CONOCIMIENTO PERTINENTE DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

EN EL PROYECTO “POPAYÁN Y LAS MATEMÁTICAS”

ALEX ALBERTO BURBANO CALVO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN, COLOMBIA

2016

CONOCIMIENTO PERTINENTE DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PROYECTO “POPAYÁN Y LAS MATEMÁTICAS”

Universidad del Cauca

ALEX ALBERTO BURBANO CALVO

ASESOR:
Mg. ORLANDO RODRÌGUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN, COLOMBIA

2016

Nota de aceptación

____

____

____

____

Director __________________________________

Mg. Orlando Rodríguez

Evaluadora __________________________________

Dra. Martha Lucia Bobadilla

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, Diciembre 15 de 2016

Agradecimientos

Agradezco primordialmente a Dios por brindarme la capacidad, fortaleza y perseverancia para culminar este proyecto y poder finalizar esta importante etapa de mi vida.

A mis padres que con su incondicional apoyo y esfuerzo me dieron la confianza para emprender este difícil proyecto, pero, que sin su ayuda no hubiese sido posible concluirlo.

A mi director de práctica pedagógica Orlando Rodríguez por su sabiduría, dedicación y acompañamiento en mi proceso de formación.

A mi evaluadora Martha Lucia Bobadilla por aceptar y tomarse el tiempo de evaluar el actual proyecto.

Finalmente agradecer a mis amigos, compañeros y todas aquellas personas que me han acompañado y han hecho parte de esta etapa de mi vida.

Tabla de contenido

Tabla de ilustraciones

1. Resumen

El actual documento recopila el proceso de la práctica correspondiente al programa de licenciatura en matemáticas de la universidad del cauca, el cual se llevó a cabo con los estudiantes de grado décimo B de la institución educativa Normal Superior de Popayán. Trabajo enmarcado en el proyecto macro "Popayán y la matemáticas", en el cual se abordaron las relaciones trigonométricas, gráficas de las relaciones trigonométricas seno y coseno, y teoremas del seno y coseno, en el contexto urbano de la ciudad de Popayán. Aquí se presentan modelos de problemas arquitectónicos existentes en esta ciudad que se solucionaron a partir de las temáticas antes mencionadas.

Introducción

La práctica pedagógica del programa de licenciatura en matemáticas es un espacio que permite a los estudiantes de dicho programa tener un primer acercamiento a la realidad como futuros formadores en el contexto educativo, reconociendo experiencias que permiten explorar facetas y capacidades que consoliden su proceso de formación docente.

Este documento presenta la sistematización de dicho proceso y recopila los aspectos más notables del trabajo denominado "conocimiento pertinente de las relaciones trigonométricas en el proyecto Popayán y las matemáticas" el cual fue desarrollado en la Escuela Normal Superior de Popayán, en el grado 10-B durante el primer semestre del año 2015 y que se encuentra enmarcado dentro del proyecto "Popayán y las matemáticas" que desde años atrás se ha venido desarrollando en dicha institución. .

El proyecto "Popayán y las matemáticas" inicia en el año 2005 en la ENSP (Escuela Normal Superior de Popayán), y desarrolló en su primera etapa "Trabajo con bloques lógicos-matemáticos" cuyo propósito es contribuir a resolver dificultades de aprendizaje en temas básicos de secundaria. Los ejes temáticos del proyecto giraron alrededor de:

- Visión integradora del aprendizaje de las matemáticas.
- La vida social y política de las competencias matemáticas.
- La evaluación de las competencias matemáticas.

El cual permite demostrar que el conocimiento del contexto es muy enriquecedor para:

1. Explorar nuevos objetos de investigación pedagógica
2. Plantear preguntas y reflexionar sobre modelos
3. Fortalecer los niveles de comunicación oral y escrita
4. Diseñar situaciones que generen conflicto cognitivo.

El propósito fundamental del plan de trabajo "conocimiento pertinente de las relaciones trigonométricas en el proyecto Popayán y las matemáticas" gira en torno a identificar y resolver algunos problemas del contexto urbano de la ciudad de Popayán enmarcados en el proyecto "Popayán y las matemáticas "con estudiantes del grado 10-B de la ENSP aplicando relaciones trigonométricas.

Desde luego, se desprenden de este objetivo ejes temáticos a tener en cuenta que hacen parte esencial del desarrollo del proyecto tales como fomentar el interés de los alumnos por la matemáticas a través de experiencias teórico-practicas; potenciar el aprendizaje de las relaciones trigonométricas con problemas existentes en el contexto de la ciudad, y por supuesto que vean la trigonometría como un objeto matemático que va más allá de lo algorítmico y que puede ser usado en el mundo real. Se quiere además evidenciar la aplicación de las relaciones trigonométricas, sus gráficas y los teoremas del seno y el coseno.

El trabajo surge como una herramienta para hacer visible en los estudiantes las diversas aplicaciones de las matemáticas en el contexto urbano de la ciudad de Popayán. Para ello se propone trabajar desde lo teórico como primera medida, para después desarrollar proyectos que involucran estructuras y elementos tangibles de la ciudad. El plan de trabajo se plantea como una forma de cautivar el interés de los alumnos por las matemáticas, además de promover nuevas estrategias pedagógicas con este tipo de proyectos.

El documento se encuentra dividido en cuatro partes. En el primer capítulo se hace una recopilación de los elementos teóricos que guiaron la propuesta de trabajo, en el segundo capítulo se abordan aquellos acontecimientos relevantes que surgieron durante la realización de la práctica, para finalmente, en el tercer y cuarto capítulo, realizar una reflexión general sobre la experiencia vivida en la práctica pedagógica (PP).

En el capitulo 1 se presentan las razones que llevaron a trabajar las funciones trigonométricas en el contexto urbano de la ciudad. Los estudiantes tienen la concepción de la trigonometría como un ente abstracto sin utilidad alguna en la vida práctica, razón por la cual involucrar la arquitectura de la ciudad se hace necesario para cambiar dicho pensamiento. En la sección 5.4 se abordan los referentes teóricos que soportan la realización de esta propuesta, dicho referente están relacionados primordialmente con “resolución de problemas trigonométricos” con los cuales se buscan realizar analogías entre problemas teóricos con problemas del contexto real de la ciudad, todo esto enmarcado además con la propuesta de “el pensamiento complejo” cuyo precursor es el sociólogo Edgar Morín. Así, trabajando con la estrategia de resolución de problemas trigonométricos en la ciudad de Popayán, se busca que los estudiantes asimilen y cambien la concepción de las matemáticas como una ciencia aburrida y acabada sin lugar a la creatividad y la aplicación.

En la sección 1.2 del capitulo 1 se presenta el contenido matemático y los referentes teóricos que fundamentan el trabajo, para posteriormente en el capítulo 2 dar a conocer la delimitación y alcances del trabajo. Aquí se dan a conocer aspectos relevantes que se trataron con el docente de la institución educativa y los respectivos acuerdos a los que se llegaron con los estudiantes. En la sección 2.3 se da a conocer la metodología implementada en el aula, por medio de la cual se ejecutó la propuesta, resalta esencialmente la línea de trabajo y los métodos de trabajo implementados.

Finalmente, el contenido de los capítulos 3 y 4 relatan las respectivas reflexiones, además, de las conclusiones generadas a partir de la implementación de la propuesta en el entorno educativo.

1. Planteamiento del problema.

1.1. Justificación

En el contexto escolar es frecuente encontrarse con estudiantes que se preguntan continuamente ¿Cómo poder aplicar la teoría vista en las aulas en la vida cotidiana? o ¿para qué me sirve todo esto? Y en especial estos interrogantes se presentan con mayor frecuencia en el área de las matemáticas, debido a las características de la misma. Ignorando desde luego la importancia y la utilidad de las matemáticas en el contexto real, e imperando en ellos un significado erróneo de éstas, pues los alumnos tienden a verlas como un conjunto de símbolos y operaciones de cálculo. Lo que está en consonancia con lo que observa Valderrama Ramírez, la enseñanza de las matemáticas debe construir conocimientos estructurados, significativos y duraderos; sin embargo, en realidad la escuela parece limitarse a impartir contenidos desligados de su aplicabilidad.

Los estudiantes tienden a resolver problemas o dar soluciones a diferentes situaciones a través de elementos teóricos brindados en el aula de clases por sus docentes, pero este razonamiento no va más allá de escribir una serie de símbolos y ecuaciones en las cuales ellos solo buscan resolver el problema, sin preguntarse qué hay de tras de los objetos matemáticos estudiados. Es normal observar en el estudiantado el recitar una serie de formulas matemáticas que no cobran sentido alguno, y que se quedan tan solo en un mundo abstracto y separado del contexto real (Aranda Zafra, Pérez Miguel, & Sánchez Díaz).

El docente es parte fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje ya que éste es quien se encarga de llevar en primera instancia el conocimiento matemático al aula de clases y su manera de transmitir tal conocimiento incide directamente en el gusto de los estudiantes por las matemáticas. Sin embargo, la enseñanza de éstas se ha convertido en una dificultad para los maestros, los cuales se escudan en que dicha área es difícil de enseñar porque el lenguaje matemático es complejo, formal y de difícil dominio, o que esta área es muy amplia y requiere de constancia y tiempo para asimilar conceptos complejos que encierran las matemáticas.

En este sentido Ausbel plantea que la problemática que surge a raíz de la forma en que los estudiantes asimilan los objetos matemáticos y como han sido transmitidos dichos objetos se ve tácitamente en que no hay un aprendizaje significativo, pues estos memorizan dichos objetos (ya sean fórmulas, símbolos, igualdades, equivalencias, etc.) y no interiorizan el significado y utilidad de éstos.

Es por ello que surge la iniciativa de cambiar esta perspectiva a través del actual trabajo, en el área de la trigonometría. Los estudiantes se encuentran con un objeto matemático y un lenguaje nuevo para ellos de recurrente uso de símbolos; lenguaje que no representa más que fórmulas y letras sin significado alguno. Tal es el caso cuando se introducen las relaciones trigonométricas, donde se encuentran con elementos teóricos como el seno, coseno, tangente, entre otros. Temática en la cual los estudiantes proceden de manera algorítmica y para los cuales no ven su esencia y aplicabilidad en contextos reales.

Para el caso específico de las relaciones trigonométricas, la enseñanza parece estar limitada a un trabajo superficial en el que no se da importancia al análisis de sus diferentes representaciones, a las traducciones y aplicaciones que se pueden dar a partir de las mismas, ya que usualmente se trabaja la representación tabular y gráfica independientemente a su estructura conceptual y dicho trabajo se limita al uso de la calculadora para obtener los valores de cada función para diferentes ángulos; valores que posteriormente serán representados en un sistema de coordenadas para definir una función trigonométrica a la cual se le asignan algunas características- propiedades que por supuesto son difíciles de comprender por los educandos, ya que dichos conceptos se quedan en representaciones matemáticas alejadas de interpretaciones reales.(Valderrama Ramirez, 2013, pág. 7)

Con el propósito de enlazar los conceptos de la trigonometría con la realidad y no caer en una simple concatenación de fórmulas y cálculos, nace la idea de trabajar en esta propuesta. Cuyo interés radica en mostrar a los estudiantes las matemáticas y en especial las relaciones trigonométricas, no como un cuerpo de conceptos acabado sino como un cuerpo en constante crecimiento y de múltiples aplicaciones en el mundo real(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006). Aprovechando, además, el trabajo que venía realizando la normal con el proyecto mencionado anteriormente y en el cual se trazó una línea de estudio que articulan problemas del contexto real con la temática vista en el aula de clase.

Esta propuesta se caracteriza por evidenciar esencialmente las ventajas de la trigonometría al momento de dar solución a problemas que involucran el contexto urbano de la ciudad de Popayán, proyecto que busca acercar al estudiante con el mundo real a través de problemas, cuya solución puede ser lograda a partir de herramientas teóricas brindadas en el aula de clase; en este caso, dichas herramientas están relacionadas directamente con las relaciones trigonométricas, gráficas de las relaciones trigonométricas y los teoremas del seno y el coseno.

Las relaciones trigonométricas permiten resolver problemas que involucran distancias y alturas, las graficas de las relaciones trigonométricas permiten establecer e identificar ecuaciones para modelar curvas, por ejemplo si se pidiera encontrar la función que describe la curva que forma el área de una cancha de futbol sala; mientras que los teoremas del seno y el coseno permiten desarrollar problemas arquitectónicos de manera general, pues con ellos no se limita a triángulos rectángulos. Es así como este tipo de elementos teóricos permiten al individuo un acercamiento al mundo real y con ellos sentir placer por lo que estudia, pues si un estudiante no experimenta un mínimo de placer por lo que está estudiando, el conocimiento frente a él es mera información, datos, cifras y estadísticas que retendrá en su memoria de corto plazo y después desechará; porque su propio cerebro no las marca como significativas, valiosas o importantes para vivir(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 55)

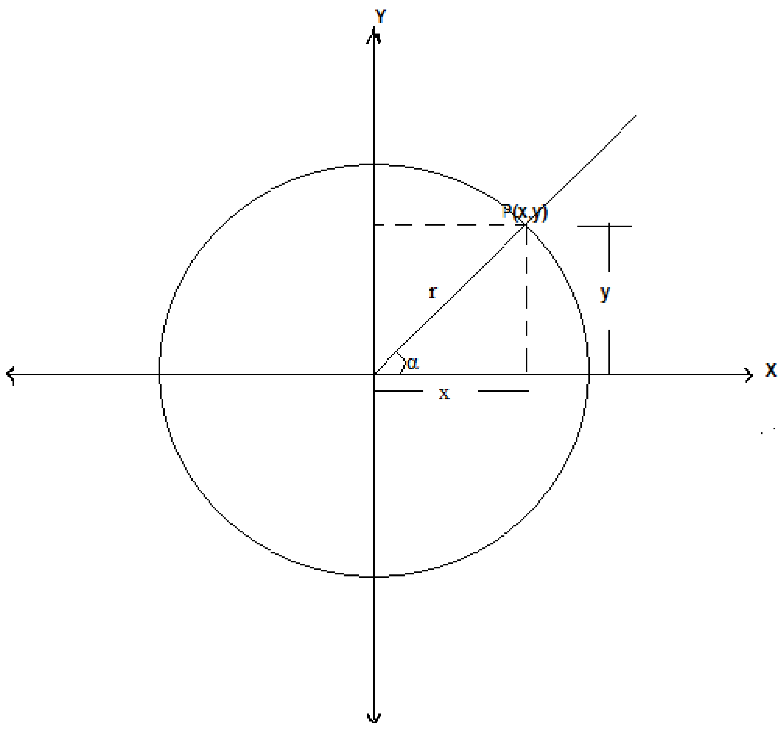
Teniendo en cuenta las múltiples aplicaciones de las relaciones trigonométricas, las gráficas del seno y del coseno, y los teoremas del seno y coseno, el proceso práctico desarrollado en la institución, el trabajo se enfocó en resolver problemas de este tipo, es decir en ellos se planteaban problemas arquitectónicos de la ciudad en sitios representativos de la misma tales como el parque Caldas, la Cruz de Belén, la Catedral, la iglesia de San Francisco, entre otros. En torno a los sitios mencionados se propusieron problemas de alturas y distancias que pudiesen ser resueltos con base a la teoría estudiada en el aula.

1.2. Referentes Teóricos

1.2.1. Contenido matemático.

La trigonometría es una de las ramas más antiguas de las matemáticas, se basa en la relación matemáticas de los lados de un triangulo rectángulo. Es decir todos los posibles cocientes que resulten entre los valores de los lados del triangulo, estos posibles cocientes son seis, cada uno de los cuales define una relación trigonométrica.

Consideremos un ángulo α en posición normal respecto a un sistema de coordenadas cartesianas X, Y, y tracemos con respecto al origen una circunferencia de radio r>0 que corta el lado terminal en el punto $P(X, Y)$.



SENO $sen\alpha = \frac{y}{r}$
COSENO $cos\alpha = \frac{x}{r}$
TANGENTE $\tan\alpha = \frac{y}{x}$
COSECANTE $\csc\alpha = \frac{r}{y}$
SECANTE $sec\alpha = \frac{r}{x}$
COTANGENTE $ctg\alpha = \frac{x}{y}$

Ilustración 1: circulo goniométrico

Para la resolución de problemas sobre el cálculo de las funciones trigonométricas debe tenerse en cuenta adicionalmente que:

- Los valores de la abscisa X y la ordenada Y, varían de acuerdo con el cuadrante en el que esté ubicado el ángulo en posición normal.
- El teorema de Pitágoras en el triangulo rectángulo, se expresa mediante la fórmula:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

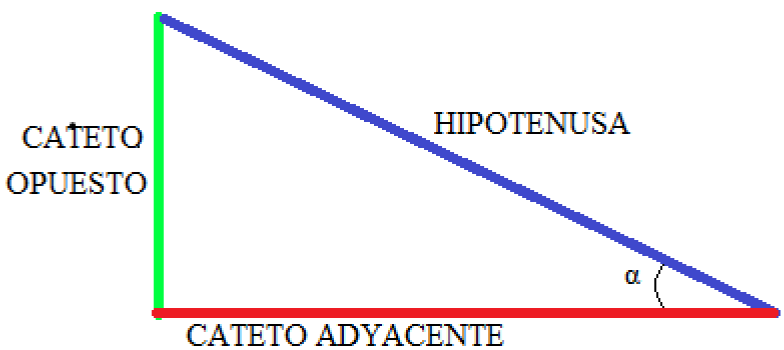
Inicialmente, un primer problema consiste en calcular el valor de las relaciones trigonométricas de un ángulo, conocido un punto $P(X, Y)$ por donde pasa el lado terminal del ángulo. En este caso para calcular el valor de las funciones trigonométricas se debe calcular el radio y luego aplicar los conceptos de cada función.

- Un segundo problema consiste en calcular el valor de las relaciones trigonométricas de un ángulo, conocido el valor de una relación trigonométrica. En este caso, la relación conocida proporciona dos de los tres valores x, y, r con los dos valores conocidos de calcular el tercer valor y luego se aplican los conceptos de las relaciones trigonométricas para calcular las restantes.

Relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos.

Consideremos un triangulo rectángulo ΔABC y el ángulo α. Los lados del triangulo se llaman hipotenusa, el lado mayor; cateto adyacente, el lado que forma parte del ángulo; cateto opuesto, el lado que es opuesto al ángulo.

Ilustración 2: triángulo rectángulo



$$sen\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\mathbf{tg\alpha} = \frac{\boldsymbol{cateto\ opueto}}{\boldsymbol{cateto\ adyacente}} \qquad \mathbf{csc\alpha} = \frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\textbf{cateto opuesto}}$$

$$sec\alpha = \frac{\text{hipotensa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \text{ctg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triangulo rectángulo es determinar los valores de sus tres lados, sus tres ángulos y su área, a partir del conocimiento como mínimo de tres de sus elementos siempre y cuando uno de estos sea un lado. En la resolución de triángulos se presentan dos casos, considerando que ya se conoce uno de sus ángulos, el ángulo recto.

Primero caso: cuando se conocen un lado y un ángulo:

a) Se conoce un ángulo y el cateto opuesto.
b) Se conoce un ángulo y el cateto adyacente.
c) Reconoce un ángulo y la hipotenusa.

Segundo caso: se conocen los lados.

a) Se conocen los dos catetos.
b) Se conocen un cateto y la hipotenusa.

Grafico de las relaciones trigonométricas seno y coseno.

Las líneas trigonométricas.

Se presentan en un circulo de radio 1 (circulo goniométrico) a través de segmentos rectilíneos, cuyo valor corresponde al valor de la función trigonométrica respectiva.

Para trazar las líneas trigonométricas se traza un plano cartesiano y se determina un ángulo en posición normal a cualquiera de los cuadrantes, cuyo lado terminal es interceptado por una circunferencia de radio $R = 1$ que se prolonga hasta que intercepte las líneas tangentes a la circunferencia. El método de trazado consiste en trabajar las relaciones trigonométricas sobre triángulos rectángulos semejantes que tengan un lado igual a la unidad, y de tal forma que el denominador de la fracción correspondiente a cada función trigonométrica sea siempre la unidad.

Se definen las relaciones trigonométricas en tres rectángulos y en cada uno de ellos se deducen las líneas trigonométricas. En el cuadrante I todas las relaciones son positivas, por lo tanto las líneas tendrán la orientación positiva, en los cuadrantes II, III y IV hay que tener presente cuales relaciones son positivas y cuales son negativas para definirle su respectiva orientación. La orientación de las funciones trigonométricas secante y cosecante la definen la relacione tangente y cotangente en cada cuadrante.

Ilustración 3: gráfica función Seno

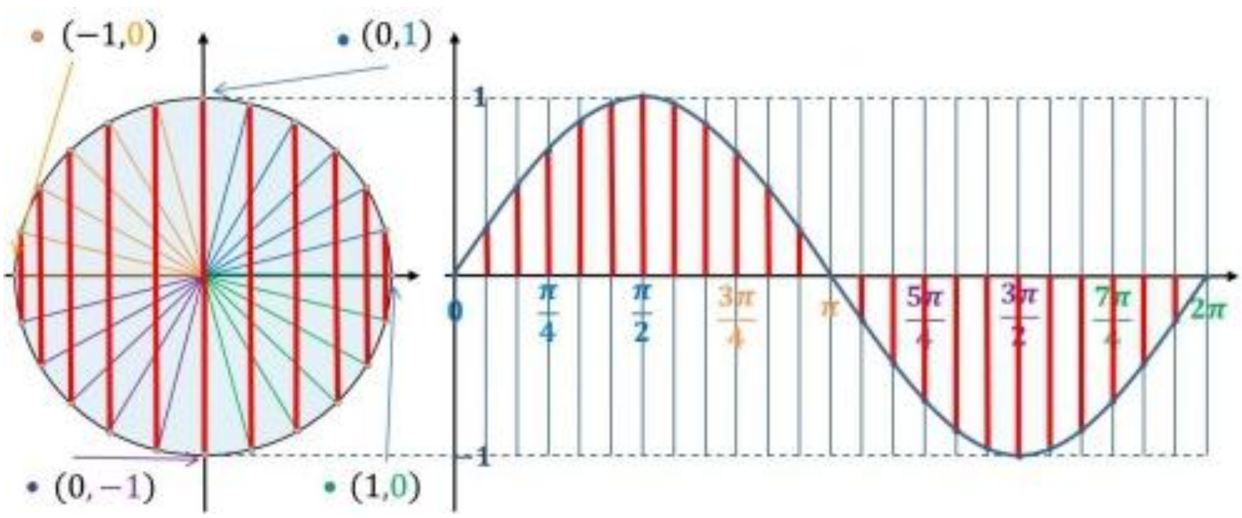
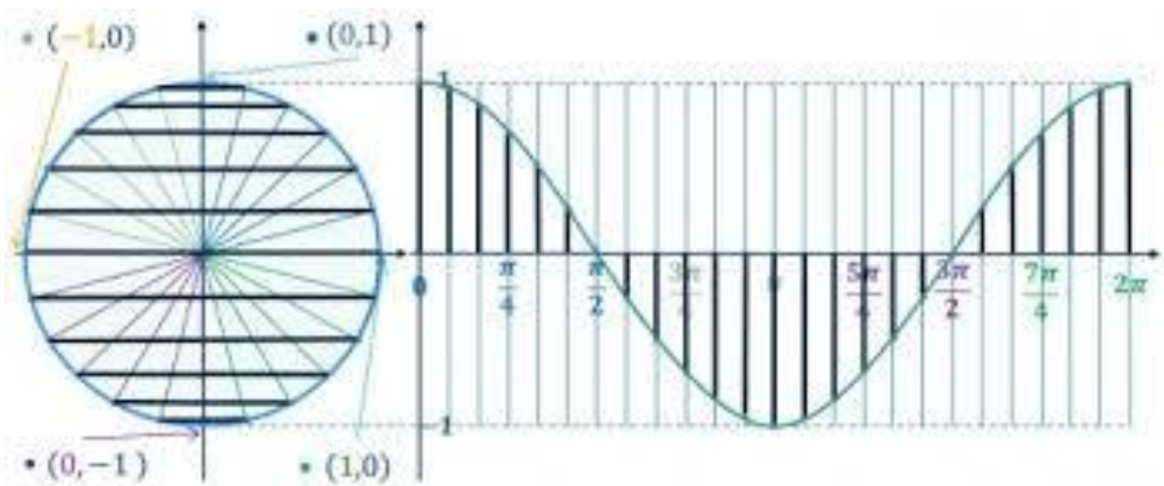


Ilustración 4: gráfica función Coseno



Amplitud, periodo y fase para las funciones seno y coseno.

Las curvas de las funciones trigonométricas tienen algunas modificaciones si se multiplica por algún número real o si el ángulo se le multiplica y/o se le suma un número real.

AMPLITUD

Consideremos las funciones

$\boldsymbol{y = Asen\alpha}$

$\boldsymbol{y = Acos\alpha}$

Si A= 1, el máximo valor de la ordenada y es 1, y el mínimo es -1, así la curva resultante es la que se construyó en papel milimetrado. Si $A \neq 1$, los valores máximo y mínimo de la ordenada y varían, en efecto:

1. Si $A > 1,$ los valores de la ordenada y se amplían.
2. Si $A < 1$, los valores de la ordenada y se reducen.
3. Si$0 < A < 1$, la gráfica se invierte.

En este caso el periodo y la fase permanecen constantes. En general $y = Asen\alpha$ y $y = Acos\alpha$

$|A| = amplitud$, con $A \epsilon R$

PERIODO:

Consideremos las funciones:

$y = senB\alpha$

$y = cosB\alpha$

Si $B = 1$, la longitud de un ciclo completo es 2π, así la curva resultante es la que se construyó en papel milimetrado. Si $B \neq 1$, la longitud del ciclo varia, ene efecto.

1. Si $B > 1$, la longitud del ciclo se reduce.
2. Si $0 < B < 1$, la longitud del ciclo se amplia.

En este caso, la amplitud y la fase permanecen constantes, en general $y = senB\alpha$ y

$y = cosB\alpha$ y por tanto P=$\frac{2\pi}{B}$

FASE

Consideremos las funciones:

$$y = sen(\alpha + \mathrm{C})$$

$$y = cos(\alpha + \mathrm{C})$$

Si $C = 0$, la curva resultante es la que se construyó en papel milimetrado. Si $c \neq 0$, la grafica se desplaza, en efecto:

1. Si $C > 0$, la grafica se desplaza C unidades hacia la izquierda.
2. Si $C < 0$, la grafica se desplaza C unidades hacia la derecha.

En este caso, la amplitud y el periodo permanecen constantes.

En general:

$$y = sen(\alpha + \mathrm{C})$$

$$y = cos(\alpha + \mathrm{C})$$

Y por tanto $C = fase$

En general:

Si consideramos las funciones:

$$y = Asen(B\alpha + \mathrm{C})$$

$$y = Acos(B\alpha + \mathrm{C})$$

Entonces:

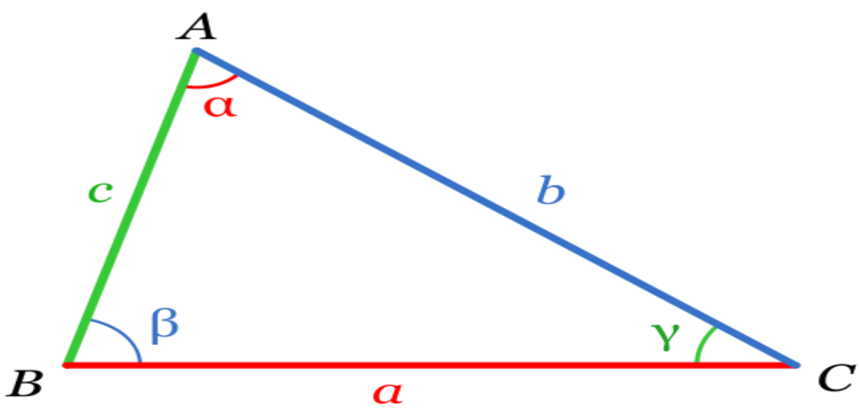
1. $A = amplitud$. Si $A > 1$, Y se amplia; si $A < 1$, Y se reduce; si $0 < A < 1$ la gráfica se invierte.
2. El periodo: $p = \frac{2\pi}{B}$ Si $B > 1$, el ciclo se reduce; si $0 < B < 1$, el ciclo se amplía.
3. La fase: $F = \frac{C}{B}$ Si $\frac{C}{B} > 0$, la gráfica se corre hacia la izquierda; si $\frac{C}{B} < 0$, la gráfica se corre hacia la izquierda.

Teoremas del seno y coseno.

Teorema del seno

Cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto. Este teorema es útil para resolver ciertos tipos de problemas que generen un triangulo. La aplicación de esta ley es utilizada para resolver problemas en los que se conocen dos ángulos del triángulo y un lado opuesto a uno de ellos. También se usa cuando conocemos dos lados del triángulo y un ángulo opuesto a uno de ellos.

Ilustración 5: teorema del seno



$$\frac{b}{sen\beta} = \frac{\mathrm{a}}{sen\alpha} = \frac{\mathrm{c}}{sen\gamma} \qquad \text{(Teorema del seno)}$$

Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2(\mathrm{bc})\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2(\mathrm{ac})\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2(\mathrm{ab})\cos\gamma$$

1.2.3. Referentes Didácticos

Los siete saberes necesarios para la educación

El conocimiento matemático alcanza altos niveles de complejidad, lo que hace que se dificulte su aprendizaje; esto ha traído como consecuencia que muchos estudiantes no encuentren una conexión con lo real y pierdan su interés por practicarlas. Es por ello que el profesor Edgar Morín a través de su obra "pensamiento complejo" plantea que es necesario crear un método, una manera de pensar, un pensamiento que dialogue con lo real (Acevedo Linares, 2013). En su obra "los siete saberes necesarios para la educación del futuro" publicado por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 1999, Edgar Morín propone siete saberes "fundamentales" que la educación del futuro debería tratar en cualquier sociedad y en cualquier cultura, los cuales son:

- La ceguera del conocimiento, el error y la ilusión.
- Los principios de un conocimiento pertinente.
- Enseñar la condición humana.
- Enseñar la identidad terrenal.
- Enfrentar las incertidumbres.
- Enseñar la compresión.
- La ética del género humano.

Acorde al trabajo que se ha venido desarrollando en esta práctica pedagógica, se identifica como parte esencial de la estrategia de enseñanza introducir conocimientos que enriquezcan al individuo en formación, de acuerdo a esto y como lo plantea Morín en "los principios de un conocimiento pertinente", donde se requiere de un conocimiento capaz de abordar los problemas globales y fundamentales para inscribir allí los conocimientos parciales y locales.

Los principios de un conocimiento pertinente.

A través de la historia, se evidencia que la enseñanza en general se encuentra enfrentada a diversos problemas, entre ellos se ha observado que el conocimiento y la información están desarticulas del contexto real, y es contra esta tendencia que debe luchar la educación, ya que se evidencia una disyunción cada vez más amplia, profunda y grave; por un lado entre nuestros saberes desunidos, divididos, compartimentados y por el otro, realidades o problemas cada vez más poli disciplinarios, transversales, multidimensionales, transnacionales, globales, planetarios (Morín, 1999).

Morín platea entonces la necesidad de reconocer los diferentes factores que deben tenerse en cuenta para que un conocimiento sea pertinente, entre ellos se deben ser tenidos en cuenta el contexto, lo global, lo multidimensional y lo complejo.

El contexto.

"El conocimiento de las informaciones o elementos aislados es insuficiente. Hay que ubicar las informaciones y los elementos en su contexto para que adquieran sentido" ((Morín, 1999, pág. 15). Aquí se trata de darle sentido a los conocimientos dados en clase, que dicho conocimiento no se quede en solo información, y por el contrario dichos elementos se evidencien en los diferentes contextos reales. Promover una educación que articule lo teórico con lo práctico, dando así luces al estudiantado de la diversidad aplicativa de la que gozan las matemáticas. Claude Bastien anota que « la evolución cognitiva no se dirige hacia la elaboración de conocimientos cada vez más abstractos, sino por el contrario, hacia su contextualización » la cual determina las condiciones de su inserción y los límites de su validez. Bastien agrega que « la contextualización es una condición esencial de la eficacia (del funcionamiento cognitivo) »" (Morín, 1999, pág. 16).

La importancia de contextualizar los conocimientos dados, permite al alumno obtener un aprendizaje significativo a partir de lo práctico, teniendo nuevas miradas y además enriqueciendo sus conocimientos, para dar solución a problemáticas que se presentan continuamente en el contexto.

Lo global.

De a cuerdo con Morín lo global es más que el contexto, es el conjunto que contiene partes diversas ligadas de manera inter-retroactiva u organizacional. Así mismo, como cada punto singular de un holograma contiene la totalidad de la información de lo que representa, cada célula singular, cada individuo singular contiene de manera holográmica el todo del cual hace parte y que al mismo tiempo hace parte de él. Es por ello que es importante vincular al individuo con su contexto, llevarlo a conocer y ser participe del mismo para que así este se apropie y contribuya a dinamizar la evolución de su realidad.

Lo multidimensional

El conocimiento pertinente debe reconocer al individuo como diverso y multifacético, el ser humano es a la vez biológico, síquico, social, afectivo, racional, de ahí que se debe pensar en un conocimiento que explote las diversas cualidades del individuo, todo esto teniendo en cuenta que el alumno en la actualidad trata de vincular su realidad con los contenidos temáticos que afronta en el aula de clase.

Lo complejo

Morín considera que el conocimiento es indisociable de lo que él llama la inteligencia general, entendiendo como tal aquella que trata de comprender el contexto y la globalidad en los que opera el conocimiento.

El conocimiento pertinente debe dotar al estudiante de herramientas teóricas que le permitan resolver problemas cotidianos de su entorno, problemas de su contexto real; es decir conocimientos que formen individuos competitivos capaces de afrontar situaciones complejas que se presentan con frecuencia.

En consecuencia la educación debe promover una “inteligencia general” apta para referirse de manera multidimensional, a lo complejo, al contexto en una concepción global (Morín, 1999, pág. 17)

El proceso de enseñanza-aprendizaje debe promover aptitudes en el individuo para hacer y resolver preguntas esenciales, y estimular el empleo total de la inteligencia general; aptitudes que son logradas con estimulaciones tempranas en el individuo, tales como la curiosidad, la cual a menudo se ha visto apaciguada por la manera en que se ha desarrollado la educación tradicional. De acuerdo con Morín, la inclusión de actividades en las cuales el estudiante se vea en la necesidad de actuar de forma diferente a la que en la cotidianidad escolar lo hace (algorítmicamente), logrará despertar o fortalecer la capacidad del estudiante para construir un conocimiento que se va fortaleciendo desde el ámbito práctico y el contexto real.

Para Morín la educación presenta una disyunción entre los saberes y el contexto, pues se evidencia que en la enseñanza “la educación tradicional ha parcelado, desunido y compartimenta los saberes haciendo cada vez más difícil su contextualización”, se ha convertido en una trasmisión de información al que le han quitado parte esencial, y su relación con la problemática para la cual fue propuesto, se ha dejado de enseñar el para qué de los diferentes objetos del conocimiento, en particular en la enseñanza de las matemáticas es común ver al docente trasmitir un compendio de información que se ha quedado en algoritmos y fórmulas sin sentido alguno.

De acuerdo con Morín, ha desaparecido la esencia de los problemas en relación a lo global, para articularlos en simples problemas técnicos y particulares. Con ello han generado en el individuo una inteligencia pobre y mecanicista que da pie a un pensamiento simplista y de saberes desarraigados uno de otros (Morín, 1999, pág. 19).

Es por tanto conveniente pensar, en un conocimiento pertinente que permita relacionar los saberes con lo multidimensional, lo global, lo complejo y desde luego el contexto; pensar en una educación que articule los saberes con la realidad, que despierte en el individuo la curiosidad por entender los fenómenos que se presentan en su entorno y que de respuesta a las problemáticas a través de razonamientos que involucren dichos saberes.

Una mirada del Pensamiento complejo

Morín plantea el pensamiento complejo como un pensamiento total, multidimensional, lo reconoce como un pensamiento no parcelado, no reduccionista pero de igual forma reconoce que el pensamiento es a su vez inacabado e incompleto. Morín a través del pensamiento complejo busca encadenar conocimientos con lo real y critica la forma en que se ha venido desarrollando la educación, pues se ha optado por una educación ciega y limitada, alejada de la diversidad de la que se encuentra compuesta la realidad.

En la actualidad, la educación se ha hecho notar por la ausencia de una orientación humanista, con sentido de identidad, de comprensión y desligada del mundo real; una educación en la que ha prevalecido un sujeto callado y expectante ante la realidad, individual y sin sentido colectivo. Es por ello que se busca cambiar esta perspectiva, tal como lo plantea Morín[1], se quiere estimular una enseñanza que incite al sujeto a pensar, interrogar, cuestionar, indagar y construir una nueva forma de comprender la realidad; para ello concibe en la complejidad de la vida, del hombre mismo y de su entorno herramientas para fortalecer sus conocimientos.

Acorde a lo anterior, en el trabajo desarrollado durante la práctica pedagógica se orientó a los estudiantes a darle sentido al contenido matemático visto en el aula a través de la interacción con el entorno de la ciudad, transformando información en conocimiento pertinente y privilegiando la riqueza de la arquitectura de la ciudad para formar individuos competitivos; ya que la formulación de proyectos y problemas que relacionan lo real, permiten al alumno desarrollar aptitudes para concebir, relacionar y solucionar problemáticas desde el ámbito académico; contrarrestando así la disyunción existente entre lo teórico y lo práctico.

Este tipo de prácticas primordialmente luchan por detener la fragmentación existente entre los saberes y la realidad, a la que se ve enfrentado el individuo, y aspiran a movilizar el conocimiento y la realidad hacía un punto de convergencia, para así fortalecer conocimientos y aptitudes en el sujeto, que contribuyan en la construcción de una nueva comprensión de las matemáticas en general.

A través del pensamiento complejo, tal como lo plantea Morín, se busca una enseñanza en la cual "prevalezca el convencimiento de que es mejor tener una mente bien ordenada que una mente muy llena y que, más que acumular el saber, es preferible disponer de una actitud general para plantear y tratar los problemas, así como contar con principios organizativos que permitan unir los distintos saberes y darles sentido"(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 34). Es

[1] Citado por (Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 7)

así como se trata de establecer metodologías de enseñanza que traten de romper la disyunción existente entre lo teórico y lo práctico, buscando darles sentido a través de las diferentes formas en las que se ven reflejadas las matemáticas, para nuestro interés particularmente el campo de las relaciones trigonométricas en conjunto con las ramas que de éste objeto matemático se despliegan. Se trata de hacer un encadenamiento entre los saberes y el mundo, el contexto, lo real; cuyo objetivo además es desarrollar aptitudes que permitan contextualizar y globalizar los saberes, promoviendo así un pensamiento desligado de lo rutinario y que muy por el contrario pretende enfrentar al individuo a su realidad. Es por tanto que la realización del actual proyecto concibe la premisa de estimular una enseñanza a través de un saber pertinente, una enseñanza con miras a darles sentido a los objetos matemáticos en estudio, con el propósito de formar individuos capaces de afrontar las dificultades que aporta el contexto. Si bien es cierto que se trata de un primer paso en este sentido, es evidente que se debe comenzar por vincular tanto a estudiantes como a profesores en este tipo de proyectos, cuyo fin sea cambiar un modelo de enseñanza que hasta ahora parece ser infructuoso(lofredo, 2014).

Morín plantea la necesidad de fomentar en el entorno educativo una enseñanza que conciba la importancia de relacionar el contexto, una enseñanza vinculada al mundo, que fomente el emprendimiento y la productividad, preocupada verdaderamente por la transferencia de conocimiento y que se base en el placer de conocer.

- **Una enseñanza vinculada al mundo:**

Se concibe plantear una enseñanza con una clara conciencia de la realidad y su entorno. Con ello se pretende la formación de un individuo que no pierda de vista que el conocimiento está vinculado con la vida, puesto que, lo que dota de sentido al saber es el contexto. Es así como se pretende alejar al alumno de la falsa idea de que existen dos realidades: la académica y teórica vs la empírica y práctica; buscando así eliminar las barreras hasta ahora establecidas por la educación tradicional, en la cual se ha empleado un método simple y desligado del contexto(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 47).

Sin embargo es importante resaltar el hecho de que no se trata de implementar un conocimiento meramente utilitario, de aplicación inmediata y para el cual se tenga su estudio explícito en la realidad; de hecho pretender una enseñanza con un componente meramente utilitario es difícil de ejecutar debido a que inciden diferentes factores que hacen imposible llevar a cabo este propósito, es por tanto, tal y como lo plantea Morín que se busca establecer en la medida de lo posible un punto de equilibrio dinámico, en el que el saber se confronta con la realidad, creando un circulo virtuoso de constante retroalimentación.

- **Una enseñanza que fomenta el emprendimiento y la productividad:**

En este punto, se concibe la productividad no como algo meramente económico, en términos de resultados, cifras o algún valor monetario, sino por el contrario se establece una productividad con miras a un sentido más amplio. Se concibe la productividad como la capacidad de ser útil para sí mismo y para los demás, con ello se pretende la formación de sujetos con la capacidad de actuar sobre su realidad en todas sus dimensiones, especialmente y visto en el ámbito de las matemáticas, individuos que a través de las matemáticas den solución a situaciones de la realidad, desde luego considerando situaciones al alcance de los conocimientos del sujeto; pues sería injusto pretender que el individuo materialice o resuelva las diversas problemáticas que se puedan presentar considerando lo complejas de algunas de ellas y más aún si se considera la complejidad de las matemáticas mismas; sin embargo se quiere a un individuo que esté en la capacidad de relacionar los conceptos teóricos con las situaciones prácticas, en el que prevalezca un razonamiento que encadene los mundos aparentemente paralelos pero que sin duda convergen a un mismo punto.

"En resumen la productividad, es entendida como el resultado de poner en juego todos los saberes adquiridos para transformar, de manera creativa y constructiva el mundo que nos rodea"(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 48).

- **Una enseñanza preocupada por la trasferencia de conocimiento:**

"Aquí se asume la importancia que reviste el hecho de que, en el aula, el proceso de adquisición de conocimiento debe convertirse en una oportunidad para enseñar a pensar a los estudiantes", por lo cual es esencial enfrentar al estudiante a situaciones en las cuales se pongan en juego sus conocimientos, es decir situaciones nuevas en las que el alumno no aplique la información de manera mecánica y algorítmica; ya que al prevalecer escenarios en los que las situaciones no lleven al alumno a pensar de manera creativa, se corre el riesgo de formar sujetos improductivos.

"Dado que este tipo de enseñanza busca formar individuos capaces de interactuar con el mundo real, complejo y cambiante, asume, como principio propio, la necesidad de fomentar en elestudiante el hábito de pensar, reflexionar, observar, discutir, preguntar, analizar, percatarse,formular ideas y luego confrontarlas en el hacer y actuar para, al finalizar, reiniciar el ciclo en una espiral de autoaprendizaje permanente"(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 51).

Transferir conocimiento no es transferir información, es así como el docente debe buscar la manera de poner al estudiante en una situación de aprendizaje tal, que le permita ver el mundo con ojos de pregunta, esto se logra a través de situaciones como las que se han planteado con el presente proyecto; en el cual se han identificado una serie de situaciones que van más allá de lo algorítmico y que buscan colocar al estudiante en una situación de reflexión y razonamiento. Consolidar y evidenciar problemáticas reales que desde un ámbito matemático pueden ser solucionados permite un aprendizaje que pasa más por una construcción de conocimiento que por un razonamiento ligado a procesos algorítmicos, pues es con estas situaciones en las que el alumno piensa y actúa acorde a la realidad más que a los lineamientos de fórmulas o mecanismos automatizados. En este sentido:

> … transferencia de conocimiento supone ejercitar en el estudiante su capacidad de asimilación, acomodación y generalización a nuevos contextos y situaciones imprevistas, muy especialmente, si éstas son "ajenas" a su ámbito disciplinar momentáneo. De esta manera, la transferencia ha de resultar abierta al doble canal, es decir, ha de incluir y estimular la evolución crítica del estudiante sobre el conocimiento que se le transfiere, al contextualizarlo y relacionarlo con sus propias experiencias de vida y con otras informaciones que él mismo debe aportar. Así, el alumno realiza un doble proceso: el de integrar el conocimiento adquirido, al mismo tiempo que lo enriquece con sus propias aportaciones(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 52).

La capacidad del docente de transferir conocimientos prepara al alumno para enfrentarse a dos problemas esenciales del mundo real: la presencia de lo inesperado y la incertidumbre del conocimiento. Es decir, al ligar la enseñanza a este tipo de proyectos, se prepara al alumno con herramientas para hacer cara a estas dificultades, problemáticas u obstáculos y si bien no se garantiza que el estudiante de solución a cualquiera de ellas, es claro al menos que se ha realizado una formación con miras a actuar ante estas situaciones.

> Lo inesperado forma parte esencial del mundo real al que se enfrentan todos los días los seres vivos y de su capacidad de afrontarlo depende el éxito de su sobrevivencia. Lo mismo sucede en el plano del conocimiento formal. De otro lado, el tener presente la incertidumbre del conocimiento es el mejor antídoto para evitar las simplificaciones o la aplicación mecánica de fórmulas, ya que obliga al constante cuestionamiento de la pertinencia de un saber en el contexto determinado (Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 53).

- **Una enseñanza basada en el placer de conocer.**

Primordialmente se debe concebir la enseñanza como un proceso basado en el gozo y la alegría de conocer algo que se ignora, una enseñanza que trascienda lo intelectual y que se forje en la idea de trabajar sobre lo inusual, ya que “una educación mecánica, fría o escéptica no es educación sino, a lo sumo, una transferencia insípida y, por ello, inútil de información que nunca dará frutos”(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 54).

Aquí se reconoce una enseñanza que se origina a raíz del placer de conocer y poder solucionar aquellas incógnitas o problemas que se generan constantemente en el entorno. Partiendo desde luego de que el docente introduzca una enseñanza bajo éstos parámetros, es decir una enseñanza que integre y relacione los contextos, como se había mencionado, tanto el contexto teórico como el práctico.

> Ningún aprendizaje en el ser humano es sólo el producto de la actividad intelectual; hasta
>
> el conocimiento más abstracto tiene una resonancia emocional en quien lo experimenta. Imposible imaginar teorías como la de la Relatividad o la de Cuerdas para explicar el Universo, sin percatarnos de que quienes las formularon lo hicieron movidos por la pasión de crear y encontrarle sentido a la realidad(Reynaga, Enríquez, & Delgado, 2006, pág. 54).

Los objetos matemáticos y en general todas aquellas teorías científicas nacen de la necesidad del hombre de solucionar problemas reales, es por tanto que en la enseñanza se debe optar por reflexionar sobre la educación que en los últimos tiempos se ha dado. Con ello, se quiere hacer ver que los inicios de las ciencias se han dado a partir de necesidades tangibles y por tanto no debemos desconocer dicho aspecto. Es así como se debe orientar una enseñanza con miras a solucionar necesidades, que contextualice y no pierda su esencia, pues dicha esencia se ve tácita en sus orígenes.

2. La Práctica Pedagógica

2.1Alcances y delimitación del proyecto.

La implementación de la propuesta fue dirigida al grupo 10-B de la ENSP, en el cual se trabajaron las relaciones trigonométricas, gráficas de las relaciones trigonométricas seno y coseno, teoremas del seno y el coseno. La propuesta de trabajo busca abarcar la enseñanza de dichas temáticas en conjunto con su aplicación en el sector histórico de la ciudad de Popayán, formulando problemas reales cuya solución se dé a partir de análisis matemáticos que encierran los componentes teóricos expuestos en el aula de clase.

Teniendo en cuenta que la propuesta se encuentra enmarcada dentro del proyecto macro de "Popayán y las matemáticas" se pretende dar continuación a la metodología de enseñanza a partir de la puesta en práctica de los conocimientos matemáticos en el contexto real; con el propósito de fomentar esta práctica en otras áreas matemáticas, tales como álgebra, cálculo, estadística, entre otros. Este plan de trabajo se puede proyectar a futuros años, y en diversos contextos considerando desde luego la característica de universalidad de las matemáticas

La estructura del trabajo permite ampliar la estrategia a diferentes contextos en los que se planteen problemas que se solucionen a partir de los elementos teóricos expuestos. Además dicha propuesta puede ser aplicada en diferentes grupos para los cuales las relaciones trigonométricas, sus gráficas (seno y coseno) y los teoremas del seno y coseno sean objeto de estudio.

Además, implementar este tipo de estrategias permite al individuo adquirir un aprendizaje significativo, en el cual interioriza los conceptos matemáticos y los puede aplicar en contextos reales.

2.2. Socialización del proyecto.

A. Conocer el proyecto:

Se visita la Escuela Normal Superior de Popayán en el segundo semestre del año 2014 y, durante dichas visitas se sostienen reuniones con el docente Carlos Ordoñez Dulcey, quien da a conocer las características del proyecto "Popayán y las matemáticas" y los trabajos realizados hasta el momento en la institución, esencialmente por docentes y alumnos de la ENSP.

El docente en mención realiza una sustentación en la sala tecnológica de la institución en la cual resalta las fases que se deben tener en cuenta para desarrollar los proyectos de aula. Dichas fases son:

- Fase 1: motivación.
- Fase 2: trabajo sobre un objeto de la ciudad desde lo histórico y los elementos conceptuales.
- Fase 3: sustentación de los trabajos.

Seguido a estos encuentros, el docente facilita documentación en la que se da muestra de lo realizado por estudiantes de la institución hasta el momento, en el marco del proyecto "Popayán y las matemáticas". En dicha documentación se evidencian trabajos realizados desde el año 2005 hasta mediados de 2010, en los cuales existen registros de proyectos realizados en el sector histórico de la ciudad de Popayán tales como el pueblito patojo, el morro, la cruz de belén entre otros.

Se realizó un análisis de las bases sobre las que se fundamenta el proyecto obteniendo, así que para desarrollarlo se hacia necesario considerar un objeto matemático y con ello plantear problemas que involucraran el contexto de la ciudad, ya que los anteriores proyectos se trabajaron desde la perspectiva de la ciudad.

Además, considerando los tiempos establecidos por la ENSP para el periodo 2015, el currículo académico establecido por la institución y teniendo en cuenta que la práctica pedagógica a desarrollar estaba estipulada para el primer periodo de tal año se considera trabajar en la temática de las relaciones trigonométricas, atendiendo desde luego a los objetivos del proyecto y a los intereses del practicante. En concordancia con los intereses del proyecto y teniendo en cuenta que se presenta una convergencia entre los intereses del practicante y los intereses del proyecto se decide trabajar en dicha institución a través del plan de trabajo "conocimiento pertinente de las relaciones trigonométricas en el proyecto Popayán y las matemáticas".

B. socializar el proyecto.

Después de conocer el proyecto a través de las reuniones con el docente Carlos Ordoñez Dulcey, se procedió a socializar el trabajo a realizar en la institución ante los estudiantes del grado 10-B y el director de práctica Orlando Rodríguez.

Con los estudiantes del respectivo grado se realizó una reunión en compañía del profesor mencionado en horas de la mañana y en jornada académica dentro de la institución; en dicha reunión se establecieron las temáticas a desarrollar y los objetivos del trabajo, instaurando lo siguiente:

- ❖ los ejes temáticos a trabajar fueron las relaciones trigonométricas, graficas de las funciones seno y coseno y los teoremas del seno y coseno, en su respectivo orden.
- ❖ Trabajar dichas temáticas en horas de la tarde en las instalaciones de la institución.
- ❖ Realizar el estudio de las temáticas en el aula de clases y realizar actividades académicas concernientes a éstas, dentro de dichas actividades se consideró trabajar talleres, evaluaciones y salidas en el sector urbano de la ciudad.
- ❖ En relación a las salidas en la ciudad se acordó trabajar proyectos relacionados con el contexto de Popayán y respecto a éstos los estudiantes debían realizar sustentaciones de las respectivas salidas, en las cuales se evidenciaran material fotográfico y análisis desde lo teórico de los problemas en estudio.

En relación a las reuniones sostenidas con el docente Orlando Rodríguez, éstas se realizaron durante la práctica pedagógica II y en ellas se establecieron lo que se quería realizar con la propuesta, la forma de trabajo con los estudiantes y los ejes temáticos alrededor de los cuales giraría el proceso de la práctica pedagógica III.

C. Discusiones con el profesor.

Aquí se acordaron con el docente Carlos Ordoñez Dulcey aspectos relacionados con el desarrollo de la práctica, tales como:

- Las sesiones se realizarían el día jueves en el horario de 2-4 pm.
- Por cada eje temático a trabajar, se realizaría un proyecto práctico en relación al sector urbano de la ciudad.

- Por cada proyecto, los alumnos debían realizar sustentaciones de los proyectos, en los cuales se dieran soluciones a los problemas propuestos relacionando la teoría estudiada en el aula de clases y de los cuales hicieran registros fotográficos.
- A partir de las actividades propuestas en el aula y las respectivas valoraciones realizadas por el practicante se debía dar un reporte de las notas obtenidas al final del proceso.

2.3. Lo realizado en el aula

En torno a las relaciones trigonométricas.

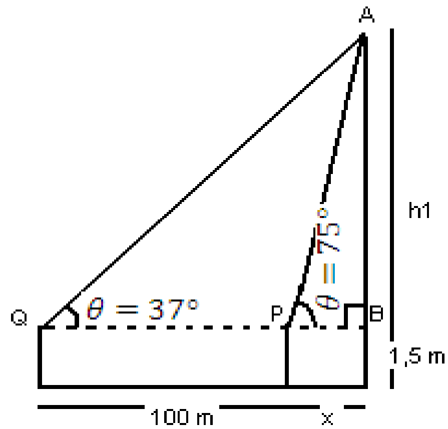
Con relación a este componente se abordo la teoría expuesta en la sección 1.1.1, proceso en el cual se trabajó en el aula con los estudiantes desde lo teórico, estudiando los diferentes resultados y utilidades de las relaciones trigonométricas, a través de la aplicación de estas en ejercicios de tipo teórico y como herramienta para solucionar situaciones del contexto.

Con la introducción de esta primera temática en el aula se trabajó alrededor de un primer taller en los que se propusieron ejercicios teóricos similares al siguiente:

Ejemplo # 1:

David es un estudiante de ingeniería civil que desea medir la altura de una torre. Para ello, ubica el teodolito (Instrumento que mide los ángulos de un terreno) en el punto P a una distancia x de la torre, mide el ángulo de elevación y obtiene un valor de 75º. Luego se aleja 100 m en línea recta del punto P hasta el punto Q, mide nuevamente el ángulo de elevación y obtiene 37º. ¿Cuánto mide la torre si el teodolito tiene una altura de 1,5 m?

Ilustración 6: relaciones trigonométricas



Con este tipo de ejercicios se buscó que los estudiantes relacionaran y evidenciaran las aplicaciones de las relaciones trigonométricas en la solución de problemas. Aquí se quiso introducir problemas con características similares a los que se propusieron en el contexto urbano de la ciudad, con el fin de preparar al alumno para enfrentarse y dar solución con éxito a las situaciones propuestas.

Para esta primera parte del proyecto y respondiendo a lo planeado se propusieron las respectivas situaciones que vincularan a la ciudad y orientadas a los grupos de trabajo del curso, guías semejantes a la siguiente:

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYAN

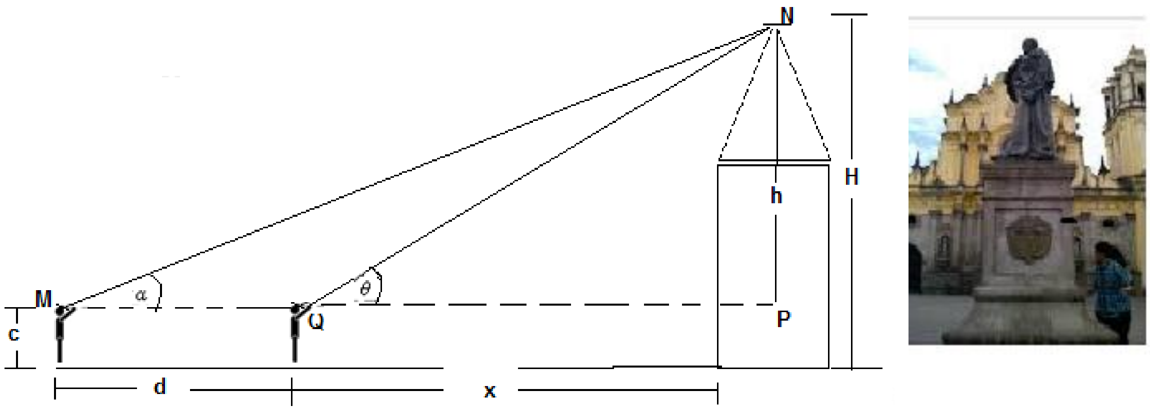
EL PROBLEMA DEL MONUMETO "CAMILO TORRES" DE LA IGLESIA SAN FRANCISCO

Enunciado

Al realizar una exploración para reconocer y aprender de la arquitectura y su historia desde la óptica de las matemáticas, en el proyecto "Popayán y las Matemáticas", se definieron algunos objetos de la arquitectura para conocer, en primer lugar, sus aspectos históricos y en segundo lugar, identificar y resolver un problema matemático en el objeto seleccionado.

Una de las construcciones seleccionadas es el monumento “camilo torres” de la iglesia San Francisco de Popayán. El grupo debe tomar fotografías y realizar un registro de medidas con el objetivo de determinar la altura de la estatua.

Ilustración 7: guía estatua de san francisco



Qué hacer

El grupo de acuerdo con los conocimientos de matemáticas debe partir de la medición de los ángulos α y θ, y la distancia d entre los puntos de observación.

Para medir los ángulos de elevación construyan un teodolito sencillo de acuerdo con modelo que se describe en el link http://www.youtube.com/watch?v=Eq_JPAMAu04

Proceso

1. Emplear las funciones trigonométricas para calcular la altura h desde el extremo superior del monumento hasta el nivel horizontal de observación aplicando la resolución de triángulos rectángulos en los triángulos rectángulos ΔMNP y ΔQNP para obtener un sistema de ecuaciones 2x2 cuyas incógnitas son h, x.

2. Una vez determinada la altura h, la altura del monumento está dado por la suma $h + c$, siendo c la altura del observador.

3. Finalmente, realicen una consulta sobre la historia de la iglesia y de “camilo torres”.

4. Elaboren una síntesis del problema en power Point, que incluya:

a. Evidencias fotográficas, la solución matemática del problema.
b. Una valoración del proyecto y cómo darle continuidad en el marco de esta experiencia.
c. Una valoración de la estrategia del trabajo en grupo.

De acuerdo a este tipo de guías de trabajo, lo grupos de estudiantes realizaron las respectivas prácticas alrededor de sitios emblemáticos de la ciudad y posterior a ello realizaron las respectivas sustentaciones de sus trabajos.

Respecto a esta temática, los talleres y las guías de trabajo se encuentran en los anexos del documento.

En torno a las gráficas del seno y coseno.

Alrededor de este componente se trabajó en lo conceptual siguiendo el marco teórico expuesto en la sección 1.1.2, sin embargo para la realización de las gráficas simples del seno y coseno se siguió la siguiente secuencia:

1. Trazamos en una hoja de papel milimetrado de 31 cm por 22 cm un sistema de coordenadas cartesianas de tal forma que el eje Yse trace por el lado del ancho a 4 cm de la orilla, y el eje Xpor el lado del largo y en su parte central a 11 cm a lo largo de toda la hoja.
2. Trazamos una circunferencia de radio 3 cm y la dividimos toda en ángulos de 15° con el transportador.
3. Dividimos el eje X en cuatro cuadrantes, trazando líneas verticales (de 8 cm de altura) a partir de la circunferencia y tangencialmente a ella, y luego a 6 cm cada línea vertical. Cada cuadrante así de finido, lo dividimos en 6 partes iguales de 1 cm cada una y con una pequeña marca.
4. Unimos cada par de extremos de las divisiones de la circunferencia en forma horizontal con líneas punteadas suaves y las prolongamos hasta el IV cuadrante.
5. Para definir las curvas del seno y coseno en hojas separadas, y con el mismo método descrito en lo punto anteriores, en cada una de las 6 divisiones de cada cuadrante, trazamos verticalmente la altura correspondiente a la línea del seno de cada uno de los ángulos en que se dividió la circunferencia, identificando los puntos de intersección con

las rectas punteadas horizontalmente. Al unir estos puntos con una curva de trazo continuo, se obtiene la grafica del coseno.

Una vez se realizó esta actividad, en posteriores sesiones se trabajó respecto a gráficas de mayor complejidad y atendiendo a los ejes teóricos discutidos en la sesión 1.1.3.

y se introdujeron ejercicios respecto a esta temática con el fin de familiarizar a los alumnos con problemas similares del contexto.

Se trabajó en ejercicios con características similares a los siguientes, para los cuales se siguieron el esquema de solución con base a los criterios para la elaboración de gráficas:

Ejemplo #2

Elaborar la gráfica de las siguientes funciones, determinando su amplitud, periodo y fase.

a. y= $3cos2x$
b. y= $\frac{1}{3}sen(3x+\pi)$

Respecto a este componente, se realizó el correspondiente trabajo práctico, en el cual los estudiantes se vincularon siguiendo lo propuesto en guías similares a la siguiente:

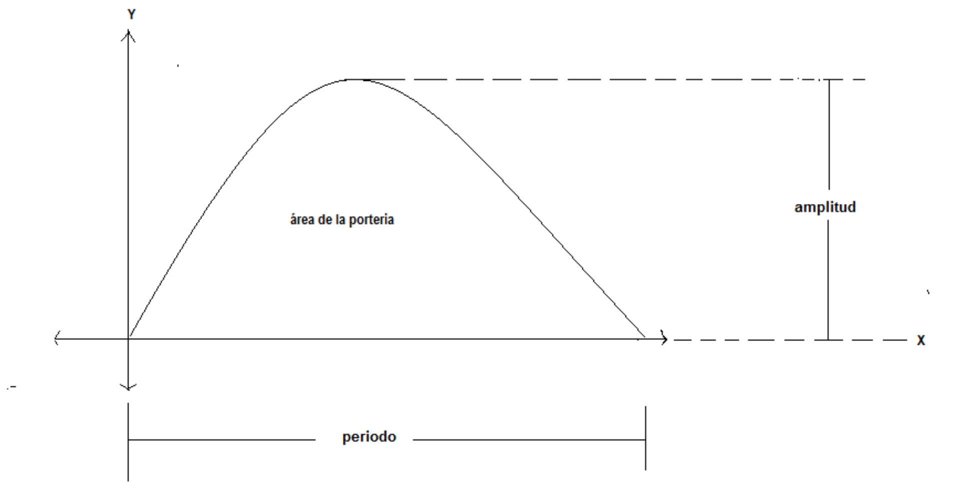
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CONTEXTO REAL

Las matemáticas las encontramos sin lugar a duda en todos los ámbitos posibles y una de las ramas de estudio de dicha ciencia es la trigonometría; desde luego las funciones trigonométricas y las graficas que podemos esbozar a partir de éstas forman parte esencial de la trigonometría. Es común encontrarnos en el contexto real con edificaciones o construcciones que inadvertidamente presentan relación con esta área; aún más, es de nuestro interés identificar aquellos lugares que exhiben dicha relación para así formular y resolver un problema matemático en el objeto seleccionado.

Es así como se ha seleccionado la cancha de futbol sala de tu institución para llevar a cabo dicho trabajo. El grupo debe tomar registro fotográfico y tomar las respectivas medidas para identificar con que función trigonométrica se relaciona el área de una de las porterías.

Ilustración 8: guía área de la portería



QUÉ HACER.

El grupo de acuerdo con los conocimientos de matemáticas debe establecer en el origen de la curva el eje coordenado tal como lo ilustra la figura anterior.

PROCESO:

1. Realizar la medición de la amplitud de la curva con ayuda de un metro.
2. Realice la medición del periodo de la curva con ayuda del metro.
3. de acuerdo con la gráfica establezca con cual de las funciones se puede modelar la curva, es decir si corresponde a la función seno o coseno (aquí tenga en cuenta que debe partir de las funciones y=Acos (Kx) o Y=Bsen (Kx)).
4. en el paso 2 determinamos el periodo de la función que buscamos.

   En la lección, Cambio de Periodo de Funciones Trigonométricas, aprendimos que si cambiamos la entrada de x a Kx, el periodo cambia.

   $0 < k\,x \quad < 2\pi$. Conociendo el periodo, podemos encontrar el valor de k, pues, como sabemos:

   $\frac{2\pi}{k}$ = periodo, en consecuencia: $\frac{2\pi}{periodo} = k$

5. teniendo en cuenta que ya se determinó el periodo y la amplitud de la curva y que además la grafica no presenta translación puesto que se ha tomado el origen del eje coordenado al inicio de la misma, establezca la función que podría determinar la curva del área de la portería.

ANÁLISIS Y PREGUNTAS:

A. de acuerdo con su criterio, ¿que le hizo inclinarse por la función seno o la función coseno como modelo para la curva? Argumenta tu respuesta.
B. ¿Cual es la importancia de que se haya tomado el origen del eje coordenado al inicio de la curva?
C. Que experiencia le deja la resolución de este problema matemático.
D. ¿El proyecto de Popayán y las matemáticas le ha hecho ver lo fundamental de las matemáticas en el desarrollo social y arquitectónico de la ciudad? Argumenta tu respuesta.

Los ejercicios desarrollados, junto con las demás guías se encuentran en los correspondientes anexos.

En torno a los teoremas del seno y coseno.

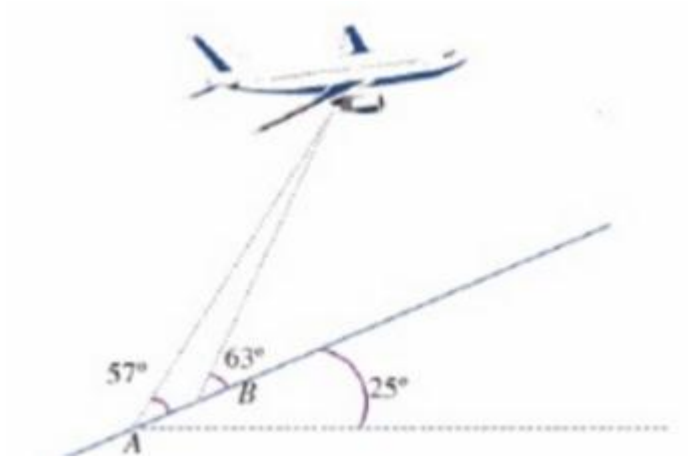
Concerniente a este tema, se trabajó teóricamente con base a la guía conceptual y desde esta perspectiva se introdujeron ejercicios de carácter aplicativo, para finalmente concentrarnos en el desarrollo de los trabajos prácticos correspondientes a este eje temático.

Aquí se introdujeron ejercicios que permitieran la implementación de los respectivos teoremas como herramienta de solución y se implementaron ejercicios en el aula similares al siguiente.

Ejemplo # 3.

Un camino recto hace un ángulo de 25° con relación a la horizontal; desde el punto A sobre el camino, el ángulo de elevación a un avión es de 57°. En el mismo instante, desde otro punto B, situado a 120 metros de A, el ángulo de elevación es de 63°, encuentra la distancia del punto A, hasta el avión y la altura a la que vuela el avión con respecto a la horizontal.

Ilustración 9: problema teorema del seno y coseno



Para el trabajo práctico se propuso a los estudiantes guías entorno a la ciudad en las cuales se implementaron como herramienta de solución los teoremas del seno y el coseno.

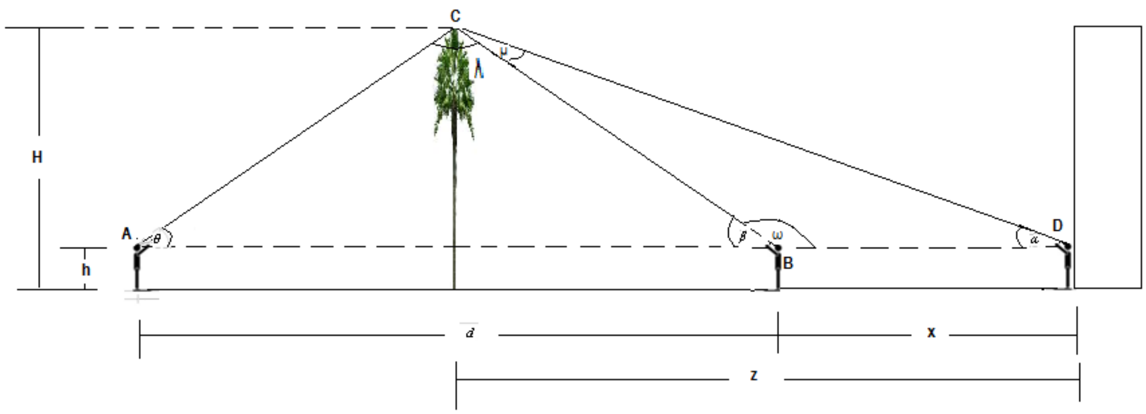
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYAN

TEOREMA DEL SENO Y EL COSENO EN EL CONTEXTO REAL

Las relaciones trigonométricas nos permiten trabajar en la resolución de triángulos que poseen un ángulo recto, sin embargo es importante tener en cuenta que existen triángulos que no presentan esta característica y por tanto se hace necesario conocer métodos teóricos que nos permitan dar solución a problemas que vinculan este tipo de esquemas; es aquí donde la intervención de los teoremas del seno y del coseno son fundamentales para obtener la solución a dichos problemas, en especial para dar solución a problemas expuestos desde el contexto urbano de la ciudad de Popayán que son de nuestro interés y que desde luego se encuentran enmarcados dentro del proyecto “Popayán y las matemáticas”.

Para el eventual proyecto se ha elegido una de las palmeras que se encuentran ubicadas en el parque caldas de la ciudad de Popayán, con el propósito de determinar la altura de una de ellas a través de la implementación de los teoremas del seno y coseno.

Ilustración 10: guía teorema del seno y coseno



QUÉ HACER

El grupo de acuerdo con los conocimientos matemáticos debe establecer la distancia z que representa la distancia de la palmera a la catedral.

Proceso:

1. El problema gira en torno a la palmera que se encuentra situada en la esquina cercana a la torre del reloj.
2. Como se indica en la figura, el observador A debe estar 7 metros de la palmera; mientras que el observador B debe situarse a 5 metros de ésta, es decir que d= 12 metros. Los observadores deben estar en línea recta entre la palmera y la catedral.
3. Con ayuda del teodolito los observadores deben establecer los respectivos ángulos, apuntando al extremo superior de la palmera.
4. Una vez hayan establecido los ángulos θ y β, deben matemáticamente establecer las distancias AC y BC empleando el teorema del seno. Recuerden que para establecer la medida del ángulo λ deben tener en cuenta que la suma de las medidas de los ángulos de un triangulo es 180°.
5. Luego, con la distancia BC y el ángulo β deberán establecer la distancia entre la palmera y el observador B. en este punto deben emplear la relación trigonométrica que les permita establecer dicho cateto (el triangulo formado por la palmera y el observador B es un triangulo rectángulo).

6. Con lo datos obtenidos anteriormente pueden establecer la altura de la palmera.

7. Para el triángulo BCD deben establecer de ante mano la medida de los ángulos, recuerden que el ángulo α lo determinan con el teodolito y en ángulo ω lo determinan por ser suplementario con el ángulo β. Para el ángulo μ recuerden que la suma de las medidas de los ángulos de un triangulo es 180°.

8. Puesto que se conoce la medida del segmento BC y conociendo las medidas de los ángulos del triángulo BCD, deben establecer la magnitud del segmento BD.

9. Con los datos obtenidos en los puntos 5 y 7 podrán determinar la distancia entre la palmera y la catedral, es decir z.

10. Además deben establecer la distancia DC empleando el teorema del seno.

ANÁLISIS Y PREGUNTAS:

A. Que experiencia le deja la resolución de este problema matemático.

B. ¿El proyecto de Popayán y las matemáticas le ha hecho ver lo fundamental de las matemáticas en el desarrollo social y arquitectónico de la ciudad? Argumenta tu respuesta.

NOTA: tengan en cuenta la estatura del observador para establecer la altura total H de la palmera. Recuerde que la sustentación debe contener material fotográfico del lugar en cuestión y del proceso llevado a cabo durante la resolución del proyecto.

3. Resultados obtenidos

La realización del trabajo reflejó resultados satisfactorios, haciendo un barrido por las etapas del proceso se puede decir que la implementación de proyectos que vinculan las matemáticas y el contexto real dejan aprendizajes significativos en los estudiantes, pues éstos pasan de realizar procesos mecánicos a contextualizar lo aprendido en el aula a través de trabajos prácticos.

Especialmente es válido resaltar que trabajar la trigonometría a partir de problemas en la ciudad permite al estudiante poner en acción sus conocimientos, trabajar en equipo y conocer aspectos relevantes de la arquitectura de la ciudad. Aportó en el sentido que los estudiantes se involucraron de lleno en plan de trabajo y conceptualizaron a partir de un proceso que vinculó la ciudad desde la primera etapa (las relaciones trigonométricas) hasta la finalización del mismo (Teorema del Seno y del Coseno).

Los problemas propuestos llevaron a los estudiantes a indagar sobre aspectos históricos, por ejemplo en una primera salida ellos trabajaron en sitios como el Parque Caldas, el monumento Camilo Torres, la Catedral y otros; con ello aprendieron a cerca de la historia de la ciudad y obtuvieron datos característicos de dichos sitios. Lo problemas despertaron interés en ellos debido a que tenían que trabajar sobre sitios reales y cuya finalidad era concebir alturas o distancias implementando el uso de las relaciones trigonométricas (Seno, Coseno, Tangente, etc.), por ejemplo determinar la altura del edificio Cesar Negret, la Torre del Reloj, la Cruz de Belén entre otros.

Se observó que los estudiantes trabajaron y concibieron aprendizajes colaborativos en la ejecución de los problemas hacía ver que la estrategia de vincular el mundo real con las matemáticas es conveniente. Para los estudiantes fue interesante en la medida en que por ejemplo pudieron de manera analítica determinar alturas que ellos visualmente establecían, es decir hacían comparaciones entre los resultados obtenidos a partir de la teoría y lo que ellos pensaban que podrían medir a partir de observaciones; corroborando así la aplicabilidad de la teoría matemática en el contexto real, en este caso el círculo de conceptos que encierra la trigonometría.

En el transcurso y desarrollo de la práctica en la institución y realizando las observaciones pertinentes, se evidenció en los estudiantes del grado 10-B una mejoría respecto al nivel académico de los mismos, comparado con los demás grupos que no hicieron parte del proyecto.

Este tipo de proyectos además de ser una estrategia de enseñanza innovadora, propicia a sus participantes espacios que permiten diálogos y participaciones amenas en el desarrollo de proyectos escolares, es así como los estudiantes conciben espacios y períodos en los que la presión de estar en el aula bajo la mirada del docente no influye; así se promueve la participación libre y fluida en los grupos de trabajo.

A través de este trabajo se pudo mostrar a los estudiantes que todos aquellos razonamientos que se hacen en el aula de clases, todas aquellas teorías matemáticas y conocimientos tratados en el entorno escolar tienen un significado en el contexto real, y que las matemáticas no se quedan tan solo en símbolos y algoritmos que se escriben sobre el papel, sino que por el contrario, las matemáticas son la base de diferentes ciencias y que éstas nos permiten relacionarnos con el exterior.

4. Conclusiones y Recomendaciones

Las matemáticas evidentemente son una de las ciencias con mayor dificultad de aprendizaje a nivel básico, medio y superior; por ello y atendiendo a las diversas problemáticas que ésta genera se hace necesario orientarla ligada a la práctica en cuanto sea posible hacerlo.

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas depende del funcionamiento de otros elementos, particularmente sobre las decisiones de los docentes en el aula, los ejes curriculares, los procedimientos de evaluación externa, la difusión y disponibilidad de materiales didácticos, los hábitos del docente, elementos que conforman su entorno educativo y sociocultural de los docentes. Aspectos personales como: antigüedad, experiencias, sexo, edad, situación económica, infiere en la representación del rol del docente, asumiendo un tipo comunicación en situación de enseñanza-aprendizaje en las matemáticas

Procesos que articulan la teoría con la práctica enriquecen al docente en su formación y desde luego al estudiante en su rol de aprendiz. Si bien es cierto que realizar proyectos con estas características requiere de trabajo arduo y extenso, es satisfactorio encontrarse con resultados en los que los estudiantes se motivan por llevar a cabo lo propuesto, gratificante evidenciar trabajos grupales amenos y más aún aprendizajes verdaderos en el sentido de tomar conciencia a cerca de los alcances de las matemáticas y de la importancia de las mismas para el desarrollo el desarrollo de ciudadanos que contribuyen con una sociedad mejor.

Con la realización del trabajo sale a relucir lo importante de vincular a los estudiantes en semilleros de investigación ya que espacios con estas características motivan al estudiante a realizar trabajos exploratorios que complementan su formación académica. Que los estudiantes pertenezcan a semilleros de investigación, permite vincular los aspectos teóricos que se tratan en las diferentes áreas de formación con las múltiples experiencias que se pueden encontrar en el contexto real.

Promover por parte de los docentes la implementación de proyectos prácticos investigativos se convierte en una herramienta pedagógica propositiva y efectiva en el entorno escolar. Tales proyectos contribuyen de forma eficaz en la formación del estudiante además de ser una salida pedagógica que no se queda en la cotidianidad de la enseñanza, pues promueve el trabajo externo y extracurricular en espacios donde los estudiantes pueden tomar voz activa en el desarrollo de dichos proyectos.

Es grato resaltar la labor desarrollada en la ENSP por el docente Carlos Ordoñez Dulcey quien es el principal promotor del proyecto y quien continuamente se ha encargado de desarrollar el proyecto “Popayán y las matemáticas” permitiendo así que estudiantes de diferentes instituciones de nivel superior intercedan para el desarrollo de sus respectivas prácticas; logrando con la ejecución de la propuesta resultados satisfactorios como los que se mencionaron en los antecedentes y desde luego poder aportar desde el actual trabajouna muestra más de la eficacia de los proyectos de investigación en las instituciones de nivel medio.

Desde el punto de vista didáctico, la investigación como estrategia de enseñanza permitió alcanzar los objetivos propuestos, entre ellos se logró despertar el interés en los estudiantes respecto a situaciones o problemas presentes en el contexto, fomentar el trabajo en grupo, rescatar la importancia de las matemáticas para la ejecución de obras de carácter arquitectónico y construir aprendizajes significativos a partir de la relación teoría-práctica.

La metodología de enseñanza implementada logró despertar el interés de los estudiantes a tal punto que todos quisieron participar en las diferentes prácticas desarrolladas a lo largo de cada temática.

De acuerdo a lo acontecido en la práctica pedagógica y en la ejecución de trabajo mismo, el incluir experiencias que conlleven al estudiante a desarrollar labores académicas externas al aula de clase y en lugares diferentes despierta en ellos ganas de aprender, ya que de alguna manera esto permite despejar sus mentes pero desde luego sin descuidar la idea de fondo que fue la de vincular lo teórico con lo práctico.

Personalmente es grato mencionar que la experiencia en la ENSP fue satisfactoria y enriquecedora. Desde luego advertir que, al ser la primera intervención en un aula de clases, como tal trae consigo dificultades y temores que con el paso del tiempo fueron disminuyendo a tal punto de establecer con los estudiantes una relación amena, que permitió desarrollar con normalidad las actividades propuestas durante la intervención. Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje los estudiantes se mostraron activos y participativos, esto desde luego a la confianza que se generó con ellos.

Es importante resaltar que introducir procesos prácticos en la formación de los estudiantes afianza y fortalece sus conocimientos, procesos en los cuales aprenden de los errores que cometen y desde luego se forma el espacio adecuado para corregirlos, pues con las actividades propuestas se dio pie para evidenciar en muchos casos que algunas respuestas no eran coherentes con las observaciones realizadas de las diferentes construcciones arquitectónicas.

En definitiva, puedo decir que la primera intervención en un aula de clases fue fructífera tanto para los estudiantes como para mi, ya que aprendí múltiples aspectos a tener en cuenta para el desarrolla de mi profesión. Desde luego este es tan solo el inicio de la inmensa responsabilidad que implica el ser docente, pues de la forma en que transmita los diferentes saberes depende el aprendizaje de los estudiantes. La labor docente requiere siempre de nuestra disposición y preparación para afrontar y enfrentar los retos venideros.

5 Bibliografía

Reynaga, R., Enríquez, J., & Delgado, C. (2006). *modelo educativo, una aproximación axiológica de transdisciplina y pensamiento complejo.* sonora, México.

Acevedo Linares, A. (25 de noviembre de 2013). *las 2 orillas*. Obtenido de las 2 orillas: http://www.las2orillas.co/el-pensamiento-complejo-en-edgar-morin/

Aranda Zafra, M., Pérez Miguel, I., & Sánchez Díaz, B. (s.f.). Obtenido de https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/resteban/Archivo/TrabajosDeClase/DificultadesMatematicasLenguaje1.pdf

Ausbel, d. (s.f.). *teoria del aprendizaje significativo.*

Corica, A., & Otero, M. (2007). las ideas de algunos estudiantes acerca de la eneñanza-aprendizaje de la matemática en el nivel medio. *revista electronica de investigación en educación en ciencias*.

Doncel, J. (21 de 01 de 2004). fracaso escolar en las matemáticas. *diario Córdoba*.

lofredo, a. (8 de diciembre de 2014). del terror al gusto por las matemáticas. *recurso*.

Morín, E. (1999). *los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* parís.

Ordoñez Dulcey, C. (2009). *Popayán y las matemáticas.* popayán.

Valderrama Ramirez, N. K. (2013). Construcción de las funciones trigonométricas haciendo un contraste entre la utilización y la ausencia de tic´s . Bogotá, Bogotá, Colombia.

www.ciad.mx. (s.f.). Obtenido de http://www.ciad.mx/archivos/desarrollo/publicaciones/Tesis%20asesoradas/Tesis%20Maestria/33.pdf

6 Anexos

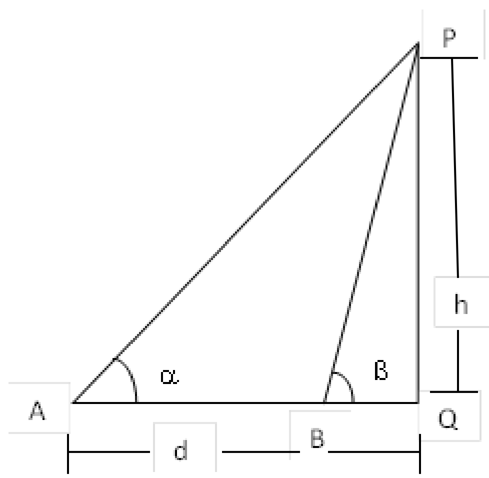
Anexo 1. Taller 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema # 1

Desde un punto A del suelo se observa una torre, PQ, y se la ve bajo un ángulo α =31º. Se avanza 40 m. en dirección a la torre, se mira y se la ve, ahora, bajo un ángulo β=58º. Halla la altura h de la torre y la distancia (d) de A al pie, Q, de la torre.



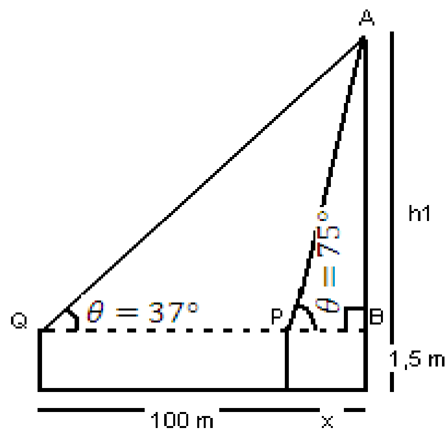
Problema # 2

Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1.200 m y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30º. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide 40 m de alto?

Realizar el esquema grafico de la situación planteada en el problema.

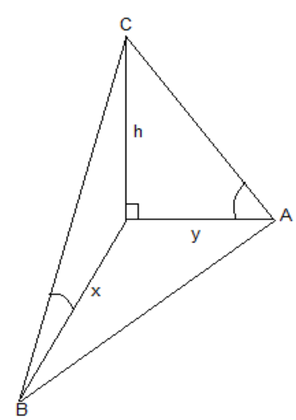
Problema # 3

David es un estudiante de ingeniería civil que desea medir la altura de una torre. Para ello, ubica el teodolito (Instrumento que mide los ángulos de un terreno) en el punto P a una distancia x de la torre, mide el ángulo de elevación y obtiene un valor de 75º. Luego se aleja 100 m en línea recta del punto P hasta el punto Q, mide nuevamente el ángulo de elevación y obtiene 37º. ¿Cuánto mide la torre si el teodolito tiene una altura de 1,5 m?



Problema # 4

La elevación de un faro desde un lugar A al sur de ´el es 45◦ y desde un lugar B al oeste de A es de 30◦. Si AB = 50m. Hallar la altura de dicho faro.



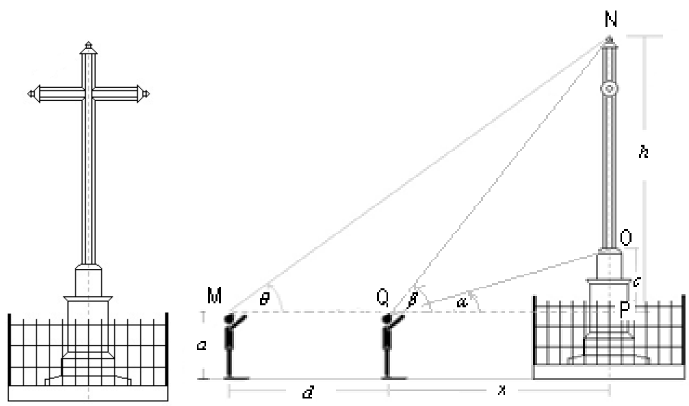
Anexo 2. Guías de la temática “relaciones trigonométricas”

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYAN

EL PROBLEMA DE LA CRUZ DE BELEN (guía #1)

Al realizar una exploración para reconocer y aprender de la arquitectura y su historia desde la óptica de las matemáticas, en el proyecto “Popayán y las Matemáticas”, se definieron algunos objetos de la arquitectura para conocer, en primer lugar, sus aspectos históricos y en segundo lugar, identificar y resolver un problema matemático en el objeto seleccionado.

Una de las construcciones seleccionadas es la Cruz de Belén de Popayán, el grupo debe tomar fotografías y realizar un registro de medidas con el objetivo de determinar su altura.



QUÉ HACER:

El grupo de acuerdo con los conocimientos de matemáticas debe partir de la medición de los ángulos α, β y θ, y la distancia d entre los dos puntos de observación.

Para medir los ángulos de elevación construyan un teodolito sencillo de acuerdo con modelo que se describe en el link *http://www.youtube.com/watch?v=Eq_JPAMAu04*

Proceso:

1. Emplear las funciones trigonométricas para calcular la altura h desde el extremo superior de la cruz hasta el nivel horizontal de observación aplicando la resolución de triángulos rectángulos en los triángulos rectángulos ΔMNP y ΔQNP para obtener un sistema de ecuaciones 2x2 cuyas incógnitas son h, x.

2. Una vez determinada la altura h, para determinar la altura de la cruz, se debe determinar, a través de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo ΔQOP, la altura c. La altura de la cruz es está dada por la diferencia h – c.
3. Finalmente, realicen una consulta sobre la historia de legendaria cruz de Belén y la forma arquitectónica original que tenía la iglesia de Belén, consigan una fotografía (dialogando con el párroco encargado o en la red) y establezcan comparaciones con la forma actual.
4. Elaboren una síntesis del problema en power point, que incluya:

   a. Evidencias fotográficas, la solución matemática del problema y la síntesis sobre la consulta orientada.

   b. Una valoración del proyecto y cómo darle continuidad en el marco de esta experiencia.

   c. Una valoración de la estrategia del trabajo en grupo.

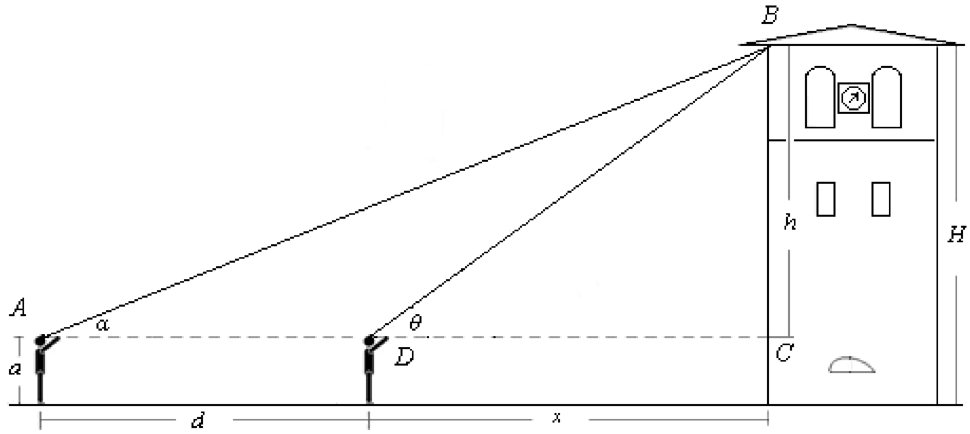
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYAN

EL PROBLEMA DE LA TORRE DEL RELOJ DE POPAYAN (guía #2)

Enunciado:

Al realizar una exploración para reconocer y aprender de la arquitectura y su historia desde la óptica de las matemáticas, en el proyecto “Popayán y las Matemáticas”, se definieron algunos objetos de la arquitectura para conocer, en primer lugar, sus aspectos históricos y en segundo lugar, identificar y resolver un problema matemático en el objeto seleccionado.

Una de las construcciones seleccionadas es la Torre del Reloj de Popayán. El grupo debe tomar fotografías y realizar un registro de medidas con el objetivo de determinar la altura de la Torre.



Qué hacer:

El grupo de acuerdo con los conocimientos de matemáticas debe partir de la medición de los ángulos α y θ, y la distancia d entre los puntos de observación.

Para medir los ángulos de elevación construyan un teodolito sencillo de acuerdo con modelo que se describe en el link*http://www.youtube.com/watch?v=Eq_JPAMAu04*

Proceso

1. Emplear las funciones trigonométricas para calcular la altura h desde el extremo superior de la torre hasta el nivel horizontal de observación aplicando la resolución de triángulos rectángulos en los triángulos rectángulos ΔABC y ΔDBC para obtener un sistema de ecuaciones 2x2 cuyas incógnitas son h, x.
2. Una vez determinada la altura h, la altura de la torre está dada por la suma h + a, siendo a la altura del observador.
3. Finalmente, realicen una consulta sobre la historia de la torre del reloj en el archivo histórico de la universidad del Cauca
4. Elaboren una síntesis del problema en power point, que incluya:

   a. Evidencias fotográficas, la solución matemática del problema.

   b.Una valoración del proyecto y cómo darle continuidad en el marco de esta experiencia.

   c.Una valoración de la estrategia del trabajo en grupo.

Anexo 3. Taller 2.

1. Grafique las siguientes funciones
    a) $y = -2senx$
    b) $y = 3cos2x$
2. Determine la amplitud y periodo y grafique las siguientes funciones.
    a) $y = 3\cos(x + \frac{\pi}{4})$
    b) $y = \frac{1}{3}\text{sen}(3x + \pi)$
    c) $y = \frac{1}{2}\cos(\pi x)$
3. Determine la amplitud, periodo y fase. Grafique un periodo completo de las siguientes funciones.
    a) $y = \frac{5}{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
    b) $y = -2sen(x - \frac{\pi}{6})$
    c) $y = -4cos(3x + \frac{\pi}{2})$

Anexo 4. Guía de la temática "gráfica de las funciones trigonométricas seno y coseno"

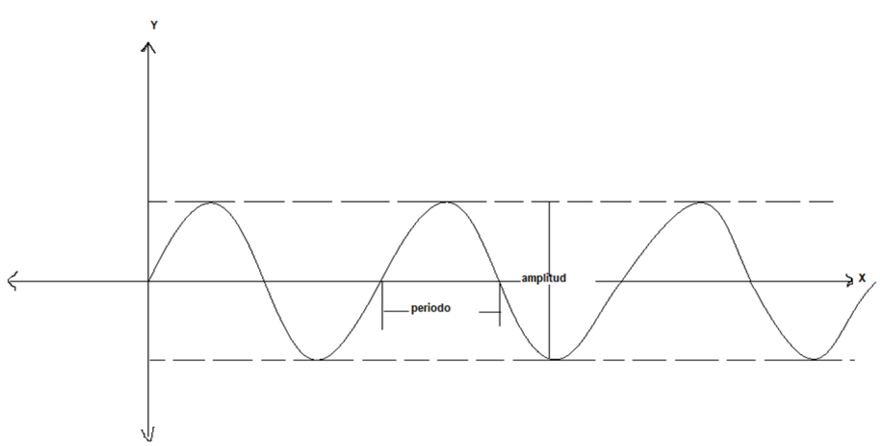
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYAN

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CONTEXTO REAL

Las matemáticas las encontramos sin lugar a duda en todos los ámbitos posibles y una de las ramas de estudio de dicha ciencia es la trigonometría; desde luego las funciones trigonométricas y las graficas que podemos esbozar a partir de éstas forman parte esencial de la trigonometría. Es común encontrarnos en el contexto real con edificaciones o construcciones que inadvertidamente presentan relación con esta área, aún más es de nuestro interés identificar aquellos lugares que exhiben dicha relación para así formular y resolver un problema matemático en el objeto seleccionado.

Es así como se ha seleccionado un sencillo resorte para llevar a cabo dicho trabajo. El grupo debe tomar registro fotográfico y tomar las respectivas medidas para identificar con que función trigonométrica se relaciona la curva formada por el resorte al ser estirado.

Qué hacer: Para llevar a cabo el proceso se debe estirar el resorte de tal manera que se genere una curva regular en periodo y amplitud como se ilustra en la figura.



El grupo de acuerdo con los conocimientos de matemáticas debe establecer en el origen de la curva el eje coordenado tal como lo ilustra la figura anterior.

Proceso:

1. Realizar la medición de la amplitud de la curva con ayuda de una regla.
2. Realice la medición del periodo de la curva con ayuda de una regla.
3. De acuerdo con la gráfica establezca con cual de las funciones se puede modelar la curva, es decir si corresponde a la función seno o coseno (aquí tenga en cuenta que debe partir de las funciones y=Acos (Kx) o Y=Bsen (Kx)).
4. En el paso 2 determinamos el periodo de la función que buscamos. En la lección, Cambio de Periodo de Funciones Trigonométricas, aprendimos que si cambiamos la entrada de x a Kx, el periodo cambia.

   $0 < Kx < 2\pi$. Conociendo el periodo, podemos encontrar el valor de k, pues, como sabemos: $\frac{2\pi}{k}$ = periodo, en consecuencia: $\frac{2\pi}{periodo} = k$
5. Teniendo en cuenta que ya se determinó el periodo y la amplitud de la curva y que además la grafica no presenta translación puesto que se ha tomado el origen del eje coordenado al inicio de la misma, establezca la función que podría determinar la curva del resorte.

ANÁLISIS Y PREGUNTAS:

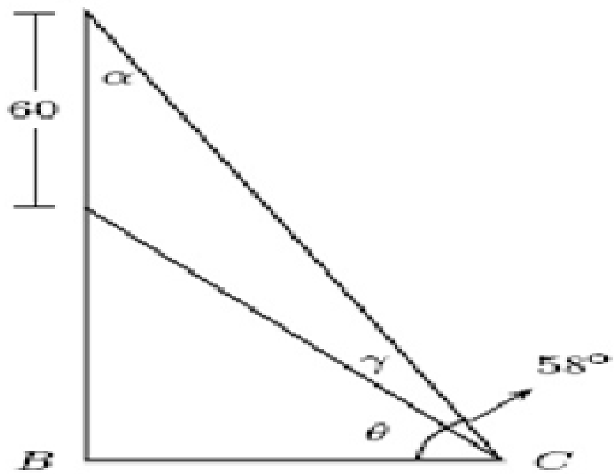
A. de acuerdo con su criterio, ¿que le hizo inclinarse por la función seno o la función coseno como modelo para la curva? Argumenta tu respuesta.
B. ¿Cual es la importancia de que se haya tomado el origen del eje coordenado al inicio de la curva?
C. Que experiencia le deja la resolución de este problema matemático.
D. ¿El proyecto de Popayán y las matemáticas le ha hecho ver lo fundamental de las matemáticas en el desarrollo social y arquitectónico de la ciudad? Argumenta tu respuesta.

NOTA:El resorte elegido para tal proyecto debe ser de contextura delgada para poder ser manipulado con facilidad.

Anexo 5. Taller 3

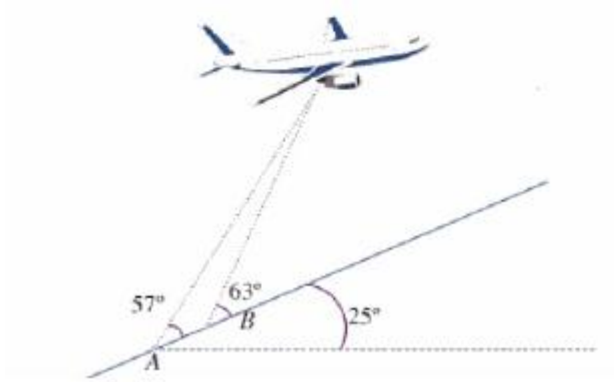
Problema # 1.

Un poste vertical de 60 pies de longitud está colocado al lado de un camino inclinado. Proyecta unasombra de 138 pies de largo directamente colina abajo a lo largo del camino, cuando el ángulo deelevación del sol es de 58 (observe la figura). Encuentre el ángulo de inclinación θ del camino.



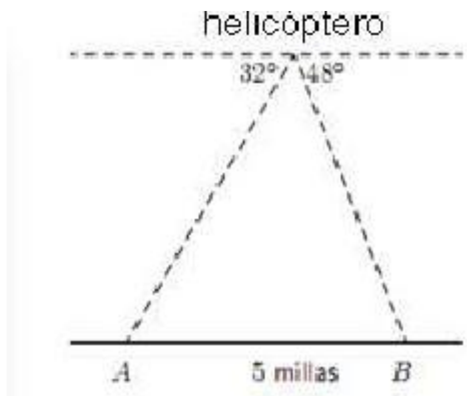
Problema # 2.

Un camino recto hace un ángulo de 25º conrelación a la horizontal. Desde el punto A sobre elcamino, el ángulo de elevación a un avión es de57º. En el mismo instante, desde otro punto Bsituado a 120 metros de A, el ángulo de elevaciónes de 63º. Encuentra la distancia del punto A hastael avión y la altura a la que vuela el avión conrespecto a la horizontal.



Problema # 3.

Un piloto de un helicóptero está volando sobre una carreterarecta. El observa dos motos con ángulos de depresión de32º y 48º respectivamente, los cuales están a 5 millas dedistancia entre sí. (Ver figura).Determinar: La distancia del helicóptero al punto A y la altituddel helicóptero.

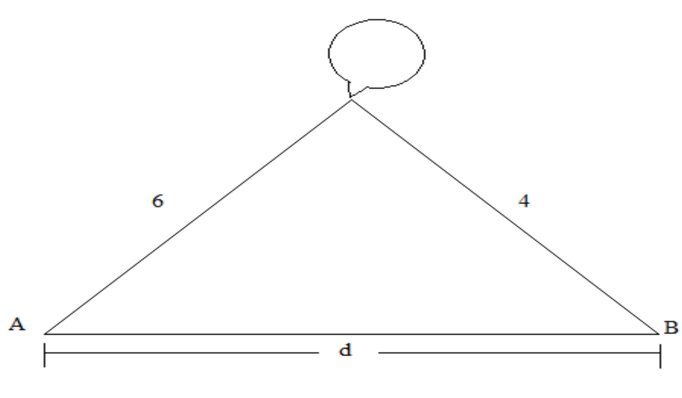


Problema # 4.

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en los puntos medios respectivamente. Una de las diagonales mide 8 cm y la otra mide 6 cm, además el ángulo que se forma entre ellos es de 50°. Encuentra la medida de lo lados del paralelogramo.

Problema # 5.

Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° y otro B situado al otro lado y en línea recta con un ángulo de 60°. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 km del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcule la distancia entre los pueblos A y B.



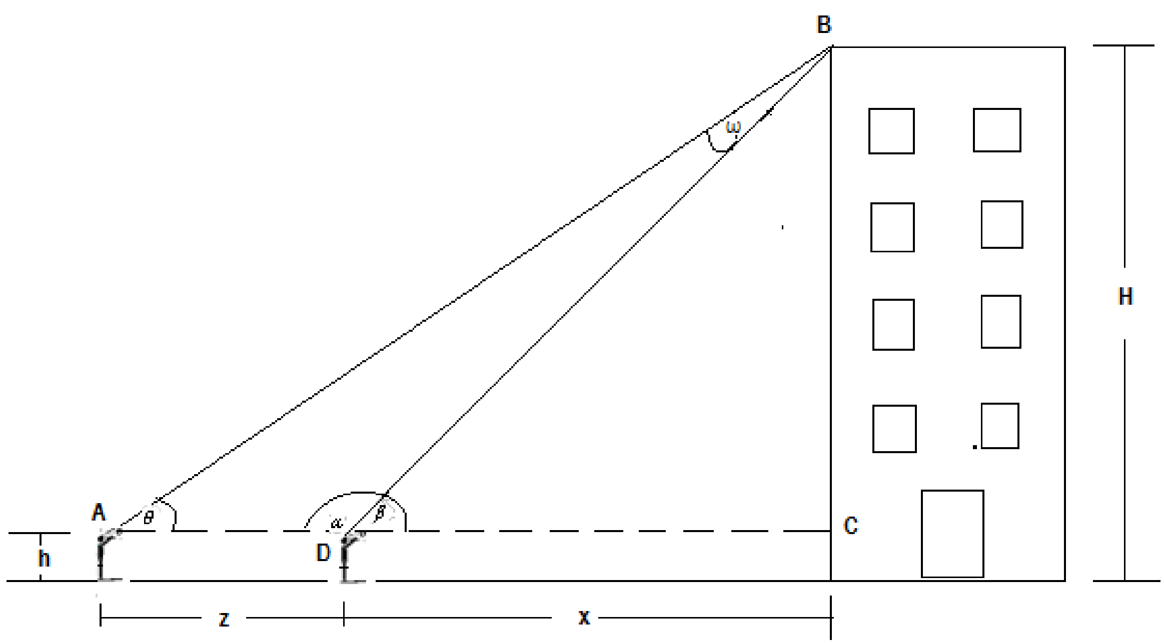
Anexo 6. Guías de la temática "teorema del seno y coseno"

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYAN

TEOREMA DEL SENO Y EL COSENO EN EL CONTEXTO REAL (guía # 1)

Las relaciones trigonométricas nos permiten trabajar en la resolución de triángulos que poseen un ángulo recto, sin embargo es importante tener en cuenta que existen triángulos que no presentan esta característica y por tanto se hace necesario conocer métodos teóricos que nos permitan dar solución a problemas que vinculan este tipo de esquemas; es aquí donde la intervención de los teoremas del seno y del coseno son fundamentales para obtener la solución a dichos problemas, en especial para dar solución a problemas expuestos desde el contexto urbano de la ciudad de Popayán que son de nuestro interés y que desde luego se encuentran enmarcados dentro del proyecto "Popayán y las matemáticas".

Para el eventual proyecto se ha elegido el edificio Cesar Negret de la ciudad de Popayán para resolver un problema matemático respecto a este. El marco teórico para dar solución a dicha problemática está dado por la implementación del teorema del seno y del coseno.



QUÉ HACER:

El grupo de acuerdo con los conocimientos matemáticos debe establecer esencialmente la altura del edificio Cesar Negret.

Proceso:

1. Con ayuda del teodolito deben establecer la medida de los ángulos θ y β.
2. La distancia z que representa la separación entre los observadores A y D debe ser establecida con ayuda de un metro.
3. El ángulo α debe determinarse teniendo en cuenta que éste es suplementario con el ángulo β.
4. Empleando el teorema del seno deben determinar la distancia AB es decir la del observador A al extremo superior del edificio.
5. Con las distancias AB, AD y el ángulo θ establecer la distancia del observador D al extremo superior del edificio, para ello emplee el teorema del coseno.
6. Con los datos obtenidos establecer la distancia que separa al observador D del edificio y también la distancia que separa al observador A del edificio.
7. Establecer la altura del edificio Cesar Negret empleando alguna de las relaciones trigonométricas ya vistas. Aquí tenga en cuenta la estatura del observador para determinar la altura total H.

ANÁLISIS Y PREGUNTAS:

A. Que experiencia le deja la resolución de este problema matemático.
B. ¿El proyecto de Popayán y las matemáticas le ha hecho ver lo fundamental de las matemáticas en el desarrollo social y arquitectónico de la ciudad? Argumenta tu respuesta.
C. Investigue a cerca de la historia del edificio y de su funcionamiento actual.

NOTA: tenga en cuenta que la presentación debe tener material fotográfico que evidencie el trabajo realizado en el lugar en cuestión. Además la sustentación debe ser explicada con detalle y cada razonamiento matemático argumentado.

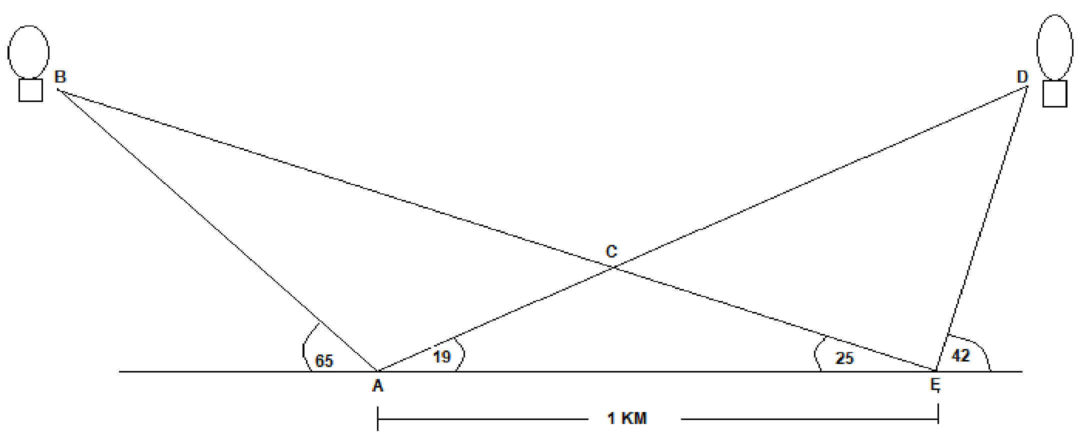
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYAN

TEOREMA DEL SENO Y EL COSENO (guía # 2)

Las relaciones trigonométricas nos permiten trabajar en la resolución de triángulos que poseen un ángulo recto, sin embargo es importante tener en cuenta que existen triángulos que no presentan esta característica y por tanto se hace necesario conocer métodos teóricos que nos permitan dar solución a problemas que vinculan este tipo de esquemas; es aquí donde la intervención de los teoremas del seno y del coseno son fundamentales para obtener la solución a dichos problemas.

PROBLEMA PROPUESTO:

Dos observadores desde puntos distintos, ven dos globos, que están en el mismo plano vertical en el cual están ellos. La distancia entre los observadores es de 1 km como lo muestra la figura. Hallar la distancia BD entre los dos globos.



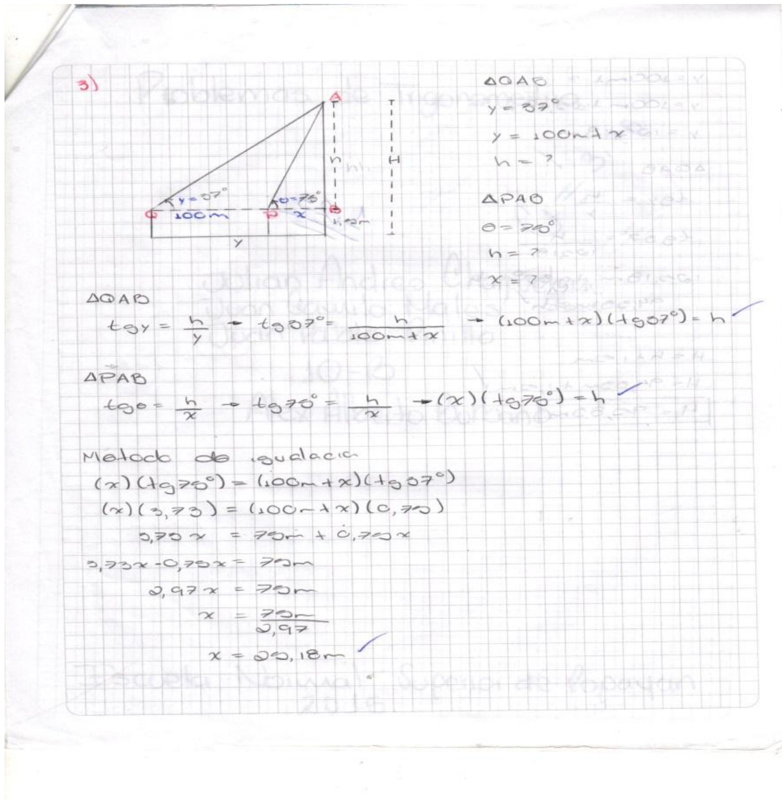
Que hacer:

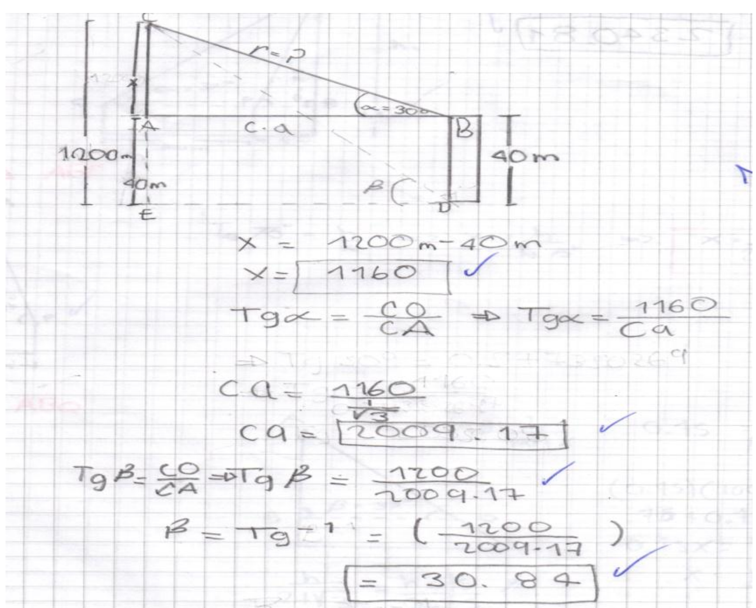
El grupo de acuerdo con los conocimientos matemáticos y teniendo en cuenta la información que se brinda debe establecer la longitud del segmento que se genera al unir los puntos B y D.

NOTA: tenga en cuenta que la solución del problema debe ser sustentada apoyada de una presentación con diapositivas donde se evidencie el razonamiento matemático realizado para dar solución al problema expuesto, además cada razonamiento debe ser explicado por el grupo con detalle.

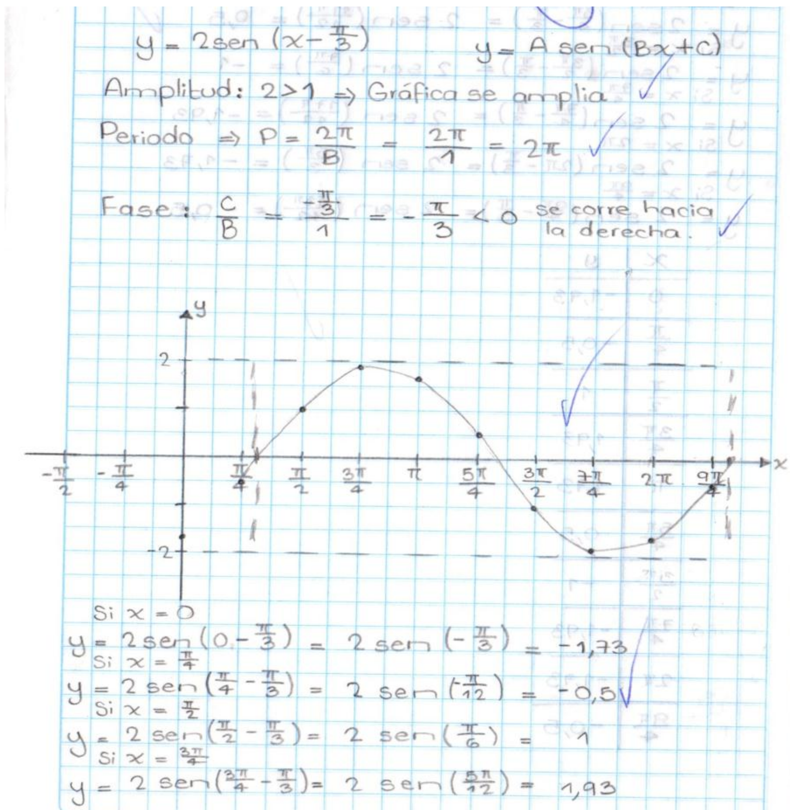
Anexo 7. Evidencias

I. Trabajo de los estudiantes en el aula concernientes a la resolución de problemas aplicando relaciones trigonométricas.





II. Trabajo en el aula de los estudiantes concerniente a las gráficas de las funciones trigonométricas.



$y = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad y = A\,\text{sen}\,(Bx + C)$

Amplitud: $2 > 1 \Rightarrow$ Gráfica se amplia

Periodo $\Rightarrow P = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Fase: $\frac{C}{B} = \frac{-\frac{\pi}{3}}{1} = -\frac{\pi}{3} < 0$ se corre hacia la derecha.

Si $x = 0$

$y = 2\,\text{sen}\left(0 - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1{,}73$

Si $x = \frac{\pi}{4}$

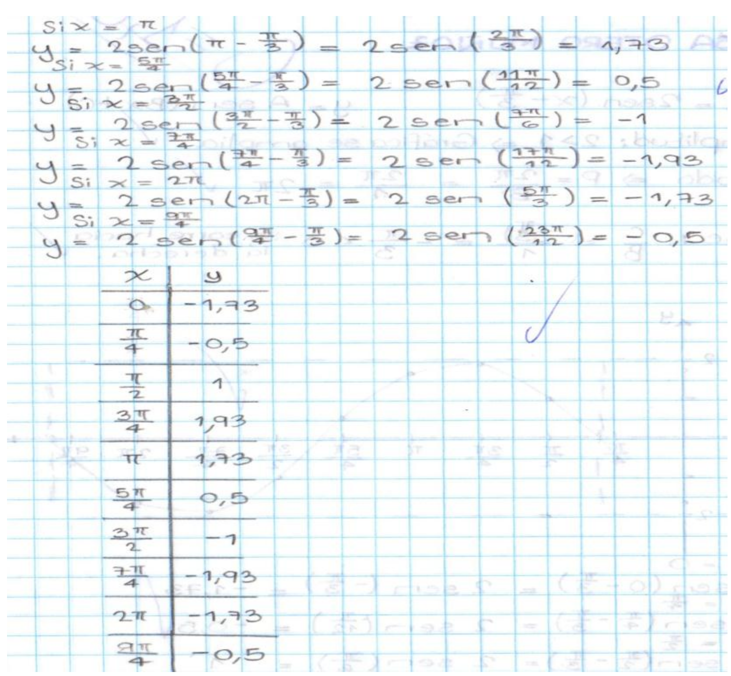
$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{-\pi}{12}\right) = -0{,}5$

Si $x = \frac{\pi}{2}$

$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

Si $x = \frac{3\pi}{4}$

$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1{,}93$



Si $x = \pi$

$y = 2\,\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1{,}73$

Si $x = \frac{5\pi}{4}$

$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 0{,}5$

Si $x = \frac{3\pi}{2}$

$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -1$

Si $x = \frac{7\pi}{4}$

$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -1{,}93$

Si $x = 2\pi$

$y = 2\,\text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -1{,}73$

Si $x = \frac{9\pi}{4}$

$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{23\pi}{12}\right) = -0{,}5$

x	y
0	$-1{,}73$
$\frac{\pi}{4}$	$-0{,}5$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	1,93
π	1,73
$\frac{5\pi}{4}$	0,5
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-1{,}93$
2π	$-1{,}73$
$\frac{9\pi}{4}$	$-0{,}5$

III. Trabajo de campo de los estudiantes.