DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

GENNY LORENA LIZ HIO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2015

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

GENNY LORENA LIZ HIO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Directora

GABRIELA ARBELÁEZ ROJAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2015

RESUMEN

En este documento se pretende describir la experiencia docente que está fundamentada en la resolución de problemas de estructura multiplicativa como un trayecto hacia la construcción de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad con la participación de estudiantes de séptimo grado de básica secundaria de la Escuela Normal Superior de Popayán, de tal forma que se desarrolle en ellos razonamiento proporcional. Se presenta aquí la preparación, aplicación de las actividades en el aula de clase, el análisis de los procesos de aprendizaje del estudiante frente a los problemas planteados y las correspondientes conclusiones.

Palabras claves. *Razón, proporción, proporcionalidad, magnitud, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, razonamiento proporcional, estructura multiplicativa, resolución de problemas.*

CONTENIDO

0. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo, se detalla los aspectos fundamentales para llevar a cabo un proyecto de aula, basado en el razonamiento proporcional. Dicho razonamiento se pretende desarrollar en estudiantes de séptimo grado de básica secundaria, con la implementación de cierto número de talleres basados en contenidos matemáticos tales como las razones, proporciones y proporcionalidad.

La causa principal para la realización de este proyecto se debe a que, en las instituciones educativas este razonamiento no es fomentado como tal, cuestiones relacionadas con proporcionalidad se han ligado a implementar ejercicios en donde se aplica la regla de tres. Además, el proceso de la Regla de tres no fue creado con fines educativos particulares sino que se instituyó por motivos comerciales. Es por tal motivo que la intervención directa en el aula se hace a través de problemas de estructura multiplicativa, con el fin de despertar y continuar con el desarrollo de este razonamiento.

Por otro lado, la estructura del documento viene dada de la siguiente manera. Inicialmente se describe la idea de la creación del proyecto y del por qué partir de la resolución de problemas de tipo multiplicativo se desea desarrollar razonamiento proporcional. En la sección (2) se hace una descripción detallada acerca como se entiende por razonamiento proporcional y de cuáles son los beneficios que le otorga al sujeto cuando se utiliza. En la sección siguiente se menciona, la metodología que se empleó para cumplir lo deseado. Seguidamente, sección (4), se habla sobre los participantes y lugar en donde se ejecutó el proyecto, continuando con el análisis de los resultados obtenidos en las ocho sesiones estipuladas, adjunto con un análisis general de lo logrado. Para finalizar (sección 6) se exponen conclusiones generales acerca de la práctica y de los objetivos alcanzados por los estudiante y el gestor del proyecto. Se concluye con anexos relativos a las ocho guías de estudio. Y finalmente se encuentran las referencias bibliográficas.

1. JUSTIFICACIÓN

Es innegable la trascendencia que tiene el razonamiento proporcional como herramienta matemática, Según (Espinosa, 2012) los lineamientos y los estándares hacen referencia a que el razonamiento proporcional pueda entenderse como una forma de pensar dinámica desarrollada a través de procesos de pensamiento matemático tales como los de la generalización, la comunicación, la argumentación y la modelación matemática de situaciones de variación y cambio. Por esta razón el objetivo va encaminado a desarrollar ese razonamiento proporcional tomando como base la resolución de problemas de estructura multiplicativa, con el propósito que sirva como herramienta significativa y desde luego permita ser competente en el área de matemáticas.

Es preciso aclarar que, a pesar de que existen diversas investigaciones acerca de la manera en que se aborda cuestiones relacionadas con el razonamiento proporcional en la educación escolar, la idea del proyecto surge principalmente por una necesidad personal del autor del proyecto, dado que haciendo una retrospectiva del proceso de educación y formación en la educación media, descubre que el modo en que fue abordado temas respectivos al razonamiento proporcional, se redujo al uso de la "regla de tres".

> El uso de la regla de tres, que aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre

> las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente. (Godino & Batanero, Proporcionalidad, 2002, pág. 425)

Por aspectos como este, los estudiantes no tienen la oportunidad de apropiarse del concepto de proporcionalidad y de las múltiples aplicaciones que él genera. Además pareciese que fuese un tema aislado de los diversos existentes en las matemáticas y por ende de otras disciplinas. Gascón (2010) afirma que el problema didáctico de la proporcionalidad debe ser integrado en el estudio mucho más comprensivo del problema de la enseñanza-aprendizaje de las relaciones funcionales entre magnitudes.

Por tanto, lo que se pretende es desarrollar razonamiento proporcional mediante la resolución de problemas de estructura multiplicativa. Se plantea este tipo de problemas dado que el trabajo con estos, tiene gran dificultad en los estudiantes, debido a que esta estructura es entendida desde una estructura aditiva, es decir, la multiplicación es vista solo como una suma reiterada. Según (Vergnaud, El niño, las matemáticas y la realidad, 1991) los conceptos esenciales del campo conceptual de las estructuras multiplicativas son la razón, proporción y proporcionalidad. De este modo, son estos conceptos los que constituyen la parte de contenidos matemáticos que aborda el proyecto.

Además hablando del interés didáctico que tiene el estudio de estos contenidos, Block (2000) plantea

> Si saber resolver dichos problemas constituye una necesidad importante para una parte suficientemente importante de la población, como para considerar esta

> capacidad dentro de los propósitos de la educación básica, entonces, se vuelve necesario analizar la pertinencia de dicha noción en la enseñanza. (p. 12)

1.1 OBJETIVOS

General

Desarrollar razonamiento proporcional mediante la resolución de problemas de estructura multiplicativa, de tal forma que éste se convierta en una herramienta significativa en los procesos de aprendizaje del estudiante frente al área de matemáticas.

Específicos

- Potenciar en los estudiantes la concepción de estructura multiplicativa, y que no sea entendida desde una estructura aditiva.

- Superar las limitaciones referente al uso de métodos mecánicos en situaciones de cambio y variación (regla de tres)

- Incentivar la discusión, experimentación y análisis de situaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad

- Minimizar errores en la adquisición de ciertos conceptos, como por ejemplo confundir razón con fracción.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Inicialmente, es fundamental hablar sobre el significado de Razonamiento proporcional. Para ello se considera las siguientes acepciones:

Según (Lesh, Post, & Behr, 1988)

> El razonamiento proporcional es un tipo de razonamiento matemático que involucra sentido de covariación y de múltiples comparaciones, y la capacidad de almacenar mentalmente y procesar varios fragmentos de información. El razonamiento proporcional se preocupa por la inferencia y predicción e involucra tanto a los métodos cualitativos y cuantitativos del pensamiento. (p.93)

Al hacer referencia al razonamiento matemático, se pude entender como la facultad o habilidad de la persona para resolver problemas, de sacar conclusiones de sus procesos de resolución y de establecer conexiones de sus hallazgos con el campo matemático. Entiéndase covariación como la relación existente entre dos variables, de tal forma que dicha relación se pueda expresar como una función lineal, por ejemplo, al tener la relación entre dos magnitudes, si se tuviese aumento o disminución de una de ellas, entonces se tendría un aumento o disminución de la otra en razón de la primera. Además para hablar de variaciones en término de razones se hace necesario realizar comparaciones, ya sea entre los términos de una razón o la comparación entre dos de estas.

Para Piaget (Piaget & Inhelder, 1975) la característica esencial del razonamiento proporcional es que debe implicar una relación entre dos relaciones (es decir, una relación "de segundo orden") en lugar de simplemente una relación entre dos objetos concretos (o dos cantidades directamente perceptibles).

Por otro lado, (Lamon, 2007) asevera:

> Propongo que el razonamiento proporcional signifique suministrar argumentos para soportar las enunciaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades, (digamos *a*, *b*, *c*, *d*), en un contexto que simultáneamente involucra la covariación de cantidades y la invariancia de razones o productos; este podría considerarse como la habilidad para diferenciar la relación multiplicativa entre dos cantidades así como también la habilidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades. (pp. 637,638)

Se puede destacar en las afirmaciones hechas acerca del razonamiento proporcional que, este debe brindar la habilidad de argumentar la relación entre dos cantidades, y teniendo en cuenta dicha relación poder utilizarla en otra comparación.

En segunda instancia, es preciso matizar algunas definiciones de ciertos conceptos concernientes al razonamiento proporcional, tales como magnitud, razón, proporción, proporcionalidad, entre otros. Además de que con la ejecución del proyecto también se pretende minimizar los errores en la adquisición de los conceptos anteriores. Cabe aclarar que el contexto en el cual se definen es en el de las matemáticas.

En cuanto a magnitud y cantidad de magnitud Godino y otros (2002) realizan las siguientes afirmaciones:

> Habitualmente se suele reservar el nombre de magnitud para los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.), o también de manera discreta (p. e. “el número de personas”); las cantidades son los valores de dichas variables. En este caso, medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia (unidades de medida).
>
> Con el término cantidad nos referimos habitualmente al valor que toma la magnitud en un objeto particular (el largo de esta mesa es 1’3 m); pero también hablamos de una longitud o distancia entre dos puntos de 1’3 m. En este caso la cantidad de longitud (o simplemente, la longitud) de 1’3 m hace referencia a cualquier objeto de la clase de todos los objetos que se pueden superponer exactamente con el largo de nuestra mesa, al menos imaginariamente. (Godino, Batanero, & Roa, 2002, pág. 616)

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, se puede ahora definir el concepto razón. Godino y Batanero (2002) definen y diferencian entre una razón y fracción.

> El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:
>
> - Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como “dos de tres partes”, lo que se indica con $2/3$. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.

- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.
- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como $4{:}\,7$[1], o $4 \rightarrow 7$.
- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser $10{:}\,5$, pero también se puede decir que puede ser $10{:}\,0$, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).
- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.
- Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos ($2{:}\,5$), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos ($3{:}\,7$) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una "suma" de razones del siguiente modo.

  $2{:}\,5\ +\ 3{:}\,7\ =\ 5{:}\,12$. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

  (Godino & Batanero, 2002, págs. 420,421)

---

[1] El número 4 (o cualquier otra cantidad) es llamado antecedente y el 7 (también cualquier otra cantidad) es denominado consecuente

Ahora bien, teniendo dos razones de cantidades de magnitud y si se tuviese igualdad entre estas razones, dicha relación se llama una proporción.

> La palabra proporción lo que nos permite es establecer relaciones entre varios objetos o acontecimientos. desde el punto de vista de la definición matemática, tanto si nos remitimos a la tradición piagetiana, como autores que se enmarcan en otros enfoques psicológicos del aprendizaje, al hablar de esta idea siempre aparecen dos tipos de elementos comunes: las relaciones multiplicativas y la división. (Rodríguez, y otros, 2007, pág. 152)

Formalmente, dadas dos cantidades de magnitud de un tipo, a y b, y otras dos cantidades de magnitud, de otro tipo, c y d, la proporción estaría definida así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Seguidamente se aborda particularidades acerca de la proporcionalidad. Para Simón Cohen (2013)

> La proporcionalidad tiene como fundamento al concepto de razón que es uno de los subconstructos de la fracción. Así, para comprender la proporcionalidad es necesario desarrollar la idea de cantidades relativas. Además, se debe entender la conexión de equivalencia que existe entre dos razones y conocer sus propiedades de invariancia, como la de conservar la razón al multiplicar ambas cantidades por un mismo factor. (pág. 136)

Además Cohen habla sobre las etapas del desarrollo de la proporcionalidad. Textualmente,

> Desde Inhelder y Piaget (1958), se han dado múltiples listas de las etapas de desarrollo de la proporcionalidad, dependiendo de las ideas matemáticas involucradas y su complejidad. Aquí daremos una categorización que apareció originalmente en el artículo de Karplus (1983), basada en problemas básicos de proporcionalidad.
>
> - Incompleta. Ignora parte de los datos o da una respuesta ilógica.
> - Cualitativa. Toma en cuenta todos los datos pero solo con consideraciones cualitativas (“necesita más”, “necesita menos”, etcétera).
> - Aditiva. Estrategia incorrecta que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa.
> - Pre-proporcional. Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades.
> - Proporcional. Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia
>
> (pág. 137)

Estas etapas propuestas por Cohen son fundamentales para el análisis de los resultados de aplicaciones de talleres respectivos a proporcionalidad. Este concepto es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, pues lo que se pretende al enseñarlo, es que los estudiantes resuelvan problemas cotidianos, que además reconozcan cuando hay situaciones de proporcionalidad o no proporcionalidad y que dentro de sus estrategias de resolución elaboren diagramas, tablas, etc.

Por consiguiente, si se quiere hablar de cómo están relacionadas dos cantidades proporcionalmente, se hace necesario definir la naturaleza de esa relación, esto es, si se da de forma directa o inversamente proporcional. Para ello, se destaca aquí sus definiciones matemáticas.

> Cuando dos cantidades que cavarían y dicha covariación se modela a través de una función lineal de la forma $y = kx$, donde k es la razón constante entre las dos cantidades, se dice que existe una proporcionalidad directa entre las cantidades mencionadas. (Sanchez, 2011)

Por otro lado, dos cantidades están relacionadas de forma inversamente proporcional si, el producto de valores tomados por las magnitudes y y x , es constante.

Estas dos definiciones comparten la existencia de la correspondencia y el carácter biunívoco. Asimismo, se habla de proporcionalidad compuesta si una magnitud es proporcional a otras varias cuando al suponer fijas todas estas, excepto una, la primera magnitud es directa e inversamente proporcional a esta. (Guacaneme, 2001)

Además, Sánchez (2011) cita a Lamon (2007), quien afirma los siguientes aspectos que involucran la comprensión de la proporcionalidad:

- Habilidad para usar la proporcionalidad como un modelo matemático para organizar apropiadamente contextos del mundo real.
- Habilidad para distinguir situaciones en las que la proporcionalidad es un modelo matemático adecuado de las situaciones en que no.
- Desarrollo y uso del lenguaje de la proporcionalidad.
- Uso de funciones para expresar la covariación de dos cantidades.
- Habilidad para explicar las diferencias entre funciones de la forma $y = mx$ y funciones de la forma $y = mx + b$.
- Saber que la gráfica de una situación de proporcionalidad directa es una línea recta que pasa por el origen.

- Saber que la gráfica de $y = mx + b$ es una línea recta que corta al eje y en el punto $(0, b)$.
- Habilidad para distinguir distintos tipos de proporcionalidad y asociar cada uno de ellos con adecuadas situaciones del mundo real en la que ellas son aplicables. Tales como: proporción directa y proporción inversa
- Saber que k es la razón constante entre dos cantidades en una situación de proporcionalidad directa.
- Saber que k, la constante en una situación de proporcionalidad inversa, es simplemente el producto de un par de valores de las dos cantidades.
- Saber que la gráfica de una situación de proporcionalidad inversa es una hipérbola. (pp. 639, 640)

Por otra parte, el tipo de problemas que se abordan para el desarrollo del razonamiento proporcional, son de tipo multiplicativos. Y estos son particularmente de estructura de Isomorfismo de medidas propuesto por Vergnaud (1991).

> El estudio acerca de la resolución de los problemas de isomorfismo de medidas por parte de los estudiantes es de gran importancia, ya que estos se encuentran en la mayoría de actividades que son desarrolladas cuando se trabaja la multiplicación en la educación básica primaria y más adelante en niveles superiores, ratificando su presencia permanente en el currículo a lo largo de los años escolares. (Riveros & Suárez, 2010)

Como se mencionó con antelación, Según Vergnaud (1983) las razones, proporciones y proporcionalidad son conceptos esenciales del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Por lo tanto se hará referencia a esta Teoría. Campo conceptual es, para él, un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. (Moreira, 2002)

> El campo conceptual de las estructuras multiplicativas consiste en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. El campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones cuyo dominio requiere una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones. (Vergnaud, 1988, pág. 141)

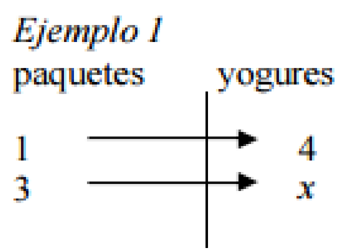
Como se señaló con anterioridad el tipo de problemas que se abordan en la proyecto son de estructura de Isomorfismo de medidas.

> El término 'isomorfismo' significa etimológicamente 'igual forma', y con ello se quiere destacar la idea según la cual existen semejanzas y correspondencias formales entre diversos tipos de sistemas. El descubrimiento de un isomorfismo entre dos estructuras significa esencialmente que el estudio de cada una puede reducirse al de la otra, lo que nos da dos puntos de vista diferentes sobre cada cuestión y suele ser esencial en su adecuada comprensión. (Amador, 2011)

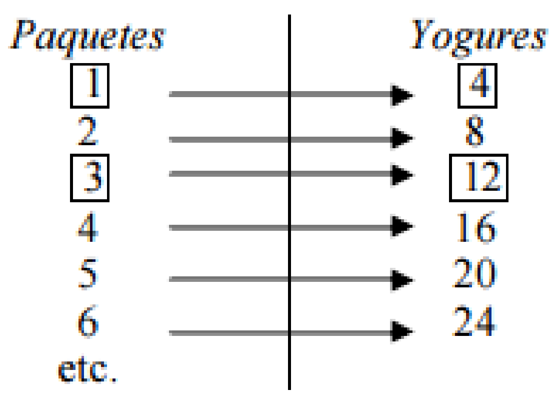
Para Vergnaud (1991) el isomorfismo de medidas es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades, dos cantidades son medidas de un cierto tipo y el resto son medidas de otro tipo. Por ejemplo:

- “Tengo 3 paquetes de yogurt. Hay 4 yogurts en cada paquete. ¿Cuántos yogurts tengo?”

La situación anterior pude ser representado con el siguiente esquema, el cual es una tabla de correspondencia entre dos tipos de cantidades



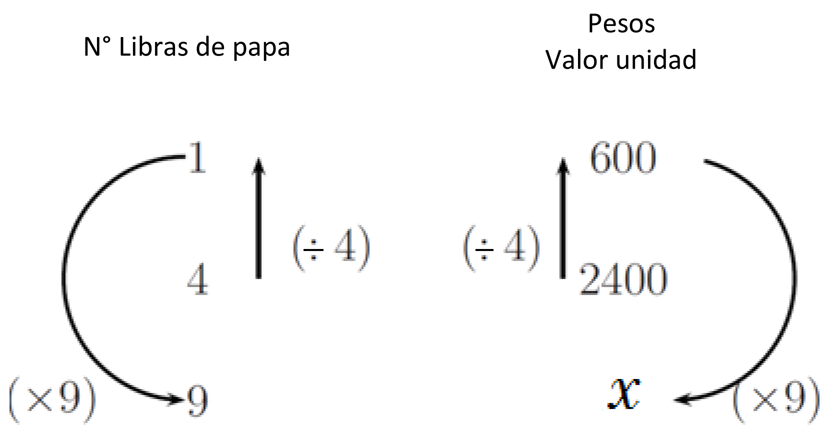
Un cuadro completo con unas cantidades más en correspondencia, esto es:



Se presenta aquí un ejemplo de situación, con el respectivo analisis detallado de las relaciones que Verganaud considera se hace en este tipo de problemas.

- *Cuatro libras de papa valen $2400, ¿cuánto cuestan 9 libras de papa?*

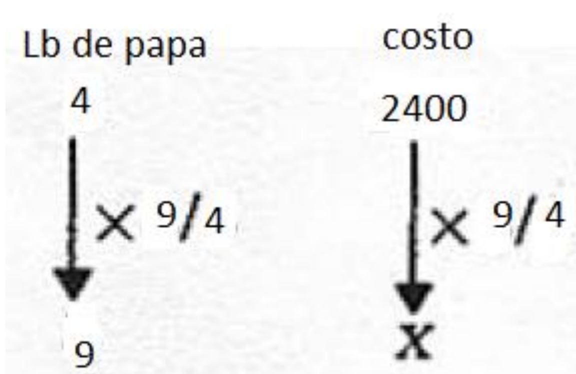
1. Búsqueda de la solución del problema pasando por la unidad y valor unitario.



Este es una análisis vertical, que se centra en la noción de operador-escalar (sin dimensión) que haces asar de una línea a otra en una misma categoría de medidas (Vergnaud, El niño, las matemáticas y la realidad, 2000, pág. 9)

2. Aplicación sucesiva de dos operadores (división primero): de la misma manera que se pasa de 4lb de papa a 1lb de papa (dividiendo por 4), se pasa del costo de 4lb de papa ($2400) al costo de una libra. Y de la misma manera en que se pasa de 1lb a 9lb (multiplicando por 9), se pasa al costo de 1lb al de 9lb.

3. Escritura del operador fraccionario: $\left(\frac{\times 9}{4}\right)$ (pos simple convención)



4. Noción de razón y de razón-operador:

- La razón entre dos cantidades:

$$\frac{9\ libras\ de\ papa}{4\ libras\ de\ papa}$$

- La razón como operador: se puede considerar también que el operador fraccionario representa la multiplicación por la razón anterior.

5. Proporción o igualdad de razones:

$$\frac{9\ libras\ de\ papa}{4\ libras\ de\ papa} = \frac{x\ pesos}{2400\ pesos}$$

6. Igualdad de razones operadores:

$$x\left(\frac{9}{4}\right) = x\left(\frac{x}{2400}\right)$$

7. Regla de tres: análisis de la escritura

Para los números: $x = \frac{2400 \times 9}{4}$

para las dimensiones: $pesos = \frac{libras \times pesos}{libras}$

Para terminar, los problemas multiplicativos de tipo isomorfismo de medida son los presentes en la estructuración de los talleres llevados al aula de clases, problemas que permiten aprender y dar uso a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Y de este modo ir desarrollando lo que es de interés en este trabajo, El razonamiento proporcional. Además se enfatiza en la resolución de problemas porque, según los lineamientos curriculares en matemáticas del MEN, textualmente, la actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.

3. METODOLOGIA

La estrategia metodológica que se sugirió para la ejecución del proyecto, consistía en la formulación y realización de talleres en el aula de clase. Dichos talleres contemplan problemas multiplicativos, donde se pretendía abordar los conceptos y nociones de razón, proporción, proporcionalidad directa e inversa y semejanza. A continuación se exhibe la secuencia seguida en las sesiones de clase, así como una breve descripción de las actividades realizadas.

- Sesión 1.

  Descripción: determinación de las nociones acerca de los conceptos relativos a proporcionalidad mediante la realización un taller diagnóstico. Dicho taller contemplaba 5 problemas relacionados con razones, proporcionalidad directa e inversa.

  Carácter: individual

  Criterio de evaluación: la actividad se hizo en forma de cuestionario, pero no tenía un criterio de evaluación, ya que se realizaba de carácter informativo para el docente.

- Sesión 2.

  Descripción: Identificación y apropiación del concepto de razón mediante problemas donde se tuviese que identificarla, y posteriormente ser empleada en otra relacione de cantidades de magnitud.

  Carácter: individual

  Criterio de evaluación: encontrar la razón entre dos cantidades de magnitud.

- Sesión 3.

Descripción: exhibición y análisis mediante ejemplos donde se especifican las propiedades de las razones, seguido de una aplicación en la solución de los ejercicios pedidos con la ayuda del ejemplo expuesto en la guía.

Carácter: individual

Criterio de evaluación: Reconocer y aplicar las propiedades de las razones.

- Sesión 4.

Descripción: Familiarización con el concepto de proporción mediante la realización de dibujos a escala y una situación dada.

Carácter: grupal

Criterio de evaluación: identificar la proporción entre las cantidades de magnitud relacionadas.

- Sesión 5.

Descripción: comprensión del concepto de proporcionalidad directa, e identificación de situaciones de proporcionalidad.

Carácter: grupal

Criterio de evaluación: identificar la constante de proporcionalidad.

- Sesión 6.

Descripción: comprensión del concepto de proporcionalidad inversa, e identificación de situaciones de proporcionalidad.

Carácter: grupal

Criterio de evaluación: identificar la constante de proporcionalidad.

- Sesión 7.

Descripción: identificación de figuras semejantes y cálculo de la razón de semejanza. Utilización adecuada de la relación que hay entre los segmentos asociados en figuras semejantes.

Carácter: grupal

Criterio de evaluación: identificar figuras semejantes.

- Sesión 8.

Descripción: explicación del teorema de Tales

Carácter: grupal

Criterio de evaluación: Aplicar el teorema de Tales en aspectos de la vida real y consecuentemente a ejercicios semejantes.

La mayoría de los talleres tenían entre 3 y 4 problemas, y se estimó un tiempo de $1\frac{1}{2}$ hora para la resolución del mismo.

4. INSTITUCIÓN Y ESTUDIANTES

La ejecución del proyecto se llevó a cabo en la Escuela Normal superior de Popayán con estudiantes de grado séptimo. Esta institución se encuentra ubicada en la zona sur oriental de la ciudad de Popayán, cuenta con óptimos recursos e instalaciones adecuadas. La condición socioeconómica promedio de los estudiantes de esta institución se ubica en los estratos 1, 2 y 3. En la realización del proyecto se contó con la participación de entre 14 y 12 estudiantes del grado séptimo de los grupos B y C, quienes asistían los días jueves en el horario de 3 a 5 de la tarde. La edad de dichos estudiantes oscilan entre de 12 y 15 años, y la mayoría de ellos se encontraba repitiendo el curso. Haciendo referencia a las cualidades de los estudiantes, se puede afirmar que algunos de ellos poseen habilidades y destrezas al momento de enfrentarse a problemas matemáticos, aunque a la mayoría se le dificultaba escribir su procedimiento de resolución de los problemas, fase clave para el análisis de trabajo. En cuanto a sus personalidades, son jóvenes con una actitud e interés por conocer cosas nuevas pero no del modo habitual como lo hacen cada día en sus aulas de clase, por este motivo era esencial mantenerlo motivados y correlacionarse con ellos de forma natural, teniendo en cuenta que se encuentran en una edad en donde no todo causa sorpresa. Dado que la asistencia no era de carácter obligatoria, se trabajó con estudiantes que sentían un cierto grado de atracción por las matemáticas, aunque hubiese sido un reto trabajar con aquellos a quienes no les gusta.

5. RESULTADOS Y ANALISIS

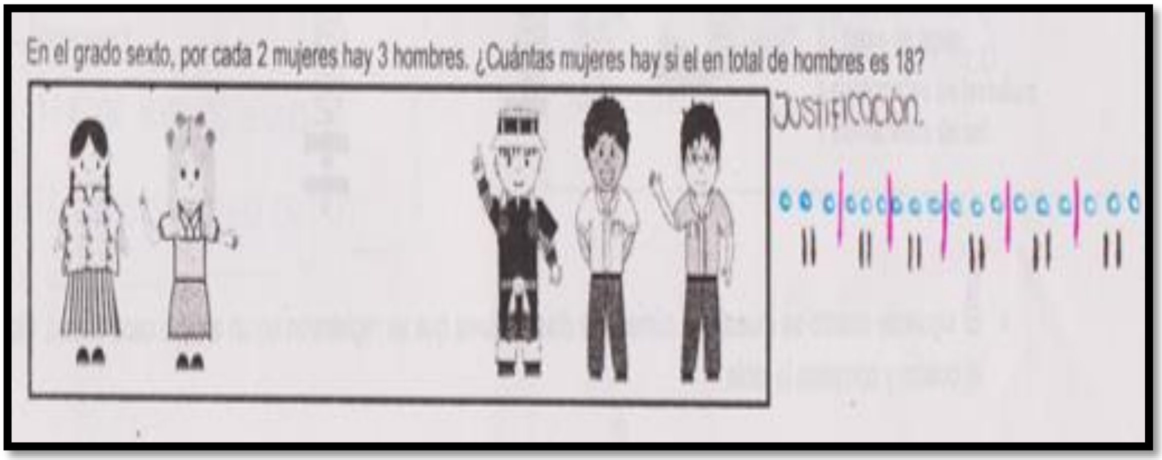
A continuación se presentará aquí un análisis de la resolución de los problemas planteados hecha por parte de los estudiantes.

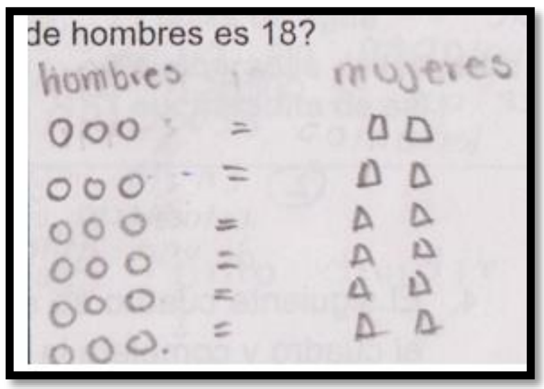
SESIÓN 1- TALLER DIAGNOSTICO

Para un primer acercamiento, se realizó una actividad de presentación y reconocimiento, la cual consistió en una especie de bingo, que tenía como finalidad conocer los nombres de los estudiantes del grupo.

Como un segundo momento, se procedió a la aplicación del taller diagnóstico. El cual recogía en forma general cada contenido a trabajar durante la práctica. Se hizo necesario la ejecución de éste, debido a que era indispensable saber la disposición con que abordarían nuevos contenidos, además de generar posibilidades de cambio a los planes de clase hechas con anterioridad.

Una vez obtenido los resultados del taller, se procedió a analizar el trabajo hecho por los estudiantes. A destacar, en el primer ítem del taller, la mayoría de estudiantes resolvieron en forma adecuada, el procedimiento que se puede observar es realizaron las correspondencias respectivas de varias cantidades hasta encontrar la cantidad que se pedía. Esto lo realizaron mediante una representación con figuras, que les permitió llegar a lo que querían. En este ítem se pretendía que los estudiantes obtuvieran una noción del concepto de razón.





En los problemas siguientes (2 y 3) se platearon situaciones que involucraban magnitudes relacionadas de forma directa e inversamente proporcional, a las cuales los estudiantes respondieron en su mayoría de forma propicia. El último punto fue a consideración de los estudiantes muy difícil, algunos no lo entendieron y nadie pudo contestar de la forma que se esperaba. Es preciso resaltar que lo estudiantes dedicaron la mayor parte del tiempo a tratar de resolver el problema en cuestión y quienes lo hicieron se remitieron a quitar la mitad de cada ingrediente; se observó que tienen problemas con el concepto de fracciones, además no sabían si $^{1}/_{4}$ era mayor o menor que $^{1}/_{3}$, y qué tanto quería expresar la fracción mixta $1\,^{1}/_{4}$.

La finalidad del taller diagnóstico, es de tipo investigativo, pues la pretensión era conocer con que conocimientos previos cuentan los estudiantes, Gracias al desarrollo de este taller se pudo observar que los estudiantes son quienes definen la forma de trabajo, es decir, pensar que al planear nuestras clases todo está dicho, es algo relativo, pues ellos ven desde otro punto de vista lo que los maestros asumimos como correcto o incorrecto, esto no quiere decir que planear una clase sea tiempo perdido, sino que ellos definen el sentido en que se va a ejecutar lo planeado.

SESIÓN 2- IDENTIFICANDO EL CONCEPTO DE RAZÓN

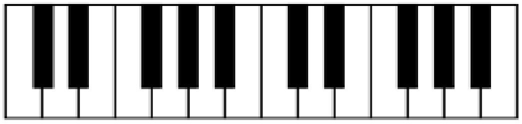
En esta sesión se plantaron dos problemas y la actividad se realizó de forma individual. Para el desarrollo del primer punto, los alumnos recordaron que en el taller diagnóstico se les planeo algo similar, así que procedieron a solucionarlo sin mayor inconveniente.

Seguidamente se definió el concepto de razón, y su respectiva notación, momento en el cual se resaltó la diferencia entre razón y fracción, ya referenciadas con anterioridad por Godino y Batanero.

Ahora, el problema N. 2 planteaba lo siguiente

Considere el siguiente teclado[2]

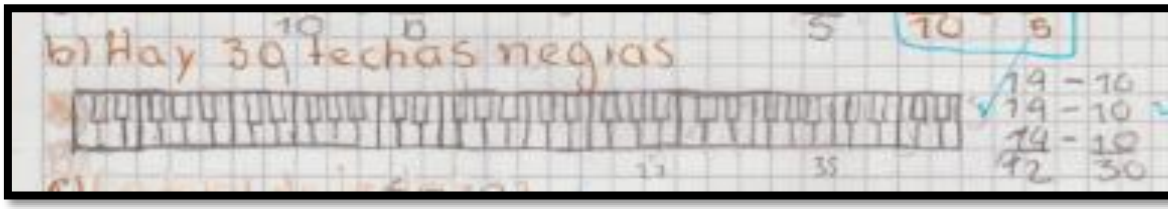
[2] http://www2.lhric.org/Pocantico/math/Course_2/chap08-s.pdf



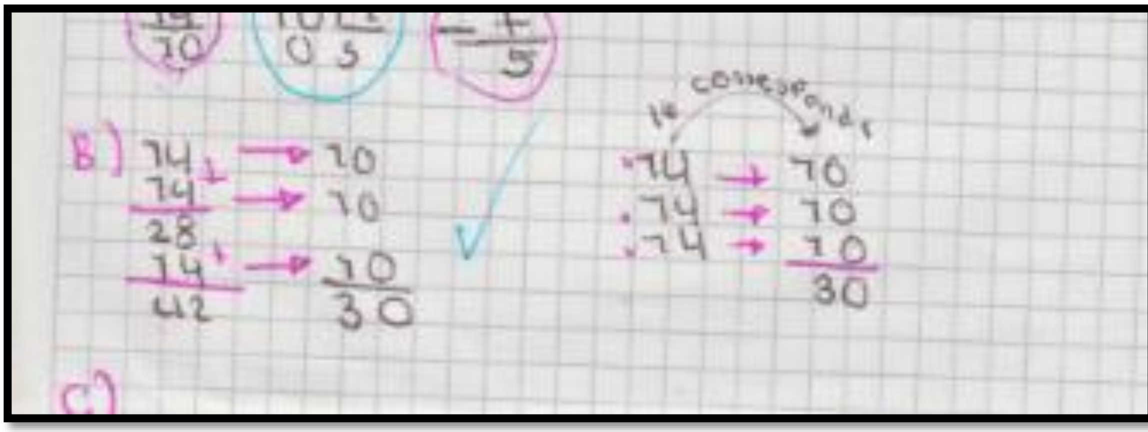
a. ¿Cuál es la razón de teclas blancas a teclas negras del teclado?
b. Este patron de teclas se repite en teclados mas grandes. ¿Cuántas teclas negras esperarias encontrar en un teclado con 42 teclas blancas?
c. ¿Cuál seria la razon entre el numero de teclas negras y el total de teclas del teclado anterior?
d. Cuantas teclas negras esperarias encontrar en un teclado con 72 teclas en total?

En el inciso (a), varios estudiantes hallaron dos razones, pues la figura del teclado parecía estar dividida y no la asumieron como la imagen de un teclado completo; algo que se suponía que podría suceder y que se aclaró inmediatamente. Luego de lo sucedido, se presentó otra dificultad, a pesar de que sabían que tenían que comparar, no daban cuenta de qué cantidad de magnitud era el antecedente o consecuente, incluso ya se había mencionado como saberlo, pero al parecer no prestaron atención o no entendieron.

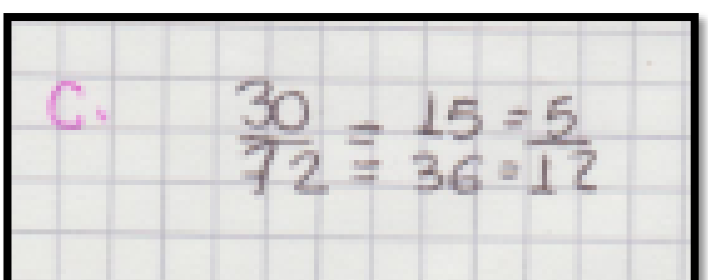
En el ítem (b), ciertos estudiantes realizaron un gráfico donde mostraban la cantidad de teclas que se pedían, para luego remitirse a una solución similar al primer ítem. Aquí se pretendía que los estudiantes observaran o percibieran la importancia de haber encontrado la razón en el ítem precedente, pues si se hubiese utilizado dicha razón, habría sido menos engorroso encontrar la solución.



Cabe resaltar que algunos de ellos procedieron de la siguiente manera para resolver el problema



Se puede mencionar aquí que a pesar de que los estudiantes utilizan diversos métodos para abordar el problema, ellos logran dar cuenta de lo que se esperaba. Para el tercer ítem, muchos estudiantes no veían rápidamente que el total de teclas era la cantidad de teclas blancas y negras, pero todos lograron llegar a la respuesta correcta. A continuación se indica la forma en que ciertos estudiantes escribieron la simplificación de la razón obtenida en este punto.



Como se puede observar, hay un error en la escritura de la igualdad de razones. Errores que se esclarecieron posteriormente, además de dar sugerencias y aclaraciones respecto a la forma en que ellos realizaron los procedimientos. Con esto se hace referencia a la forma en que abordaron el segundo ítem, pues como se mencionó, el procedimiento fue dibujar el teclado mencionado en el problema; entonces se les plantea cómo abordarían el problema si en lugar de ello se tuviera un teclado con 1000 teclas, ¿se haría un dibujo?

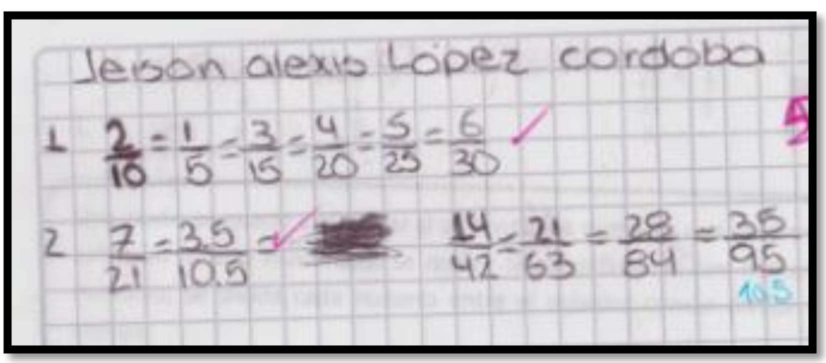
Como se evidencia en los resultados, no siempre los estudiantes optaran por el camino que se considera “adecuado” para desarrollar una actividad, es decir, pensar que ellos se darán cuenta que el camino “correcto” para solucionar un problema, que se pretende acepten. Cabe resaltar que hay trayectos más largos que otros para solucionar un problema, pero esta longitud no implica la jerarquía y perfección de dicho camino. Con lo anterior se hace referencia a que cierto número de estudiantes optaron por dibujar en forma extensa el patrón que se le había dado inicialmente (el piano) para dar respuesta a una pregunta sobre un múltiplo de dicho dibujo. Lo anterior se pudo evitar si se hubiese resaltado que utilizaran la razón obtenida anteriormente, para resolver el problema en cuestión, pues los estudiantes tienden a solucionar problemas por separado, es decir, son problemas totalmente independientes uno de otro.

SESIÓN 3- PROPIEDADES DE LAS RAZONES

La guía de esta sesión se estructuró de tal forma que los estudiantes observaran las definiciones y ejemplos para luego realizar los ejercicios pedidos, esto se hacía con el fin de tener claro las propiedades de la razones para las sesiones siguientes. Se resalta aquí que no se abordaron problemas que implicaran un gran análisis sino los ejemplos y ejercicios que permitiesen de forma sencilla cumplir con el objetivo de la clase.

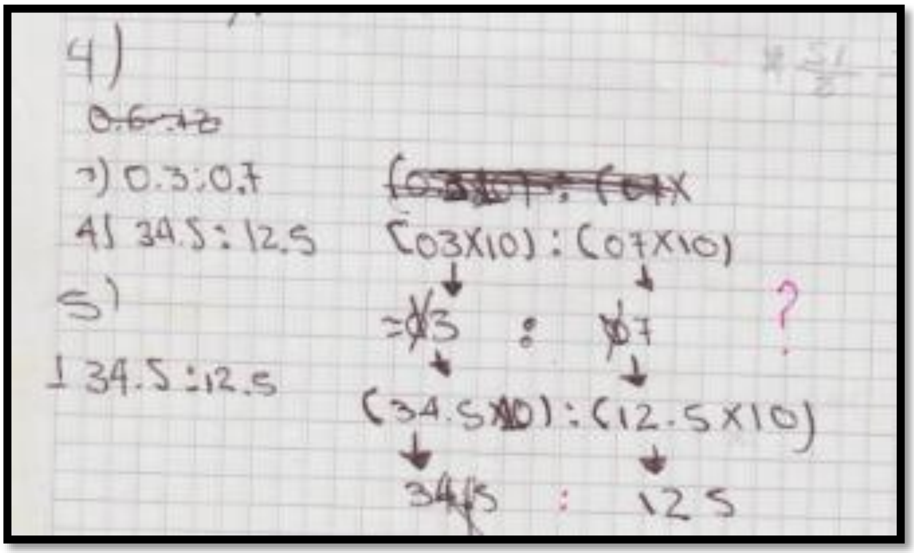
Inicialmente se estudió las *razones equivalentes*, en la guía se indicaba pausadamente el proceso para hallarlas, aunque para algunos este proceso no fue fácil de comprender, creo que esto sucedió porque no leen completamente los enunciados, momento el cual se clarifica ante todos el proceso. A pesar de que se demoraron más del tiempo estimado en este punto, se considera que la mayoría logro entender esta propiedad mencionada.

Como se les pidió que dieran razones equivalentes a unas establecidas, se pude observar que solo multiplicaron y para esto únicamente emplearon números pequeños, y muy pocos dividieron la razón dada.



Para la propiedad de simplificación la mayoría de estudiantes utilizaron la convencional en fracciones y quienes lo hicieron de la otra forma en que se mostraba, se confundían y no lograban entender; esto puede haber sucedido por la utilización de los signos igual (=) y dos puntos (:) en la misma expresión. Pero se les recuerda a los estudiantes cual es la notación matemática de una razón.

Para la parte de la simplificación de una razón expresada en decimales, la gran mayoría no entendió el proceso que se mostraba, a pesar de que estaba escrito el procedimiento, lo más grave es que no recordaban como multiplicar un decimal por el número 10, así que se procede a explicar brevemente como se operaba.



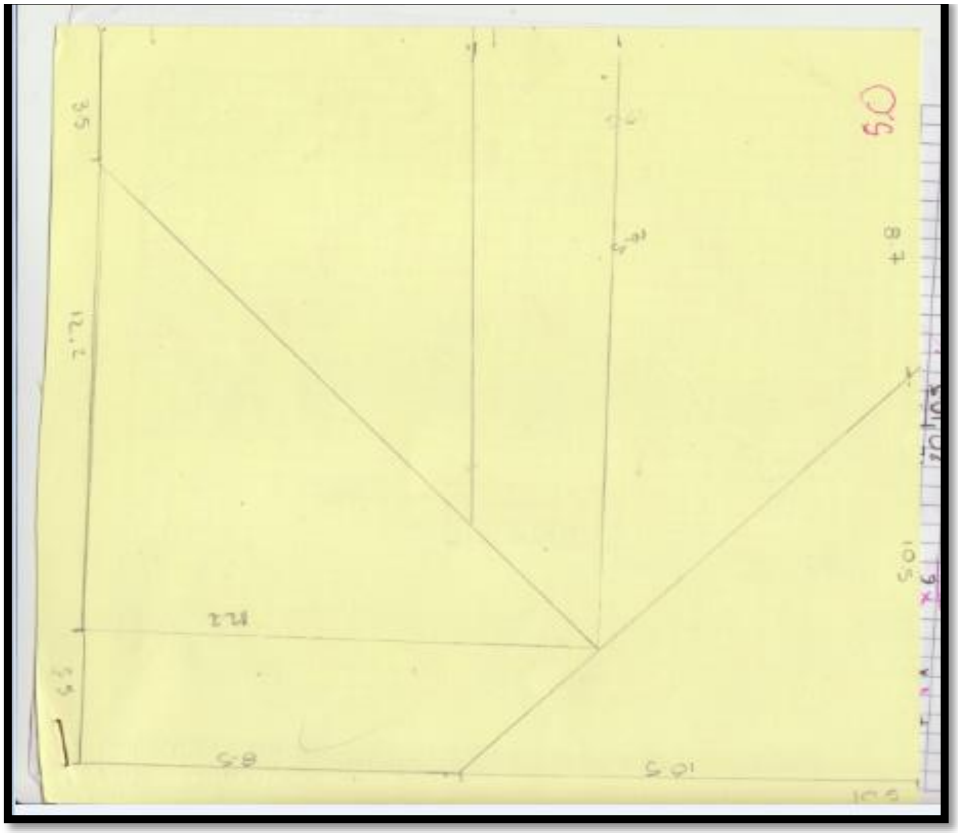
El proposito de esta sesión era tener un dominio amplio de las propiedades de las razones de tal forma que se puedieran emplear en la resolucion de otros porblemas relacionados. Además se pretendía analizar aquí los procesos multiplicativos de los estudiantes e ir corrigiendo errores en sus procesos.

SESIÓN 4- UN NUEVO CONCEPTO, PROPORCIÓN

Para el primer problema, el cual permite ver el concepto de proporción, mediante la comparación de dos razones, se empleó poco tiempo, pues los estudiantes manifestaron comprender a lo que se refería y procedieron a solucionarlo de inmediato. Con este problema se constata que comprendieron el concepto de razón y de cómo se escribe esta. Seguidamente se aborda el segundo punto, que consistía en un rompecabezas con medidas proporcionales a uno ya establecido. Con este problema, se puede evaluar lo estudiando en las dos sesiones anteriores, pues involucra el manejo de razón, razones equivalentes y simplificación, además de ciertas operaciones básicas.

Una de las estudiantes quien asistió por primera vez consideró que las nuevas medidas del rompecabezas estaban dadas por la adición de tres unidades más, es decir, como inicialmente se tenía un lado de 4cm y ahora se pedía de 7cm , entonces a todas las demás medidas debía sumárseles 3cm. Se le pidió que realizara lo que estaba comentando y que elaborara el rompecabezas, pero al tratar de hacerlo verificó que ese no era el procedimiento. La mayoría de los estudiantes no sabían cómo encontrar esas nuevas mediadas, entonces se les recordó el proceso que se realizó en la resolución de los problemas planteados en la sesión 2, y con esto empezaron a solucionar el problema.

El siguiente, es el rompecabezas con las nuevas mediadas, el cual pudo ser realizado por todos durante la sesión completa, además de las operaciones que hicieron para encontrar dichas las nuevas cantidades. Quienes terminaron primero, se les dio un tangram con dimensiones pequeñas, para que hicieran otro con medidas proporcionales al dado y luego armaran las figuras que se les pedía.



Al terminar las actividades se le pregunta a cada uno que habían aprendido en esta sesión, la mayoría respondió que "a dibujar cosas más grandes, teniendo una más pequeña, con medidas parecidas", afirmación un poco alejada del propósito, pero con un grado de certeza frente a lo que se pretendía.

SESIÓN 5- PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Debido a que se presentaría un video sobre magnitudes directamente proporcionales, los estudiantes se ubicaron muy cercanos el uno del otro y junto al equipo en el cual se estaba proyectando tal video, el cual les pareció muy divertido. Seguidamente se le entregó el taller el cual estaba muy relacionado con lo anteriormente observado en el video. Es importante aclarar que antes de que dieran comienzo a la resolución del taller se socializó sobre lo que se había mostrado, es decir, se hicieron preguntas sobre que es magnitud, cuando son directamente proporcionales y algunos ejemplos de estas.

Las siguientes son las respuestas de los estudiantes frente a los problemas planteados.

Punto 1.

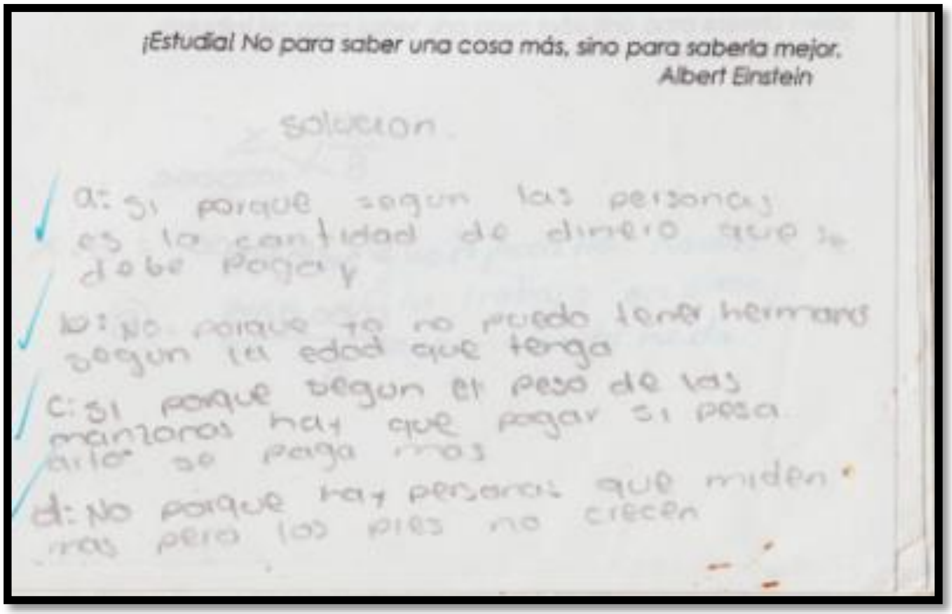
Aquí se les pedía verificar y justificar cuales de los enunciados dados era una situación de proporcionalidad.

a. La cantidad de personas que viajan en un autobús y el dinero recaudado.

b. La edad de una persona y el número de hermanos que tiene.

c. El peso de las manzanas compradas y el precio pagado por ellas.

d. La altura de una persona y el número de calzado que usa.


¡Estudia! No para saber una cosa más, sino para saberla mejor.
Albert Einstein

solucion

a: si porque segun las personas es la cantidad de dinero que se debe pagar

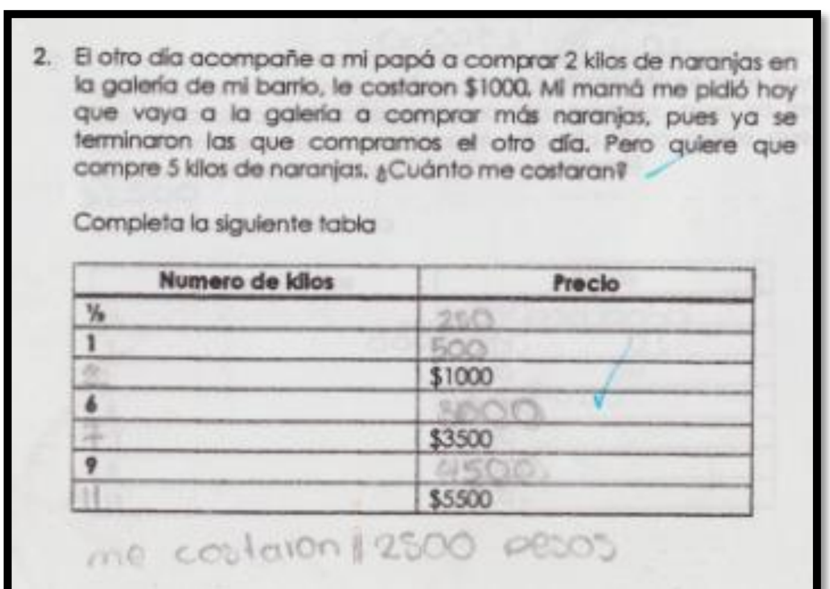
b: no porque yo no puedo tener hermanos segun la edad que tenga

c: si porque segun el peso de las manzanas hay que pagar si pesa arto se paga mas

d: no porque hay personas que miden mas pero los pies no crecen

La mayoría de estudiantes escribieron formas muy parecidas a la anterior respuesta, la cual indica que el concepto estaba siendo adquirido por todos y además de forma adecuada.

Punto 2.


2. El otro día acompañe a mi papá a comprar 2 kilos de naranjas en la galería de mi barrio, le costaron $1000. Mi mamá me pidió hoy que vaya a la galería a comprar más naranjas, pues ya se terminaron las que compramos el otro día. Pero quiere que compre 5 kilos de naranjas. ¿Cuánto me costaran?

Completa la siguiente tabla

Numero de kilos	Precio
½	250
1	500
2	$1000
6	3000
7	$3500
9	4500
11	$5500

me costaron $2500 pesos

En este caso, la mayoria de los estudiantes o tuvieron iconveniente en compleat la tabla, aunque varios de ellos obtuvieron un resultado erroneo en la fila 6.

El punto 3 tuvo mucha dificultad en desarrollarse, los estudiante manifestaron que era a claro lo que se pedía pero la tabla tenía muchas casillas por llenar, entonces eso los confundía un poco. Debido a esto se realiza en el tablero la solución de la priimera fila de la tabla lo que permitió que siguieran con las restantes. Se resalta aquí que el enunciado era claro, pero el diseño de la tabla confundía un poco acerca de lo que se pretendía contestaran.

La sesión se dio por terminada, haciendo conclusiones sobre lo aprendido y recalcando que es indispensable que los estudiantes realicen una lectura honesta del taller, para tener herramientas que no las podria brindar una lectura a la ligera.

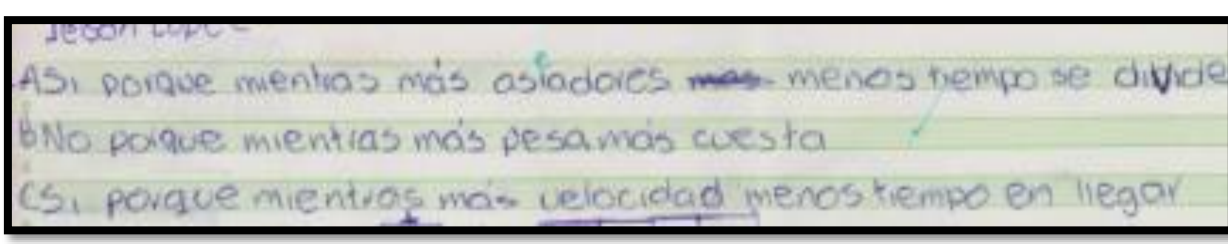
SESIÓN 6- PROPORCIONALIDAD INVERSA

Uno de los procedimientos matemáticos que se estudian en la educación básica y que es utilizado diariamente, es la comúnmente llamada Regla de tres. Los estudiantes con frecuencia utilizan la reglas de tres para la resolución de cierta clase de problemas, pero si no se ve ésta como un recurso activo y tan solo como una operación que encuentra un resultado, pareciese que atentara contra el razonamiento de los estudiantes. Por esta razón es necesario desarrollar un razonamiento proporcional, que se puede aplicar en situaciones de este tipo y diferenciarlo de contextos no proporcionales, para esto se hace necesario trabajar con problemas que involucren la relación de magnitudes de forma directa como inversa.

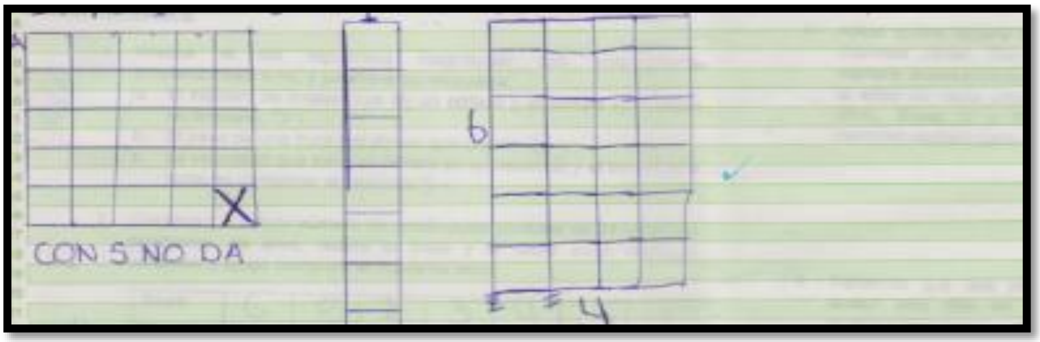
Para tal fin, el trabajo realizado con los estudiantes en esta sesión se centró en el tratamiento de problemas que involucraban magnitudes relacionadas de forma inversamente proporcional, y en los cuales una aplicación de la regla de tres no daba cuenta totalmente de lo pedido en dichos problemas. Con el fin de seguir resaltando que en la cotidianidad estamos rodeados de matemáticas y que somos protagonistas de estas matemáticas realmente existentes, se les pidió a los estudiantes que analizaran ciertas situaciones y que decidieran si su relación era de forma inversamente proporcional o no. A continuación se exponen algunas circunstancias analizadas por los estudiantes.

a. El número de limpiadores de un edificio y el tiempo que tardan en limpiarlo.
b. El peso de una fruta y el dinero que cuesta.
c. La velocidad que lleva un ciclista en un recorrido y el tiempo que tarda en completar el recorrido.

Por los resultados arrojados por parte de los estudiantes, se concluye que están en la plena capacidad de identificar las relaciones de las magnitudes mencionadas con tan solo imaginar la situación. Todos los estudiantes respondieron de forma adecuada, aunque tres de ellos no justificaron su respuesta. Es importante aclarar que los alumnos habían realizado un ejercicio similar en la sesión anterior a esta, en el que se involucraban magnitudes directamente proporcionales y por lo tanto se les hizo familiar dicho ejercicio. A continuación se muestra la justificación dada por un alumno.



Para seguir dando cuenta del comportamiento de esta clase relación entre cantidades dadas, se procedió a pedirle al estudiante que construyera el mayor número de rectángulos posibles de 24 unidades cuadradas de área, donde la base y la altura fueran números naturales. Esta es una de las representaciones hechas por parte de los estudiantes.



Como se observa en la figura, un estudiante quiso realizar un rectángulo de base y altura 5, pero llegó a que sobraba un cuadrado, lo que permitió que él mismo se percatara de que no era posible construirlo con las condiciones dadas. Dichas construcciones se realizaron con el fin de que una vez hechas, completaran la tabla (1) y se dieran cuenta de la particularidad de la pareja dada por la base y altura del rectángulo.

Base	1	2	3	4	6	8	12	24
Altura	24	12	8	6	4	3	2	1
Área	24	24	24	24	24	24	24	24

Tabla 1

Se les preguntó cómo se comportaba la altura mientras la base se hacía más grande, a lo que respondieron que disminuía. De esta forma se identificó el concepto de magnitudes inversamente proporcionales, pero aclarando que dicho comportamiento no era de forma arbitraria sino en forma proporcional. Además de esto se determinó el concepto de constante de proporcionalidad inversa, que en este caso es el área del rectángulo. Se enfatizó que la proporcionalidad inversa también posee, al igual que la proporcionalidad directa una constate de proporcionalidad, pero esta vez en lugar de ser esta la razón entre estas cantidades, ahora es el producto entre ellas. Esto último con el fin de que les permitiera abordar los problemas sin necesidad de plantearse una regla de tres.

Para llevar a cabo lo anterior, se trabajaron tres problemas en los que se involucraban el tema en cuestión, pero se escoge solo uno de ellos, el cual involucra proporcionalidad directa e inversa.

5. Sabemos que dos pintores tardan seis dias en pintar cuatro habitaciones. ¿Cuánto tiempo emplearan tres pintores en terminar seis habitaciones?

Debido a que se tenía poco tiempo para el desarrollo de éste problema, se abordó entre todos los estudiantes y la profesora. Este problema tiene involucrado magnitudes directa e inversamente proporcionales, debido a esto, los estudiantes deben identificar las respectivas relaciones. Además en dicho problema se puede reconocer las actividades realizadas anteriormente, es decir, inicialmente el estudiante debe identificar cómo se comportan las magnitudes, también se involucra una constante de proporcionalidad inversa y las respectivas operaciones. En la resolución de este problema se tuvo en cuenta varios momentos. Inicialmente se identificó el comportamiento de las magnitudes, es decir, el número de habitaciones con el número de días se comportaban de forma directa, para la cantidad inicial de pintores; se utilizó aquí lo aprendido en la sesión de magnitudes directamente proporcionales y así se conoció el número de días para las seis habitaciones finales. Seguidamente dejando como fijo el número final de habitaciones, se trabajaron las que se relacionaban de forma inversa, las cuales eran el número de pintores y el número de días, y sabiendo que el producto de estas cantidades es siempre constante (constante de proporcionalidad inversa) se llegó a la solución. Es importante aclarar que lo anterior se realizó con la ayuda de tablas de las relaciones de las magnitudes mencionadas.

Este es el procedimiento que se llevó a cabo para la resolución del problema.

Construyamos dos tablas, una para las magnitudes directamente proporcionales y otra para las inversamente proporcionales.

Tabla de las magnitudes directamente proporcionales para el trabajo de dos pintores

N. de habitaciones	*4*	*6*
N. de días	*6*	*x*

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

Los dos pintores tardarían 9 días en pintar seis habitaciones.

Tabla de las magnitudes inversamente proporcionales para pintar seis habitaciones

N. de pintores	*2*	*3*
N. de días	*9*	*y*

$$2 \times 9 = 3 \times y$$

$$18 = 3 \times y$$

$$\frac{18}{3} = y$$

$$6 = y$$

Por lo tanto tres pintores se demoran seis días en pintar seis habitaciones.

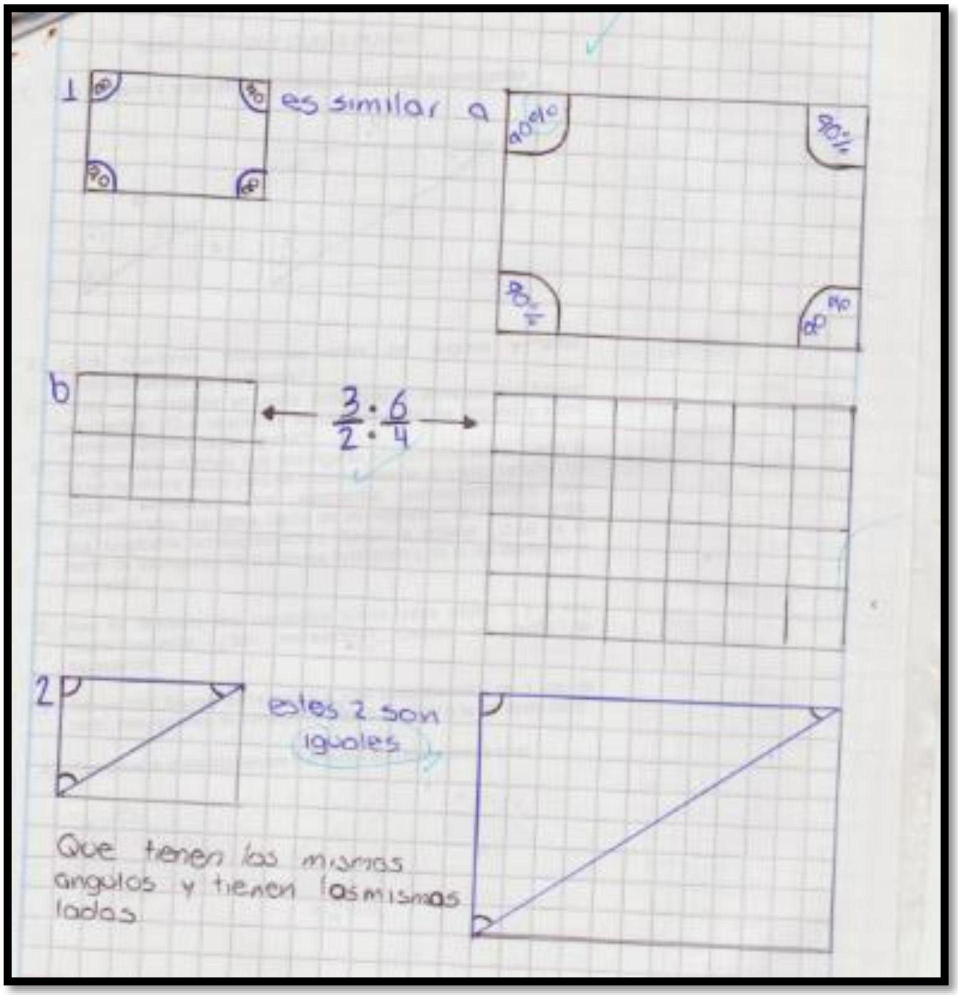
Para quien apenas está iniciando su formación en la educación secundaria tratar de concebir en la representación de la regla de tres las operaciones mencionadas es algo complejo. Cabe aclarar que el fin de esto no es desmeritar en su totalidad este procedimiento, pues como se sabe, existe la regla de tres simple directa o inversa y la compuesta directa o inversa, procedimientos válidos y acertados, pero difíciles de visualizar. Es debido a esto que en la forma en que se trabajan las magnitudes inversamente proporcionales envueltas en un problema, permite romper con lo anterior, con esto no se desmerita o excluye el mismo trabajo que pudiese también haberse realizado con la proporcionalidad directa, pero es la que de forma puntual expone las limitaciones de la regla de tres.

Para que este conocimiento sea realmente significativo, el proceso de aprendizaje debe no ser rápido y superficial, no se debe obviar detalles y procedimientos mínimos en la ejecución de este procedimiento y debe darse con frecuencia y a un ritmo acorde al de los estudiantes involucrados en el proceso.

SESIÓN 7- SEMEJANZA Y PROPORCIONALIDAD

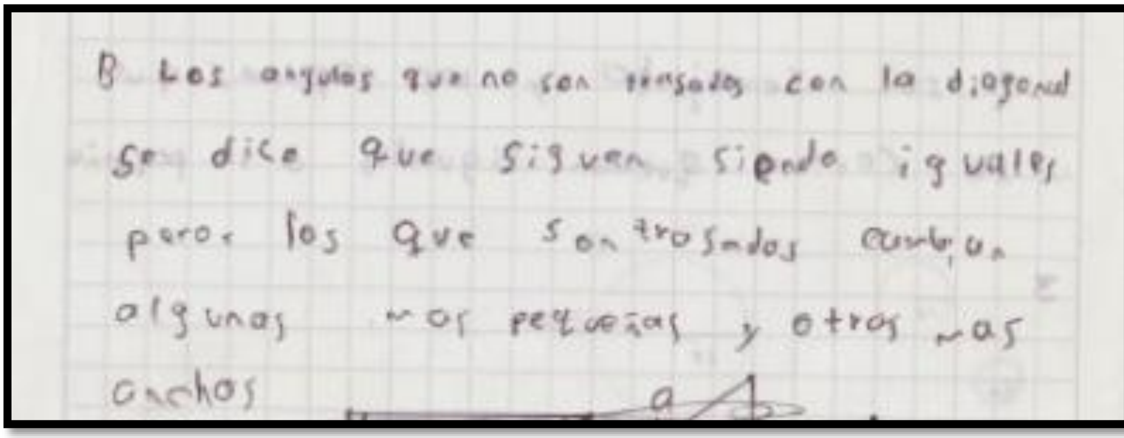
Durante el desarrollo del taller se presentaron muchos inconvenientes pues se les ha olvidado conceptos importantes de geometría plana, como por ejemplo la noción de ángulo, la medida de un ángulo recto, entre otros. A continuación se exhibirá algunos de los procedimientos y respuestas del taller dadas por los estudiantes.

Para la resolución del primer punto, el cual consistía en encontrar relaciones entre los ángulos y lados correspondientes de dos figuras semejantes, se presentó el inconveniente de confundir o no saber que es un ángulo, o por lo menos identificarlo en la figura, motivo por el cual no lograban contestar la pregunta. Debido a lo anterior se decidió dar una noción de lo que significa, pues está visto que no es tan fácil definir y entender dicho concepto. Luego de tener la noción de ángulo, se les olvida las características de los rectángulos, figura que estaba siendo estudiada, es decir, aspectos como la medida de sus ángulos y lados. Estas son algunas de las justificaciones dadas por los alumnos.



En este punto, algunos se olvidaron de comparar también los lados de los rectángulos dados, se remitieron solo a los ángulos.

En el inciso b de este punto se les pedía trazar la diagonal de cada rectángulo y hacer el mismo ejercicio de comparación. Muchos se confundieron y compararon los dos triángulos que resultaban del mismo rectángulo y se presentó el problema de identificar los ángulos de los triángulos, aunque algunos de ellos sí pudieron observar las relaciones que se pedía.


B Los angulos que no son trasados con la diagonal
se dice que siguen siendo iguales
pero los que son trasados cambian
algunas mas pequeñas y otros mas
anchos

El desarrollo de la parte c de este punto, en el cual se mostraba la definición de figuras semejantes y razón de semejanza, tuvo inconvenientes, pues no se lograba entender la definición razón de semejanza. Debido a esto, se tomó determinado tiempo para explicar y dar algunos ejemplos de semejanza de figuras planas, el cual lo entendieron claramente; segmentos proporcionales y por último razón de semejanza; os dos últimos conceptos fueron difíciles de comprender, pero se llegó a tener noción de ello. Además se profundizarías en la sesión siguiente acerca de estos conceptos.

Para el segundo y tercer punto, los cuales consistían en dibujar figuras semejantes a una dada y su razón de semejanza, la mayoría de estudiantes realizó este ejercicio. Y en el último punto que trataba de comprobar si determinados triángulos eran semejantes, quienes alcanzaron a llegar a este punto identificaron claramente que triángulos lo eran, esto lo hicieron comparando los lados correspondientes, en donde llegaron a que todos tenían la misma razón por tanto eran semejantes los triángulos comparados. Situación que sorprende, pues habían podido encontrar la razón de semejanza sin que se hubiese especificado que se hiciera. Debido que se terminó el tiempo de la sesión, muchos no alcanzaron a desarrollar completamente el taller.

SESIÓN 8- SEMEJANZA, TEOREMA DE TALES

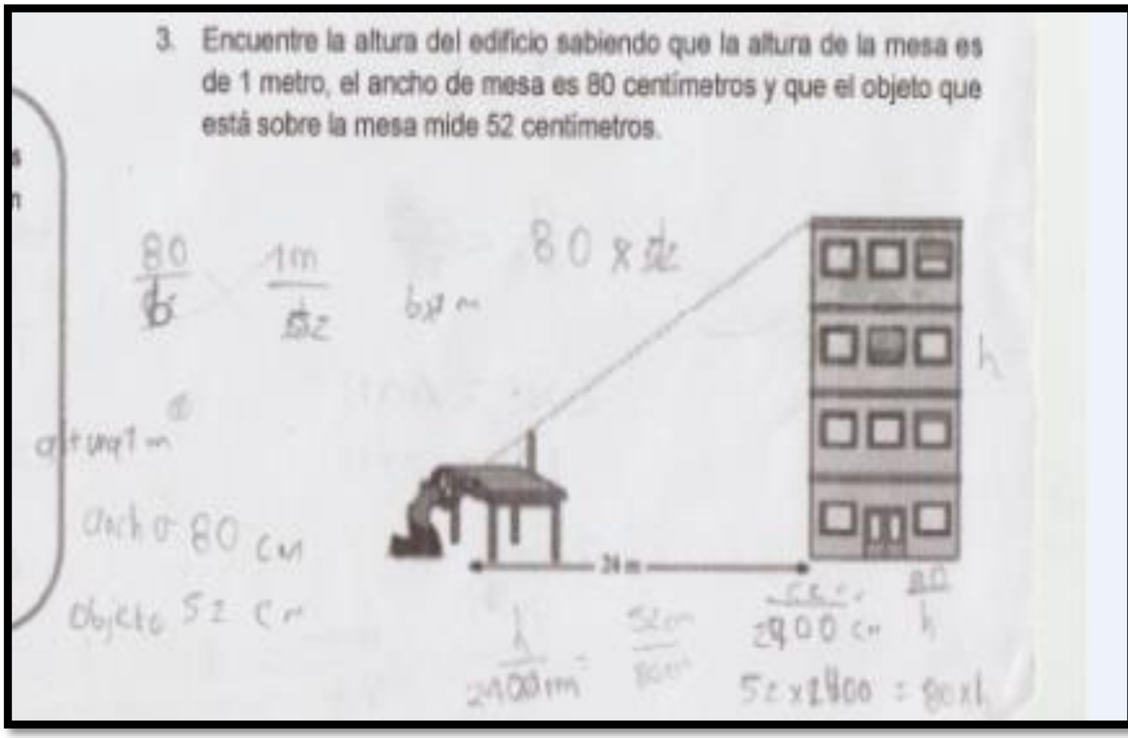
Inicialmente se hace una presentación en Power Point[3] sobre lo que se aprendió en cada sesión de clase, algunos de ellos no recordaban con detalle lo que se realizó en cada una de ellas, pero esto sirvió como recorderis para la actividad planeada para este día.

Seguidamente se les comentó la historia sobre el descubrimiento de Tales y de su famoso teorema, en este último aspecto se confundieron un poco, por lo que se debió realizar la figura respectiva del teorema de Tales para triángulos, pues no comprendía la figura del teorema general. Seguido de esto se les presento el taller. Por motivos climáticos, nos e pudo salir del aula para realizar el primer punto de la guía, el cual consistía en hallar la altura de un árbol o un edificio del colegio, conociendo la longitud de su sombra, la altura de un compañero del grupo y de su respectiva sombra. Dicho punto era de gran importancia para la comprensión del teorema, pero no se pudo realizar, motivo por el cual se dificulto la comprensión de los puntos siguientes.

En el Punto 2, como se dijo anteriormente se les dificultó comprender el teorema por lo que se debió dibujar en el tablero la imagen de las relaciones de este punto de forma muy clara y además exponer las relaciones de semejanza. Dado esto, empezaron a trabajar efectivamente, con excepción de algunas divisiones incorrectas, problema al cual estuvo presente en cada sesión, pero que fue disminuyendo progresivamente.

[3] ..\resumen sesiones.pptx

Seguidamente en el punto 3



Este último punto fue el de mayor dificultad, pues a pesar de que se había logrado dar la aplicación del taller en el problema anterior, no sabían cómo relacionar los datos del teorema con los datos de este problema. La mayoría realizó las operaciones como consideró correcto, pero no se percataron de observar las unidades de medida de cada dato y operaron como si todas tuvieran las misma, se les comenta sobre dicho detalle, pero no supieron como corregirlo, momento en el cual se les menciona rápidamente como hacerlo, aunque algunos de ellos dejaron tal como lo habían hecho inicialmente. Por falta de tiempo se debió dar por terminada el desarrollo de la guía.

6. CONCLUSIONES

Se evidenció que los estudiantes que al trabajar con problemas que involucraran razones, proporciones y proporcionalidad, lograron desarrollar la estructura multiplicativa y no solo implementar la estructura aditiva con la que comúnmente vienen constituidos ciertos problemas. A través de dichos problemas se logra evidenciar que la multiplicación no es solo una suma reiterad, es ella una operación binaria también.

Se superó algunas limitaciones en el uso de la regla de tres, dado que en los problemas relacionados con proporcionalidad inversa, se pone en manifiesto que no se puede aplicar indiscriminadamente dicho algoritmo, sino que se debe analizar con anterioridad cómo están relacionadas las cantidades de magnitud.

Se incentivó la discusión, experimentación y análisis de situaciones en donde pudiera o no existir una relación de proporcionalidad, ya fuese directa o inversamente. Vale la pena resaltar que los estudiantes daban cuenta con naturalidad cuando no había una relación de proporcionalidad, pues las situaciones eran muy familiares para ellos.

Se minimizó en gran medida la asignación de significado erróneo a algunos conceptos, además de recordar otros. Con esto se hace referencia, a que algunos de ellos no recordaban o no tenían presente nociones y definiciones de ciertos conceptos, tales como ángulo, segmento de recta, magnitud, cantidad de magnitud, entre otros. Además de que se estableció claramente las diferencia entre razón y fracción.

Se pude sintetizar que estos logros contribuyen al desarrollo del razonamiento proporcional, tal vez no en la medida que se esperaba, pero si es un avance fundamental para seguir fomentando este razonamiento, el cual se convierte en herramienta significativa para el estudiante en el área de las matemáticas.

Una de las tareas fundamentales en el desarrollo de la práctica docente es la planeación de las clases, pues de ella depende en gran parte el alcance o no, de los objetivos. Además ésta permite fusionar la teoría con la práctica pedagógica, lo que proporciona la creación de una secuencia de aprendizajes que se pretende alcancen los estudiantes. Por esta razón, es importante cuestionarse sobre el grado de importancia que se le otorga a dicha planeación y de los factores involucrados en su ejecución. En el desarrollo de la práctica que se realizó pude contemplar que son los estudiantes quienes determinan la dirección en que se va efectuar lo planeado. Es necesario aclarar que no todo está dicho en la planeación de la clase, debido a que se pueden presentar diversas situaciones ajenas a lo previsto, pero es en este momento en el que la función orientadores entre en funcionamiento, se debe diseñar estrategias que permitan solucionar y avanzar hacia los objetivos planteados.

Es fundamental que como maestros demos a entender y comprender la finalidad de lo que se está haciendo, pues para los estudiantes es esencial reconocer un tipo de motivación o estimulo frente al nuevo aprendizaje. Además, para reflexionar, muchas veces no comprendemos el significado que tiene planear reflexivamente las clases antes de ir al aula, pues se tiende a asumir que ésta es una labor de traspaso de conocimientos de un libro al tablero y seguidamente al cuaderno. Por esta razón como educadores debemos ser conscientes que en nuestras manos está la herramienta para poder construir un aprendizaje significativo para los estudiantes, que les permita ser seres críticos en la sociedad. Por lo tanto, una vez más se puede afirmar que esta profesión, a pesar de que no es recompensada económica y socialmente, es la que mejor permite edificar pensamientos críticos, constructivos y humanos.

8. ANEXOS

Guías de clase.

TALLER DIAGNÓSTICO

TALLER DIAGNOSTICO- RAZONES, PROPORCIONES Y PROPORCIONALIDAD

Grados 7° B y 7°C

NOMBRE: ______________________________ **FECHA:** _____________________

INDICACIONES:

- Lee atentamente cada ítem del taller.
- Piensa y analiza antes de contestar.

1. En el grado sexto, por cada 2 mujeres hay 3 hombres. ¿Cuántas mujeres hay si el total de hombres es 18?[4]

[4] Razones y proporciones y un tanto por ciento. Página 117

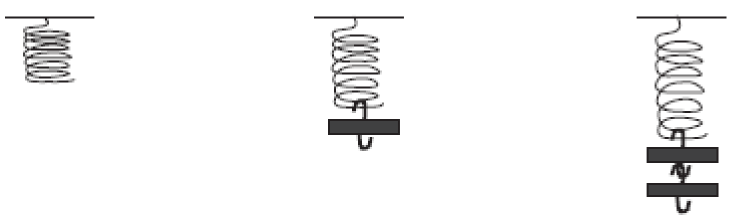
2. Un auto consume dos galones de gasolina por cada cien kilómetros que recorre. Llena la siguiente tabla con los valores correspondientes[5]:

# km	# galones
150	
200	
300	
500	

3. Completa las siguientes frases de acuerdo a cada situación.

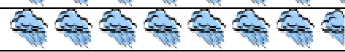
a) Tememos un hielo en forma de cilindro, con determinada altura. Si el calor aumenta, la altura del hielo__________

b) Conforme el peso aumenta, el largo del resorte _________



[5] (Quintero) página 8.

4. El siguiente cuadro se muestra el número de días de lluvia que se registraron en un año en cada ciudad. Observa el cuadro y completa la tabla[6].

Cuidad	 ⇨ 10 días  ⇨ 5 días	Recuento
Medellín		65
Pasto		
Popayán		
Bogotá		
Cali		

5. Marta sigue esta receta para hacer pan de avena con jarabe de miel. Justo cuando se prepara para mezclar los ingredientes se da cuenta que su hermano uso la mayor parte del jarabe de miel para el desayuno. Marta solo tiene $\frac{1}{4}$ de taza de jarabe. Por consiguiente, decide hacer una tanda más pequeña de pan. ¿Qué cantidad de cada ingrediente debe usar?

Pan de avena y miel
1 taza de avena
3 tazas de harina de pan
$\frac{1}{3}$ de taza de jarabe de miel
1 cucharada de aceite de comer
$1\frac{1}{4}$ tazas de agua
3 cucharadas de levadura
1 cucharadita de sal

[6] (Godino & Batanero, Proporcionalidad, 2002) página 418.

Guía 1. IDENTIFICANDO EL CONCEPTO DE RAZÓN

IDENTIFICANDO EL CONCEPTO DE RAZÓN

OBJETIVO. Identificar y apropiar el concepto de razón mediante la resolución de diferentes problemas.

DURACIÓN SESIÓN: 2 horas

HERRAMIENTAS:

- Papel y lápiz.

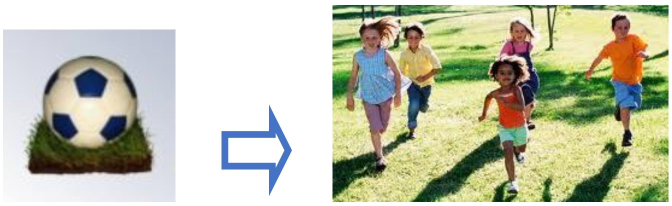
ORGANIZACIÓN: en la actividad para esta sesión se plantearan problemas. En los dos primeros se hará en forma individual y el segundo en parejas. Las actividades se harán dentro del aula.

DESARROLLO. Inicialmente, para el problema No. 1 el cual no presenta un alto grado de complejidad, y donde los estudiantes podrán intuir sobre el concepto de razón, se tendrá 15 minutos para este. Seguidamente se plantea otro problema que requiere más profundización y trabajo colaborativo, para esto se dispondrá el resto de la sesión. Terminadas las actividades se aclararan dudas relacionadas con el concepto de razón.

ACTIVIDADES

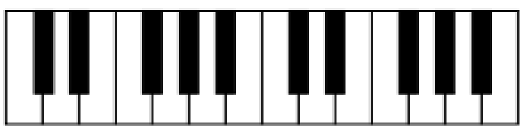
Problema N.1

En clase de educación física de un colegio cada pelota de fútbol es utilizada por cinco niños, o sea que tenemos cinco veces más alumnos que pelotas de fútbol. Aquí tenemos una relación entre alumnos y pelotas, si las pelotas son 7, ¿Cuántos alumnos son?



Problema No. 2

Considere el siguiente teclado[7]



e. ¿Cuál es la razón de teclas blancas a teclas negras del teclado?
f. Este patron de teclas se repite en teclados mas grandes. ¿Cuántas teclas negras esperarias encontrar en un teclado con 42 teclas blancas?
g. ¿Cuál seria la razon entre el numero de teclas negras y el total de teclas del teclado anterior?
h. Cuantas teclas negras esperarias encontrar en un teclado con 72 teclas en total?

[7] http://www2.lhric.org/Pocantico/math/Course_2/chap08-s.pdf

Guía 2. PROPIEDADES DE LAS RAZONES

PROPIEDADES DE LAS RAZONES[8]

OBJETIVO. Reconocer mediante ejemplos y posteriores ejercicios las características o propiedades de las razones.

DURACIÓN SESIÓN: 2 horas

HERRAMIENTAS:

- Papel y lápiz.

ORGANIZACIÓN: durante esta sesión se realizará la actividad en forma individual.

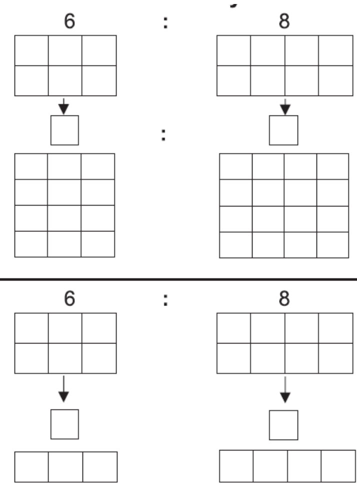
DESARROLLO: se mostrará mediante ejemplos donde se especifican las propiedades de las razones y seguidamente el estudiante deberá solucionar los ejercicios pedios con la ayuda del ejemplo expuesto.

ACTIVIDADES

✓ ***Representación de razones equivalentes***.

[8] Razones y proporciones y un tanto por ciento. Páginas 114-116

Escriba el número que va en cada cuadro y realice los cálculos que se le indican:



Dada la razón 6: 8,
¿Cuál es la razón que se forma si se multiplica 6 y 8 por 2?

Calcule el valor numérico de las dos razones y compare.

Dada la razón 6: 8,
¿Cuál es la razón que se forma si se divide 6 y 8 entre 2?

Calcule el valor numérico de las dos razones y compare.

Dada una razón *a: b*, si multiplicamos o dividimos a *a* y *b* por el mismo número, las razones resultantes son equivalentes.

Teniendo en cuenta lo anterior, escribe tres razones equivalentes a las que se indican:

1) 2:10
2) 7:21

✓ A Luis le piden encontrar una razón equivalente a 28:35, pero con números más pequeños. Observa como lo hace.

Forma A

$$28 : 35 = (28 \div 7) : (35 \div 7)$$
$$= 4 : 5$$

Forma B

$$\frac{\cancel{28}^{\,4}}{\cancel{35}_{\,5}} = \frac{4}{5}$$

Una razón se puede simplificar si se divide los números que la forman entre un mismo número. Si se quiere la simplificación con números menores, se divide cada número entre el máximo común divisor de ambos.

✓ Simplifica las expresiones:

1) 35:50

2) 63:72

✓ Observa cómo se puede simplificar 0.6 : 1.2

$0.6 : 1.2 = (0.6 \times 10) : (1.2 \times 10)$ ← Me ayudo multiplicando por 10.

$= 6 : 12$ ← Divido 6 y 12 entre su M.C.D.

$= 1 : 2$ ← ¡Y... aquí está la razón simplificada y equivalente a 0.6 : 1.2!

Una razón expresada con decimales se puede convertir en una razón equivalente expresada con números naturales. Esto hace más fácil su manejo.

✓ Simplifica las expresiones

3) 0.3 : 0.7

4) 34.5 : 12.5

Guía 3. UN NUEVO CONCEPTO, PROPORCIÓN

UN NUEVO CONCEPTO, PROPORCIÓN

OBJETIVO. Familiarizarse con el concepto de proporción mediante la realización de dibujos a escala y una situación dada.

DURACIÓN SESIÓN: 45 minutos

HERRAMIENTAS:

- ✓ Lápiz y borrador
- ✓ Cartulina
- ✓ Regla
- ✓ Colores

ORGANIZACIÓN: en esta sesión se realizara una actividad que consta de dos problemas. Para el primero se trabajara individualmente y para el segundo en parejas. La sesión se hará en el aula de clase.

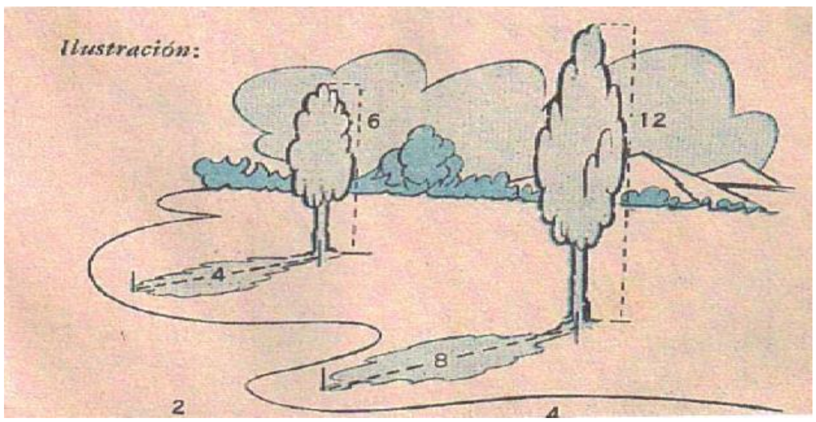
DESARROLLO. El problema N.1 es una especie de repaso del tema anterior que permite introducir el concepto de proporción, mediante una comparación gráfica, para ello se determina un tiempo de 10 minutos. Para la segunda actividad se requiere de construcciones por parte del estudiante en donde se observara la proporción de magnitudes en figuras semejantes, para ello se estima un tiempo de 35 minutos.

ACTIVIDADES

Problemas N.1

Con respecto a la siguiente ilustración, responda las siguientes cuestiones:

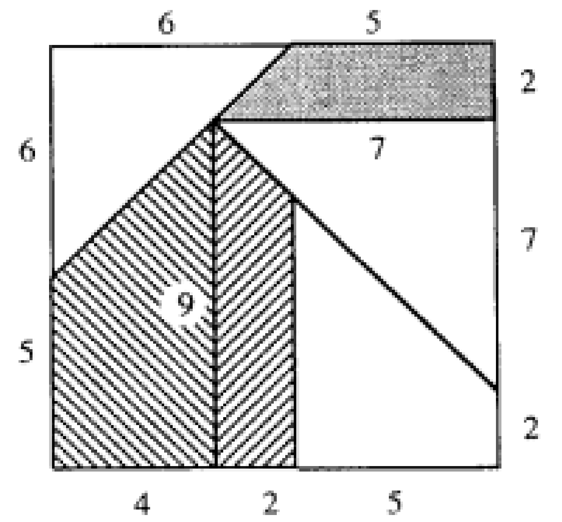
¿Cuál es la razón de la altura de cada árbol con respecto a su sombra? ¿Qué tienen en común las dos figuras?[9]



El rompecabezas[10]

En la figura adjunta se presentan las piezas de un rompecabezas. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Construir en cartulina este rompecabezas pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. Trabaja en colaboración con otro compañero haciendo cada uno la mitad de las piezas.

[9] (Lpoez & Perdomo, 2007) página 32
[10] (Godino & Batanero, Proporcionalidad, 2002)


6
5
2
6
7
7
9
5
2
4
2
5

Guía 4. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

OBJETIVO. Comprender el concepto de proporcionalidad directa mediante la resolución de problemas.

DURACIÓN SESIÓN: 2 horas

HERRAMIENTAS:

- papel y lápiz.

ORGANIZACIÓN.

DESARROLLO. En esta sesión se presentara mediante un video el concepto de proporcionalidad y seguidamente se plantearan problemas que permiten contextualizar dicho tema.

ACTIVIDADES

Inicialmente se exhibirá un video en el cual se define el concepto de magnitud, magnitudes proporcionales,

A continuación el enlace del video destacado.

I:\Las aventuras de Troncho y Poncho Proporcionalidad.mp4[11]

[11] https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4

Seguidamente se presenta el taller respectivo al tema en cuestión.

1. Señale si las siguientes magnitudes son o no directamente proporcionales y justifique su respuesta.

a. La cantidad de personas que viajan en un autobús y el dinero recaudado.
b. La edad de una persona y el número de hermanos que tiene.
c. El peso de las manzanas compradas y el precio pagado por ellas.
d. La altura de una persona y el número de calzado que usa.

2. El otro día acompañe a mi papá a comprar 2 kilos de naranjas en la galería de mi barrio, le costaron $1000. Mi mamá me pidió hoy que vaya a la galería a comprar más naranjas, pues ya se terminaron las que compramos el otro día. Pero quiere que compre 5 kilos de naranjas. ¿Cuánto me costaran?

Completa la siguiente tabla

Numero de kilos	**Precio**
½	
1	
	$1000
6	
	$3500

9	
	$5500

3. Tres hermanas decidieron comprar un billete de la lotería, y para ello aportaron $5, $10 y $25, respectivamente. Ellas acordaron que si ganaban, el millón de pesos del premio, lo repartirán en *forma proporcional* a lo aportado para la compra del billete, es decir, que la fracción del premio que le corresponde a cada una será respectivamente igual a la fracción aportada para la compra del billete. Julia, la menor, está muy ilusionada y se puso a hacer una tabla para calcular cuánto le tocaría a cada una. Hagan los cálculos necesarios y completen los datos que faltan.

	Dinero aportado		Dinero recibido	
	Cantidad ($)	Fracción del total	Cantidad ($)	Fracción del total
	5			
	10			
	25			
TOTAL				

Guía 5. PROPORCIONALIDAD INVERSA

PROPORCIONALIDAD INVERSA

OBJETIVO. Identificar y resolver problemas en donde se estudie la relación de proporcionalidad inversa ente dos o más cantidades.

DURACIÓN SESIÓN: 45 minutos

HERRAMIENTAS:

- Papel y lápiz
- Cartulina
- Tijeras
- Regla

ORGANIZACIÓN: se realizaran dos actividades en esta sesión. Las dos actividades se harán en grupos de tres personas, dentro del aula.

DESARROLLO. En la primera actividad se utilizara cartulina para dibujar un rectángulo de área 24, en el cual se dibujaran los cuadros unidad, para ser recortados uno por uno, lo que facilita el desarrollo de esta actividad. En la segunda actividad se plantea una situación problema, en la cual espera que los estudiantes de diversas formas de resolución de dicha situación.

ACTIVIDADES

1. Analice si las siguientes magnitudes son inversamente proporcionales o no, y justifique su respuesta.
   a. El número de limpiadores de un edificio y el tiempo que tardan en limpiarlo.
   b. El peso de una fruta y el dinero que cuesta.
   c. La velocidad que lleva un ciclista en un recorrido y el tiempo que tarda en completar el recorrido.

2. Construya el mayor número de rectángulos posibles de 24 unidades cuadradas de área, donde la base y la altura sean números naturales y luego complete la siguiente tabla:

Base							
Altura							
Área							

A partir de los datos anteriores explique qué sucede con la base del rectángulo si la altura se vuelve más pequeña.

3. Un grupo de estudiantes quiere ayudar a una ONG con $360000. Todos van a contribuir con la misma aportación económica, pero la cantidad dependerá del número de alumnos que colabore en la recaudación. Calcular cuánto tendrá que dar cada uno si, como

máximo hay 90 alumnos. Construir una tabla que le permita solucionar el problema.

4. Sabemos que dos pintores tardan seis dias en pintar cuatro habitaciones. ¿Cuánto tiempo emplearan tres pintores en terminar seis habitaciones?

Guia 6. SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS

SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS

OBJETIVO.

- Identificar cuando dos figuras son semejantes y calcular la razón de semejanza.
- Conocer y utilizar adecuadamente la relación que hay entre los segmentos asociados en figuras semejantes. Usar esta razón para calcular altura y distancia.

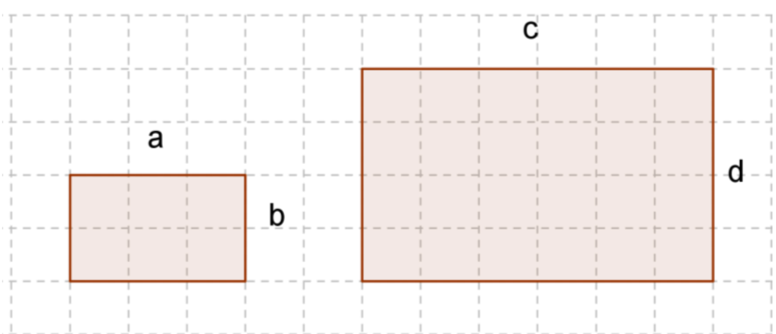
DURACIÓN SESIÓN:2 horas

HERRAMIENTAS:

- ✓ Lápiz y borrador
- ✓ Cartulina
- ✓ Regla
- ✓ Tijeras
- ✓ Cinta métrica

ACTIVIDADES

1. Con respecto a la siguiente ilustracion, responde las preguntas



a) ¿Qué relaciones encuentras entre los ángulos y lados correspondientes de las figuras?

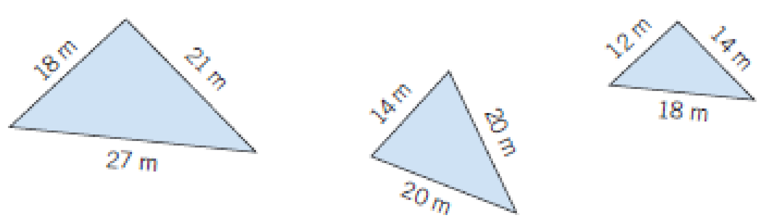
b) Traza una diagonal en cada rectángulo y compara las figuras resultantes. ¿Qué relaciones encuentras entre los ángulos y lados correspondientes de las figuras?

c) En geometría diremos que dos figuras son semejantes si y solo si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. En figuras semejantes, los segmentos correspondientes son proporcionales. Se llama razón de semejanza r al cociente entre dos longitudes correspondientes. Según lo anterior ¿Cuál es la razón de semejanza de la primera ilustración y de la resultante en el inciso b)?

2. Ana ha dibujado dos cuadrados cuyos lados miden 1 y 3 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? Calcula su razón de semejanza.

3. Dibuja dos figuras semejantes a una circunferencia de 1 cm de radio, con razones de semejanza menor y mayor a la del radio dado.

4. Comprueba si los siguientes triángulos son semejantes o no.



Guía 7. SEMEJANZA

SEMEJANZA, TEOREMA DE TALES

OBJETIVO. Aplicar el teorema de Tales en aspectos de la vida real y consecuentemente a ejercicios semejantes.

DURACIÓN SESIÓN: 2 horas

HERRAMIENTAS:

- Papel y lápiz
- Cinta métrica

ORGANIZACIÓN: las actividades se harán en grupos de 3 personas y se ejecutara fuera del aula.

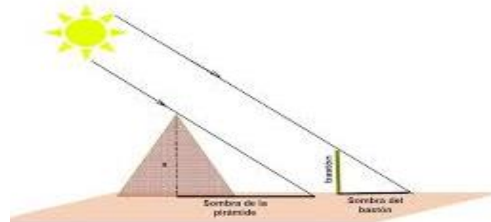
DESARROLLO. Inicialmente se estudiara el teorema de Tales, luego se procederá a hallar la altura de un objeto que se encuentre en el colegio, y seguidamente se planteara un problema relativo al tema de clase.

ACTIVIDADES

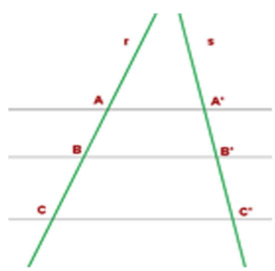
¿Han pensado alguna vez cómo es posible medir ciertas alturas, a las cuales no podemos llegar con una escalera u otro instrumento?

Hace muchos años un señor conocido como Tales de Mileto pudo calcular la altura de la pirámide de Keops sin medirla directamente. ¿Cómo lo habrá logrado? Con sólo medir la longitud de un bastón, la sombra de éste y la sombra de la pirámide, planteó la proporción que le permitió calcular la altura inaccesible:

$$\frac{altura\ piramide}{sombra\ piramide} = \frac{altura\ bastón}{sombra\ bastón}$$



Teorema de Tales. Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

1. Basándose en lo anterior, escoja un poste o un árbol del colegio y encuentre su altura.

   (Varios)*Procedimiento*.

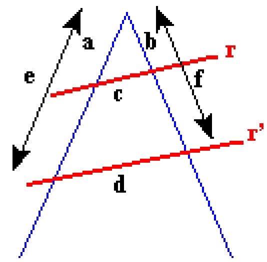
   a. Con la ayuda de una cinta métrica, mida la altura de su compañero (también se pude utilizar un bastón o cualquier otro objeto)
   b. Mida la longitud de la sombra que proyecta su compañero sobre el suelo.
   c. En la dirección hacia donde se encuentra el sol, mida la distancia que hay entre el extremo de la sombra y la base del objeto a medir.

d. Calcule la altura pedida.

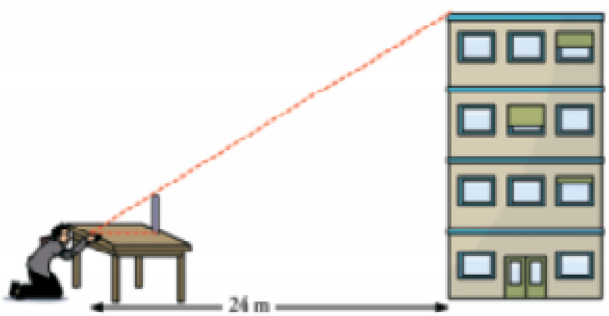
e. Realice los pasos anteriores, con una nueva medida de estatura de otro compañero.

2. Complete la tabla, sabiendo que r y r' son rectas paralelas.

a	**b**	**C**	**D**	**E**	**f**
7	4	5	12		
8	3	6		18	
	2		12	20	13
7		6		21	14



3. Encuentre la altura del edificio sabiendo que la altura de la mesa es de 1 metro, el ancho de mesa es 80 centímetros y que el objeto que está sobre la mesa mide 52 centímetros.



9. BIBLIOGRAFÍA

(s.f.). Obtenido de http://www2.lhric.org/Pocantico/math/Course_2/chap08-s.pdf

Amador, H. C. (2011). Propuestas para la enseñanza de las matemáticas. En *El isomorfismo de medidas como estrategia para la resolución de problemas multiplicativos en el tercer grado de la escuela primaria.* Mexico: Cinvestav.

Angelitoons. (11 de enero de 21012). *Las aveturas de Troncho y Poncho*. Obtenido de Angelitoons: https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4

Block, D. (2000). *La noción de razón en la matemáticas de la escuela priamaria. Un estudio didáctico.* Francia, Francia.

Cohen, S. M. (abril de 2013). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática, Redalyc.org*, *24*(1), 133-157.

Espinosa, E. C. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja.* Medellin.

Gascón, J. (2010). Del problem solving a los recorridos de estudio e investigación.Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, p. 9 - 35.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2002). Matematicas y Didactica para maestros. En *Proporcionalidad* (pág. 425).

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2002). Matemáticas y su Didáctica para Maestros. En *Medidas de magnitudes y su didáctica para maestros* (págs. 606-692). Granada.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la Proporción y la Proporcionalidad: Una Aproximación a los Aspectos Matemáticos Formales y a los Textos Escolares de Matemáticas.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En *Toward a theoretical framework for research.* (págs. 626-667). Nueva York: F. K. Lester.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Razonamiento proporcional. En *Conceptos Números y operaciones en los grados intermedios* (págs. 93-118). Reston, Virginia: J. Hiebert y M. Behr .

Lpoez, M. C., & Perdomo, A. D. (2007). *Razones y proporciones y su conexión con otras áreas.* Bucaramanga: Universidad industrial de Santander.

Moreira, M. A. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias*.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *El origen de la idea de azar en los niños.* Nueva York: W. W Norton.

Polya, G. (1945). *Como plantear y resolver problemas.* Nueva Jersey: Trillas.

Quintero, F. E. (s.f.). Razones y proporciones. En F. E. Quintero, *Matemáticas.* Medellín.

Riveros, M. A., & Suárez, A. O. (2010). Procedimientos de Resolución de Problemas Multiplicativos de Isomorfismo de medidas. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.*

Rodríguez, J. G., Sirera, M. C., Palomar, J. D., Raig, N. P., Sala, N. R., Knijnik, G., . . . D'Ambrosio, U. (2007). Educación matemática y exclusión. En J. D. Palomar, J. G. Rodríguez, & P. Garcia, *Una aproximación dialógica de la inclusión en matemáticas en la escuela obligatoria. El cas del razonamiento proporcional.* Barcelona: GRAO.

Sanchez, E. A. (2011). *Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: una posible forma para comprender la construcción de dichos objetos matemáticos* . Popayan: Universidad del Caua.

Varios. (s.f.). Razones, Proporciones y tanto por ciento. En *Matemáticas 6°* (págs. 112-127).

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En *Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes* (págs. 127-174). New York: Academic Press Inc.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in* (págs. 141-161). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Trillas Editorial.

Vergnaud, G. (2000). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Mexico: Trillas.