Praxeología de la factorización de expresiones algebraicas mediante la herramienta del Puzzle Algebraico

LINDA JENNIFER PABÓN URREA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

2017

Praxeología de la factorización de expresiones algebraicas mediante la herramienta del Puzzle Algebraico

Practicante

LINDA JENNIFER PABÓN URREA

Director de Práctica Pedagógica

Magister. ÁNGEL HERNÁN ZUÑIGA SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

2017

Nota de Aceptación

Matemático. FREDDY WILLIAM BUSTOS RENGIFO

Evaluador

Magister. ÁNGEL HERNÁN ZUÑIGA SOLARTE

Director de Práctica Pedagógica

Magister. WILMER LIBARDO MOLINA YEPES

Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Popayán 8 de mayo de 2017

Agradecimientos

En la construcción de este proyecto de vida fui fortalecida en todos los sentidos por muchos a los cuales quiero dar gracias; empezando por agradecerle a mi hermanito, Jhoan Stiven Fernández Urrea, quien ha sido mi motor de arranque e impulso en cada caída, porque sin ser mi motivación no me habría levantado de cada dificultad; del mismo modo agradecerle a mi madre Lucelina Urrea Melecio, a mi hermana Neidu Mosquera Urrea y a mis demás seres queridos por el apoyo; a mi esposo Fabián Valencia por llegar en el momento justo a darme fuerzas y valor para continuar; a las Residencias Universitarias 11 de Noviembre por permitirme desarrollar parte de mis estudios en su morada y ser una escuela más de mi formación integral; a todos mis formadores que de alguna u otra manera han compartido sus conocimiento conmigo y han sido ejemplo para mi formación personal y profesional; también como lo han hecho todos mis estudiantes de diferentes instituciones a quienes he orientado de manera particular; a mi asesor Ángel Hernán Zúñiga por todos sus conocimientos, aportes, paciencia y motivación para culminar con éxito este documento; a mi evaluador Freddy William Bustos por su dedicación, su conocimiento, aportes y sugerencias y finalmente a todos los demás que no fueron mencionados pero que de manera directa o indirecta han influido en mi vida.

Resumen

Este documento es el producto de la sistematización de la docencia directa, ejecutada desde el mes de abril hasta el mes de noviembre, en la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Popayán (IE-ENSP), en el grado 9A del año lectivo 2015.

En él se describen las condiciones institucionales del lugar donde se realizó la actividad docente tales como la historia, el estado de la planta física, el personal docente y administrativo, el tipo de formación, los proyectos de aula, además de los componentes institucionales como el currículo y el plan de estudios.

La actividad docente se desarrolló en trece sesiones de aula donde se buscaba desplegar como contenidos propuestos, la factorización de trinomios de la forma $x^2 \pm 2xa + a^2$,$x^2 \pm bx \pm c$, $ax^2 \pm bx \pm c$ y la diferencia de cuadrados. Dicho quehacer se desarrolló en un ir y venir entre el algebra y la geometría, siendo la herramienta denominada Puzzle Algebraico la mediadora entre estas dos área de la matemática involucradas.

El análisis de la actividad docente realizada en la IE-ENSP se hizo con base en una de las teorías de la Educación Matemática, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual se interesa por las relaciones humanas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; estas relaciones se describen mediante un modelo único que se denomina Praxeología. Una praxeología es una organización matemática única de cada actividad y de cada individuo; una Praxeología es un entramado conceptual que consta de Tareas T que son las acciones puntuales a ejecutar, Técnicas τ que son las maneras como se aborda la tarea T, Tecnologías θ que justifican racionalmente las técnicas τ, y Teorías Θ que sustentan en un nivel superior las tecnologías θ.

Así pues, con esta caracterización se hizo la reflexión desde la TAD estudiando algunos de los registros de las actividades de los estudiantes, buscando de esta forma dar respuesta al siguiente objeto de estudio: ¿Cuál(es) es (son) la(s) praxeología(s) que se establece(n) al enseñar productos notables y factorización con figuras geométricas?

Para finalizar la sistematización de la docencia directa se reconocieron los hechos más relevantes en el desarrollo de ella, se resaltaron los análisis de los registros más destacados y además se logró dar respuesta, luego de la reflexión de los registros, al objeto de estudio.

De esta manera todos estos reconocimientos se convirtieron en las conclusiones y las recomendaciones que promueven la continuación del proyecto de enseñanza desde esta perspectiva haciéndole ciertas mejoras para ir más allá de los propósitos iniciales formulados en este trabajo profesional y académico.

Tabla de contenidos

Lista de figuras

Capítulo 1. Contexto Institucional

1.1. Generalidades de la institución educativa

La Institución Educativa Escuela Normal Superior de Popayán (IE-ENSP) data desde el año 1934, fundada inicialmente en el departamento del Valle del Cauca con el nombre de escuela Normal Nacional de Señoritas bajo la dirección de la profesora Ester Aranda; luego en el año de 1935 se traslada a la ciudad de Popayán mediante el decreto ejecutivo N° 172 del 27 de septiembre de 1935 tras una petición hecha al ministerio de educación, ubicándose en la hacienda La Estancia. Más tarde en 1936 se compra la hacienda La Ladera, terreno con historia colonial para la ciudad ya que ahí vivió el maestro Guillermo Valencia, empezando su funcionamiento en esta nueva sede en 1937 bajo la rectoría de Leonor Penilla; en esta nueva sede se contó con la modalidad de internado el cual fue terminado en 1977. La escuela entregó su primera promoción de Maestras Rurales en 1939. Ya en 1949 la institución fue denominada Normal Superior, para otorgar títulos de Maestra Superior. Por esta misma época, independientemente de la Normal Superior, fue fundada en 1952 la Escuela Normal Nacional de Varones (Arcos, 2014). Desde 1968 la institución femenina ha creado programas de integración de la Normal con la sociedad, donde se beneficia a personas de todas las edades, en programas infantiles, juveniles, musicales, deportivos, religiosos, de salud, de prevención, entre otros. En 1994 se ordena la restauración de las Normales y en 1995 se hace la fusión de las dos Normales de la ciudad, la de Señoritas y la de Varones, conservándose desde entonces la planta física y el nombre Normal Superior de Popayán, siendo mixta hasta nuestros días, bajo la dirección actual del rector Hermes Laureano Idrobo Sandoval. En 1997 se entregan los primeros títulos de

Bachilleres con Profundización en Educación, otorgados al aprobar el grado 11. En 1998 se obtiene la acreditación de Normal Superior bajo los requerimientos del Consejo Nacional de Acreditación (CNA) adscrito al Ministerio de Educación (Timaná y Torres, 2010; Pachajoa, 2008; Andrade, 2011; Oderlogica, 2014). Actualmente la institución tiene dos sedes en el mismo sector conservando su ubicación, estas se sitúa en el sur de la ciudad vía autopista sur, en la dirección calle 17 n° 11ª- 43, hacienda La Ladera, comuna 6. Por otro lado, la institución tiene una amplia cobertura ya que no solo beneficia a los residentes de la comuna 6, a la que pertenecen 33 barrios y de la que proviene el 47% de la población estudiantil, sino que cuenta con la vinculación de estudiantes de toda la ciudad y alrededores (IE-ENSP, 2015).

Los servicios educativos que presta la institución son: preescolar y básica primaria en la sede N°2; básica secundaria, media y educación complementaria en la sede N°1, sede principal.

A estos servicios la institución otorga los siguiente títulos: Bachiller Básico (Grado 9°), Bachiller Académico con profundización en Educación (Grado 11°), Normalista Superior (Para desempeñarse en el nivel de Preescolar y el Ciclo de Educación Básica Primaria, en el Grado 13°) (Oderlogica, 2014). Estos programas son orientados mediante la modalidad de formación de docentes, haciendo uso del modelo pedagógico Activo Comunicativo. De otro lado, dado que esta es una entidad de naturaleza pública, el calendario escolar para el desarrollo de estas actividades es el denominado “A”, que corresponde al intervalo de tiempo del mes de febrero al mes de noviembre.

La cobertura en todos estos ciclos académicos está dada aproximadamente de esta manera: en la sede principal 784 estudiantes y en la sede N° 2, 640 estudiantes. Para tan dedicada labor la institución cuenta con una planta de personal docente, directivo y administrativo, distribuidas así: 22 administrativos, 20 docentes de básica primaria y preescolar y 43 docentes de básica secundaria, educación media y ciclo complementario (IE-ENSP, 2015; Secretaría, 2016).

Por otro lado, si bien en el escudo de la institución se tiene como lema “Formamos Maestros” no todas las titulaciones otorgadas se entregan con este emblema. No obstante, la formación de la Normal está encaminada a la orientación en educación, es por esto que el enfoque pedagógico no solo se da en el ciclo complementario sino también en básica secundaria y educación media (Oderlogica, 2014; Secretaría, 2016).

La visión que tiene planteada la entidad como normalista es visualizar la institución como líder en la actualización y formación de maestros para los niveles de educación preescolar y básica primaria, en y desde contextos culturales y sociales de la infancia y adolescencia.

Por otro lado la misión institucional tiene como fin entregar a la sociedad educadores comprometidos con el reconocimiento del ser desde la interacción del contexto social y cultural. Buscando impactar socialmente y articular la misión institucional, se desarrollan proyectos pedagógicos en los que se involucra al estudiantado y a los docentes de futuros formadores como lo son: Mientras Cambia la Escuela (currículo con dimensión ambiental), Formación de Maestros (pedagogía y didáctica), Didáctica de la Matemática (lenguaje matemático), Pedagogía Práctica Social – PPS (pedagogía de entorno), Pequeños Gigantes (básica primaria), Leyendo y Escribiendo desde los contextos socioculturales (básica primaria), Lectoescritura inicial (preescolar), Alegría de Aprender (grado sexto), Grupo de Estudios en Lenguaje Audiovisual – GEILA, El Jardín de los Valores (grado octavo), Competencias Investigativas en el desarrollo de Bloques Lógico-matemáticos (grado décimo) y por último Educación con perspectiva de inclusión (grado séptimo). Por otro lado, hay proyectos no pedagógicos como el Proyecto Institucional de Convivencia "La convivencia un factor esencial en la formación de maestros" y otros integrales como el Proyecto Escuela y Familia, Club Deportivo Escuela Normal Superior de Popayán (bádminton, balónmano, baloncesto, fútbol, fútbol de salón, voleibol) y uno recientemente generado como es El Aula de Aceleración de Aprendizaje (programa para desescolarizados de más de dos años, con edades entre 7-17 años) (Oderlogica, 2014).

Además de los proyectos anteriores, la institución brinda los servicios de práctica pedagógica investigativa, servicio social del estudiantado, programa de acompañamiento pedagógico a niños de básica primaria y preescolar, asesoría pedagógica, didáctica e investigativa a instituciones educativas, Programa de Formación Complementaria de formación docente para bachilleres de otras modalidades, enfermería, biblioteca pedagógica, servicio religioso católico, sede de la Unidad de Atención Integral, asesoría psicológica en convenio con la Universidad Cooperativa, fonoaudiología en convenio con la Universidad del Cauca, restaurante escolar con 700 cupos del PAE. De igual manera, para tener mayor interactividad cuenta con convenios y relaciones interinstitucionales con la Universidad del Cauca, la UNAD, la Universidad Cooperativa y la Fundación Universitaria de Popayán (Oderlogica, 2014).

Finalmente, debido a que la educación es de contextos, no se debe dejar de lado el entorno físico ya que este es relevante en el desarrollo de las actividades de formación, así pues, es de reconocer que esta institución tiene buenos espacios; en su sede principal tiene 5 bloques de aulas las cuales son bien amplias y albergan alrededor de 35 estudiantes cómodamente, biblioteca, enfermería, sala de profesores, cafetería, buenos baños, papelería y fotocopiadora, área administrativa y dirección, excelentes zonas verdes como senderos ecológicos, parque de juegos, jardines, canchas, además kioscos de descanso y área de expresión religiosa católica como la capilla y un altar. En la sede del ciclo preescolar y básica primaria cuenta con 5 bloque entre aulas y sector administrativo, cancha, un salón para actividades, jardines, parque de juegos, en cada aula sus herramientas académicas, baños aptos para niños y zonas verdes, tal como se muestra en las siguientes imágenes (para ver otras imágenes ver Anexo 1).

1.2. Currículo y plan de estudios de matemáticas

El plan de estudios de la IE-ENSP está constituido por once ítems principales y divididos de la siguiente manera: Presentación, Misión y Visión, Diagnóstico, Justificación, Recontextualización del área, Objetivos, Desempeños Generales y Secuencia Curricular, Metodología, Evaluación, Recursos y por último la Bibliografía.

Podemos indicar, en términos generales según (IE-ENSP, 2011), que el plan de estudios de la IE-ENSP está ligado a la misión y visión de la institución las cuales tienen que ver con la formación de maestros, es por esto que se ha tenido en cuenta el plan institucional de formación del núcleo denominado de Ciencia y Tecnología para ejecutar los proyectos pedagógicos de aula o los colectivos de investigación; en particular, los proyectos pedagógicos matemáticos están relacionados, claro está, con los conocimientos matemáticos, la didáctica de las matemáticas, las características del pensamiento del estudiante que aprende y los referentes teóricos de la institución. El plan de estudios de matemáticas tiene como misión ir más allá de solo la trasmisión de contenidos, se quiere lograr que el estudiante involucre a las matemáticas como ciencia que hace parte de su vida, que la valore y la incorpore como tal, buscando la formación del individuo como ser humano, individuo que se enfrenta a hechos sociales y a problemas de la vida diaria a los cuales debe proponer soluciones conectando las variadas situaciones que surgen y desarrollando habilidades mentales que le ayuden a desenvolverse creativamente en la sociedad; así pues con este plan se busca impactar socialmente, fortaleciendo además los principios y valores, generando individuos críticos, constructores de sociedad. Este plan tiene una mirada actualizada respecto a que la enseñanza debe evolucionar como lo está haciendo la sociedad, estos pensamientos se han despertado desde las discusiones filosóficas de la naturaleza de las matemáticas provocando cambios considerados en los aspectos pedagógicos y didácticos, de lo que debe ser la enseñanza y el aprendizaje las matemáticas, conectando el conocimiento matemático, con el origen y la historia de las matemáticas, la vida social del hombre y la práctica de ellas mismas, teniendo en cuenta que se debe generar una educación integral del estudiante.

Todo esto tiene referentes teóricos, uno de ellos son los lineamientos curriculares planeados por el MEN y un grupo de docentes que tienen como finalidad presentar unas pautas o criterios para el direccionamiento de la planeación del currículo escolar, esta orientación es de carácter epistemológico, pedagógico y evaluativo, ya que las concepciones de la función de enseñanza de las áreas de conocimiento en el aula han cambiado. Es por eso que al momento de planear el currículo en el desarrollo de los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) es recomendado preguntarse según el MEN:

> ¿Qué son las matemáticas?, ¿En qué consiste la actividad matemática en la escuela?, ¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas?, ¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?, ¿Cómo se puede organizar el currículo de matemáticas?, ¿Qué énfasis es necesario hacer?, ¿Qué principios, estrategias y criterios orientarían la evaluación del desempeño matemático de los alumnos? (MEN, 1998, p.9).

Además de responder estas preguntas, el MEN en sus lineamientos invita a reflexionar sobre las matemáticas, tal como lo ha planteado la institución en su plan de estudios; pero también se deben tener en cuenta tres grandes aspectos como son el contexto, conocimientos básicos y aspectos generales.

Debemos tener en cuenta que el anterior no es el único referente en el que se respalda la institución, también toma como soporte la filosofía Piagetiana (Jean Piaget), la filosofía Vygostkiana (Lev Vygotsky), los aportes de George Polya, los aportes de Jorge Castaño García perteneciente a la comunidad Marista, aportes de Eloísa Vasco, y otros aportes como los de Celestin Freinet, Martín Gardner, Juan Godino, Yakov Perelman y los referentes de la Escuela Cubana (IE-ENSP, 2011).

Por otra parte los objetivos generales del plan de estudios como se manifestó anteriormente tienen que ver con la misión y la visión de la institución, mientras que los específicos se han planeado para cada grado escolar desde preescolar hasta grado undécimo, notándose claramente que estos están concebidos buscando lograr obtener los estados que plantean los estándares básicos de competencias; además de estos objetivos se agregan los correspondientes a la educación de la fase complementaria de la institución (ciclo normalista).

Los desempeños que describe la institución en su plan de estudios tienen que ver con los estados logrados con base en los objetivos mencionados anteriormente y para ello la institución incluye en su plan una Secuencia Curricular; esta está acordada por grados académicos, se distribuye por bloques temáticos referidos a los cinco pensamientos y sistemas que se plantean en los estándares básicos de competencias, en cada bloque se distribuyen temas para los cuales hay una disposición de horas para su desarrollo, además de esto para la fase complementaria la secuencia curricular incluye en su bloque temático los enfoques históricos, epistemológicos, pedagógicos-didácticos y evaluativos; sin embargo, el orden en el que aparece la secuencia curricular en todos los grados no es necesariamente como se desarrolla cronológicamente en el aula.

En cuanto a la metodología, se ha especificado en cuatro niveles, tal como se observa en adelante (IE-ENSP, 2011):

- Preescolar y básica primaria: En este nivel se implementan metodologías activas que relacionen las actividades vivenciales, las experiencias físicas, las interacciones con el mundo social, se promueve el trabajo en equipo, y se pretende tener una interacción permanente entre la práctica y teoría matemática.
- Básica secundaria y educación media: En este nivel se implementan metodologías que ayuden a la construcción del conocimiento como son: Trabajo en casa, trabajo en grupo,

trabajo individual, evaluaciones de test, presentación de trabajos e informes y la articulación del proyecto de aula.

- Programa de formación complementaria: Las metodologías van ligadas a trabajos que tienen que ver con: razonamiento lógico-matemático, creatividad, modelaje y operatoria, la comunicación y el lenguaje matemático.

En cuanto a la evaluación, el plan de estudios no determina si es cuantitativa o cualitativa, sin embargo este responde a ella con las preguntas sugeridas por los lineamientos curriculares respecto a la evaluación: ¿Para qué evaluar?, ¿Qué evaluar?, ¿Cómo evaluar?, ¿Cuándo evaluar? y ¿Qué hacer con los resultados de la evaluación? (IE-ENSP, 2011).

Además para desarrollar con seguridad este plan, la institución cuenta con recursos didácticos, bibliográficos, académicos, entre otros. Y por supuesto, para la estructuración del plan contó con un referente bibliográfico de matemática escolar, didáctica de las matemáticas, contenidos matemáticos, lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias, entre otros.

Basados en lo anterior podemos decir que el plan de estudios de la IE-ENSP está acorde con lo que se plantean en los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencia. Recordemos que en los lineamientos curriculares nos presentan cinco procesos generales que se deben desarrollar en matemáticas como son: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos; sin embargo en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas no se muestran estos procesos que efectivamente sean desarrollados durante la actividad escolar, pero si los estados de conocimientos con los que debe contar el estudiante al terminar un año escolar, los estándares se han clasificado de acuerdo a cinco tipos de pensamiento matemático como son: el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el Variacional.

Sin embargo debemos recalcar que los planteamientos educativos no están acabados y que a estos se pueden anexar aportes diariamente; por esto que me atrevo a considerar que la educación aún está abierta a las oportunidades, a las innovaciones, a las propuestas, es por esto que la educación no se establece como finalizada porque los aporten pueden surgir de la región, de la cultura, del entorno, de las nuevas estrategias de enseñanza y de la evaluación; y referido a lo último dada que la educación en Colombia en generalmente grupal, según el MEN dice que se debe evaluar grupalmente, aunque esto no aparece en la evaluación del plan de estudios según el MEN esta evaluación es exitosa a medida que los estudiantes individualmente lo sean, aunque por mi parte consideraría que más que esto se debe evaluar que el estudiante mientras está aprendiendo matemáticas está aprendiendo a vivir en sociedad, a crear sociedad, a conservar una cultura y está brindado otros aportes a la sociedad desde el aula.

Otra cuestión que podemos enunciar, es que aunque el plan de estudios de la IE-ENSP está estructurado por escrito y haga parte del PEI, no está garantizada la aplicación y desarrollo del mismo porque esto va a depender del docente de área, dado que él posee la libertad para orientar el curso asignado.

En lo anterior se dieron especificaciones generales del plan de estudios de matemáticas para cualquier grado de la IE-ENSP, ahora podemos particularizar y centrarnos en el grado octavo, ya que nos interesa porque el contenido matemático del proyecto Puzzle Algebraico corresponde a este nivel, entonces veamos:

Objetivos Específicos, según el PE (IE-ENSP, 2011, p.9):

a. Identificar la estructura de los números reales, sus operaciones y propiedades fundamentales.
b. Desarrollar habilidades y destrezas en el manejo de las diferentes operaciones con polinomios algebraicos.
c. Desarrollar habilidades y destrezas para la factorización de polinomios.
d. Desarrollar habilidades y destrezas para resolver operaciones entre fracciones algebraicas.
e. Desarrollar habilidades y destrezas para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y aplicación a la resolución de problemas.
f. Apropiar y manejar los teoremas básicos de paralelismo y perpendicularidad, y, congruencia y semejanza de triángulos.

Desempeños Generales, según el PE (IE-ENSP, 2011, p.12):

a. Domina del concepto de número irracional y real.
b. Demuestra habilidades y destrezas en el manejo de las diferentes operaciones con polinomios algebraicos.
c. Demuestra habilidades y destrezas para la factorización de polinomios.
d. Demuestra habilidades y destrezas para resolver operaciones entre fracciones algebraicas.
e. Demuestra habilidades y destrezas para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y aplicación a la resolución de problemas.
f. Maneja los teoremas básicos de paralelismo y perpendicularidad, y, congruencia y semejanza de triángulos.

En la Secuencia Curricular, en el bloque temático correspondiente al Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos (Factorización), se establecen los siguientes temas, según el PE (IE-ENSP, 2011):

a. Conceptos básicos.

b. Caso I: factorización por factor común.

c. Caso II: Factorización por agrupación de términos.

d. Caso III: Factorización de trinomios:

d.1. Trinomios cuadrados perfectos de la forma: $x^2 \pm 2xa + a^2$

d.2. Trinomios de la forma: $x^2 \pm bx \pm c$

d.3. Trinomios de la forma: $ax^2 \pm bx \pm c$

e. Caso IV: Factorización de una diferencia de cuadrados.

f. Caso V: Factorización de trinomios por suma y resta.

g. Caso VI: Factorización de suma o diferencia de potencias iguales.

h. Caso VII: Factorización de polinomios por evaluación

1.3. Temáticas o unidad didáctica enseñadas

Como lo indicamos anteriormente, basándose en lo que indican los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, la Institución ha seguido muy de cerca estas dos bases fundamentales estipuladas por el MEN para crear su Plan de Estudios para cada grado correspondiente al área de matemáticas, en particular el grado octavo.

Tomando de ahí, la temática escogida del Plan de Estudios es la Factorización, pero no abarcamos toda la sesión de la Secuencia Curricular, solo se desarrollaron en la docencia directa los ítems:

a. Conceptos básicos

d. Caso III: Factorización de trinomios:

d.1. Trinomios cuadrados perfectos de la forma: $x^2 \pm 2xa + a^2$

d.2. Trinomios de la forma: $x^2 \pm bx \pm c$

d.3. Trinomios de la forma: $ax^2 \pm bx \pm c$

e. Caso IV: Factorización de una diferencia de cuadrados (se desarrolló luego de d.1).

Sin embargo aunque esta temática es correspondiente a la Secuencia Curricular del grado octavo, se llegó a un acuerdo verbal con el profesor titular del área de matemáticas para el grado noveno, Luis Alberto Cuellar, para desarrollar esta unidad temática en este curso (9°-A) dado que en el plan de estudios se tiene como objetivo específico exactamente el literal:

c. Desarrollar habilidades y destrezas para la factorización de polinomios.

Entonces asumimos que este objetivo se había cumplido, y usamos este hecho para desarrollar el proyecto Puzzle Algebraico dado que necesitábamos los conocimientos previos de factorización y productos notables. Ahora antes de continuar, se debe aclarar que generalmente se conoce al Puzzle como un juego de habilidad y paciencia que consiste en recomponer una figura o una imagen combinando de manera correcta piezas planas y de distintas formas, sin embargo aquí solo usaremos un Puzzle que se le llamará Puzzle Algebraico compuestos por solo 4 figuras geométricas planas (cuadrados y/o rectángulos), de tal manera que se pueda conseguir un rectángulo a partir de estas.

De igual manera fue necesario acudir a la Secuencia Curricular del grado séptimo y tomar del bloque temático en el Pensamiento Métrico y Sistemas De Medidas (Sistema Métrico Decimal) el tema B.2., denominado Área de figuras regulares planas; que para este caso solo es el cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos (IE-ENSP, 2011), esto se dio ya que se necesitaba de esta unidad como herramienta algebraica para la factorización con la metodología del proyecto.

Es de resaltar que el acuerdo llevado a cabo con el docente titular de orientar nuevamente la temática de factorización el grado noveno no es impertinente, ya que según los Estándares Básicos de Competencias al finalizar el ciclo octavo-noveno, respecto a la temática mencionada, el estudiante debe tener las siguientes competencias así (MEN, 2006):

Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos

- Utiliza números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Identifica y utiliza la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

- Usa representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Pensamiento Métrico y Sistemas De Medidas

- Generaliza procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Selecciona y usa técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
- Justifica la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos

- Identifica relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construye expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Usa procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

1.4. Consideraciones matemáticas

La factorización hace parte de la línea del álgebra entendida como la generalización de la aritmética, por eso conserva los algoritmos similares con operaciones y propiedad usadas con los números reales, solo que estas operaciones se realizan con números en combinación con letras, denominadas variables.

El cálculo de áreas está ubicado en la línea de la geometría, para el cálculo tradicional de áreas necesitamos de las herramientas de la aritmética para expresar las magnitudes, sin embargo las representaciones geométricas son independientes de la magnitud que representa su área.

Mencionamos estas dos unidades temáticas porque son las que se relacionaron y se desarrollan en el proyecto de intervención mediado por la herramienta del Puzzle Algebraico.

En el caso de este proyecto partimos de las figuras geométricas planas como son el cuadrado y el rectángulo, nos trasladamos luego al cálculo de áreas de estas pero sin pasar por las magnitudes en las que se expresaría el área, solo nos quedamos con las representaciones algebraicas que comúnmente se conocen como fórmulas así:

Para el cuadrado: $A = L * L = L^2$

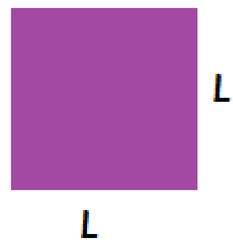


Figura 1. Área del cuadrado

Para el rectángulo: $A = b * h$

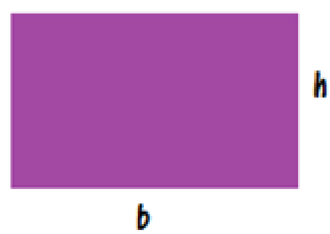


Figura 2. Área del rectángulo.

Podemos notar que las conocidas fórmulas tienen una connotación algebraica ya que L, b, h, las podemos caracterizar como variables, así nuestras figuras son geométricas, pero las fórmulas son algebraicas permitiéndonos leer matemáticamente esa representación geométrica, de esta manera apreciamos la relación entre estas dos líneas de la matemática, esto es lo que se quería reflejar en el proyecto. De este modo, aprovechando esa íntima correspondencia se usaron las representaciones geométricas para expresar polinomios de grado 2, y esta herramienta se facilita para polinomios de este tipo porque recordemos que las áreas nos representas unidades cuadradas.

Por lo tanto usamos los conceptos de cálculo y suma de áreas para cuadrados y rectángulos para representar polinomios de nuestro interés de la forma: $x^2 \pm 2xa + a^2$, $x^2 \pm bx \pm c$, $ax^2 \pm bx \pm c$ y diferencia de cuadrados.

Por ejemplo para el primer caso, lo que describiremos más adelante con detalle, tenemos:

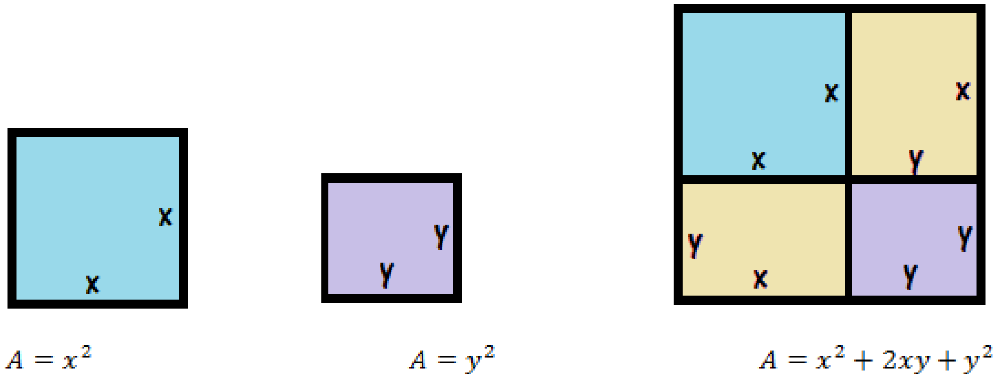


Figura 3. Representación del área del trinomio $\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$

1.5. Consideraciones didácticas

El grado noveno-A que fue donde se desarrolló el proyecto, aunque con la temática del grado octavo como se mencionó anteriormente, contó con la presencia de 33 estudiantes jóvenes con edades entre 12 y 16 años.

Para tener consideraciones didácticas debemos referirnos al Sistema Didáctico (SD) que hay en todo proceso de enseñanza, y que según Valestegui (Valestegui, 2011) este sistema está compuesto del individuo que aprende, es decir el estudiante, el individuo que enseña, en este caso la practicante pedagógica Linda Pabón en su docencia directa, y el objeto a enseñar, en este caso la factorización.

Entre estos tres componentes del SD existen relaciones que se convierten en el contrato didáctico generado entre el estudiante y el docente para realizar las actividades del aula y procurar el aprendizaje deseado. A la relación entre el docente y el estudiante a propósito de la apropiación del objeto de enseñanza se le conoce como relación didáctica, en ésta la docente tuvo en cuenta los conocimientos previos de los estudiante, en el entendido que la factorización aparece como un objetivo específico a lograr con el desarrollo del plan de estudios del grado octavo; así pues como se mencionó anteriormente, se asumió que estos conocimiento estaban dados. Además la docente practicante cuenta con la capacidad de manejar la temática, ya se ha preparado matemática y pedagógicamente para dicha orientación, por esto se planeó que las sesiones de docencia directa privilegiaran los procesos de "mostración"[1] de la relación entre álgebra y geometría.

Para ejercer la relación personal entre docente y estudiante se planeó desarrollar las sesiones de forma constructiva, donde se dé la participación al estudiante en la construcción del conocimiento y sus inquietudes puedan ser atendidas y resueltas; pero esta relación se construye y constituye dándole confianza al estudiante, motivándolo, acercándosele para observarlo individualmente y permitir que este se libere y se acerque también a la practicante. Por eso cuando se veía la necesidad de hablar personalmente con algún(os) estudiante(s), se hacía sin recurrir a juzgar sino a escuchar al estudiante y darle las orientaciones pertinentes para superar las dificultades. Del mismo modo para desarrollar la relación metodológica entre el objeto de enseñanza y el objeto de estudio se tuvieron en cuenta los medios y métodos con los cuales el estudiante podía acceder a interiorizar los conocimientos referidos al objeto de enseñanza, en este caso la factorización; para ampliar esta relación se propusieron talleres individuales para realizar en casa, talleres grupales en clase, salidas al tablero y pruebas escritas, todos estos con una previa ejercitación de los contenidos involucrados lo que exigió una directa interacción entre la docente practicante y los estudiantes; interacción que tuvo la ayuda de conocimientos de la geometría, en particular el cálculo de áreas y la suma de áreas, que inicialmente acudió a la herramienta

[1]Entiéndase el término "mostración" como aquel proceso a través del cual se justifica una relación o verdad matemática con base en la representación misma y su significado. La demostración de dicha relación o verdad es del dominio de la lógica matemática y del protocolo hipotético deductivo, con el que se validan dichas relaciones y verdades.

del Puzzle hecho con fichas de cartulina y posteriormente a un Puzzle dibujado en el cuaderno de cada estudiante.

1.6. Consideraciones metodológicas

La metodología para la docencia directa en la IE-ENSP fue planeada de acuerdo a lo que se iba a desarrollar en cada sesión. Se previó que la docencia directa transcurriera a través de cuatro momentos, así:

a. Reconocimiento de saberes.
b. Aclaración de saberes previos.
c. Presentación del Puzzle Algebraico.
d. Factorización de trinomios de la forma $x^2 \pm 2xa + a^2$, $x^2 \pm bx \pm c$, $ax^2 \pm bx \pm c$ y diferencia de cuadrados con la herramienta Puzzle Algebraico.

Para el desarrollo del ítem a. se tomó como estrategia la utilización de un test temático denominado Conducta de Entrada y una encuesta auto-evaluativa denominada Encuesta de Análisis de Resultados; el objetivo era que fueran los mismo jóvenes quienes reconocieran el nivel en el que se encontraba su conocimiento algebraico, para luego del reconocimiento de algunos desatinos promover el interés por el proyecto Puzzle Algebraico.

Para abordar el ítem b. se tenía una guía de unos conceptos necesarios y claves planeados para el desarrollo de la temática, sin embargo era necesario recurrir a la revisión de la Conducta de Entrada y de la Encuesta para determinar si los conceptos postulados en la guía eran efectivamente los necesarios y claves, de no ser así se previó que la guía debía ser modificada. Hecha la revisión del test temático y la Encuesta no se le hicieron cambios a la guía que se tenía diseñada y fue presentada a los estudiantes para su desarrollo en una sesión. Para involucrar al estudiantado en el estudio de los conceptos incluidos en la guía se desarrolló un taller relacionado con éstos el cual ocupó varias sesiones con distintas estrategias, una de ellas era la entrega, de forma individual, de la solución de algunos puntos distintos; la otra era el trabajo en grupos de tres personas quienes resolvían varios puntos de la guía, y un representante escogido al azar sustentaba un punto escogido por la practicante o docente; además, para esta última actividad, había reconocimiento para los primeros tres grupos que realizaran la tarea correctamente y se les exoneraba de la sustentación.

Seguidamente para continuar con la actividad docente, en la presentación del Puzzle Algebraico, ítem c, se usaron unas fichas hechas en material de cartulina, estas tenían la forma de dos cuadrados y dos rectángulos no congruentes tales que al hacer un arreglo adecuado formaban un cuadrado. La presentación de estas fichas se dio porque se tenía planeado hacer las factorizaciones posteriores con el uso de ellas como herramientas, aunque finalmente se cambió de estrategia y estas fichas sirvieron únicamente para la presentación del Puzzle. La familiarización de los estudiantes con esta herramienta se dio mediante la ejercitación, la cual consistía en obtener dos expresiones algebraicas equivalentes que representaran el área del cuadrilátero finalmente formado.

Posteriormente para el desarrollo del ítem d, se trabajó la factorización de trinomios de la forma $x^2 \pm 2xa + a^2$, $x^2 \pm bx \pm c$, $ax^2 \pm bx \pm c$ y diferencia de cuadrados sin profundizar en esta última, haciendo uso del Puzzle Algebraico como herramienta, pero esta ya no se manipulaba físicamente sino que se construían para cada caso las representaciones geométricas requeridas que permitieran hacer una determinada composición de esas figuras geométricas, rectángulos y cuadrados, para llegar a construir otros cuadrados o rectángulos a partir de los iniciales, y conseguir con esa composición la representación del área de los iniciales y nuevos rectángulos, mediante expresiones algebraicas distintas. Para estimular el aprendizaje en los estudiantes se trabajaban talleres en cada clase sobre la factorización algebraica mencionada anteriormente incluidas tareas escritas, pruebas escritas, y salidas al tablero.

Debemos agregar que toda la actividad docente se desarrollo en 13 sesiones, desde el 14 de abril de 2015 hasta el 10 de noviembre del mismo año, sesiones que se vieron interrumpidas por muchas situaciones cotidianas de la vida escolar como el paro de docentes que se llevó a cabo desde el mes de abril hasta el mes de mayo, izadas de bandera, presentación de pruebas, reunión de padres, entrega de boletines, y en caso de que faltara el agua en el colegio estas sesiones se suspendían por ser las últimas de la jornada, entre otras situaciones. De igual manera se habían planeado menos sesiones pero debido a los recurrentes actos de indisciplina y las consecuencias por las situaciones descritas anteriormente, estas se extendieron. Ahora, respecto a los actos de indisciplina, a estos se les dio manejo llegando a acuerdos con los estudiantes; de igual manera las conversaciones y acercamiento permanente con los estudiantes, permitió reconocer el desinterés y apatía presentada por algunos estudiantes en algunas clases, pero esto también se logró manipular satisfactoriamente ya que se hicieron reuniones particulares para interactuar con los involucrados para encontrar la dificultad y lograr la motivación en ellos. Una de las clases a resaltar, en la cual se vio el desánimo fue cuando se empleó el modelo tradicional en el desarrollo de unos conceptos, pero se les animó a seguir debido a la necesidad del desarrollo de estos. Otro de los actos que no debemos ignorar es el manejo de situaciones, como fue el caso del accidente de una joven, quien al ir corriendo por los pasillos para dirigirse al salón, uno de los compañeros la empujó y cayó sobre una puerta de madera y vidrio causándole cortaduras en la mano derecha; frente a la situación la practicante sale y ya llevaban a la joven hacia la enfermería, al mismo tiempo sale la profesora de filosofía del salón de enfrente a ver qué situación estaba sucediendo, la practicante se dirige a ella comunicándole lo sucedido, le comentó también que estaba haciendo la práctica pedagógica en la institución y le dice que no sabe cómo manejar la situación, la docente de filosofía le indica que en estos casos se debe comunicar al director de curso y al coordinador de disciplina, pero al mismo tiempo ella dice que se encargará de estos trámites y le sugiere a la practicante que regrese al salón para que la clase no se salga de control y pueda continuar con esta, así sabiendo que la joven iba a ser atendida, se sigue la sugerencia de la docente.

Capítulo 2. Docencia directa

2.1. Modelo de enseñanza

El proceso de enseñanza que realiza cada docente en un aula de clases es muy variante día a día y curso a curso, entre otras razones porque cada individuo involucrado en un aula es un ser humano cambiante por naturaleza, inconforme y de estados afectivos, emocionales o actitudinales en permanente transformación; consideraciones que debemos tener muy en cuenta ya que como docentes de cualquier área no solo de las matemáticas, tenemos que desarrollar habilidades de liderazgo basadas en distintas técnicas propias de los psicólogos, sociólogos o antropólogos. El acto de enseñar no lo podemos predeterminar y establecer fijamente a través de un único procedimiento debido a que éste es variante, sin embargo podemos establecer unas bases que se fundamentan en los modelos pedagógicos que relacionan el tipo de metas que buscamos con la enseñanza, los métodos implicados en ella, las relaciones que se promueven entre los actores del sistema didáctico y el desarrollo del conjunto de actividades de aprendizaje propuestas. Así pues en la docencia directa que se llevó a cabo en la IE-ENSP se utilizaron distintos modelos de enseñanza, esto debido a las necesidades que se vieron reflejadas en distintos momentos, por ejemplo según Torres (Torres, 2009):

- El modelo tradicional caracterizado por la trasmisión solo de información donde el docente es el ente central y quien implanta las normas en el aula, y donde el estudiante pasa a ser solo un individuo pasivo receptor de esa información. Este modelo fue empleado en el desarrollo de dos sesiones en particular, en las que se necesitaban desplegar y/o aclarar unos conceptos algebraicos previos a la factorización y extensión de productos notables.

- El modelo conductista caracterizado por la fijación y control de los objetivos a lograr, y el adiestramiento del estudiante hacia el aprendizaje se da mediante instrucciones del docente lo cual se reconoce como condicionamiento operante. Este modelo se vio reflejado en la introducción al Puzzle Algebraico, porque inicialmente se le entregaron unas fichas que componen el Puzzle y se dieron instrucciones previamente seleccionadas y organizadas para el entendimiento de la herramienta.
- El modelo constructivista fue el que más se reflejó en la intervención pedagógica en la ENSP, ya que se tenían consideraciones sociales observables de los estudiantes para facilitarles la construcción de su propio conocimiento, reconociendo que cada individuo en único y su aprendizaje también pero perteneciente a una sociedad; por esto se hacían pequeños seguimiento para comprender la condición del estudiante. Este seguimiento consistía en la observación del comportamiento dentro y fuera del aula pero dentro de la institución, se hizo acercamiento a los individuos, observación en la atención y actitudes en cada clase y observación en las evaluaciones (Modelo Constructivista, 2012).

De esta manera podemos afirmar que el desarrollo del proyecto de intervención apoyado por la herramienta del Puzzle Algebraico no se puede caracterizar bajo las condiciones de un único modelo pedagógico, ya que los procesos se manejaron de distintas maneras de acuerdo a la necesidad como se dijo anteriormente. Es decir que este proceso se llevó a cabo con la combinación de los modelos tradicional, conductista y constructivista; sin embargo no podemos decir que estos fueron los únicos, porque en algunas actividades escolares aunque poco relevantes se tomaron ideas de otros modelos y se articularon con las ideas principales de los modelos más notables.

Se pudo apreciar que el proceso de la enseñanza desarrollado siguió un derrotero que se denomina Paradigma del Ejercicio, porque la actividad realizada inicia con la presentación de una definición, le sigue la explicación a través de ejemplos y posteriormente se formulan ejercicios para que se produzca la práctica matemática de los estudiantes. De igual manera se puede evidenciar este paradigma en su pleno desarrollo cuando se les presenta a los estudiantes los tres casos de trinomio, se les enseña a identificarlos con ejemplos y posteriormente se les hace enfrentar a la situación de resolución de ejercicios en clase.

2.2. Desarrollo de la enseñanza.

Al inicio de la docencia directa se vio la necesidad de hacer un introductorio a los estudiantes para conocer la condición que tenían a cerca de saberes previos y aprendizaje significativo adquirido, para esto se desarrolló en una sesión lo que se llamó Conducta de Entrada (ver Anexo 2) donde los estudiantes fueron interrogados a cerca de conceptos básicos de algebra; mediante este cuestionario se les examinó sobre nociones como variable, polinomio, grado de un polinomio, constante, factor, entre otros; y junto a lo anterior se aplicó una Encuesta de auto-reconocimiento (ver Anexo 3) de sus saberes.

Basados en los resultados obtenidos de lo anterior se dio paso al estudio de los conceptos básicos reflejados en el documento que hemos denominado Familiarización y Aclaración de Saberes Previos (ver Anexo 4); en esa ocasión se había planeado desarrollarlas 20 temáticas matemáticas en una sesión, sin embargo dado los inconvenientes surgidos en el aula se decide tratar solo los conceptos más relevantes desplegados en dos sesiones académicas. Por otra parte luego de precisar los conceptos básicos y ejemplificar cada uno de ellos, se propone la realización de un taller práctico, pero debido a los eventos extra-curriculares hubo ruptura en la continuidad de las clases, generando esto un desequilibrio que implicó retomar nuevamente las nociones tratadas con anterioridad. Finalmente el taller pudo ser desarrollado pero para ello se dividió en tres partes, que fueron resueltas con trabajo grupal en clase y trabajo individual en casa. De lo anterior se generaron 6 notas cuantitativas correspondientes a 6 sesiones, aunque inicialmente en la planeación se había previsto la realización de solo dos sesiones.

Nuevamente debido a inconvenientes presentados en la institución hubo una prolongada interrupción de la actividad de la practicante, que luego de ser superados permitieron hacer la presentación del Puzzle Algebraico y sus reglas de uso, pero debido a nuevos inconvenientes de aula se decide presentar el Puzzle sin las reglas de manipulación, de esta manera solo se les entregó a los estudiantes dos fichas cuadradas no congruentes y dos rectángulos en material de cartulina. Sin embargo al entregarles las fichas y sin darles las instrucciones aún, algunos de los estudiantes empezaron a manipular las fichas y formaron el cuadrado, luego la docente practicante empezó dándole valores aritméticos inicialmente a los lados de los cuadrados y les solicita a los estudiantes que jueguen con la fichas hasta conseguir un cuadrado. Así los que aún no habían armado el cuadrado lo hicieron, pero algunos a pesar de indicarles que debían darle valores a cada lado y luego organizarlas, decidieron armar primero el cuadrado. Luego de la formación de un cuadrado con las fichas entregadas la practicante les muestras que los valores de los lados correspondientes a los rectángulos entregados son efectivamente, por una parte el valor del lado del cuadrado mayor y el otro lado coincide con el lado del cuadrado menor. Posteriormente todos los estudiantes resolvieron dibujar las fichas en sus cuadernos, aunque algunos conservaron las dimensiones otros las dibujaron libremente, que a su vez algunos decidieron pintarlas de forma individual, otros pintaron ya el Puzzle armado (cuadrado) y otros hicieron los dos procesos, pero procedieron finalmente junto con la docente practicante a realizar los cálculos de áreas respectivas de cada cuadrado y rectángulo, presentando el cuadrado final como se les había indicado armado con las fichas del Puzzle. Al mismo tiempo se les mostró que al sumar los dos segmentos que forman el cuadrado final, se obtiene el valor del lado correspondiente a este, así que mediante el uso de la formula usual para hallar el área de un cuadrado conseguimos el valor del área de esta figura. Finalmente se les da la libertad a los estudiantes de seguir cambiando los valores de las longitudes de los lados de las figuras, siempre con el acompañamiento de la docente practicante; luego de esto la practicante procede a introducir una variable como el valor de uno de los lados de uno de los cuadrados, esto para conseguir en consecuencia una idea inicial de los productos notables. Veamos un ejemplo con valores numéricos en la figura 4:

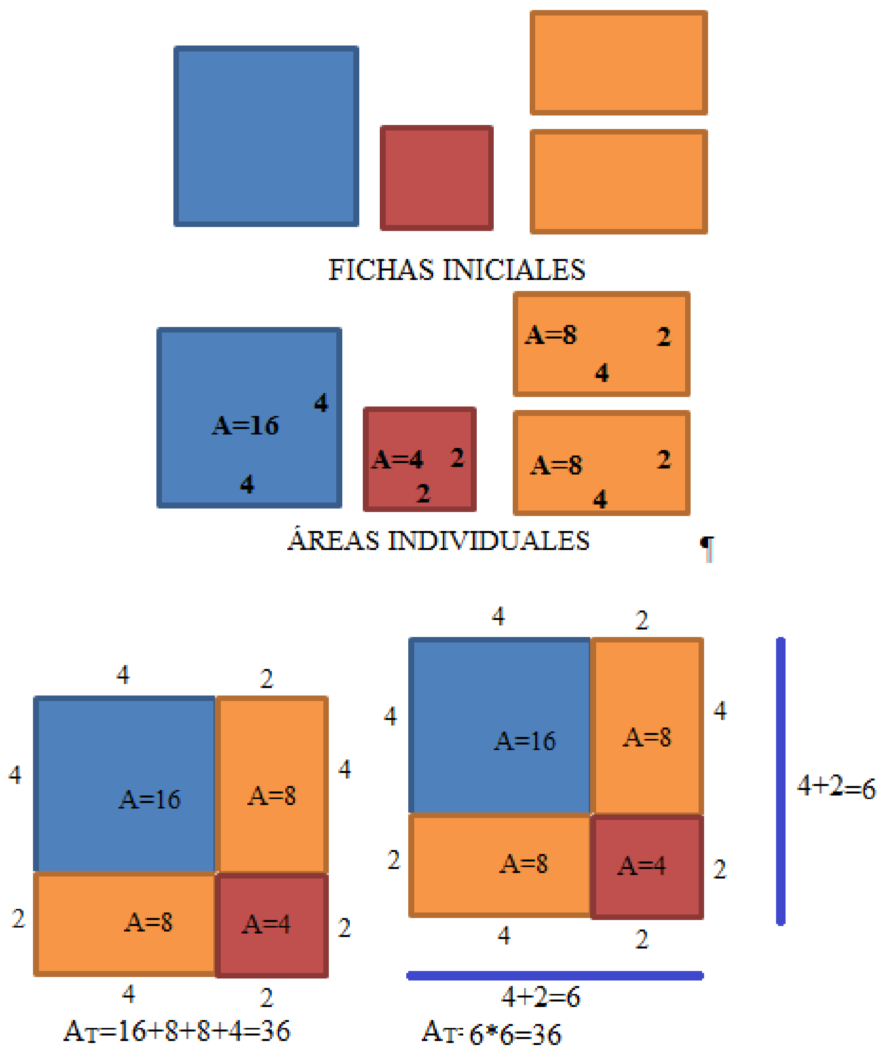


Figura 4. El Puzzle algebraico con un ejemplo particular.

Continuando con la idea de trabajar con el Puzzle en la siguiente sesión se les presentan 4 tipos de productos notables que tienen relación con polinomios de grado dos, que les llamaremos casos:

I. $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$

II. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

III. $(x \pm d)(x \pm e) = x^2 \pm bx \pm c$

IV. $(mx \pm n)(qx \pm r) = ax^2 \pm bx \pm c$

Debido a que en la anterior clase no se le dio la utilidad a las fichas se decide cambiar la estrategia considerando el desarrollo de los estudiantes en la clase anterior, donde ellos preferían dibujar en sus cuadernos los moldes que se les habían asignado y darles los valores correspondientes; se resuelve entonces aprovechar esta disposición buscando lograr los objetivos mediante instrucciones de la docente practicante, generando impulsos al desarrollo del conocimiento mediante estas órdenes. Así pues se les presentó el primer caso de los productos notables, pero a su vez este caso se dividió en dos: primer caso "positivo" si todos los coeficientes del trinomio lo son y primer caso "negativo" cuando los términos tengan signos variados; la introducción al primer caso "positivo" se dio con dos ejemplos, es decir con polinomios de la forma $x^2 + 2ax + a^2$. La presentación la hizo la docente practicante con el ejemplo $x^2 + 2xy + y^2$, dándole valores algebraicos y aritméticos a los lados del par de cuadrados (uno grande y uno pequeño) correspondientes a la raíz cuadrada del primer término para uno (x) y la raíz cuadrada del tercer término para el segundo cuadrado (y), generando de igual manera como se había dado en la sesión anterior, los valores correspondientes a los rectángulos resultantes al completar el cuadrado final a partir de los dos cuadrados iniciales. Obtenidos estos cuadriláteros se procedió a hacer el cálculo de las áreas correspondientes de los cuatro cuadriláteros, pero además, se le indica a los estudiantes que el cuadrado resultante final tiene como medida de lado igual a la suma de los segmentos que lo componen, es decir la medida del lado del cuadrado mayor más la medida del lado del cuadrado menor, es decir $(x + y)$, así se procede a calcular el área de este y se les muestra que los cuadriláteros pequeños componen el cuadrado final y no se intersecan y por tanto si suman cada sector este el área total equivale al área del cuadrado final. Y es ahí donde se les indica y se les comprueba que el trinomio inicial es igual al producto de dos binomios que representan la magnitud de dos lados del cuadrilátero final. De esta manera llega la explicación de igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde una de ellas es la factorización de la otra. Se indica que esta es una manera de resolver la factorización de este tipo de trinomios algebraicos, además se insistió que la herramienta utilizada permite saber de dónde salen los resultados "mágicos"[2] que se les ha presentado con otra metodología.

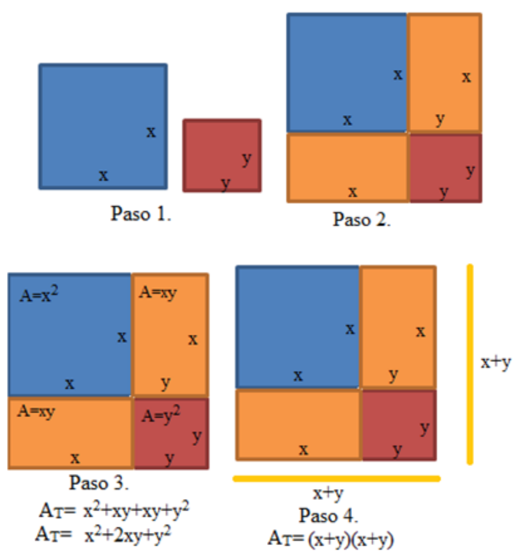


*Figura 5.*Representación de factorización del trinomio $x^2 + 2xy + y^2$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

---

[2]Cuando se refiere a resultados "mágicos", hace relación a la manera en que se enseña y se aprende de manera tradicional y mecánica a resolver este tipo de trinomio $x^2 \pm 2ax + a^2$ conocido como trinomio cuadrado perfecto o inversamente el producto notable $(x \pm a)^2$.

Después de realizar la primera tarea la practicante además les indica que el resultado es un trinomio cuadrado el cual cumple ciertas características: Es observable que al organizar el polinomio en forma descendente de acuerdo al grado de una variable, en este caso a x, se da que el primer y tercer término son potencias cuadradas (o potencias de dos), o dicho de otra forma, se les puede extraer la raíz cuadrada de forma exacta y por otro lado al multiplicar estas dos raíces por 2 obtendremos el segundo término; a este tipo de trinomios se le conoce como trinomio cuadrado perfecto, así:

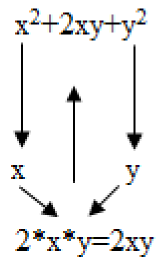


Figura 6. Identificación de las características del polinomio $\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$.

Por otra parte se les hace la apreciación que el lado del cuadrado final construido mide $x + y$, por lo anterior se mira que x es la raíz cuadrada positiva de x^2 e y es la raíz cuadrada de y^2, por tanto se puede definir que el lado del cuadrado es la suma de las raíces cuadradas del primero y tercer término, o sea $(x + y)$, pero que además si calculamos el área (A) del cuadrado final se tiene $A = (x + y) * (x + y)$, al resolver el producto aplicando la propiedad distributiva de los números reales se obtiene nuevamente el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2$, por lo tanto ya que estas dos expresiones representan la misma área se puede decir que son equivalentes. Pero además aunque se conozca la propiedad de los reales para hallar el valor de $(x + y) * (x + y)$= $(x + y)^2$ se distingue que su resultado puede ser hallado elevando su primer término al cuadrado $(x)^2$, más el producto de 2 por los dos términos obtenidos secundariamente $(2 * x * y)$ más el segundo término al cuadrado $(y)^2$, así:

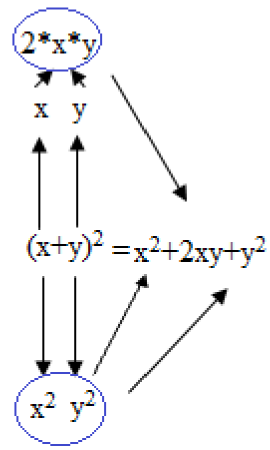


Figura 7. Construcción del trinomio $\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$ a partir de su factorización.

Lo mismo se hizo para el ejemplo $x^2 + 4x + 4$, en los dos sentidos como se muestra en las figuras 8 y 9:

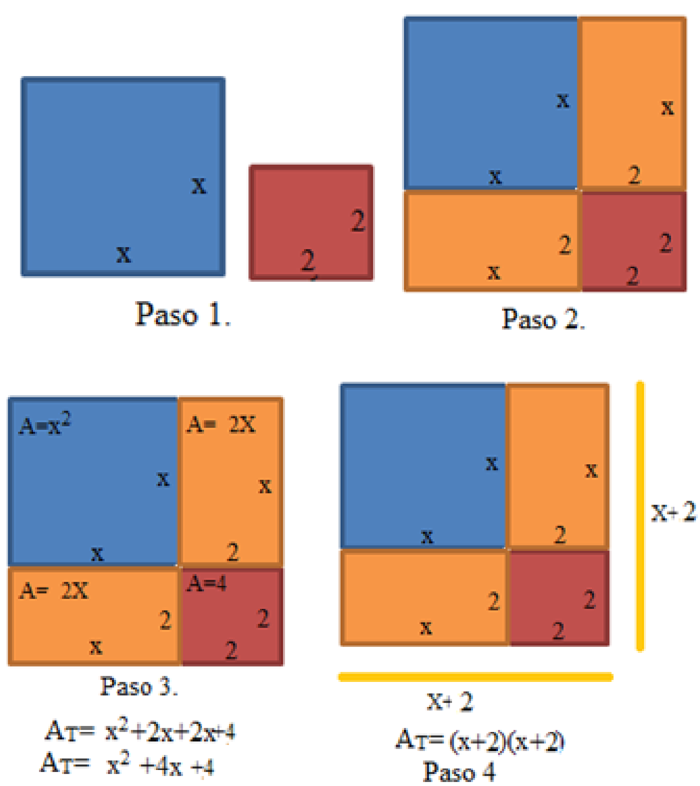


Figura 8. Representación de factorización del trinomio $\boldsymbol{x^2 + 4x + 4}$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

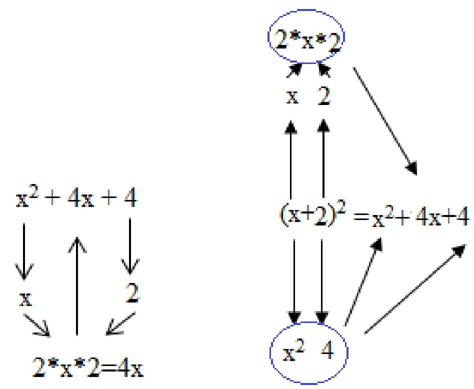


Figura 9. Identificación de las características del polinomio $\boldsymbol{x^2 + 4x + 4}$y construcción de él partir de su factorización.

Para finalizar la actividad y hacer parte del reconocimiento de los saberes adquiridos se les propone dos ejercicios para realizar en pareja y entregar al finalizar la clase, esta asignación se hace particularizada en cada pareja.

Dado que esa sesión se desarrolló en óptimas condiciones se decide seguir trabajando de esta manera, así en la siguiente sesión se continua trabajando con el primer caso de la selección dada anteriormente, pero el primer caso "negativo", es decir $x^2 - 2ax + a^2$; que al igual que en el primer caso "positivo" se dieron dos ejemplos. La inducción se hizo con el ejemplo $x^2 - 2xy + y^2$ dándole valores algebraicos y aritméticos a los lados del par de cuadrados (uno grande y uno pequeño) correspondientes a la raíz cuadrada del primer término para uno (x) y la raíz cuadrada negativa del tercer término para el segundo cuadrado $(-y)$, generando de igual manera como se había dado en la sesión anterior, los valores correspondientes a los rectángulos resultantes al completar el cuadrado final a partir de dos cuadrados iniciales; se aclara a los estudiantes que las magnitudes de los segmentos al igual que las áreas deben ser positivas, pero que este caso las consideraremos sin importar el "signo" de la expresión algebraica o aritmética, dado que aquí usamos este mecanismo solo como herramienta de factorización; luego de esta indicación teniendo estos cuadriláteros se procedió a hacer el cálculo de las áreas correspondientes a los cuatro cuadriláteros; pero además se le indica a los estudiantes que el cuadrado resultante final tiene como medida de lado igual a la suma (resta) de los segmentos que lo componen, es decir la medida del lado del cuadrado mayor mas (menos) la medida del lado del cuadrado menor $(x + (-y)) = x - y$, así se procede a calcular el área de este y se les muestra que los cuadriláteros pequeños componen el cuadrado final y no se intersecan entre sí, por tanto si suman cada sector de este, el área total equivale al área del cuadrado final. Y es ahí donde se les indica y se les comprueba que el trinomio inicial es igual al producto de dos binomios que representan la magnitud de dos lados del cuadrilátero final, tal como se calcula el área para estos. De esta manera se llega a la explicación de la factorización de trinomios algebraicos mostrando la igualdad entre las dos expresiones algebraicas que representan las dos áreas equivalentes construidas en el ejercicio de la docencia de la practicante.

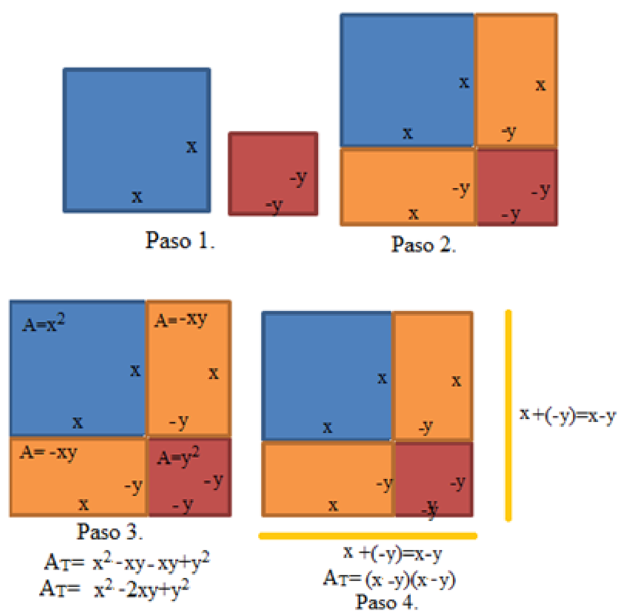


Figura 10. Representación de factorización del trinomio $x^2 - 2xy + y^2$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

Después de realizar esta actividad de enseñanza la docente practicante les indica que el resultado obtenido es un trinomio cuadrado, que cumple salvo el signo del segundo término de la expresión algebraica, las mismas características del trinomio cuadrado perfecto del primer caso "positivo": Al organizar el polinomio en forma descendente respecto al grado de una variable, en este caso x, se da que el primer y tercer término son potencias cuadradas (o potencias de dos), o dicho de otra forma se les puede extraer la raíz cuadrada de forma exacta; pero es de recordar para este caso que la raíz cuadrada puede ser positiva o negativa, y que al igual cumple la condición de que este valor elevado al cuadrado da el radicando, es por esto que es válido para nuestro este tipo de ejercicios considerar la raíz cuadrada negativa (-y); así al proceder de igual forma que en el primer caso "positivo", se halla que al multiplicar estas dos raíces del tercer y primer término por 2, se obtendrá el segundo término $(2 * x * (-y)) = -2xy$, a este tipo de trinomios también se les conoce como trinomio cuadrado perfecto, así:

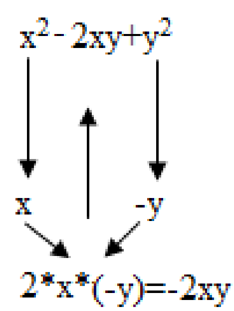


Figura 11. Identificación de las características del polinomio $\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2}$.

Por otra parte se les hace la apreciación que el lado del cuadrado final construido mide $x + (-2) = x - 2$, por lo anterior se mira que x es la raíz cuadrada positiva de x^2 e $-y$ es la raíz cuadrada negativa de y^2, dado que $(-y)(-y) = y^2$, por tanto se puede definir que el lado del cuadrado es la suma (resta) de las raíces cuadradas positiva y negativa respectivamente del primero y tercer término, pero que además si calculamos el área (A) del cuadrado nuevo construido, se tiene $A = (x - y) * (x - y)$ que al resolver el producto aplicando la propiedad distributiva de los números reales se obtiene nuevamente el trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 2xy + y^2$, por lo tanto ya que estas dos expresiones representan la misma área se puede decir que son equivalentes. Pero además aunque se conozca la propiedad de los reales para hallar el valor de $(x - y) * (x - y)$= $(x - y)^2$ se distingue que su resultado puede ser hallado elevando su primer término al cuadrado $(x)^2$, más el producto de 2 por los dos términos hallados secundariamente $(2 * x * (-y)) = -2xy$ más el segundo término al cuadrado $(-y)^2$, así:

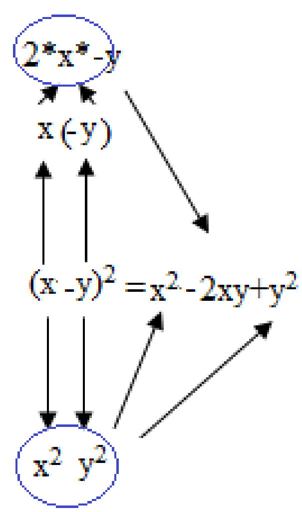


Figura 12. Construcción del trinomio $\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2}$ a partir de su factorización.

El mismo mecanismo es usado para el ejemplo $x^2 - 4x + 4$, tal como se muestra en las figuras 13 y 14.

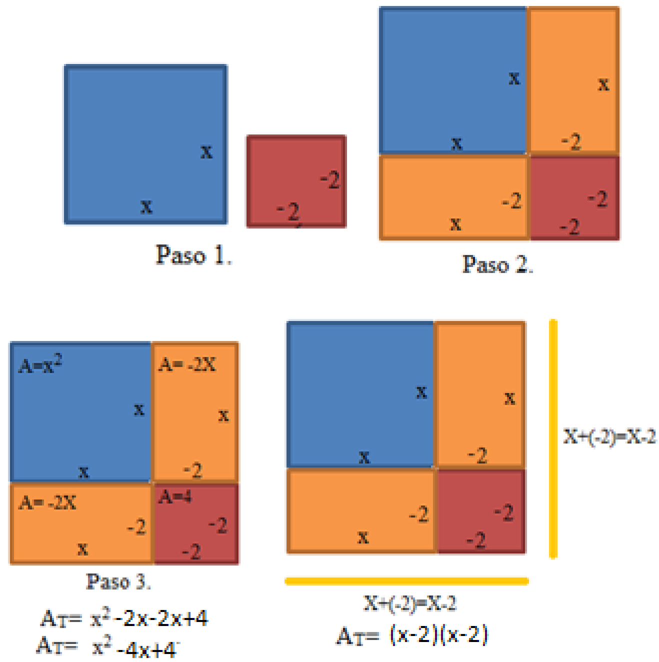


Figura 13. Representación de factorización del trinomio $x^2 - 4x + 4$ mediante el uso del Puzzle Algebráico.

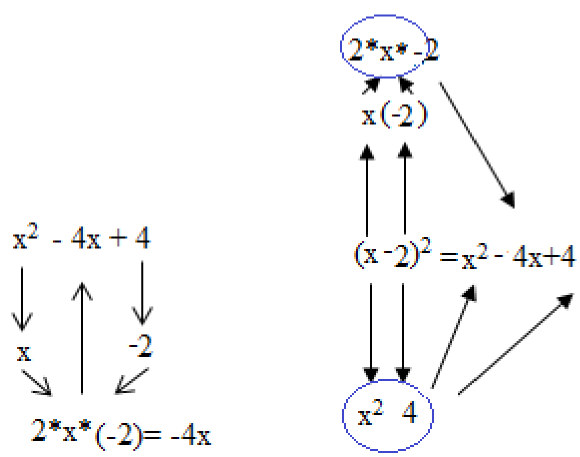


Figura 14. Identificación de las características del polinomio $x^2 - 4x + 4$ y construcción de él partir de su factorización.

Así luego se realiza una actividad en clase donde ellos resuelvan ciertos ejercicios de este tipo, usando esta metodología buscando agilizar y fortalecer esta habilidad específica del estudiante. Es de resaltar que al final de la sesión uno de los estudiantes reconoció que fue motivante saber de dónde salían los signos + y – que le habían enseñado, en este caso de factorización con la metodología tradicional. Es de añadir que todo esto se dio con el acompañamiento de la docente practicante, quien se dotaba del modelo constructivista para usar los conocimientos que tenían los estudiantes y articularlos en la creación de nuevos que se convirtieran en significativos.

A la semana siguiente de la anterior sesión se continuo con el segundo caso de la selección dada con anterioridad, es decir polinomios de la forma $x^2 - a^2$, aunque este caso estaba organizado en la secuencia luego del desarrollo de los trinomio, se decide abordar este teniendo en cuanta la complejidad mayor de los siguientes casos.Así al igual que los casos anteriores se desarrolló la clase dando dos ejemplos, se hizo la presentación con el ejemplo $x^2 - 25$, dándole valores algebraicos a los lados de los cuadrados (uno grande y uno pequeño), correspondientes a la raíz cuadrada positiva del primer término (x) y a la raíz cuadrada del segundo término sin considerar el signo (5), dado que en el cuadrado pequeño para uno de sus lados debemos tomar este valor positivo de la raíz (5) y para otro lado no opuesto a este valor negativo (-5); para posteriormente darle los valores a los lados de los rectángulos resultantes al completar el cuadrado final a partir de dos cuadrados iniciales; ya teniendo estos cuadriláteros se procedió a hacer el cálculo de las áreas correspondientes a los cuatro cuadriláteros, pero además se le indica a los estudiantes que el cuadrado resultante final tiene como medida de lado igual a la suma (o resta) de los segmentos que lo componen, es decir la medida del lado del cuadrado mayor más la medida del lado del cuadrado menor $(x + 5)$ y para el otro lado la medida del lado del cuadrado mayor mas (menos) la medida del lado del cuadrado menor $(x + (-5) = x - 5)$, así se procede a calcular el área de este y se les muestra que los cuadriláteros pequeños componen el cuadrado final y no se intersecan, por tanto si suman cada sector de este, el área total equivale al área del cuadrado final. Y es ahí donde se les indica y se les comprueba que la diferencia de cuadrados inicial es igual al producto de dos binomios que representan la magnitud de dos lados del cuadrilátero final, tal como se calcula el área para estos. De esta manera llega la explicación de igualdad entre dos expresiones algebraicas. Luego sintetizando se indica que esta es una manera de resolver el caso.

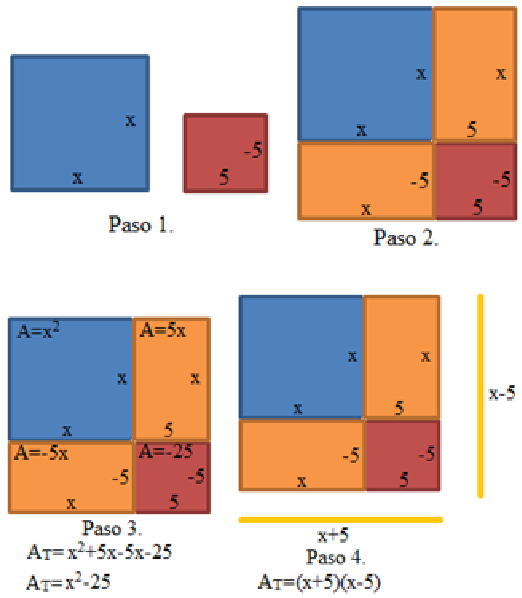


Figura 15. Representación de factorización del binomio $x^2 - 25$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

Después de realizar la primera tarea la docente practicante además les indica que el resultado es un binomio que cumple ciertas características: cada termino debe tener raíz cuadrada exacta, además a uno debe ser "positivo" y el otro "negativo", organizándose en este orden.

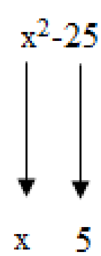


Figura 16. Identificación de las características del binomio $x^2 - 25$.

Por otra parte se les hace la apreciación que un lado del "cuadrado" final construido mide $x+5$ y el otro lado $x-5$, de lo anterior se mira que x es la raíz cuadrada positiva de x^2 y 5 es la raíz cuadrada de 25, por tanto se pueden definir la medida de un lado del cuadrado es la suma de las raíces cuadradas positivas del primer y segundo término (sin considerar el signo) $(x+5)$ y la medida del otro lado del "cuadrado" final no opuesto al anterior es la resta de las raíces cuadradas positivas del primer y segundo término (sin considerar el signo) $(x-5)$, pero que además si calculamos el área (A) es decir $A=(x+5)(x-5)$ al resolver el producto aplicando la propiedad distributiva de los números reales se obtiene nuevamente la diferencia de binomios inicial x^2-25; por lo tanto ya que estas dos expresiones representan la misma área se puede decir que son equivalentes. Pero además aunque se conozca la propiedad de los reales para hallar el valor de $(x+5)*(x-5)$ se distingue que su resultado puede ser hallado elevando el primer término de cualquier paréntesis aquí presente elevado al cuadrado $(x)^2$, menos el segundo (sin considerar el signo) de este mismo paréntesis elevado al cuadrado $(5)^2$, así:

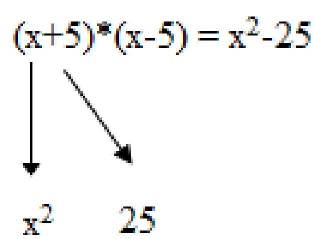


Figura 17. Construcción del binomio $\boldsymbol{x^2-25}$ a partir de su factorización.

Lo mismo se hizo para el ejemplo x^2-y^2 en los dos sentidos como se muestra en las figuras 18 y 19:

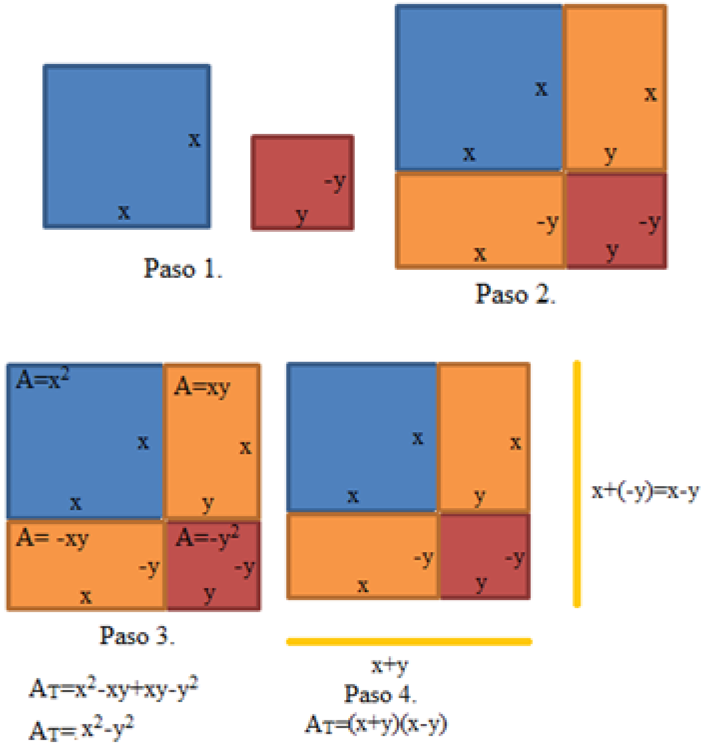


Figura 18. Representación de factorización del binomio $x^2 - y^2$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

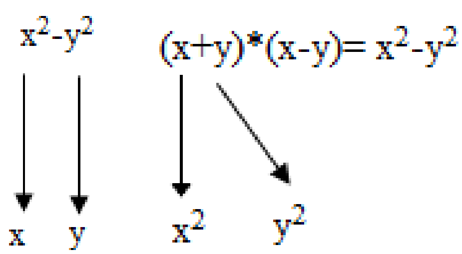


Figura 19. Identificación de las características del binomio $x^2 - y^2$ y construcción de él partir de su factorización.

Posteriormente algunos estudiantes trabajan en la resolución de ciertos ejercicios de este tipo usando esta metodología buscando con ello agilizar y consolidar sus habilidades en la factorización usando el Puzzle Algebraico, reconociéndoseles además su participación con la asignación de un punto positivo, dando por terminado el desarrollo del segundo caso.

En la siguiente actividad se trabaja con el tercer caso de la selección dada con anterioridad de los productos notables, pero a su vez este caso se dividió en dos: primer caso “positivo” si todos los coeficientes del trinomio lo son y primer caso “negativo” cuando los términos tengan signos variados; la introducción al tercer caso “positivo” se dio con dos ejemplos, es decir para polinomios de la forma $x^2 + bx + c$. Se introdujo con el ejemplo $x^2 + 5x + 6$ dándole valores algebraicos y aritméticos a los lados del par de cuadriláteros (un cuadrado y un rectángulo), a cada lado del cuadrado le corresponde entonces la raíz cuadrada del primer término del trinomio (x) y a los lados no opuestos del rectángulo se les hace corresponder dos factores, cuyo producto sea el tercer término y cuya suma sea igual al coeficiente del segundo término $(2\ y\ 3)$. Acción que genera los valores correspondientes a los rectángulos resultantes que permiten completar el cuadrado final a partir de dos cuadriláteros iniciales. Teniendo estos polígonos se procedió a hacer el cálculo de las áreas correspondientes a los cuatro cuadriláteros, pero además se le indica a los estudiantes que el rectángulo resultante final tiene como medida de lado igual a la suma de los segmentos que lo componen, es decir la medida un lado de dicho rectángulo final es la medida del lado del cuadrado más la medida de un lado del rectángulo inicial $(x + 3)$ y la medida del otro lado del rectángulo final se consigue con la medida del cuadrado inicial más la medida otro lado del rectángulo no opuesto al anteriormente tomado $(x + 2)$, así se procede a calcular el área de este y se les muestra que los cuadriláteros pequeños componen el cuadrado final y no se intersecan entre sí, por tanto se suman las áreas de cada sector y el área total equivale al área del rectángulo final. Y es ahí donde se les indica y se les comprueba que el trinomio inicial es igual al producto de dos binomios que representan la magnitud de dos lados del cuadrilátero final, tal como se calcula el área para estos. De esta manera llega la explicación de igualdad entre dos expresiones algebraicas.

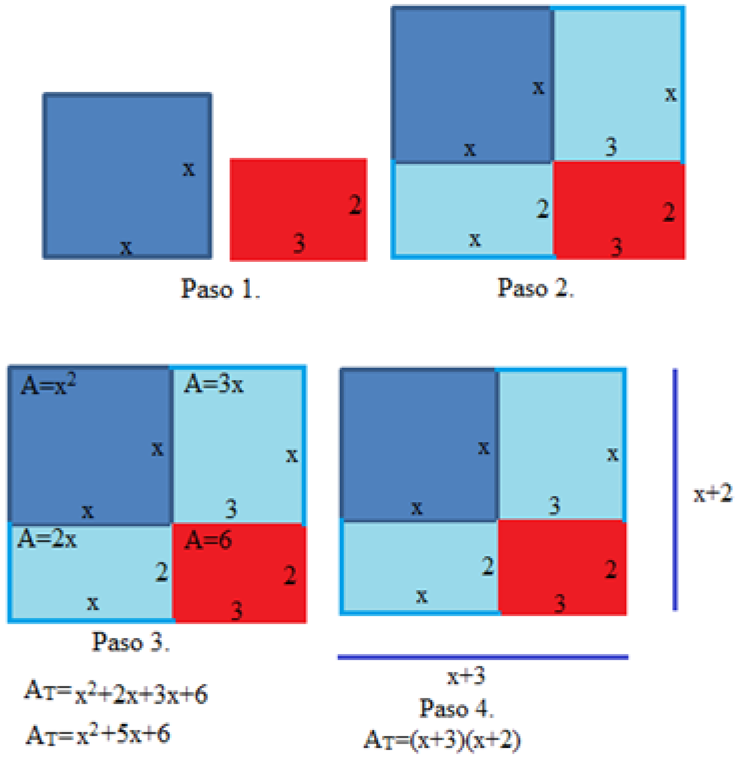


Figura 20. Representación de factorización del trinomio $\boldsymbol{x^2+5x+6}$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

Después de realizar esta tarea la docente además les indica que el resultado es un trinomio cuadrado que cumple las siguientes características: Al organizar el polinomio en forma descendente respecto al grado de una variable, en este caso x, se da que el primer término es una potencia cuadrada (o potencia de dos), o dicho de otra forma se le puede extraer la raíz cuadrada de forma exacta, pero el tercer término no tiene esta caracterización; estos trinomios tiene la forma $x^2 + bx + c$.

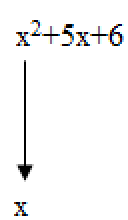


Figura 21. Identificación de las características del trinomio $\boldsymbol{x^2+5x+6}$.

Por otra parte se les hace la apreciación que dos lados del rectángulo final construido miden $x + 3$ y $x + 2$ respectivamente, por lo anterior se mira que x es la raíz cuadrada positiva de x^2 y $(2\ y\ 3)$ son los factores que nos dan el término numérico del trinomio, $2 * 3 = 6$ y que sumados nos da el coeficiente del segundo término, $2 + 3 = 5$, por tanto se puede definir que las medida de los lados del rectángulo final son, por un lado la suma de la raíz cuadrada positiva del cuadrado inicial con el valor de un lado del rectángulo inicial resultando $(x + 2)$, y por el otro lado la suma del valor del lado del cuadrado inicial y el otro valor del lado del rectángulo inicial resultando $(x + 3)$. Si calculamos el área (A) tendríamos $A = (x + 2) * (\ x + 3)$ producto que se resolver aplicando la propiedad distributiva de los números reales y se obtiene nuevamente el trinomio inicial $x^2 + 5x + 6$, por lo tanto ya que estas dos expresiones representan la misma área se puede decir que son equivalentes. Pero además que aunque se conozca la propiedad de los reales para hallar el valor de $(x + 2\ ) * (x + 3)$ se distingue que su resultado puede ser hallado elevando su primer término al cuadrado $(x)^2$, más el producto de la raíz cuadrada del primer término (2) y la suma de los segundos términos de los paréntesis $(2 + 3)$, es decir $(5x)$, más el producto de los segundos termino $2 * 3 = 6$, así:

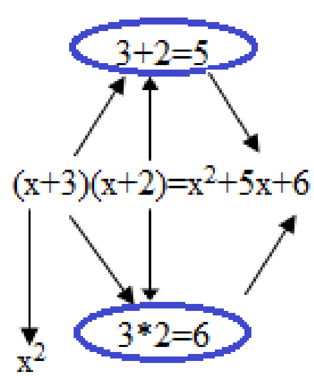


Figura 22. Construcción del trinomio $\boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$ a partir de su factorización.

El mismo mecanismo es usado para el ejemplo $x^2 + 6x + 5$ tal como se muestra en la figura 23 y 24.

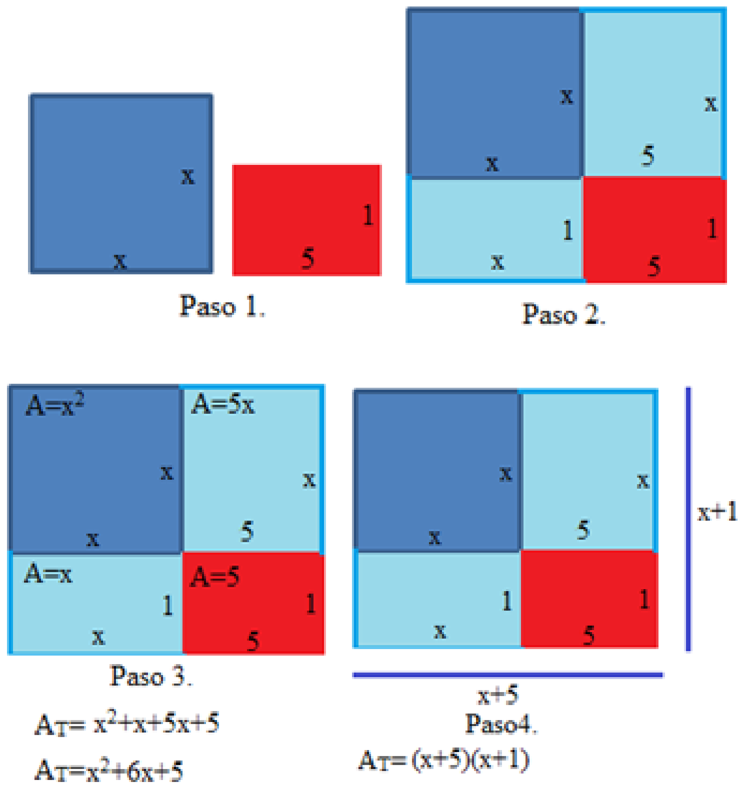


*Figura 23.*Representación de factorización del trinomio $\boldsymbol{x^2+6x+5}$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

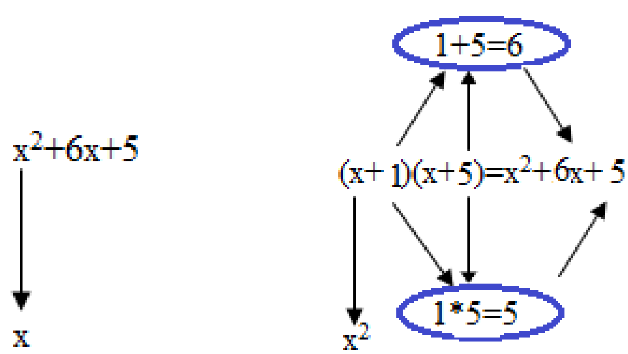


Figura 24. Identificación de las características del trinomio $\boldsymbol{x^2+6x+5}$ y construcción de él partir de su factorización.

No se alcanzó a hacer una actividad mayor de ejercitación con los estudiantes, debido a un accidente de una estudiante que interrumpió la dinámica alcanzada, en consecuencia se concluyó de esta manera la sesión, anunciando que se desarrollarán los casos faltantes en la próxima sesión y de igual manera se hará examen final dado que no hay más tiempo.

Luego de tres semanas y media de interrupción de la intervención pedagógica se retoma la sesión haciendo ejercicios del tercer caso “positivo”, es decir polinomios de la forma $x^2 + bx + c$, se comienza con la misma mecánica que se venía trabajando con este caso al ejemplo $x^2 + 7x + 12$, es decir se empezó a darle valores algebraicos al cuadrado y al rectángulo iniciales, para darle posteriormente los valores a los lados de los rectángulos resultantes. Para posteriormente calcular el “área” de cada cuadrilátero como se muestra en las figuras 25 y 26:

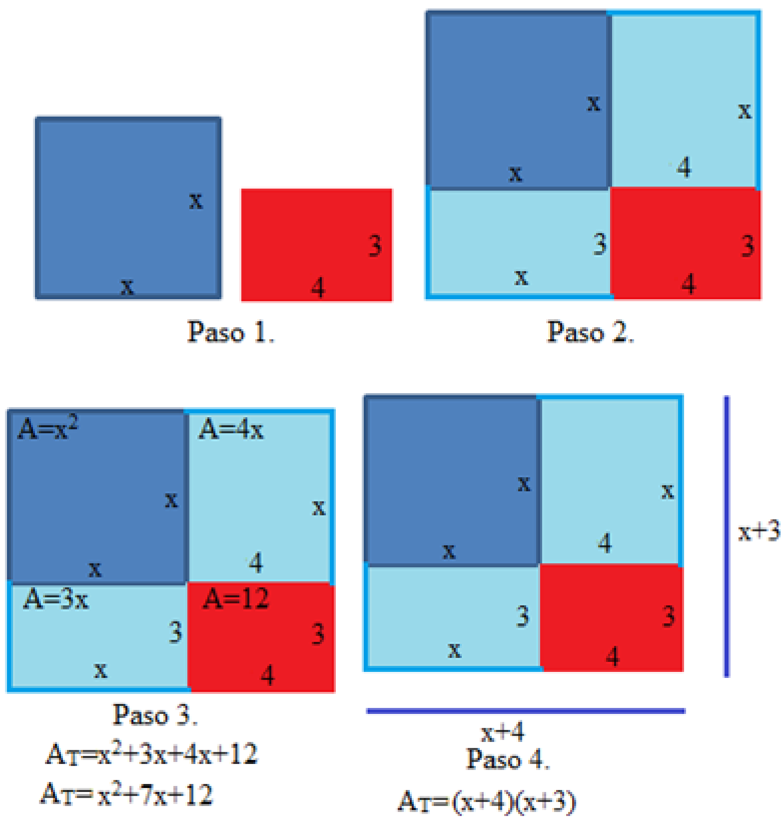


Figura 25. Representación de factorización del trinomio $\boldsymbol{x^2 + 7x + 12}$ mediante el uso del Puzzle Algebraico.

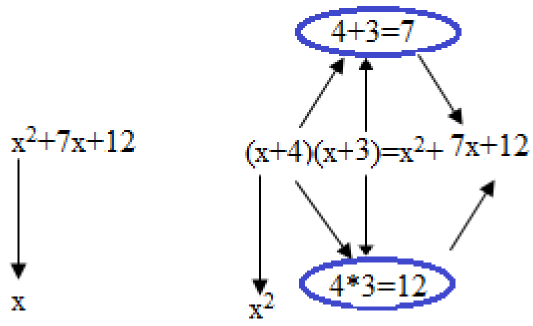


Figura 26. Identificación de las características del trinomio $\boldsymbol{x^2+7x+12}$ y construcción de él partir de su factorización.

Como ya se había trabajado este caso entonces junto a él se introdujo el tercer caso "negativo", es decir polinomios de la $x^2 \pm bx \pm c$; y dado el poco tiempo que se tenía disponible, se presenta solo el ejemplo $x^2 - 5x + 6$, dándole valores algebraicos y aritméticos a los lados del par de cuadriláteros (un cuadrado y un rectángulo), a cada lado del cuadrado le es correspondida la raíz cuadrada del primer término (x) y a dos lados no opuestos del rectángulo le son correspondidos dos factores cuyo producto sea el tercer término y cuya suma (resta) sea igual al coeficiente del segundo término $(-3\ y -2)$, generando los valores correspondientes a los rectángulos resultantes al completar el cuadrado final a partir de dos cuadriláteros iniciales; de esta manera teniendo estos polígonos se procedió a hacer el cálculo de las áreas correspondientes a los cuatro cuadriláteros; pero además se le indica a los estudiantes que el rectángulo resultante final tiene como medida de lado igual a la suma (resta) de los segmentos que lo componen, es decir la medida de un lado de dicho rectángulo es la medida del lado del cuadrado más (menos) la medida de un lado del rectángulo inicial $(x + (-3) = \ x - 3)$ y la medida del otro lado del rectángulo final se consigue con la medida del cuadrado inicial más (menos) la medida otro lado del rectángulo no opuesto al anteriormente tomado $(x + (-2) = \ x - 2)$, así se procede a calcular el área de este y se les muestra que los cuadriláteros pequeños componen el cuadrado final y no se intersecan entre sí, por tanto si suman cada sector el área total equivale al área del rectángulo final. Y es ahí donde se les indica y se les comprueba que el trinomio inicial es igual al producto de dos binomios que representan la magnitud de dos lados no opuestos del cuadrilátero final, tal como se calcula el área para estos. De esta manera llega la explicación de igualdad entre dos expresiones algebraicas.

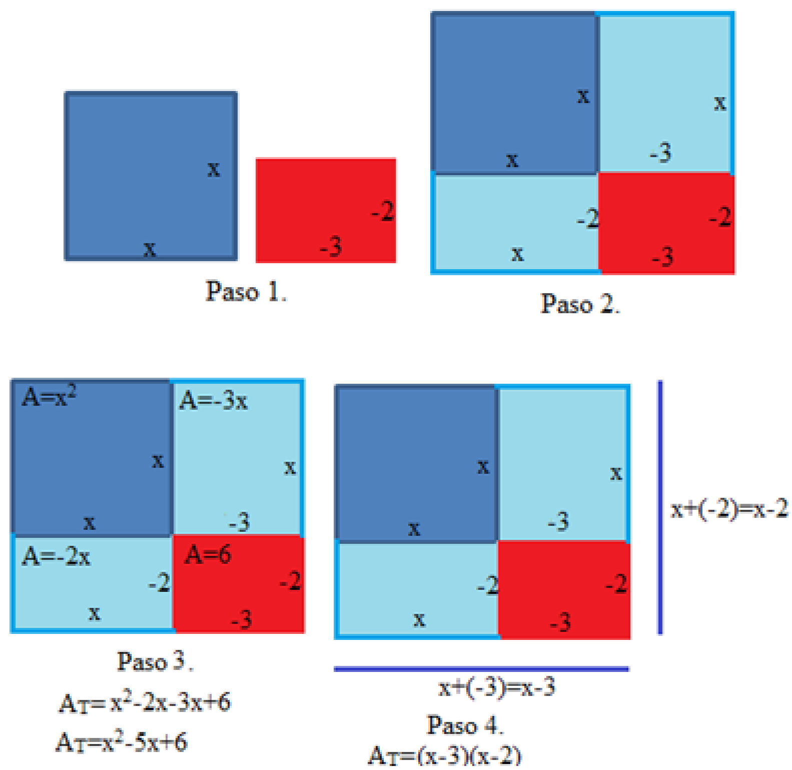


Figura 27. Representación de factorización del trinomio $x^2 - 5x + 6$ mediante el uso del Puzzle Algebráico.

Después de realizar la anterior actividad matemática la docente les indica a los estudiantes que el resultado es un trinomio cuadrado que cumple las siguientes características: Al organizar el polinomio en forma descendente de acuerdo al grado de una variable, en este caso x se da que el primer término es una potencia cuadrada (o potencia de dos), o dicho de otra forma se le puede extraer la raíz cuadrada de forma exacta, pero el tercer término no tiene esta caracterización; estos trinomios tiene la forma $x^2 \pm bx \pm c$

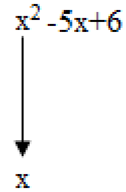


Figura 28. Identificación de las características del trinomio $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6}$.

Por otra parte se discute con los estudiantes que los dos lados del rectángulo final construido miden $x - 3$ y $x - 2$ respectivamente, por lo anterior se mira qué x es la raíz cuadrada positiva de x^2 y $(-2\, y\ -3)$ son los factores que nos dan $(-2 * -3 =\ 6)$ y $(-2 - 3 =\ -5)$, por tanto se puede definir que las medida de los lados del rectángulo final son, por un lado es la suma de la raíz cuadradas positiva del cuadrado inicial más un el valor de un lado del rectángulo inicial $(x + (-3)) = (x - 3)$, y el otro lado se obtiene con la suma del valor del lado del cuadrado inicial y el otro valor del lado del rectángulo inicial $(x + (-2)) = (x - 2)$, pero además si calculamos el área (A) de este, es decir $A = (x - 3) * (x - 2)$ que al resolver el producto aplicando la propiedad distributiva de los números reales se obtiene nuevamente el trinomio inicial $x^2 - 5x + 6$, por lo tanto ya que estas dos expresiones representan la misma área se puede decir que son equivalentes. Pero además aunque se conozca la propiedad de los reales para hallar el valor de $(x - 3) * (x - 2)$ se distingue que su resultado puede ser hallado elevando su primer término al cuadrado $(x)^2$, más el producto de la raíz cuadrada del primer término y la suma (resta) de los segundos términos de los paréntesis $(-3) + (-2) =\ -3 - 2 =\ -5)$, es decir $(x * (-5)) = (-\,5x)$, más el producto de los segundos termino $((-3) * (-2) =\ 6)$, así:

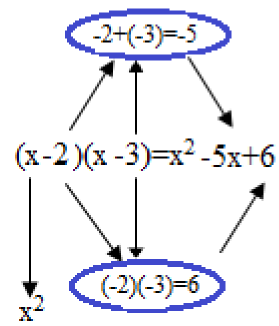


Figura 29. Construcción del trinomio $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6}$ a partir de su factorización.

A continuación se introduce del mismo modo el cuarto caso es decir polinomios de forma $ax^2 \pm bx \pm c$ con el ejemplo $2x^2 + x - 15$, dándole valores algebraicos y aritméticos a los lados del par de rectángulos, a cada par de lados no opuestos del primer rectángulo se les asigna un par de factores que al multiplicarlos generen el primer término $(2x\ y\ x)$, a dos lados no opuestos del segundo rectángulo se le asignan un par de factores tal que al multiplicarlos se genere el tercer término $(3\ y\ -5)$, pero se aclara en este caso hay varias posibilidades y la que se escoja se debe verificar más adelante; al asignarle estos valores a estos rectángulos iniciales, se generaron los valores correspondientes a los rectángulos resultantes al completar el cuadrado final a partir de dos rectángulos iniciales; de esta manera teniendo estos polígonos se procedió a hacer el cálculo de las áreas correspondientes a los cuatro cuadriláteros, aquí se verificó que la suma (resta) de los dos rectángulos generados adicionalmente a partir de los dos iniciales para completar el rectángulo final, da efectivamente el segundo término $(6x + (-5x) = x)$ (de no haber sido así se debían buscar otros factores y proceder de igual forma hasta este punto); luego de esto se le indica a los estudiantes que el rectángulo resultante final tiene como medida de lado igual a la suma (resta) de los segmentos que lo componen, es decir la medida de un lado de dicho rectángulo es la medida de un lado del primer rectángulo inicial más la medida de un lado del segundo rectángulo inicia $(x + 3)$, y la medida del otro lado del rectángulo final se consigue con la medida del otro lado del primer rectángulo inicial más (menos) la otra medida del lado del segundo rectángulo inicial $(2x + (-5)) = (2x - 5)$, así se procede a calcular el área de este y se les muestra que los cuadriláteros pequeños componen el cuadrado final y no se intersecan entre sí, por tanto si suman cada sector el área total equivale al área del rectángulo final. Y es ahí donde se les indica y se les comprueba que el trinomio inicial es igual al producto de dos binomios que representan la magnitud de dos lados del cuadrilátero final, tal como se calcula el área para estos. De esta manera llega la explicación de igualdad entre dos expresiones algebraicas.

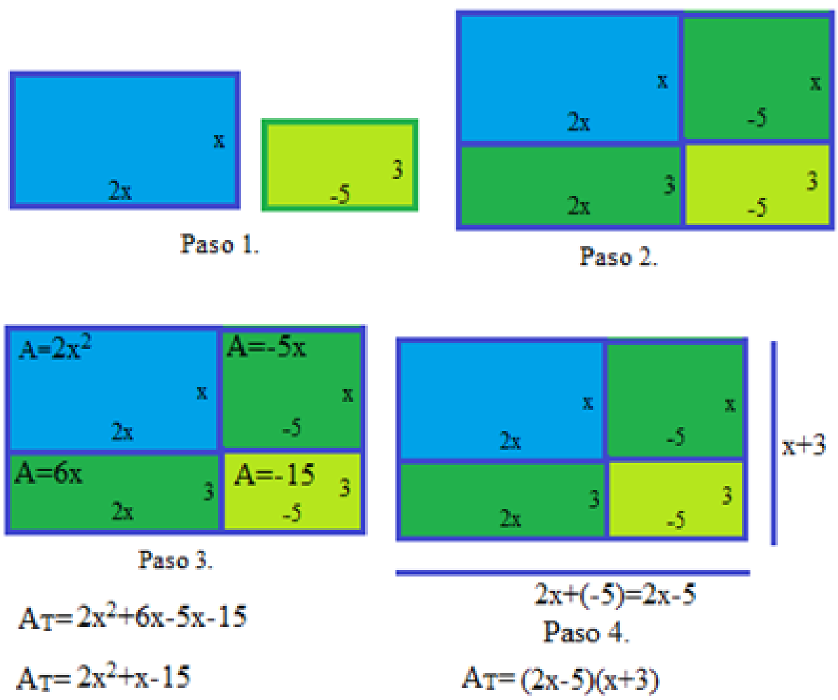


Figura 30. Representación de factorización del trinomio $2x^2 + x - 15$ mediante el uso del Puzzle Algebráico.

Después de realizar actividad la docente además les indica que el resultado es un trinomio cuadrado que cumple las siguientes características: Al organizar el polinomio en forma descendente de acuerdo al grado de una variable, en este caso x, se da que ni el primer ni el tercer término son una potencia cuadrada (o potencia de dos) o dicho de otra forma no se les puede extraer la raíz cuadrada de forma exacta, estos trinomios tiene la forma $ax^2 \pm bx \pm c$.

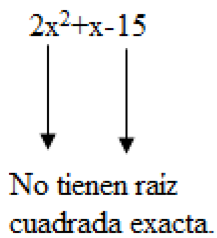


Figura 31. Identificación de las características del trinomio $\mathbf{2x^2 + x - 15}$.

Por otra parte se les hace la apreciación que dos lados del rectángulo final construido miden $x + 3$ y $(2x + (-5)) = (2x - 5)$ respectivamente, por lo anterior se mira que x y $2x$ son los factores que nos dan el primer término$x * 2x = 2x^2$, y que $3\ y\ -5$ son los factores que nos dan el tercer término $3 * (-5) = -15$, por tanto se puede definir que las medida de los lados del rectángulo final son, por una parte la suma de un lado del primer rectángulo inicial con un lado de segundo rectángulo inicial $(x + 3)$, y el otro lado se obtiene con la suma del otro valor del lado del primer rectángulo inicial y el otro valor del lado del segundo rectángulo inicial$(2x - 5)$ (aunque como se les advirtió anteriormente hay que verificar que efectivamente estos valores funcionen), pero además si calculamos el área (A) de este es decir $A = (x + 3) * (2x - 5)$ que al resolver el producto aplicando la propiedad distributiva de los números reales se obtiene nuevamente el trinomio inicial $2x^2 + x - 15$, por lo tanto ya que estas dos expresiones representan la misma área se puede decir que son equivalentes. Pero además aunque se conozca la propiedad de los reales para hallar el valor de $(x + 3) * (2x - 5)$ se distingue que su resultado no puede ser hallado con mecanismos semejantes que se emplearon en los casos anteriores, para hallar el trinomio inicial además de la ya mencionada propiedad de los reales, podía ser hallado con la representación geométrica.

A continuación se evidencia como no es posible conseguir el trinomio a partir de la factorización para este caso, tal como se hizo con los demás:

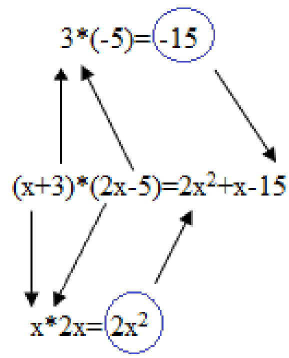


Figura 32. Intento construcción algebraicamente del trinomio $2\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x} - \mathbf{15}$ a partir de su factorización.

Posteriormente a ello se recordaron los casos anteriores haciendo un ejercicio de cada caso y mostrando que generalmente es la misma técnica para todos, y que de ahí podemos deducir los casos de factorización sin necesidad de memorizarlos. De esta manera se cierra la sesión con la realización del taller final individual donde se reconocerá parcialmente si se logró un aprendizaje significativo con esta metodología, y para esto se presentaron tres ejercicios de distintos casos, sin darles la clasificación y haciendo de esta una labor más para el estudiante.

Podemos notar de lo anterior que dada la urgencia por terminar de presentar las categorías de los trinomios y la falta de tiempo para su ejecución y actuación, no se puedo dar pausadamente como se quería, y solo toco emplear dos sesiones para desarrollar el tercer y cuarto caso.

Para dar cierre a la actividad educativa en la institución, en la sesión del 10 de noviembre de 2015 se da la oportunidad de un examen tipo nivelación para aquellos que no han asistido a otras actividades evaluativas, y que deseaban recuperar algún logro o simplemente subir el valor de la nota definitiva, pero todos desearon quedarse para presentar la prueba. Esto se llevó a cabo a cabalidad y se les agradeció profundamente por permitir el desarrollo del Proyecto Puzzle algebraico.

Cabe agregar que aunque no se halla descrito anteriormente, las clases no se tornaron solo a la elaboración de ejercicios y pruebas, al inicio de cada sesión había acercamiento a los estudiantes con un corto saludo para conocer el estado anímico, además siempre se realizaba el llamado a lista para conocer las razones y situación de los faltantes, de igual manera siguiendo los proyectos globales de la IE-ENSP, como son los de leer y escribir, dando espacio para la lectura de un diario y un acta que debían realizarse en cada sesión, los cuales recogían lo relevante de cada una de ellas, esto de acuerdo a la indicaciones del docente titular Luis Alberto Cuellar; de igual manera estaba el espacio para la participación del estudiantado con aportes, inquietudes o sugerencias. Este fue posible gracias al modelo constructivista reflejado en la docencia directa, porque primaba el individuo que aprende en su entorno social, donde se usaban los conocimientos que se tenían para ir construyendo los nuevos, conocimientos que no son solo matemáticos, sino éticos, morales, sociales, entre otros, propios de cada individuo con la cooperación de los compañeros, el acompañamiento de la orientadora, esto con el fin de lograr que estos conocimientos tuvieran significado y de esta manera fueran interiorizados con sentido y se lograra un aprendizaje significativo.

2.3.Sistema de evaluación y resultados curriculares obtenidos.

La institución se ha basado en el decreto 1290 de 2009 del Ministerio de Educación Nacional para determinar su sistema de evaluación y promoción escolar, el cual contiene 19 apartados (IE-ENSP, 2015). Para hacer realidad este sistema de evaluación se construyó un compromiso entre institución, padres de familia y estudiantes que sigue las orientaciones del decreto, y en consecuencia se han determinado unos deberes y unos derechos para los padres de familia y para los estudiantes.

El sistema tiene en cuenta los aspectos que conforman el proceso de evaluación de los aprendizajes en las distintas dimensiones de la persona: saber, ser y saber hacer, lo cual permitirá al estudiante identificar de manera oportuna, clara y precisa cuáles son sus fortalezas y/o dificultades con miras a realizar actividades de mejoramiento frente a los desempeños alcanzados durante su proceso formativo.

De igual manera se establecen criterios claros que orientarán a docentes y estudiantes, facilitando la aplicación del proceso de evaluación de los desempeños en cada una de las asignaturas que componen el plan de estudios y teniendo en cuenta los distintos ritmos y niveles de aprendizaje. Igualmente se proponen estrategias de valoración integral que proporcionan herramientas para el acompañamiento de los estudiantes en el desarrollo de sus capacidades y competencias.

La institución evaluará de manera integral y permanente a los estudiantes en los aspectos Cognitivo, Procesual y Actitudinal, además incluye la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación; esto con el fin de cumplir los propósitos estipulados en el decreto mencionado como son: identificar características, ritmos y estilos de aprendizaje; reorientación de procesos educativos; implementar estrategias pedagógicas de mejoramiento y el plan de mejoramientos institucional y determinar la promoción de estudiantes. La evaluación será un mecanismo y una estrategia educativa y pedagógica para fortalecer el proyecto de vida de los estudiantes, que les ayudará a desarrollar competencias básicas para el desempeño laboral, ingresar a la universidad y continuar estudios y/o para crecer como persona humana.

Es de agregar que el sistema promueve la autonomía del docente, siempre y cuando conserve las condiciones evaluativas de la institución, que el docente tenga en cuenta la individualidad de cada estudiantes y que haya permanencia evaluativa e información en el aula de su sistema evaluativo.

Los criterios de evaluación y promoción de la IE-ENSP son los estipulados en los lineamientos del MEN, aquí tenemos:

Criterios De Evaluación Generales (IE-ENSP, 2015, P.4):

a. Nivel de desarrollo de procesos de pensamiento según el grado escolar que cursan y su edad.
b. Grado de apropiación y dominio de los contenidos conceptuales y procedimentales de la asignatura.
c. Aplicación de los conocimientos para la solución de problemas e interrogantes.
d. Nivel de cumplimiento con los requerimientos y exigencias de la actividad.

Criterios De Evaluación Específicos (IE-ENSP, 2015, p. 4-5):

a. Académicos: Incluyen los criterios para desempeños cognitivos y procesuales:
   - Desempeño en pruebas acumulativas, orales y escritas.
   - Cumplimiento y presentación de talleres, tareas y ejercicios.
   - Presentación de cuadernos de trabajo (u otra forma de registro de actividad). Estos deben ser ordenados, con buena caligrafía, ortografía, contener la temática pertinente y consignada los criterios de autoevaluación.
b. Actitudinales:
   - Responsabilidad y compromiso
   - Atención e interés

- Participación activa
- Orden y aseo
- Relaciones consigo mismo, con los demás y con su entorno.
- Vivencia de los valores institucionales, familiares, comunitarios como construcción de su proyecto de vida

Lo demás que respecta al sistema de evaluación y promoción según IE-ENSP (IE-ENSP, 2015) tiene que ver con: La promoción de cada grado académico, la cual se realiza con la aprobación de todas sus asignaturas en 3.0 y además de esto para grado 11 deben estar a paz y salvo con la institución para la celebración de la ceremonia de grado; la reprobación se dará cuando no se aprueben tres o más de las materias; el aplazamiento se da cuando el estudiante al finalizar el año lectivo no apruebe una o dos materias, este debe someterse a talleres y exámenes recuperatorios; lo demás es referente a la promoción anticipada de grado y de estudiantes repitentes.

Además la institución cuenta con comisiones de evaluación por grado para el seguimiento evaluativo. Por otro lado la institución tiene estímulos en reconocimiento de buen desempeño en prueba externas y en el programa se supérate con el saber.

La escala de valoración institucional es de 1.0 a 5.0 y en equivalencia a la escala nacional se tiene:

ESCALA INSTITUCIONAL	EQUIVALENCIA NACIONAL
1.0 a 2.9	DESEMPEÑO BAJO
3.0 a 3.9	DESEMPEÑO BASICO
4.0 a 4.5	DESEMPEÑO ALTO
4.6 a 5.0	DESEMPEÑO SUPERIOR

Sin embargo en los siguientes casos el docente puede determinar una nota en cero:

- Cuando el estudiante no se presente sin tener justificación.
- Cuando el estudiante no desarrolle una actividad propuesta estando en la institución.
- Cuando en la actividad evaluativa se presente fraude.
- Cuando el estudiante tenga sanción con suspensión.

Para la valoración integral se tiene como estrategia: La evaluación cognoscitiva y cognitiva, Disponibilidad para la colaboración, Diligenciamiento del cuaderno y Presentación de tareas, trabajos y otros.

De igual manera el sistema de evaluación y promoción contiene: Acciones de seguimiento, Procesos de autoevaluación de los estudiantes, Estrategias de poyo para resolver situaciones pedagógicas pendientes de los estudiantes, Acciones para garantizar cumplimiento de los procesos evaluativos estipulados en el sistema institucional de evaluación, Periodicidad de entrega de los informes a los padres de familia, Estructura de los informes del desempeño de los estudiantes, Instancias, procedimientos y mecanismos de atención y resolución de reclamaciones de padres de familia y estudiantes, Mecanismos de participación de la comunidad educativa en la construcción del SIEP, Derechos del estudiante, Deberes del estudiante, Derechos de los padre de familia y finalmente los deberes de los padres de familia.

En la docencia directa se usó parte del sistema evaluativo de la IE-ENSP porque no se tuvieron en cuenta todos los criterios, sin embargo se tuvo en cuenta los distintos ritmos y niveles de aprendizaje, la individualidad de cada estudiantes y la permanencia evaluativa esto para reconocer integralmente al estudiante de manera Cognitiva, Procesual y Actitudinal, siguiendo los Criterios De Evaluación Generales y algunos de los Criterios De

Evaluación Específicos, como el desempeño en pruebas acumulativas, orales y escritas, el cumplimiento y presentación de talleres, tareas y ejercicios, la responsabilidad, compromiso, y participación activa. Y todo este proceso se expresó como el sistema lo indica en la escala institucional.

En consecuencia debido al acompañamiento y atención constante en los procesos de aprendizaje y de evaluación, teniendo en cuenta los distintos ritmos de aprendizaje, se logró identificar en varias ocasiones estudiantes con distintos niveles de simpatía con las matemáticas y algunos un poco desorientados, pero persiguiendo la pedagogía de observación al estudiante que se había planteado se les orienta de acuerdo a la situación de cada uno, logrando la incorporación de estos estudiantes a las siguientes actividades y obteniendo resultados de mejoría notorios en las evaluaciones. Aunque lo mismo no sucedió en el caso del desarrollo del segundo caso factorización, diferencia de cuadrados, ya que hubo poca participación y no se pudo incorporar a todos en dicho desarrollo, por eso este caso no se evaluó.

Capítulo 3. Reflexión en la Docencia

3.1. Objeto de estudio en la docencia directa

En la docencia directa ejecutada en la IE-ENSP los estudiantes desplegaron un conjunto de acciones de matemática escolar, dichas acciones generaron ciertas actividades matemáticas en cada estudiante, y estas actividades a su vez se pueden organizar de tal manera que permitan incluso reflexionar sobre dicha organización de contenidos. Dado que en este capítulo se pretende hacer reflexión sobre esta docencia directa se debe caracterizar la actividad matemática estudiantil, la cual cabe en la denominada matemática escolar que es la matemática manipulada e incorporada en el aula, actividad que nos conduce a introducirnos en:

→ La Educación Matemática (EM), que podemos semejar con un gran conjunto que está relacionado con las problemáticas que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en este conjunto se encuentran varios subconjuntos, pero enfocaremos la mirada en uno particular, es decir en:

  → La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual se preocupa por las relaciones humanas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; estas actividades humanas regularmente se describen mediante un modelo único que se denomina:

    → Praxeología, que es considerada una organización matemática única de cada actividad y de cada individuo que consta de: tareas, técnicas, tecnologías y teorías para argumentar una actividad matemática (CLAME, 2009; Chevallard, 1999; Nieto, 2009).

Examinar la docencia directa con base en la TAD nos ha generado como pregunta de investigación, la siguiente: ¿Cuál(es) es (son) la(s) praxeología(s) que se establece(n) al enseñar productos notables y factorización con figuras geométricas?

3.2. Marco conceptual y unidades de análisis del estudio

3.2.1. Educación matemática (EM)

La educación matemática (EM) es una disciplina relativamente joven que trata de incidir en la mayoría de sus actividades en las problemáticas de la matemática escolar, entre estas problemáticas están las que tiene que ver con la comprensión de la naturaleza del saber matemático y a su vez con la interpretación de este en busca de generar fenómenos de enseñanza y aprendizaje (Nieto, 2009).

3.2.2. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Esta teoría perteneciente a la línea de Educación Matemática fue iniciada con Yves Chevallard en 1980 y seguida por otros investigadores posteriores como Marianna Bosch, José Gascón, entre otros(Angulo, 2009). Para Chevallard su Teoría (TAD) considera, entre otras cosas, los conceptos de Obstáculo Epistemológico y Transposición Didáctica. Para Chevallard existen obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los conceptos matemáticos debido a la naturaleza de ellos o por cómo han sido concebidos con anterioridad, y respecto a la transposición didáctica, él considera que el "saber sabio", es decir las matemáticas de los matemáticos, se transforma en "saber enseñar", es decir las matemáticas escolares para incorporarlas en los programas educativos (Nieto, 2009).

La TAD fue de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación a las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, pero la TAD además de lo anterior considera también a los procesos desde la creación y utilización del saber matemático hasta la incorporación en la escuela como saber enseñado y además incluye a todas las *instituciones sociales* y *sujetos* que participan de dichos procesos, siendo estos dos últimos conceptos muy importantes en esta teoría (Bosch, 2009).

De las manifestaciones surgidas del estudio e investigaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas emana la TAD, la cual considera las actividades matemáticas y al estudio en matemáticas como un conjunto de actividades humanas que se constituyen en sí mismas en instituciones sociales, siendo esta la razón para denominarla Teoría Antropológica. De ahí que la TAD como teoría de la EM se interese por las relaciones humanas enmarcadas en instituciones sociales, que tiene como eje central tanto al hombre que está aprendiendo como al que está enseñando (Chevallard, 1999). En lo referente a las manifestaciones surgidas, la TAD denomina al mismo acto de formación acaecido en el contexto escolar como una manifestación social ya que en él se tiene incidencia sobre los actores educativos, es decir, sobre el docente y sobre el estudiante.

Se precisa que el sentido que se le da a la “institución” en la TAD tiene que ver con una organización social estable que necesita cierta adaptabilidad y conformada por “sujetos” que realizan actividades sociales bajo ciertas restricciones y limitación de recursos. El sentido de la noción “institución” no se refiere únicamente a instituciones educativas, ni la de “sujetos” se refiere exclusivamente a los estudiantes o individuos que aprenden. Para entender de mejor manera esta precisión, se acudió al CLAME (2009)para entender quela demostración matemática es una “institución” y aquí podemos designar a la argumentación como el “sujeto”, ya que ésta es la que actúa frente a la sociedad para dar razón y explicación de la matemática.

3.2.3. Praxeología

La palabra praxeología está formada etimológicamente por dos componentes léxicos así: PRAXIS que se entiende como una práctica particular, sensata, significante, con sentido, donde se razona y se es consciente de la acción y no pasa a ser una simple repetición de una acción mecánica; mientras que el LOGOS se puede entender como el discurso reflexivo que se hace posterior a la PRAXIS (Juliao, 2011). En términos prácticos, porque no existe una definición concluyente, una actividad humana específica de las que se han mencionado en la TAD se puede caracterizar con un modelo único de ejecución para cada individuo particular, a esta caracterización de actividades humanas matemáticas se denomina una *praxeología* (Chevallard, 1999).

Ahora, una praxeología se puede presentar en términos de una organización matemática, es decir que se puede modelizar el conocimiento matemático como actividad humana (Espinoza y otro, 2000), cuyos componentes principales son:

a. Tipos de tareas T:son acciones puntuales a ejecutar. En ellas se pone en práctica el principio antropológico, es decir que se desarrollan actividades humanas en instituciones sociales, estas son generalmente expresadas con un verbo pero de manera específica: *hallar* el valor de la variable en el punto a, *verificar* si b es solución de la ecuación dada, *calcular* la derivada de la función, etc. Además a cada tarea de un mismo tipo denotaremos como $T_{i,}$ donde $i \in \mathbb{N}$.

b. Técnicas τ:son las maneras empleadas de hacer las tareas, aunque se debe aclarar que estas técnicas no son necesariamente algorítmicas, un claro ejemplo de ello es axiomatizar un determinado ámbito de las matemáticas.

c. Tecnologías θ:son los discursos racionales que justifican, explican y describen razonablemente las técnicas para asegurar que efectivamente permiten realizar las tareas del tipo T.

d. Teorías Θ:conforman el soporte de nivel superior para las tecnologías. Las teorías pueden contener en su discurso explícitamente afirmaciones de las cuales se puede dar cuenta en forma rigurosa.

Los componentes principales de una praxeología se congregan en dos grandes bloques: un bloque práctico, saber-hacer o PRAXIS, compuesto por el tipo de *tareas* y sus *técnicas* (T, τ) y un bloque teórico, saber o LOGOS, compuesto por las *tecnologías* y las *teorías*(θ, Θ) (CLAME, 2009).

En el bloque práctico las tareas no son datos de la naturaleza ni tampoco resultados mágicos. Tal como refiere en adelante Juliao, las tareas son ajustes adaptativos de construcciones institucionales que diseña el profesor con el objeto de provocar en sus estudiantes el dinamismo de "haciendo y aprendiendo el saber matemático". La puesta en práctica de la tarea representa la forma estática de la praxeología; la cuestión dinámica y la razón de su origen requiere una manera de realizar las tareas es decir las técnicas(Juliao, 2011).

Por otra parte serán las combinaciones cognitivas de origen antropológico e instrumentales de origen cultural quienes estructuran el bloque teórico, aquí las tecnologías se pueden entender como un discurso formal interpretativo y justificativo que nace en la estructura matemática y la teoría como un discurso suficientemente amplio para justificar e interpretar las tecnologías de dicha técnica (Angulo, 2009).

Según Juliao podemos usar la praxeología como herramienta para determinar si las acciones ejecutadas son eficaces, esto con la intención de conservar, gestionar y apropiarse de saberes producto de la práctica; sin embargo más que el producto de estas prácticas lo que interesa es el saber-hacer (Praxis) y de ser necesario para el análisis de la práctica, el observador la puede dividir en sesiones y hacer análisis independientes pero relacionados finalmente.

El quehacer fundamental praxeológico puede entenderse como el desplazamiento desde lo vivido a lo pensado, a lo construido y finalmente a lo aprehendido(Juliao, 2011).Para llevar a cabo el desarrollo praxeológico se deben ejecutar 4 fases:

I. La fase del VER: es la fase de exploración y análisis en la que el observador recoge y analiza la información de la práctica, esta práctica contiene su racionalidad, su tiempo de desarrollo, sus elementos y sus objetivos; para sintetizar esta información se puede responder a estas preguntas: ¿Qué sucede?, ¿Quién hace qué?, ¿Por quién lo hace?, ¿Con quién?, ¿Dónde?, ¿Cuándo?, ¿Cómo?, ¿Por qué lo hace?

   Dado que es una práctica planeada, es decir una praxis, el observador para fortalecer y dar soporte a estos análisis puede contar con documentos escritos, videos, discursos hechos por los practicantes o evidencias de cualquier tipo que reflejen la información del plan práctico.

   En esta fase es donde se debe generar una problemática a partir de diferentes técnicas de observación.

II. La fase del JUZGAR: esta es la fase de reacción que responde a la pregunta ¿qué puede hacerse?; es la etapa donde el observador examina otras formas de enfocar la problemática de la práctica, donde visualiza diversas teorías de modo que pueda comprender la práctica.

Es la fase paradigmática pues le corresponde formalizar, después de la observación, experimentación y evaluación, los modelos transferibles de acción que permitan que otros practicantes puedan realizar una nueva práctica análoga.

III. La fase del ACTUAR: En esta se responde a la pregunta ¿Qué hacemos en concreto?, es aquí donde el observador construye en el tiempo y el espacio de la práctica la gestión finalizada y dirigida de los procedimientos y tácticas previamente validados por la experiencia y planteados como paradigmas ejecutantes de la labor.

En esta fase el observador debe reconocerse a sí mismo, reconocer el medio y los actores que le harán planear y finalmente formular y elaborar la acción que se desea.

IV. La fase de la DEVOLUCIÓN CREATIVA: Es la fase de la reflexión en la acción, donde se responde a la pregunta ¿Qué aprendemos de lo que hacemos?, aquí el observador recoge y reflexiona sobre los aprendizajes adquiridos a lo largo de todo el proceso para conducirlo más allá de la experiencia al adquirir consciencia de la complejidad del actuar y de su proyección futura.

En esta fase de la devolución creativa se recupera la praxis por el logos con la intención de que el praxeólogo o investigador exprese los significados más importantes de su proceso y los exprese creativamente.

3.3. Análisis de los registros

De la docencia directa se obtuvieron evidencias como fotos, videos, talleres escritos y pruebas escritas. El análisis se hizo solo con un taller escrito cuyos resultados se organizaron agrupándolos por formas similares de abordar las tareas buscando identificar las diferentes praxeologías; así pues para nuestro análisis se consideraron siete individuos distintos en los cuales se reflejaban las actividades realizadas por todos los participantes.

Dado que lo que se quería era determinar praxeologías de estas actividades entonces se resaltaron las *Tareas* planteadas, las *Técnicas* usadas para la resolución de dichas tareas, las *Tecnologías* que argumentaban la *Praxis* y las *Teorías* que fueron soporte de todo este conjunto.

Para empezar, se presentará el análisis de uno de los talleres escritos finalmente evaluado, fechado el 29/oct./2015 el cual se hizo a los estudiantes de manera individual en el cuarto periodo académico. En este se les evaluó la factorización a través del Puzzle Algebraico que incluía los tres tipos de trinomios desarrollados.

La consigna presentada por la docente practicante fue a la que se le llamó *Tarea 1* (T_1) así: Realice la factorización de los trinomios de forma: $x^2 \pm 2xa + a^2$, $x^2 \pm bx \pm c$, o $ax^2 \pm bx \pm c$. Se presentará a continuación lo desarrollado por algunos de los estudiantes:

Estudiante N°1.

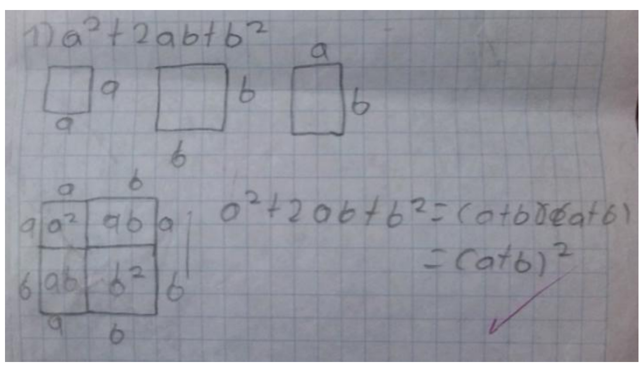


Figura 33. Actividad del estudiante N°1.

Se debe aclarar que lo realizado por el estudiante se encuentra escrito en tinta negra, en tinta rosa se encuentran las correcciones de la docente practicante.

En esta imagen se tiene el trinomio $a^2 + 2ab + b^2$, se puede observar que el estudiante ha realizado la tarea de la consigna T_1dividiéndola en tres tareas, esto se hace visible en los tres pasos mediante los cuales consigue dar respuesta a T_1, así:

I. En el primer paso:

a. Se puede notar que la primera tarea a la que se llamará *tarea* $\mathrm{T}1$, la ejecuta cuando transforma cada término del trinomio en el área de una figura geométrica, esto hace referencia a los 3 cuadriláteros que el estudiante dibuja contiguos al trinomio inicial.

b. Se identifica la *técnica* $\tau 1$ con la que el estudiante aborda $\mathrm{T}1$ la cual se hace evidente cuando a cada lado de los cuadrados les asigna valores tales que al hallar el área de cada uno se consigue el primer y el tercer término respectivamente, y a cada lado del rectángulo le asigna los valores correspondientes a cada lado de los cuadrados anteriores, tal como se le había sugerido como técnica en la docencia directa.

c. La *tecnología* $\theta 1$ que hace posible la praxis se logra al reconocer el valor del lado de cada cuadrado extrayendo la raíz cuadrada del primer y tercer término.

II. En el segundo paso:

a. La segunda tarea que se llamará *tarea* $\mathrm{T}2$ que realiza el estudiante consiste en construir un cuadrado a partir de los cuadriláteros dibujados inicialmente, como aparece en la parte inferior izquierda de la *figura 33*, se puede observar además que a cada uno de ellos le asigna el valor de la magnitud del lado y hace el cálculo respectivo de las áreas.

b. Se identifica la *técnica* $\tau 2$que usa para realizar $\mathrm{T}2$ la consiste en realizar la composición de figuras geométricas con sus áreas respectivas haciendo uso de la herramienta Puzzle algebraico.

c. La *tecnología* $\theta 2$ que hace posible la praxis se logra cuando al conseguir el cuadrado final el estudiante hace uso de dos rectángulos congruentes con el rectángulo inicial.

III. En el tercer paso:

a. Posterior a ello realiza la *tarea* τ3 que consiste en representar algebraicamente el área del cuadrado final con dos expresiones distintas una es el trinomio $\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$ y la otra es $(\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a} + \mathrm{b})$= $(a + b)^2$.

b. Se identifica la *técnica* $\tau 3$que usó el estudiante que consistió en la observación del Puzzle en el cual pudo identificar que está conformado por dos cuadrados no congruentes y dos rectángulos congruentes que no se intersecan y forman una sola pieza, entonces por un lado el estudiante suma estas áreas y por otro lado halla el área (A) del cuadrado final apoyándose en la fórmula $A = L * L$, reconociendo además como lo ha señalado el estudiante con un segmento al lado derecho del Puzzle, que la magnitud del lado de este cuadrado es $a + b$ y de esta manera procede a igualar estas dos expresiones.

c. La *tecnología* $\theta 3$ o argumento de esta praxis tiene que ver con la relación que encuentra el estudiante entre las dos expresiones, porque los cuadriláteros pequeños no se intersecan y forman la pieza final, por tanto las dos expresiones representan el área de la misma figura.

Pero a toda esta actividad desplegada en los tres pasos anteriores la soporta una teoría común que desde el lenguaje praxeológico se denominará:

d. *Teoría* $\Theta 1$ la cual da los argumentos teóricos de las tareas, las técnicas y las tecnologías presentes en esta actividad matemática ejecutada por el estudiante, entre estos argumentos están:

- Axioma: el área (A) de un rectángulo de lados b y h es $A = b * h$.

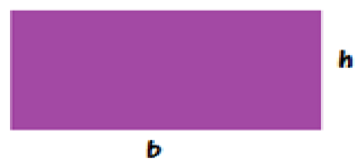


Figura 34. Axioma del área del rectángulo.

- Axioma: dados dos segmentos AB, BC colineales y consecutivos como en la *figura 55* se cumple que la medida del segmento AB (mAB) mas la medida del segmento $BC(mBC)$ es igual a la medida del segmento AC (mAC) es decir$mAB + mBC = mAC$.

Figura 35. Suma de las magnitudes de dos segmentos.

- Axioma: si un polígono simple p se puede descomponer en n polígonos simples $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, tales que sus interiores no se intersecan, entonces el área $A(p)$ del polígono p cumple que: $A(p) = A(p_1) + A(p_2) + A(p_3) + \cdots + A(p_n)$; Propiedad llamada el axioma de aditividad de áreas.

- Propiedades de los cuadriláteros regulares:
  - Los lados opuestos de los rectángulos son paralelos dos a dos.
  - Los lados opuestos son congruentes.
  - Los ángulos opuestos son congruentes.

Como se puede observar en la construcción del Puzzle el estudiante utilizó implícitamente estos argumentos teóricos, porque para conseguir la magnitud de cada lado del cuadrado final fue necesario considerar que los lados que conformaban el lado final eran consecutivos y colineales. También se valió implícitamente de las propiedades de los cuadriláteros para la construcción del Puzzle, porque debía ubicar los cuadriláteros iniciales de tal manera que al final consiguiera que los lados y ángulos opuestos fueran congruentes dos a dos, además que sus lados fueran paralelos. De la misma forma fue necesario reconocer que los cuadriláteros iniciales sin intersecarse conformaban en una sola pieza al cuadrado final, así por el axioma de aditividad de áreas, la suma de las áreas de estos era igual al área total.

De esta manera se puede reconocer que con esta organización matemática el estudiante logró dar respuesta a la consigna T_1, primero reconociendo que era un trinomio de la forma $x^2 \pm 2xa + a^2$ y factorizando $\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$ =$(\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a} + \mathrm{b})$= $(a + b)^2$.

Estudiante N°2

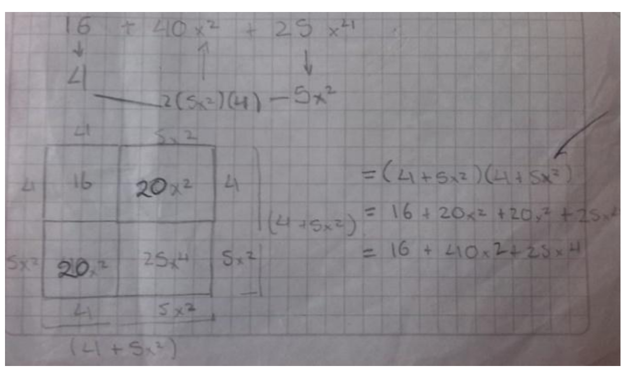


Figura 36. Actividad del estudiante N°2.

En esta imagen se tiene el trinomio $16 + 40x^2 + 25x^4$, se puede observar que el estudiante ha realizado la tarea de la consigna T_1al igual que el estudiante anterior, dividiéndola en tres tareas, esto se hace visible en los tres pasos mediante los cuales consigue dar respuesta a T_1; sin embargo a pesar de solicitársele la misma tarea este estudiante ha dado respuesta usando técnicas similarmente al estudiante anterior pero no iguales, así:

I. En el primer paso:

a. Se puede notar que la primera tarea a la que se llamará *tarea* $\mathrm{T}1$ la ejecuta cuando verifica que cada término del trinomio cumple con cierta característica, esto hace referencia a los 3 términos que se desprenden del trinomio inicial 4, $2(5x^2)(4)$ y $5x^2$ respectivamente.

b. La técnica $\tau 1$ con la que el estudiante aborda $\mathrm{T}1$ se hace evidente cuando del primer y tercer se desprenden dos términos resultantes 4 y $5x^2$respectivamente que al elevarlos al cuadrado se consiguen dichos términos iniciales, es decir $4^2 = 16$ y $(5x^2)^2 = 25x^4$, además al multiplicar estos dos términos resultantes por 2 se obtiene el segundo término así $2(5x^2)(4) = 40x^2$, tal como se le había sugerido como técnica en la docencia directa.

c. La *tecnología* $\theta 1$que hace posible la praxis se logra al reconocer que tanto el primer como el tercer término tiene raíz cuadrada exacta.

II. En el segundo paso:

a. La segunda *tarea* $\mathrm{T}2$ que realiza el estudiante consiste en construir un cuadrado con medida de lado igual a la suma de los términos construidos anteriormente correspondientes al primer y tercer término, es decir $4 + 5x^2$ como aparece en la parte inferior izquierda de la *figura 36*.

b. La *técnica* $\tau 2$ que usa para realizar т2consiste en realizar la composición de figuras geométricas con sus áreas respectivas haciendo uso de la herramienta Puzzle algebraico.

c. La *tecnología* $\theta 2$ que hace posible la praxis se logra cuando el estudiante consigue el cuadrado final y hace uso de los factores construidos anteriormente es decir $4\ y\ 5x^2$, estos se los asigna como magnitudes a lados a dos cuadrados respectivamente y a los otros dos cuadriláteros les asigna los valores correspondientes por paralelismo y congruencia entre segmentos.

Aquí se debe resaltar que el estudiante ha usado las herramientas geométricas solo como apoyo, esto se hace evidente cuando a pesar de haber dado el valor $5x^2$ a dos lados no opuestos correspondientes al cuadrilátero inferior derecho que corresponden a un cuadrado él dibuja un rectángulo; igualmente al cuadrilátero inferior izquierdo le asigna valores distintos ($4\ y\ 5x^2$) a dos lados no opuestos que corresponden a un rectángulo pero él dibuja un cuadrado; con esto se genera también que el cuadrilátero construido finalmente aunque tenga valores iguales $(4 + 5x^2)$ a cada dos lados no opuestos, es decir que corresponden a los lados de un cuadrado el estudiante lo representa como un rectángulo.

III. En el tercer paso:

a. Se realiza la *tarea* т3que consiste en representar algebraicamente el área del cuadrado final con dos expresiones distintas una es $(4 + 5x^2)(4 + 5x^2)$ y la otra es el trinomio $16 + 40x^2 + 25x^4$.

b. La *técnica* $\tau 3$ que usó el estudiante consistió por una parte en reconocer que el Puzzle finalmente construido es un cuadrado, por eso calculó su área con el uso de la fórmula $L * L$ donde L$= 4 + 5x^2$ como lo ha indicado el estudiante mediante dos segmentos al lado derecho e inferior del Puzzle; por otra parte dado que los cuadriláteros que componen al Puzzle no se intersecan y forman una sola pieza entonces la suma de las áreas de estos es igual al área del cuadrado final y de esta manera procede a igualar estas dos expresiones $(4 + 5x^2)(4 + 5x^2)$= $16 + 40x^2 + 25x^4$.

c. La *tecnología* $\theta 3$ o argumento de esta praxis tiene que ver con la relación que estima el estudiante entre las dos expresiones porque los cuadriláteros pequeños no se intersecan y forman la pieza final, por tanto las dos expresiones representan el área de la misma figura; además es observable que al ejecutar la *tarea*т*3*, el estudiante nos indica explícitamente la relación entre el Puzzle y las expresiones algebraicas porque se puede observar que antes de escribir la primera representación del área del Puzzle el estudiante escribe el signo "=", esto para indicar que lo que va a representar algebraicamente es igual a lo que está representado geométricamente.

Al igual que el caso anterior toda esta actividad la soporta una teoría que para nuestro caso corresponde a la misma del estudiante N°1 denominada:

d. *Teoría* $\Theta 1$ la cual da los argumentos teóricos de las tareas, las técnicas y las tecnologías presentes en esta actividad matemática ejecutada por el estudiante.

Sin embargo se puede observar que en la construcción del Puzzle el estudiante utilizó implícitamente estos argumentos teóricos aunque no se vean reflejados geométricamente, porque para conseguir la magnitud de cada lado del cuadrado finalmente construido fue necesario considerar que los lados que conformaban el lado final eran consecutivos y colineales. También se valió de las propiedades de los cuadriláteros para la construcción de Puzzle porque debía dibujar 4 cuadriláteros de tal manera que al final consiguiera que los lados y ángulos opuestos fueran congruentes dos a dos y además que sus lados fueran paralelos, que aunque consiguió algebraicamente que estos lados fueran iguales nuevamente no los pinto congruentes como correspondían. De la misma forma que en el ejercicio anterior el estudiante se valió del axioma de aditividad de áreas para determinar que la suma de las áreas de los cuadriláteros que componen al Puzzle era igual al área total del mismo.

Finalmente, de la misma manera se puede reconocer que el estudiante logró dar respuesta a la consigna T_1reconociendo que era un trinomio de la forma $x^2 \pm 2xa + a^2$ y factorizándolo $16 + 40x^2 + 25x^4 = (4 + 5x^2)(4 + 5x^2)$.

Estudiante N°3

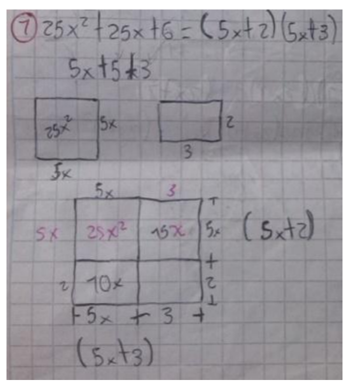


Figura 37. Actividad del estudiante N°3.

Se debe aclarar que lo realizado por el estudiante se encuentra escrito en tinta negra, en tinta rosa se encuentran las correcciones de la docente practicante.

En esta imagen se tiene el trinomio $25x^2 + 25x + 6$, al igual que los ejercicios anteriores, la tarea a realizar es la misma T_1, se puede observar que el estudiante ha realizado la tarea dividiéndola en cuatro tareas, esto se hace visible en los cuatro pasos mediante los cuales consigue dar respuesta a T_1, así:

I. En el primer paso:

a. Se puede notar que la primera tarea a la que se le llamará *tarea* т1 la ejecuta cuando verifica el tipo de trinomio que se le ha planteado, esto hace referencia a la nueva expresión que ha indicado debajo del trinomio inicial es decir $5x + 5 + 3$.

b. La *técnica* $\tau 1$ con la que el estudiante aborda т1 se hace evidente cuando de los tres términos se desprenden otros términos tal que, para el primer factor $5x$ al elevarlo al cuadrado se obtiene el primer término del trinomio $25x^2$, para el segundo factor 5 al elevarlo al cuadrado se obtiene el coeficiente del segundo término del mismo trinomio 25 y finalmente el tercero 3 es un factor de 6 o hallo la mitad de este; sin embargo la técnica sugerida en la docencia directa solo sugería verificar el primer término en estos casos pero de todas maneras el estudiante extrajo factores de los términos del trinomio dado y además dado que se pueden realizar operaciones entre ellos los suma.

c. El argumento es decir la *tecnología* $\theta 1$ de esta praxis se da porque logra reconocer que tanto el primer termino $25x^2$ como el coeficiente del segundo 25 tienen raíz cuadrada exacta mientras que el tercer término 6 no tiene, así para este solo escribe uno de sus términos tal que al multiplicarlo por otro particular (en este ejemplo 2) se obtenga 6, o considerando la otra hipótesis (hallo la mitad al 6) al hallarle el doble al 3 se obtiene 6.

II. En el segundo paso:

a. La segunda *tarea* т2 que realiza el estudiante la ejecuta cuando transforma el primer y tercer término del trinomio en el área de una figura geométrica, esto hace referencia a los 2 cuadriláteros que dibuja el estudiante debajo a la verificación del trinomio inicial, un cuadrado y un rectángulo respectivamente.

b. La *técnica* $\tau 2$ con la que el estudiante aborda т2 se hace evidente cuando a cada lado del cuadrado y del rectángulo les asigna valores, 5x para el lado del cuadrado, 3 y 2 para dos lados no opuestos del rectángulo tal que al hallar el área de cada uno se consigue el primer y el tercer término respectivamente.

c. La tecnología $\theta 2$ que hace posible la praxis se da cuando se logra reconocer el valor del lado del cuadrado extrayendo la raíz cuadrada del primer, mientras que para los valores del rectángulo los halla encontrando dos factores que generen el tercer término.

III. En el tercer paso:

a. Se realiza la *tarea* т3 que consiste en construir un cuadrado a partir de los cuadriláteros dibujados inicialmente como aparece en la parte inferior de la *figura 37*, se puede observar además que a algunos de ellos les asigna el valor de la magnitud del lado y hace el cálculo respectivo igualmente de algunas áreas.

b. La *técnica* $\tau 3$ que usa para realizar т3consiste en realizar la composición de figuras geométricas con algunas de sus áreas respectivas haciendo uso de la herramienta Puzzle algebraico, se puede observar en este paso que el estudiante solo determina los valores relevantemente, por ejemplo en el Puzzle solo muestra el área de los dos cuadriláteros adicionalmente construidos con sus magnitudes laterales correspondientes por congruencia a los lados de los dos cuadriláteros primeramente construidos, aunque no explicitadas estas magnitudes en todos. El cálculo de las áreas de estos dos cuadriláteros

$(10x \, y \, 15)$ sirve para verificar que la suma estas dos áreas representan el segundo término del trinomio $(25x)$, es de aclarar que el estudiante solo verificó el coeficiente en el cuadrilátero superior derecho por eso simplemente determina el área como 15 esto debido a que confundió la suma de variables con el producto de ellas, sin embargo el hace la suma como si 15 y 10x fueran términos semejantes para conseguir el término 25x; por otra parte le asigna los valores correspondientes a los lados de los cuadriláteros a solo dos lados no opuestos del rectángulo final, esto con el fin de mostrar que efectivamente estas eran las magnitudes laterales de éste es decir $(5x + 2)$ y $(5x + 3)$.

c. La *tecnología* $\theta 3$ que argumenta esta praxis para conseguir el rectángulo final se da cuando el estudiante hace uso de dos rectángulos que no tiene inicialmente para construir el Puzzle, estos los consigue trazando segmentos consecutivos, colineales y congruentes a los lados de los cuadriláteros que ya se tenían de tal manera que se construya un rectángulo que se quería.

IV. En el cuarto paso:

a. Se realiza la *tarea* $\mathrm{T}4$ que consiste en representar algebraicamente el área del rectángulo final con dos expresiones distintas una es el trinomio $25\mathrm{x}^2 + 25\mathrm{x} + 6$ y la otra es $(5\mathrm{x} + 2)(5\mathrm{x} + 3)$.

b. La *técnica* $\tau 4$que usó el estudiante consistió en la observación del Puzzle y la verificación en él de que cada término del trinomio está representada por el área de una sección, por otro lado halla el área A del cuadrado final apoyándose en la fórmula $A = b * h$, reconociendo además como lo ha señalado con segmentos que la magnitud de dos lados no opuestos de este rectángulo son $b = (5x + 2)$ y

$h = (5x + 3)$, y de esta manera procede a igualar el trinomio inicial a la expresión $(5\mathrm{x} + 2)(5\mathrm{x} + 3)$.

c. La *tecnología* $\theta 4$ o argumento de esta praxis tiene que ver con la relación que encuentra el estudiante entre las dos expresiones, porque los cuadriláteros pequeños no se intersecan y forman la pieza final, por tanto las dos expresiones representan el área de la misma figura.

Al igual que en los ejemplos anteriores toda esta actividad está soportada por la misma teoría que en los ejemplos anteriores que se denominó:

d. *Teoría* $\Theta 1$ la cual da los argumentos teóricos de las tareas, las técnicas y las tecnologías presentes en esta actividad matemática ejecutada por el estudiante**.**

Como se puede observar en la construcción del Puzzle el estudiante utilizó implícitamente estos argumentos teóricos porque para conseguir la magnitud de cada lado del rectángulo final fue necesario trazar segmentos consecutivos, colineales y congruentes para completarlo a partir de los dos cuadriláteros iniciales; acompañado de las propiedades de los cuadriláteros porque los lados y ángulos opuestos debían conservar la congruencia y paralelismo dos a dos. De la misma forma fue necesario reconocer que los cuatro cuadriláteros iniciales sin intersecarse conformaban en una sola pieza al rectángulo final y así por el axioma de aditividad de áreas la suma de las áreas de estos era igual al área total.

Y nuevamente el estudiante logró dar respuesta a la consigna T_1 reconociendo primero que era un trinomio de la forma $x^2 \pm bx + c$ y factorizando $25\mathrm{x}^2 + 25\mathrm{x} + 6$ $=(5\mathrm{x} + 2)(5\mathrm{x} + 3)$.

Estudiante N°4

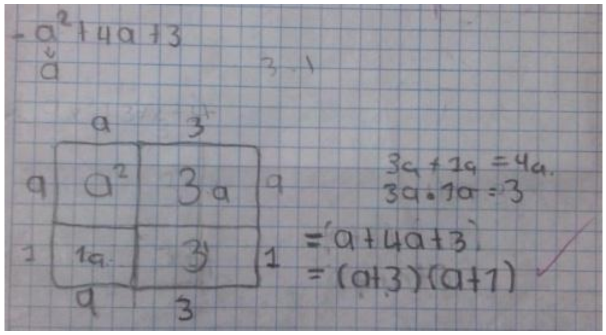


Figura 38. Actividad del estudiante N°4.

En esta imagen se tiene el trinomio $a^2 + 4a + 3$ se puede observar que el estudiante ha realizado la tarea de la consigna T_1al igual que los estudiantes anteriores dividiéndola en varias tareas, para este ejemplo en tres esto se hace visible en los tres pasos mediante los cuales consigue dar respuesta a T_1, así:

I. En el primer paso:

a. Se puede notar que la primera tarea a la que se llamará *tarea* $\mathrm{T}1$ la ejecuta cuando verifica que el primer y el tercer término del trinomio cumplen con cierta característica, esto hace referencia a la “a” que se desprenden del primer término a^2 del trinomio inicial y a los factores 3 y 1 presentados a la derecha del trinomio.

b. La *técnica* $\tau 1$ con la que el estudiante resuelve $\mathrm{T}1$ se puede ver cuándo del primer a^2desprende un factor a que al elevarlo al cuadrado se consigue dicho término inicial, mientras que para el tercer 3 halla factores tal que al multiplicarlos entre si se obtiene dicho término es decir $3\ y\ 1$ tal como se le había sugerido como técnica en la docencia directa.

c. La praxis se hace posible porque logra identificar que solo el primer término a^2tiene raíz cuadrada exacta mientras que el tercero 3 no por eso para este término sólo halla factores que generen, a este argumento que desde la teoría praxeológica se le conoce como *tecnología* $\theta 1$.

II. En el primer paso:

a. La segunda *tarea* т2 que realiza el estudiante consiste en construir un rectángulo con medidas de sus lados, para un lado igual la suma del primer término construido a y uno de los factores de los segundos construidos 1 y para el otro lado la suma del primer término construido a y otro factor de los segundos construidos 3, es decir así $b = a + 3$ y $h = a + 1$, como aparece en la parte inferior izquierda de la *figura 38.*

b. La *técnica* $\tau 2$ que usa para realizar т2consiste en realizar la composición de figuras geométricas con sus áreas respectivas haciendo uso de la herramienta Puzzle algebraico.

c. Para ejecutar esta técnica y conseguir el rectángulo final el estudiante hace uso de los factores construidos anteriormente, estos se los asigna como magnitudes a lados del cuadrado (a)y del rectángulos $(3\ y\ 1)$respectivamente y a los otros dos cuadriláteros les asigna los valores correspondientes por paralelismo y congruencia entre segmentos, este es el argumento de esta praxis es decir la *tecnología* $\theta 2$.

Es de resaltar como en un ejemplo anteriormente analizado que el estudiante para representar las magnitudes del cuadrilátero inferior derecho toma 3 cuadros de la cuadricula para representar la magnitud 1 mientras que para representar la magnitud 3 toma 6 cuadros de la cuadrícula, notándose ahí nuevamente que no hay una conservación en la escala tomada por el estudiante es decir que nuevamente el estudiante solo usa sus figuras como herramientas.

Por otra parte volviendo a lo anterior no se debe olvidar que los factores que generan el tercer término en general no son únicos, por eso el estudiante hace la verificación tal como se muestra a la derecha superior del Puzzle, por eso usa los valores correspondientes a las áreas de los cuadriláteros superior derecho e inferior izquierdo del Puzzle cuya suma debe representar el segundo término del trinomio por eso estudiante verifica que $3a + 1a = 4a$, y de igual manera que $1a * 3a = 3$ que debe corresponder al tercer término, sin embargo aunque estos no son los términos que se deben tomar para la verificar del tercer término, el estudiante consigue el factor 3 multiplicando sólo los coeficientes (3 y 1) ignorando la variable a.

III. En el tercer paso:

a. Se realiza la *tarea* τ3 que consiste en representar algebraicamente el área del cuadrado final con dos expresiones distintas una es el trinomio $a^2 + 4a + 3$y la otra es $(a + 3)(\mathrm{a} + 1)$.

b. La *técnica* $\tau 3$que usó el estudiante consistió primeramente en observar que los cuadriláteros que componen al Puzzle son continuos, no se intersecan y forman una sola pieza, entonces la suma de las áreas de estos es igual al área del rectángulo final, por otra parte reconoce que el Puzzle finalmente como es un rectángulo así puede usar la fórmula $b * h$para el cálculo de área (A) donde $b = a + 3$y h= $a + 1$ y de esta manera procede a igualar estas dos expresiones $a^2 + 4a + 3$=$(a + 3)(\mathrm{a} + 1)$.

c. La *tecnología* $\theta 3$ o argumento de esta praxis tiene que ver con la relación que encuentra el estudiante entre las dos expresiones porque los cuadriláteros pequeños no se intersecan y forman la pieza final, por tanto las dos expresiones representan el área de la misma figura, además para este ejemplo en la tarea $\tau 3$ el estudiante nos indica explícitamente la relación entre el Puzzle y las expresiones algebraicas porque se puede observar que antes de escribir la primera representación del área del Puzzle el estudiante escribe el signo "=", esto para indicar que lo que va a representar algebraicamente es igual a lo que está representado geométricamente es decir el área del Puzzle.

Al igual que en todos los casos anteriores toda esta actividad la soporta la misma teoría que se ha denominado:

d. *Teoría* Θ la cual da los argumentos teóricos de las tareas, las técnicas y las tecnologías presentes en esta actividad matemática ejecutada por el estudiante.

De igual forma se puede observar que en la construcción del Puzzle el estudiante utilizó implícitamente estos argumentos teóricos aunque no se vean reflejados geométricamente, porque para conseguir la magnitud de cada lado del cuadrado final fue necesario considerar que los lados que conformaban el lado final eran consecutivos y colineales. También se valió de las propiedades de los cuadriláteros para la construcción de Puzzle porque debía dibujar 4 cuadriláteros de tal manera que al final consiguiera que los lados y ángulos opuestos fueran congruentes dos a dos y que los lados además fueran paralelos. De la misma forma que en el ejercicio anterior el estudiante se valió del axioma de aditividad de áreas para determinar que la suma de las áreas de los cuadriláteros que componen al Puzzle era igual al área total del mismo.

Finalmente de la misma manera se puede reconocer que este estudiante también logró dar respuesta a la consigna T_1, reconociendo que era un trinomio de la forma $x^2 \pm bx \pm c$ y factorizandode la forma $a^2 + 4a + 3 = (\mathrm{a} + 3)(a + 1)$.

Estudiante N°5

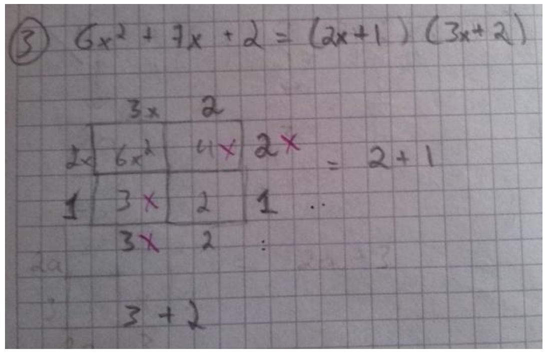


Figura 39. Actividad del estudiante N°5.

Se debe aclarar que lo realizado por el estudiante se encuentra escrito en tinta negra, en tinta rosa se encuentran las correcciones de la docente practicante.

En esta imagen se tiene el trinomio $6x^2 + 7x + 2$ y se puede observar que el estudiante ha realizado la tarea de la consigna T_1 dividiéndola en dos tareas, esto se hace visible en los dos pasos mediante los cuales consigue dar respuesta a T_1, así:

I. En el primer paso:

a. Se puede notar que la primera *tarea* т1 que realiza el estudiante consiste en construir un rectángulo a partir del trinomio inicial como aparece en la parte inferior de la *figura 39*, se puede observar además que a cada cuadrilátero que compone al Puzzle se les asigna el valor de la magnitud del lado y hace el cálculo respectivo de las áreas.

b. La *técnica* $\tau 1$ que usa para realizar т1consiste en realizar la composición de figuras geométricas con sus áreas respectivas haciendo uso de la herramienta Puzzle algebraico.

c. La *tecnología* $\theta 1$ que hace posible esta técnica y conseguir el rectángulo final se da cuando el estudiante construye el rectángulo superior izquierdo cuya área representa el primer término $6x^2$, de la misma manera construye el rectángulo inferior derecho cuya área representa el tercer término 2, y los otros dos rectángulos que constituyen el Puzzle se forman trazando segmentos consecutivos, colineales y congruentes de tal forma que determinen el rectángulo final, y a su vez la suma de las áreas de estos dos cuadriláteros $(3x\ y\ 4x)$ determinen el segundo término $7x$, pero en este caso el estudiante ha determinado para los valores de los lados congruentes respectivos solo los coeficientes de los factores correspondientes (3 y 4), esto debido a que él está acostumbrado al manejo de áreas aritméticas y no algebraicas. También se debe resaltar al igual que en algunos casos anteriores para el estudiante es irrelevante una escala de medida para sus representaciones geométricas porque por ejemplo para el rectángulo inferior derecho representa a 1 con dos cuadros de la cuadrícula y a 2 con tres cuadros de la cuadrícula. Por otra parte además de esto el estudiante hace explicitas las magnitudes para cada lado del rectángulo final para hallar posteriormente su área, la base la expresa como $b = 3 + 2$ mientras que a la altura la expresa como $h = 2 + 1$.

II. En el segundo paso:

a. Se realiza la *tarea* $\tau 2$ que consiste en representar algebraicamente el área del cuadrado final con dos expresiones distintas una es el trinomio $6x^2 + 7x + 2$ y la otra es $(3\mathrm{x} + 2)(2\mathrm{x} + 1)$.

b. La *técnica* $\tau 2$que usó el estudiante consistió en la observación del Puzzle el cual se puede ver que está conformado por 4 cuadriláteros y además que estas figuras no se intersecan y forman una sola pieza que corresponde al cuadrilátero final, sin embargo es curioso que el estudiante en su gráfica excluye la variable de algunos factores pero asumen, por un parte que la suma de las áreas de los cuadriláteros que forman el Puzzle representa el trinomio inicial, y por otro lado que el área del cuadrado final apoyándose en la fórmula del área $A = b * h$ es decir $A = (3\text{x} + 2)(2\text{x} + 1)$, pero lo interesante aquí es que en el Puzzle se habían indicado a b y h como $(3 + 2)$ y $(2 + 1)$ respectivamente lo que significa que el estudiante realiza toda su actividad solo con los coeficientes pero finalmente reconoce que las variables correspondientes, procediendo luego de todo a igualar las dos expresiones.

c. La *tecnología* $\theta 2$ o argumento de esta praxis tiene que ver con la relación que encuentra el estudiante entre las dos expresiones porque los cuadriláteros pequeños no se intersecan y forman la pieza final, por tanto las dos expresiones representan el área de la misma figura.

Pero al igual que los demás ejemplos a esta actividad la soporta una teoría que es la misma para los anteriores, que desde el lenguaje praxeológico se denominará:

d. *Teoría* $\Theta 1$ la cual da los argumentos teóricos de las tareas, las técnicas y las tecnologías presentes en esta actividad matemática ejecutada por el estudiante**.**

En este ejemplo se hace más notorio los soportes teóricos para la construcción del Puzzle, porque inicialmente se debió construir cada cuadrilátero que formara el Puzzle haciendo trazos de segmentos de tal manera que cumplieran las propiedades de los cuadriláteros por ejemplo que los ángulos y los lados fueran congruentes dos a dos; posterior a ello para conseguir la magnitud de cada lado del cuadrado final fue necesario reconocer que los segmentos que los conformaban eran colineales y consecutivo; de la misma forma fue necesario reconocer que los cuadriláteros iniciales sin intersecarse conformaban en una sola pieza al cuadrado final y así por el axioma de aditividad de áreas la suma de las áreas de estos era igual al área total.

De esta manera se puede reconocer que con esta organización matemática el estudiante logro dar respuesta a la consigna T_1factorizando el trinomio de la forma $6x^2 + 7x + 2 = (3\mathrm{x} + 2)(2\mathrm{x} + 1)$.

Estudiante N°6

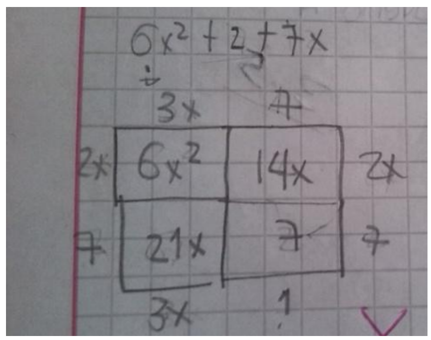


Figura 40. Actividad del estudiante N°6.

En esta imagen se tiene el trinomio $6x^2 + 2 + 7x$ se puede observar que el estudiante intentó realizar la tarea de la consigna T_1 al igual que los estudiantes anteriores, así:

I. En el primer paso:

a. Se puede notar que la primera *tarea* $\mathrm{T}1$ la ejecuta cuando verifica que el tipo de trinomio que cumple con cierta característica tal como se había orientado en la docencia directa, esto hace referencia a la flecha que se ubica debajo del primer término del trinomio.

b. La *técnica* $\tau1$ con la que el estudiante resuelve $\mathrm{T}1$ se puede ver cuándo al primer término no se le puede extraer raíz cuadrada exacta.

c. La praxis se hace posible porque logra identificar que ni el primer $(6x^2)$ ni el tercer término$(7x)$ tiene raíz cuadrada exacta, y en estos casos se le había indicado que se determinaría que era un trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$, a este argumento que desde la teoría praxeológica se denominará *tecnología* $\theta 1$.

II. En el segundo paso:

a. La *tarea* т2 que realiza el estudiante consiste en construir un rectángulo final constituido por 4 cuadriláteros cuyas áreas por secciones representen al trinomio inicial, sin embargo no lo consigue tal como aparece en la parte inferior de la *figura 40*.

b. La *técnica* $\tau 2$ que usa para realizar т2consiste en realizar la composición de figuras geométricas con sus áreas respectivas haciendo uso de la herramienta Puzzle algebraico.

c. Para ejecutar esta técnica y conseguir el rectángulo final conformado por 4 cuadriláteros al cuadrilátero superior izquierdo le asigna valores a los lados $(3x\ y\ 2x)$ tal que su área genere el primer termino $(6x^2)$, al cuadrilátero inferior derecho le asigna valores $(7\ y\ 1)$ que le generen el coeficiente del tercer término $(7x)$, al inferior izquierdo y al superior derecho le asigna valores correspondiente por segmentos congruentes $(7\ y\ 3x)$ y $(7\ y\ 2x)$ respectivamente, aunque al último se le ha asignado el valor de 7 equivocadamente; sin embargo la suma de las áreas de los dos cuadriláteros restantes no generan el segundo término (2), esto debido primeramente a que el estudiante no se percató que el trinomio estuviera organizado de forma $ax^2 \pm bx \pm c$ conservando el orden del grado de la variable en forma descendente, por eso al aplicar la técnica sugerida en la docencia directa no logró hacer la verificación de que cada termino se viera representado por una sesión del Puzzle; y segundo porque aunque el trinomio hubiese estado organizado correctamente, el 7 que asigno equivocadamente como magnitud de un lado del cuadrilátero superior derecho le hubiese generado dificultades en el cálculo tanto de las medidas de los lados del cuadrilátero final como las áreas correspondientes y tercero, si el tercer término al tener organizado el trinomio (en caso hipotético) fuera $(7x)$ las magnitudes del cuadrilátero inferior derecho fueran (*7* y *1x*) ó (*7x* y *1*) pero no (*7* y *1*) como lo ha determinado el estudiante, este es el argumento de esta praxis es decir la *tecnología* $\theta 2$.

Es de resaltar como en otros ejemplos anteriores que el estudiante para representar las magnitudes del cuadrilátero inferior derecho toma dos cuadros de la cuadricula para representar la magnitud 7, mientras que para representar la magnitud 1 toma tres cuadros de la cuadrícula notándose ahí nuevamente que no hay una conservación en la escala tomada por el estudiante en sus representaciones geométricas, indicando con esto nuevamente que él usa sus figuras sólo como herramientas de representación con carácter ilustrativo.

Al igual que en todos los casos anteriores toda esta actividad la soporta la teoría que se denominará como:

d. *Teoría* $\Theta 2$ la cual se diferencia de la anterior porque no incluye el axioma de aditividad de áreas, en esta teoría están los argumentos teóricos de las tareas, las técnicas y las tecnologías presentes en esta actividad matemática ejecutada por el estudiante, como se muestra a continuación:

- Axioma: El área de un rectángulo de lados b y h, es$A = b * h$

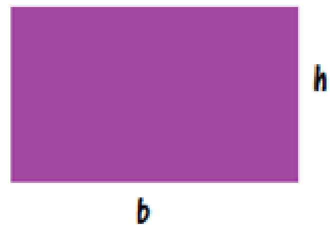


Figura 41. Área del rectángulo.

- Axioma: Dados dos segmentos AB, BC se cumple que $mAB + mBC = mAC$, si los segmentos son colineales y consecutivos.

Figura 42. Suma de las magnitudes de dos segmentos.

- Propiedades de los cuadriláteros:
  - Los lados opuestos de los rectángulos son paralelos dos a dos.
  - Los lados opuestos son congruentes.
  - Los ángulos opuestos son congruentes.

De igual forma se puede observar que en la construcción del Puzzle el estudiante utilizó implícitamente estos argumentos teóricos porque para conseguir la magnitud de cada lado del cuadrado final fue necesario considerar que los lados que conformaban el lado final eran consecutivos y colineales. También se valió de las propiedades de los cuadriláteros para la construcción de Puzzle porque debía dibujar 4 cuadriláteros de tal manera que al final consiguiera que los lados y ángulos opuestos fueran congruentes dos a dos y que los lados además fueran paralelos igualmente dos a dos. Y al final como se dijo anteriormente el estudiante no logró dar respuesta a la $T1$.

Estudiante N°7

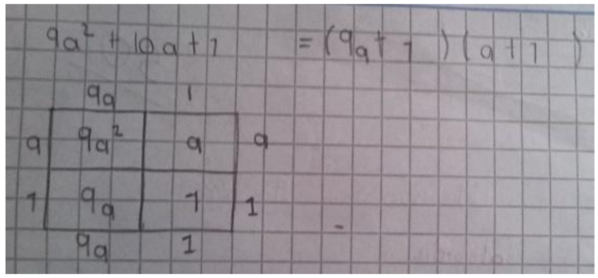


Figura 43. Actividad del estudiante N°7.

En esta imagen se tiene el trinomio $9a^2 + 10a + 1$ y se puede observar que el estudiante ha realizado la tarea de la consigna T_1 al igual que los estudiantes anteriores, dividiéndola en varias tareas, para este ejemplo en dos, esto se hace visible en los dos pasos mediante los cuales consigue dar respuesta a T_1, así:

I. En el primer paso:

a. Se puede notar que la *tarea* т1 consiste en construir un rectángulo con cuatro cuadriláteros semejantes tales que el áreas por sesiones de este representa al trinomio inicial, y cuyas medidas de sus lados, para uno es igual a la suma de un factor del primer término y uno de los factores del tercer término $(9a + 1)$, y para el otro lado la suma del otro factor del primer término y el otro factor de los del tercer término $(a + 1)$, tales como ha distribuido estos factores en los lados de los rectángulos inferior derecho $(1\ y\ 1)$ y superior izquierdo $9a\ y\ a$, tal como aparece la *figura 42.*

b. La *técnica* $\tau 1$ que usa para realizar т1consiste en realizar la composición de figuras geométricas con sus áreas respectivas haciendo uso de la herramienta Puzzle algebraico.

c. Para ejecutar esta técnica y conseguir el rectángulo final el estudiante hace uso de los factores que determinar el primer término $(9a^2)$para asignarle a los lados del rectángulo superior izquierdo a construir es decir $9a$ y a; los factores que determinan el tercer término (1) para asignarle a los lados del rectángulo inferior derecho a construir es decir $(1 \text{ y } 1)$ y a los otros dos cuadriláteros les asigna los valores correspondientes por paralelismo y congruencia entre segmentos, este es el argumento de esta praxis es decir la *tecnología* $\theta 1$.

Es de resaltar nuevamente como en un ejemplo anteriormente analizado que el estudiante para representar las magnitudes del cuadrilátero inferior derecho toma 3 cuadros de la cuadricula para representar la magnitud 1, mientras que para representar la misma magnitud 1 toma dos cuadros de la cuadrícula, notándose ahí nuevamente que no hay una conservación en la escala tomada por el estudiante para las representaciones geométricas, es decir que el estudiante solo usa sus figuras como herramientas. Por otra parte volviendo a lo anterior no se debe olvidar que los factores que generan el primer y tercer término en general no son únicos, por eso el estudiante aunque no lo muestre hace la verificación que la suma de las áreas del rectángulo inferior izquierdo $(9a)$y superior derecho (a) equivalen al segundo término $10a$; se debe aclarar y resaltar que el estudiante tuvo que recurrir a sus propias técnicas ya que en la docencia directa se le había dado la forma de cómo clasificar los trinomio para este caso $ax^2 \pm bx \pm c$, se le había indicado que en este tipo de casos ni el primer ni el tercer debían tener raíz cuadrada exacta, pero se puede ver que este sí la tienen, pareciendo inicialmente un trinomio cuadrado perfecto, pero la verificación del segundo término[3]$(10a)$ como implícitamente la

[3]Recordando que para el trinomio cuadrado perfecto se le había indicado en la docencia directa a los estudiante que para verificar el segundo término del trinomio debía verificar en particular para este ejemplo que $2 * 3a * 1 = 6a$ sea igual a $10a$, pero en efecto aquí no se da por tanto se descarta que sea de este tipo de trinomios.

debió hacer el estudiante le permitió descartar que era un trinomio cuadrado perfecto y que efectivamente se resolvía como los trinomios de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$.

II. En el segundo paso:

a. Se realiza la *tarea* т2 que consiste en representar algebraicamente el área del cuadrado final con dos expresiones distintas una es el trinomio $9a^2 + 10a + 1$y la otra es $(9a + 1)(\mathrm{a} + 1)$.

b. La *técnica* $\tau 2$ que usó el estudiante consistió por una parte dado que los cuadriláteros que componen al Puzzle no se intersecan y forman una sola pieza, entonces la suma de las áreas de estos es igual al área del rectángulo final es decir es igual al trinomio inicial; por otra parte reconoce que el Puzzle finalmente construido como es un rectángulo se puede usar la fórmula para el cálculo de área $A = b * h$ donde $b = 9a + 1$y $h = a + 1$, y de esta manera procede a igualar al trinomio con la otra expresión es decir $9a^2 + 10a + 1$ = $(9a + 1)(\mathrm{a} + 1)$.

c. La *tecnología* $\theta 2$ o argumento de esta praxis tiene que ver con la relación que encuentra el estudiante entre las dos expresiones porque los cuadriláteros pequeños no se intersecan y forman la pieza final, por tanto las dos expresiones representan el área de la misma figura.

Al igual que en todos los casos anteriores toda esta actividad la soporta la misma teoría que se ha denominado:

d. *Teoría* $\Theta 1$ la cual da los argumentos teóricos de las tareas, las técnicas y las tecnologías presentes en esta actividad matemática ejecutada por el estudiante.

De igual forma se puede observar que en la construcción del Puzzle el estudiante utilizó implícitamente estos argumentos teóricos aunque no se vean reflejados geométricamente, porque para conseguir la magnitud de cada lado del cuadrado final fue necesario considerar que los lados que conformaban el lado final eran consecutivos y colineales. También se valió de las propiedades de los cuadriláteros para la construcción de Puzzle porque debía dibujar 4 cuadriláteros de tal manera que al final consiguiera que los lados y ángulos opuestos fueran congruentes dos a dos y que los lados además fueran paralelos. De la misma forma que en ejercicios anteriores el estudiante se valió del axioma de aditividad de áreas para determinar que la suma de las áreas de los cuadriláteros que componen al Puzzle era igual al área total del mismo.

Finalmente de la misma manera se puede reconocer que este estudiante también logró dar respuesta a la consigna T_1reconociendo que era un trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$ y factorizarlo de la forma $9a^2 + 10a + 1 = (9\mathrm{a} + 1)(a + 1)$.

Finalmente para cerrar está bien precisar que los análisis anteriores se hicieron para casos representativos, es decir que las actividades registradas aquí no son las únicas realizadas de esta manera, hay casos similares realizados por otros estudiantes. Además de esta aclaración también se hace necesario decir que en los análisis siempre se habló de “el estudiante” pero esto no implica que el análisis se haya hecho únicamente para jóvenes de sexo masculino, solo que se estimó de esta forma para no entrar en la identidad de las personas involucradas.

Capítulo 4. Conclusiones y Recomendaciones

4.1. Conclusiones

En lo pedagógico y didáctico

- En el trabajo con trinomios y diferencia de cuadrados se evidenció que el proceso de factorización o el desarrollo de productos notables, pueden ser enseñados y aprendidos mediante reglas, pero esto ocurre siempre que los estudiantes establezcan una relación de conocimiento con el objeto matemático, de tal manera que haya conciencia que la actividad matemática realizada hace parte de un sistema que articula su praxis con la teoría que le da validez.
- Dentro de práctica pedagógica se presentaron muchas situaciones con las que no se contaban, que sirvieron de experiencia empírica a partir de la cual se pudo entender la realidad de la vida académica en un contexto curricular específico. En el proceso de ser docente se aprende día a día, esta cátedra con su aprendizaje no la da la academia exclusivamente, ésta no tiene una teoría que enseñe a solucionar las dificultades que se generen en el quehacer de la enseñanza; algunas de las situaciones que me hicieron reflexionar de esta manera, fueron: el paro de profesores, las intervenciones por actividades culturales o académicas extracurriculares como pruebas, cambios de horarios, acortamiento de las horas académicas, manejo de grupo en lo que se destacan los actos de indisciplina y un accidente de una estudiante e intervenciones sociales como la falta de servicios básico como el agua; pero al igual que todas las actividades de la vida, esta son unas más que dejan enseñanzas.
- La notable ruptura de la continuidad de las actividades de una sesión a otra, generó un cambió el ritmo en lo que había propuesto, ya que el hecho de tener una temática en

proceso de desarrollo y transcurrir mucho tiempo para continuarla, generaba inmediatamente un retroceso y hacia poco eficiente las actividades, debido a que se tenía que retomar lo tratado para empalmar con lo siguiente y conectar de alguna manera todo lo realizado con el desarrollo y la apropiación de un conocimiento.

De la perspectiva investigativa

- Un hecho a destacar luego de los análisis de los registros, es que la planeación del proyecto denominado Puzzle Algebraico estaba diseñado para desarrollar y estudiar la factorización de trinomios cuadrados perfectos, de la forma $x^2 \pm bx \pm c$ y de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$, pero en el transcurso de las tareas, las actividades que se desarrollaron paso a paso, terminaron estando apoyados en consignas de carácter geométrico, notemos que muchas de las indicaciones radican en la geometría: "…trace segmentos…", "…construya cuadrados…", "…construya rectángulos…", "…grafique…", "…ubique…", "…coincidan en el vértice…", "…valor del lado…", "…segmentos paralelos, consecutivos e igual magnitud…", "…calcula el área..", "…suma las áreas…", "…compare las áreas…", todo ello con la finalidad de igualar áreas, representadas de dos formas distintas, una como suma de términos algebraicos que constituyen un trinomio y otra como producto de binomios que al desarrollarlos generan dicho trinomio. Así en pocas palabra, planeamos hacer álgebra y terminamos haciendo geometría.
- De los análisis de los registros, se constató que de cada una de las actividades de los estudiantes aquí analizadas resulta una sola praxeología, sin embargo estas corresponden una misma configuración organizacional o configuración matemática, ya que se diferencian entre sí es solo el número de tareas realizadas por el estudiante para responder al ejercicio, y por supuesto en el número de técnicas y tecnologías, porque la

teoría es la misma para todas, a excepto en el caso del estudiante N°6. De esta manera se puede responder al objeto de estudio diciendo que sí existe una praxeología al enseñar productos notables y factorización con figuras geométricas, a esta la podemos llamar Praxeología Algebraica de Factorización mediante un Puzzle Algebraico.

- En los registros analizados es muy notorio que los estudiantes usaron las gráficas solo como herramienta de representación icónica o de ilustración, porque aunque adoptaron como escala de medida la longitud del lado de un cuadro de la cuadricula de la hoja del cuaderno, no conservaron dicho patrón en el desarrollo de las tareas porque incluso llegaron a representar magnitudes distintas con la misma medida geométrica.

4.2. Recomendaciones

- El modelo tradicional es uno de los más antiguos, con este se ha educado durante generaciones, sin embargo se debe reflexionar frente a él, ya que en la docencia directa realizada en la IE-ENSP, cuando fue necesario usarlo en dos sesiones se notó una fuerte incomodidad en los estudiantes hasta el punto de perder el interés por la orientación de la temática, así pues se recomienda que al igual que la sociedad actual es muy activa y distinta, se debe pensar en usar modelos más dinámicos.
- En la fase de las practicas pedagógicas es recomendado seguir la línea con un mismo docente, en este caso hubo una ruptura en la continuidad de ellas, causando esto ciertos inconvenientes porque se debe empalmar en cuanto a lo que se busca sistematizar y como se piensa ejecutar, teniendo en cuenta que cada docente tiene sus propias posturas filosóficas y epistemológicas sobre la educación matemática.
- Por la experiencia vivida en esta sistematización, en la cual no se había planteado el objeto de estudio antes de ir a desarrollar la docencia directa en la institución,

recomiendo que este se haga desde un comienzo al igual que la recolección de la información necesaria de agregar al documento, ya que por ejemplo para este caso por no hacerlo se perdió mucha información y solo se logró recuperar y hacer el estudio con poca de ella.

- Se puede ir más allá de los objetivos de docencia propuestos inicialmente, que en esta práctica pedagógica fueron los de enseñar la factorización y la resolución de productos notables con el uso de la herramienta del Puzzle Algebraico. Como lo ha sugerido el evaluador Freddy William Bustos, podemos usar estos instrumentos que ya tenemos para desarrollar juegos mentales con los estudiantes, por ejemplo: Calcular el cuadrado del número 21. Para solucionarlo de manera distinta a solo multiplicar 21*21, se puede escribir como (20+1) y como queremos el cuadrado de este podemos resolver $(20+1)^2$ lo cual sería igual a resolver un binomio al cuadrado, así: $(20+1)^2 = 20^2 + 2(20)(1) + 1^2$, donde los cuadrado de 20 y 1 son más sencillos de calcular, $(20+1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$
- Hay que ajustar la estrategia utilizada para subsanar las ambigüedades encontradas y evitar que se generen obstáculos didácticos que puedan afectar el desarrollo académico temporal o permanente de los participes. Por ejemplo, hubo ambigüedad cuando se asignó a algunos de los lados de los cuadriláteros del Puzzle y a sus áreas respectivas, números negativos. Aunque a los estudiantes se les indicó que las magnitudes y áreas siempre se representan con valores positivos y que las figuras geométricas, en este caso, solo jugaban el papel de herramientas metodológicas, no es esa advertencia un apropiada medida para superar la ambigüedad.

Lista de referencias

Timaná, D. y Torres, J. (02 de mayo de 2010). *Historia y visión futura de La Escuela Normal Superior de Popayán.*URL http://lahistoriadelaensp19352010.blogspot.com.co/2010/05/historia-de-la-escuela-normal-superior.html

Pachajoa, M. (22 de mayo de 2008). *Escuela Normal Superior de Popayán.*URL http://mariopbe.com/a8es.htm

Andrade, R. (16 de septiembre de 2011). *Historia de la Escuela Normal Superior de Popayán*. URLhttps://prezi.com/t50pqgif6c67/historia-de-la-escuela-normal-superior-de-popayan/

Oderlogica. (2014). *Institución Educativa Escuela Normal Superior de Popayán*. Popayán, Cauca: Oderlogica. URL http://normalpopayan.edu.co/

Arcos, J. (2014).Normal Superior de Varones “José Eusebio Caro”. *El Nuevo Liberal*. URL http://elnuevoliberal.com/normal-superior-de-varones-jose-eusebio-caro/

IE-ENSP. (2015). *Proyecto educativo institucional (PEI).* Recuperado de la coordinación académica de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Popayán.

IE-ENSP. (2011). *Plan de estudios de matemáticas (PE).* Recuperado de la documentación personal del asesor de la practica pedagógica Ángel Hernán Zúñiga Solarte.

IE-ENSP. (2015). *Sistema de evaluación y promoción escolar 2015*. Recuperado de la coordinación académica de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Popayán.

Secretaria IE-ENSP. (2016). *Listado de estudiantes*. Recuperado de la secretaria de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Popayán, sede primaria y sede secundaria.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (Ed.). (1998). *Serie de lineamientos curriculares.* Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (Ed.). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, Colombia.

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME).(Mayo, 2009). La noción de praxeología: un instrumento de la teoría antropológica de lo didáctico posible útil para socioepistemología. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 22*, p. 1195-p.1205. URL http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__6d5b352a-fe08-4185-806e-d918a8da04db/index.html TAD

Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.* Recherches en Didactique des Mathématiques.Vol. 19 N°2, p. 221-p. 266.Traducción de Ricardo Barroso Campos.

Nieto, N. y Otros. (2009). *¿Qué es la matemática educativa.* Juárez, México.Año 6 N°35, p.16-p.21.

Espinoza, L. y Otro. (2000). *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. Barcelona, España. Vol. 18 N°3, p. 355- p.358.

Juliao, C. (2011).*El enfoque praxeológico*. Bogotá, Colombia. Editorial UNIMINUTO. URL http://repository.uniminuto.edu:8080/jspui/bitstream/10656/1446/3/El%20Enfoque%20Praxeologico.pdf

Bosch, M. y Otro. (2009). *Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria*. Investigación en Educación Matemática XIII. Barcelona, España. p. 89- p.113.

Angulo, P. (2009). *monografias.com*. Carabobo, Venezuela.URL http://www.monografias.com/trabajos69/metafora-propuesta-teoria-antropologica-didactica/metafora-propuesta-teoria-antropologica-didactica.shtml.

Valestegui, W. (2011). *SlideShare.* Riobabamba, Ecuador. URL http://es.slideshare.net/wilsonvelas/metodologia-y-didactica-sistema-dual

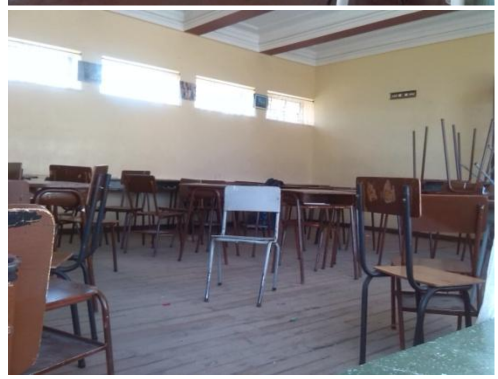
Modelo Constructivista. (2012). *Modelos pedagógicos.*URL http://modelospedagogicos.webnode.com.co/modelo-constructivista/.

Torres, G. (2009). Wordpress.com. Barranquilla, Colombia. URL https://gingermariatorres.wordpress.com/modelos-pedagogicos/

Londoño, J. (2006). *Geometría Euclidiana*. Medellín, Colombia. Editorial UDEA. URL https://deymerg.wordpress.com/2013/07/23/geometria-euclidiana-jose-rodolfo-londono-segunda-edicion-2006/

Gutierrez, J. *Build free website of your own on tripod*. URL http://jorge_cetis10.mx.tripod.com/objetivo34.html

Anexo 1: Fotografías de la planta física de la IE-ENSP



Anexo 2: Conducta de Entrada

CONDUCTA DE ENTRADA

Nota: El presente cuestionario no será evaluado, es para conocer sus conceptos previamente aprendidos; sólo se le exige ser sincero y responder de manera individual, para conocer cuáles son sus capacidades y partir de allí para el proceso académico que se llevara a cabo.

Preguntas con múltiple opciones, con única respuesta.

1. De estas definiciones, ¿Cuál podría ser una para el álgebra?

a. Conjunto de símbolos.
b. Una operación matemática.
c. Estudia las cantidades de manera general.
d. Ninguna de las anteriores.

2. La variable se podría definir como:

a. Una representación numérica.
b. Un valor aleatorio.
c. Representa una cantidad desconocida.
d. Todas las anteriores.

3. ¿Qué es una constante?

a. Una variable con un valor fijo.
b. Un número.
c. Una cantidad fija
d. Todas las anteriores.

4. ¿Qué es un factor?

a. Cada término de un producto.
b. Termino común en una expresión algebraica.
c. termino que multiplica a los demás.
d. Todas las anteriores.

5. ¿Qué es una igualdad?

a. Es una expresión algebraica con términos iguales.
b. Es una expresión bien sea matemática o algebraica igualada a otra que representa la misma cantidad.

c. El signo igual.

d. Ninguna de las anteriores.

6. ¿Qué es una potencia de un elemento?

a. El número que se multiplica varias veces.

b. La cantidad de veces que se multiplica un número.

c. El resultado de multiplicar varias veces un número.

d. Ninguna de las anteriores.

Según sus conocimientos adquiridos defina en términos de sus palabras los siguientes conceptos:

7. ¿Qué es una expresión algebraica?
8. ¿Qué es una ecuación?
9. ¿Qué es un polinomio?
10. ¿Qué es un producto notable?
11. ¿Que son términos semejantes?
12. ¿Qué es un monomio?
13. ¿Qué es un polinomio?
14. ¿Qué es el grado de un término?
15. ¿Qué es el grado de un polinomio?
16. ¿Qué es el coeficiente de un término?
17. ¿Qué es una división exacta e inexacta?
18. ¿Qué es el área de un polígono?

En términos de sus propias palabras:

19. Indique las partes de:

- La Suma
- La Resta
- La Multiplicación
- La División

20. Indique ley de los signos para:

- El producto
- La suma y resta

Anexo 3: Encuesta de análisis de resultados

ENCUESTA DE ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Haciendo una autoevaluación del cuestionario realizado responda:

1. De 1 a 5, siendo 1 el menor grado y 5 el mayor grado,

    a. ¿Cuál es su nivel de dificultades?

    b. ¿Cuál es su grado de asimilación de los conceptos enseñados?

    c. ¿Cuál es su grado de interiorización de los conceptos enseñados?

    d. ¿En general, cuanto cree que sabe de factorización?

2. Teniendo en cuanta el punto anterior:

    a. ¿Cuál cree(es) cree usted que es(son) la(s) causa(s) de la(s) dificultad(es)?

    - Aprendió para el momento______
    - No le interesó aprender______
    - Cree haber aprendido, pero no lo recuerda______
    - Nunca aprendió_____
    - Nunca entendió y le dio miedo preguntar______
    - No tuvo dificultades en la definición de los conceptos______
    - Otros factores _______ ¿Cuáles?_________________________________

3. Si tuvo dificultades, ¿Cómo cree que se deben mejorar?, Dé pautas y/o sugerencias.

Anexo 4: Familiarización y aclaración de saberes previos

Familiarización y aclaración de saberes previos

1) Algebra: Es el campo de la matemática que amplia de manera generalizada lo que se conoce en la aritmética, usando símbolos operacionales, algebraicos y numéricos.

   Ejemplos:

   - $2+3=5 \longrightarrow x+3=5$
   - $2(5)-4=6 \longrightarrow 2y-4=6$
   - $(-3)^3+17=-10 \longrightarrow t^3+17=-10$
   - $2^2-4(2)+4=0 \longrightarrow x^2-4x+4=0$

2) Variable: Es una representación literal (Generalidad del número), a la cual se puede fijar un valor o se deja indicada para darle un valor arbitrario de acuerdo al contexto o necesidad.

   Ejemplo:

   - x
   - t
   - z
   - m

3) Constante: Representa un valor fijo, el cual es invariable por la misma razón.

   Ejemplo:

   - 234
   - 56,899
   - $3/5$
   - $\sqrt[5]{23}$
   - t, con t=12

4) Factor: Es cada componente, elemento o término multiplicativo de un producto.

   Ejemplo:

   - $2*3$
   - $3*x := 3x$
   - $x^3 := x*x*x$
   - $(x+3)(x-2)$

- $-5(3z+2t)$

5) Igualdad: Es una expresión bien sea matemática o algebraica igualada a otra que representa la misma cantidad.

   Ejemplo:

- $2^3 \coloneqq 8$
- $2*3=6*1$
- $3h+3=9$
- $p^2-5p+6=(p-2)(p-3)$

6) Potencia: Es una forma abreviada de escribir, el producto de un mismo factor repetido un número de veces.

   Ejemplo:

- $6^3 \coloneqq 6*6*6$
- $v^4 \coloneqq v*v*v*v$
- $(x-3)^2 \coloneqq (x-3)(x-3)$
- $(\sqrt[2]{3x})^3$:=$(\sqrt[2]{3x})(\sqrt[2]{3x})$, con x≥o

7) Expresión algebraica: Es la representación simbólica de la aritmética generalizada, es decir es la unión de letras, números y signos operacionales, con sentido lógicamente operacional.

   Ejemplo:

- Expresiones algebraicas
  - k
  - $3n$
  - $-0.8(x-2t)$
  - $\frac{\sqrt{4x}}{6+v}$, con v≠ -6
  - 24
- Expresiones no algebraicas
  - $+-3x*/2$
  - $w^t-5r=$
  - $\sqrt{-3}xy-\frac{t}{0}$
  - 0^0

8) Ecuación: Es una igualdad de expresiones algebraicas, a las cuales se les debe hallar el valor de sus variable, de tal forma que se cumpla la identidad.

Ejemplo:

- $y^2 - 3 = 0, y = \pm 3$

9) Término: Es una expresión algebraica representado por uno o varios símbolo (Coeficientes, variables y exponentes), pero estos no están separado por los símbolo + o –

Ejemplo:

- $6mn$
- $\frac{2}{7}rt^2$
- $\frac{3kl^2}{-9bl^7}$
- $-3.456v$

10) Monomio: Es una expresión algebraica que consta de un solo termino.

Ejemplo:

- $-9x$
- $\frac{3}{8}$
- $\sqrt{2}fg^2$
- $\frac{4mnp^5}{7mn^3}$

11) Polinomio: Es una expresión algebraica, que consta de la suma resta de dos o más monomios

Ejemplo:

- $9 - 3y + \frac{2a}{b} - t^3$
- $x^3 + 2x^2 + x + 7$
- $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{5}$
- $a + b + c$

12) Grado de un término: Es el valor equivalente a la suma de los exponentes de sus factores literales.

Ejemplo:

- $6mn \longrightarrow$ Grado: $1 + 1 = 2$

- $\frac{2}{7}rt^2$ $\longrightarrow$ Grado: $1 + 2 = 3$
- $\frac{3kl^2}{-9bl^7}$ $\longrightarrow$ Grado:$1 + 2 - 1 - 7 = -5$
- $-3.456v$ $\longrightarrow$ Grado: 1

13) Grado de un Polinomio: Es mayor grado, escogido entre los grados de cada monomio que lo componen.

    Ejemplo:

- $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{5}$ $\longrightarrow$ Grado 2
- $x + y + z$ $\longrightarrow$ Grado 1
- $\frac{3x^3}{m} + \frac{y^2}{n} + m$ $\longrightarrow$ Grado 2
- $\sqrt{24}v^4 - \frac{4}{7}w$ $\longrightarrow$ Grado 4

14) Coeficiente de un término: Es el factor número que acompaña al factor literal si existe, en un término.

    Ejemplo:

- $-8{,}78p^6$ $\longrightarrow$ Coeficiente: $-8{,}78$
- $\frac{3}{8}md^7$ $\longrightarrow$ Coeficiente: $\frac{3}{8}$
- $\sqrt[3]{47}f^9g^3$ $\longrightarrow$ Coeficiente: $\sqrt[3]{47}$
- $r^{10}s^{15}z$ $\longrightarrow$ Coeficiente:1

15) Producto notable: Es un producto de polinomios que cumplen una característica específica siempre, por lo tanto se ha estandarizado una forma de encontrar su respuesta sin hacer el procedimiento para resolverlo.

    Ejemplo:

- $(x - 2)(x - 2) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$
- $(a^3 - b^2)(a^3 + b^2) = a^6 - b^4$
- $\left(x^{a+1} + y^{(x-2)}\right)\left(x^{a+1} + y^{(x-2)}\right) = \left(x^{a+1} + y^{(x-2)}\right)^2 = x^{2a+2} + 2x^{a+1}y^{(x-2)} + y^{(2x-4)}$
- $(1 - 8xy)(1 + 8xy) = 1 - 64x^2y^2$
- $(a^6 + 7)(a^6 - 9) = a^{12} - 2a^6 - 63$

16) División exacta: Una división es exacta cuando el residuo es igual a cero

Ejemplo:

- $\frac{400}{5} = (80), r = 0$
- $\frac{x^2-4x+4}{x-2} = (x-2), r = 0$

División inexacta: Una división se dice inexacta cuando el residuo es distinto de cero

Ejemplo:

- $\frac{65}{4}, r = 1$
- $\frac{6x^3-3x^2-5x+3}{3x^2-2}, r = -x+1$

17) Área de un polígono: Es la superficie representada por un polígono sobre un plano, de acuerdo a la forma del polígono se han establecido algunas fórmulas para el cálculo de su área.

Ejemplo:

- Área del cuadrado: $L * L$
- Área del rectángulo: $b * h$, donde $b = base, h = altura$
- Área del triángulo : $(b * h)/2$, donde $b = base, h = altura$
- Área de la circunferencia: πr^2
- Área de un polígono regular de n lados: $(L * a * n)/2$, donde

$$L = lado, a = apotema, n = númerodelados$$

NOTA: Las formulas del cuadrado, del triángulo y de cualquier polígono regular de n lados se pueden deducir de la fórmula del rectángulo.

18) Indique las partes de:

- La Suma:

$$\begin{tikzcd} \text{Sumando} & a+b=c \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{Suma} \\ & \text{Sumando} & \end{tikzcd}$$

- La Resta:

$$\begin{tikzcd} \text{Minuendo} & a-b=c \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{Diferencia} \\ & \text{Sustraendo} & \end{tikzcd}$$

- La Multiplicación: Factor $\leftarrow a * b = c \rightarrow$ Producto

$\downarrow$

Factor

- La División: Dividendo $\leftarrow \frac{a}{b} = c \rightarrow$ Cociente

Divisor $\leftarrow$

20) Indique ley de los signos para:

- En el producto: El producto de dos números reales con signos iguales da un numero con signo +, y el producto de dos números reales con signos distintos da un número real con signo -

$$+ * + = +$$
$$- * - = +$$
$$+ * - = -$$
$$- * + = -$$

Ejemplos:

- $(32)(-3) = -96$
- $(12)(4) = 48$
- $\left(-\frac{65}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{130}{12}$
- $\left(-\sqrt{25}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5\sqrt{25}}{4} = \frac{25}{4}$
- $-(3456) = -3456$
- $(15)(-2 + 60) = -30 + 900 = 870$
- $(-4)(6 - 70) = -24 + 280 = 256$
- $(-4)(6 - 70) = -24 + 280 = 256$
- $(x)(-z) = -xz$
- $(-t)(t - 6) = -t^2 + 6t$
- $-(k - 3d)(k + 3d) = -(k^2 - 9d^2) = -k^2 + 9d^2$

- En la suma y la resta: La suma de dos números reales con signos iguales da un número real con el mismo signo, la suma (Resta) de dos números reales con signo contario da un número real con el signo del mayor.

$+ + + = +$
$- + - = -$
$+ + - =$ Signo del mayor
$- + + =$ Signo del mayor

Ejemplos:

- $(12) + (344) = 356$
- $\left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{7}{7} = -1$
- $(-22) + (-8) = -30$
- $(10) + (-4) = 6$
- $(-35) + (45) = 10$
- $(-66) + (14) = -52$
- $(y - 3z)[-(2 + 5z)] = -[(y - 3z)(2 + 5z)] = -(2y - z - 15z^2)$
- $-(r^2 - 3r + 5) = -r^2 + 3r - 5$
- $[-(m^4 - n^8)][-(m^4 + n^8)] = m^8 - n^{16}$