo puede trazarse sin levantar el lápiz del papel y sin trazar dos veces ninguna arista y que un circuito

debe terminar en el mismo vértice en que comienza.

Materiales:

- Caminos y circuitos

3. A continuación, los estudiantes deben trabajar en grupos y el maestro moverse entre ellos para aclarar y responder preguntas. Sería conveniente aprovechar un momento cuando los estudiantes estén trabajando con la tabla para insistir sobre la definición de "vértice de grado impar".

   Materiales:

   - Caminos y circuitos eulerianos

   - El teorema de Euler

Grafo #	Camino Euleriano	Circuito Euleriano	Vértices de grado impar
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1	sí	no	2
2	sí	sí	0
3	no	no	4
4	no	no	no conectado
5	no	no	4
6	sí	no	2
7	sí	sí	0

Ejemplo de posible tabla

4. Cuando los estudiantes terminen la tabla y hayan contestado las preguntas, el practicante debe construir poco a poco el teorema de Euler utilizando la contribución de todos los grupos. Este paso es el más importante, pues es la generalización del proceso inductivo que han llevado acabo los estudiantes. Deben ver el teorema como producto de su esfuerzo de razonamiento en común.

TEOREMA DE EULER

Un grafo conexo tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices son de grado par.

Un grafo conexo tiene un camino euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

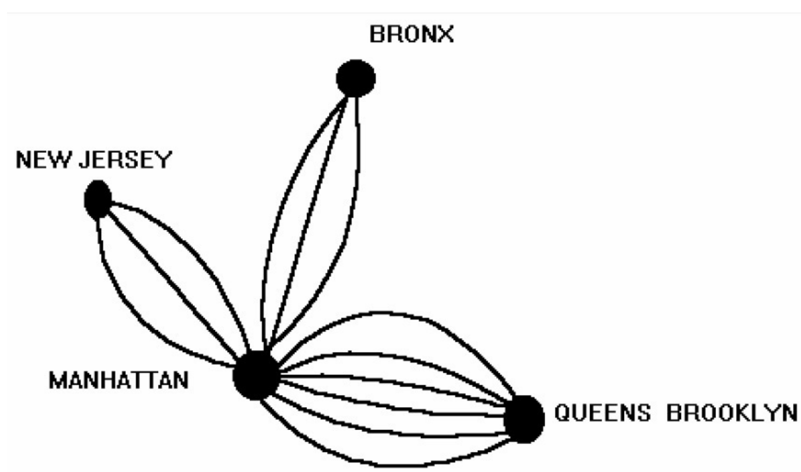
5. Una vez producido el teorema, los estudiantes deben aplicarlo a una situación real como los puentes de Koninsberg u otra más conocida. Es importante que en este momento los estudiantes puedan traducir la situación real a un esquema de grafos. Este trabajo se debe llevar acabo en grupos con la supervisión del practicante.

   Materiales:

   - Los puentes de Manhattan

6. Cada grupo debe presentar a la clase su construcción del grafo y la solución del problema. El practicante debe actuar como moderador de la discusión hasta que la clase se decida por el grafo correcto y la justificación adecuada al problema.

Ejemplo de grafo para los puentes de Manhattan



7. En este momento los grupos deben de nuevo considerar el mapa de Sherlock y decidir dónde están las joyas y quiénes son los posibles culpables. El practicante debe pedirles que justifiquen su respuesta con lo que han aprendido.

8. Cada grupo debe presentar sus respuestas y justificaciones al resto de la clase. El maestro debe aprovechar la ocasión para comparar las nuevas respuestas con las que se obtuvieron al principio y recibir una pequeña evaluación oral de la actividad.

6. BITACORAS

6.1. SISTEMA BINARIO: REPRESENTACION Y ALGUNAS PROPIEDADES

Minutos antes de entrar a lo que sería mi primera sesión, pensaba y pensaba, en cuál sería la mejor forma de presentarme ante el grupo de estudiantes, haciendo alusión al refrán que dice que "la primera impresión es la que cuenta". ¿Qué palabras escoger para expresarme ante ellos y lograr romper el hielo que sin duda alguna, siempre surge cuando dos partes desconocidas se encuentran por primera vez? La verdad planeé muchas cosas que a la hora de la verdad, cuando estaba enfrente de ellos olvide por completo. Sin embargo, para mi fortuna estaba conmigo mí compañero de práctica Leonel Meneses, quien con consejos logro disipar los nervios que amenazaban con invadirme, por eso y por acompañarme en todas las sesiones, estaré siempre agradecido con él.

Ya con los nervios superados nos presentamos ante el grupo de estudiantes, dimos nuestros datos personales y luego indicamos cuál sería la metodología de trabajo a seguir a lo largo de las sesiones que nos ocuparían. Para ello, realicé una breve introducción a las dinámicas con la que trabajaríamos en cada una de las sesiones y comenté de forma sintética de cuales problemas nos ocuparíamos a lo largo de estas.

En esta primera sesión, la cantidad de estudiantes con la que nos encontramos en el aula era la tercera parte de la registrada en la lista de asistencia, por tal motivo decidimos avanzar con calma para que los ausentes lograran ponerse al día sin mayores complicaciones. Para llevar un control de la asistencia, mi compañero roto una hoja para que se registraran los estudiantes presentes, luego de ello dimos inicio a la primera actividad, a saber, el truco de magia que consiste en un arreglo de los números del 0 al 63 ubicados en seis cartas. Escogí esta actividad como la número uno, porque se presta para interactuar con los estudiantes, permitiendo romper un poco el hielo, además porque consideré que con ella llamaría su atención.

Al momento de iniciar la actividad contábamos con 20 estudiantes que libremente conformaron grupos de 3 o 4 personas, listos los grupos entregamos a cada uno de ellos las cartas que permitirían llevar acabo el juego. Estos después de analizar las cartas y jugar unos minutos, notaron que para adivinar el número que un compañero había pensado, bastaba con sumar el primer número de cada una de las cartas donde este estuviese. En realidad lo notaron muy rápido.

Mientras los alumnos intentaban justificar porque a través del procedimiento anterior siempre era posible obtener el número que un compañero pensara, mi colega de práctica y yo nos paseábamos por el salón de grupo en grupo dándoles pequeñas sugerencias o lanzando preguntas sutiles que los aproximaran a deducir porque funcionaba dicho método.

Las sugerencias eran por decir algo, analicen la forma en que están distribuidos los números en las cartas, ¿pueden encontrar algún patrón o secuencia que sigan los números? Entre otras. La intención era que los alumnos identificaran de qué forma intervenía el número dos en la ubicación de los números en las cartas.

Estas preguntas y sugerencias dieron como resultado que:

Un grupo se percatará de que en la primera carta solo había números impares, así como que en la segunda carta los números avanzaban unos en una unidad y otros en dos, siguiendo como una especie de secuencia.

Otro grupo tuvo un intento de solución y lo que planteó fue lo siguiente: Se deben tomar todas las cartas y de una en una preguntar a la persona si su número esta en ella, luego separar las cartas donde esta dijo que su número aparece y buscar en ellas un número común a todas, para ellos este sería el número buscado. El problema del razonamiento anterior es que al hacerlo no siempre coincidía con el número que una persona hubiese elegido de entre 0 y 63.
Algunos grupos notaron que para obtener el número incógnito, se estaban sumando potencias del número 2, pero les fue "imposible" deducir como hacerlo, solo la intuición les dictaba que era así. Además de ello, observaron que el paso del 1 de la primera carta al 2 de la segunda carta se podía escribir como $2 \cdot 1$ y luego en ese orden de ideas, que el 4 de la tercera carta era el 2 de la segunda carta aumentado en 2 y así mismo sucedía con el 8, el 16 y el 32, conjeturaron que ese número primero de cada carta era como que indicaba cuantas combinaciones se podían obtener.

Al llegar a este momento se les sugirió a los estudiantes que pensaran en cómo se representa un número entero en el sistema decimal, seguido de las preguntas ¿conoces otra forma de representar un entero que no sea en el sistema decimal? ¿Crees que sea posible escribir cualquier número entero utilizando solo el número 1 y el 0?

Algunos estudiantes recordaron que en cursos previos habían visto algunos sistemas de representación para los números, sin embargo no recordaban si entre ellos estaba uno donde se emplearan solo dos símbolos.

Después de dedicar una parte considerable de la sesión para que los estudiantes encontraran una forma de justificar el método, un integrante de cada grupo salió frente al tablero a exponer las ideas que en conjunto utilizaron en la búsqueda de la solución, de esta manera se logró que el grupo prestara más atención, pues entre estudiantes los lazos de confianza suelen ser más fuertes.

Después de esto y al ver que los estudiantes no dieron en el "clavo" con el sistema binario, decidimos dividir el tablero en dos; en una parte se recordó junto con los estudiantes cómo funciona el sistema de numeración decimal, es decir, se les comentó que en dicho sistema solo se utilizan los dígitos del 0 al 9 para representar cualquier número con los que naturalmente estamos acostumbrados a trabajar. También se hizo mención a que este es un sistema posicional y se recordó cual es el nombre que recibe cada una de estas posiciones de derecha a izquierda, a saber, unidades, decenas, centenas, etc. . . ,

Además les recordamos como a través de potencias del número 10 y los dígitos se pueden representar también los números.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 275 &= 200 + 70 + 5 \\ &= 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Quizás donde hubo algún inconveniente fue en 10^0 pero tras de una breve explicación, evocaron, que todo número elevado a la cero es igual a 1.

Luego de trabajar con el sistema decimal, pasamos a la otra parte del tablero donde solo estaba escrito como título, sistema de numeración binario, ¡Ah palabra extraña para ellos!, ¿binario?, nos detuvimos en ese término unos minutos y explicamos que bi hace referencia a dos, con lo cual ellos notaron que se trataba de un sistema que utilizaba dos elementos.

En el sistema decimal las cifras tienen una posición que indica el número de unidades, el número de decenas, el número de centenas, etc. Por ejemplo 321 equivale a 1 unidad, 2 decenas y 3 centenas.

El sistema binario funciona igual sólo que en lugar de tener 10 dígitos, tenemos 2. Por lo tanto la posición de las cifras (ceros y unos) indican: el número de unidades, la cantidad de doses, la cantidad de cuatros, la cantidad de ochos y así sucesivamente. Por ejemplo: 11011, indica que tenemos un uno, un dos, cero cuatros, un ocho y un dieciséis , en total el valor de 27.

En el tablero lo hicimos así:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
			1	1	0	1	1

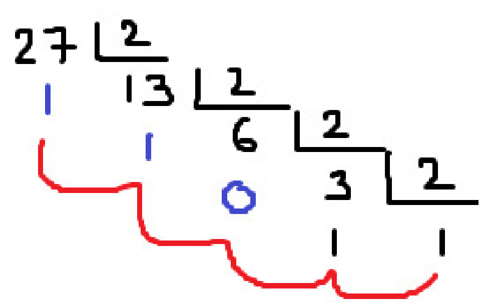
Con ayuda de la tabla anterior, les explicamos a los estudiantes una forma de convertir un número de binario a decimal y viceversa.

Así, para el 11011, tenemos que el primer uno ocupa las unidades correspondientes al 2^0, luego tenemos $1 \cdot 2^0$, similar a como sucedía en el caso con el sistema decimal que vimos más arriba. Por lo cual el 11011 escrito completamente en binario quedaría:

$$\begin{aligned} 11011_2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 8 + 2 + 1 \\ &= 27_{10} \end{aligned}$$

O si se quiere, solo se van sumando las potencias de 2 donde aparezca un 1, las casillas que tienen cero debajo de una potencia no afectan el resultado.

Posterior a esto presentamos el método de divisiones sucesivas entre el número dos, para pasar un número representado en el sistema decimal al sistema binario. Tomemos como ejemplo el número 27,



Finalizada la presentación de los dos métodos de cómo convertir un número de una base a otra, se dieron números representados en las dos bases a los diferentes grupos, para que estos los pasaran de binario a decimal o viceversa.

Ahora bien, en el desarrollo de la tarea propuesta, se evidenció que a los estudiantes el método de divisiones sucesivas no les llamó la atención, en su lugar prefieren utilizar el primer método y la tabla para convertir un número de una base a otra. En especial había un chico que tenía una agilidad mental y facilidad en el dominio de los números y realizaba los cálculos muy rápido.

También se dedicaron algunos minutos, para explicar a los alumnos como se suma, resta y multiplica en binario. Para ello presentamos a los estudiantes las reglas que usualmente se asocian respectivamente a cada operación. El lector puede encontrar estas operaciones en la metodología con un respectivo ejemplo de cada una. Después de explicar esto, se dieron diferentes números en binario a los chicos para que los sumaran, los restaran y multiplicaran. En ocasiones les pedimos que salieran al tablero y desarrollaran una de las operaciones antes indicadas.

En esta parte debemos resaltar que las operaciones de sumar y multiplicar en binario fueron asimiladas rápidamente por los estudiantes, sin embargo la operación de restar en binario presentó algunas dificultades, por lo que fue necesario dedicarle un poco más de tiempo. Guiamos al estudiante diciéndole que pensara en forma análoga en cómo se realiza la operación en el sistema decimal, advirtiéndole que no debía olvidar llevar o acarrear un 1 cada vez que tomara cantidades prestadas. Después de practicar unos minutos, los estudiantes ganaron agilidad en realizar la operación de restar en binario.

Antes de finalizar la actividad, presentamos un video que lleva por título números binarios y que puede conseguirse en https://www.youtube.com/watch?v=KySjjvBEDaA. En él se muestran algunas de las aplicaciones que el sistema de los números binarios tiene en campos de diversas ciencias.

El video logro sorprender a los alumnos, pues no esperaban que algo tan "básico" como el sistema de los números binarios estuviera tan presente en su diario vivir sin que ellos lo notaran.

Finalmente y para concluir la sesión dimos un "abre bocas"de lo que sería la actividad siguiente, el hotel de Hilbert.

6.2. UN HOTEL BASTANTE EXTRAÑO

En la sesión anterior se había comenzado a hablar un poco sobre el concepto de infinito y planteado el primer problema que aparece en la hoja de actividad, es decir, si en un hotel de infinitas habitaciones, se encuentran todas ocupadas y llega un nuevo huésped, ¿cómo lograr ubicarlo en una habitación del hotel?, teniendo presente que los inquilinos siempre deberán acceder a los requerimientos que se les impongan. Los alumnos después de analizar un rato el problema, empezaron a dar ideas para llegar a una solución, una de ellas fue correr el último huésped hasta la última habitación del hotel y así abrirle campo al nuevo que llegaba. Se ve como la intuición de los alumnos les dice que la solución se consigue a partir de mover a alguien en el hotel. Cuando plantearon su solución, se les hizo la observación de que el hotel era infinito y no podía haber un último huésped, por lo cual retomaron el estudio del problema y no bastaron sino unos minutos para que dijeran que sí eran infinitas las habitaciones, entonces podían mover cada huésped a la habitación siguiente, argumentando que se podía hacer ya que sí no hubiese ultima habitación, tampoco hubiese ultimo inquilino y por lo tanto siempre sería posible mover cualquiera de ellos a una habitación, puesto que son infinitas. Es así como los jóvenes obtuvieron la solución del inciso a), ya que al correr todos los huéspedes una habitación, dejaron libre la primera y fue el lugar donde ubicaron al inquilino que llegaba.

Pasando a la parte b), los alumnos leyeron el enunciado del problema y se les pidió que escribieran todas las ideas que creyeran nos acercarían a la solución, o mejor aún si creían tener una solución la redactaran y la socializaran al grupo, con la intención de que los demás la escucharan y todos en grupo construyéramos la mejor solución posible. En ese instante, uno de los alumnos dijo "debemos compartir las soluciones, para así mejorarlas". Y efectivamente fue lo que sucedió en el transcurso de la sesión.

La primera idea que manifestó un grupo, fue la de mover infinitos huéspedes, siguiendo un procedimiento similar al empleado en el punto a), la idea fue la de abrir campo a infinitos huéspedes, pidiéndole a los infinitos que se encontraban ya instalados en el hotel moverse un número de infinitas habitaciones, dejando libre un número infinito de habitaciones para los que llegaban. La segunda idea fue la de compartir habitaciones, es decir que cada uno de los infinitos huéspedes se instalara en la habitación de uno de los infinitos huéspedes que en ese momento, estaba ocupando una habitación del hotel. Otra idea fue la de meter infinitos inquilinos en una sola habitación; la habitación que habían desocupado en el inciso a), enseguida de esta idea los chicos con ayuda de su imaginación, dijeron "y si en cada habitación, dentro de ella se dispone de infinitas más habitaciones, el problema estaría resuelto”, algo así como que detrás de cada puerta de una de las habitaciones del hotel había dentro otro hotel con infinitas habitaciones. Una idea similar manifestaron unas jóvenes, que plantearon la opción de que si el hotel poseía infinitas habitaciones, entonces tenía infinitos pasillos en donde alojar a los turistas que llegaban.

Observamos cómo ante la hipótesis de estar trabajando con un hotel que sobrepasa la misma finitud del mundo en que vivimos, era de esperarse que los jóvenes dieran vía libre a su imaginación y propusieran situaciones hipotéticas, que en el propio enunciado del problema no se reconocen. A pesar de ello, mi compañero de práctica y yo, casi de forma constante sugeríamos a los alumnos que pensaran en una solución que no necesitara más de las cosas que en el enunciado se proporcionaban, advirtiéndoles que dicha solución si existía.

Después de escuchar nuestras sugerencias y haber compartido las ideas que hasta el momento habían formulado, los estudiantes con una perspectiva diferente emprendieron de nuevo la búsqueda de una óptima solución. Como resultado del ejercicio anterior, unos chicos propusieron lo siguiente, mover siempre un número $2n$ de habitaciones con n un número natural, idea que en un principio nos fue un poco confusa y de difícil interpretación. Para los jóvenes parecía ser clara, pero no encontraban la forma de lograr que nosotros captáramos lo que ellos sí, no fue sino hasta varios días después de finalizada la sesión y un análisis de las ideas que los alumnos esbozaron en sus hojas, que logramos comprender su idea; que fue esta:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
		3	4	1	2			9	10	5	6	7	8			17	18	11	12	13
1	2					7	8							15	16					

22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
14	15	16			27	28	19	20	21	22	23	24	25	26			39	40
			25	26											37	38		

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38			53	54	41	42	43	44	45
										51	52							

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
46	47	48	49	50	51	52			69	70
							67	68		

Se observa en la tabla como a través de este procedimiento, siempre quedan dos habitaciones consecutivas desocupadas, una par y una impar. Se nota como con esta idea se resuelven los incisos b) y c) de la actividad.

La parte b) se ve claramente, ya que a través de este proceso, se están desocupando infinitas habitaciones, para los nuevos huéspedes.

La parte c) también se resuelve, dado que al ser las habitaciones consecutivas, podemos dejar las habitaciones que sean un número par a una de las excursiones con infinitos huéspedes, y para la otra excusión reservamos las habitaciones impares desocupadas. Esto lo podemos hacer a través de la siguiente sucesión recursiva.

Sea $a_1 = 1 \quad$ y $\quad a_n = a_{n-1} + 2(n+1)$ con $n \geq 2$.

De tal forma que:

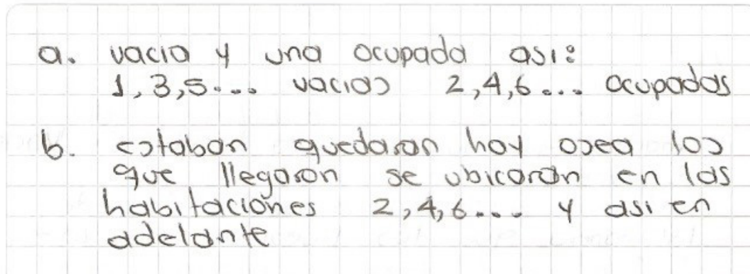
$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + 2(2+1) \\ &= 1 + 2(3) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Además, $a_3 = 7 + 2(4) = 15$, $a_4 = 25$ y así sucesivamente se pueden ubicar a los huéspedes de una excursión en las habitaciones impares desocupadas. Con una sesión similar se puede ubicar a los otros infinitos turistas en las habitaciones pares que quedaron desocupadas, solo basta definir $a_1 = 2$ y seguir un procedimiento análogo.

Si bien la idea anterior soluciona el problema, otros estudiantes lograron deducir la solución más conocida para el inciso b), es decir, enumerar las infinitas habitaciones iniciando por el uno, luego pedirle a los huéspedes cuya habitación fuera un número impar, multiplicar dicho número por 2 y dado que cualquier número impar multiplicado por dos da nuevamente un número par, entonces todas las habitaciones impares quedarían libres para los nuevos inquilinos que arribaban al hotel.

Para llegar a dicha solución se pasó por un proceso de evolución de ideas, es decir, inicialmente fueron unas chicas las que plantearon lo siguiente,

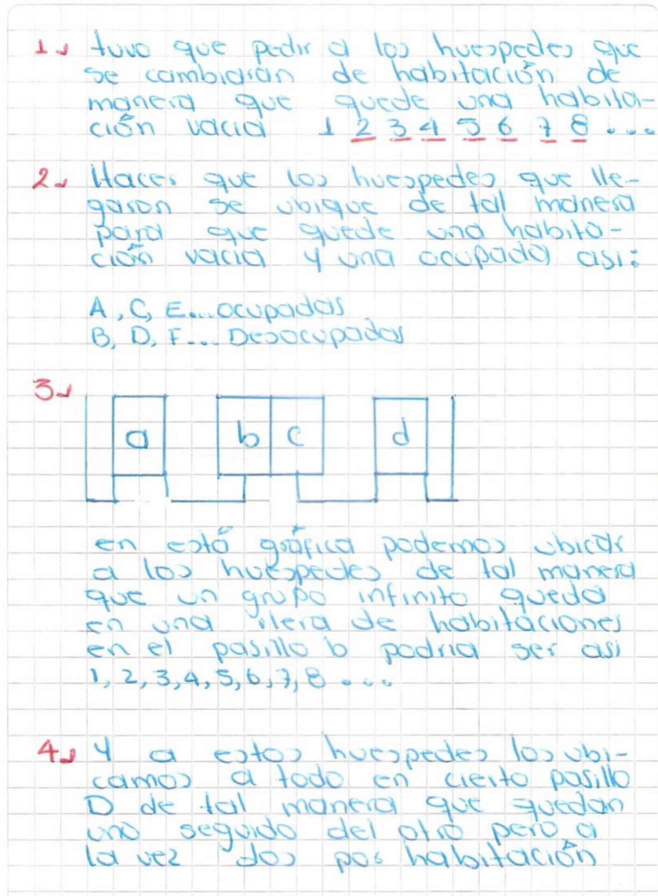
A	B	C	D	E	F	G
Ocupada	Desocupada	Ocupada	Desocupada	Ocupada	Desocupada	Ocupada



a. vacio y una ocupado asi:
1,3,5... vacios 2,4,6... ocupadas

b. estaban quedaron hoy osea los
que llegaron se ubicaron en las
habitaciones 2,4,6... y asi en
adelante

Lo que las chicas formularon se ve en el esquema de arriba, solo basta una breve interpretación. Las chicas manifestaban que si fuera posible desocupar habitaciones de forma intercalada, entonces se solucionaría el problema, pero que no sabían cómo hacerlo. Sin ir muy lejos podemos decir que esta idea es genial y fue la base para que otro grupo llegara a la solución que planteamos arriba. Lo genial de la idea, fue que ellas no necesitaron de pares e impares, solo les bastó las letras del alfabeto y un pequeño dibujo para visualizar las solución del problema.



1. tuvo que pedir a los huespedes que se cambiaran de habitación de manera que quede una habitación vacia 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

2. Hacer que los huespedes que llegaron se ubique de tal manera para que quede una habitación vacia y una ocupada así:

A, C, E... ocupadas
B, D, F... Desocupadas

3.

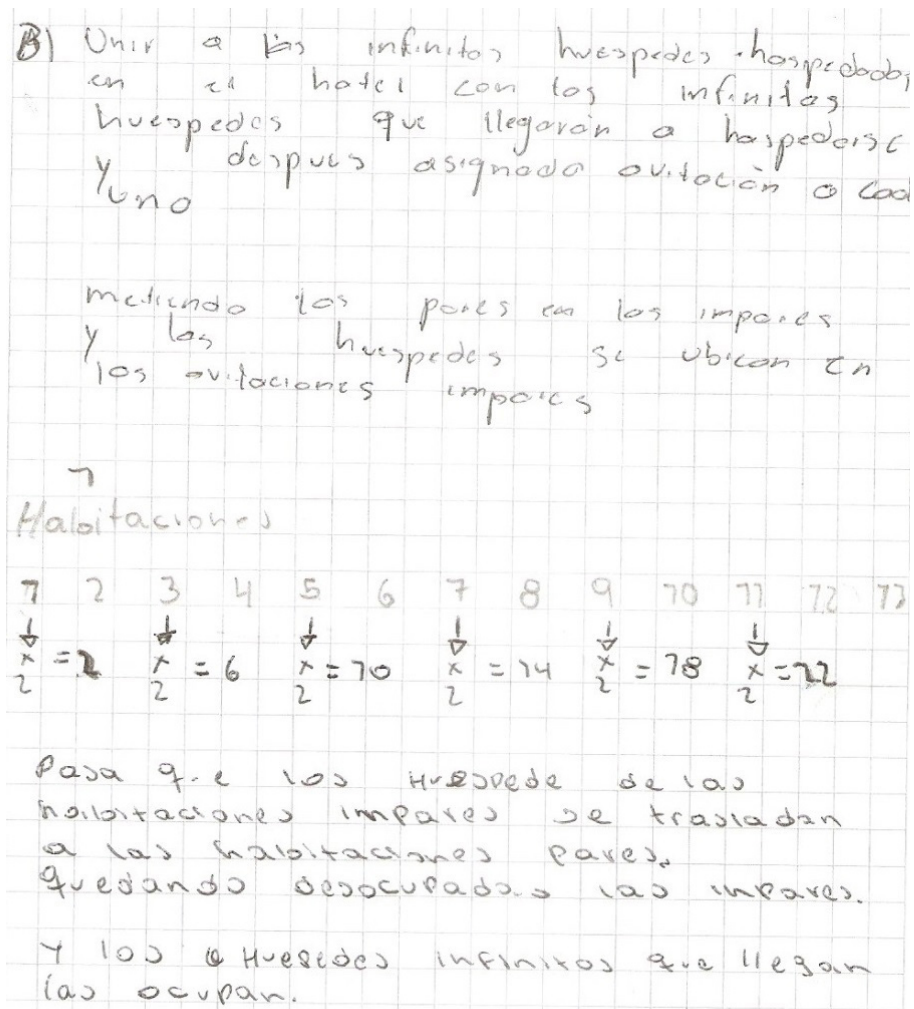
en está gráfica podemos ubicar a los huespedes de tal manera que un grupo infinito queda en una hilera de habitaciones en el pasillo b podria ser así 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ...

4. y a estos huespedes los ubicamos a todo en cierto pasillo D de tal manera que quedan uno seguido del otro pero a la vez dos por habitación

Aunque la solución propuesta por las chicas y la que líneas más arriba mencionamos difieran un poco, en el sentido de que las jóvenes desocuparon las habitaciones pares y llenaron las impares, proceso inverso al de la otra solución, debemos reconocer que quizás ese mismo proceso heurístico debió ser el que siguió el primero en obtener la solución del problema.

A pesar de que las chicas no fueron las que en última instancia formularon la solución que enunciamos más arriba, si destacamos que fueron el motor para que otro grupo redactara en términos de pares e impares la solución. Es decir, las jóvenes compartieron su idea con los demás grupos y fue entonces cuando otro grupo decidió explorar y complementar dicha idea. El nuevo grupo introdujo los pares e impares y a partir de ellos lograron desocupar las habitaciones impares, que era lo que faltaba en el planteamiento de las chicas, a saber, el cómo hacerlo.

Después de escuchar la solución formulada por este grupo, mi compañero de práctica y yo, decidimos convertir el aula de clase en un hotel, de tal forma que las sillas fueran las habitaciones y los estudiantes los huéspedes. Así los jóvenes tuvieron la oportunidad de comprobar a través de la experiencia que lo elaborado por ellos efectivamente funcionaba y las sillas cuyo estudiante tenía un número impar quedaban desocupadas. La idea de recrear el hotel en el salón de clases surgió durante el desarrollo de la actividad, no fue nada planeado con anticipación, pero debemos decir que dio muy buen resultado, más adelante les contaremos porque.


B) Unir a los infinitos huespedes hospedados en el hotel con los infinitos huespedes que llegaron a hospedarse y despues asignado avitación a cada uno

metiendo los pares con los impares y los huespedes se ubican en los avitaciones impares

Habitaciones

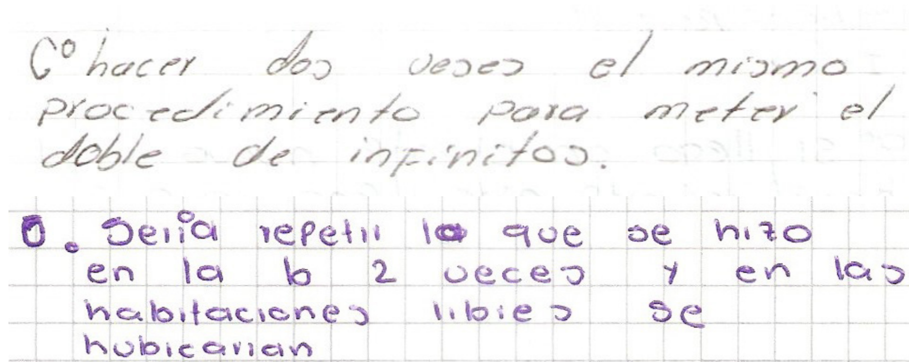
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

$1 \times 2 = 2$ $3 \times 2 = 6$ $5 \times 2 = 10$ $7 \times 2 = 14$ $9 \times 2 = 18$ $11 \times 2 = 22$

Para que los Huespede de las habitaciones impares se trasladan a las habitaciones pares. quedando desocupadas las impares.

Y los Huespedes infinitos que llegan las ocupan.

Concluida la parte b), se pasó a trabajar el punto c), del cual líneas arriba mencionamos una solución que surgió como resultado de una buena idea que se les ocurrió a unos chicos. Sin embargo es preciso mencionar que unas jóvenes se percataron de que si se aplicaba el mismo proceso empleado en la parte b), dos veces en la parte c), entonces lograban solucionar dicho problema. Esto lo lograron porque cuando recreamos la situación del hotel en el aula, ellas comprendieron muy bien dicha solución, y cuando trataron de resolver el inciso c), se imaginaron que sus compañeros estaban ocupando todas las sillas y dado el caso de que llegara una excusión, entonces empleando el método de la parte b), desocuparían todas las sillas impares, donde se alojarían los turistas que llegaban, en dicha excursión, quedando nuevamente todas las sillas llenas; como al principio, por lo que si llegaba una nueva excursión, entonces se podía aplicar nuevamente lo mismo para hacerles espacio, es más dijeron "con ese método podemos meter las excursiones que queramos".


C° hacer dos veses el mismo procedimiento para meter el doble de infinitos.

C. Seria repetir lo que se hizo en la b 2 veces y en las habitaciones libres se hubicarian

Terminada la sesión quedo pendiente el punto d) de la actividad, cuyo grado de dificultad es mayor que el de los incisos a), b) y c), ya que se requieren conocer algunas propiedades especiales que poseen los números, por esta razón se dejó de tarea para que los estudiantes lo pensaran en sus casas y en la siguiente sesión compartieran las ideas que utilizaron para abordarlo con todo el grupo.

Antes de finalizar, debemos admitir, que aunque, la participación de los estudiantes en el aula fue muy activa, los resultados que dejaron plasmados en las hojas al finalizar la primera sesión, no iban muy acordes a las ideas que verbalmente nos expresaban, a saber, después de concluida la sesión, ya en nuestras casas al leer las soluciones suministradas por los estudiantes, notamos que las sintetizaban mucho, en ocasiones al punto de perder la esencia de ellas mismas, por ejemplo anotaban cosas como, desocupamos las impares y dejamos solo las pares con huéspedes, sin registrar el procedimiento que utilizaban para hacerlo. Como consecuencia de ello, al inicio de la siguiente sesión, le devolvimos a cada grupo sus apuntes y les pedimos que salieran al tablero a redactar su solución de una mejor manera, pero esta vez, todos los demás grupos colaborarían para que la solución se expresara en una forma unívoca, es decir la misma para todos. Ejercicio muy chévere, porque les permitió a los estudiantes reflexionar sobre la acción de coordinar el habla y la escritura.

Luego de esto, procedimos a plantear un taller a los estudiantes, con la intención de diagnosticar el nivel de apropiación de algunos conceptos que previamente ellos debieron tratar en sus cursos anteriores, tales como, múltiplo, número primo, divisor, factor,... etc y que les permitirían comprender la solución del problema d) de la hoja de actividad.

TALLER

A continuación, encontrarás varias afirmaciones sobre números primos, factores, divisores y números compuestos. Pero no todas son ciertas, por ello tendrás que indicar si son verdaderas o falsas.

Cuando vayas respondiendo fíjate si la justificación coincide con lo que pensabas.

Manos a la obra!

1. Los números primos tienen solamente dos divisores naturales.

   ¿Verdadero o falso?

2. Cualquier número compuesto puede escribirse como el producto de sus factores primos.

   ¿Verdadero o falso?

3. El número 1 es primo.

   ¿Verdadero o falso?

4. Cuando un número es divisor o factor la división entre ellos es exacta, con resto cero.

¿Verdadero o falso?

5. El cero es múltiplo de todos los números.

   ¿Verdadero o falso?

6. El cero es un número compuesto.

   ¿Verdadero o falso?

7. La descomposición de un número en sus factores primos, no puede tener más de tres divisores.

   ¿Verdadero o falso?

8. Todos los números que están formados por cifras iguales, son divisibles por 11.

   ¿Verdadero o falso?

9. El 1 es múltiplo de todos los números.

   ¿Verdadero o falso?

10. Todos los números son múltiplos de 1.

    ¿Verdadero o falso?

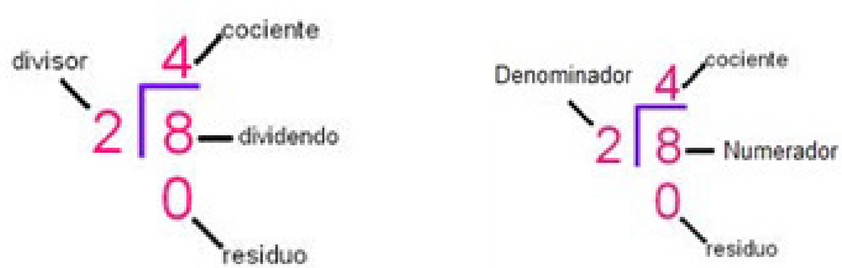
11. Todos los números impares son primos.

    ¿Verdadero o falso?

Los estudiantes formaron grupos de 3 y 4 personas y empezaron a resolver las preguntas; a medida que iban interactuando con ellas, mi compañero de práctica y yo les dábamos pequeñas sugerencias para que a través de estas, lograran esclarecer el enunciado de la afirmación que en un principio les resultaba un poco confuso o en otras ocasiones para que evocaran el significado de términos que en las afirmaciones aparecían y así pudieran entender el enunciado por completo, logrando responder si era falso o verdadero.

El acompañamiento que mi compañero de práctica y yo le brindamos a cada grupo fue casi personalizado, puesto que podíamos tardar en una mesa aproximadamente 15 minutos, explicando desde distintas perspectivas a los estudiantes un concepto matemático que se veía involucrado en el enunciado de una de las afirmaciones. Además utilizábamos el tablero para proporcionar ejemplos que reforzaran o refutaran algunas deducciones obtenidas por los estudiantes.

Ahora bien, en el transcurso de la sesión logramos notar el buen manejo por parte de los estudiantes de propiedades de los números, tales como: ser compuesto, divisor y múltiplo, pero también sus dificultades en cuanto a los números primos y lo que es un factor. En particular unas jóvenes empleaban los nombres de numerador y denominador cuando a través de esquemas trataban de representar las partes de la división. Ellas hacían algo así:



Lo que hacían las jóvenes.

Dudas como las anteriores debíamos tratar junto con mi compañero, con el propósito de que los grupos llenaran las lagunas que sus cursos anteriores les habían dejado. Por ejemplo para el caso anterior la pregunta que llevo a las estudiantes a hacer el esquema fue la siguiente, ¿cuándo un número es divisor o factor la división entre ellos es exacta, con resto cero?, no fue necesario recordarles lo que es un divisor o lo que es un factor, porque lo evocaban muy bien, el problema se originó cuando hicieron el dibujo que presentamos más arriba, puesto que no les fue posible ubicar correctamente los nombres de las partes que componen la división, con lo cual no sabían que responder a la afirmación, porque no recordaban que parte era la que llevaba el nombre de resto. Pero eso no fue ningún inconveniente, ya que después de un rato de explicar cómo funciona la división en términos de hacer grupos entendieron muy bien cuál es la parte que lleva el nombre de resto.

Igual que con la pregunta anterior, hubo otras en las que los alumnos tuvieron algunas dificultades, pero a pesar de ello, debemos resaltar la actitud participativa del grupo en el aula de clase, ya que cualquier duda por muy básica que fuera siempre la manifestaba y a partir de ello notábamos que lo que deseaban era aprender, más que el contestar la pregunta y salir del paso. En verdad el grupo siempre se mostró con una actitud muy positiva.

Por otra parte, al trabajar con el taller, nos percatamos de que a los jóvenes poco les gustan las actividades que sean de llenar un cuestionario con campos vacíos que el docente ha dejado previamente, percibimos como algunos grupos tienden a alejarse y trabajar aislados de los demás.

Al final de la sesión presenté a los estudiantes un video donde de manera sencilla y asequible se da la solución del punto d) de la actividad de Hilbert, después de verla y dado que ya contábamos con todas las propiedades numéricas que se requerían para entender la solución, lo que hicimos fue tratar con los alumnos los puntos claves en la solución proporcionada en el video, es decir hicimos un análisis detallado de cada paso y reconstruimos el resultado entre todos, hasta que fuera claro y no quedara duda alguna.

A continuación se muestran algunas fotos, donde se pueden ver algunas de las respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes.

Laura Maday Muñoz.
Yuli Tatiana Ruiz

1 Rta: es verdadero porque los numeros primos se pueden dividir por 2.

2 Rta: si es verdadero porque los podemos descomponer. 15 = 3 x 5

3 Rta: es falso porque solo tiene un divisor.

4 Rta: es verdadero porque a la hora de dividir su residuo es cero.

5 Rta: es falso porque multiplicando cualquier numero no va a dar el cero.

6 Rta: es verdadero porque no es primo

7 Rta: es falso. porque factorizando tiene mas de tres cifras.

8 Rta: es falso por que al dividir el 222 la division no da exacta.

Tatiana Moncayo
Marley Lectamo

Respuestas

1° RTA: Verdadera

Por que $2 \,\underline{|\, 1}$ $\;$ $2\,\underline{|\,2}$ Los
$\;\;0\;\;2$ $\;\;\;0\;\;1$

números primos siempre tienen que tener dos divisores y no se pueden pasar

2° RTA: Verdadera

Por que: $\overbrace{2 \times 5}^{primos} = 10$ $\;$ $\overbrace{2 \times 2}^{primos} = 4$
$\overbrace{2 \times 2 \times 5}^{primos} = 20$ Cual quier número se escribe como el producto de dos factores primos

3° RTA: Falso

Por que: $1\,\underline{|\,1}$ el uno solamente
$\;0\;1$

tiene un solo divisor que es el mismo

4° RTA: Verdadera

Por que: $10\,\underline{|\,2}$ $\;$ $4\,\underline{|\,2}$ el residuo
$\;\;0\;\;5$ $\;\;0\;\;2$

de una division es siempre cero.

5 RTA: Falso

Por que $0 \times ? = 0$ El cero es solamente Factor de el mismo

6° RTA: Verdadera

Por que: el cero si es un numero compuesto.

7° RTA: Falso

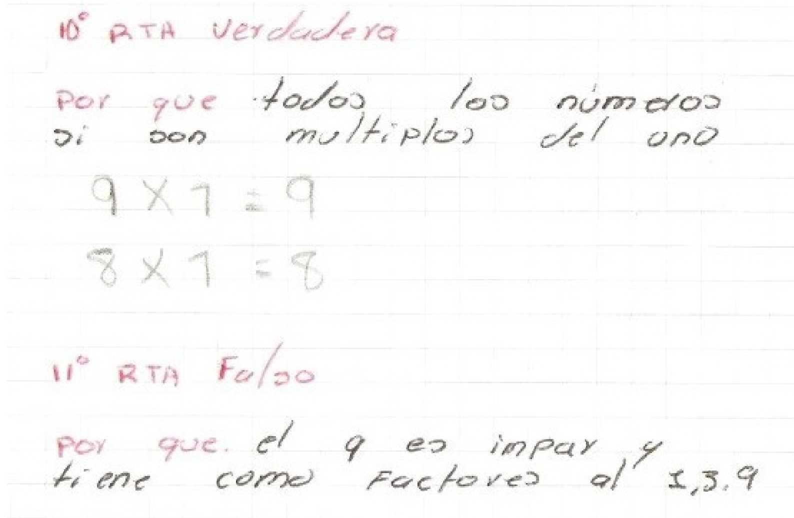
Por que: La desconposicion de un número en sus Factores primos si puede tener más de tres divisores

8° RTA: Falsa

Por que al aser la con tres sifras no quedara como residuo cero.

9° RTA: Falso

Por que el uno no es multiplo de todos los numero sino de el mismo



10° RTA Verdadera

Por que todos los números si son multiplos del uno

$9 \times 1 = 9$

$8 \times 1 = 8$

11° RTA Falso

Por que el 9 es impar y tiene como Factores al 1,3,9

6.3. PENSAMIENTO DE UN MATAMETICO (EULER)

La sesión inicio con la entrega a los distintos grupos del material necesario para llevar a cabo la actividad. Los grupos empezaron con la lectura de la primera hoja donde se encuentra el cuento que trata sobre el robo de unas joyas a una condesa. Del lado reverso de la hoja se encontraba un mapa que junto con el texto del cuento permitiría que los estudiantes lograran hacer deducciones y así obtener conclusiones sobre quiénes eran los dos sospechosos. Algunos estudiantes para no estar volteando la hoja cada vez que quisieran ver el mapa, decidieron dibujarlo en una hoja de su cuaderno. Se dedicó casi 30 minutos al análisis del texto y para ese entonces, ellos ya empezaban a lanzar ideas, conjeturas y en algunos casos hasta los nombres de los dos supuestos implicados en el robo. A saber, esto fue lo que plantearon textualmente:

- El que salió debió pasar de primero por la casa de la condesa porque en el texto dice que fue la primera en oír ruidos en su casa.

- La condesa pudo haber fingido el robo.

- La condesa y el mayordomo son cómplices.

- Algunas imprecisiones en el problema, por ejemplo que el ladrón no puede terminar en la casa de la condesa, porque cuando ella los llamo todos

Tras varios intentos sobre el mapa por seguir los rastros que el ladrón había dejado, algunos grupos más rápido que otros se percataron de que el recorrido que sugería las huellas dibujadas por el detective Sherlock solo se podía trazar si se partía desde la casa de la condesa o desde la casa del mayordomo. Los estudiantes marcaban el recorrido tratando de no levantar el lápiz del papel, es decir hacer un trazo continuo y que no utilizara un mismo camino dos veces.

Junto con mi compañero y los estudiantes analizamos el cuento, tratando de comprender muy bien la información que se suministraba en los párrafos y concluimos lo siguiente.

- La condesa no puede terminar en la casa del mayordomo, porque en el texto dice que ella en la mañana los llamo a todos, a no ser que los llamara desde la casa del mayordomo.

- En el texto dice que alguien mentía, luego puede ser que el mayordomo no se fuera a su casa la noche anterior y se quedara escondido en la casa de la condesa

> y después de que llovió, salió con las joyas, realizó el recorrido y regreso a su casa. Difícil es decir donde estaban escondidas las joyas pues nada garantiza que el mayordomo las llevara con él hasta su residencia.

Terminada esta parte de la actividad, aún contábamos con 30 minutos de la sesión, por lo que decidimos iniciar la segunda etapa, para ello comenzamos por brindar a los estudiantes el lenguaje necesario para entender la actividad y poder así realizarla. Presentamos a los estudiantes lo que se conoce como un grafo y las diferentes partes que lo componen, también lo que es un camino y un circuito Euleriano, así mismo lo que se entiende por grado del vértice. Después de dar la definición planteada en la hoja guía de la actividad, con nuestras propias palabras, explicamos en una forma menos rigurosa, pero más intuitiva lo que dicen o expresan las anteriores definiciones. Luego de la presentación, cada grupo se ubicó en su hoja guía en la página titulada caminos y circuitos, que consta de 7 grafos y en la hoja titulada el teorema de Euler que contiene una tabla para ser llenada con los datos que arrojen los 7 grafos. Los grupos empezaron por colocar en cada grafo el grado de los vértices y posteriormente ubicar en la última casilla de la tabla el número de vértices de grado impar que en el respectivo grafo se encontraban.

Mientras unos integrantes del grupo llenaban la tabla otros se dedicaban a revisar cuales grafos tenían un camino Euleriano o un circuito Euleriano. Para ello los estudiantes utilizaron hojas de papel y con ayuda de su lápiz intentaban trazar todos los caminos, sin repetir ninguno, anotando previamente de que vértice habían salido y algunos grupos iban más allá y llevaban siempre presente el grado del vértice donde habían comenzado el recorrido, estos grupos fueron los que más rápido se percataron de ciertas características que presenta por decir algo, un grafo en el que todos sus vértices poseen grado par. Otros grupos simplemente se dedicaron a tratar de seguir el recorrido, pero no relacionaban el grado del vértice de los grafos con la posibilidad o no de realizar el trayecto.

Al final de la hoja se encontraban planteadas dos preguntas, la primera pedía analizar los datos registrados previamente en la tabla y deducir conclusiones a partir de ello.

A continuación presentamos en fotos los registros de lo que realizaron los estudiantes en el salon de clase y en seguida de ello algunos comentarios.

Registros 1

El teorema de Euler

Completa la tabla siguiente utilizando tus resultados del ejercicio anterior.

Grafo #	Camino Euleriano	Circuito Euleriano (mismo punto)	Vértices de grado impar
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1	SI	NO	2
2	NO	SI	0
3	SI	NO	4
4	NO	NO	0
5	NO	NO	4
6	SI	NO	2
7	NO	SI	0

1. ¿A qué conclusiones puedes llegar y por qué?

A pesar de que una figura tiene impares no se puede hacer. para poder hacer una figura en camino Eureliano se necesita almenos dos omás pares y para hacer un circuito se necesita dos omás impares.

2. Si fueras a escribir un teorema que generalizara tus conclusiones, ¿cómo lo escribirías?

En teorema que llegamos a concluir es que hay figuras que tienen grados impares no se pueden hacer pero otros si. Ya sea en Camino Eureliano y Circuito Euleriano y puede ser verdadero porque uno puede quedar en el mismo u otro punto.

El teorema de Euler

Completa la tabla siguiente utilizando tus resultados del ejercicio anterior.

Grafo #	Camino Euleriano	Circuito Euleriano	Vértices de grado impar
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1	si	no	2.
2	no	si	0
3	no	no	4
4	no	no	4
5	no	no	4
6	si	no	2.
7	no	si	0.

1. ¿A qué conclusiones puedes llegar y por qué?

para tener un circuito euleriano el grafo debe tener 2 vertices de grado impar

2. Si fueras a escribir un teorema que generalizara tus conclusiones, ¿cómo lo escribirías?

En un grafo se puede dibujar un circuito euleriano si se tiene 2 vertices de grado impar.

El teorema de Euler

Completa la tabla siguiente utilizando tus resultados del ejercicio anterior.

Grafo #	Camino Euleriano	Circuito Euleriano	Vértices de grado impar
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1	SI	NO	2
2	SI	NO	0
3	NO	SI	4
4	NO	NO	4 No conectados
5	NO	NO	4
6	SI	NO	2
7	NO	SI	0

1. ¿A qué conclusiones puedes llegar y por qué?

Cuando hay 2 o más de 2 números impares y el resto pares puedo dibujar la figura. y cuando son todos pares se puede hacer y termino en el mismo punto en el que iniciamos!!

2. Si fueras a escribir un teorema que generalizara tus conclusiones, ¿cómo lo escribirías?

En una figura si hay todos los números pares entonces es un circuito Euleriano. Si hay 2 números impares, es un camino Euleriano.!!

El teorema de Euler

Completa la tabla siguiente utilizando tus resultados del ejercicio anterior.

Grafo #	Camino Euleriano	Circuito Euleriano	Vértices de grado impar
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1	si	no	2
2	no	si	0
3	si	no	4
4	No	No	Separado
5	no	no	4
6	si	no	2
7	no	si	0

1. ¿A qué conclusiones puedes llegar y por qué?

las conclusiones son que para trazar grafos en camino Euleriano necesitamos dos (2) impares. Y para resolver los circuito Euleriano tienen que ser todos pares.

2. Si fueras a escribir un teorema que generalizara tus conclusiones, ¿cómo lo escribirías?

Para lograr trazar un circuito Euleriano necesitamos que todos los vertices sean pares

Para lograr trazar el camino Euleriano necesitamos que dos vertices sean impares

Algunas de las conclusiones a las que llegaron literalmente los estudiantes fueron las siguientes.

- ▷ Que hay más posibilidades de encontrar caminos Eulerianos que circuitos Eulerianos.
- ▷ Para tener un camino Euleriano, el grafo debe tener 2 vértices de grado impar.
- ▷ Que la figura número 3 tiene vértices de grado impar, pero no tiene solución y lo mismo pasa con la número 4 y 5.
- ▷ A pesar de que una figura tiene impares no se puede hacer. Para poder hacer una figura en camino Euleriano se necesita al menos dos o más pares y para hacer un circuito se necesita dos o más impares.
- ▷ Las conclusiones son que para trazar grafos en camino Euleriano necesitamos dos (2) impares. Y para resolver los circuitos Euleriano tienen que ser todos pares.
- ▷ Cuando hay 2 o más de 2 números impares y el resto pares puede dibujar la figura. Y cuando son todos pares se puede hacer y terminar en el mismo punto en el que iniciamos.

Como podemos ver las conclusiones presentan un poco de imprecisión, pero las dedujeron los grupos y son muy buenas. Luego de esto pasamos a la parte de enunciar el teorema, en este punto se les explico a los estudiantes sin rigurosidad lo que se entiende por un teorema, se les dijo que es una regla similar a la de un juego que siempre se cumple si se verifican determinadas condiciones, algo similar a cuando se juega baloncesto, si el balón sale de la línea que se establece como el límite de la cancha, entonces se debe sacar de lateral, esta es una regla establecida y se cumple cada vez que sucede lo anterior. El enunciado implícito que propusieron los estudiantes como teorema o especie de regla fue este, **ver registros 1**:

- ↪ En una figura si hay todos los números pares entonces es un circuito Euleriano. Si hay 2 números impares es un camino Euleriano.
- ↪ Para lograr Trazar un circuito Euleriano necesitamos que todos los vértices sean pares.
- ↪ Para lograr trazar el camino Euleriano necesitamos que dos vértices sean impares.

- ↪ El teorema que llegamos a concluir es que hay figuras que tienen grados impares no se pueden hacer pero otras sí. Ya sea en camino Euleriano y circuito Euleriano y puede ser verdadero porque uno puede quedar en el mismo u otro punto.
- ↪ Existen figuras de grado impar que tienen camino Euleriano impar.
- ↪ En un grafo se puede dibujar un circuito Euleriano si se tiene 2 vértices de grado impar.
- ↪ En todos los grafos hay más posibilidades de encontrar caminos Eulerianos que circuitos Eulerianos.

Notamos como en la enunciación del teorema, algunos grupos lo hacen de forma incompleta, lo curioso es que cuando lo explicaban oralmente lo decían correcto, quizás esto tiene que ver con que algunas personas tenemos la dificultad de poner con exactitud por escrito, lo que pensamos. Pero al parecer otros si logran hacerlo y tienen un mayor acercamiento a la forma correcta de enunciar el teorema de Euler. Los pequeños ajustes del enunciado, los realizamos junto con los estudiantes, es decir, redondeamos la idea y aclaramos cuando se tiene en un grafo un circuito Euleriano y cuando un camino Euleriano.

Terminado de aclarar las dudas y enunciar de forma correcta el teorema de Euler, pasamos con los estudiantes a la última etapa, a saber los puentes de Manhattan y los puentes de Könisberg. En los puentes de Manhattan, los estudiantes sin mucha dificultad lograron trazar el recorrido pedido, con las condiciones que se establecen en el enunciado. Sin embargo se les pidió que representaran el gráfico suministrado mediante un grafo y constataran que el trayecto se podía realizar, ya que cumple la regla que se enuncia en el teorema de Euler.

La mayoría de los grupos dibujó correctamente el grafo y al lado de cada vértice colocó el número total de aristas que inciden sobre él, de esta manera observaron que dos vértices tienen grado 3, uno 6 y otro 12, satisfaciendo el teorema de Euler y por tanto se puede realizar el recorrido obteniendo un camino Euleriano.

Al final del grafo algunos colocaron pequeñas notas, aquí las presentamos textualmente.

- Es posible porque el vértice de inicio es impar.
- Es posible salir y entrar de las ciudades pasando por todos los puentes y teniendo como punto de llegada a Bronx porque las entradas y salidas son 3 0 6 de cada city y se puede entrar 2 veces y 1 salir.

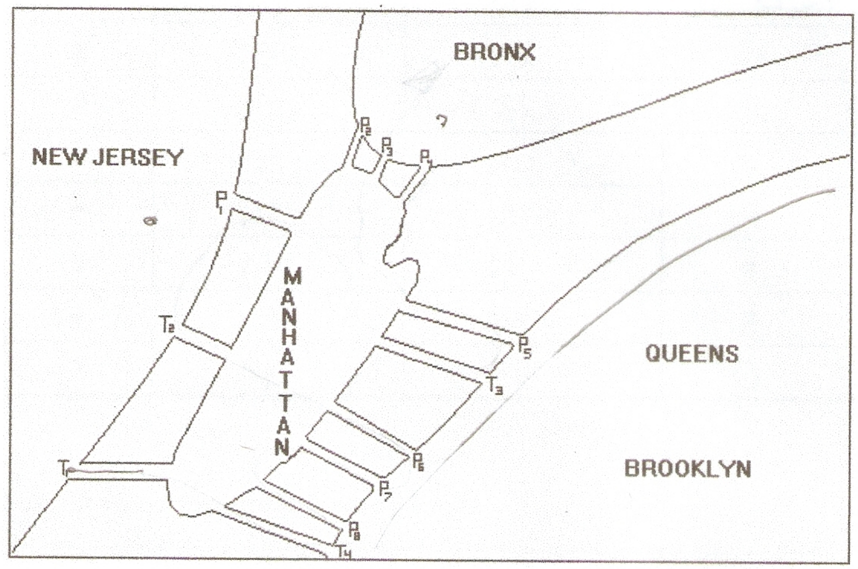
- Porque desde el grafo que empezamos tenia caminos impar.
- Lo pudimos hacer porque utilizamos los caminos que habían.

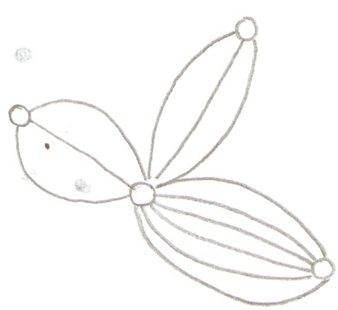
Lo anterior puede verificarse en las siguientes fotos.

Registros 2

Los puentes de Manhattan

¿Es posible para una persona que sale de New Jersey cruzar cada uno de los puentes y túneles que aparecen en este mapa y terminar en el Bronx? Traza el camino que se debe seguir. Utiliza un grafo con vértices (masas de tierra) y aristas (puentes y túneles) para justificar tu respuesta.

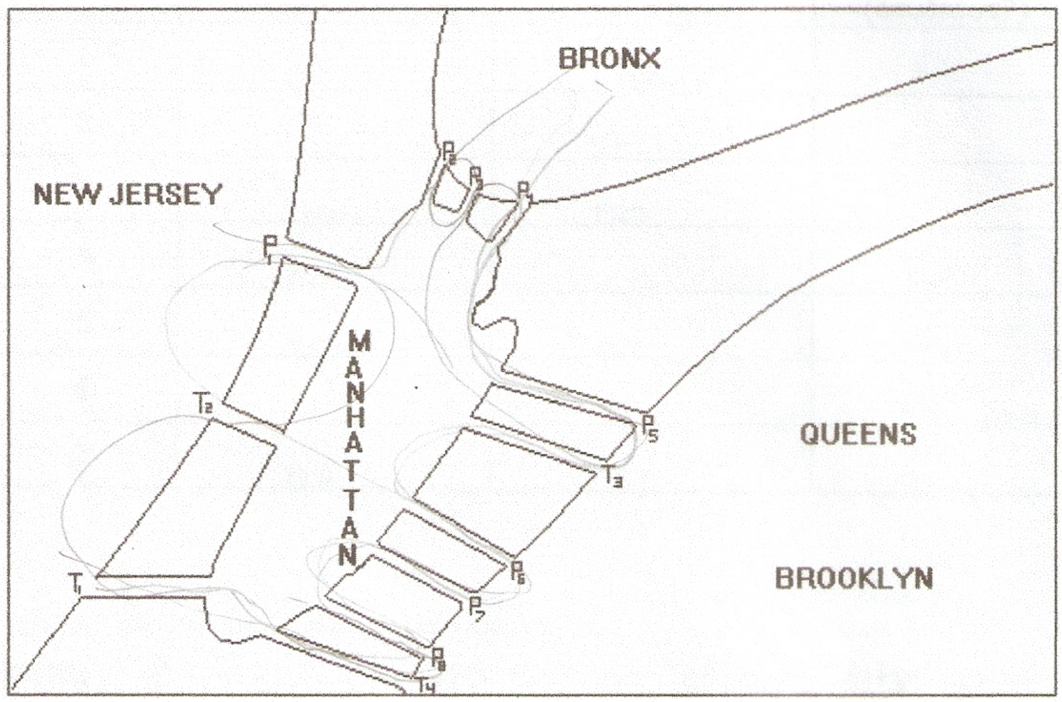


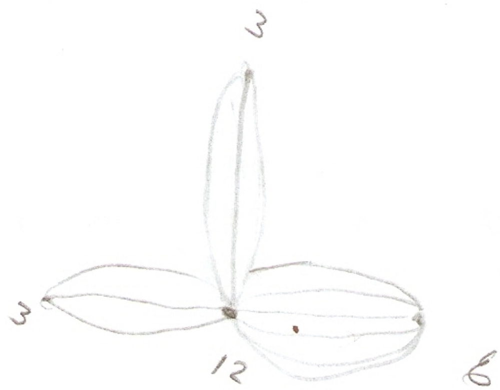


Es posible salir y entrar de la ciudades pasando por todos los puenies y teniendo como punto de llegada a Bronx Porqué la entradas y salidas son 3 o 6 de cada city y se puede entrar 2 veces y 1 salir.

Los puentes de Manhattan

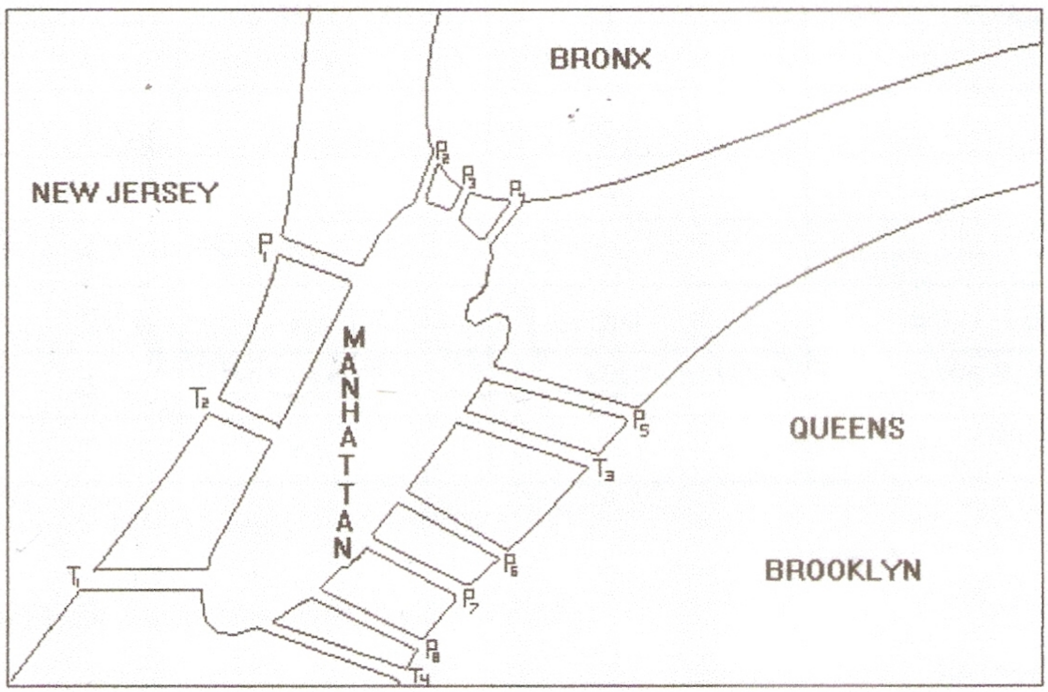
¿Es posible para una persona que sale de New Jersey cruzar cada uno de los puentes y túneles que aparecen en este mapa y terminar en el Bronx? Traza el camino que se debe seguir. Utiliza un grafo con vértices (masas de tierra) y aristas (puentes y túneles) para justificar tu respuesta.

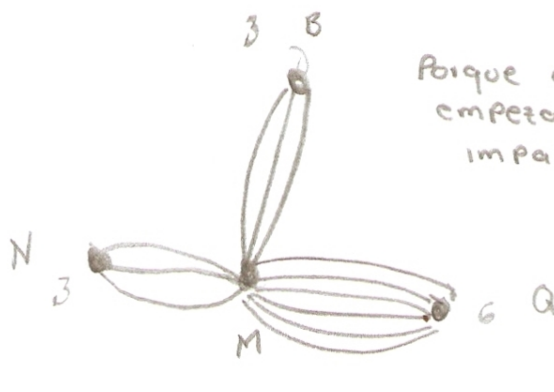




Los puentes de Manhattan

¿Es posible para una persona que sale de New Jersey cruzar cada uno de los puentes y túneles que aparecen en este mapa y terminar en el Bronx? Traza el camino que se debe seguir. Utiliza un grafo con vértices (masas de tierra) y aristas (puentes y túneles) para justificar tu respuesta.





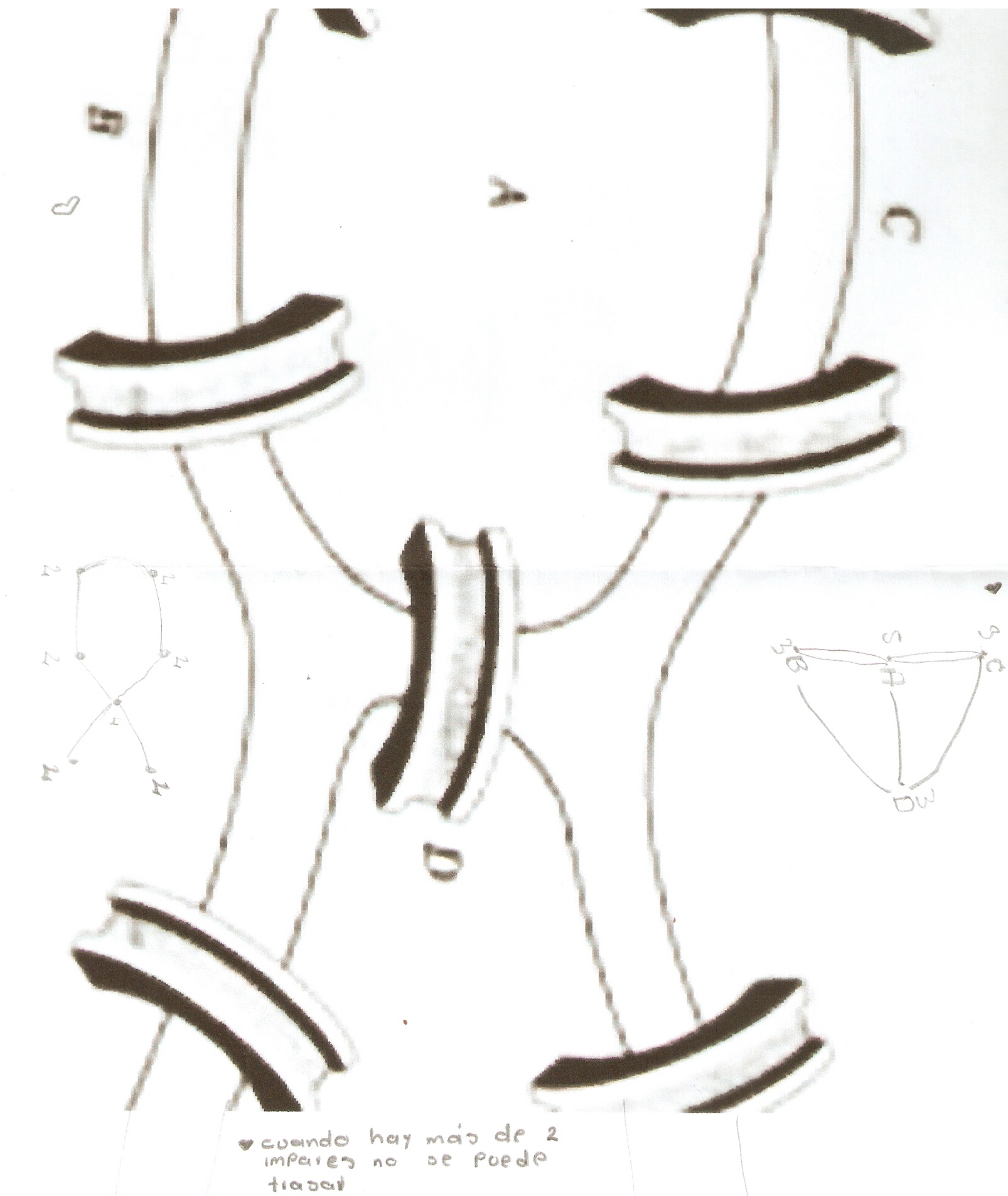
Porque desde el grafo que empezamos tenia caminos impar

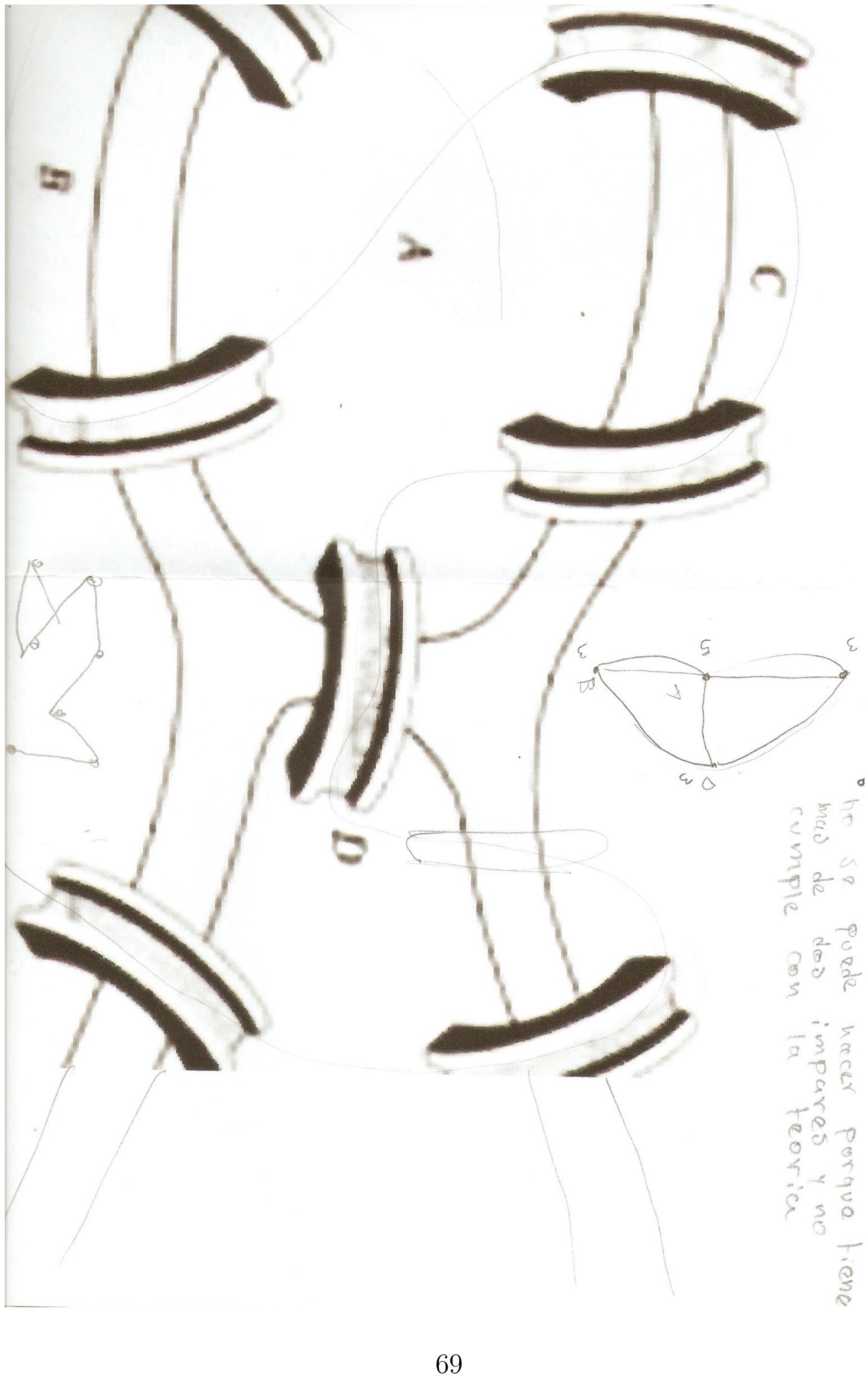
Para los puentes de Könisberg, los grupos no lograron encontrar camino que permitiera realizar el recorrido con las condiciones que se plantean en el problema, por lo que se les sugirió que construyeran el grafo y lo analizaran de forma similar al de los puentes de Manhattan, luego de realizar el grafo y observar el grado de todos los vértices, notaron que eran impares y por conclusiones obtenidas anteriormente era imposible encontrar un trayecto que permitiera cruzar todos los puentes, pasando por ellos una sola vez.

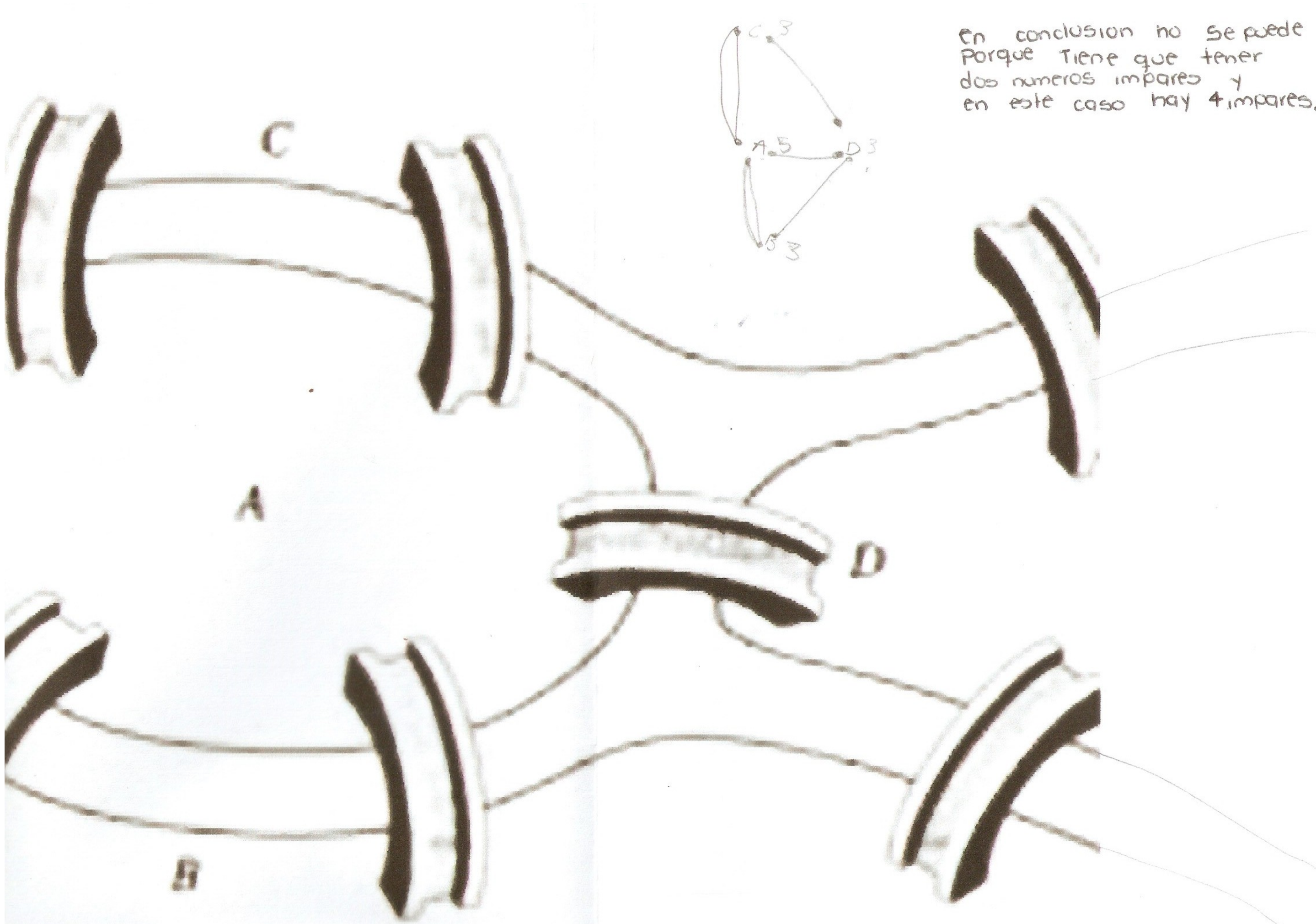
Al final del grafo utilizado para los siete puentes de Könisberg, colocaron los siguientes comentarios.

- Cuando son todos impares no se puede hacer.
- Cuando hay más de dos impares no se puede trazar.
- No se puede hacer porque tiene más de dos impares y no cumple con la teoría.
- No se puede porque cuando elaboramos el grafo tiene 4 vértices impares.
- En conclusión no se puede porque tiene que tener dos números impares y en este caso hay 4 impares.

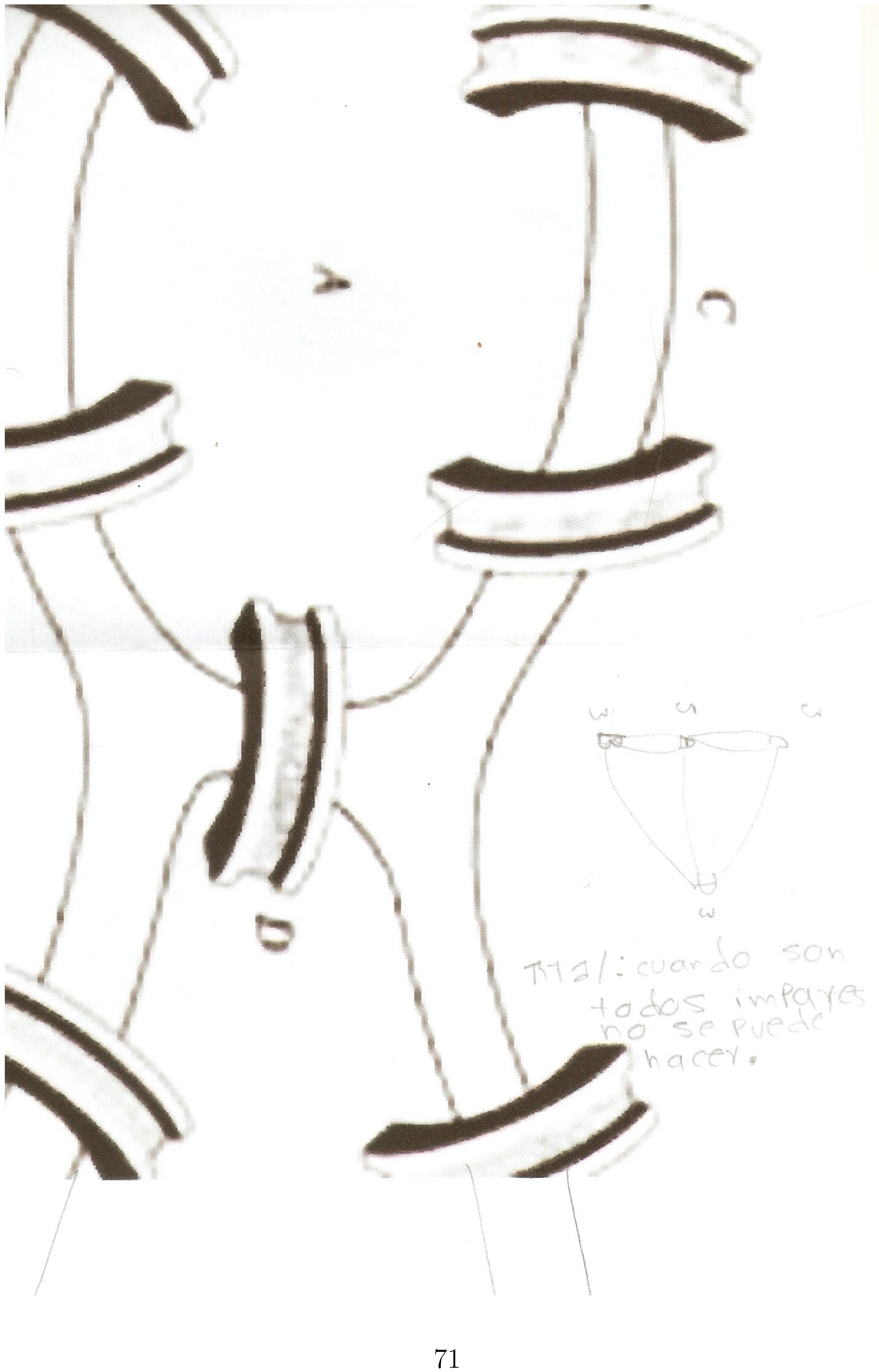
Enseguida se muestran algunas fotos de lo que hicieron los estudiantes.


A
C
D
cuando hay más de 2
impares no se puede
trazar


A
B
C
D
b no se puede hacer porque tiene mas de dos impares y no cumple con la teoria



En conclusion no se puede
Porque Tiene que tener
dos numeros impares y
en este caso hay 4 impares.



A
C
D
Mal: cuando son todos impares no se puede hacer.

7. CONCLUSIONES

Hace algunos años atrás, tuve la oportunidad de entrar a estudiar en la universidad del Cauca la carrera de Licenciatura en Matemáticas y "erradamente" en algunas ocasiones creí que las matemáticas no eran lo mío, porque varias experiencias en diferentes materias parecían confirmarlo, pues me era muy difícil familiarizarme con su lenguaje matemático. Hoy con el tiempo he comprobado que si bien las matemáticas son difíciles, no son imposibles de aprender, para la muestra un botón.

El darme cuenta de esto, despertó en mí el deseo de mostrar y enseñar a los demás que con un poco de trabajo y dedicación no es tarea imposible familiarizarse con las matemáticas y su lenguaje, algunas veces demasiado complejo. Hoy que me encuentro a las puertas de culminar mi carrera, se me presentó la oportunidad de compartir con estudiantes de bachillerato como lo fui yo alguna vez, lo que he aprendido durante mis estudios de pregrado; eso generó en mí una gran emoción.

La realización de este experimento didáctico, me permitió adquirir destrezas en cuanto al dominio y manejo futuro de un aula de clase en diversos aspectos. Por ejemplo mejoré en cuanto a la utilización del tablero, ya que cada vez fui aprovechando mejor los espacios, también tuve un avance en el discurso verbal en público, pues antes era más tímido para comunicar mis ideas. Además tuve la posibilidad de vivir la experiencia de estar a cargo de un salón con un número considerable de estudiantes, en el cual debía mantener el orden. Y por último me permitió entablar nuevas amistades, compartiendo de forma mutua diversas experiencias.

Por otra parte, se siente tan extraño cuando en el aula te llaman profesor, ya que es la posición contraria a la que por lo general en el bachillerato y la universidad ocupas. En particular no me gusta que los estudiantes me llamen así, prefiero que me llamen por mi nombre, porque siento que genera una cierta confianza entre las dos partes, a pesar de ello tengo bien claro que dicha confianza debe ser limitada de parte y parte, ya que si se es muy estricto los estudiantes pueden sentirse reprimidos y no participar en clase, por otra parte si se es muy flexible estos pueden convertir la clase en una verdadera "recocha". Este no fue el caso de mi práctica, pues por fortuna se me asigno un curso con una muy buena disciplina y además participativo.

Bueno, en esta parte he querido hablar un poco sobre los estudiantes y el rol que desempeñaron el en aula de clase.

Desde la primera sesión, los estudiantes mostraron gran motivación con lo planteado en el proyecto. A lo largo de las sesiones aportaron ideas que a mi criterio son fabulosas; es agradable escuchar de ellos que aprendieron algo de lo cual “no tenían ninguna idea”.

Por ejemplo algunos estudiantes manifestaron asombro y agrado al darse cuenta que tan solo con dos números, el 0 y el 1 podían hacerse muchas cosas que aportan beneficios para la humanidad. En palabras de ellos, “Imagínese, si solo con esos dos números hemos alcanzado grandes cosas, que podría lograrse con toda la demás matemática”.

Por otra parte, el hotel infinito de Hilbert le llamo mucho la atención a los estudiantes, pues sus problemas a pesar de ser un reto para ellos, daban la facilidad de resolverlos utilizando ni más ni menos que su imaginación y un poco de matemática. Más aún, unas chicas como lo mencione en las bitácoras, solucionaron el problema de abrir espacio a infinitos huéspedes sin acudir a las matemáticas, solo requirieron papel y lápiz, sin embargo gracias a su idea unos compañeros lograron llegar a la solución pero desde un punto de vista matemático.

En el mismo orden de ideas, debo resaltar una vez más la idea de mover un número par de habitaciones, que plantearon unos chicos en una de las sesiones, pues a pesar de que en un principio nos fuese confusa y a ellos no, la estudiamos y modelamos matemáticamente para hacerla más entendible y resulto ser un buen aporte por parte de ellos y afianzó el trabajo entre estudiante-profesor.

En la actividad 2, el hotel de Hilbert, habrán notado que en los enunciados de los problemas en ningún momento dice que por habitación, solo pueda haber un huésped. Sin la anterior condición, los estudiantes modificaron el enunciado creando problemas alternos. Sin embargo a lo largo de las sesiones se les motivó para que resolvieran los problemas sin contar con más hipótesis de las dadas en los enunciados de los problemas, advirtiéndoles que dicha solución existe. A saber, se guío a los estudiantes para poder lograr deducir la solución que yo he llamado la más “ óptima”.

Ahora bien, entre las respuestas de los estudiantes se reconocen ciertos hechos que tal vez vinieron a sus mentes de algunas series de televisión o películas donde de manera implícita tratan sobre el infinito, por ejemplo unos estudiantes manifestaron que detrás de una puerta de una de las habitaciones del hotel pudiese haber otro gran hotel con las habitaciones que pedía el enunciado del problema, curiosamente al final de la película HOMBRES DE NEGRO 2, dos personajes digamos J y K interactúan sobre unas ratas en unos casilleros y J le dice a K que deben dejarlas salir para que vean que el mundo es más grande que eso, en ese momento K abre una puerta que dice exit, dejando ver a J que los seres humanos estamos al igual que las ratas en otro casillero y el mundo es más grande que eso. Es una hipótesis pero los alumnos pueden haber pensado la solución del problema haciendo una analogía con lo que en su subconsciente quedaba de la película.

De forma similar, en películas como: TOY STORY, BAJO LA MISMA ESTRELLA, series, cuentos, libros y nuestro alrededor se reconoce el infinito. Por ejemplo, en una escena de la película BAJO LA MISMA ESTRELLA año 2014, donde la trama es sobre las personas que padecen de cáncer, uno de los personajes plantea la paradoja de Aquiles y la tortuga, dando respuesta a ella acudiendo a Cantor. En otra escena la actriz principal dice que sin ser matemática advierte que entre el 0 y 1 hay infinitos números y que hay infinitos más grandes que otros infinitos, la cuestión es si el cine tiene en cuenta el infinito en sus tramas y es capaz de llevarlo a multitud de personas, en particular a niños, ¿por qué no tenerlo en cuenta también en los grados de la educación básica y media? la humanidad avanza y con ella la tecnología, no podemos ser ajenos a ello y quedarnos relegados en la escuela.

Así como el infinito, la teoría de códigos y la teoría de grafos también permean diferentes medios, solo que en ocasiones las pasamos por alto sin advertir el rol que desempeñan en la sociedad.

Por otra parte, después de mi experiencia en el aula, puedo especular y "decir"que es posible trabajar de forma dinámica y agradable conceptos matemáticos diferentes a los que usualmente se establecen en el currículo de la educación básica y media. Debemos respetar las ideas de los estudiantes, no imponer las nuestras, más bien hacerles ver si es el caso que están en algo incorrecto. El reflexionar sobre la preparación de la clase te permite explorar diversas formas de presentar un contenido, lo que mejora tus competencias en el área.

Para finalizar quisiera dejar esta idea que últimamente está rondando mi cabeza.

El campo de acción de las matemáticas parece ser inagotable, sin embargo, en la mayoría de ocasiones las practicas matemáticas son enfocadas a temas que han sido ya de mucho estudio (sin demeritar), ¿Por qué no arriesgarse y descubrir que nuevos resultados pueden brindarnos otras ramas de las matemáticas, como la teoría fractal, la teoría de grafos, la historia de las matemáticas, entre otras?

8. REFERENCIAS

1. Polya, G.(1965). *Cómo Plantear y Resolver y resolver problemas / How to solve it*. 1 ed. Mexico: TRILLAS. ISBN 968-24-0064-3

2. Newman, J. R. (1965). “The world of mathematics”, *Mathematics of Space and Motion*. Vol 1, pp. 573-580

3. Paoletti, T. (2011) “Leonard Euler’s Soluction to the Konigsberg Bridge Problem”. <u>En</u>: Mathematical Association of America (MMA)

4. Molero, M & Salvador, A. Resolución de problemas, *Estrategias Heurísticas*. UNIVERSIDAD DE MADRID, diapositivas [en línea]. [Citado en 10 de octubre de 2013]

5. Cantor, G. (1882). Fundamentos para una teoría general de conjuntos, *Una Investigación Matemático- Filosófica Sobre La Teoría del Infinito*. Publicado por Andre Vidal Viola en Septiembre 25 de 2010 [en línea]

6. Aponte, M. A. (2014). “La noción de Infinito en Georg Cantor, *Un estudió histórico - epistemológico en la perspectiva de la educación matemática*”. UNIVERSIDAD DEL VALLE

7. Barbosa, A. M. (2010). “Estrategias Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática”.Mundomate. Vol 1, pp. 1-29

8. Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.*

ANEXOS

A. Anexo 1: Taller para actividad 5.1

1. Siguiendo los pasos a) y b) y utilizando las 6 cartas, deduce un método que siempre permita hallar el número que una persona piense de entre 0 y 63.

2. Trata de dar una explicación de por qué funciona dicho método.

B. Anexo 2. Taller para actividad 5.2

Formen grupos de 3 personas y teniendo en cuenta la lectura anterior resuelvan las siguientes preguntas.

a). Suponga que cierto día llega un hombre al hotel y éste se encuentra lleno, por supuesto esto no preocupa al cliente pues en el hotel infinito se aseguraba que todos tendrían habitación. El hombre pidió su habitación, ¿que tuvo que hacer el recepcionista para ubicar al hombre en una de las habitaciones del hotel?

b). Suponga ahora que estando el hotel lleno de infinitos huéspedes, llega un representante de una agencia de viajes, con el problema que tiene una excursión de infinitos turistas que necesitan hospedarse esa noche en el hotel. Se trata por lo tanto de hacer sitio a infinitos huéspedes en un hotel con infinitas habitaciones, todas ellas ocupadas en aquellos momentos. El recepcionista no tuvo ningún problema en aceptar a los nuevos turistas. ¿Cómo hizo el recepcionista para ubicar a cada uno de los infinitos huéspedes en una habitación del hotel?

c). Considere que estando el hotel lleno con infinitos huéspedes, llega un segundo representante de la agencia de viajes con el problema que tiene dos excursiones con un infinito número de turistas cada una. Ahora el problema consiste en ubicar a cada turista de estas dos excursiones en una habitación del hotel. ¿Cómo logra el recepcionista asignarle una habitación del hotel a cada turista de estas dos excursiones?

d). Imagínese que estando el hotel lleno con infinitos huéspedes, llega un tercer representante de la agencia de viajes aún más preocupado que el segundo y advierte a este el gran problema que ha ocurrido, ahora la agencia tenía un infinito número de excursiones con un infinito número de turistas cada una. "¡Qué enorme problema se presenta ahora!", pensaban los representantes de la agencia de viajes,

¿cómo podrían hospedar a un número infinito de infinitos turistas?. El recepcionista resuelve el problema, ¿cómo lo hace?

C. Anexo 3. Definiciones básicas para actividad 5.3

1. **Teorema**[6]**:** proposición que afirma una verdad demostrable. En matemáticas, es toda proposición que partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una verdad (tesis) no evidente por sí misma.

2. **Grafos:** Muy importante es determinar, antes del análisis del término grafos, el origen etimológico del mismo pues nos permitirá conocer de primera mano el porqué de su significado actual. De esta manera podemos dejar patente que aquel emana de la palabra griega grafo, graphein, que puede traducirse como "grabar o escribir".
   Este hecho es el que determina, por ejemplo, que hoy día utilicemos dicho concepto como parte indisoluble de otros términos a los que les da ese citado significado que está relacionado con la escritura. Este sería el ejemplo de bolígrafo que es un instrumento que utilizamos para escribir, grafólogo que es aquella persona que se dedica a determinar las cualidades psicológicas de alguien a través de la escritura que realiza, o el polígrafo que es quien se encarga de estudiar diversas formas de escribir que se llevan a cabo de forma secreta.

   Para las **ciencias de la computación** y la **matemática**, un grafo es una **representación gráfica** de diversos puntos que se conocen como **nodos** o **vértices**, los cuales se encuentran unidos a través de líneas que reciben el nombre de **aristas**.

   ### ¿Qué es un grafo? [7]

   Los grafos, resultan ser extremadamente útiles para analizar problemas muy diversos como, por ejemplo, los siguientes:

   a). Problemas de **asignación de tareas:** tenemos un conjunto de trabajadores y otro de tareas y la información de para qué tareas está preparado cada trabajador y buscamos una asignación de tareas (a cada trabajador, una tarea distinta para la que esté preparado) de forma que consigamos ocupar al mayor número de trabajadores posible.

[6] `http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema`
[7] `http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/capitulo8a.pdf`

b). **Construcción de redes:** tenemos una serie de ciudades que queremos conectar mediante un oleoducto; un estudio de ingeniería previo nos permite conocer el precio de cada conexión. Se trata de conectar todas las ciudades con el menor coste posible.

c). **Problema de horarios:** en una cierta licenciatura de una Universidad se deben impartir 10 asignaturas, y no se pueden programar a la misma hora dos asignaturas si hay algún alumno matriculado en ambas. Lo que se busca es minimizar el número de horas necesario para programar todas las asignaturas salvando esa dificultad; o bien determinar cuáles son los posibles horarios si el número de horas disponible es fijo.

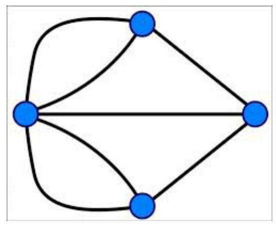
Los grafos son, como veremos, un lenguaje, una notación, que permite representar relaciones binarias, es decir, entre pares de objetos en un conjunto.

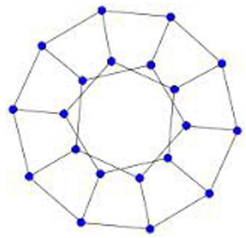
En matemáticas y ciencias de la computación, un **grafo**[8] (del griego grafos: dibujo, imagen) es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto.

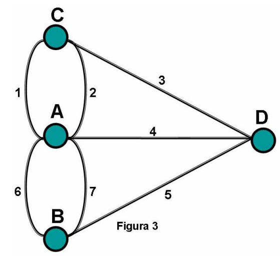
Los vértices los dibujaremos como puntos del plano, y las aristas serán líneas que unen estos puntos.

Ejemplos de grafos

[8] `http://es.wikipedia.org/wiki/Grafo`







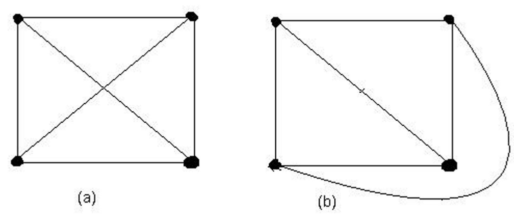
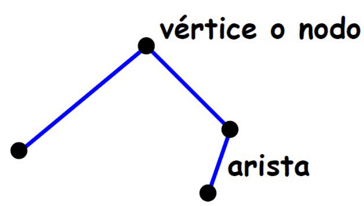
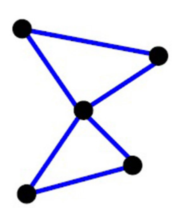


figura 6.1

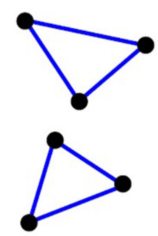
3. **Camino:** secuencia de aristas que unen vértices o nodos en un grafo. Cada arista comienza donde otra termina (con la posible excepción de la primera y la última).



4. **Grafo conexo:** es un grafo en el que es posible ir de un vértice a cualquier otro vértice siguiendo un camino.



5. **Grafo inconexo:** es un grafo donde se pueden conseguir dos vértices que no están unidos por un camino.



6. **Grado del vértice:** corresponde al número de aristas que inciden[9] en un vértice.

7. **Camino Euleriano:** es un grafo conexo que usa cada arista exactamente una vez. Los vértices pueden repetirse, pero no las aristas.

8. **Circuito Euleriano:** es un Camino Euleriano que termina en el vértice en que comienza.

Nota: Un grafo tiene un camino Euleriano si puede ser trazado sin levantar el lápiz del papel y sin trazar dos veces ninguna arista.

[9]**Incidencia:** una arista es incidente a un vértice si ésta lo une a otro.

D. Anexo 4. Materiales para actividad 5.3

Nombres:____

____

INTRODUCCIÓN

En esta actividad vas a trabajar como si fueras un detective que utiliza las matemáticas para resolver los crímenes más complicados. Verás cómo en el caso de las joyas de la condesa la matemática te ayudará a encontrar las joyas y a reducir la lista de sospechosos a dos. Después, sólo quedaría hallar el verdadero culpable. ¡Suerte en tu investigación!

EL CASO DE LAS JOYAS
DE LA CONDESA

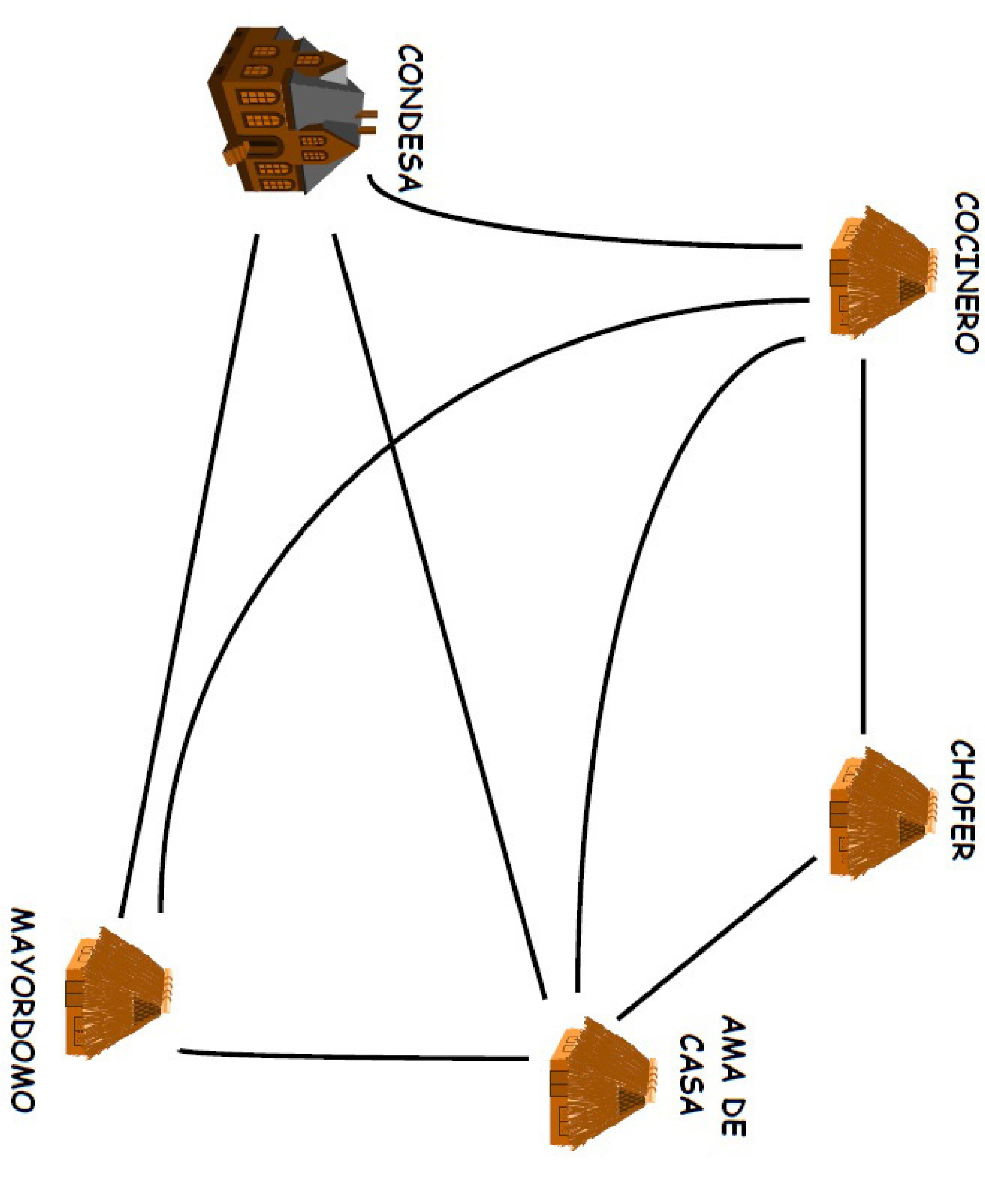
-¡AUXILIO! ¡SOCORRO! Llamen a la policía. ¡Me han robado mis joyas! Así gritaba la condesa desde su habitación ese domingo por la mañana cuando el cocinero, el ama de casa, el chofer y el mayordomo se despertaron sobresaltados en sus respectivas casas. Inmediatamente sospecharon unos de otros, pero ya la condesa había telefoneado al señor Sherlock, el detective local. Antes de que pudieran vestirse y salir de sus casas, el famoso hombre de la pipa había llegado y tomado nota de ciertas huellas en los jardines, que le parecieron sospechosas. Cuando entrevistó a los empleados todos dijeron que la noche anterior se habían retirado temprano a sus respectivas casas y que, debido al gran aguacero que había caído después, no habían vuelto a salir hasta que fueron citados por Sherlock. La condesa dijo haber oído ruidos durante la noche, pero lo había atribuido al viento. Los demás empleados insistieron en que ellos también habían oído ruidos en sus casas. Definitivamente, alguien mentía. Después de oír los alegatos y revisar el mapa que había hecho al llegar a la residencia, el señor Sherlock se dirigió directamente a la casa donde estaban escondidas las joyas. Sólo le faltaba decidir quién de los dos sospechosos podía haberlas robado.

Analiza el mapa dibujado por el señor Sherlock indicando la trayectoria de la huellas, y responde las siguientes preguntas:

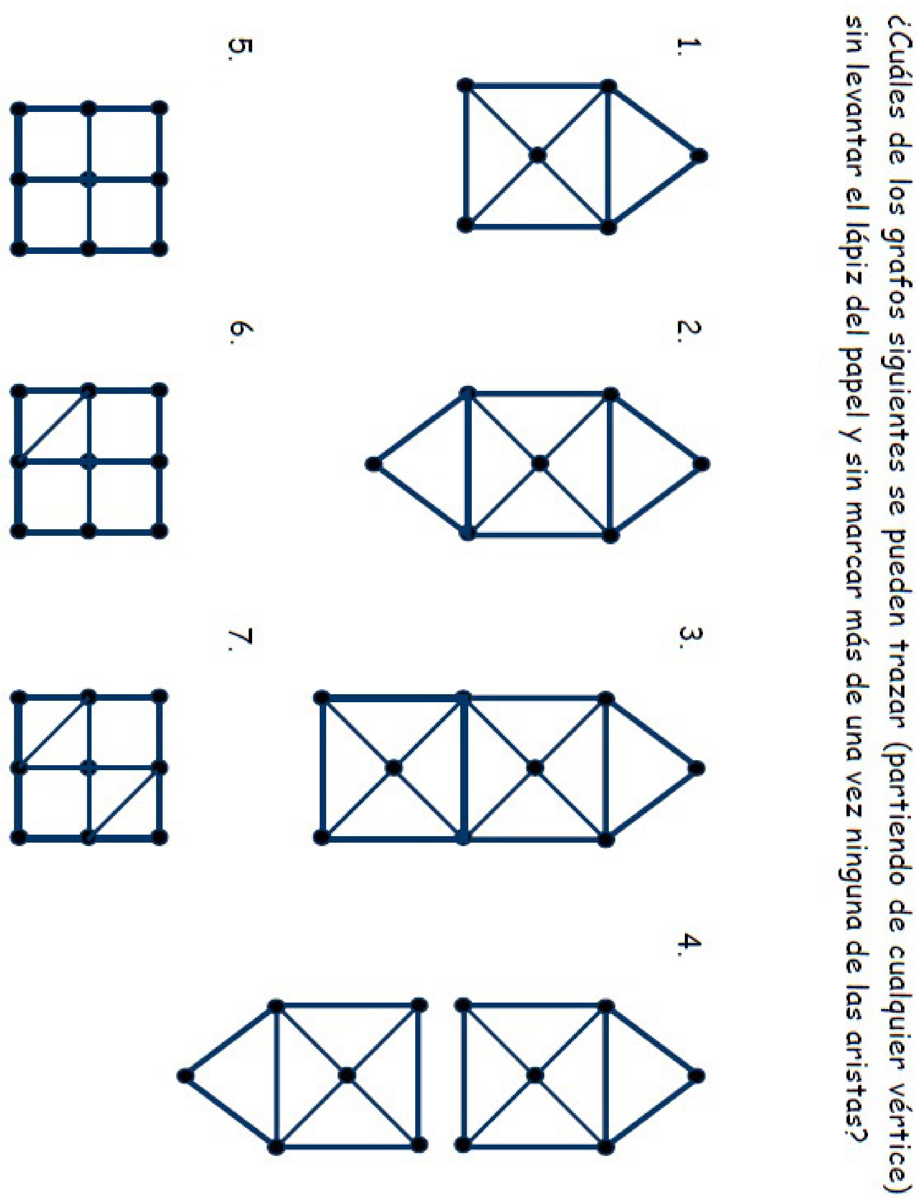
1. ¿Dónde estaban escondidas las joyas?

2. ¿Quiénes son los dos sospechosos?

MAPA DE SHERLOCK



Caminos y circuitos



El teorema de Euler

Completa la tabla siguiente utilizando tus resultados del ejercicio anterior.

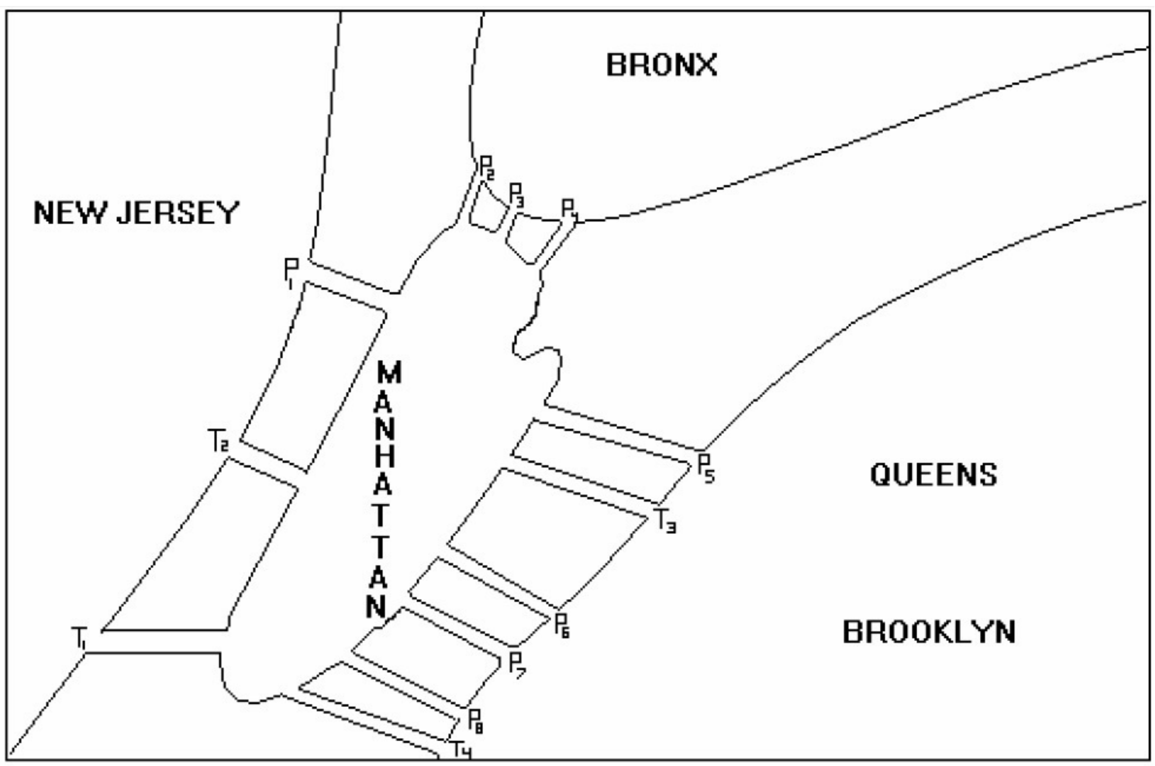
Grafo #	Camino Euleriano	Circuito Euleriano	Vértices de grado impar
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

1. ¿A qué conclusiones puedes llegar y por qué?

2. Si tuvieras que escribir una regla que generalice tus conclusiones, ¿cómo la escribirías?

Los puentes de Manhattan

¿Es posible para una persona que sale de New Jersey cruzar cada uno de los puentes y túneles que aparecen en este mapa y terminar en el Bronx? Traza el camino que se debe seguir. Utiliza un grafo con vértices (masas de tierra) y aristas (puentes y túneles) para justificar tu respuesta.



Los puentes de Königsberg

¿Es posible que una persona de un paseo por todas las regiones, utilizando cada puente una única vez? de ser afirmativa la respuesta, trazar el camino que debe seguir para lograrlo. Utiliza un grafo con vértices (masas de tierra) y aristas (puentes y túneles) para justificar tu respuesta.