ESTRATEGIAS PARA MEJORAR LA COMPRENSION DE CONCEPTOS APLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

JESUS MARTINEZ IBARRA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACUTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2017

ESTRATEGIAS PARA MEJORAR LA COMPRENSION DE CONCEPTOS APLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Trabajo de grado apara optar al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

JESUS MARTINEZ IBARRA

Director:
Mg. Orlando Rodríguez

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACUTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2017

Nota de aceptación

____

____

____

____

Director______________________________________

Mg. Orlando Rodríguez

Jurado ______________________________________

Mg. Willington Benítez

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 20 de Octubre de 2017

Dedicatoria

A mi madre Nora Martínez.

A mi hermana Ana María Martínez.

A mis hijos Dana Gabriela y Samuel Alejandro.

A mi esposa Carol Pinilla.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por manifestarse en mi vida para poder llevar a cabo este proyecto.

A mi madre y hermana quienes con su incondicional apoyo económico, intelectual, emocional y físico me dieron la fortaleza suficiente para poder culminar esta carrera de la mejor manera posible.

A mi familia quienes me dieron el amor, compañía, consejos, animo, momentos de alegría y la confianza suficiente para enfrentar obstáculos.

A mis apreciados amigos Jimena Andrea y Andrés por su apoyo y compañía durante este camino.

Al Magister Willington Benítez Chará, por respaldar, inspirar y dar el impulso inicial a esta práctica pedagógica.

A mi director de practica Magister Orlando Rodríguez, por su valiosa asesoría y el tiempo dedicado a la culminación de esta práctica pedagógica.

Finalmente, agradezco a la Universidad del Cauca por acogerme en sus instalaciones y a los profesores que, de una u otra manera, contribuyeron en mi formación como futuro Licenciado en Matemáticas.

Tabla de contenido

Resumen

El presente documento contiene algunas estrategias[1] de enseñanza y aprendizaje, implementadas para mejorar conceptos básicos que un estudiante debe conocer para solucionar problemas matemáticos con triángulos rectángulos. Estas estrategias se diseñaron bajo una concepción constructivista, la cual asume que, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el alumno construye conocimiento relacionando los nuevos conceptos y procedimientos que ha de aprender con los que ya posee en su estructura cognitiva[2] (Ausubel.D, 1983). Teniendo en cuenta esta concepción, este trabajo se realiza con el fin de lograr que los estudiantes de grado décimo de la Institución Técnica Tomas Cipriano de Mosquera, sede Manuela Beltrán, logren un aprendizaje significativo en esta área de conocimiento.

Con la ejecución de este proyecto, se concluyó que un aprendizaje significativo de los conocimientos básicos, brinda al estudiante mejores posibilidades de éxito en la resolución de problemas matemáticos con triángulos rectángulos.

---

[1]En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión optima en cada momento. (RAE., 2014)

[2]Conjunto de conceptos e ideas que un individuo posee sobre un determinado campo de conocimiento, así como la forma en la que los tiene organizados. (Williams, 2008)

Introducción

La práctica pedagógica del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, es un espacio curricular que acerca al estudiante a la realidad profesional en el contexto socio-cultural y educativo de nuestro país, con el propósito de que el futuro docente viva experiencias que fortalezcan su formación en distintos campos donde pueda identificar sus fortalezas y debilidades. En este sentido y como exigencia para optar al título de Licenciado en Matemáticas, el siguiente documento presenta la sistematización del proceso de la práctica pedagógica desarrollada en la Institución Técnica Tomas Cipriano de Mosquera, sede Manuela Beltrán, en el grado décimo durante el cuarto periodo del año lectivo 2014.

Este texto presenta estrategias de enseñanza y aprendizaje utilizadas para fortalecer conceptos relacionados con la resolución de problemas matemáticos utilizando triángulos rectángulos. Los conceptos trabajados son: el triángulo, propiedades del triángulo, altura de un triángulo, área de un triángulo, el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas y la resolución de triángulos rectángulos. Las estrategias se realizan con el fin de que el alumno se aproxime a un aprendizaje significativo de los conocimientos básicos necesarios para avanzar en la solución de problemas.

El documento está dividido en cinco capítulos, que en términos generales tratan de lo siguiente:

Capítulo I. aquí se expone el planteamiento del problema de investigación con su respectivo propósito, se justifica el proceso a desarrollar y se exponen el marco contextual con sus respectivos objetos matemáticos que permitieron llevar a cabo la práctica pedagógica.

En el Capítulo II se presentan los referentes teóricos que guiaron este estudio. Estos fundamentos se encuentran enmarcados bajo una noción constructivista sobre el aprendizaje significativo. Los referentes considerados son: La teoría de David Ausubel sobre el aprendizaje significativo, estrategias docentes para un aprendizaje significativo por Días Barriga y Hernández y resolución de problemas por George Polya.

El capítulo III presenta los objetivos de la práctica docente y la metodología que se utilizó en su ejecución: objetivo general, objetivos específicos, tipo de investigación, los participantes del proceso, la metodología de aula, las estrategias de enseñanza y aprendizaje de clase, los instrumentos utilizados en el proceso de recolección de datos y como se aplicaron.

Capitulo IV. Aquí se realiza un análisis cualitativo de la información obtenida a lo largo del proceso, el análisis se realiza en dos etapas, la etapa diagnostica y la etapa de ejecución. El objetivo de este capítulo es analizar lo sucedido durante el proceso a la luz del marco teórico y de puntualizar avances obtenidos durante la ejecución de la práctica.

En el capítulo V se presentan las conclusiones obtenidas en la culminación del proceso, también se presentan algunas recomendaciones dirigidas al plantel educativo donde se desarrolló el proyecto y a personas interesadas en aplicar propuestas similares relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y los anexos conformados por la prueba diagnóstico, las guías de clase, algunas estrategias empleadas en el aula y los instrumentos de recolección de datos

Capítulo I

1.1Justificación

Desde la experiencia, docentes y estudiantes pueden observar la importancia que tiene desarrollar habilidades para resolver problemas, no solo en matemáticas, sino en distintas áreas de conocimiento, por tal razón, los docentes se interesan en abordar esta problemática (Mayer, 1993,citado por Gasco.J). En la práctica se puede observar como proceden los alumnos a la hora de enfrentar esta situación, encontrando que la mayoría no se preocupan por comprender el enunciado, se saltan esta fase y simplemente se limitan a hacer cálculos con los datos que encuentran en él. Este comportamiento conlleva a indagar: ¿por qué ante la resolución de un problema inmediatamente buscan un algoritmo[3]para encontrar la solución?, ¿Por qué no se interesan en comprender el problema? Estos y otros interrogantes, conllevan a buscar respuestas sobre que está sucediendo con los estudiantes cuando realizan esta actividad.

De acuerdo a lo anterior, se intentó dar respuesta a la problemática, desarrollando la práctica docente en un curso de 28 estudiantes de grado décimo de la Institución Técnica Tomas Cipriano de Mosquera, sede Manuela Beltrán, utilizando el método de George Polya, "como plantear y resolver problemas". El desarrollo del proyecto planteado inicialmente no fue posible, ya que al realizar la prueba diagnóstico con la cual se pretendía iniciar la investigación, se evidenció que los estudiantes presentaban falencias en los conocimientos que se esperaba estuvieran claros para ellos. De acuerdo a lo sucedido, se

[3]Conjunto ordenado de operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar la solución de un tipo de problemas.

pudo constatar que una de las dificultades para la resolución de problemas, es no contar con los conocimientos previos que se necesitan aplicar para llevar a cabo esta actividad (Lopez.R.J.A, 2009).Considerando tal situación, se procedió a indagar la razón por la cual los estudiantes presentaban dificultades para entender y utilizar el teorema de Pitágoras correctamente, manejar las razones trigonométricas, tener claros conceptos como altura de un triángulo, línea horizontal, línea vertical, línea oblicua, ángulo de elevación, ángulo de depresión, manejo de calculadora y la resolución de triángulos rectángulos. De acuerdo a estas falencias, surgió una nueva problemática de investigación a la práctica pedagógica, la cual tiene como objetivo implementar estrategias de enseñanza y aprendizaje para reforzar tales conocimientos de manera significativa y dar solución a la nueva problemática. Para esto, nos apoyamos en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (1983), estrategias docentes para un aprendizaje significativo (Dias Barriga & Hernandez,R,G, 1999)y como plantear y resolver problemas (Polya, 1965).

Para resolver la nueva problemática, se plantearon estrategias de enseñanza y aprendizaje que permitieron a los estudiantes apropiarse de los conocimientos matemáticos básicos, necesarios para poder avanzar en la resolución de problemas con triángulos rectángulos.

1.2 Planteamiento del problema

La resolución de problemas es una de las actividades más controversiales[4] e importantes en la educación matemática, ya que pone en juego diversos conceptos y habilidades para poder lograr el objetivo deseado. Dentro de tales habilidades encontramos

[4] Discusión reiterada entre dos o más personas que defienden opiniones contrarias.

la capacidad de los estudiantes de articular[5] sus conocimientos previos y usarlos como herramientas para llegar a la solución del problema.

Por tal razón, el docente debe prestar especial cuidado a lo que el estudiante debe conocer para poder realizar dicho proceso, y más importante aún, lograr que el alumno se apropie de los conocimientos requeridos. En este sentido, resulta muy útil preguntarse ¿Cómo lograr que el estudiante adquiera tales conocimientos? de tal forma que logre una buena comprensión de los mismos. Ante esta situación, solo cuando se esté seguro de que los estudiantes han comprendido de forma clara estos conocimientos, es posible continuar adelante con el proceso de resolución de problemas.

Por lo antes expuesto, se hace necesario preguntarse ***¿Cómo mejorar en los estudiantes la comprensión de conceptos utilizados en la resolución de problemas con triángulos rectángulos?***

1.3 Marco conceptual

1.3.1 La trigonometría.

El termino trigonometría se deriva del griego “trígono” que quiere decir “triangulo” y “metrón” que significa “medida”, por eso se dice que es una división de la matemática, la cual se encarga de estudiar la relación que existe entre las medidas de los lados que conforman un triángulo y sus ángulos internos, su aplicación es usada en múltiples ciencias tales como la astronomía, la navegación y la geometría.

Esta ciencia es la que estudia las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente) además de intervenir de manera directa o indirecta en otras

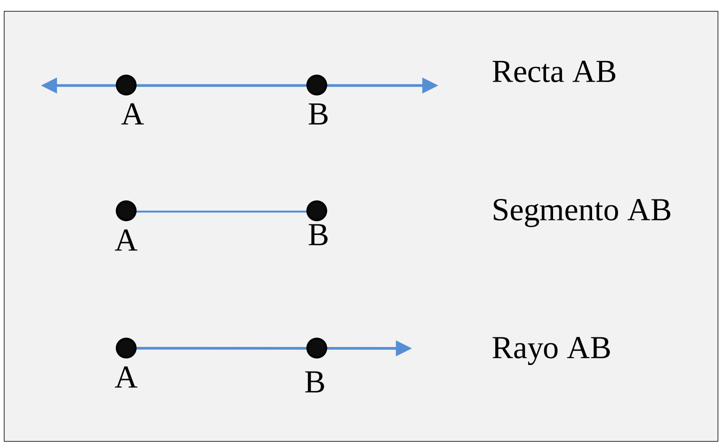
[5] Unir o enlazar dos piezas para logar un movimiento.

ramas de la matemática en donde se requiere la utilización de medidas precisas, tal es el caso de la triangulación, usada en la astronomía para medir la distancia entre las estrellas, puede ser aplicada además en la geometría del espacio.

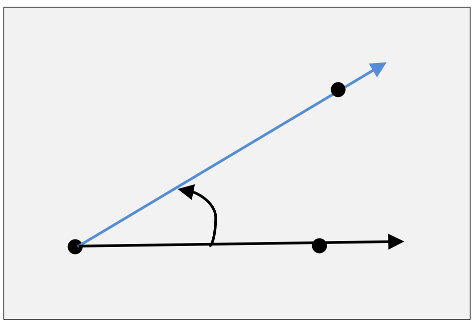
El origen de la trigonometría se remonta a la época del antiguo Egipto y Babilonia, pues para entonces ya se tenía el conocimiento sobre las proporciones de los triángulos, pero no poseían una medida de ángulo, por ende los lados de un triángulo eran estudiados en su medida, estas civilizaciones aplicaron esos conocimientos para estudiar la puesta y salida de los cuerpos celestes, movimiento de los planetas, se cree que para hacer dichos cálculos, los babilonios utilizaban una especie de secantes. Otro dato curioso es que los egipcios utilizaban para la construcción de las pirámides una especie de trigonometría primitiva. (conceptodefinicion.de, 2016)

1.3.2 el ángulo.

Dos puntos distintos A y B determinan una recta llamada *recta AB.* La parte de la recta entre A y B que incluye los puntos A y B, es el *segmento de recta AB,* o simplemente segmento AB. La parte de la recta AB que inicia en A y continúa a través de B, y pasa a B, se llama *rayo AB.* El punto A es el punto final del rayo.



Un ***ángulo*** se forma al girar un rayo alrededor de su punto final. El rayo en su posición inicial se llama el *lado inicial* del ángulo, mientras que el rayo en su posición después del giro está en el *lado terminal* del ángulo. El punto final del rayo es el *vértice* del ángulo. Si el giro del lado terminal se realiza en contra de las manecillas del reloj, el ángulo es *positivo.* Si el giro se lleva a cabo en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es *negativo.* (Lial, Hornsby, Schneider, & Dugopolski, 2006)



Definición

Sea $\angle BAC$ un ángulo en el plano. Un punto P está en el ***interior*** del $\angle BAC$, si (1) P y B están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$, y (2) P y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. El ***exterior*** del ángulo $\angle BAC$ es el conjunto de todos los puntos del plano que no están en el ángulo y que tampoco están en su interior.

Medida de un ángulo. Para medir un ángulo dado, se lo compara con otro, tomado como unidad. El número que expresa la razón del ángulo dado al ángulo unidad, es la medida del ángulo.

1.3.3 sistemas sexagesimal y sistema cíclico.

Unidades angulares. La medida de un ángulo puede expresarse en grados o en unidades cíclicas. La primera corresponde al *sistema sexagesimal* y la segunda al *sistema cíclico.*

En el **sistema sexagesimal**, el ángulo unidad es el ángulo de un grado, es decir, el ángulo que es la nonagésima parte del ángulo recto.

En el **sistema cíclico**, el ángulo unidad, llamado unidad cíclica o unidad de medida circular, es el ángulo central de una circunferencia cualquiera, cuyos lados interceptan un arco de longitud igual a la del radio.

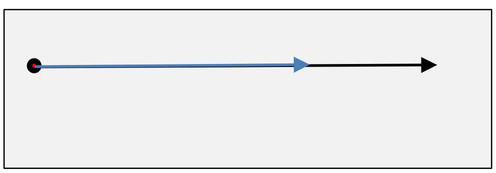
De ahí el nombre de *radiante* o *radián* que se ha dado a la unidad cíclica. (curso de Trigonometria rectilinea, 1978)

1.3.4 clasificación de ángulos.

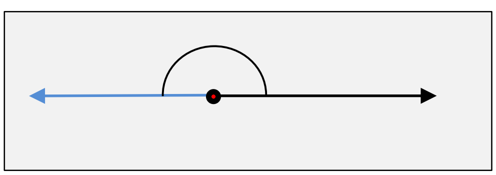
Se clásica los ángulos de acuerdo a su medida o a su posición con relación a otros.

Por su medida: pueden ser nulo, llano o rectilíneo, recto, agudo, obtuso, convexo, cóncavo y de una vuelta.

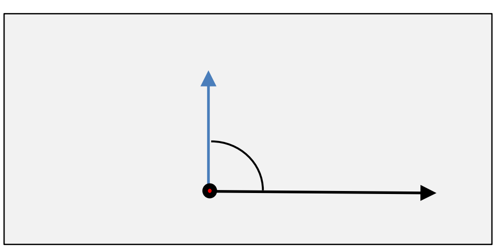
Ángulo nulo: mide 0º. Sus lados son dos rayos coincidentes.



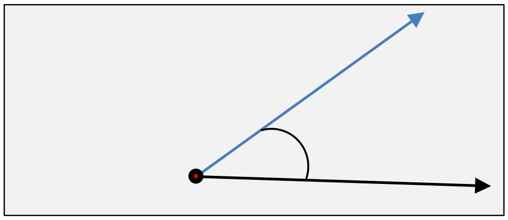
Angulo llano o rectilíneo: mide 180º. Sus lados son dos rayos opuestos.



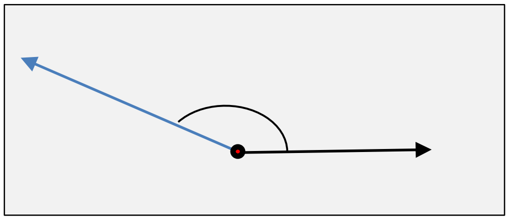
Angulo recto: mide la mitad de un Angulo llano, 90º.



Angulo agudo: todo aquel que mide más de 0º y menos de 90º.



Angulo obtuso: todo aquel que mide más de 90º y menos de 180º.



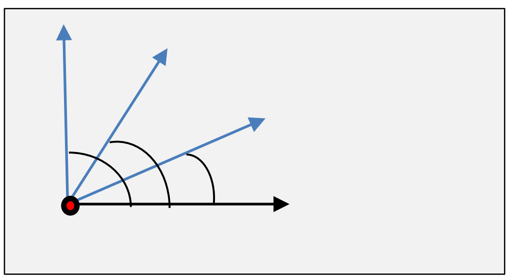
Angulo convexo: cuya medida está comprendida entre 0º y 180º.

Angulo cóncavo: si mide más de 180º y menos de 360º.

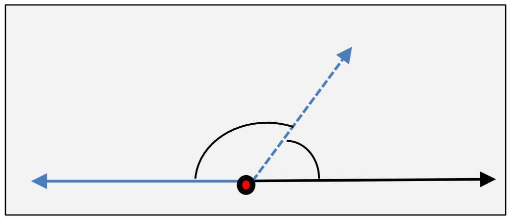
Angulo de una vuelta: se genera al girar un rayo, una vuelta completa alrededor de su origen. Mide 360º

Por su posición: se clasifican en consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice.

Ángulos consecutivos: dos ángulos son consecutivos si tienen el mismo vértice, un lado común y los otros lados en regiones distintas del común. Tres o más ángulos son consecutivos, si cada uno es consecutivo con su inmediato.



Ángulos adyacentes: denominado también, par lineal, son dos ángulos consecutivos cuyas medidas suman 180º.



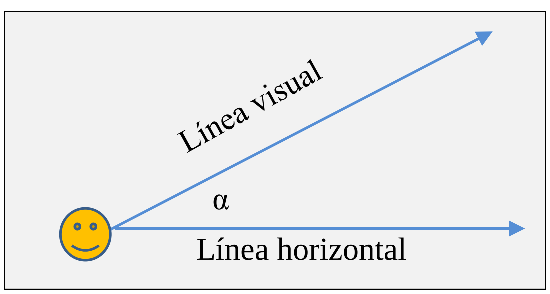
Ángulos suplementarios: son dos ángulos cuyas medidas suman 180º.

Ángulos complementarios: dos ángulos se llaman complementarios si sus medidas suman 90º.

Ángulos opuestos por el vértice: son dos ángulos, cuyos lados forman dos pares de rayos opuestos.

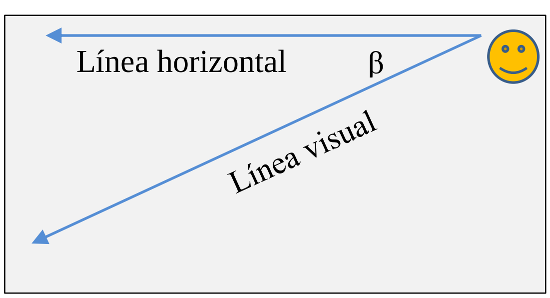
Otros ángulos muy importantes en trigonometría son:

Angulo de elevación. Es el ángulo que se forma entre la visual de un observador que mira hacia arriba y la horizontal.



α: Angulo de elevación.

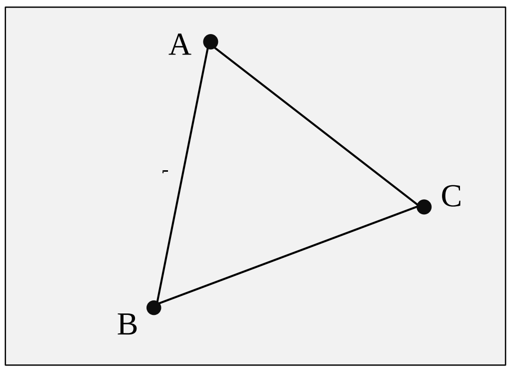
Ángulo de depresión. Es el ángulo que se forma entre la visual de un observador que mira hacia abajo y la horizontal.



β: Angulo de depresión.

1.3.5 el triángulo.

Si A, B, C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB},\ \overline{AC}\ y\ \overline{BC}$ se llama un *triángulo*, y se indica con ΔABC. Los puntos A, B, C se llaman *vértices*, y los segmentos AB, AC y BC se llaman *lados.* Todo triangulo ΔABC determina tres ángulos: $\angle ABC\ ,\angle BAC\ Y\ \angle ACB.$ A estos los llamamos los *ángulos* del ΔABC. Si está claro a que triangulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por $\angle A, \angle B\ y\ \angle C$.



Un punto está en el interior de un triángulo, si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo. Un punto está en el exterior de un triángulo, si está en el plano del triángulo, pero no está en el triángulo o en su interior. (Moise & Downs, 1972)

1.3.6 clasificación de los triángulos.

El triángulo, como polígono que tiene tres lados y tres ángulos, se clasifica según sus lados y según sus ángulos.

Según sus lados:

Equilátero. Tiene tres lados iguales.

Isósceles. Tiene dos lados iguales y el tercero con otra medida.

Escaleno. Tiene tres lados con distinta medida.

Según sus ángulos:

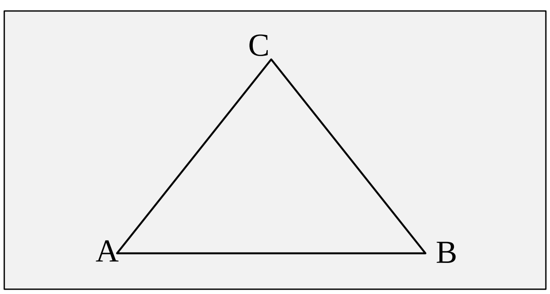
Rectángulo. Tiene un ángulo recto.

Acutángulo. Tiene tres ángulos agudos

Obtusángulo. Tiene Un ángulo obtuso

1.3.7 propiedades básicas de los triángulos.

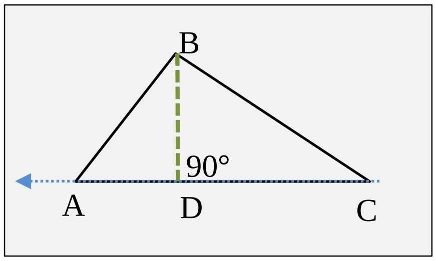
- Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°. Entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C$ =180º

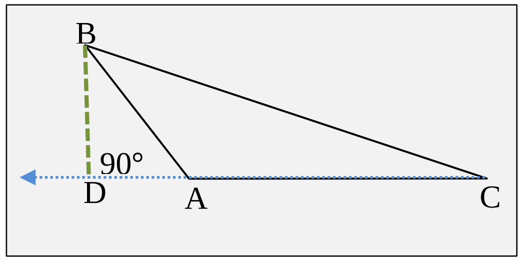


- Cualquier lado es mayor que la diferencia de longitudes de los otros dos y menor que su suma. Esta propiedad se conoce como desigualdad triangular.

1.3.8 altura y área de un triángulo.

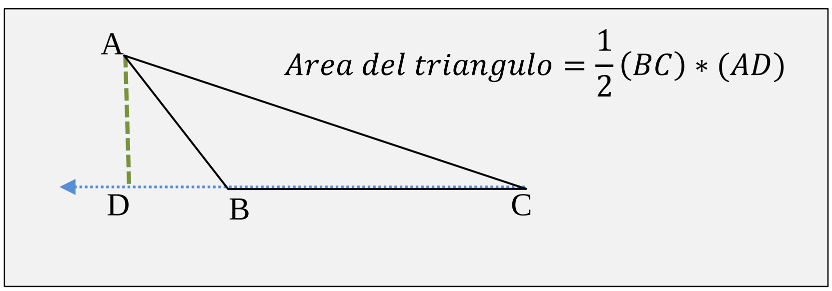
Se llama **altura** de un triángulo al segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo, a la recta que contiene al lado opuesto, como se observa en las figuras.





En cada caso, el segmento $\overline{BD}$ corresponde a una altura del triángulo dado.

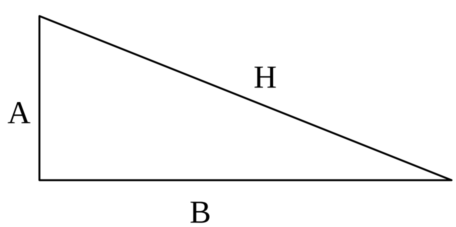
El **área** de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente.



1.3.9 teorema de Pitágoras.

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. (Pasquel & Riera, 1970)

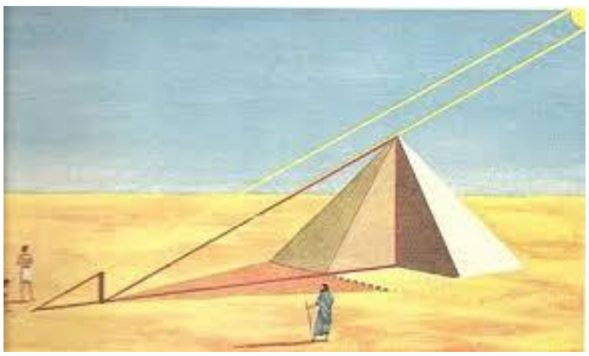
$$\boldsymbol{H^2 = A^2 + B^2}$$



1.3.10 razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

Uno de los problemas de la antigüedad, planteado por Tales de Mileto (640-550 a.C), fue el de la medición de la altura de la gran pirámide de Egipto, usando el concepto de semejanza de triángulos.

Según parece, Tales de Mileto coloco vertical un palo en la tierra cerca de la pirámide, de tal forma que se pudiera medir la sombra proyectada por este.



El triángulo rectángulo cuyos catetos son el palo y su sombra, es semejante al triangulo cuyos catetos son la altura y la sombra de la gran pirámide (midiendo la sombra desde el centro de la base

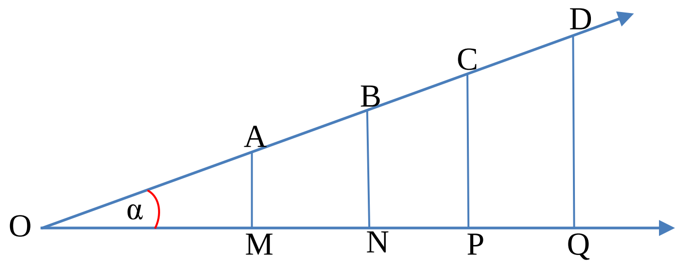
Supongamos, por ejemplo, que la longitud del palo era de 10 pies, que la sombra proyectada era de 16 pies y que la medida de la sombra de la gran pirámide era 770 pies.

Como los triángulos son semejantes, entonces se obtiene la proporción$\frac{10}{16} = \frac{h}{770}$, para deducir así que$h = \frac{770*10}{16} =$481pies.

A partir de este procedimiento fue donde tuvo origen la trigonometría, entendida como la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre las medidas de un ángulo.

Para entender mejor estas relaciones, vamos a estudiar el concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo.

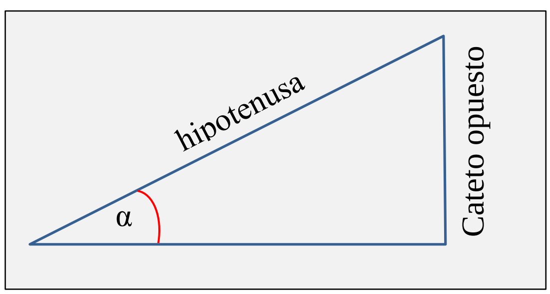
Para esto observemos la siguiente figura:



En la figura anterior hay en total 4 triángulos rectángulos, ΔOMA, ΔONB, ΔOPC y ΔOQD. Estos triangulo son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo agudo igual. Por tanto, es posible establecer proporciones entre sus lados correspondientes, así:

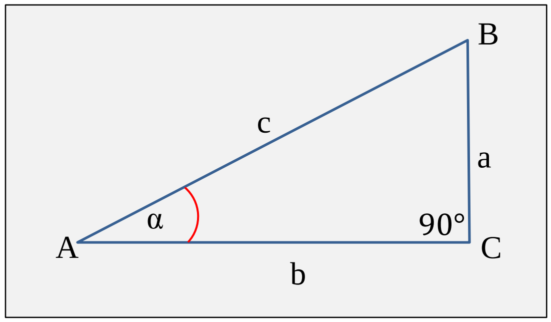
$$\frac{AM}{OA} = \frac{BN}{OB} = \frac{CP}{OC} = \frac{DQ}{OD}$$

Esto significa que si el ángulo α se mantiene constante, la razón entre el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa es siempre constante. A esta razón se le denomina seno del ángulo α, que se simboliza por $sen\ \alpha$.



¿Cuántas razones diferentes se pueden establecer entre los lados de un triángulo rectángulo?

Si ΔABC es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en C, es posible establecer las siguientes razones entre los lados, respecto al ángulo α. (Díaz & Jiménez , 2005; Díaz & Jiménez , 2005)



$$\sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad \csc a = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$\cos a = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad \sec a = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\tan a = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b} \qquad \cot a = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

1.3.11 resolución de triángulos rectángulos.

Una de las aplicaciones más inmediatas de la trigonometría es la resolución de triángulos.

Resolver un triángulo cualquiera consiste en calcular todos sus elementos: sus tres lados y sus tres ángulos.

- Para resolver un triángulo debemos conocer, al menos, tres de sus elementos, uno de los cuales necesariamente debe ser un lado.
- En todo triangulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Son muchas las situaciones donde se presentan problemas cuya solución se realiza mediante la solución de triángulos rectángulos. El uso de las razones trigonométricas junto con el teorema de Pitágoras, nos permite resolver cualquier triangulo rectángulo conociendo dos datos, uno de ellos ha de ser un lado.

- ***relación entre los lados. teorema de Pitágoras.***

- ***relación entre los ángulos.***

- ***relación entre ángulos y lados.***

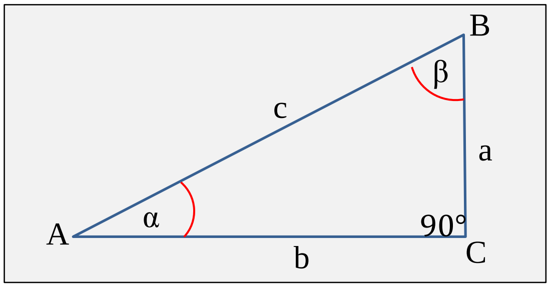
✓ **conocidos dos lados.**

_ El tercer lado se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

_ Uno de los ángulos agudos aplicando la razón trigonométrica que relacione los dos lados conocidos.

_ Para calcular el otro ángulo agudo basta considerar que la suma de los ángulos agudo es 90º.

Ejemplo: ***se conoce la hipotenusa (c) y un cateto (a)***.



El lado b se calcula aplicando el teorema de Pitágoras, por lo tanto:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Para hallar el ángulo α utilizamos la inversa de seno α. Luego, si

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arcsen\left(\frac{a}{c}\right)$$

Por último, para calcular el ángulo β, tenemos en cuente que:

$$\alpha + \beta = 90^{\circ}$$

$$\therefore \quad \beta = 90^{\circ} - \alpha$$

✓ ***conociendo un lado y un ángulo.***

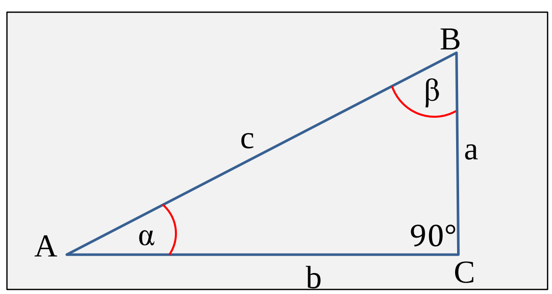
El proceso es similar al caso anterior.

_ Se calcula el otro lado mediante la razón trigonométrica adecuada del ángulo conocido.

_-Se calcula el tercer lado mediante el teorema de Pitágoras; o bien, mediante otra razón trigonométrica.

_ El otro ángulo es: 90 – ángulo conocido.

Ejemplo: ***se conoce la hipotenusa (c) y un ángulo agudo (α).***



Calculamos el lado (a) utilizando la razón trigonométrica seno α.

Como

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c * sen\alpha$$

Ahora hallemos el tercer lado (b) aplicando el teorema de Pitágoras. Esto es,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Por último, calculemos el ángulo restante β, $\quad \beta = 90° - \alpha$

Capitulo II

2.1 Marco teórico

2.1.1 resolución de problemas.

Desde el origen del ser humano, la resolución de problemas es una actividad que se debe a la propia existencia del hombre como ser racional, donde la vida misma lo ha enfrentado a situaciones problema a las cuales ha tenido que buscar solución para continuar con su supervivencia.

Sin embargo, con el pasar del tiempo, el hombre se ha planteado la resolución de problemas como objeto de estudio. Acorde a esto vale preguntarse ¿Qué se entiende por problema?

Aunque la palabra "problema" se utiliza en diferentes áreas con diferentes definiciones, para el desarrollo de este proyecto se tratara de clarificar con la siguiente definición que hace George Polya (1961) "un problema es una situación que requiere la búsqueda consiente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata". En este orden de ideas, se puede decir entonces que la "resolución de problemas" es el proceso mediante el cual el sujeto haciendo uso de sus conocimientos, logra de forma consiente alcanzar el objetivo que le ha planteado una situación dada.

De acuerdo a lo anterior vale rescatar que, la resolución de problemas depende del contenido específico del problema y de la interpretación mental que tenga el sujeto del mismo.

Por otro lado, desde una perspectiva didáctica e institucional, un problema es una situación que se plantea al estudiante dentro de un contexto escolar a la cual tiene que dar solución, buscando principalmente que el alumno aprenda contenidos de conceptos y procedimientos. (Escudero & González, 1999)

En los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN, se afirma que: uno de los procesos generales que debe desarrollar el estudiante es la resolución de problemas matemáticos, superando obstáculos que se presentan en la adquisición de tal competencia. En esta dirección, es conveniente preguntarse ¿qué tan difícil es para un estudiante llegar a dicho nivel de competencia? y más aún, ¿qué dificultades tiene que superar para lograrlo?

La resolución de problemas matemáticos escolares, es un proceso complejo que ha sido tratado y analizado por diferentes investigadores interesados en el tema, entre ellos tenemos a (Polya, 1965) quien plantea un método heurístico de cuatro pasos en la resolución de un problema matemático, cada uno de los pasos viene acompañado de preguntas y sugerencias que orientan al estudiante a entender lo que se pretende en cada paso. Según George Polya estos son: comprender el problema, crear un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás.

George Polya en su libro “como plantear y resolver problemas” señala la importancia que tiene el docente en asistir al estudiante para que este logre buenos resultados en cada etapa.

En el primer paso, George Polya plantea llevar el problema a un terreno que sea familiar para el estudiante mediante comprender el significado verbal del mismo, volver a releer el problema, identificar datos y si es posibles realizar gráficas para posteriormente relacionar datos y variables.

El segundo paso, crear un plan es quizá el más complicado en este proceso, ya que generalmente, en este tipo de actividades el profesor lleva la idea lista, de cómo resolver el problema y no se deja que sea el estudiante quien encuentre sus propias ideas. Por tal razón es importante que el docente preste mayor atención a lo que realiza el alumno en esta fase del proceso, para así dirigir al estudiante de tal manera que sea él quien logre encontrar ideas y trabajar el problema. En este sentido lo que se quiere es guiar al estudiante a construir sus propias ideas y no a imponérselas.

El tercer paso es el momento en el cual el estudiante se decide por desarrollar una idea o estrategia en particular, para así dar solución a la situación planteada. Si no se logra el objetivo esperado, entonces nuevamente se inicia el proceso de desarrollo de otra estrategia, hasta lograr conseguir una solución.

Finalmente, se llega a la cuarta etapa, mirar hacia atrás. Después de haber trabajado en los tres pasos iníciales se obtiene un producto, un resultado que quizás sea o no la respuesta correcta al problema planteado, para ello se reflexiona sobre el camino que condujo a la respuesta, logrando así mejorar los procesos de razonamiento en la resolución de problemas matemáticos.

Otra cuestión importante en la resolución de problemas, es rescatar su implementación en las aulas de clase. Desde este punto de vista, la resolución de problemas como actividad de clases constituye un procedimiento activo de aprendizaje donde el alumno es el principal protagonista, familiarizándose con la forma de hacer matemáticas y tomar conciencia de que la prioridad de las ciencias es resolver problemas que el hombre se ha planteado en el transcurso del tiempo. De esta manera el estudiante puede trasladar la resolución de problemas al mundo real.

2.1.2 la resolución de problemas como línea de investigación en educación matemática.

La resolución de problemas es una gran línea de investigación en educación matemática. Una forma de distinguir y situar una determinada investigación en esta actividad es distinguir los participantes que intervienen en ella. Desde el punto de vista escolar se deben tener en cuenta tres componentes a los que Chevallar (1985) considera como sistema didáctico, los cuales son: el problema, el estudiante y el profesor. La relación existente entre ellos, permite subdividir aún más la línea de investigación. Los tres componentes mencionados constituyen las dimensiones de un todo que permite enmarcar las investigaciones sobre resolución de problemas escolares. En unos casos, las investigaciones se centran en una o en más de una de estas dimensiones, pero con el cuidado de no perder la perspectiva de las otras dimensiones de manera individual.

Un claro ejemplo de lo anterior, lo presenta en uno de sus artículos (el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje) la revista Iberoamericana de educación, donde señala que al hacer un recorrido por los principales resultados de investigación, señala cuatro áreas de indagación en las cuales se han obtenido importantes progresos: la determinación en la dificultad en los problemas, la distinción entre buenos y malos resolutores de problemas, la instrucción en la resolución de problemas y el estudio de la meta cognición.

Los principales hallazgos consisten en la identificación de las variables causantes de la dificultad de los problemas, la interacción entre esas variables y su vinculación con las variables del sujeto, la distinción entre expertos y novatos y su caracterización, la determinación de algunos requisitos vinculados a la enseñanza en resolución de problemas y variados intentos de indagar sobre el rol de la metacognición en la resolución de problemas.

2.1.3 aprendizaje significativo.

En este apartado se plantea aclarar la noción de la expresión “aprendizaje significativo” para luego abordar la teoría de “aprendizaje significativo” de David Ausubel como principal referente de este proyecto.

Según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (RAE, 2009) aprendizaje se define como *“acción y efecto de aprender algún arte, oficio u otra cosa”*. De acuerdo a esta definición se hace necesario abordar el concepto de “aprender” que según el mismo diccionario se entiende como “adquirir el conocimiento de algo por medio del estudio o de la experiencia, concebir algo por meras apariencias o con poco fundamento, fijar algo en la memoria”

Desde una perspectiva psicodidactica (Gonzales Cabanach, 1997) existen dos concepciones de aprendizaje. La primera; muestra el aprendizaje como un incremento en el conocimiento, que refleja un claro componente cualitativo, aprendizaje como memorización donde se adquieren datos y procedimientos que pueden ser utilizados en la práctica.

La segunda noción; según Gonzales (1997) es la de un aprendizaje como “comprensión, un proceso interactivo que conduce al conocimiento de la realidad. La asimilación de nuevo conocimiento y la habilidad de explicarlo y aplicarlo en disciplinas relevantes o en áreas profesionales. Se contempla como el desarrollo de habilidades de pensamiento y abstracción de significado donde el aprendizaje necesita ser experimentado y construido sobre experiencias personales”.

Como se puede observar, el diccionario de la real academia de lengua española y Gonzales (1997) enmarcan el aprendizaje dentro de dos concepciones diferentes, la primera como una forma de adquirir conocimiento apoyándose en la memorización del sujeto, la cual según Gonzales (1997) se asocia más a lo superficial del concepto que se desea aprender.

La segunda concepción ve el aprendizaje como un proceso de construcción que brinda la posibilidad de llegar a una comprensión significativa de lo que se quiere aprender, la cual según Gonzales se asocia a lo interno del conocimiento.

Al tener claridad sobre las dos concepciones de aprendizaje. Es hora de establecer lo que se entenderá por "aprendizaje significativo" que es precisamente la noción que se adoptara en este proyecto. La noción adoptada está dada por David Ausubel (1983) en los siguientes términos:

Aprendizaje significativo: proceso mediante el cual el sujeto relaciona un nuevo conocimiento o información de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe.

Acorde a lo anterior se puede observar que el aprendizaje significativo está directamente relacionado con la segunda noción proporcionada por Gonzales (1997), donde el aprendizaje se concibe como un proceso de asimilación de nuevos conocimientos y la habilidad para explicarlos y aplicarlos en distintos contextos.

2.1.4 teoría del aprendizaje significativo por David Ausubel.

En 1963; David Ausubel divulga una explicación de la teoría cognitiva del aprendizaje verbal. Luego cinco años después en 1968 Ausubel realiza una ampliación de su teoría de asimilación haciendo énfasis en el aprendizaje significativo. Desde entonces sus ideas permanecen hasta nuestros días. (Rodríguez, 2004).

Esta teoría ha permitido a los educadores familiarizarse con la idea de aprendizaje significativo a través del tiempo, brindando la posibilidad a los docentes de profundizar en este tipo de aprendizaje, con el propósito de diseñar actividades que les ayuden a superar el memorismo tradicional y lograr acercar al estudiante a un aprendizaje más comprensivo y autónomo. Por tal razón se hace necesario adentrarnos en la teoría y profundizar en ella.

¿Qué es la teoría de aprendizaje significativo?

La teoría de Ausubel es una teoría psicológica del aprendizaje en el aula, ocupándose principalmente por lo que sucede en la práctica cuando el estudiante aprende; como la naturaleza de ese aprendizaje, las condiciones que se requieren para que este se produzca, los resultados y la evaluación del mismo. La teoría de Ausubel aborda todos los elementos, factores y condiciones que garantizan la adquisición, asimilación del contenido que la escuela ofrece al alumno, de modo que el estudiante adquiera un significado del mismo. (Rodríguez, 2004).

De acuerdo a lo anterior, la teoría de Ausubel ofrece un marco teórico pertinente para el diseño de estrategias de enseñanza en el aula, con el fin de estimular en el estudiante un aprendizaje significativo, donde éste no sea considerado un aprendizaje acumulativo de información por fragmentos, sino que se trata de un aprendizaje de anclaje o relacional que tiene en cuenta la estructura cognitiva de las ideas previas que tiene el sujeto a la hora de adquirir nuevo conocimiento. (Rodríguez, 2004)

Esta idea, que es la base central de este proyecto, Ausubel la sintetiza de la siguiente manera: “si tuviera que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente” (Ausubel, 1976).

2.1.5 Aprendizaje significativo.

Según Ausubel (1983) este aprendizaje se da “cuando el alumno relaciona los conceptos y les da sentido a partir de la estructura conceptual que ya posee: construye nuevo conocimiento a partir de los que ha adquirido anteriormente porque quiere y está interesado en ello”.

A partir de lo mencionado por Ausubel, el aprendizaje significativo presenta las siguientes características.

- El nuevo conocimiento modifica los esquemas mentales del estudiante.
- Se establece relación entre conocimiento nuevo y conocimiento previo.
- El estudiante se esfuerza por establecer la relación de conocimientos.
- El estudiante muestra disposición para aprender porque lo que se le quiere enseñar tiene significado para él.

Esto permite deducir, que en el proceso de enseñanza-aprendizaje es importante considerar lo que el alumno ya sabe, de manera que el docente ofrezca las condiciones necesarias para que el estudiante establezca relaciones con aquello que se le desea enseñar.

2.1.6 tipos de aprendizaje.

Para Ausubel, lo que el estudiante aprende son: símbolos, conceptos y proposiciones. Siendo los conceptos la base principal para llegar a un aprendizaje significativo, ya que estos sonla base del aprendizaje de proposiciones. (Rodríguez, 2004)

Aprendizaje de representaciones

Este aprendizaje se caracteriza por atribuir significado a determinados símbolos, según Ausubel (1983) "Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan" (Rodríguez, 2004)

Por ejemplo, el estudiante aprende una definición de triangulo a partir de su gráfica, más tarde, comprende que existen otras definiciones de triangulo, por lo cual puede generalizar su definición para abordar nuevos conocimientos. De esta manera crea los conceptos a partir de representaciones. Es decir, llega a comprender que una gráfica o definición no puede contener el concepto en su totalidad.

Aprendizaje de conceptos

Los conceptos son adquiridos a través de los procesos de formación y asimilación. En el proceso de formación las características del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis. En el proceso de asimilación el aprendizaje de conceptos se da a medida que el estudiante amplía su vocabulario, pues las características de los conceptos se pueden definir usando la información disponible en la estructura cognitiva del alumno (Ausubel.D, 1983).

Aprendizaje de proposiciones

Este aprendizaje implica la combinación y relación de varias palabras, cada una de las cuales se refieren a un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. Por ejemplo, en matemáticas se pueden relacionar las proposiciones con los teoremas, donde no solo basta conocer el significado de los conceptos que contiene el teorema, sino a partir de ellos establecer relaciones que permitan obtener un nuevo significado, logrando así, comprender el teorema (Ausubel.D, 1983).

2.1.7 aprendizaje significativo desde una perspectiva piagetiana.

Teniendo en cuenta que David Ausubel baso su teoría constructivista en los estudios de Jean Piaget, se hace necesario preguntarse sobre lo que Jean Piaget consideraba como aprendizaje significativo.

De acuerdo a la teoría piagetiana, no se tiene el concepto de aprendizaje, sino el de desarrollo cognitivo, ya que Jean Piaget habla sobre aumento del conocimiento. En este orden de ideas y con el fin de aclarar desde una perspectiva piagetiana la noción de aprendizaje significativo, vale establecer un tipo de analogía entre el desarrollo cognitivo de Jean Piaget y el aprendizaje significativo de David Ausubel.

La teoría de Jean Piaget (1971) sobre el desarrollo cognitivo tiene cuatro conceptos claves, la asimilación, acomodación, adaptación y equilibrio. La analogía con respecto a la noción de aprendizaje significativo se da con relación a los dos primeros conceptos de la siguiente manera:

Según la teoría de Jean Piaget la cognición hace referencia a los procesos mentales que conducen al conocimiento, como la memoria, la simbolización, la categorización, la solución de problemas, la imaginación, los sueños, etc. Por lo cual él considera la cognición como una red de estructuras mentales las cuales son creadas por el sujeto en un esfuerzo por dar sentido a las experiencias, a estas estructuras mentales Piaget las denomino esquemas.

De acuerdo esta teoría, el nuevo conocimiento se produce cuando los esquemas mentales cambian, pero para que ello ocurra, es necesario ciertas funciones intelectuales, una de ellas es la adaptación, la cual está constituida por los procesos de asimilación y acomodación, siendo la asimilación el proceso por el cual el individuo interpreta el mundo externo con base en los esquemas actuales que posee en su mente, y la acomodación que consiste en cambiar o crear un esquema nuevo para lidiar con un objeto o situación.

Por ejemplo, si a un estudiante que solo tiene conocimiento de la suma y la resta, se le pide resolver el producto 5x6. Seguramente va a responder que es 11, ya que de acuerdo a sus esquemas mentales él puede interpretar el producto como 5+6, porque ha asimilado la operación de acuerdo a la estructura cognitiva que posee.

Por otro lado, si el estudiante centra su atención en los símbolos (+) y (x), se dará cuenta que son diferentes, lo cual lo llevará a indagar sobre ello, por lo cual tendrá que crear un nuevo esquema para lidiar con este nuevo símbolo.

Teniendo en cuenta lo anterior, las *ideas previas* mencionadas por David Ausubel en el aprendizaje significativo, corresponden a *esquemas mentales actuales* en la teoría de Jean Piaget; el *nuevo conocimiento* en la teoría de David Ausubel corresponde a un *cambio de esquema* en la teoría piagetiana, y la relación entre *ideas previas e ideas nuevas* mencionadas por David Ausubel corresponde a la adaptación en la teoría de Jean Piaget. Es así, como podemos tener una noción de aprendizaje significativo desde una perspectiva piagetiana.

2.1.8 Condiciones para el aprendizaje significativo.

Ausubel también nos habla acerca de las condiciones que deben tenerse en cuanta para que el aprendizaje sea significativo (Ausubel.D, 1983)

_ Que el material sea potencialmente significativo, desde la lógica interna de la disciplina y desde la estructura interna del estudiante, es decir, establecer conexión entre las estrategias de enseñanza del profesor y las ideas previas del estudiante.

_ Disposición para aprender, es decir que el alumno muestre interés por relacionar las ideas nuevas con su estructura cognitiva.

_ Ideas previas, es importante que estas ideas sean claras para el estudiante y para el profesor, ya que son la base sobre la que se va a construir el nuevo conocimiento.

_ Motivación, en todo proceso de aprendizaje son de vital importancia las habilidades de la persona, las cuales a su vez dependen de la motivación, por lo cual es importante para logran un aprendizaje significativo.

2.1.9 estrategias de enseñanza para el aprendizaje significativo.

Las estrategias de enseñanza hacen referencia a las actividades propuestas por el docente para facilitar el proceso de aprendizaje del estudiante. De acuerdo a esto, es muy importante conocer diferentes estrategias para seleccionar las más adecuadas que faciliten al alumno obtener un aprendizaje significativo.

Según (Dias & Hernandez,R,G., 1998)el docente puede utilizar algunas estrategias que tienen como intención facilitar el aprendizaje significativo, las cuales han demostrado en diversas investigaciones efectividad en la dinámica[6] de la enseñanza en el aula de clase. Las estrategias referidas son las siguientes:

- ***Objetivos o propósitos del aprendizaje*****:** enunciado que establece condiciones, tipo de actividad y forma de evaluación del aprendizaje del alumno. Generación de expectativas en el alumno.

- ***Resúmenes:*** síntesis o abstracción de la información relevante de un discurso oral o escrito. Enfatiza conceptos claves, principios, términos y argumento central.

- ***Organizadores previos:*** información de tipo introductorio y contextual. Es elaborado con un nivel superior de abstracción, generalidad e inclusividad que la información que se aprenderá. Tiene un puente cognitivo entre la información nueva y la previa.

- ***Ilustraciones:*** representación visual de los conceptos, objetos o situaciones de una teoría o tema específico (fotografías, dibujos esquemas, graficas, dramatizaciones, etc.)

- ***Preguntas intercaladas:*** preguntas insertadas en la situación de enseñanza o en un texto. Mantienen la atención y favorecen la práctica, la retención y la obtención de información relevante.

[6] Conjunto de hechos o fuerzas que actúan con un fin determinado.

- ***Analogías:*** proporción que indica que una cosa o evento (concreto y familiar) es semejante a otro (desconocido y abstracto o complejo).

- ***Pistas tipográficas y discursos****:* señalamientos que se hacen en un texto o en la situación de enseñanza para enfatizar y/u organizar elementos relevantes del contenido por aprender.

- ***Mapas conceptuales y redes semánticas:*** representación gráfica de esquemas de conocimiento (indican conceptos, proposiciones y explicaciones).

- ***Uso de estructuras textuales****:* organizaciones retoricas de un discurso oral o escrito, que influyen en su comprensión y recuerdo.

2.1.10 estrategias de aprendizaje para un aprendizaje significativo.

Otra cuestión para analizar es la siguiente, el docente puede organizar todo su material de trabajo utilizando diferentes estrategias con el fin de alcanzar en el alumno un aprendizaje significativo, pero no es suficiente, ya que el estudiante puede aprender de manera mecánica o de manera significativa, por tal razón, es indispensable que el estudiante cuente con estrategias de aprendizaje que complementen las estrategias de enseñanza del docente, logrando así un aprendizaje de calidad.

Según (Dias Barriga & Hernandez,R,G, 1999) "una estrategia de aprendizaje es un procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) que un alumno adquiere y emplea de forma intencional como instrumento flexible para aprender significativamente y solucionar problemas y demandas académicas (Días Barriga, Castañeda y Lule, 1986; Hernández, 1991"

Los autores mencionados resaltan que las estrategias de aprendizaje, son ejecutadas voluntariamente por el individuo que aprende y su ejecución está asociada a procesos cognitivos disponibles del sujeto.

En este orden de ideas (Dias Barriga & Hernandez,R,G, 1999) describen factores relevantes en la adquisición de las estrategias de aprendizaje.

- Algunas estrategias son adquiridas solo con instrucción extensa, mientras que otras se aprenden muy fácilmente, incluso parecen surgir "espontáneamente" (Garner y Alexander, 1989)

- Algunas estrategias suelen ser muy específicas para dominios particulares, mientras que otras tienden a ser valiosas para varios de ellos (generalmente relacionados entre sí)

- El aprendizaje de las estrategias depende además de factores motivacionales (por ejemplo, de procesos de atribución "internos") del aprendiz y de que éste las perciba como verdaderamente útiles.

- La selección y el uso de estrategias en la situación escolar también depende en gran medida de otros factores contextuales, dentro de los cuales se distinguen: las interpretaciones que los alumnos hacen de las intenciones o propósito de los profesores cuando estos enseñan o evalúan (Ayala, Santiuste y Barriguete, 1993).

De acuerdo a lo anterior, se puede evidenciar que las estrategias de aprendizaje dependen del área de conocimiento en la cual se van a ejecutar, por lo cual los autores no exponen estrategias particulares a un área de conocimiento en particular, pero si se refieren en función de que se pueden clasificar:

> Intentar una clasificación consensual y exhaustiva de las estrategias de aprendizaje es una tarea difícil, dado que los diferentes autores las han abordado desde una gran variedad de enfoques. Las estrategias de aprendizaje pueden clasificarse en función de qué tan generales o especificas son, del dominio del conocimiento al que se aplican, del tipo de aprendizaje que favorecen (asociación o reestructuración), de su finalidad, del tipo de técnicas particulares que conjuntan, etcétera.

Teniendo en cuenta las recomendaciones planteadas por los autores mencionados anteriormente, las estrategias de aprendizaje se diseñan en función del objetivo principal que sustenta este proyecto. Por tanto, las estrategias a utilizar se expondrán más adelante en la metodología de esta sistematización.

Capitulo III

3.1 objetivos

3.1.1 objetivo general.

Implementar estrategias de enseñanza para mejorar en las estudiantes del grado decimo de la Institución Educativa Técnica Tomas Cipriano de Mosquera sede Manuela Beltrán la comprensión de conceptos aplicados en la resolución de problemas con triángulos rectángulo.

3.1.2 objetivos específicos

- Recolectar información que evidencie la problemática de las estudiantes en la resolución de problemas con triángulos rectángulos.

- Diseñar estrategias de enseñanza para mejorar la comprensión de conceptos utilizados en la resolución de problemas con triángulos rectángulos.

- Evaluar a las estudiantes para observar los avances obtenidos.

- Analizar los resultados obtenidos durante el proceso para hacer ajustes a las estrategias implementadas.

3.2 método

3.2.1 tipo de sistematización y participantes en el proceso.

El presente proyecto es una sistematización de carácter formativo de tipo exploratorio, desarrollada en la Institución Educativa Técnica Tomas Cipriano de Mosquera, Sede manuela Beltrán. Incorporándola en el currículo de matemáticas del grado decimo que cursaba el cuarto periodo del año lectivo 2014. El curso estaba conformado por 28 estudiantes de sexo femenino, entre las edades de 15 y 18 años. Quienes recibían las clases de forma presencial en jornada de la mañana.

3.2.2 etapas del proceso de intervención en el aula.

El proyecto se realizó en dos etapas: una diagnostica y otra de ejecución. La etapa diagnostica se llevó a cabo inicialmente para reconocer los conocimientos y las capacidades de las estudiantes antes de implementar las estrategias para fortalecer las falencias de las estudiantes en la resolución de triángulos rectángulos.

La etapa de ejecución se realizó a través de experiencias de aula, donde se analizó el desempeño del grupo con el propósito de evidenciar sus avances, logros y dificultades en el proceso de mejorar los conocimientos de forma significativa.

3.2.3 metodología de las sesiones de trabajo.

Cada sesión de trabajo tiene una duración de 2 horas de clase, cada hora tiene 45 minutos, por lo cual se divide en 1 hora de teoría y 1 hora de práctica. En la primera hora, el docente desarrolla sus guías de trabajo de manera oral y escrita, con la finalidad de reforzar los conocimientos básicos. En la segunda hora, se realizan ejercicios con la intención de que el alumno interiorice los conceptos vistos en la primera hora

La hora de práctica se desarrolla de forma individual o en grupo, se hace de manera colectiva, con el fin de generar un ambiente de interacción entre los estudiantes, donde el papel del docente consiste en aclarar dudas al interior de cada grupo, sin intervenir directamente con la solución de los ejercicios, dejando así, que los estudiantes reflexionen y encuentren sus propias respuestas.

Por último, se crearan equipos de trabajo con los estudiantes que presenten mayores dificultades en apropiarse de los conocimientos vistos en clase, con quienes se desarrollaran clases o ejercicios extras para reforzar los conceptos, logrando de esta forma nivelar el curso.

3.2.4 estrategias de enseñanza y aprendizaje utilizadas en el aula.

Estrategias de enseñanza

Las estrategias para la enseñanza son acciones de procedimientos y recursos utilizados por el docente con el fin de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información de forma más eficaz en su aprendizaje. (Dias Barriga & Hernandez,R,G, 1999)

Las estrategias de enseñanza utilizadas en el aula son:

- Presentación de los temas en lenguaje natural, para acercar al estudiante al manejo correcto del lenguaje matemático.

- Resolver ejercicios en forma individual y en grupo en el aula.

- Hacer foros sobre conceptos más importantes y sintetizar la información al finalizar la clase.

- Utilizar analogías, es decir, utilizar conceptos que sean familiares para el estudiante con el fin de enseñar conceptos nuevos.

- Trazar Graficas o presentación visual de los conceptos, objetos o situaciones de un tema específico.

- Esquemas u organización de la información (conceptos, definiciones, teoremas).

- Preguntas abiertas, utilizadas para la construcción de conceptos, definiciones o teoremas.

- Actividades en clase como estrategias puntuales para mejorar conceptos.

Estrategias de aprendizaje

Las estrategias de aprendizaje utilizadas en este proyecto, intentan estimular al estudiante para que sean autónomos e independientes en la adquisición del conocimiento, autorregulando su proceso para lograr un aprendizaje más significativo.

Las estrategias de aprendizaje utilizadas se clasifican en impuestas e inducidas (HERRERA, 2009).

IMPUESTAS: son impuestas por el profesor al realizar modificaciones o manipulaciones en la estructura del material de aprendizaje.

- Esquemas, para ordenar información.
- preguntas abiertas, para fortalecer el razonamiento lógico de los estudiantes.
- Gráficas, para captar mejor la información, lo cual ayuda a razonar de forma más eficiente.
- repaso antes de clase.

INDUCIDAS: se vinculan con el entrenamiento de los sujetos para manejar directamente y por sí mismos procedimientos que les permitan aprender con éxito.

- Repaso después de clase, para fortalecer lo aprendido.
- Realizar ejercicios extra clase.

3.2.5 instrumentos y metodología empleada en la recolección de información.

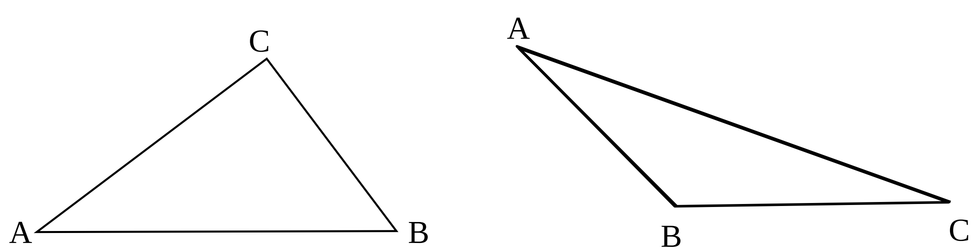
Los instrumentos utilizados y la metodología estuvieron en función de las dos etapas que se llevaron a cabo.

Etapa diagnostica:

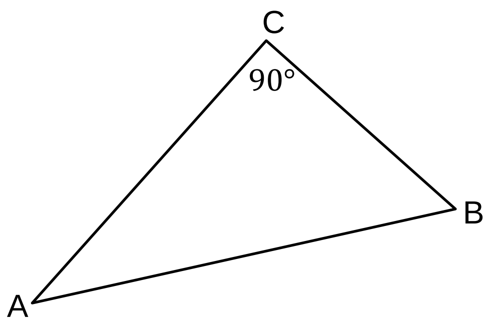
En esta etapa, se pretendía determinar los conocimientos previos adquiridos por el estudiante en los años anteriores en su formación académica. Para tal efecto, se diseñó una prueba diagnostico conformada por ocho ejercicios, orientados a evaluar contenidos específicos. De esta manera, se pudo establecer el nivel académico en el cual se encontraban las estudiantes con relación a los conocimientos previos, necesarios para resolver problemas matemáticos con triángulos rectángulos.

A manera de ejemplo se presentan dos de los ocho ejercicios que conformaban la prueba diagnóstica.

1. Trace las correspondientes alturas de los siguientes triángulos.



2. Para el triángulo rectángulo dado, escribe la fórmula del teorema de Pitágoras.

El primer ejercicio es de tipo geométrico. Con este ejercicio se pretendía determinar si el alumno reconoce las correspondientes alturas de un triángulo, lo cual implica manejar el concepto de segmento perpendicular a la recta que contiene los lados del triángulo.

El objetivo del segundo ejercicio era determinar si el estudiante reconocía la fórmula del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo correspondiente. Esto implica reconocer la hipotenusa, los catetos y como se relacionan entre sí en este teorema.

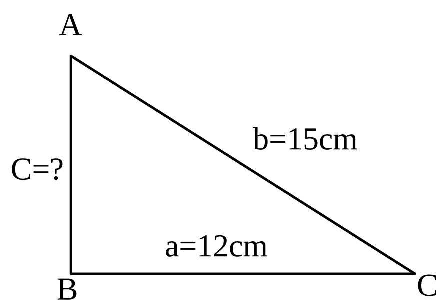
Etapa de ejecución:

Esta etapa se desarrolló teniendo en cuenta los resultados de la prueba diagnóstica. En esta fase se ejecutaron las estrategias de enseñanza-aprendizaje mediante experiencias de aula, denominadas sesiones de clase, en las cuales se tomaron registros, a través de los siguientes instrumentos.

- ✓ *Hojas de trabajo:* en cada sesión, después de explicar el tema correspondiente se plantearon diferentes ejercicios para desarrollar de forma individual o en grupo, con el propósito de que las estudiantes practicaran el tema visto en clase, las actividades desarrolladas por el alumno quedaban registradas en hojas, las cuales se denominan hojas de trabajo.

Se presenta a continuación, uno de los ejercicios planteados en las sesiones de clase, con los cuales se pretendía, además de practicar, evaluar los conceptos.

Ejercicio. Hallar el área del siguiente triangulo rectángulo.



Capitulo IV

4.1 Presentación y análisis de resultados

Los resultados obtenidos se presentan en dos etapas: una etapa diagnóstica y otra de ejecución. En la etapa diagnostica se hace un análisis cuantitativo que responde a los propósitos de la misma.

En la etapa de ejecución se hace un análisis reflexivo frente a lo que sucedió en este proceso, donde las hojas de trabajo desarrolladas por los estudiantes y las observaciones realizadas en la experiencia de aula, conforman los datos que se recolectaron en la ejecución de la práctica. Esta información será contrastada con los fundamentos teóricos que orientan este proyecto para evaluar los resultados obtenidos. Vale aclarar, que previo a la ejecución de este proyecto, el curso ya había desarrollado los contenidos que se desarrollaron en esta sistematización.

4.1.1 etapa diagnostica.

La prueba diagnóstica se aplicó a 28 estudiantes de grado decimo, con ella se pretendía determinar que concepciones, representaciones y significado tienen los alumnos con relación a los conocimientos relacionados con la resolución de triángulos rectángulos.

La prueba estaba conformada por 8 puntos, el ejercicio 1 y 2 de tipo conceptual, los puntos 3, 4, 5,6 y 7 de reconocimiento y el último ejercicio de razonamiento lógico.

La prueba arrojo los siguientes resultados; el 14,2% respondieron correctamente 5 puntos. Otro 14,2% respondieron correctamente 4 puntos, El otro 71,6% respondieron a lo más 3 preguntas de forma correcta. En términos generales, se podría afirmar que los conocimientos básicos evaluados no son significativos para los estudiantes, es decir, no los han interiorizado a lo largo de su aprendizaje.

Para tener una visión clara y precisa de los resultados obtenidos, se expone a continuación un análisis del desempeño de los estudiantes en cada uno de los puntos.

Análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en los 8 puntos de la prueba.

1.*¿Qué es la trigonometría?*

Los resultados de este primer punto se presentan en la siguiente tabla:

Resultados del primer punto

Respuestas	Pregunta 1
Correctas	5
Incorrectas	19
En blanco	4

Esta pregunta tenía como objetivo, determinar la noción que tenían los estudiantes frente a la asignatura que estudiaban. Llama mucho la atención observar que este punto es uno de los que tienen menos respuestas correctas. De acuerdo a lo sucedido, se pudo establecer que la mayoría de estudiantes tienen dificultades para asimilar y ordenar la información que es trasmitida por el docente.

2. ***Explica con tus propias palabras ¿qué es un ángulo?***

Los resultados a este punto se presentan en la siguiente tabla

Resultados del segundo punto

Respuestas	Pregunta 2
Correctas	17
Incorrectas	8
En blanco	3

Esta pregunta tenía como objetivo determinar el grado de madures del concepto de ángulo, se realizó porque dicho concepto es uno de los más repetitivos en el estudio de la trigonometría, por lo tanto, se esperaban mejores resultados que los obtenidos. Por tal razón, se hace necesario indagar más a fondo sobre otros conceptos relacionados con el tema a desarrollar.

3. ***El suplemento y el complemento de un ángulo que mide 20° es:***

a) 30° y 70°; b) 160° y 70° ; C) 60° y 160° ; d) 240° y 160°

Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

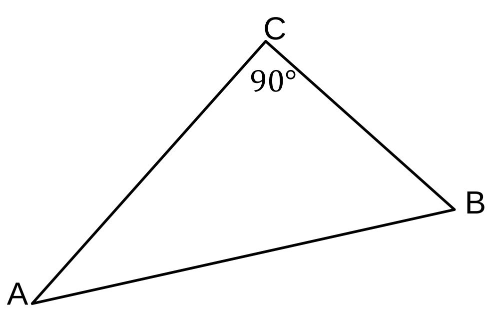
Resultados del tercer punto

Respuestas	Punto 3
Correctas	20
Incorrectas	6
En blanco	2

Este punto es el de mayor rendimiento en la prueba por su alto porcentaje (71,4%) de respuestas correctas, el objetivo de este ejercicio era determinar si los estudiantes tienen clara la diferencia entre suplemento y complemento de un ángulo, lo cual implicaba manejar cada uno de los conceptos.

.

4. *Para el triángulo rectángulo dado, escribe la fórmula del teorema de Pitágoras.*

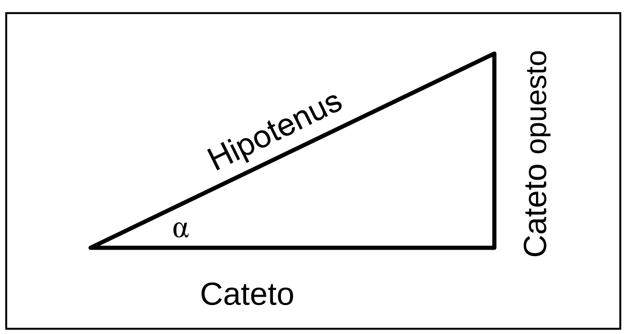
Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla

Resultados del cuarto punto

Respuestas	Punto 4
Correctas	12
Incorrectas	11
En blanco	5

Este punto es uno de los más importantes en la prueba, ya que el buen manejo del teorema de Pitágoras es fundamental para trabajar problemas con la resolución de triángulos rectángulos. El objetivo de este ejercicio era observar si el estudiante reconoce como mínimo la fórmula del teorema de Pitágoras, lo cual implica reconocer en un triángulo rectángulo, el ángulo recto, la hipotenusa y los catetos. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje relacionado con el teorema de Pitágoras.

5. *Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:*



- El seno es el cociente entre --------------------------- y ---------------------------

- La secante es el cociente entre ---------------------- y ----------------------------

- La tangente es el cociente entre -----------------------y ---------------------------

- El coseno es el cociente entre ------------------------ y --------------------------

Los resultados se presentan en la tabla siguiente:

Resultados del quinto punto

Respuestas	Punto 5
Correctas	19
Incorrectas	7
En blanco	2

Al parecer los estudiantes tienen buen dominio de las razones trigonométricas, por tanto, el refuerzo de las razones trigonométricas se centrara más en la resolución de triángulos rectángulos, donde se pueda observar el manejo de las mismas en contexto.

6. ***Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo B tal que:***

Sen (B)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Cos(B)=

b) Tan(B)=

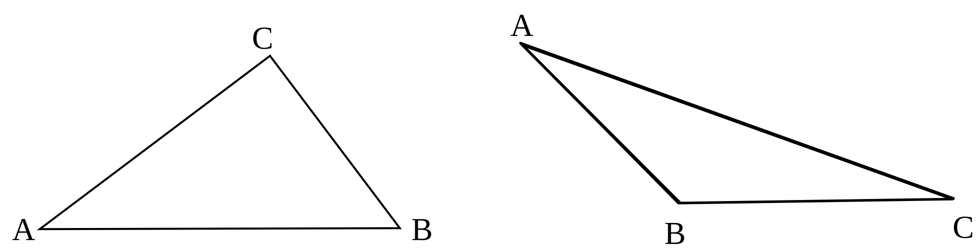
Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

Resultados del sexto punto

Respuestas	Punto 6
Correctas	2
Incorrectas	14
En blanco	12

De acuerdo a los resultados obtenidos, se puede observar claramente que los estudiantes presentan dificultades en el manejo de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos, lo cual conlleva a presentar dificultades en la resolución de los mismos, por lo cual tendrán dificultades para encontrar medidas de ángulos que se requieren en algunos casos para resolver un triángulo rectángulo.

7. ***Trace las correspondientes alturas de los siguientes triángulos.***



Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla

Resultados del séptimo punto

Respuestas	Punto 7
Correctas	4

Incorrectas	15
En blanco	9

Este punto era uno de los cuales se suponía que la mayoría de estudiantes o todos lo realizaran de manera correcta, pues este concepto es manejado a lo largo de los últimos cuatro años, como se puede observar, el supuesto no era correcto, por tanto, es necesario reforzar este concepto e indagar sobre otros conceptos que, aunque parezcan sencillos, el estudiante quizá no tenga dominio sobre ellos.

8. *Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podría medir un litro sin desperdiciar nada de leche?*

Los resultados se presentan en la siguiente tabla

Resultados del octavo punto

Razonamiento	Punto 8
excelente	0
Bueno	0
Simple	12
En blanco	16

Razonar de manera lógica resulta más complicado que solo resolver algoritmos, teniendo en cuenta esto y los resultados obtenidos, se observa que en este proceso de razonamiento los estudiantes presentan mayor dificultad, ya que este punto es el que presenta mayor número de respuestas en blanco, las respuestas obtenidas son muy simples. Estos resultados son de mucha utilidad para el desarrollo de la práctica, porque hacen suponer que los estudiantes en su aprendizaje están memorizando datos y algoritmos, pero quizás no pueden comprender conceptos utilizados en la trigonometría.

4.1.2 etapa de ejecución.

Entendiendo la sistematización como la interpretación crítica de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explicita la lógica del proceso vivido en ellas: los diversos factores que intervinieron, cómo se relacionaron entre sí y por qué lo hicieron de ese modo. (Acosta, 2005)

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en este proceso en función de los objetivos planteados.

Al iniciar este proceso, la prueba diagnóstico fue determinante, tanto así, que cambió el rumbo de lo planeado inicialmente, por tal razón, es uno de los primeros aspectos a rescatar en esta sistematización. A la luz del marco teórico que sustenta este trabajo, era necesario conocer los conocimientos previos de los estudiantes, la prueba inicial permitió concluir que los alumnos no contaban con los requisitos para abordar la resolución de problemas con triángulos rectángulos, lo cual conllevo a cambiar la dirección de este proyecto. En la evaluación se detectó que los estudiantes estaban presentando dificultades con algunas definiciones, conceptos y teoremas como se indicó en el análisis de resultados de la prueba diagnóstico.

De acuerdo a lo anterior y teniendo en cuenta lo que sucedió durante la ejecución del proyecto, se pudo determinar que los estudiantes se encontraban en un nivel que llamaremos nivel 1, donde presentaban dificultades con los triángulos y sus propiedades, el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas, la resolución de triángulos rectángulos y el lenguaje matemático. Los estudiantes reconocían el triángulo como un todo, pero no reconocían sus partes y propiedades.

Con respecto al teorema de Pitágoras los estudiantes realizaban manipulaciones sin sentido con tres fórmulas que tienen en su memoria, es decir, no realizaban una secuencia de razonamiento lógico que justificara lo que hacían. Con relación a las razones trigonométricas y la resolución de triángulos rectángulos, los estudiantes presentaban dificultades para reconocer en un triángulo rectángulo el cateto adyacente y el cateto opuesto con respecto a un ángulo dado, también presentan dificultades con el manejo de las razones trigonométricas inversas para encontrar un ángulo determinado, lo cual es un obstáculo para resolver triángulos rectángulos.

Por último, se pudo determinar que los estudiantes presentan dificultades con el lenguaje matemático, ya que no tenían claros los siguientes conceptos: horizontal, vertical, ángulo de elevación, ángulo de depresión, altura de un triángulo, cateto opuesto, cateto adyacente, hipotenusa, vértice, ángulo, entre otros.

Teniendo claras las dificultades que presentaban los alumnos con relación a los requisitos para abordar la resolución de problemas con triángulos rectángulos y el objetivo de este proyecto, se diseñaron una serie de estrategias basadas en el marco teórico que sustenta este trabajo, con el propósito de lograr en gran medida que los estudiantes avanzaran de nivel.

Las estrategias que a criterio de esta sistematización permitieron en gran medida potencializar las posibilidades de mejorar de los estudiantes fueron: Construcción de definiciones con preguntas abiertas, ordenar la información, explicaciones con gráficas, repaso antes de clase, actividades como estrategias puntuales para mejorar un concepto y la utilización de un lenguaje informal. Durante la ejecución de estas se pudo observar en la mayoría de estudiantes el efecto que causaban, porque mostraban cambios en su forma de participar en clase y desarrollar las actividades, es decir, incentivaban al estudiante a razonar mejor sobre lo que realizaban.

Luego de haber culminado este proyecto, era necesario conocer en qué nivel se encontraban los estudiantes después de haber vivido este proceso, para ello se realizaron una serie de ejercicios con problemas sencillos, donde los estudiantes tenían que poner en práctica todo lo aprendido.

Después de analizar los resultados obtenidos, se puedo estableces que gran parte de los estudiantes se encuentran en otro nivel con relación a los conceptos que se querían fortalecer, en este nuevo nivel se observa que los estudiantes ordenan la información, reconocen las partes del triángulo y sus propiedades, fortalecieron gran parte de los teoremas, definiciones y conceptos que les causaba dificultad, y lo más importante intentan hacer razonamientos de forma lógica utilizando la pregunta ¿Por qué? Cuando están realizando una actividad. Es decir, están intentando justificar lo que hacen.

Por otra parte, existen casos con estudiantes, donde el avance no fue tan significativo, donde los estudiantes no mostraban interés por las clases, ni asistir al plantel educativo con ánimo de estudiar, pues se distraían con facilidad y no mostraban actitud positiva en el desarrollo de las actividades, lo cual muestra casos que se deberían investigar para poder abordar el problema.

De acuerdo a lo sucedido a lo largo del proceso y teniendo en cuenta las teorías que sustentan este trabajo, se puede decir que lo sucedido en la ejecución de este proyecto se acerca a la teorías planteadas, pues se pudo determinar que en la dinámica del proceso, existen diferentes factores que deben tenerse en cuenta a la hora de poner en practica la teoría, como por ejemplo, la dinámica del grupo, ya que cada persona es distinta a otra, por tanto lo que funcione en algunos grupos, no siempre funciona para otros grupos. Acorde a este y otros factores y la falta de experiencia del docente, se puede concluir que entre lo planteado inicialmente y lo sucedido existe una gran diferencia.

Capítulo V

5.1 Conclusiones y recomendaciones

5.1.1 Conclusiones.

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas a partir de lo sucedido y los resultados obtenidos en la ejecución de este proyecto.

- Las estrategias implementadas en esta práctica pedagógica, permitieron a las estudiantes de grado decimo de la institución educativa Técnica Tomas Cipriano de Mosquera Sede Manuela Beltrán, avanzar en la comprensión de conceptos aplicados en la resolución de problemas con triángulos rectángulo.

- El diseño e implementación de estrategias que propicien en los estudiantes un aprendizaje significativo requieren de más investigación y mucho tiempo en comparación con una clase tradicional.

- la experiencia vivida permitió observar el desempeño de los estudiantes en las diferentes actividades, mostrando que en ocasiones los estudiantes no realizaban las actividades propuestas debido a no manejar correctamente el lenguaje matemático, por tanto, se hace necesario prestar mayor atención al aprendizaje de este lenguaje.

- Las estrategias utilizadas en esta experiencia basadas en la teoría de Ausubel incentivaron a muchos estudiantes a cambiar su forma de pensar con relación al aprendizaje de las matemáticas.

- La implementación de estas estrategias motivó a los estudiantes a reflexionar sobre sus acciones en las actividades planteadas, hasta llegar al punto de manifestar su satisfacción por entender algo que se les dificultaba.

- La implementación de estas estrategias hace que el avance del contenido matemático a desarrollar sea lento, pero este tiempo se ve compensado con los resultados obtenidos.

- La experiencia vivida ayuda a fortalecer la formación del futuro docente con relación a la educación en las matemáticas, ya que le permite acercarse a la realidad educativa que vive nuestro país.

- Trabajar el razonamiento lógico en conjunto con el desarrollo de los contenidos matemáticos ayudan a fortalecer el aprendizaje del estudiante, porque ayuda al estudiante a apropiarse mejor de los conceptos matemáticos.

- Si el estudiante no se interesa por aprender, difícilmente se obtendrán buenos resultados con las estrategias planteadas.

5.1.2 Recomendaciones.

A continuación, se presentan aspectos importantes de la experiencia vivida que deben tenerse en cuenta para obtener mejores resultados en prácticas similares.

- Utilizar la historia de las matemáticas para el diseño de estrategias pedagógicas para lograr un mejor aprendizaje significativo en los estudiantes, ya que la historia brinda momentos que pueden ser recreados o reconstruidos, brindando la oportunidad de que el estudiante comprenda mejor los conceptos, teoremas o definiciones.

- Utilizar las TIC como herramienta para complementar el diseño de las estrategias pedagógicas, teniendo en cuente que esta herramienta puede potencializar en el estudiante un aprendizaje significativo de forma más interactiva.

- Delimitar mejor el problema que se desea estudiar, porque la falta de experiencia hace que haya dificultades a la hora del diseño de estrategias, el diseño de guías de clase, toma de registros y análisis de los mismos.

- En la estrategia utilizada para construir un concepto con preguntas abiertas, se debe tener cuidado con la elección de preguntas que se formulen a los estudiantes, ya que pueden llevar a confusiones al estudiante.

Bibliografía

(1978). En A. Anfossi, & M. Flores Meyer, *curso de Trigonometria rectilinea* (pág. 24). progreso S.A.

Acosta, l. A. (2005). *Guía práctica para la sistematización de proyectos y programas de cooperación técnica.*

Ausubel.D. (1983). *TEORIA DEL APRENDISAJE SIGNIFICATIVO.* Obtenido de http://delegacion233.bligoo.com.mx/media/users/20/1002571/files/240726/Aprendizaje_significativo.pdf

conceptodefinicion.de. (20 de octubre de 2016). *conceptodefinicion.de*. Obtenido de conceptodefinicion.de: http://conceptodefinicion.de/trigonometria/

Dias Barriga, A., & Hernandez,R,G. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* Obtenido de http://www.urosario.edu.co/CGTIC/Documentos/estategias_docentes.pdf

Dias, B., & Hernandez,R,G. (1998). *Estrategias de enseñanza para la promoción de aprendizajes significativos.* Obtenido de http://www.uv.mx/dgdaie/files/2012/11/CPP-DC-Diaz-Barriga-Estrategias-de-ensenanza.pdf

Díaz , R., & Jiménez , N. (2005). *NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO 10,estándares basícos de calidad.* Libros y libros S.A.

Escudero, J., & González, C. (1999). *Resolucion de problemas matematicos*. salamanca.

Gasco.J. (s.f.). *La resolución de problemas en el currículo de matemáticas de Educación.* Obtenido de http://www.ehu.eus/ikastorratza/10_alea/matematika.pdf

Godino, J., & Batanero, C. (2003). *FUNDAMENTOS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS PARA MAESTROS.* Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Gómez, M. A. (2005). LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: LA HISTORIA DE UN CONCEPTO. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 83-115.

Gonzales Cabanach, R. (1997). concepciones y enfoques de aprendizaje. *Revista de psicodidactica*.

HERRERA, A. M. (2009). *LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE.* Obtenido de http://www.csi-

csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_16/ANGELA%20MARIA_HERRERA_2.pdf

Lial, M. L., Hornsby, J., Schneider, D., & Dugopolski, M. (2006). *lisbros trigonometria*. Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=K6WrCgekj3MC&printsec=frontcover&dq=trigonometria&hl=es&sa=X&sqi=2&pjf=1&ved=0ahUKEwjR1q-N277TAhXHJiYKHeg5B2QQ6AEIKjAC#v=onepage&q=trigonometria&f=false

Lopez.R.J.A. (2009). *La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje del nuevo contenido.* Obtenido de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_16/JOSE%20ANTONIO_LOPEZ_1.pdf

Moise, E., & Downs, f. (1972). Serie Matemática Moderna. En E. MOISE, *Serie Matemática Moderna* (págs. 76-77). Cali: Norma.

Moreira, M. A. (1993). APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: UN CONCEPTO SUBYACENTE.

Pasquel, J., & Riera, E. (1970). *geometria moderna.* ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA, S.A.

Polya, G. (1965). COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS. TRILLAS, MÉXICO.

RAE. (2014). *DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA*. Obtenido de http://dle.rae.es/?id=GxPofZ8

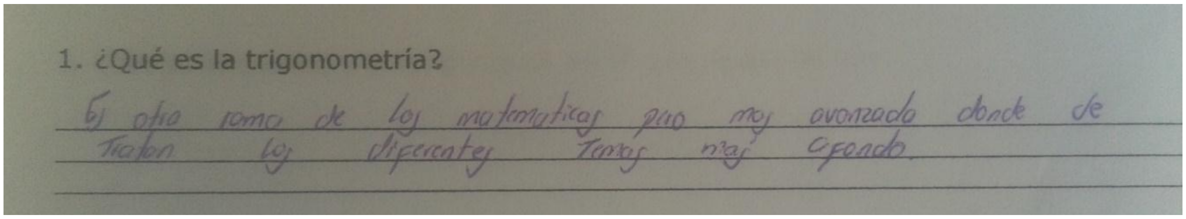
Rodríguez, M. L. (2004). *LA TEORIA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.* España.

Varela Nieto, M. p. (s.f.). *la resolución de problemas en la enseñanza de las cienciias.*

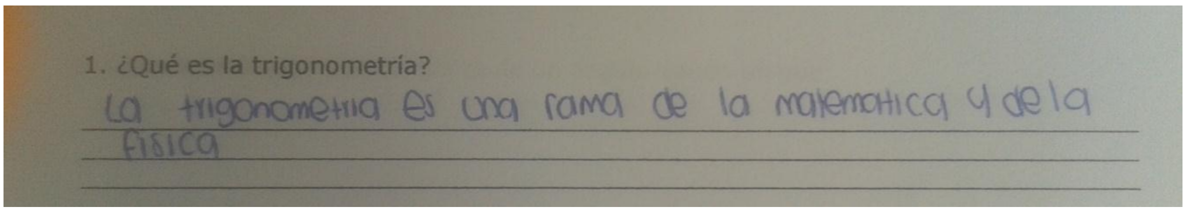
Williams. (05 de 11 de 2008). *blogdiario.com*. Obtenido de http://williams.blogspot.es/

Anexos

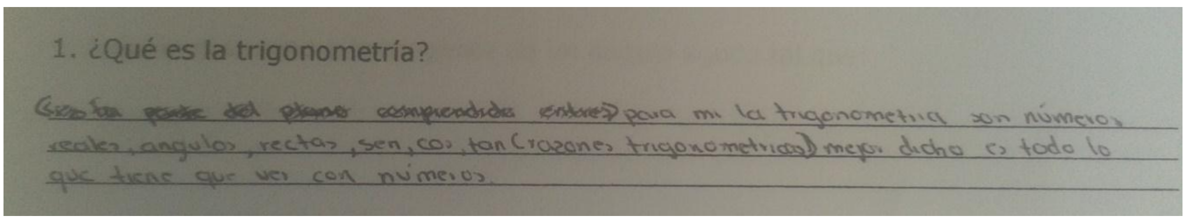
Anexo A. Respuestas Taller diagnóstico.


1. ¿Qué es la trigonometría?

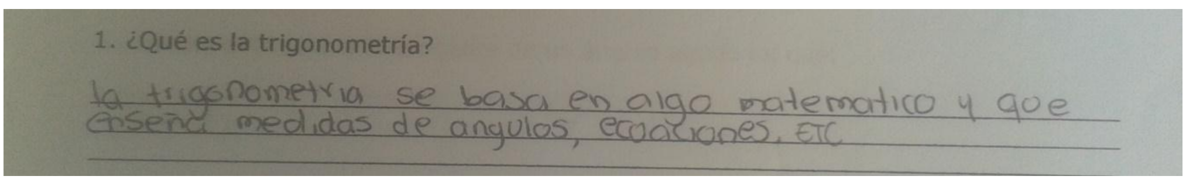
Es otra rama de las matematicas pero muy avanzado donde se tratan los diferentes temas mas operado.


1. ¿Qué es la trigonometría?

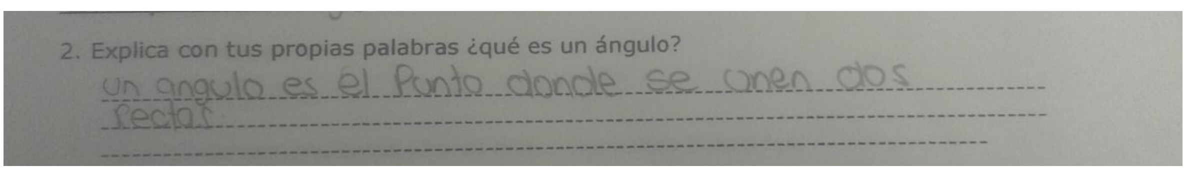
La trigonometria es una rama de la matematica y de la fisica


1. ¿Qué es la trigonometría?

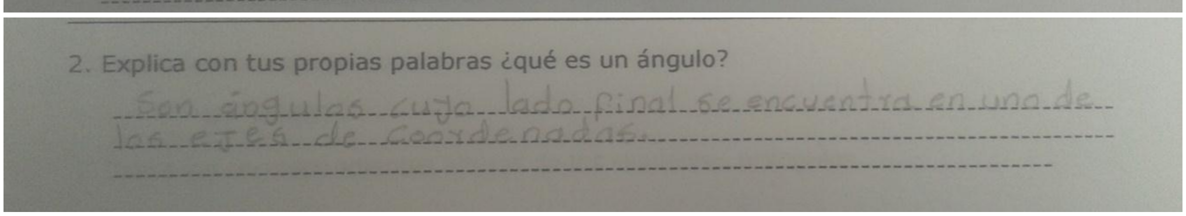
~~(son la parte del plano comprendida entre)~~ para mi la trigonometria son números reales, angulos, rectas, sen, cos, tan (razones trigonometricas) mejor dicho es todo lo que tiene que ver con números.


1. ¿Qué es la trigonometría?

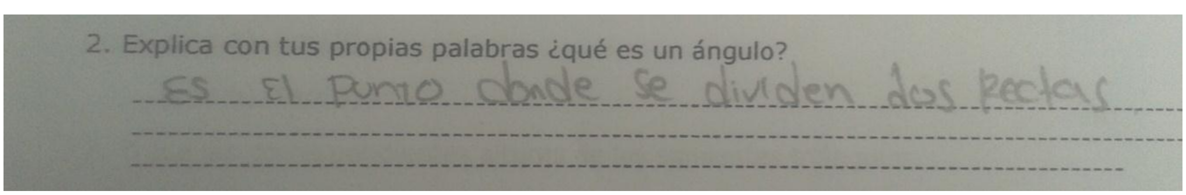
la trigonometria se basa en algo matematico y que enseña medidas de angulos, ecuaciones, ETC


2. Explica con tus propias palabras ¿qué es un ángulo?

un angulo es el Punto donde se unen dos rectas


2. Explica con tus propias palabras ¿qué es un ángulo?

Son ángulos cuyo lado final se encuentra en uno de los ejes de coordenadas.


2. Explica con tus propias palabras ¿qué es un ángulo?

ES El Punto donde se dividen dos Rectas

2. Explica con tus propias palabras ¿qué es un ángulo?

El ángulo es la unión de dos rectas en un triángulo

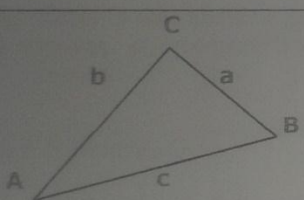
2. Explica con tus propias palabras ¿qué es un ángulo?

Es la union de 2 lineas que se encuentran en un punto y forman un angulo

3. El suplemento y el complemento de un ángulo que mide 20° es:

a) 30° y 70°; b) 160° y 70° ; C) 60° y 160° ; d) 240° y 160°

4. Para el triángulo rectángulo dado, escribe la fórmula del teorema de Pitágoras.

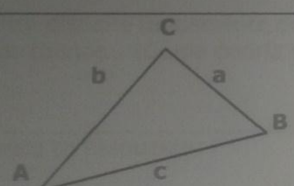


$c^2 = b^2 \cdot a^2$

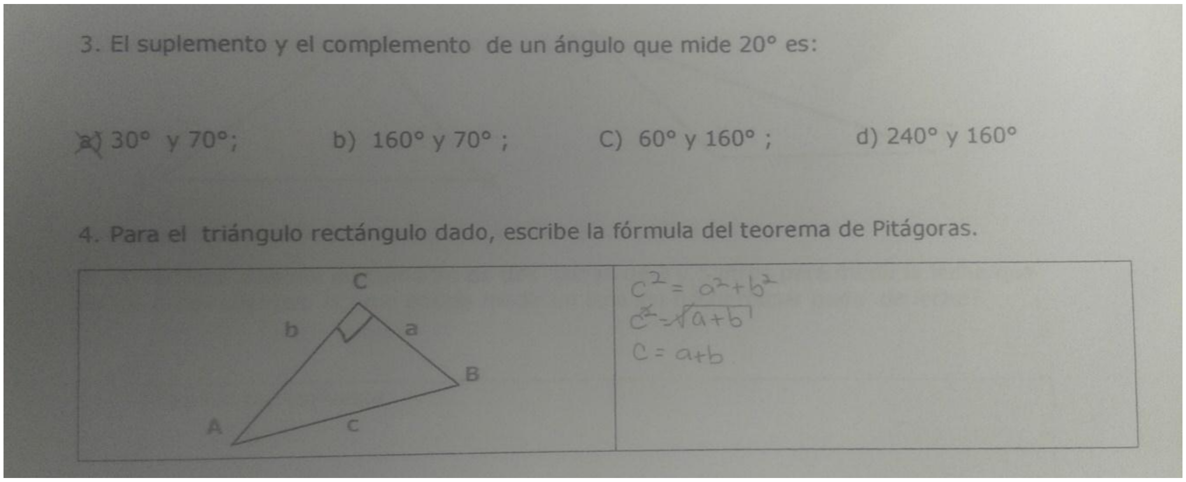
3. El suplemento y el complemento de un ángulo que mide 20° es:

a) 30° y 70°; b) 160° y 70° ; C) 60° y 160° ; d) 240° y 160°

4. Para el triángulo rectángulo dado, escribe la fórmula del teorema de Pitágoras.



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = \sqrt{a+b}$
$c = a + b$



3. El suplemento y el complemento de un ángulo que mide 20° es:

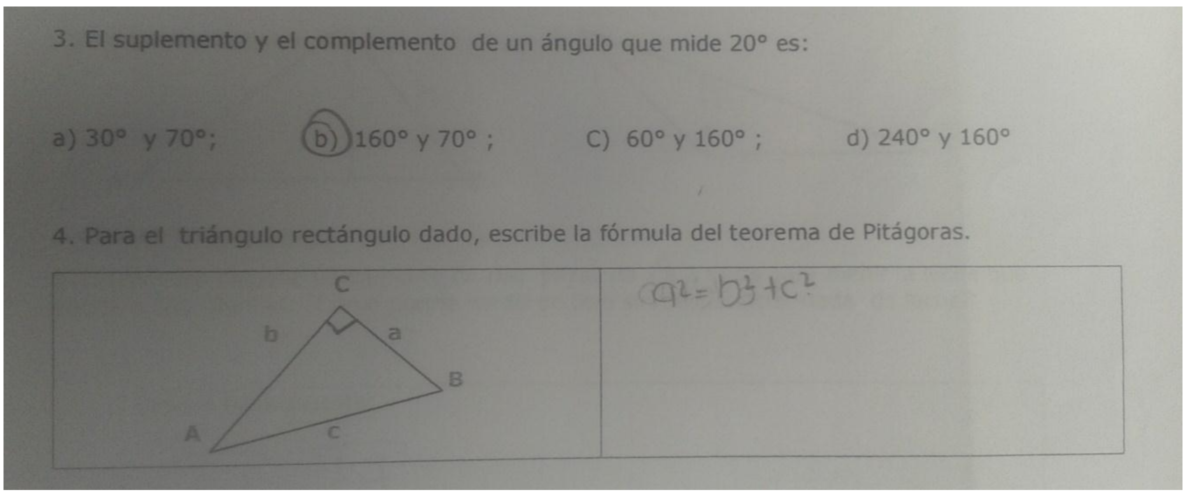
~~a)~~ 30° y 70°; b) 160° y 70° ; C) 60° y 160° ; d) 240° y 160°

4. Para el triángulo rectángulo dado, escribe la fórmula del teorema de Pitágoras.

$c^2 = a^2+b^2$

$c^2 = \sqrt{a+b}$

$c = a+b$

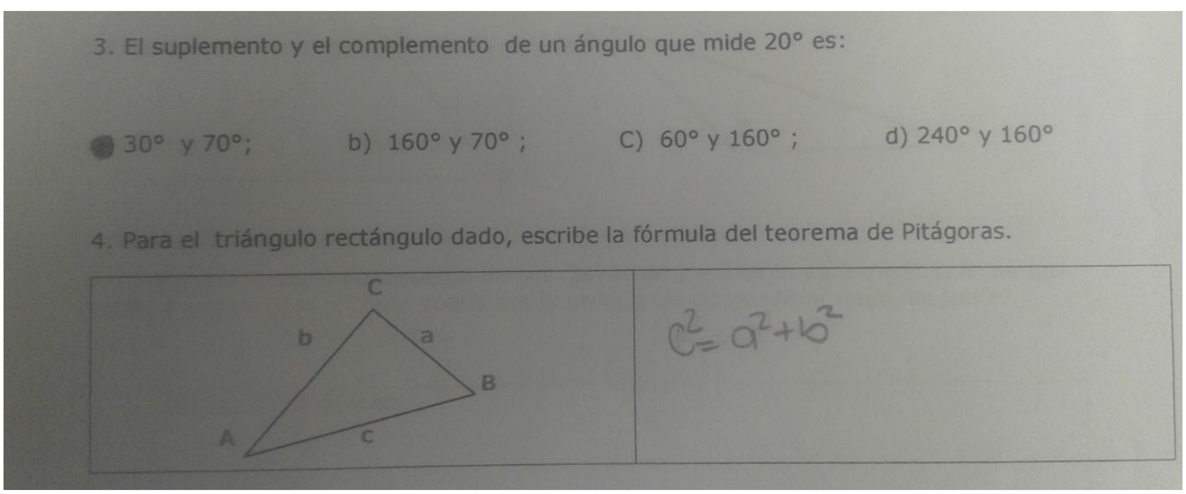


3. El suplemento y el complemento de un ángulo que mide 20° es:

a) 30° y 70°; b) 160° y 70° ; C) 60° y 160° ; d) 240° y 160°

4. Para el triángulo rectángulo dado, escribe la fórmula del teorema de Pitágoras.

$a^2 = b^2 + c^2$

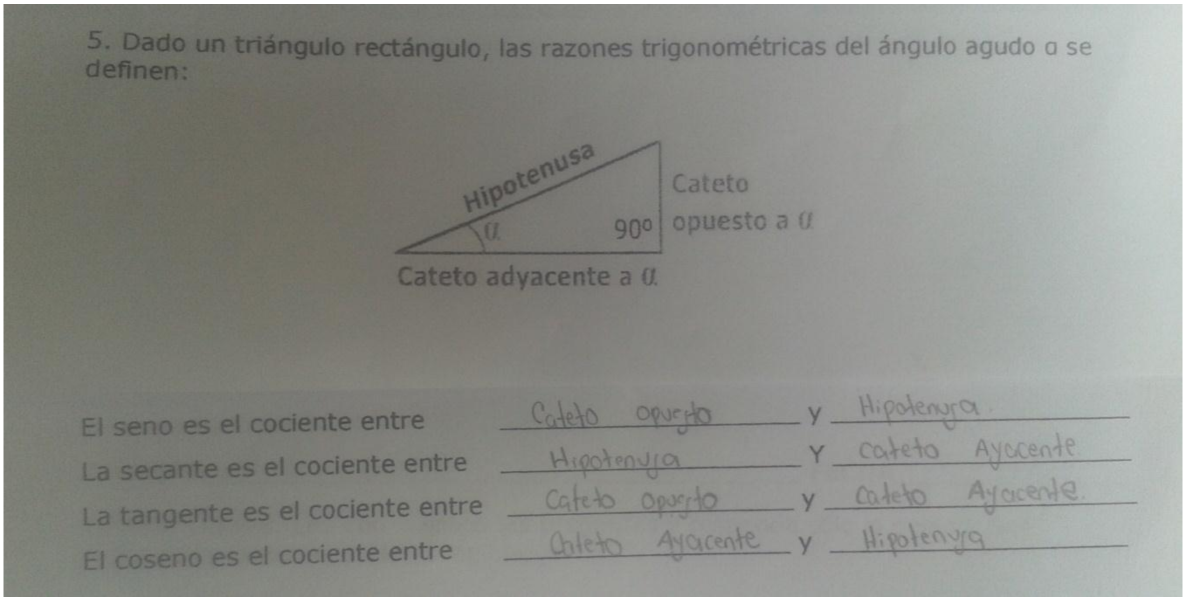


3. El suplemento y el complemento de un ángulo que mide 20° es:

a) 30° y 70°; b) 160° y 70° ; C) 60° y 160° ; d) 240° y 160°

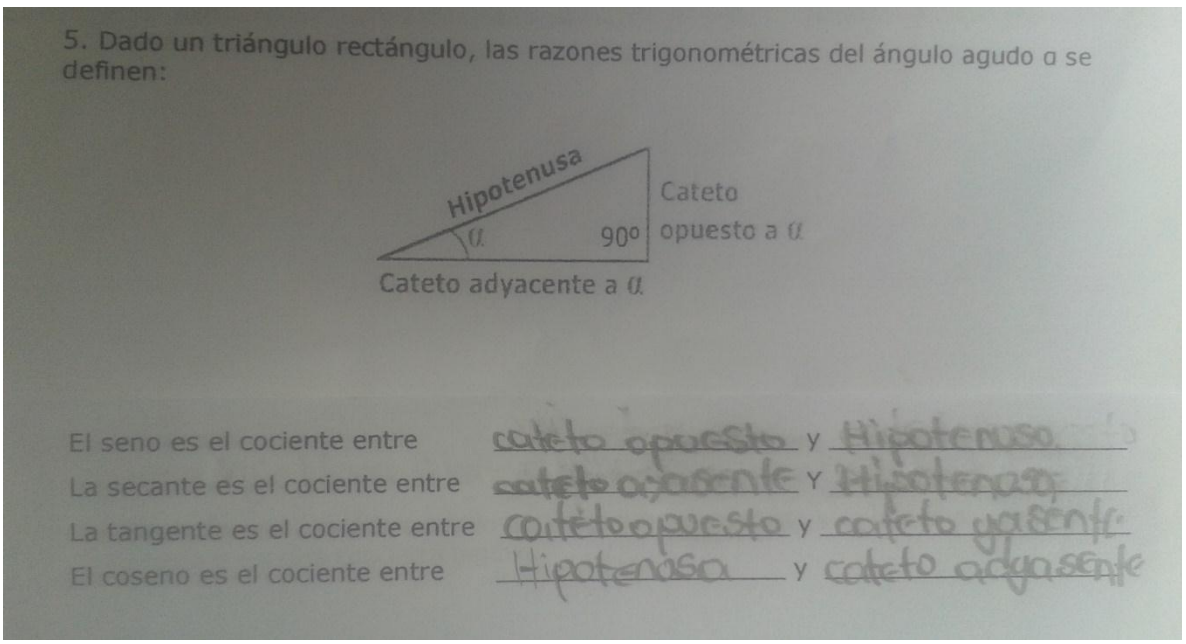
4. Para el triángulo rectángulo dado, escribe la fórmula del teorema de Pitágoras.

$c^2 = a^2+b^2$



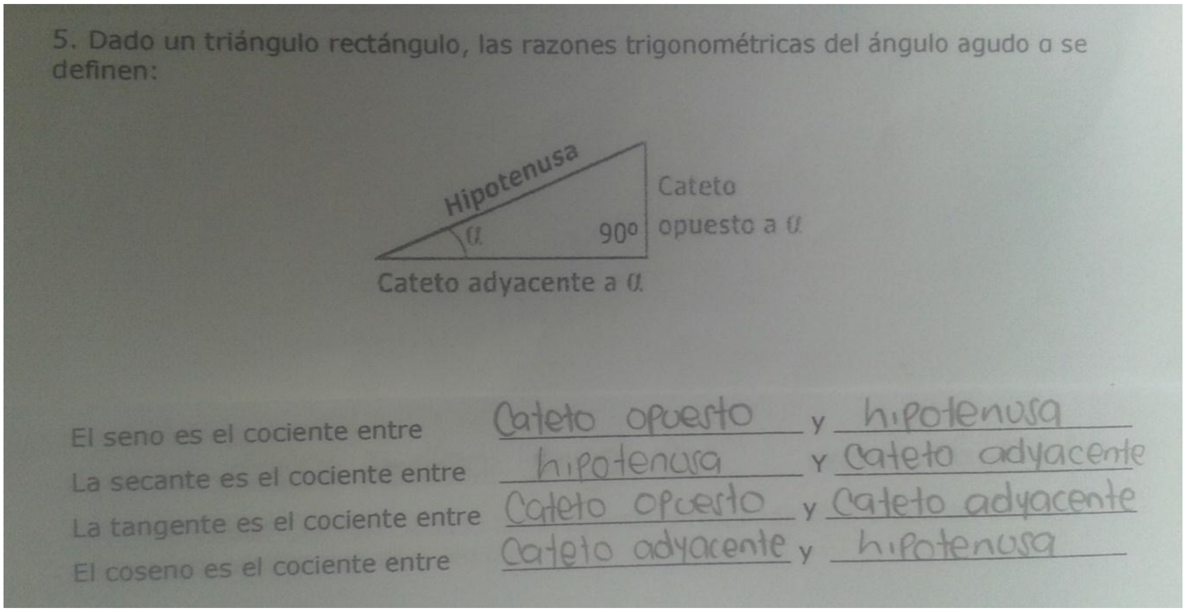
5. Dado un **triángulo rectángulo**, las razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:

El seno es el cociente entre Cateto opuesto y Hipotenusa.
La secante es el cociente entre Hipotenusa Y cateto Ayacente
La tangente es el cociente entre Cateto opuesto y cateto Ayacente.
El coseno es el cociente entre Cateto Ayacente y Hipotenusa



5. Dado un **triángulo rectángulo**, las razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:

El seno es el cociente entre cateto opuesto y Hipotenuso.
La secante es el cociente entre cateto agasente Y Hipotenuso
La tangente es el cociente entre cateto opuesto y cateto yasente.
El coseno es el cociente entre Hipotenuso y cateto adyasente



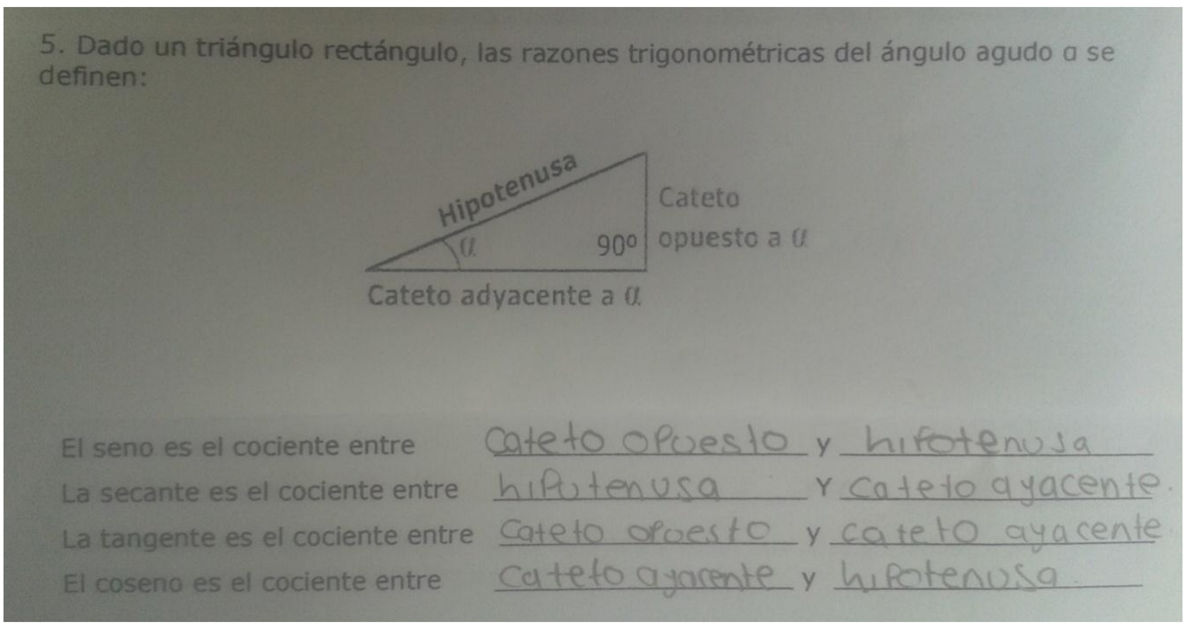
5. Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:

El seno es el cociente entre Cateto opuesto y hipotenusa

La secante es el cociente entre hipotenusa y cateto adyacente

La tangente es el cociente entre Cateto opuesto y Cateto adyacente

El coseno es el cociente entre Cateto adyacente y hipotenusa



5. Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:

El seno es el cociente entre Cateto oPuesto y hifotenusa

La secante es el cociente entre hifutenusa y Cateto ayacente.

La tangente es el cociente entre Cateto oPuesto y cateto ayacente.

El coseno es el cociente entre Cateto ayacente y hiPotenusa.

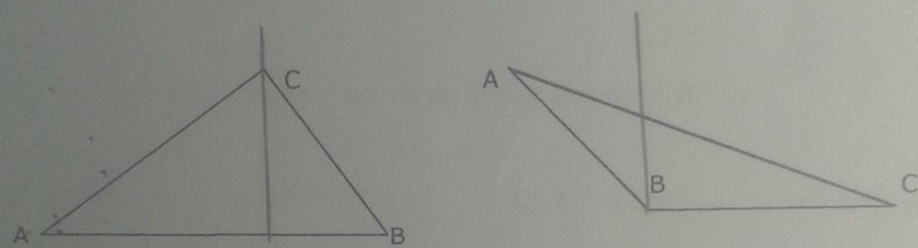
6. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo tal que:

$$\text{Sen (B)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) Cos(B)=

b) Tan(B)=

7. Trace las correspondientes alturas de los siguientes triángulos.



8. Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podría medir un litro sin desperdiciar nada de leche?

Explica tu respuesta:

El lechero, puede coger la jarra de 3 litros y medir donde va un litro y marcarlo en la jarra, asi podemos echar la leche en la jarra hasta donde esta marcado con diferente color, donde indique que es un litro

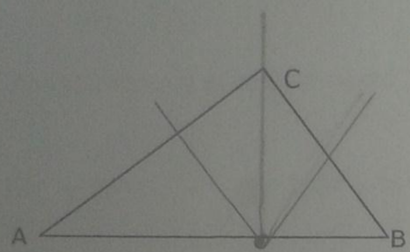
6. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo tal que:

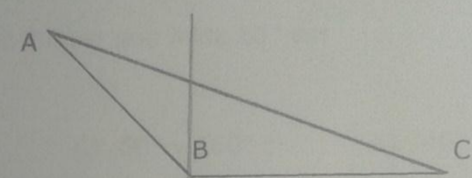
$$Sen(B)= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) $Cos(B)= \frac{x}{2}$

b) $Tan(B)= \frac{\sqrt{2}}{x}$

7. Trace las correspondientes alturas de los siguientes triángulos.





8. Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podría medir un litro sin desperdiciar nada de leche?

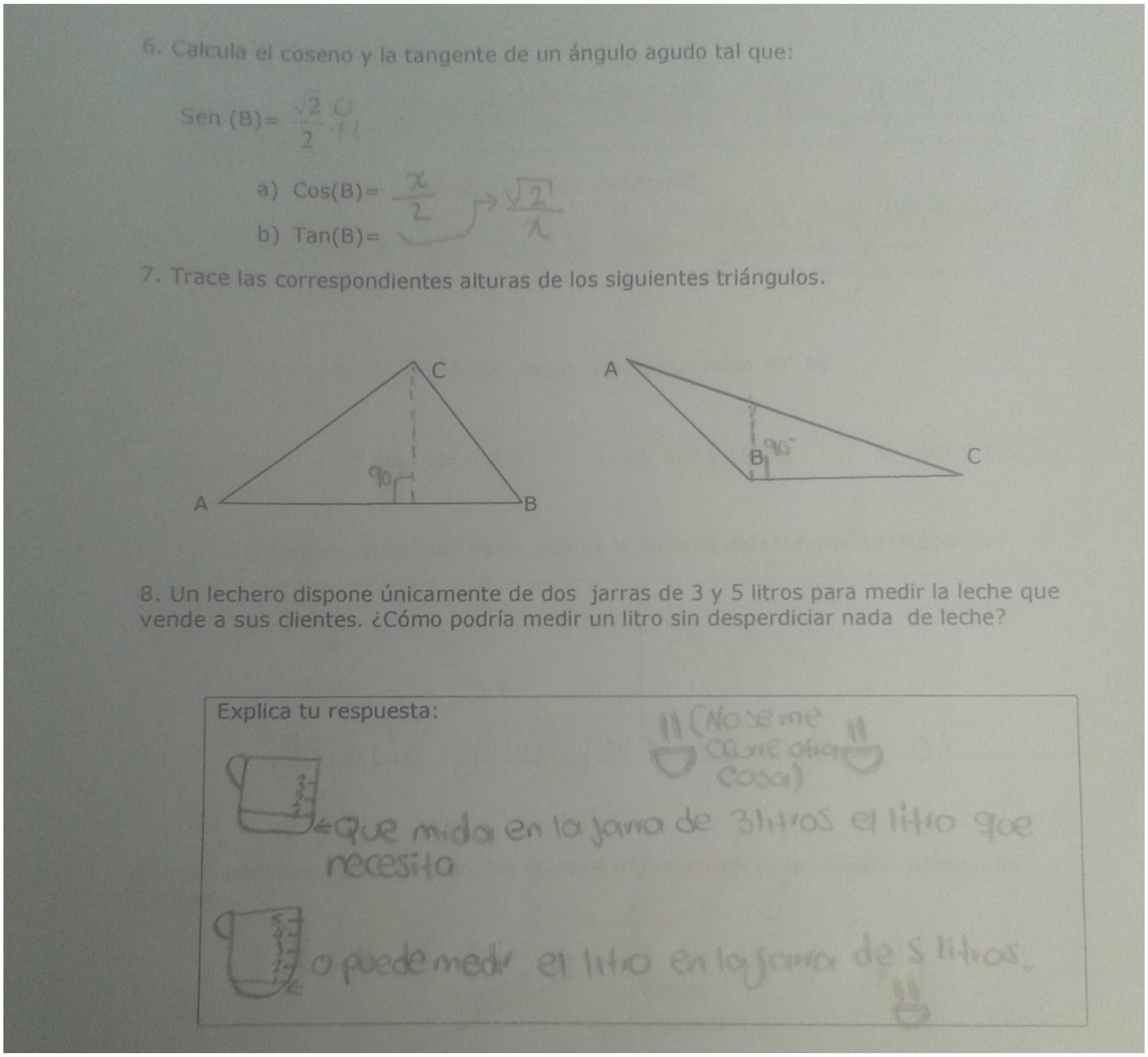
Explica tu respuesta:

marcar la jarra donde da

1 lt

2 lt

3 lt



6. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo tal que:

Sen (B)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{O}{H}$

a) Cos(B)= $\frac{x}{2}$ $\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{x}$

b) Tan(B)=

7. Trace las correspondientes alturas de los siguientes triángulos.

8. Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podría medir un litro sin desperdiciar nada de leche?

Explica tu respuesta:

(No se me ocurre otra cosa)

← que mida en la jarra de 3litros el litro que necesita

o puede medir el litro en la jarra de 5 litros.

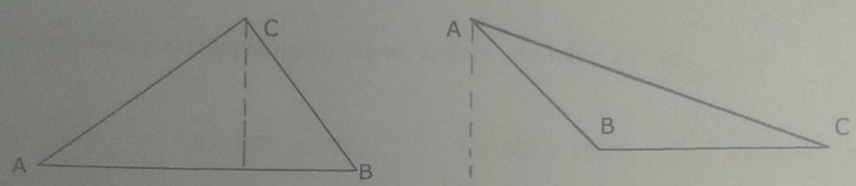
6. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo tal que:

Sen (B)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) Cos(B)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Tan(B)= 1

7. Trace las correspondientes alturas de los siguientes triángulos.



8. Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podría medir un litro sin desperdiciar nada de leche?

Explica tu respuesta:

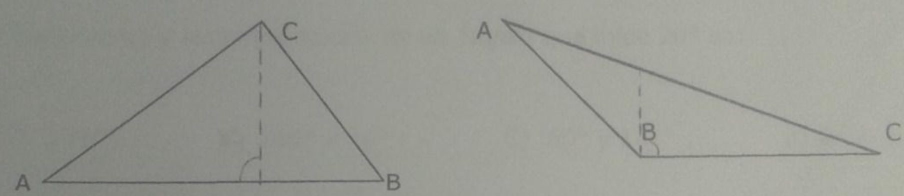
6. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo tal que:

$$\text{Sen (B)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) $\text{Cos(B)} = \frac{1}{2}$

b) $\text{Tan(B)} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

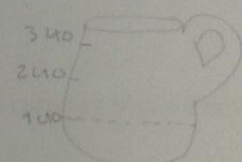
7. Trace las correspondientes alturas de los siguientes triángulos.



8. Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podría medir un litro sin desperdiciar nada de leche?

Explica tu respuesta:

En la jarra de 3 litros, que mida el litro que va a vender y así no se desperdicia la leche.



Anexo B. Guía de las sesiones de clase.

OBJETIVO

- Repasar todo lo relacionado con ángulos, triángulos, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas y resolución de problemas con triángulos rectángulos.

OBJETIVO

- Mejorar todo lo relacionado con ángulos, triángulos, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas y resolución de problemas con triángulos rectángulos.

¿QUE ES TRIGONOMETRIA?

Preguntar a los estudiantes y escuchar sus ideas para lograr en conjunto una aproximación a la definición. De acuerdo a lo que ellos respondan ir preguntando de tal forma que ellos concreten mejor sus ideas.

Trigonometría es una palabra que deriva del griego, es la composición de las palabras griegas trígono, que significa triangulo y metrón, que significa medida, es decir trigonometría no es más que la medida de triángulos.

Etimológicamente significa medida de triángulos,

Pero ¿Qué se mide en un triángulo?

Los lados y los ángulos, es por esta razón que los griegos en el siglo 2 antes de cristo estudiaban la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos.

¿Por qué estudiar dicha relación?

Es esta la pregunta clave, ya que es lo interesante de este asunto, poder determinar la altura de algo sin tener que correr el riesgo de caer, es decir saber con exactitud la altura sin correr peligro, o medir la distancia de la tierra a la luna.

Bueno entonces, que tenemos hasta el momento.

La palabra trigonometría nos llevó a la palabra triangulo donde tenemos lados y ángulos, pero nos interesa estudiar la relación entre ellos.

Para estudiar la relación, tenemos que primero conocer muy bien el Angulo y el triángulo, hacernos amigo de ellos.

Porque si no, como vamos a poder estudiar en el triángulo la relación entre lados y ángulos.

EL ANGULO

¿QUÉ ES UN ÁNGULO?

Nuevamente escuchar a los estudiantes, hasta lograr una aproximación a la definición.

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. El origen común se llama vértice y las semirrectas reciben el nombre de lados del Angulo.

El ángulo es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario.

Con objeto de estudiar los ángulos y su medida consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad o circunferencia gonio-métrica, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

¿Cuál es el Sistema sexagesimal?**:** la unidad principal de medida en este sistema es el grado (°), si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal. Donde un grado tiene 60 minutos (‘) y un minuto tiene 60 segundos (‘’).

Nota: antes de responder cualquier pregunta que se hace, dejar que el estudiante se esfuerce en responder con sus ideas.

¿Cuál es el Sistema circular?: en este sistema la unidad de medida es el radian, que equivale a la medida de un ángulo central de una circunferencia que subtiende un arco cuya medida es la misma medida del radio.

De grados a radianes y de radianes a grados

El semi perímetro de la semicircunferencia es $\pi \cdot$radio π radianes = 180 grados es decir, π veces un radián = 180 veces un grado $\pi \cdot 1$ radián = $180 \cdot 1$ grado Si despejamos el grado resulta: 1 grado = $\pi/180$ radianes ~ 0.0175 radianes Si despejamos el radián resulta: 1 radián = $180/\pi$ grados ~ 57.2957 grados.

Ejercicios

1. Dibuja en la circunferencia gonio-métrica los ángulos de 120°, -50° y 315°.

2. Dibuja en la circunferencia gonio-métrica el ángulo de $5\pi/6$, $3\pi/4$, y $3\pi/2$ rad.

3. Pasa a radianes: a) 150º, b) 210º, c) 270º, d) 60º

4. Pasa a grados: a) $11\pi/6$ rad, b) $\pi/4$ rad, c) $5\pi/4$ rad, d) $2\pi/3$ rad

¿Cuál es el ángulo de elevación?

¿Cuál es el ángulo de depresión?

Como estos dos conceptos son fundamentales para la resolución de problemas, no avanzar hasta que estén claros para los estudiantes.

Repasar: líneas vertical, línea horizontal, línea oblicua.

TIPOS DE ANGULOS SEGÚN SU AMPLITUD.

- ¿Cuál es el Angulo nulo? es el ángulo que mide 0°
- ¿Cuál es el ángulo agudo? es el ángulo cuya medida es mayor que 0° y menor que 90°
- ¿Cuál es el ángulo recto? es el ángulo que mide 90°
- ¿Cuál es el ángulo obtuso? es el ángulo cuya medida es mayor que 90° y menor que 180°.
- ¿Cuál es el ángulo llano? es el ángulo cuya medida es igual a 180°
- ¿Qué son ángulos complementarios? dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.
- ¿Que son ángulos suplementarios? dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°
- ¿Cuáles son los ángulos consecutivos? tienen un lado en común.
- ¿Cuáles son los ángulos opuestos por el vértice? los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro.
- ¿Cuáles son los ángulos formados por dos paralelas y una trasversa?

Investigar: los ángulos formados por dos paralelas y una trasversal.

Ejercicios. Sacar a los estudiantes al tablero y pedirles que grafiquen un ángulo especifico.

EL TRIANGULO

¿QUE ES UN TRIANGULO?

Realizar nuevamente una lluvia de ideas para aproximarse a una definición en conjunto.

Es una figura geométrica del plano que se forma al unir tres puntos no coloniales mediante segmentos de recta.

Es la figura geométrica del plano formado por 3 segmentos llamados lados cuyos extremos se cortan 2 a 2 en 3 puntos llamados vértices.

Como ya mencionamos vértices y lados entonces demos nombres en la figura que representa al triangulo.

¿Cómo podemos clasificar los triángulos?

NOTA: hacer graficas de distintos triángulos.

Observar que no todos los triángulos son iguales.

Esperar que los estudiantes participen.

CLASES DE TRIANGULOS

- SEGÚN SUS LADOS:

¿EQUILATERO?: tiene sus tres lados iguales

¿ISÓSCELES? : tiene dos lados iguales

¿ESCALENO?: las medidas de sus tres lados son distintas.

- SEGÚN SUS ANGULOS

¿Rectángulo?: tiene un ángulo de 90°

¿Acutángulo?: tiene sus tres ángulos agudos.

¿Obtusángulo?: tiene un ángulo obtuso (mayor que 90°)

PROPIEDADES DEL TRIANGULO

¿Puede haber un triángulo cuyos lados midan 5cm, 7cm y 13 cm?

¿Puede haber un triángulo cuyos lados midan 5cm, 7cm y 12 cm? explica tu respuesta

¿Qué relación tienen que cumplir los lados de un triángulo? ¿Por qué?

Propiedad 1:un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia

$$a < b + c$$

$$a > b - c$$

Si dos ángulos internos de un triángulo miden 50° y 40°, ¿podemos saber la medida del tercer ángulo interno?

¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos de un triángulo?

NOTA: antes de dar la propiedad, hacer el ejercicio de dibujar triángulos en el tablero y hacer medir sus ángulos con un transportador y realizar la suma.

Propiedad 2: la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

TEOREMA DE PITAGORAS

¿Es rectángulo el triángulo de lados 6cm, 8cm y 10cm? ¿Y el que tiene lados de longitudes 3cm, 4cm y 6cm?

¿Qué teorema conoces acerca de los triángulos rectángulos?

TEOREMA: en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa,

es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

¿Cómo se reconoce la hipotenusa en un triángulo rectángulo?

NOTA: Utilizar estrategia para que el estudiante interiorice el teorema.

¿Para qué sirve el teorema de Pitágoras?

Recomendaciones para utilizar el teorema de Pitágoras.

1 EL TEOREMA DE PITAGORAS SOLO SE APLICA EN UN TRIANGULO RECTANGULO.

2 IDENTIFICAR LA HIPOTENUSA.

3 VERIFICAR SI LA FORMULA QUE TENGO, CORRESPONDE AL TRIANGULO QUE VOY TRABAJAR

ALTURA Y AREA DE UN TRIANGULO

Preguntar a los estudiantes, ¿Qué entienden por altura?

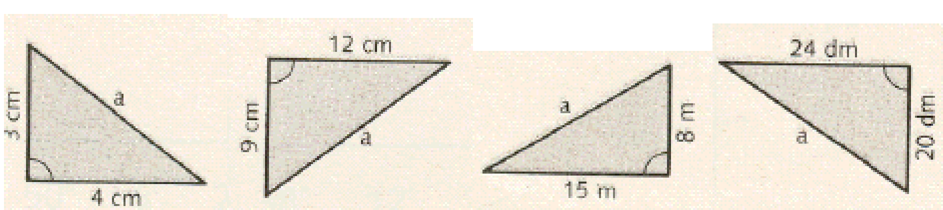
NOTA: Hablar sobre la altura de los estudiantes y que se toma como punto de referencia el suelo, y concluir que es el trayecto vertical con relación al suelo hasta la parte más alejada del mismo. (Hacer una analogía para dar la definición de altura de un triángulo).

ALTURA DE UN TRIANGULO: Se llama altura de un triángulo al segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.

ÁREA: mostrar el área a partir del área de un rectángulo y dividirlo para sacar el área del triángulo.

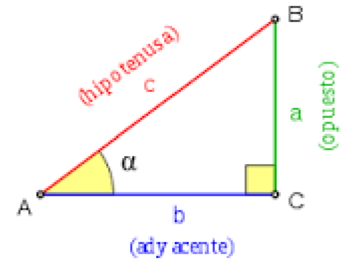
EJERCICIOS EN CLASE

En los triángulos siguientes hallar el perímetro y el área



RAZONES TRIGONOMETRICAS

¿Que recuerdan sobre las razones trigonométricas?



En los triángulos semejantes los ángulos son iguales y los lados homólogos son proporcionales. La razón entre los lados de un triángulo determina su forma. Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:

- El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$$

- El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

- La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$$

Estas razones no dependen del tamaño del triángulo sino del ángulo.

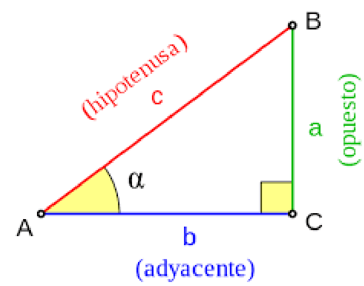
RAZONES DE30º, 45º y 60º

Los ángulos de 30º, 45º, 60º y 90° aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

a	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow\infty$

EJERCICIO

Utilizar terna pitagórica canónica a=3,b=4 y c=5



Encontrar.

a) Senα= d) Senβ=

b) cosα= e) Cosβ=

c) tgα= f) tgβ=

MANEJO DE CALCULADORA

• Dado un ángulo α obtener sus razones trigonométricas. Por ejemplo el sen 28º 30´ Pon la calculadora en modo DEG Teclea [28][º ‘ ‘‘] 30 [º ‘ ‘‘][sin] Obtenemos: [0,477158760] En algunas calculadoras hay que pulsar la tecla [sin] antes de introducir el ángulo, comprueba cómo funciona la tuya. Si queremos obtener el cosα ó la tgα procederemos de la misma forma pero pulsando las teclas [cos] y [tan] respectivamente.

• Dada una razón obtener el ángulo α correspondiente. Con el mismo valor que tienes en la pantalla : [0,477158760] Comprueba que la calculadora sigue en modo DEG Teclea [SHIFT][sin] Obtenemos : 28,5 en grados, si queremos grados, minutos y segundos, pulsamos SHIFT º ‘ ‘‘ obteniendo 28º 30‘‘

NOTA: para que el estudiante comprenda mejor el concepto de inversa utilizar la estrategia de analogía con la suma y la resta, luego producto y división.

EJERCICIO

Obtener con la calculadora

a) sen 30°, cos 60° y tg 45°.

b) obtener con la calculadora los ángulos α y β del ejercicio anterior.

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS.

Una de las aplicaciones más inmediatas de la trigonometría es la resolución de triángulos.

- Resolver un triángulo cualquiera consiste en calcular todos sus elementos: sus tres lados y sus tres ángulos.
- Para resolver un triángulo debemos conocer, al menos, tres de sus elementos, uno de los cuales necesariamente debe ser un lado.
- En todo triangulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Son muchas las situaciones donde se presentan problemas cuya solución se realiza mediante la solución de triángulos rectángulos. El uso de las razones trigonométricas junto con el teorema de Pitágoras, nos permite resolver cualquier triangulo rectángulo conociendo dos datos, uno de ellos ha de ser un lado.

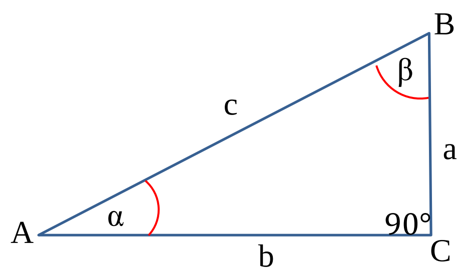
- RELACION ENTRE LOS LADOS. TEOREMA DE PITÁGORAS.
- RELACION ENTRE LOS ANGULOS.

- RELACION ENTRE ANGULOS Y LADOS.

1.-**CONOCIDOS DOS LADOS**

- El tercer lado se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.
- Uno de los ángulos agudos aplicando la razón trigonométrica que relacione los dos lados conocidos.
- Para calcular el otro ángulo agudo basta considerar que la suma de los ángulos agudo es 90º.

EJEMPLO: **se conoce la hipotenusa (c) y un cateto (a)**.



El lado b se calcula aplicando el teorema de Pitágoras, por lo tanto:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Para hallar el ángulo α utilizamos la inversa de seno α. Luego, si

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arcsen\left(\frac{a}{c}\right)$$

Por último, para calcular el ángulo β, tenemos en cuente que:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

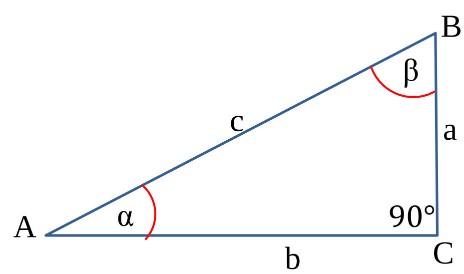
2.-**CONOCIENDO UN LADO Y UN ÁNGULO**

El proceso es similar al caso anterior.

- Se calcula el otro lado mediante la razón trigonométrica adecuada del ángulo conocido.

- Se calcula el tercer lado mediante el teorema de Pitágoras; o bien, mediante otra razón trigonométrica.
- El otro ángulo es: 90 – ángulo conocido.

EJEMPLO: **se conoce la hipotenusa (c) y un ángulo agudo (α).**



Calculamos el lado (a) utilizando la razón trigonométrica seno α.

Como

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c * sen\alpha$$

Ahora hallemos el tercer lado (b) aplicando el teorema de Pitágoras. Esto es,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Por último, calculemos el ángulo restante β,

$$\beta = 90^{\circ} - \alpha$$

PROBLEMAS CON TRIANGULOS RECTANGULOS

Problema 1: Un avión sale de un aeropuerto y se eleva manteniendo un ángulo constante de 10° hasta que adquiere una altura de 15 km. ¿cuál es la distancia horizontal del avión al aeropuerto?

Problema 2: Un helicóptero que está volando a 500 metros de altura, divisa un pueblo con un ángulo de depresión de 30°. ¿A qué distancia del pueblo se encuentra el helicóptero?

Problema 3: Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 8 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 60° con el suelo.

Problema 4: Carlos mira el punto más alto de un edificio. Con un ángulo de elevación de 20°. El piso es horizontal. El ojo de Carlos está a 1.8 metros por encima del piso y a 100 metros en posición horizontal del edificio. Hallar la altura del edificio.

Problema 5: del techo de un edificio de 100 metros de altura se ve una cometa con un ángulo de elevación de 30°. De una ventana del mismo edificio, localizada 40 metros bajo el nivel del techo el ángulo de elevación a la cometa es de 45°. Hallar la distancia horizontal a la cometa y a que altura se encuentra sobre el suelo.

Problema 6:A 50 metros de la base de un edificio, se observa la base de la chimenea con un ángulo de elevación de 56° y el punto más alto de la chimenea se observa con un ángulo de elevación de 64°. Calcular la altura de la chimenea.

Problema 7: Ernesto va de vacaciones a San Andrés y en la playa observa un nativo trepando en un cocotero. Ernesto se encuentra a 10 metros del árbol y calcula que desde ahí el ángulo de elevación hasta donde está el nativo es de 50º25' ¿A qué altura se encuentra dicha persona si la línea de visualidad de Ernesto se encuentra a 1,50 metros del suelo?

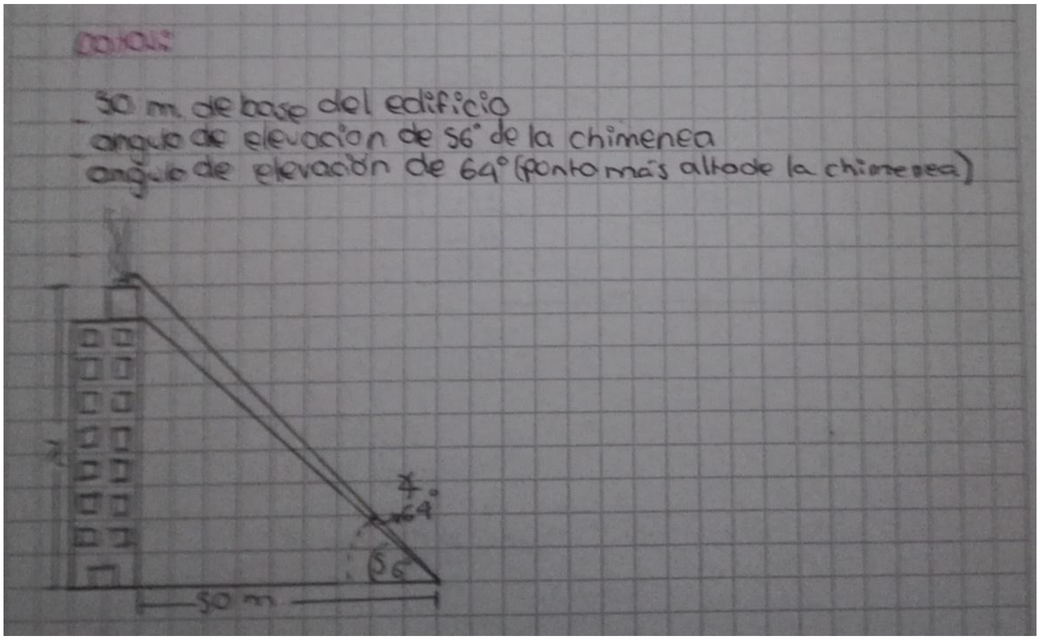
Problema 8: Desde dos puntos P y Q situados uno arriba del otro, a una distancia de dos metros, se divisa la punta de la antena de una torre, con ángulos de elevación de 48 y 52 grados respectivamente.

a) ¿Cuál es la altura de la torre?

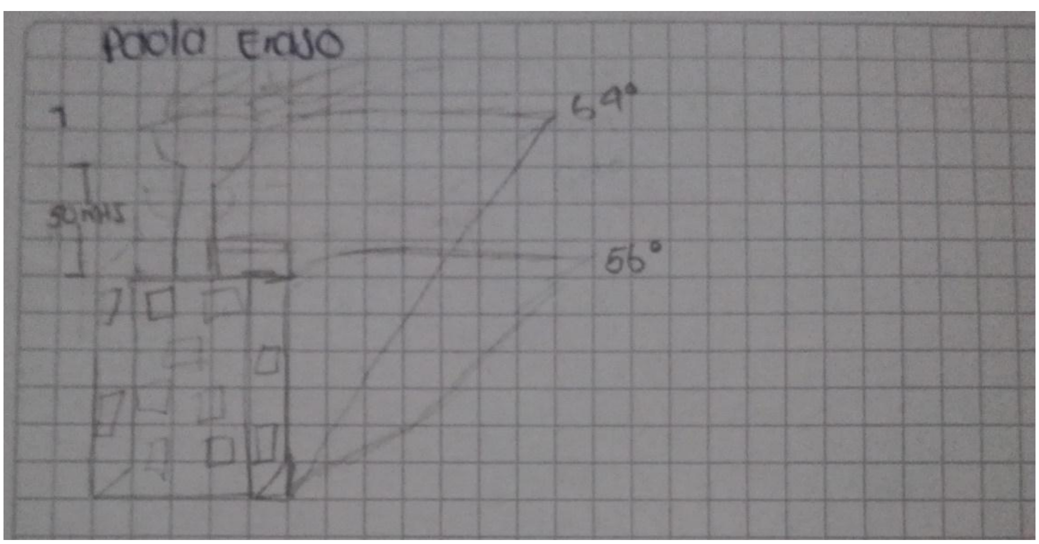
b) ¿A qué distancia se encuentra Q del pie de la torre?

Anexo C. Hojas de trabajo

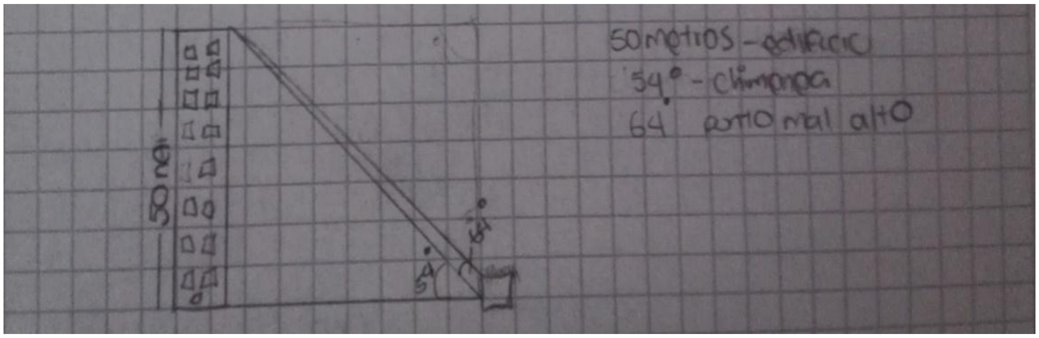
Problema 6: realizado por Astrid carolina Guzmán muñoz, planteamiento grafico del problema.



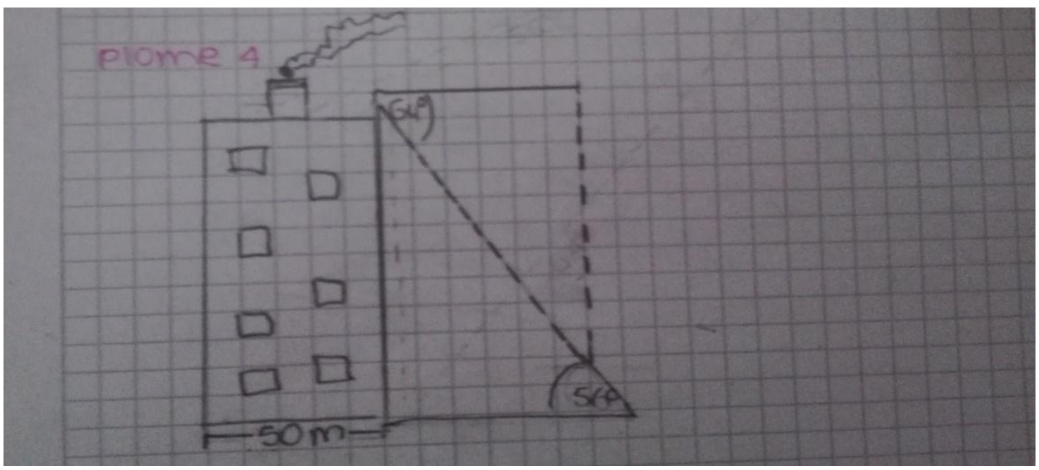
Problema 6: realizado por Paola Erazo. Planteamiento grafico del problema.

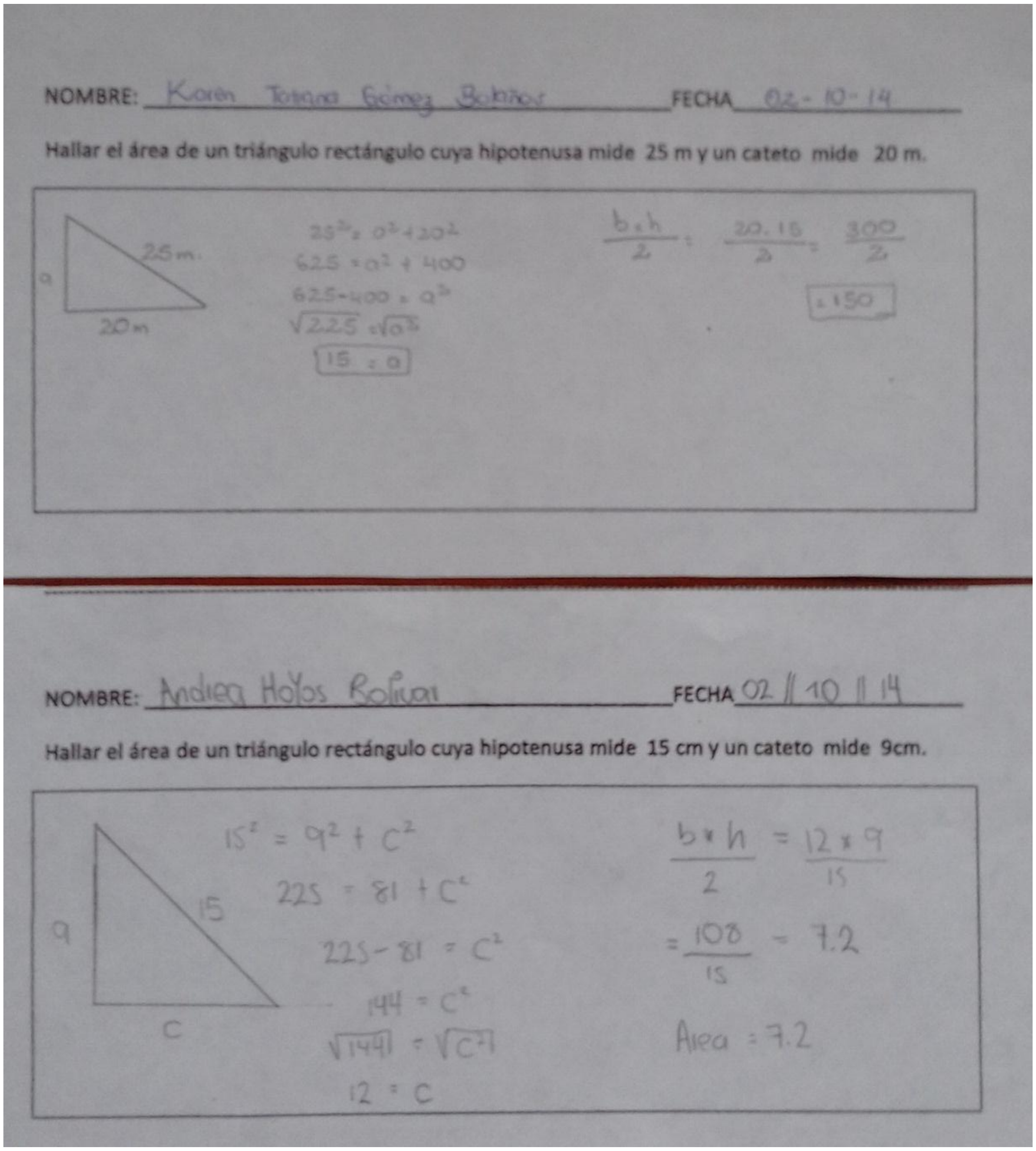


Problema 6: realizado por Erika Jazmín Jiménez.. Planteamiento grafico del problema.



Problema 6: realizado por Yulie Castro Molina.. Planteamiento grafico del problema.





NOMBRE: Karen Tatiana Gómez Bolaños FECHA 02-10-14

Hallar el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 25 m y un cateto mide 20 m.

$25^2 = a^2 + 20^2$

$625 = a^2 + 400$

$625 - 400 = a^2$

$\sqrt{225} = \sqrt{a^2}$

$\boxed{15 = a}$

$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 15}{2} = \frac{300}{2}$

$\boxed{= 150}$

NOMBRE: Andrea Hoyos Bolivar FECHA 02 // 10 // 14

Hallar el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 15 cm y un cateto mide 9cm.

$15^2 = 9^2 + c^2$

$225 = 81 + c^2$

$225 - 81 = c^2$

$144 = c^2$

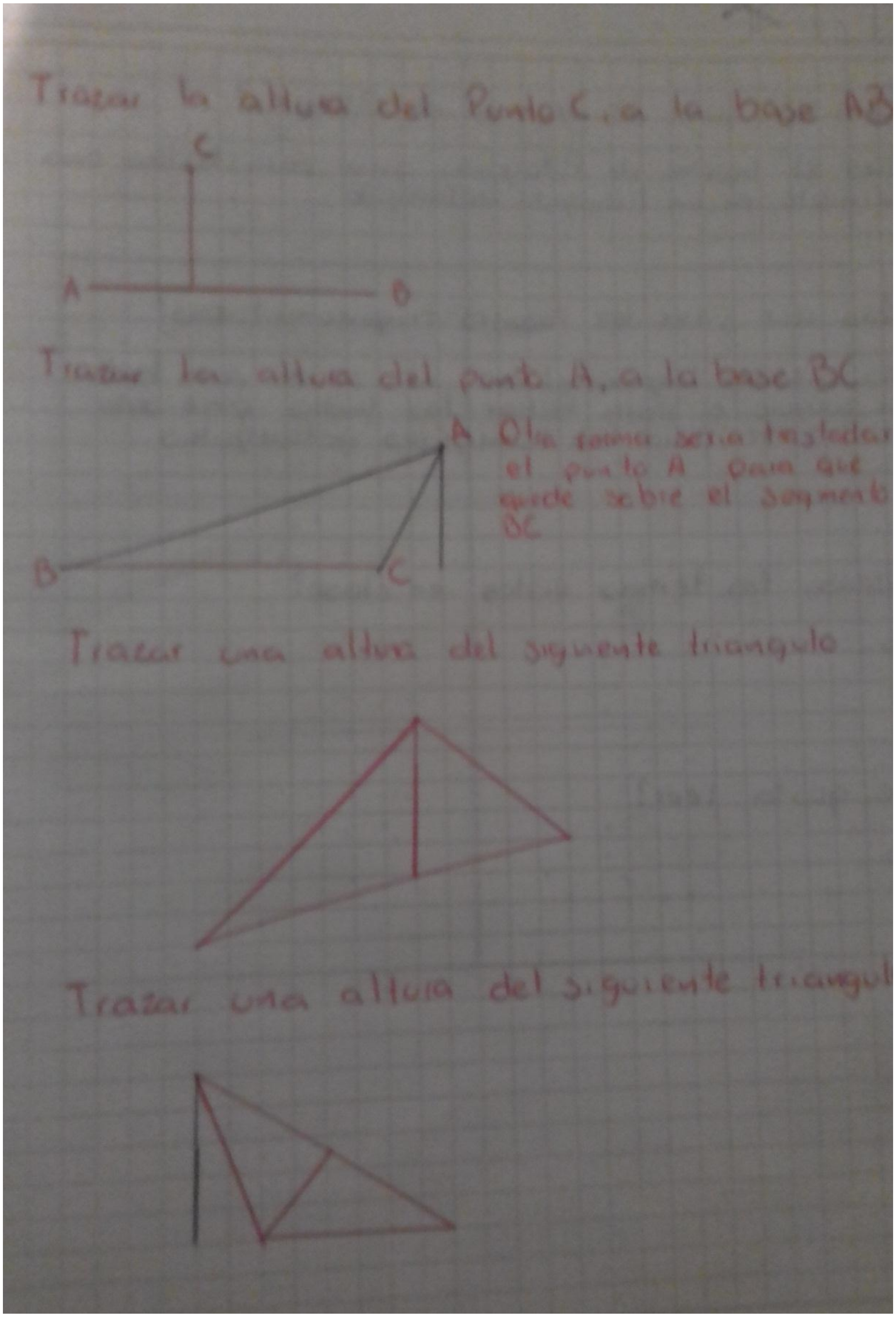
$\sqrt{144} = \sqrt{c^2}$

$12 = c$

$\frac{b \times h}{2} = \frac{12 \times 9}{15}$

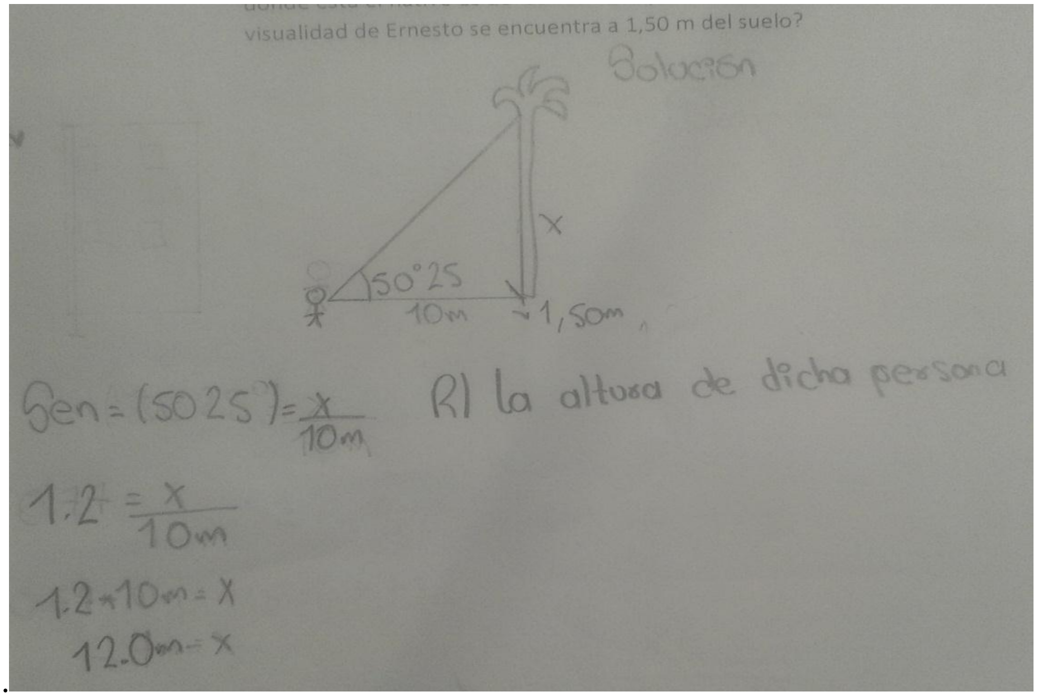
$= \frac{108}{15} = 7.2$

Area $= 7.2$

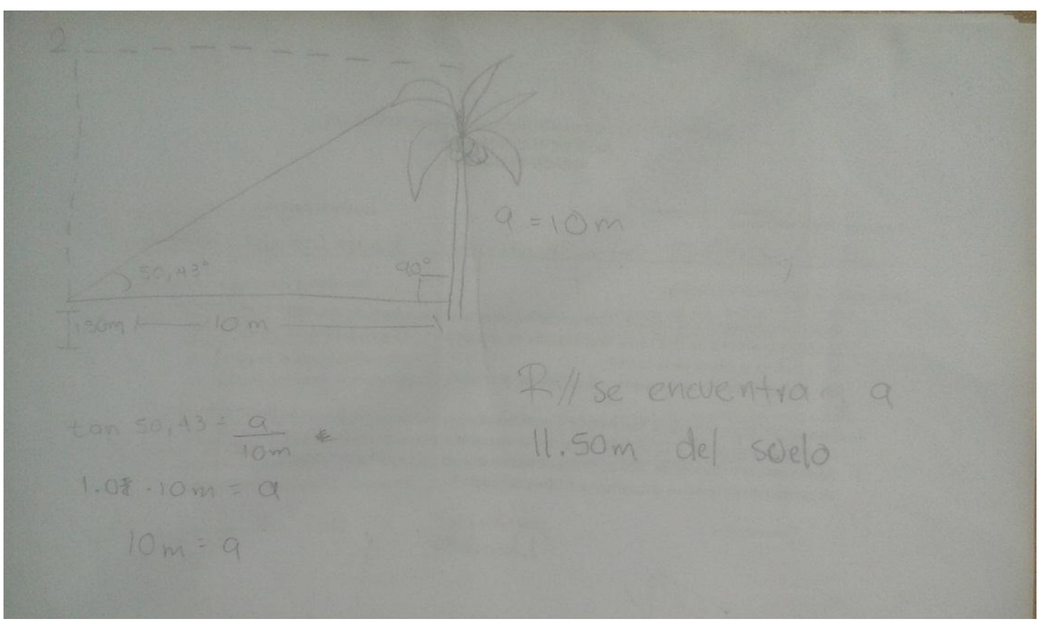


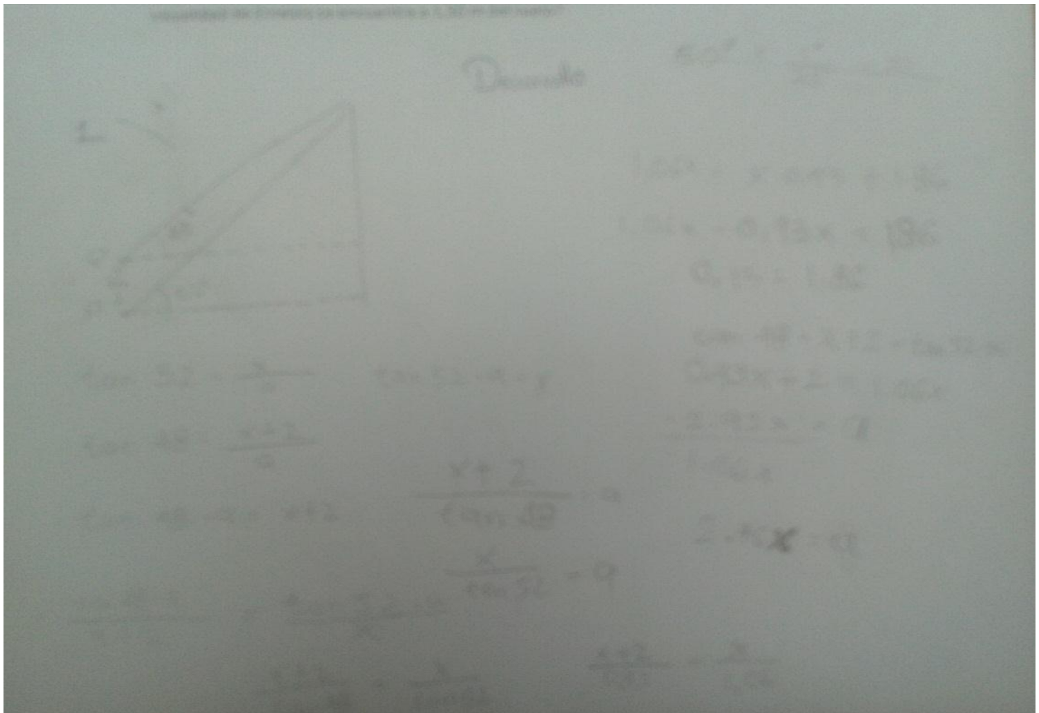
Trazar la altura del Punto C, a la base AB
C
A
B
Trazar la altura del punto A, a la base BC
A
Otra forma seria trasladar el punto A para que quede sobre el segmento BC
B
C
Trazar una altura del siguiente triangulo
Trazar una altura del siguiente triangul

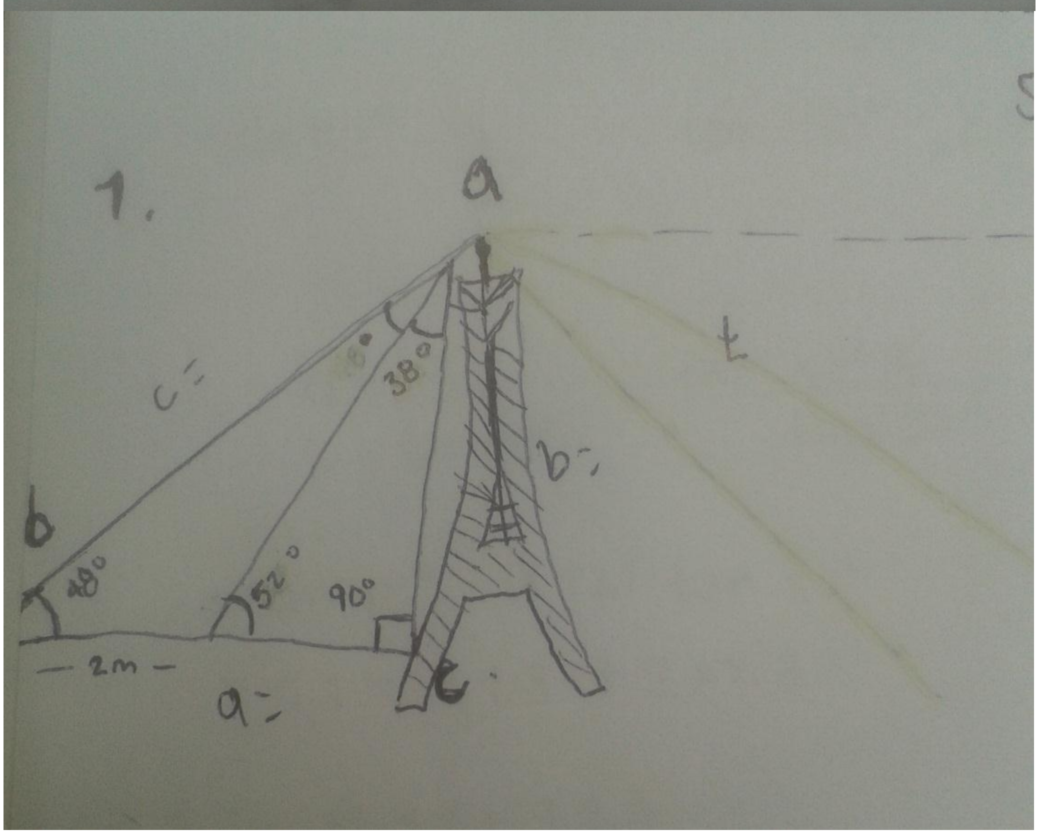
Registros de la solución de los problemas 7 y 8. Los cuales se realizaron al finalizar el proyecto

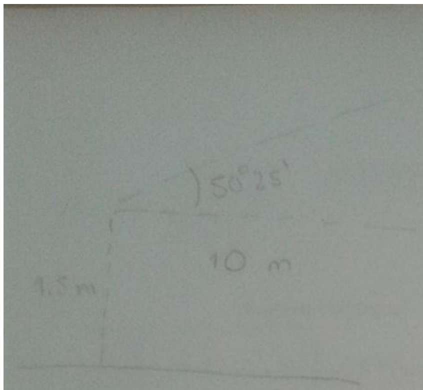


.






1.
a
c =
48°
38°
b =
b
48°
52°
90°
— 2m —
a =
c.
t



$$50^\circ\ 25' \times \frac{1^\circ}{60'} = \frac{25}{60} = 0.4$$

Expresado en grados = 50,04°

$$\tan 50{,}04^\circ = \frac{x + 1.5}{a}$$

$$a = (x + 1.5) \tan 50{,}04^\circ$$

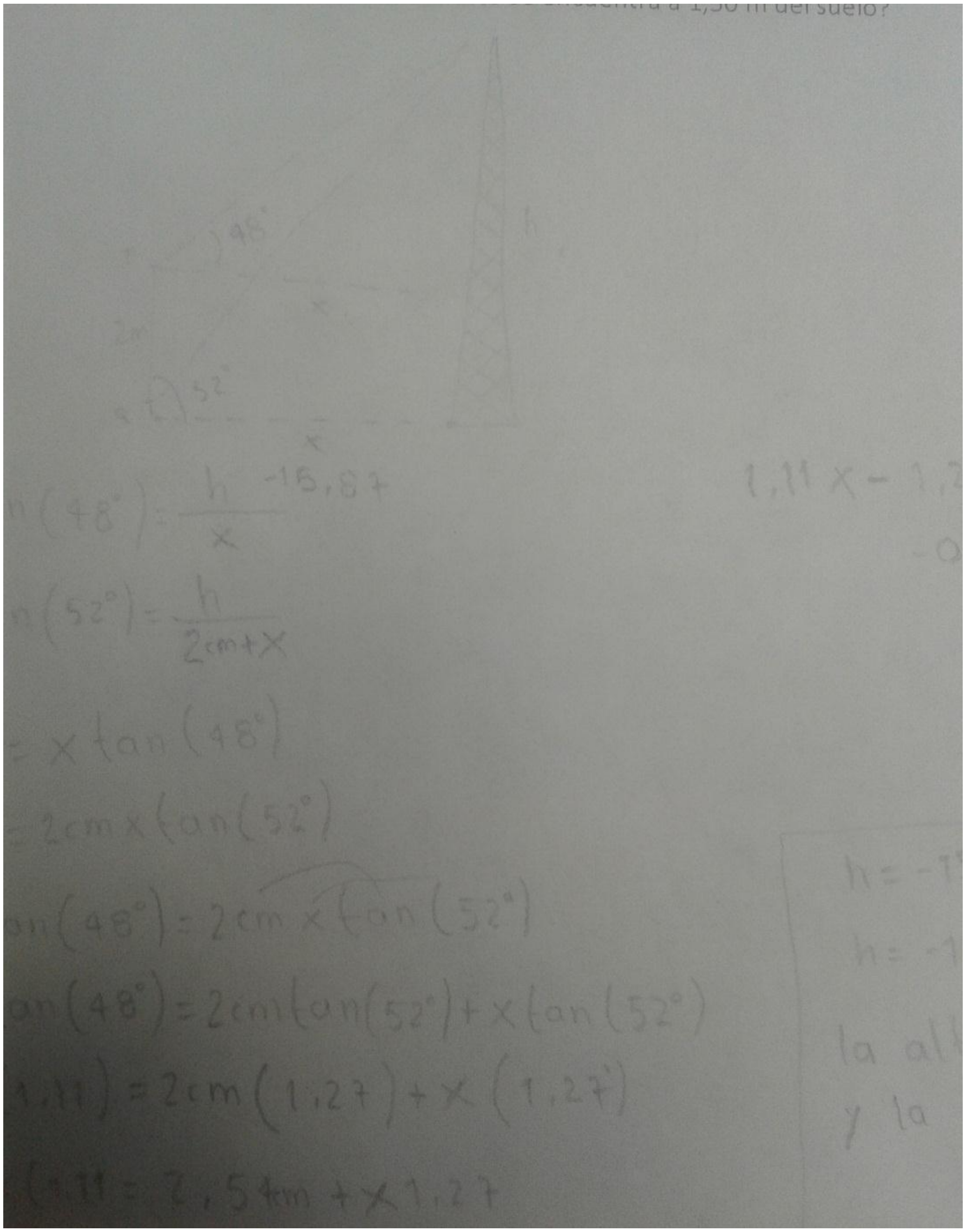
$$1.2\,x = 1.5 \times 1.2$$

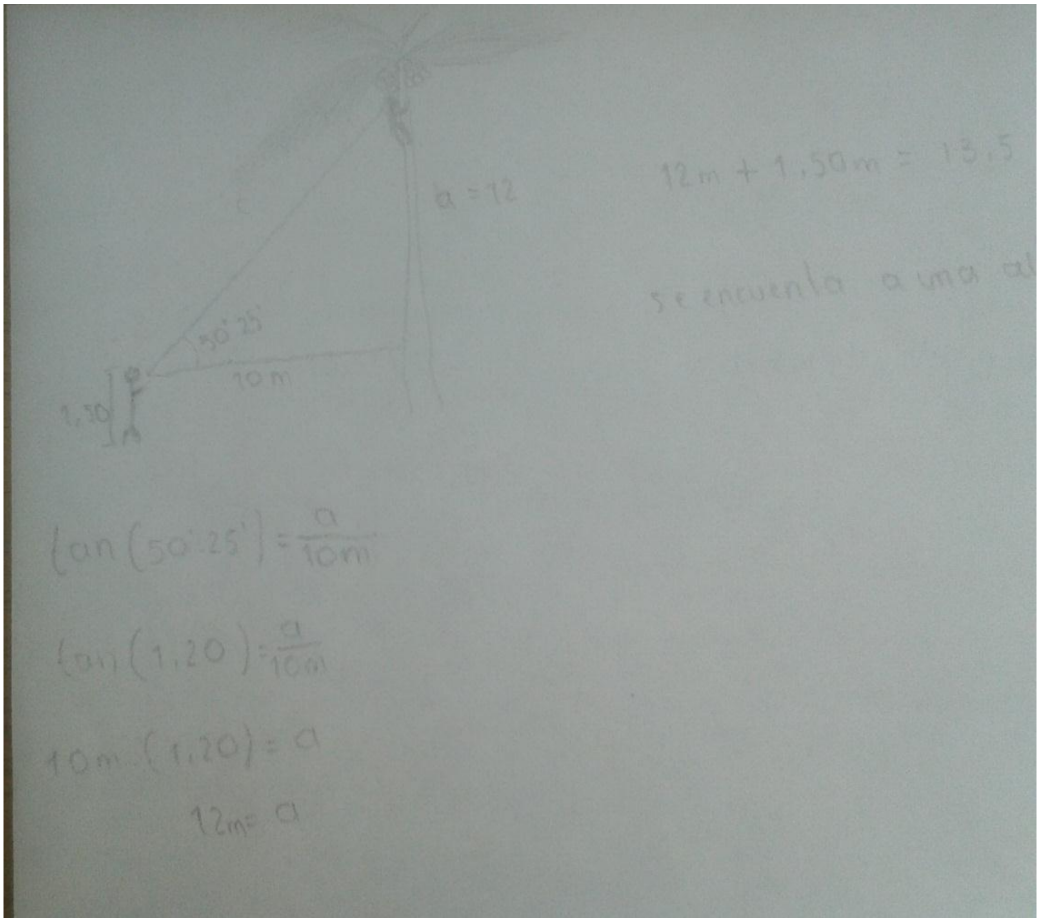
$$x = \frac{1.8}{1.2}$$

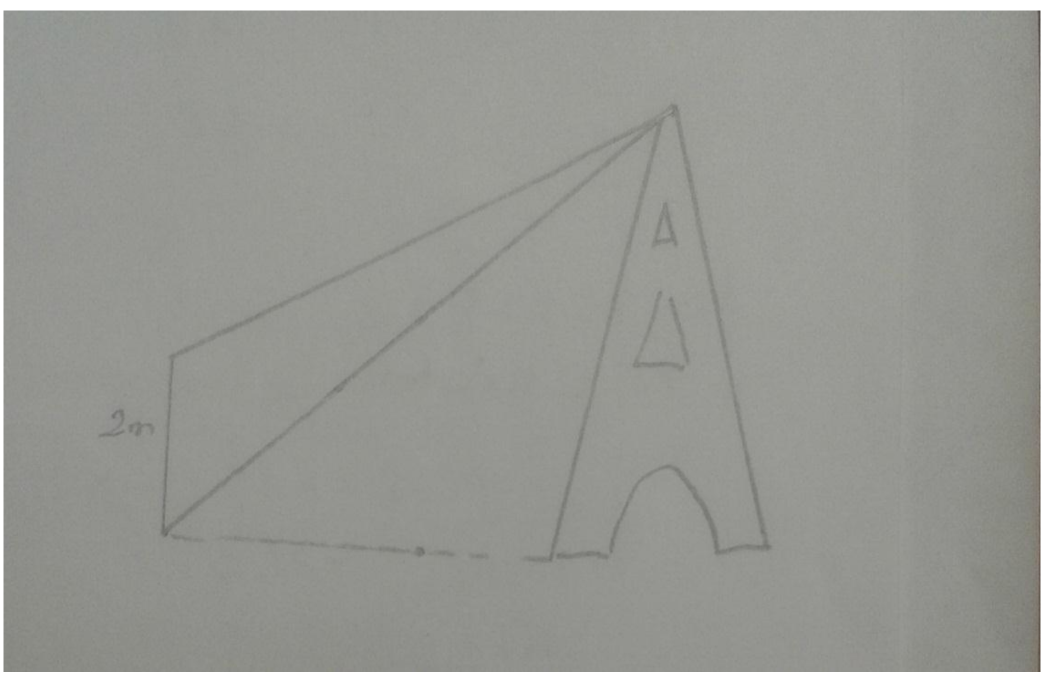
$$x = 1.5$$

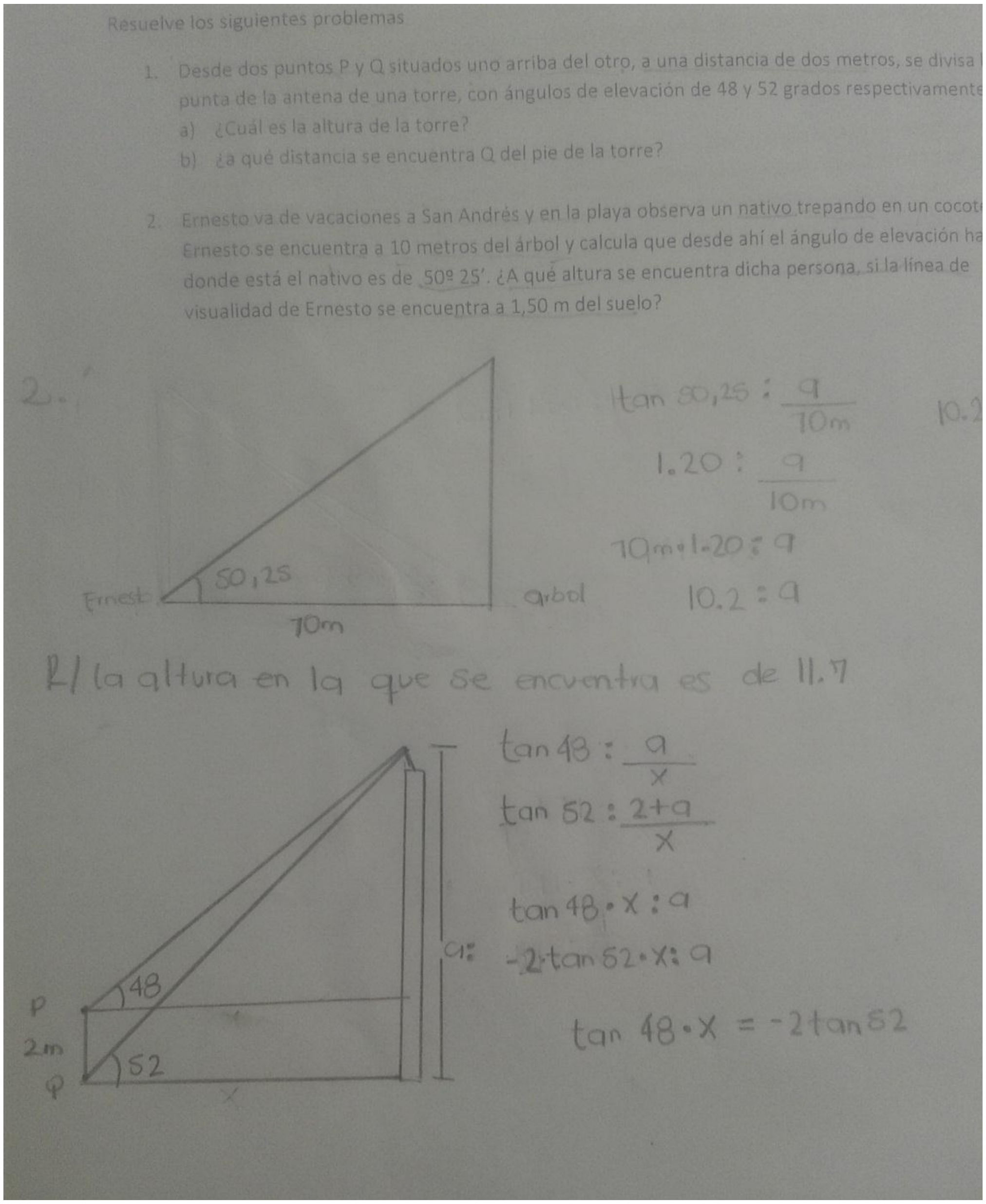
R/= 1.5 + 1.5 = 3

R/= El cocotero se encuentra a 3 metros de altura


encuentra a 1,50 m del suelo?
48°
h
x
2m
52°
-15,87
1,11 x - 1,2
= x tan (48°)
= 2cm x tan (52°)
an(48°) = 2cm tan(52°) + x tan (52°)
= 2cm (1,27) + x (1,27)
= 2,54cm + x 1,27
la al
y la


a = 12
12m + 1,50m = 13,5
se encuenta a una al
50°25'
10 m
1,50
tan (50°25') = a/10m
tan (1,20) = a/10m
10m . (1,20) = a
12m = a


2m



Resuelve los siguientes problemas

1. Desde dos puntos P y Q situados uno arriba del otro, a una distancia de dos metros, se divisa l
punta de la antena de una torre, con ángulos de elevación de 48 y 52 grados respectivamente
   a) ¿Cuál es la altura de la torre?
   b) ¿a qué distancia se encuentra Q del pie de la torre?

2. Ernesto va de vacaciones a San Andrés y en la playa observa un nativo trepando en un cocot
Ernesto se encuentra a 10 metros del árbol y calcula que desde ahí el ángulo de elevación ha
donde está el nativo es de 50º 25'. ¿A qué altura se encuentra dicha persona, si la línea de
visualidad de Ernesto se encuentra a 1,50 m del suelo?

2.

$\tan 50{,}25 : \frac{a}{10m}$ 10.2

$1.20 : \frac{a}{10m}$

$10m \cdot 1.20 : a$

$10.2 : a$

R/ la altura en la que se encuentra es de 11.7

$\tan 48 : \frac{a}{x}$

$\tan 52 : \frac{2+a}{x}$

$\tan 48 \cdot x : a$

$-2 \cdot \tan 52 \cdot x : a$

$\tan 48 \cdot x = -2 \tan 52$

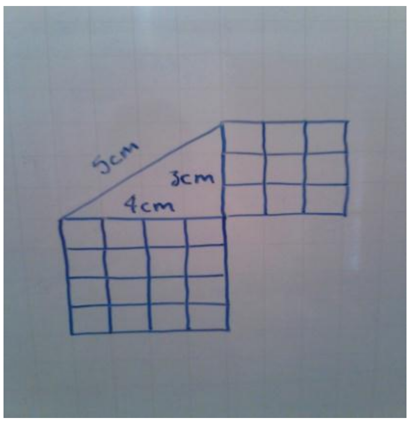
Anexo D. Estrategia para enseñar el teorema de Pitágoras

1. aclarar nuevamente a los estudiantes que el teorema de Pitágoras es válido solo para triángulos rectángulos.

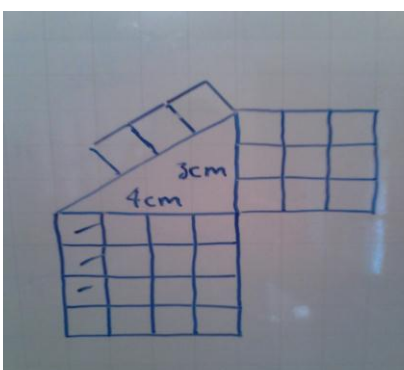
2. Dibujar un triángulo rectángulo de medidas 3cm, 4cm y 5cm.

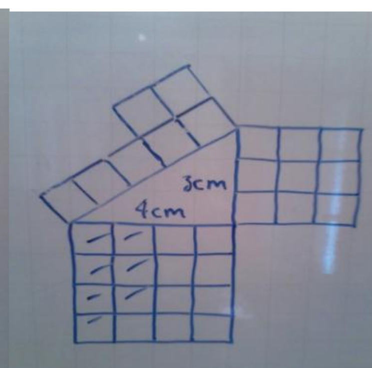
3. sobre los lados (catetos) que miden 3cm y 4cm dibujar cuadrados de esa longitud.

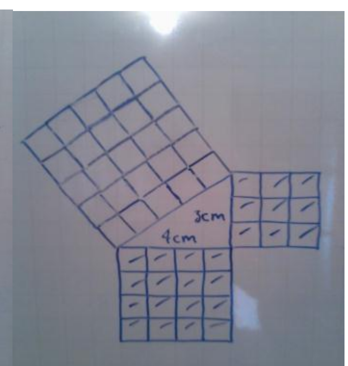
4. ahora estos cuadrados de lados 3cm y 4cm que están sobre el triángulo rectángulo, dividirlos con un cuadrado de 1cm de lado, como se muestra en la figura.



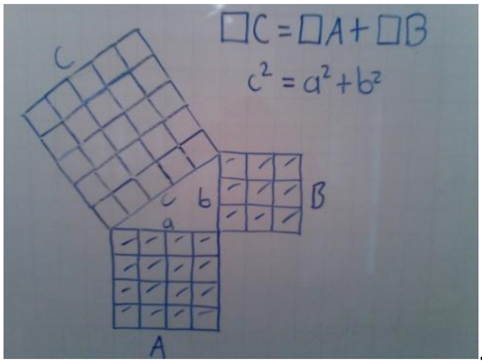
5. Recortar con papel un cuadrado de lado 1 cm, para luego construir el cuadrado en el lado (hipotenusa) del triángulo rectángulo que mide 5cm, como se muestra en las figuras.







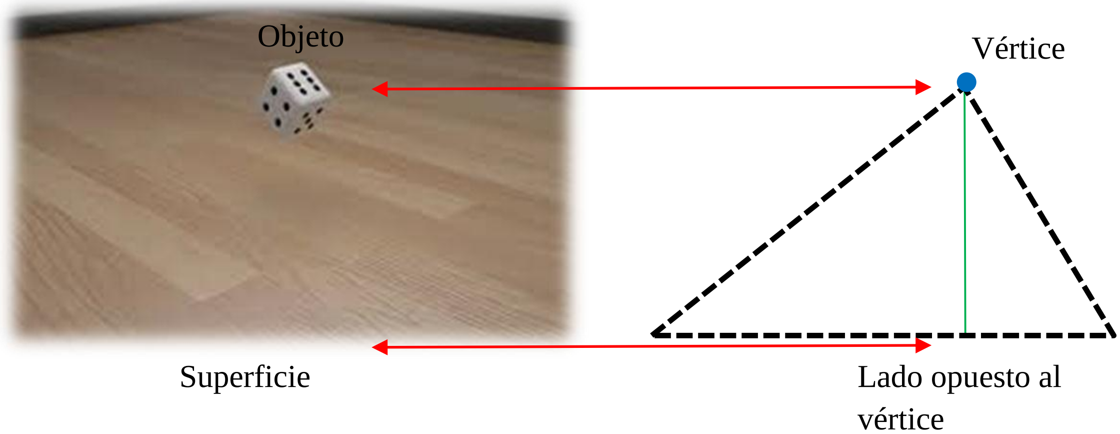
6. aclarar a los estudiantes que no necesitamos saber sobre los cuadrados que están dibujados sobre el triángulo rectángulo, sino sobre sus lados y como se relacionan en el triángulo, ya que estos corresponden a los lados del triángulo rectángulo, es decir, dejar claro la intencionalidad de la actividad.



.

La implementación de esta estrategia permitió que los estudiantes dieran sentido a la fórmula del teorema de Pitágoras, concluyendo que de la fórmula del teorema de Pitágoras se derivan otras fórmulas al realizar manipulaciones algebraicas.

Anexo E. Estrategia para reconocer alturas de un triángulo.



Después de tener clara la diferencia entre altura de un objeto y la altura a la que se encuentra un objeto, se puede relacionar objeto-vértice y superficie-lado opuesta al vértice. De esta manera el estudiante puede identificar las alturas de un triángulo con más facilidad buscando la altura a la que se encuentran los vértices con relación a los lados opuestos.