LA REPRESENTACIÓN DE UN LENGUAJE HABITUAL A UN LENGUAJE MATEMÁTICO

JULIETA MARTÍNEZ MUÑOZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS, NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

POPAYÁN – CAUCA

2016

LA REPRESENTACIÓN DE UN LENGUAJE HABITUAL A UN LENGUAJE MATEMÁTICO

JULIETA MARTÍNEZ MUÑOZ

Director:

Mag. Eruin Alonso Sánchez Ordoñez

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS, NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

POPAYÁN – CAUCA

2016

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo de
Grado fue aprobado
Por el asesor y
Respectiva evaluadora

____

Vo. Bo. Alex Manuel Montes P.
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

____

Vo. Bo. Eruin Alonso Sánchez O.
Director

____

Vo. Bo. Yeny Leonor Rosero R.
Evaluadora

CONTENIDO

Introducción 6

I Relaciones Pedagógicas 7

II La Investigación 15

1 La Justificación 15

2. Los objetivos 17

2.1. Objetivo general 17

2.2. Objetivos específicos...17

3. Antecedentes 18

4. Referentes teóricos 24

4.1. Situación didáctica 24

4.2. Teoría del aprendizaje significativo 31

4.3 El lenguaje habitual y el lenguaje de la matemática......................................33

4.4. Lenguaje aritmético 34

4.5. Lenguaje algebraico 35

4.6. Expresión algebraica 38

4.7.Ecuacion 40

5. Metodología 43

6.Analisis y resultados 45

7. Conclusiones 52

Bibliografía 54

Anexos 56

Anexo 1. Taller abordado en la investigación 56

Anexo 2. Escuela Normal Superior de Popayán 58

Anexo 3. Estudiantes del grado 9-A y Maestro titular 58

INTRODUCCIÓN

La práctica pedagógica permite que el estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas indague y estudie situaciones relacionadas con los procesos de enseñanza - aprendizaje de la matemática, acompañado de una fundamentación teórica y conceptual, por tal motivo en el presente documento se describirá el proceso y resultados que se obtuvo en la intervención en el aula con los estudiantes de grado noveno de la Escuela Normal Superior de Popayán.

En la primera parte del documento se presenta los datos registrados en los diarios de campo que permitirán establecer una relación entre el proceso de enseñanza desarrollado en el aula con el planeado en las distintas etapas de la práctica pedagógica.

En segundo lugar se hace alusión a algunos antecedentes de investigaciones de la interpretación del lenguaje algebraico y habitual. Además se encontraran referentes teóricos que respaldan los resultados encontrados en la investigación.

I. RELACIONES PEDAGÓGICAS

Las relaciones que se dieron en la práctica pedagógica dentro del aula y como la describe Zambrano, (2002)

> Toda relación pedagógica está organizada sobre las resistencias y las aproximaciones que tejen los individuos en su práctica escolar. Gracias a la relación pedagógica se pueden llevar a cabo los procesos de enseñabilidad. La presencia, en el acto educativo, de la pedagogía hace que la relación pedagógica surja como el límite moderador de la misma acción, lo que Houssay denomina el triángulo pedagógico. Precisamente, la pedagogía trabaja sobre lo previsible, y para llevar acabo la emergencia de lo cognoscible, a través del contacto con la didáctica, crea los tres procesos pedagógicos posibles. El primero, constituye el aprendizaje; el segundo, la enseñanza; el tercero, la formación.

Así las reflexiones y análisis de las relaciones de los procesos de aprendizaje, enseñanza y formación están sujetos a las experiencias entre los actores que intervienen en la práctica pedagógica como son el maestro titular, el maestro practicante, el educando y las pautas y mecanismos que se establecen para acceder al saber, como también permitirán establecer las siguientes relaciones:

Relación estudiante – estudiante

Los estudiantes que integran el grado noveno A de la Escuela Normal Superior de Popayán (ENSP), provienen en su gran mayoría de barrios ubicados en las comunas 5 y 6 de la ciudad de Popayán. Su formación ética y moral deja ver a un grupo de jóvenes educados en el servicio y respeto con sus superiores y sobre todo entre ellos mismos, creando así espacios amenos dentro y fuera del aula.

La relación que se han entablado en este grupo de estudiantes es de subgrupos conforme al desempeño académico que cada miembro tiene. Según Flórez, (2005) la actividad y desarrollo de proyectos en pequeños grupos de alumnos crean una situación de imitación y emulación, de apoyo y critica mutua que estimula y enriquece el desarrollo intelectual y moral de los alumnos en la medida que la interacción, la comunicación y el dialogo entre puntos de vista diferentes propician el avance hacia fases superiores de desarrollo. En los pequeños grupos, los derechos y las responsabilidades de los alumnos son más apremiantes. (p. 167).

Así hombres y mujeres comparten en los espacios de descanso y en el intercambio de clases inspirando un ambiente de respeto y colaboración mutua en las distintas labores académicas, como son los trabajos grupales y la participación activa a la hora de socializar ejercicios y tareas, ya que no tenían ninguna dificultad en salir al tablero o pedir nuevamente una explicación si esta no era comprendida totalmente.

Relación maestro practicante – estudiante

El maestro practicante en su etapa de enseñanza busca entablar relaciones que ayuden a la formación tanto del estudiante como de él mismo, es decir construir caminos de comunicación donde se tenga una continua participación que incentive a un nuevo conocimiento matemático, en el cual haya un intercambio de ideas en la resolución de un problema, como también en la presencia de un obstáculo. Como lo expresa Flórez, (2005) que en la relación pedagógica, el alumno mira al buen maestro como un referente de comparación y jalonamiento de sus propias posibilidades; obtiene así un indicador atractivo de lo que puede ser capaz de realizar desde su "zona de desarrollo potencial", en los aspectos en que el maestro es considerado superior.

Si las relaciones que se establecen entre el maestro y el estudiante están basadas en el respeto mutuo y una formación humana intelectual y social, es posible tener un desarrollo y aprendizaje de las matemáticas más ameno y no tan lineal, pues el maestro practicante aparte de ser un nuevo formador en el aula, es un estudiante en un proceso de formación que busca la construcción de conocimiento y el formar personas capaces de enfrentar las distintas situaciones que se presentan a lo largo de la vida.

Relación maestro titular – maestro practicante

Tratar de cambiar un modelo, el cual ha permanecido por varios años no es fácil en el proceso educativo y más aún cuando las concepciones que se tiene de una generación a otra son diferentes, pero siempre buscando que los estudiantes no se vean involucrados en dichas controversias.

Para el maestro titular su enseñanza está basada en una metodología tradicional y conductista, aunque en algunos espacios era posible establecer una relación menos rígida, pero siempre marcando la diferencia de superioridad con los estudiantes, lo cual para el maestro practicante no era posible, pues se quiso formar relaciones de amistad y compromiso tanto en el aula como fuera de ella; sin embargo el maestro practicante sintió inconformidad a la hora de tomar decisiones respecto al proceso disciplinario y manejo del grupo, pues en este sentido no se tuvo una plena libertad, siempre estaba presente la intervención del maestro titular; no obstante a los diferentes puntos de vista que se tuvieron en el transcurso de la práctica no provocaron que los contenidos disciplinares y curriculares afectaran la relación entre los maestros y los formados a cargo. Cabe rescatar que la metodología planteada por el maestro titular ha llevado a los estudiantes a una formación integral, el cual les permitirá desenvolverse en cualquier espacio social, cultural o académico.

La disciplina

La disciplina es importante en el proceso de formación en el aula, como lo afirma Howard, (citado por Yelon y Weinstein, 1988) la buena disciplina es importante porque ningún grupo de gente puede trabajar en conjunto, exitosamente, sin establecer normas o reglas de conducta, respeto mutuo y un sistema conveniente de valores que oriente a cada persona del grupo a desarrollar autocontrol y autodirección. (p: 390):..

En cuyo caso los estudiantes se desempeñaron en un continuo respeto tanto dentro como fuera del aula y una buena atención que permitía el trascurso de las clases sin inconveniente alguno.

Modelo pedagógico

Seguir estrictamente un modelo pedagógico en el aula de clase no es lo más pertinente, debido a las distintas circunstancias que se manejan en la institución y tomando en cuenta el desarrollo de cada clase, ya que todos los temas que se proponen inicialmente no se realizan con la misma metodología, como señala Zambrano (2002) las finalidades que se intentan alcanzar antes de cualquier compromiso educativo se llevan a la realidad a través de las técnicas más generales que hacen referencia a las estrategias concretas de enseñanza y de aprendizaje desarrolladas por el docente en el marco de un modelo pedagógico particular.

Antes de considerar los modelos pedagógicos que se tuvieron en cuenta en el proceso de la práctica pedagógica, se da respuesta a la pregunta ¿Qué son los modelos pedagógicos? Según Flórez, (2005) un modelo es la representación del conjunto de relaciones que describen un fenómeno o una teoría. Un modelo pedagógico es la representación de las relaciones que predominan en una teoría pedagógica, es también un paradigma que puede coexistir con otros y que sirve para organizar la búsqueda de nuevo conocimiento.

Modelo tradicional

Este modelo se basa en la formación del estudiante a través de la voluntad, la virtud y el rigor de la disciplina. En este modelo el método y el contenido de la enseñanza es el de trasmitir e imitar el buen ejemplo, pues el estudiante aprende oyendo, observando y repitiendo varias veces el contenido y donde el maestro representa la máxima autoridad entablando así una relación vertical con el alumno.

Modelo conductista

El método de este modelo es la fijación, refuerzo y control de aprendizajes. Adquirir conocimiento, códigos impersonales, destrezas y competencias bajo la forma de conductas observables, es decir el maestro es un intermediario y ejecutor en la trasmisión del conocimiento, puesto que debe exhibir con presión lo que espera que el estudiante aprenda y domine los conocimientos previos para continuar en el curso.

Modelo cognitivo

El desarrollo progresivo y secuencial a estructuras mentales obedece a unas etapas y condiciones particulares que facilitan al estudiante su acceso al nivel superior de desarrollo intelectual, donde el papel del maestro es un facilitador y estimulador de experiencias, permitiendo así que el niño construya sus propios contenidos de aprendizaje y afiance sus experiencias según cada etapa.

Estos modelos pedagógicos con metas y metodologías distintas, dejan ver que los aportes que cada uno trae para establecer relación entre el aprendizaje, el maestro y el alumno son necesarios para el desarrollo intelectual del estudiante.

Dado que el estudiante aun mira al maestro como un individuo superior a él y que no es permitido cuestionar su proceso de enseñanza, conllevo en varias oportunidades a la presencia de un silencio, lo que representaba inconformidad e incomprensión de un tema, esto ratifica la presencia del modelo tradicional en el cual los estudiantes tenían un dominio al tratar con el maestro practicante, ya que continuamente en el desarrollo de las clases de matemáticas hacen uso de este método con el maestro titular. La finalidad de relacionar estos modelos fue en pro del desarrollo y aprendizaje del estudiante a la hora de acceder al nuevo conocimiento.

La evaluación

En el aula, la disciplina y la evaluación juegan un papel indispensable para el desarrollo de la clase, son los componentes que hacen parte de la formación del estudiante y del maestro, ya que la evaluación es aprendizaje, en la medida que es un medio a través del cual se adquieren conocimientos. Los profesores aprenden para conocer y mejorar la práctica docente en su complejidad, y para colaborar en el aprendizaje de sus educandos conociendo las dificultades que tienen que superar, el modo de resolverlas y las estrategias que ponen en funcionamiento en tal actividad. Los estudiantes aprenden de y a partir de la propia evaluación, de su corrección y de la información contrastada que le ofrece el profesor, que será siempre crítica y argumentada (Álvarez, 2001, p. 12).

Es en este sentido que se buscó que los estudiantes cambiaran la concepción de evaluación, pues están arraigados a una escala valorativa, negando la posibilidad de ver en ésta un nuevo camino de aprendizaje y permitiendo así mejorar sus procesos formativos, en los cuales el maestro practicante desarrollo y tomo a consideración tres tipos de evaluación:

Evaluación formativa: Se tiene en cuenta los objetivos cognitivos, y a partir de ella se basan los resultados, también se hace aquí una evaluación diagnóstica en la que se identifican las dificultades del individuo ya sea en relación con el aprendizaje o con la comprensión.

Evaluación sumativa: Mide y sintetiza las realizaciones de cada uno de los estudiantes en forma sistemática teniendo en cuenta además al docente, el ambiente fuera de la escuela, la familia, la institución escolar.

Evaluación evaluativa: Comprende una evaluación y un informe sobre el trabajo del estudiante, de la escuela. Además sobre partes del currículo en donde se identifican cuatro funciones siguientes:

- Efectuar un balance sobre lo que es estudiante puede hacer en un determinado momento del proceso enseñanza-aprendizaje.
- Guiar la sucesiva fase de aprendizaje, teniendo en cuenta los contenidos y las metodologías.
- Descubrir las causas de las dificultades en el estudiante.
- Valorar el éxito del estudiante, para favorecer así sus logros.

El currículo

El proceso de enseñanza abarca múltiples aspectos, los cuales son importantes para el desarrollo de la práctica, donde la teoría se manifiesta y se confronta con la realidad escolar, es por ello que el currículo desempeña un papel importante, como lo afirma Flórez, Currículo implica "una concepción acerca de los contenidos, las experiencias y la actuación y secuencia para que los alumnos alcancen las metas de formación" (p. 319). No es distante a la meta de formación que se quiere alcanzar continuamente en la ENSP como es "implementar una metodología que se apoye fundamentalmente en los elementos de aprendizajes dirigidos, facilitando que el estudiante participe mayoritaria y activamente en la construcción del conocimiento, permitiendo que pueda responsabilizarse como conductor del proceso", para el cual se consideran los bloques temáticos, que permiten un desarrollo coherente y continuo y al que se estuvo sujeto en el transcurso del desarrollo de los temas propuestos en la secuencia curricular, realizados posteriormente con una objetividad y fundamentación de textos escolares de cada concepto , ejemplo y ejercicio propuesto en el desarrollo de la práctica.

II. LA INVESTIGACIÓN

1. LA JUSTIFICACIÓN

Para enseñar y aprender matemáticas es imprescindible que en el aula de clase se propicien ambientes donde sea posible la discusión de diferentes ideas para favorecer el desarrollo individual y grupal. Esto se puede lograr mediante una orientación que permita la permanente interacción entre el maestro con sus alumnos y entre éstos con sus compañeros, de modo que todos sean capaces, a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, de llegar a resultados que faciliten la comunicación, para realizar interpretaciones y representaciones, y que sean ellos quienes descubran que las matemáticas sí están relacionadas con la vida y con situaciones cotidianas. Para ello se requiere que el lenguaje permita comunicar, construir y comprender las matemáticas dentro y fuera del aula de clases.

A la hora de dar a conocer y comprender un nuevo conocimiento se hace necesario que el lenguaje habitual y la representación en un lenguaje matemático se defina de manera específica, dado que si las reglas que se establecen y plantean no son claras para el estudiante la comunicación con el maestro interrumpe el nuevo conocimiento y es allí donde la practica pedagógica debe ser critica, reflexiva y propositiva en la formación que está adquiriendo el docente; es el objetivo general de la practica pedagógica.

Al respecto, Serrano, Peña, Aguirre & otros (2002) señalan que toda, sea cual sea la experiencia de aprendizaje desarrollada en la matemática, existe la posibilidad de vincularla con textos descriptivos para la ubicación en el espacio o con textos expositivos para definiciones, conceptos, postulados, de modo que la estrategia adoptada por el docente pueda ser transformar la experiencia de aprendizaje en una situación didáctica con validez para el aprendizaje de los procesos señalados.

Entonces, esto significa que el docente debe reestructurar e implementar la forma de comunicar la información de modo que tanto él como el educando se familiaricen con el tema a tratar en el aula desde dos perspectivas complementarias simbólica y verbal, y además, que las mismas estén dirigidas a orientar y motivar actividades para la comprensión y aplicación de los conocimientos aprendidos.

2. LOS OBJETIVOS

2.1. Objetivo general

Establecer cómo los estudiantes de grado 9 de la ENSP, interpretan el lenguaje habitual y lo transforman a un lenguaje matemático.

2.2. Objetivos específicos

- ✓ Identificar las relaciones entre el lenguaje habitual y el matemático.
- ✓ Describir y caracterizar el lenguaje matemático propuesto por los estudiantes.

3. ANTECEDENTES

Conocer lo relacionado con los errores básicos en álgebra es importante para el docente, ya que es útil para interpretar la manera como los niños escriben y resuelven los problemas y utilizan los diferentes procedimientos algebraicos y con esto se tienen herramientas para poder ayudar a solucionar y comprender las diferentes dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza.

Una investigación relacionada con estas dificultades la llevó a cabo un grupo de álgebra del proyecto Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M) en el Reino Unido entre 1980 y 1983. En donde los estudiantes se encuentran entre los 13 y 16 años y a pesar de los diferentes niveles que se manejaban, los niños cometían errores similares, considerando el álgebra como "aritmética generalizada", lo que implica el uso de letras, números y expresiones aritméticas.

Y para poder profundizar sobre el tema, el proyecto S.E.S.M se preocupó más por analizar los errores cometidos y en él se deduce que estos son principalmente:

- **a)** La naturaleza y significado de los símbolos y las letras
- **b)** El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra
- **c)** La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes
- **d)** El uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimiento"

Se establece entonces que los errores se generan por aspectos tales como la transición conceptual de la aritmética al álgebra y las falsas generalizaciones sobre operadores o números.

A continuación se describen los errores anteriormente mencionados.

a) La naturaleza y significado de los símbolos y las letras

En algunas ocasiones los estudiantes fallan al asumir cambios conceptuales convencionales, los cuales se utilizaran o utilizan de maneras diferentes según el caso que se esté trabajando. El mayor cambio conceptual se centra en lo relacionado con la diferencia existente con la aritmética. Para poder superar esta dificultad lo primero que se debe hacer es que se reconozca que la naturaleza y el significado de los símbolos se relacionan principalmente con el hecho de que éstos permiten denotar y manipular abstracciones. Al tener claro este tema, podrán con mayor facilidad, transferir los conocimientos aritméticos hasta el álgebra.

El estudiante necesita ampliar el concepto de notación usado para las operaciones aritméticas, ya que en muchas ocasiones los alumnos reducen la comprobación de la validez de una transformación algebraica a comprobar la verdad aritmética de un ejemplo.

Otra dificultad que se presenta en similares proporciones, es lo relacionado a la maduración del concepto de igualdad debido a que a diferencia de otros valores simbólicos, el cambio de éste implica la extensión de un concepto existente más que la adquisición de uno completamente nuevo, teniendo en cuenta que las características de "=" en aritmética y en ecuaciones algebraicas comparten la misma notación.

Pero se debe considerar que este signo en aritmética es utilizado para conectar un problema con su resultado numérico y pocas veces es utilizado para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado, debido a que el signo igual tiene siempre un sentido unidireccional que precede a una solución numérica; en tanto que en las expresiones aritméticas este signo no conexiona identidades, sino que obliga a la incógnita a tomar un valor para que la expresión sea verdadera, su sentido es bidireccional, el cual puede ser algunas veces un indicador de una relación de equivalencia más que una señal para escribir la solución, lo cual no es entendido fácilmente por los estudiantes.

$$4 + 7 = 11$$

$$3x + 3 = 2x + 7$$

Finalmente una de las diferencias más elementales entre la aritmética y el álgebra reside en el significado de las letras ya que en aritmética la letra, por ejemplo “m” representa el número de metros y en álgebra se da en la idea de letra como variable.

b) El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra

En aritmética el centro de la actividad a trabajar es hallar soluciones numéricas concretas, mientras que en álgebra el objetivo es la obtención de “relaciones" y “procesos” y la formulación de los mismos en expresiones generales simplificadas. A pesar de que una razón fundamental para obtener tales relaciones y procesos es usarlos como “fórmulas o reglas de procedimiento” para resolver problemas, no es este el primer objetivo.

Y es aquí donde se encuentra la equivocación, ya que los estudiantes relacionan inmediatamente que en las cuestiones algebraicas lo que se les exige es siempre una solución única y numérica. Al tener la idea de términos únicos como respuesta se genera un error frecuente ya que los alumnos simplifican una expresión como $3x + 5y$ en $8xy$. Y este problema se puede presentar cuando existe una dificultad, para aceptar la falta de clausura (Collís 1975) o refleja una situación que se presenta en aritmética relacionada con lo que debe ser una "respuesta bien dada" (Matz 1980).

c) La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes

Como base fundamental se debe entender que el álgebra no está separada de la aritmética, es por esta razón que para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que estos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético. Y en la mayoría de los casos las dificultades que los estudiantes presentan en álgebra no son propias de esta materia, generalmente son problemas que se quedan sin corregir en la aritmética, tales como por ejemplo las fracciones, el uso del paréntesis, potencias, etc. Así,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

Son errores que luego se trasladan al campo algebraico. Se debe tener en cuenta también los errores cometidos por las generalizaciones incorrectas de propiedades aritméticas, y en la mayoría de los casos estos se dan por la falta en la interiorización del concepto o falta de percepción.

d) El uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimiento"

Cuando los estudiantes usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que ha sido extraída de un texto o de ejemplos anteriores y la utilizan tal cual la manejan o la adaptan de manera incorrecta a una situación nueva es uno de los errores que se debe corregir de la manera más firme, ya que no habrá entonces relación entre lo que se conoce y lo nuevo que se desea incorporar dentro de los procesos de aprendizaje creando así falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números.

Otro análisis realizado por Hermann Maier (1989,1996) afirma que "*la tarea lingüística tienen un papel determinante"*, puesto que existe una interferencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje común y como libros de texto ayudan a confusiones y contradicciones, generando así un problema de comunicación, es decir un problema del lenguaje común.

El lenguaje común, que es un factor importante en la comunicación de un proceso de enseñanza es también un objeto de estudio, que busca establecer relaciones entre ciertas cantidades dadas y las incógnitas, en problemas cuyo texto se encuentra en palabras (De Corte, Verschaffel, De Win, 1985; Bachor, 1987); como también los comportamientos de los estudiantes frente a palabras que son claves para la semántica de una frase completa y cuál es el debido proceso para encontrar una solución (Nesher, Teubal, 1975; Fayol, 1990; D'Amore, 1993a)

Estos y muchos estudios que no hacen parte de este documento, buscan establecer un puente de comunicación entre un lenguaje común o habitual a un lenguaje matemático, donde existen ciertas semejanzas y diferencias que ayuden aún mejor proceso de enseñanza y sobre todo a la adquisición de nuevos conocimientos, donde se tenga claridad en una comunicación escrita y verbal.

4. REFERENTES TEÓRICOS

En el presente documento se aludirá a ciertos términos, los cuales se tomaron a consideración en la planeación y desarrollo de la práctica pedagógica, enfocados desde la educación matemática y la matemática:

REFERENTES TEÓRICOS DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

4.1. SITUACION DIDÁCTICA

La teoría de las situaciones, planteada inicialmente por Brousseau (1986), en donde establece la necesidad de que el estudiante se apropie de las respuestas, dándole el significado correspondiente a cada uno de los problemas planteados. De esta manera ira adquiriendo nuevos conocimientos. En sus propias palabras

> El estudiante aprende adaptándose a un ambiente que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como la sociedad humana. Este saber fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta con las nuevas respuestas que son la prueba del aprendizaje (…). [El estudiante sabe que] (…) el problema fue seleccionado para hacerle adquirir un nuevo conocimiento pero debe saber también que este conocimiento se halla enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construir sin invocar razones didácticas.

La situación llamada a-didáctica involucra al estudiante y al objeto del conocimiento sin necesidad de manejar razones didácticas. El estudiante a partir de los estímulos dados por el maestro intenta desarrollar y verificar los procesos orientados siempre por el maestro, pero sin influir este en la decisión que tome el estudiante para el desarrollo del ejercicio, el cual lo desarrollará una y otra vez hasta que queden claras las diferentes situaciones de entendimiento en el conocimiento.

Es necesario buscar estrategias y actividades que motiven al niño en el estudio de las matemáticas. Es así como se sugiere que terminada cualquier actividad, independientemente del área, se realice un ejercicio matemático. Esta actividad debe ser propuesta por los mismos estudiantes para que así poco a poco construyan ellos mismos el conocimiento.

La no didáctica se determina como una situación pedagógica no específica de un saber. Aquí se utiliza elementos matemáticos pero no estrictamente para construir saber matemático o dirigido a un tema matemático específicamente. En esta didáctica no se puede decir que el estudiante no este aprendiendo; solo que el maestro no ha especificado aún la noción que desea que adquieran los estudiantes.

Para Brousseau, el juego se puede utilizar como un modelo para establecer una didáctica que interesa al estudiante, en donde sea él quien establezca las necesidades cognoscitivas que requiere. No le comunica el maestro lo que desea lograr, por el contrario es el estudiante quien descubre el conocimiento a partir de lo que conoce y como lo puede aprovechar en su proceso de aprendizaje. La estructura que crea el maestro es de vital importancia para conseguir por parte del estudiante un conocimiento específico, en donde se establece la relación de que el maestro está enseñando al estudiante lo que este necesita y el estudiante es consciente de que se está logrando y adquiriendo el conocimiento a partir de algo que para él es muy agradable.

Con esta didáctica se logra llegar a un punto que cuando se hace necesario cuestionarse sobre el conocimiento no es tan importante la parte de contenido, como si lo es que el maestro sepa que el estudiante tiene claro que es lo que debe hacer o responder. En el juego se puede decir que encontramos parte didáctica y parte estratégica en la enseñanza. Cuando se hace preguntas a los estudiantes, en muchas ocasiones la respuesta no es la correcta o no es lo que se desea escuchar, por lo tanto el maestro y el estudiante deben estar atentos al tipo de pregunta que se realiza y la respuesta que se debe dar de acuerdo al tema que se está tratando.

Desde el punto de vista de la epistemología del aprendizaje si se aceptara la teoría piagetiana en donde todo conocimiento se obtiene gracias a la interacción constante entre el sujeto aprendiz y el objeto en donde los contenidos son la base para la construcción de estructuras mentales, pero además se debe tener en cuenta las condiciones establecidas para poder así mejorar el control y la reproducción del conocimiento, es de suma importancia el ambiente escolar y específicamente del aula, de la misma manera como el maestro aborda los diferentes temas de acuerdo a las diferentes situaciones que se presenten. En los últimos años se ha dado gran importancia al contexto, cultura, situaciones, comportamientos cognitivos, en general la dimensión social se debe tener en cuenta en los procesos de enseñanza aprendizaje. Se debe entonces tener muy en cuenta la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, (2007) en donde plantea*:* "una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícitamente y/o implícitamente establecidas entre un estudiante o un grupo de estudiantes, algún elemento del entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el maestro con el fin de permitir a los estudiantes de aprender – es decir: reconstruir – algún conocimiento. Las situaciones son específicas de tales conocimientos"

Entonces se puede decir que el estudiante en la medida en que se interesa por el problema y la manera de solucionarlo mediante diferentes situaciones didácticas se está construyendo por su parte el conocimiento. Surge entontes la estrategia del juego como un camino para lograr el conocimiento de una manera agradable e interesante para los educandos.

La teoría de las situaciones se establece de matriz constructivista, ya que el aprendizaje se obtiene a través de solución de problemas, siendo de vital importancia el papel del resoluto-jugador. Esta teoría tiene a la matemática como referencia y el hablar de conocimiento se sobreentiende que habla de conocimiento matemático, en donde se incluye no solo conceptos sino también representaciones simbólicas, procesos de desarrollo y validación de nuevas ideas.

Es importante tener en cuenta la fase de devolución en la relación de la enseñanza, en donde el maestro no debe exponer al estudiante lo que desea saber, ya que es necesario que el educando establezca lo que el necesita para que así sea más fácil apropiarse de los conocimientos. Pero esta actividad la debe lograr a partir de los conocimientos impartidos por el maestro.

Para Sarrazy el sistema de paradojas, si no es bien utilizada podrían convertirse en elemento que perjudicaría su proceso de aprendizaje, ya que al dudar de sus propios conocimientos al intuir que están incompletos no se arriesgaría a utilizarlos en la investigación y búsqueda de medios útiles para dominar determinados temas. Pero se debe tener en cuenta que este riesgo que se negaría a correr es el fundamento y la condición necesaria en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Lo que se debe lograr en el aprendizaje es que el educando asuma el conocimiento como un riesgo personal, poniendo de antemano todo su empeño en aprender. Sarrazy lo describe muy bien en el aforismo que dice "Créeme, dice el maestro al estudiante, osa utilizar tu propio saber y aprenderás".

Fases de una situación didáctica

Si una situación matemática es específica de un conocimiento concreto, generalmente son reconocibles los estadios, fases o situaciones siguientes:

a) Situación de acción

La enseñanza de las matemáticas debe permitir al alumno hacerse cargo de un problema: emitir hipótesis, elaborar procedimientos, ponerlos en práctica, y según los efectos producidos adaptarlos, rechazarlos o hacerlos evolucionar, automatizar los que son más solicitados y ejercer un control sobre los resultados obtenidos.

Dicho de otro modo, las características de una situación de acción son:

- El alumno actúa sobre el medio, formula, prevé, y explica la situación.
- Organiza las estrategias a fin de construir una representación de la situación que le sirva de modelo y le ayude a tomar decisiones.
- Las retroacciones proporcionadas por el medio funcionan como sanciones de sus acciones.
- Movilización y creación de modelos implícitos.

b) Situación de comunicación

Una buena reproducción por parte del alumno de la actividad matemática exige que este intervenga en ella, lo cual significa que formula enunciados y prueba proposiciones, que construye modelos, lenguajes, conceptos y teorías y los pone a prueba e intercambia con otros. Reconoce los que están conformes con la actividad matemática y toma los que le son útiles para continuarla.

Las condiciones necesarias son:

- El alumno intercambia con una o varias personas informaciones.
- La comunicación puede conllevar asimilaciones y también contradicciones.
- Las interacciones entre emisor y receptor pueden producirse a través de acciones sin codificación, o bien a través de un lenguaje. El fracaso de un mensaje obliga a su revisión.
- Se crea un modelo explícito que pueda ser formulado con ayuda de signos y reglas, conocidas o nuevas.

c) Situación de validación

Para esto, el alumno debe poder validar la situación, es decir, la propia situación tiene que informar al alumno sobre si lo ha hecho bien o no, si su solución es buena, sin tener que recurrir a la ayuda del maestro.

Las condiciones requeridas serán:

- El alumno debe hacer declaraciones que se someterán a juicio de su interlocutor.

- El interlocutor debe protestar, rechazar una justificación que él considere falsa, probando sus afirmaciones.
- La discusión no debe desligarse de la situación, para evitar que el discurso se aleje de la lógica y la eficacia de las pruebas.

d) Situación de institucionalización

Las respuestas encontradas al problema planteado deben ser transformadas para que los conocimientos puedan ser convertidos en saberes. El profesor tiene la responsabilidad de cambiar el estatuto de los conocimientos construidos. Es el paso de un saber personal a un saber institucional.

Contrato didáctico

El contrato didáctico planteado inicialmente por Brousseau (1978), con el fin de estudiar las causas del fracaso en matemáticas y no en otras materias, para el cual toma en cuenta los conocimientos en juego y la situación escolar, que se trata de: "Una situación de enseñanza, preparada y realizada por un docente, el estudiante tiene como tarea resolver el problema (matemático) que se le presenta, pero el acceso a esta tarea se hace por medio de una interpretación de las preguntas dadas, de las informaciones proporcionadas y de las obligaciones impuestas que son constantes del modo de enseñar del maestro. Estos hábitos (específicos) del maestro esperados por los estudiantes y los comportamientos del estudiante esperados por el docente constituyen el contrato didáctico" (Brousseau, 1980ª, p.127)

En otras palabras el contrato didáctico es lo que espera el alumno del profesor y viceversa, son las expectativas que se tienen uno del otro en el planteamiento y solución de un problema, ya que es la relación entre el alumno y el profesor a la hora de enseñar un saber concreto.

4.2. TEORÍA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Para que exista una relación entre el conocimiento del maestro y el alumno es necesario en este documento tener presente los conceptos y aprendizajes que el estudiante trae, pues son los que permitirán comprender el nuevo aprendizaje y sobre todo el poder transformar ciertos enunciados a un lenguaje matemático. Por ello se habla de un aprendizaje significativo que es cuando los contenidos: Son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (Ausubel, 1983:18).

Lo que Ausubel está afirmando, es que en el proceso de aprendizaje se establezca una relación entre el contenido que el estudiante ya sabe y el nuevo que debe aprender, como también el aprendizaje del alumno depende de la "estructura cognitiva"[1] previa que se relaciona con la nueva información, en este caso los conceptos a los cuales se deben referir son; ideas, proposiciones estables y definiciones, para lo cual el estudiante podrá interactuar con la nueva información.

[1] Según Ausubel se debe entender como estructura cognitiva como al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

El aprendizaje significativo no solo compromete el desarrollo de la nueva información y de la estructura cognoscitiva envuelta en el aprendizaje, es decir que no solo debe existir una relación entre lo aprendido y lo que se va a aprender, por lo que Ausubel describe tres tipos de aprendizaje significativo:

a) Aprendizaje de representaciones

Consiste en la asignación de significados a determinados símbolos, como lo dice Ausubel: "Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan**"** (Ausubel, 1983: 46). Es decir la relación entre el símbolo y el objeto debe ser una relación sustancial no arbitraria, pues debe asociarlos a un concepto o idea que ya se tiene.

b) Aprendizaje de conceptos

Los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos" (Ausubel, ***1983: 61),*** se puede decir que se asemeja al aprendizaje de representaciones.

Los conceptos son adquiridos a través de dos procesos. Formación y asimilación. En la formación de conceptos, los atributos de criterio (características) del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis, y el aprendizaje de conceptos por asimilación se produce a medida que se amplía el vocabulario,

c) Aprendizaje de proposiciones

Este aprendizaje va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, aisladas o combinadas, puesto que exige comprender el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones. El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un significado unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva, es decir que estas constituyen un nuevo concepto, donde el fin no es aprender un significado aislado de los diferentes conceptos que constituyen una proposición, sino el significados de ella como un todo.

REFERENTES TEÓRICOS DESDE LA MATEMÁTICA

4.3. EL LENGUAJE HABITUAL Y EL LENGUAJE DE LA MATEMÁTICA

El lenguaje común es necesario para la comunicación de las ideas, en matemáticas la manera de realizar la comunicación principal es el simbolismo formal. Este lenguaje opera en dos niveles; el nivel semántico donde los símbolos y las notaciones son dadas con un significado claro y preciso y el nivel sintáctico en el que las reglas pueden ser operadas sin referencia directa a ningún significado, siendo este nivel de gran importancia dentro del desarrollo de las matemáticas.

En matemáticas el lenguaje ordinario ayuda a interpretar el lenguaje simbólico pero se debe tener en cuenta que el lenguaje de las matemáticas es preciso y está sometido a reglas exactas, no comunica su significado y no puede expresar emociones, juicios o valores.

También se genera otro problema en el lenguaje y es lo relacionado con el vocabulario común. Palabras como potencia, factor, diferencial, índice, etc. Tienen en matemáticas significados diferentes a aquellos que se dan en el lenguaje común, ocasionando dificultades a causa de la confusión semántica. No existe una solución fácil para este problema, ya que el vocabulario es estándar en las matemáticas, sin embargo aceptar y reconocer la diferencia es un gran paso para resolver y enfrentar esa dificultad.

Existen algunas palabras usadas en cierto contexto que motivan confusiones de conceptos. De la misma manera hay palabras específicamente matemáticas, (como factorización, hipotenusa, paralelogramo, etc.) o sea que solamente se escucharan cuando se esté trabajando en el área. Existen también palabras de igual significado en el lenguaje ordinario y en matemáticas (fracción, unión, etc.) lo cual genera confusión en los estudiantes, y para poder evitarlo se debe profundizar en los conceptos y en las palabras similares.

4.4. LENGUAJE ARITMÉTICO

Los problemas que se plantean en aritmética están sujetos a ciertas reglas que requieren de un total dominio para intentar resolver operaciones y encontrar un significado de los símbolos; sin embargo el combinar números y símbolos en una ecuación bien formada no garantiza que esta sea verdadera ($7 - 5 = 15$), por ello no solo se puede buscar expresiones bien formadas sino que tengan un significado como lo afirma Pimm "*el alumno centra su atención preferente en los* *símbolos mismo (o sea, en el lenguaje mismo), en vez de lo que esos símbolos significan"*, pues no existe una relación, un vínculo entre el símbolo y su significado, por ejemplo expresiones tales como $4^2, 42, 24, (4.2), \sqrt{4}$, etc. tiene significados que varían en los diferentes espacios matemáticos, por lo tanto no basta con tener una representación sino se tiene una debida concepción de esta.

4.5. LENGUAJE ALGEBRAICO

El matemático francés Franciscus Vieta fue quien dio el paso decisivo a la notación algebraica, indico las letras como magnitudes indeterminadas y las variables en expresiones algebraicas. Esta notación permitió el desarrollo del lenguaje algebraico y separarlo cada vez más del lenguaje ordinario. Inicialmente las letras se usaban para indicar números arbitrarios y luego fueron usadas también para funciones arbitrarias.

La sustitución de números por letras es el inicio de un lenguaje algebraico, en el que se busca el paso de números a variables, en el cual existe un cambio tanto de símbolo como de significado. Con frecuencia solo se enfatiza en el cambio de símbolo, es decir el paso de números a letras perdiendo así el significado que poseen y el uso de las mismas, para lo que Küchemann (1981) identifica seis categorías:

- **Letra evaluada**: A la letra se le asigna un valor numérico desde el primer momento.
- **Letra ignorada:** Se reconoce su existencia pero no se le da un significado ni se opera con ella
- **Letra como objeto:** La letra es vista como una abreviatura de un objeto o como un objeto de sí misma.

- **Letra como incógnita específica:** La letra es un numero especifico, concreto, aunque desconocido, con el cual es posible operar directamente.
- **Letra como número generalizado:** La letra puede tomar varios valores, más que uno solo, pero sin llegar a considerarla una variable.
- **Letra como variable**: La letra es considerada como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

El signo igual ($=$) es uno de los elementos con una apariencia similar pero con significado diferente en la aritmética y en el álgebra. En la primera es entendido como una acción física, unas veces sirve para conectar un resultado numérico y otras veces para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado; sin embargo en el álgebra el signo igual está sujeto a una sistema de reglas de transformación lingüística que conducen de

$$4 \times 5 = 5 \times 4 \quad \text{a} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

O la verificación de que

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ cuando } x = 3,$$

son procesos formales que se aplican en distintos procesos matemáticos como son:

- Generalización: los términos numéricos son remplazados por variables.
- Simplificación: las expresiones parciales son remplazadas por variables en una expresión dada.
- Eliminación: las variables implicadas en una sustitución son suprimidas.
- Particularización: las variables son remplazadas por números para verificar ciertas expresiones.

Otro de los recursos que hace parte del lenguaje algebraico son los símbolos de las operaciones, los cuales permiten denotar y manipular las expresiones algebraicas y ecuaciones, siempre y cuando se tenga claridad de la naturaleza y significado de estos, pues en aritmética los signos de operación indican una acción que se va a realizar con números y que da como resultado otro número, a diferencia del algebra que tienen un carácter de representación ya que indican operaciones que no siempre tienen porque realizarse y que solo quedan indicadas o se tiene una solución para un valor especifico y cual se sustituye para encontrar un valor numérico.

Desde el punto de vista de (Godino, 2003) el álgebra también se ha denominado como "aritmética generalizada" es considerarla simplemente como una manipulación de letras que representan números no especificados: En esta visión los objetos que se ponen en juego en la aritmética y la "aritmética generalizada" son los mismos: números, operaciones sobre números y relaciones entre los números; las diferencias entre ambas partes de las matemáticas son diferencias en cuanto a la generalidad de las afirmaciones que se hacen:

La aritmética trata con números específicos expresados mediante los numerales habituales,

$$20;\ \ -7;\ \frac{14}{5};\ 4{,}75;\ \ 3$$

o mediante expresiones numéricas en las que los números se combinan con los símbolos de las operaciones aritméticas:

$$45 \cdot 12,\ \ \frac{73 + 5.4}{3},\ \ (13 - 7.4)^3$$

El álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, como x, y, t, v, o bien expresiones con variables:

$$3x - 5,\ x^2 - x + 5,\ (x + 5)(x - 7),\ 3uv + 4v + u + v + 1$$

4.6. EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras, que pueden asociarse mediante operaciones de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas

$$x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - 8, \quad \frac{4xy - x}{x + y}, \quad \sqrt[3]{\frac{7y - 3}{x^5y^{-2} + z}}$$

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres específicos: Un **monomio** en una variable es cualquier expresión algebraica de la forma $\boldsymbol{ax^n}$ donde $\boldsymbol{a}$ es un número real, $\boldsymbol{x}$ es una variable y $\boldsymbol{n}$ es un número no negativo.

El número a se llama **coeficiente** del monomio y n se llama **el grado**. Por ejemplo

$17x^5$ es un monomio de grado 5 con coeficiente 17.

La suma de dos monomios, tal como $3x^5 + 6x$ recibe el nombre de **binomio.** Un **polinomio** es cualquier suma finita de monomios. Más formalmente tenemos la siguiente definición

Definición 4.6.1. Un **polinomio** de grado n en la variable x es cualquier expresión algebraica de la forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0\,, \qquad a_n \neq 0$$

Donde n es un entero no negativo y a_i , $i = 0, 1, ... n$ son números reales

Ya que un polinomio en x representa un numero real para cualquier numero real x, el dominio de un polinomio es el conjunto de todos los números reales.

Los monomios $a_i x^i$ en el polinomio se llama **términos del polinomio** y el coeficiente a_n de la potencia mas alta de x se llama **coeficiente principal**. Por ejemplo

$6x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 1$ es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 6. Los términos de este polinomio son $6x^5, -7x^3,\ 3x^2$ y -1.

El número a_0 se llama **término constante** del polinomio. Puede ser 0 como en el polinomio $6x^2 - x$. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, entonces el polinomio se llama **polinomio cero** y se denota con **0**

Los polinomios se pueden clasificar por sus grados, aunque el polinomio cero no se le ha asignado ningún grado. Se usan nombres especiales para describir los polinomios de menor grado, según la lista que aparece en la siguiente tabla

Tabla 1. Clasificación de los polinomios según su grado.

POLINOMIO	GRADO	FORMA ESTÁNDAR	EJEMPLO
Constante	0	$a_0\ (a_n \neq 0)$	4
Lineal	1	$a_1 x + a_0,\ \ (a_1 \neq 0)$	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ \ (a_2 \neq 0)$	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$

Cubico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0,\ \ (a_3 \neq 0)$	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
Enésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0,\ \ (a_n \neq 0)$	$x^n - 1$

Nota: en cada término de un polinomio, el exponente de la variable debe ser un entero no negativo. Por ejemplo:

$$x^{-1} + x - 1 \quad \text{y} \quad x^2 - 2x^{1/2} + 6$$

no son polinomio.

Sin embargo,

$$3^{-1}x^2 + 4 \quad \text{y} \quad 0.5x^3 + 6^{1/3}x$$

son polinomios, ya que los coeficientes pueden ser cualesquiera de los números reales.

4.7. ECUACIÓN

Cuando dos expresiones se igualan, se obtiene una **ecuación.** Por ejemplo:

$$\sqrt{x-1} = 2, \qquad x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad |x+1| = 5$$

son ecuaciones con la variable x

Una **solución, o raíz**, de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número **satisface** la ecuación si es una solución de la ecuación.

Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay por lo menos un número en el dominio de la variable que no satisface la ecuación, entonces se dice que es una ecuación **condicional.** Por ejemplo la ecuación

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

Se satisface con la serie de todos los números reales excepto en $x = 1$. Puesto que 1 no está en dominio de la variable, la ecuación es una identidad.

Sin embargo el 3 esta en el dominio de la variable en la ecuación

$$4x - 1 = 2$$

pero no satisface esta ecuación, puesto que

$$4(3) - 1 \neq 2.$$

Así

$$4x - 1 = 2$$

es una ecuación condicional.

Decimos que dos ecuaciones son equivalente si tienen las mismas soluciones. Por ejemplo

$$2x - 1 = 0, \qquad 2x = 1, \;\; x = \frac{1}{2}$$

Son ecuaciones equivalentes. Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinan fácilmente. Se puede demostrar que las siguientes operaciones producen ecuaciones equivalentes

- Sume o reste de cada lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.
- Multiplique o divida cada lado de una ecuación por la misma expresión que representa un número real diferente de cero.

Observemos la siguiente lista de ecuaciones.

$$3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(6)$$

$$x = 2$$

Puesto que la última ecuación tiene como única solución 2, se deduce que 2 es la única solución de la ecuación original.

5. METODOLOGÍA

Con el fin de establecer una relación entre el lenguaje habitual y el lenguaje matemático, se optó por realizar un seguimiento a los 36 estudiantes de grado 9-A de la Escuela Normal Superior de Popayán (ENSP) en donde la comunidad escolar es de carácter mixto, con modalidad pedagógica desde el grado cero hasta el ciclo complementario., ubicada en la comuna 6 al sur de la ciudad, en el barrio La Ladera. La formación que aquí se da, le permite al estudiante vincularse y relacionarse en los distintos espacios científicos, culturales y tecnológicos que lo rodean, además de fortalecer valores y su vida en sociedad. Gracias al convenio establecido con la Universidad del Cauca, se pudo realizar una intervención en el aula con una intensidad horaria de cuatro horas semanales, distribuidas en dos secciones de dos horas cada una.

El grupo con el cual se trabajó está ubicado en el salón del primer piso del bloque científico tecnológico1, organizados en el aula en 5 filas de 7 estudiantes cada una,

Se debe tener en cuenta que la relación que se formó a lo largo del proceso educativo, permitió al docente identificar aquellos estudiantes que se interesan por la formación matemática y quienes tienen habilidades en las competencias relacionadas con esta área. Posteriormente sus respuestas y conocimientos son objeto de estudio para el análisis de la práctica investigativa, como también aquellos estudiantes que son indiferentes al proceso de enseñanza.

Para el desarrollo del trabajo de investigación se aplicó una guía (anexo 1) individual, conformada en 3 niveles los cuales presentan una jerarquía de conocimientos previamente expuestos. En la solución que el estudiante presentaba debía plasmar la expresión matemáticas que se le solicitaban, este momento será de vital importancia, ya que es en este espacio donde el maestro observa, cuestiona, analiza las respuestas dadas, dándose un momento de selección para registrar en el diario de campo los resultados obtenidos. La intervención en el aula en la práctica pedagógica deja ver la formación y dominio que el estudiante tiene frente a un nuevo conocimiento, pues permite observar al estudiante en diferentes escenarios del aprendizaje, cómo enfrenta y va construyendo un conocimiento, que pone en juego lo aprendido y la disposición de escuchar y atender a las indicaciones del maestro, es aquí donde el contrato didáctico establece la relación del maestro y el alumno, para así poder trasmitir el nuevo aprendizaje y como se puede ir transformando poco a poco toda una concepción de saberes, los cuales por medio de talleres, tareas, evaluaciones y con una previa realización de contenidos formales, fue posible comunicar escrita y verbalmente.

6. ANÁLISIS Y RESULTADOS

No cabe duda que el fin de todo proceso de enseñanza y en particular el de la comprensión del lenguaje es que el docente y el alumno sepan, redescubran y relacionen que todo aprendizaje matemático involucra procesos lingüísticos como la comprensión, comunicación, y creación de nuevas estructuras. Pero también el aprendizaje lingüístico involucra procesos propios de la matemática como es orden, lógica, articulación y coherencia formal metamatemática del objeto de estudio, por ello para dar inicio a un proceso de enseñanza se estructuró una situación la cual se dividía en tres niveles, en los cuales se debía expresar cada enunciado expuesto en un lenguaje común o habitual y el estudiante debía transformarlo a un lenguaje matemático, en el que los conceptos de ecuación y expresión algebraica expresan diferencias las cuales eran claras para los estudiantes y para analizar y observar los diferentes resultados que se presentaron en el trascurso de la actividad se tendrán en cuenta las fases de una situación didáctica, para observar el proceso de aprendizaje del estudiante.

❖ Situación de acción

En este caso el estudiante lee cuidadosamente el enunciado, buscando comprender cada una de las palabras que están presentes, aunque inicialmente causo dificultad el concebir que enunciados expresados en un lenguaje habitual puedan ser transformados a un lenguaje matemático, pues a medida que va relacionando las palabras a un contexto matemático van construyendo ideas más claras que le permiten dar respuesta a lo que se pide en cada situación.

El estudiante poco a poco establece la relación entre su significado y el símbolo que posiblemente pueda representar, no obstante en algunos casos la falta de un vocabulario más amplio conlleva a confusiones y conjeturas erróneas, que no permiten una interpretación coherente para la cual pueda existir una transformación del lenguaje, pero el estudiante siempre buscó dar una respuesta donde previamente había establecido una diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación

❖ **Situación de comunicación**

El estudiante se relaciona con sus compañeros para establecer diferencias y semejanzas entre los resultados que tienen, pues a la hora de intercambiar ideas el estudiante es consciente de que sus resultados son correctos si coinciden con la mayoría de sus compañeros, en este caso si las expresiones expuestas son las mimas tanto en símbolos (letras) como en significado, lo cual conlleva a un cambio de las mismas letras que sus demás compañeros perdiendo así el significado que inicialmente el estudiante se había propuesto. (Ver figura 1)

1. La suma de dos números

2. Un numero aumentado en tres”

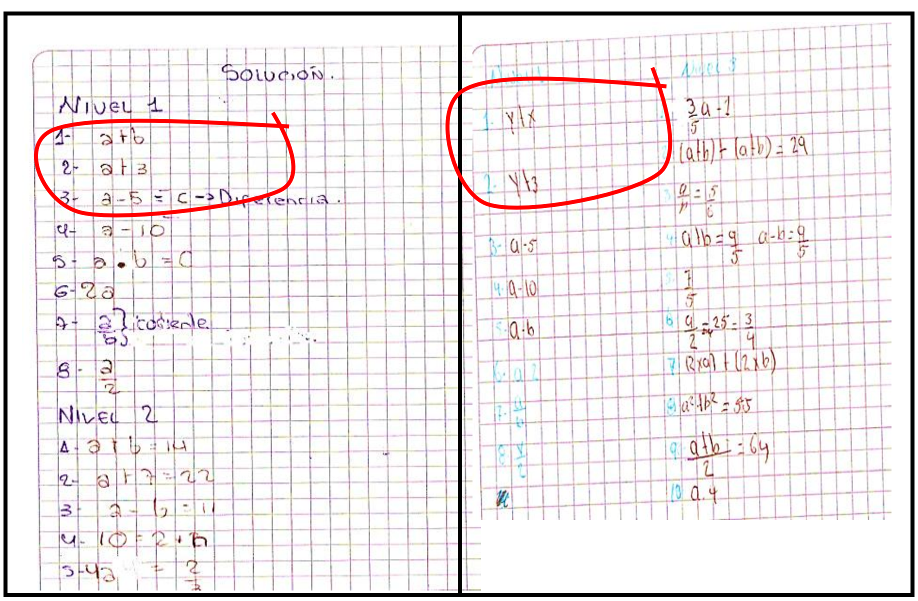

Figura 1. Comparación de resultados

Pero cabe destacar que no todos los estudiantes se dejan influenciar por las diferentes posiciones que se tienen frente a un concepto y que en el intercambio de ideas puede apreciarse y respetar las opiniones de los demás sin necesidad de cambiar las concepciones que se tiene y que se han manejado en el proceso de aprendizaje.

❖ **Situación de validación**

La interpretación de un lenguaje difiere en el significado que se da a las palabras expuestas en el enunciado, es decir si no hay un dominio de palabras en el lenguaje habitual como son sinónimos o posibles relaciones con un contexto matemático no se podrá justificar o cuestionar si la respuesta dada es verdadera. El estudiante por medio de conocimientos previos es capaz de transformar el lenguaje habitual al lenguaje matemático, aunque las concepciones de variable en el lenguaje algebraico se han ido distorsionando por no esclarecer el significado de las palabras, letras y símbolos en los diferentes contextos matemáticos.

Así el estudiante llego a plantear respuestas en las cuales se perdió la noción de expresión algebraica y ecuación, pues específica y aclara la respuesta dada, (ver figura 2), entonces la variable se está tomando como una letra evaluadora sin percatarse de los diferentes valores que se pueden dar y la afirmación seguirá siendo verdadera.

5. *El numerador de una fracción excede en 2 unidades al denominador.*
7. *La suma de dos números pares.*
10. *Un múltiplo de 4.*

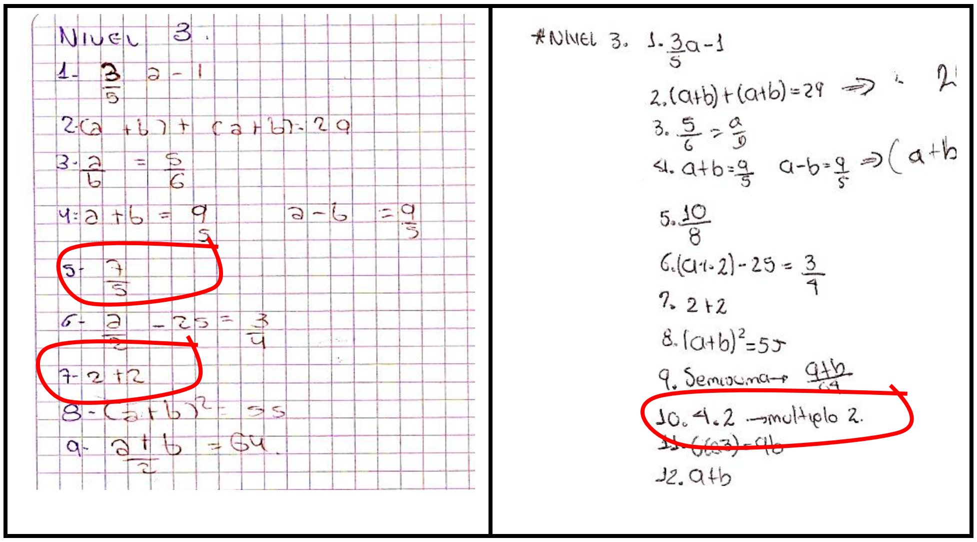

Figura 2. Letra evaluada

Por tanto podría decirse que el estudiante en las primeras dos secciones tiene claro al resultado que debe llegar, es decir a una expresión algebraica o una ecuación, lo cual no se expresa en el último nivel solo hace referencia a un lenguaje matemático.

Otra de las respuestas en la cual causó controversia entre los estudiantes a la hora de plantear e interpretar el enunciado *"La sexta parte del cubo de un número es 9 veces el número"*, pues el significado de "cubo" es comprendido como una figura geométrica, por lo que expresar el enunciado en una ecuación o expresión algebraica no era posible. Pero se pude observar que las respuestas dadas van encaminadas a ubicar la figura (el cubo) en un plano o darle un valor específico que permite plantear una posible respuesta. También se nota que los conceptos de potenciación y multiplicación expresados en lenguajes diferentes como son el habitual y el matemático, no son del dominio del estudiante aunque sus símbolos tengan sentido su significado no lo es. (Ver figura 3)

11. La sexta parte del cubo de un número es 9 veces el número.

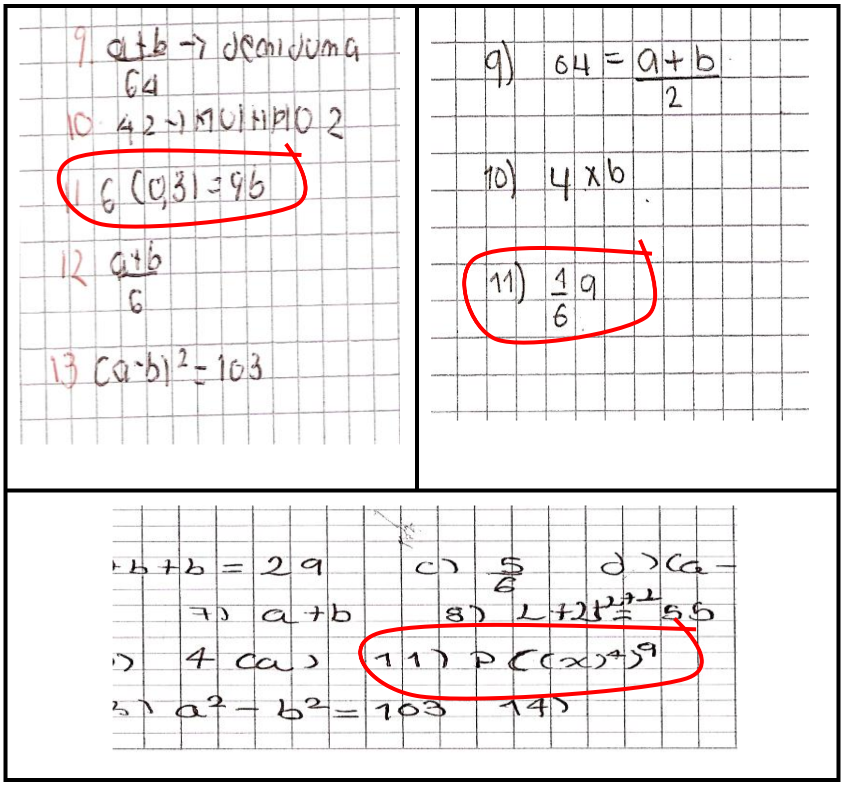

Figura 3. La potenciación y la multiplicación

Establecer una relación entre las distintas operaciones en un mismo enunciado y poder comprender el significado de toda la proposición como una sola es el fin primordial de la transformación de un lenguaje, pero representar de manera simbólica cada operación de un enunciado y luego unirlas para formar una nueva expresión puede llevar a planteamientos distintos en los cuales el significado de las palabras no corresponden al significado de los símbolos, llegando así a expresiones erróneas de los enunciados (Ver figura 4), es decir que la proposición es vista por pequeños significados y no como una sola proposición que tiene un nuevo concepto.

4. El producto de la suma y diferencia de dos números es $9/5$.

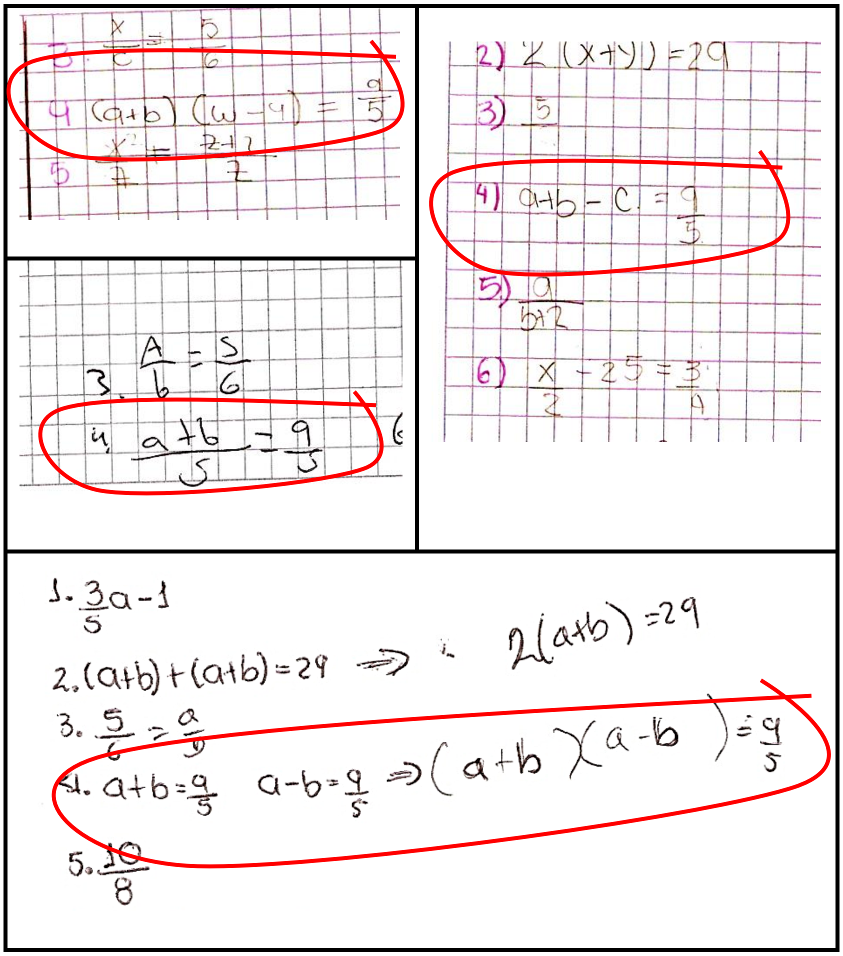

Figura 4. La relación de tres operaciones en un mismo enunciado

❖ Situación de institucionalización

Establecidas las situaciones anteriores el estudiante debe llegar a un nuevo conocimiento, en el cual cada enunciado debe representar una expresión coherente y lógica, que en algún momento dado sirva como un puente de comunicación para plantear la solución de un problema que bien puede ser propuesto en espacios cotidianos como matemáticos.

También es importante la diferencia que tiene el lenguaje habitual del matemático, pues los estudiantes, pudieron tomar conciencia que palabras expuestas en enunciados cotidianos, en un contexto matemático no pueden representar lo mismo, y los conocimientos previos que se tienen y se van construyendo en el proceso educativo, deben perdurar en el proceso de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas.

7 CONCLUSIONES

- La transformación de un lenguaje habitual a un lenguaje matemático debe constituirse como uno de los propósitos fundamentales de las matemáticas, ya que es en este proceso en donde se le brinda al estudiante las herramientas que debe utilizar para que esta área del conocimiento se transforme en un puente para alcanzar metas.

- El estudiante establece la relación entre lenguaje habitual y el lenguaje matemático, ya que en la interpretación las palabras a pesar de ser las mismas difieren en el sentido y significado en cada uno de los lenguajes.

- La descripción y la caracterización del lenguaje matemático propuesto por los estudiantes está relacionado con objetos geométricos y abstractos como es el álgebra, ya que pretende representar por medio de gráficas los enunciados y no como una expresión algebraica o ecuación
- La práctica pedagógica es una vivencia, que enriquece la formación profesional que se va adquiriendo desde las experiencias en el aula y que muchas veces lo que se espera no es lo que se obtiene, pues se omite la formación que el estudiante trae en su proceso educativo, es decir que los vacíos que vienen de años pasados toman fuerza a la hora de construir conocimiento, frenando así el desarrollo y progreso de la clase y la coherencia de las ideas.

- Las relaciones fuera y dentro del aula entre el maestro y el alumno, admiten establecer puentes de comunicación, ya que la confianza permite que los procesos de enseñanza cambien o se mantengan según las reglas, tiempo y espacio establecidos para el desarrollo de la clase, pues la relación entre los estudiantes, las diferentes posturas de inconformidad, cansancio y otros factores que impiden el progreso de la clase son elementos a los cuales el maestro siempre debe buscar una solución que favorezca tanto al educando como al docente, pero buscando siempre el aprendizaje de las matemáticas.

- Cambiar el esquema que durante años se ha mantenido, en donde es el maestro el único dueño del conocimiento, creando de esta manera un "temor" hacia las matemáticas. Es la oportunidad de darle al estudiante la posibilidad de expresar lo que piensa y entiende frente al lenguaje matemático, además mostrar que siempre se debe estar dispuesto al cambio y que las opiniones del estudiante son importantes para el mejoramiento de la formación del maestro y en la búsqueda de una sociedad justa y equitativa

- Los estudiantes comprenden que el ampliar o agregar símbolos, terminología y conceptos entre otros aspectos matemáticos a su vocabulario cotidiano, son necesarios en su formación educativa en todo el camino que deben recorrer para una formación profesional, pues las matemáticas van más allá de simples operaciones y representaciones numéricas, ya que estas se presentan fuera y dentro del contexto escolar.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D. (s.f.). *Teoria del aprendizaje significativo.*

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Metodos de la Didáctitica de las Matemáticas.* M.C.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al Estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Zoral.

Centro de Escritura, Universidad del Cauca. (s.f.). Obtenido de http://www.unicauca.edu.co/centroescritura/materiales-de-apoyo

D'Amore, B. (2006). *Didactica de la matematica.* Bogota, Colombia: Magisterio.

Fandiño, J. M. (2006). *Currículo, Evaluación y Formación Docente en Matemáticas.* Bogota, Colombia: Magisterio.

Florez, R. (2005). *Pedagogia del conocimiento* . Bogota, Colombia: McGraw-Hill.

Gascon, J. (s.f.). Incidencia del modelo epistemologico de las matematicas sobre las practicas docentes. *Revista Latinoamericana de investigacion en Matematica Educativa*, 129-159.

Godino, J. D. (2003). *Proyecto Edumat-Maestros: Matemáticas y su Didáctica para Maestros*. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

MEN, M. d. (1998). *Matematicas, Lineamientos curriculares.* Bogota, Colombia: Ministerio de Educacion Nacional.

MEN, M. d. (2006). *Estandares Basicos de Competencias en Lenguaje, Matematicas, Ciencias y Ciudadanas* . Bogota, Colombia: Ministerio de Educacion Nacional.

Munera, J. (s.f.). Diseño de situaciones problema dinamizadoras de pensamiento matematico escolar. Bogota.

Palarea, M. m. (1999). La adquisicion del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigacion. *Didactica de las matematicas*, 3-28.

Pimm, D. (1990). *El Lenguaje Matematico en el Aula*. Madris, España: Ediciones Morata S.A.

Sacristan, J. G. (1991). LaCultura, el Curriculum y la Practica Escolar. En J. G. Sacristan, *El Curriculum: Una Reflexion sobre la Practica* (págs. 11-22). Madrid, España: Morata.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1965). *Iniciacion al algebra.* Sintesis.

Zambrano, A. (2002). Pedagogia y Relacion Pedagogica. En *Pedagogia Educabilidad y Formacion de Docentes* (págs. 59-62). Cali, Colombia: Grupo Editorial Nueva Biblioteca Pedagogica S.

Zill, D. y. (2000). *Algebra y Trigonometria.* Bogota, Colombia: McGraw-Hill.

ANEXOS

Anexo 1. Taller abordado en la investigación

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN - UNIVERSIDAD DEL CAUCA
Licenciatura en matemáticas
Práctica pedagógica
Sistemas de ecuaciones
Grado 9

Taller individual

La peor derrota de una persona es
Cuando pierde su entusiasmo.
H.W. Amolda

- ***Nivel 1***
  Expresar algebraicamente los siguientes enunciados verbales.

  1) La suma de dos números.
  2) Un número aumentado en tres.
  3) La diferencia entre un número y cinco.
  4) Un número disminuido en diez.
  5) El producto de dos números.
  6) El doble de un número.
  7) El cociente de dos números.
  8) La mitad de un número.

- ***Nivel 2***
  Para cada uno de los siguientes enunciados proponga una ecuación matemática.

  1) La suma de dos números es igual a catorce.
  2) Un número aumentado en siete es igual veintidós.
  3) La diferencia de dos números es once.
  4) Diez es igual a dos menos que n.
  5) Cuatro veces un número es igual a dos tercios.
  6) El doble de un número por otro es igual a cuarenta y uno.
  7) A un número se lo divide entre ocho y su resultado es treinta y tres.
  8) Treinta y nueve es el cociente de a y b.

- ***Nivel 3***
  Representar los siguientes enunciados en una expresión matemática.

1) Los tres quintos de un número menos uno.
2) Dos veces la suma de dos números es veintinueve.
3) La razón entre dos números es de 5 a 6.
4) El producto de la suma y diferencia de dos números es nueve quintos.
5) El numerador de una fracción excede en dos unidades al denominador.
6) La mitad de un número disminuido veinticinco es igual a tres cuartos.
7) La suma de dos números pares.
8) El cuadrado de la suma de dos números es cincuenta y cinco.
9) 64 es igual a la semisuma de dos números.
10) Un múltiplo de 4.
11) La sexta parte del cubo de un número es nueve veces el número.
12) El cociente de dos números disminuido en cuatro es igual a seis.
13) La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es
14) Si el mayor de dos números se divide por el menor el cociente es diez.
15) La diferencia entre dos números es igual a tres veces el menor.
16) un número más el triple de otro es igual a un quinto de su diferencia.

Anexo 2. Escuela normal Superior de Popayán

Anexo 3. Estudiantes del grado 9-A y maestro titular