

MANIFESTACIÓN DE INVARIANTES OPERATORIOS EN UN CONTEXTO DE
MODELO PEDAGÓGICO ALTERNATIVO Y DE MULTIGRADO



HERNANDO LAGOS MAPALLO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2017

MANIFESTACIÓN DE INVARIANTES OPERATORIOS EN UN CONTEXTO DE
MODELO PEDAGÓGICO ALTERNATIVO Y DE MULTIGRADO

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIATURA EN
MATEMÁTICAS

HERNANDO LAGOS MAPALLO

Director de Práctica Pedagógica
ANGEL HERNAN ZUÑIGA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2017

Nota de Aceptación

Director: _____
Ángel Hernán Zúñiga

Evaluator: _____
Orlando Rodríguez

Lugar y fecha de sustentación: Popayán octubre de 2017

RESUMEN

El presente trabajo de grado, corresponde a la sistematización de la práctica pedagógica (SPP) que se realizó en la Institución Educativa Técnica Agroambiental Granja Escuela Amalaka, IE- TAGEA, tiene como objetivo establecer la influencia del modelo pedagógico de la institución en la identificación de invariantes operatorios expresados por el estudiante en el contexto de un grupo multigrado y en su actuación ante la temática línea recta curva y aproximación de la medida. Para el desarrollo de la sistematización se describen los aspectos más importantes que hicieron parte de esta experiencia pedagógica, organizados en tres capítulos los cuales son: el contexto institucional, docencia directa y reflexión en la docencia.

En el capítulo correspondiente al contexto institucional se tienen en cuenta los aspectos para la realización de la práctica concernientes al contexto, las concepciones que la escuela propone para la enseñanza y la temática enseñada. En relación al contexto se tienen en cuenta algunas consideraciones generales pertinentes de los inicios de la escuela, sistema de voluntariado, proyectos y multigrado, continuando con el currículo y plan de estudios de matemáticas, en esta parte se plantea el quehacer pedagógico a partir del saber natural, algunos principios de la filosofía que la IE-TAGEA trabaja y que hacen posible las dinámicas de los talleres y proyectos, explicitación del método del tanteo experimental, los principios pedagógicos de Celestin Freinet, además de las actividades experimentales que permiten el ajuste de los contenidos, los talleres de matemáticas (así definido para la guía de los contenidos) para 6, 7 y 8, las técnicas tenidas en cuenta en la práctica como texto libre/texto vivo, cálculo vivo y asamblea escolar. Después se adentra a la temática enseñada la cual está relacionada con algunos elementos básicos de la geometría en particular “la línea recta, curva las relaciones entre ellas y su medida” este tema entra en consideración con respecto a lo matemático, didáctico y metodológico. En lo que respecta a lo matemático se hacen algunas revisiones desde lo histórico epistemológico como se ha venido desarrollando, desde los trabajos de Euclides en su obra los elementos, hasta como modernamente se plantea las líneas y la medida en especial la de longitudes, reconociendo el caso de la línea curva. En lo didáctico se revisa el plan de estudios de matemáticas de la IE-TAGEA para saber que se ha enseñado en relación a la temática y que se propone para los cursos de 6, 7 y 8. Se revisa la experiencia de enseñar algo ya “aprendido”, ya que este tema es considerado “trivial” para estos cursos, que se ve reflejado en la experiencia de lo cotidiano y en algunos cursos de bachillerato, no obstante, se plantea en los lineamientos curriculares y estándares pensando la temática desde otro contexto, de estos se reflexiona en la magnitud, conservación de magnitud, estimación, rango de las magnitudes, unidad de medida, patrón de medida todo esto en relación a las líneas. En lo metodológico se expone la manera como se desarrolló la “construcción y deconstrucción de conocimiento” partiendo del conocimiento que se puede desplegar desde el medio, pasando por lo colectivo y reflexionado en lo individual, para alimentar estas ideas se parte de los conocimientos, saberes y concepciones previos, reconociendo que no hay una forma única de resolver los problemas se deja al estudiante que explore en la mayoría de conocimientos y dando una validación en lo individual y lo colectivo.

En el segundo capítulo se explicita la docencia directa, esta se aborda desde el modelo o guía de enseñanza, proyectada por la concepción de la institución aunque con algunos matices, la cual plantea una pedagogía centrada en el estudiante esto significa a grandes rasgos que se parte de las necesidades e inquietudes de los mismo, entonces al ser el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje, el profesor tendrá que tener cierta sensibilidad para acercar al estudiante a la “construcción” o como lo plantea la IE “adquisición” de conocimientos, la guía de enseñanza se establece siguiendo más o menos los siguientes criterios: presentación de la actividad, desarrollo de la actividad, preguntas y reflexiones e institucionalización, este orden es el que guio la mayoría de clases sin embargo en algunas clases el orden se modificó porque las propuestas y reflexiones de los estudiantes así lo exigía. En la secuencia y desarrollo de contenidos de aprendizaje se explicitara la guía de enseñanza con la temática de las líneas rectas, curvas y medida de la longitud, el desarrollo de las actividades se encuentra estructuradas de la siguiente forma:

- noción de línea recta, curva. Utilizando vocabulario cotidiano
- Formulación de conjeturas. Abstracción de la medida. Identificar, definir y/o reconocer la magnitud de la longitud, relacionar magnitudes y operar magnitudes.
- Sustentar y criticar las conjeturas (así sea informalmente)

De las clases y el compartir de conocimientos se intenta satisfacer la exigencia de las instituciones (universidad y escuela) al sistema de evaluación y resultados curriculares, este sistema parte de las cuestiones que se tienen al respecto, de los criterios de la escuela y la experiencia del profesor titular, se materializa estableciendo una relación entre las reflexiones orales, escritas y gestuales que expresan los estudiantes y la temática trabajada, por último se describen algunos hechos pedagógicos y didácticos, es decir aquellos eventos de la práctica relacionados con las bases para la enseñanza y los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje respectivamente.

En el tercer capítulo se responde desde la experiencia de la práctica a la pregunta ¿Cómo influye el modelo pedagógico de la IE-TAGEA en la identificación de invariantes operatorios por parte del profesor en las actividades habituales del aprendizaje de la matemática? La pregunta es confrontada con algunos registros de las actividades realizadas en la práctica, teniendo como unidades de análisis el modelo pedagógico de la IE-TAGEA y los invariantes operatorios, estos invariantes se reflexionan desde la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, quien en su teoría introduce el concepto de invariante para explicación de conceptos tales como campo conceptual, situación, concepto y esquemas.

Se concluye que el dominio del conocimiento no solo es cuestión de un periodo extenso de tiempo a través de experiencia madurez y aprendizaje como es planteado por Vernaug es necesario que el entorno del estudiante disponga de recursos pedagógicos, didácticos y humanos que permitan identificar los conceptos y conocimientos implícitos para los estudiantes, de los cuales se puede disponer para acercarse a la comprensión de los objetos matemáticos, en particular para este trabajo se observó que el modelo pedagógico de la institución influye en la identificación de los invariantes operatorios.

Tabla de Contenido

Capítulo 1 Contexto Institucional	9
1.1 Generalidades de la Institución Educativa (IE).....	9
1.2 Currículo y Plan de Estudios de Matemáticas.	11
1.3 Temáticas o Unidad Didáctica enseñadas.....	15
1.4 Consideraciones Matemáticas.....	18
1.5 Consideraciones Didácticas.	25
1.6 Consideraciones Metodológicas.	28
Capítulo 2 Docencia Directa.....	30
2.1 Modelo de Enseñanza.....	30
2.2 Secuencia y Desarrollo de Contenidos.	32
2.3 Sistema de Evaluación y Resultados Curriculares Obtenidos.	60
2.4 Hechos Pedagógicos y Didácticos (caracterización).....	66
Capítulo 3 Reflexión en la Docencia.....	69
3.1 Objeto de Estudio en la Docencia Directa.	69
3.2 Marco Conceptual y Unidades de Análisis del Estudio.	71
3.4 Hechos de la Perspectiva Investigativa.	85
Capítulo 4 Conclusiones y Recomendaciones.	86
4.1 Conclusiones	86
4.2 Recomendaciones.....	87
Lista de Referencias	88

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 <i>Plan de estudios grado sexto. IE-TAGEA</i>	12
Tabla 2.....	61
Tabla 3.....	64
Tabla 4.....	77
Tabla 5.....	79
Tabla 6.....	80
Tabla 7.....	81
Tabla 8.....	83
Tabla 9.....	84

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 pintura rupestre	19
Figura 2 línea recta.....	20
Figura 3 líneas rectas y curvas.....	21
Figura 4. Puntos	21
Figura 5. Líneas.	21
Figura 6. Segmento	22
Figura 7. Longitud de una curva	23
Figura 8 definición de medida	24
Figura 9. Correspondencia entre la línea recta y los números.....	25
Figura 10 texto escrito por estudiante que describe la observación hecha en la actividad	33
Figura 11. Texto escrito por estudiante, que describe la observación hecha en la actividad ..	34
Figura 12. Descripción de una hoja hecha por un estudiante	35
Figura 13. Texto de un estudiante, descripción de una hoja	36
Figura 14. Trayectorias en una carta abierta.....	38
Figura 15. Crucigrama.....	39
Figura 16.intercepción de líneas	42
Figura 17.figura abierta	44
Figura18. Segmento y recta.....	44
Figura 19 Segmentos.....	45
Figura 20. representación en el tablero de propiedades de la congruencia de segmentos	47
Figura 21expresiones de los estudiantes presentadas en el tablero.....	50
Figura 22 circunferencia con dos radios	51
Figura 23. Expresiones de los estudiantes recogidos en el tablero	54
Figura 24. Explicación del profesor en el tablero	55
Figura 25. Estudiante tratando de encontrar el radio de la circunferencia	57
Figura 26. Estudiantes construyendo una circunferencia y tratando de buscar el centro y radio.....	57
Figura 27. Profesor titular explicando un método para hallar una aproximación al radio de la circunferencia	58
Figura 28. Estudiante explicando cómo medir la curva de una circunferencia utilizando el radio.....	59
Figura 29. Trazado de líneas por un estudiante	62
Figura 30. construcción de líneas, postulados, definiciones y conjeturas.....	63
Figura 31. Procedimiento seguidos por estudiante para resolver problemas	63
Figura 32. Expresión escrita de un estudiante después de una actividad.	77
Figura 33. Expresión escrita de un estudiante después de una actividad.....	79
Figura 34. Taller desarrollado por un estudiante	81
Figura 35. Desarrollo de un taller por un estudiante.....	83
Figura 36. profesor titular explicando un método para hallar el radio de una circunferencia. 85	
Figura 37. Estudiante aproximando la longitud de la circunferencia utilizando el radio	85

1.1 Capítulo 1 Contexto Institucional

1.2 Generalidades de la Institución Educativa (IE).

Se presenta a continuación algunos elementos relacionados con la escuela que se observaron en la práctica pedagógica y que son pertinentes para una presentación del modelo pedagógico de la IE-TAGEA, aclarando que la IE no se fundamenta en un modelo pedagógico habitual por tanto este acercamiento es para aclarar en cierta medida la realidad de la concepción pedagógica de la escuela, necesario para atender una de las unidades de análisis del objeto de estudio de la sistematización, el cual está relacionado con el modelo pedagógico.

La Institución Educativa Técnica Agroambiental Granja Escuela Amalaka (IE-TAGEA) se encuentra ubicada en el kilómetro 8, sector Buena Vista, Municipio de Totoró-Cauca. Surge del desarrollo de una propuesta alternativa de trabajo comunitario, con el fin de brindar algunas posibilidades para desarrollar la creatividad de los niños y niñas en condición de vulnerabilidad e hicieran parte del sector en donde está ubicada la institución.

Esta propuesta alternativa, de carácter privado, se empezó a desarrollar en el año de 1996 y desde estos inicios se fundamentó en una educación que busca transformar las relaciones verticales y autoritarias propias de la escuela tradicional. En este sentido Fanhauser (2004) afirma que

El encierro, la inmovilidad y el castigo forman conductas de sumisión, temor y niegan procesos de autonomía, tolerancia y convivencia. Así mismo, el conocimiento es tomado como un juego de memoria donde el maestro es el portador del saber y su papel es depositarlo en el cerebro “vacío” del estudiante. Estas características son igualmente el reflejo de la sociedad colombiana (p. 3).

Para ofrecer una alternativa distinta a las condiciones que en general se presentan en la mayoría de establecimientos educativos del Cauca, la IE-TAGEA implementa una propuesta pedagógica centrada en el estudiante, esto desde la perspectiva de la IE significa que se intenta priorizar en las necesidades cognitivas de los estudiantes, al menos las relacionadas con lo que se quiere aprender, entonces el conocimiento sí, pero no como imposición sino en primer lugar como contemplación reflexiva de lo que existe para llegar a concluir las mismas ideas que se han planteado o crear otras. Este estado de idealismo de la IE-TAGEA se ha venido concretando con la implementación de proyectos agroambientales compatibles con las condiciones y circunstancias del lugar en que se encuentra la IE, con un claro propósito de preservar el espacio natural y que pueda enfocar a los estudiantes al trabajo, esto sería en parte las situaciones en que se desarrolla el conocimiento. Los proyectos en desarrollo buscan, en primer lugar, hacer que los niños se acerquen al conocimiento de manera natural, esto primordialmente en los primeros grados escolares, que interactúen con el medio, no quiere decir que los estudiantes de bachillerato no lo hagan, sino que además de interactuar se

relacionan con los contenidos que están presentes en los planes de estudio, esto se explicitara en el currículo y plan de estudios.

Para la adecuada interpretación de la concepción pedagógica de la IE-TAGEA se implementa la estrategia de pagar algunos profesores capacitados en ciertas áreas determinadas, para el caso de matemáticas se tiene un profesor titular, y también se tiene un sistema de voluntariado, esta dinámica es para equilibrar la ambivalencia de la IE de ser de carácter privado pero para niños, niñas y jóvenes en cualquier condición, lo que exige la necesidad de contar con un conjunto de personas que ayudan a suplir lo que demandaría recursos financieros para el funcionamiento regular de la institución. Los profesores vinculados formalmente y los participantes voluntarios se integran en espacios como la asamblea escolar, la silla caliente y reuniones de equipo pedagógico para llegar a un buen empoderamiento de los objetivos y finalidades que persigue la propuesta educativa.

Los recursos financieros que la escuela demanda para ejecutar sostenidamente cada proyecto son considerables, aunque se ha buscado un autosostenimiento pero esto no es posible todavía en su totalidad y al no contar con ellos se interrumpe la actividad formativa de los estudiantes que son los encargados de su desarrollo, ya que así se ha planteado el modelo pedagógico establecido en la IE- TAGEA. Para la adecuada financiación se ejecutan los siguientes trabajos que son hechos por los voluntarios:

- ✓ Apoyar los procesos de mejora en los sistemas agrícolas y pecuarios donde se trabaja agricultura orgánica o limpia. Se tiene cultivos de hortalizas, un sendero ecológico, también abejas, vacas, conejos, gallinas.
- ✓ Apoyar las construcciones de las infraestructuras que requieren reparaciones o adecuaciones.
- ✓ Apoyar el trabajo en los talleres de artes y oficios para los niños, niñas y jóvenes
- ✓ Apoyar con su idioma y/o profesiones a los estudiantes en sus clases. En la escuela se enseña alemán, italiano e inglés
- ✓ Apoyar a la construcción y el diseño de distintas tecnologías apropiadas.

Los apoyos generalmente llegan a la escuela por vínculos con otras organizaciones que trabajan la parte agroecológica, amigos de la escuela que trabajan artes, ciencias y extranjeros que apoyan la parte de idiomas.

Los apoyos que la IE-TAGEA consigue tienen la intención de beneficiar directamente a niños, niñas y jóvenes de distintas poblaciones vulnerables: población desplazada por la violencia, niños y niñas del sector popular de la ciudad, jóvenes campesinos e indígenas de los sectores rurales, estudiantes con necesidades educativas especiales pero por todas las realidades que se han venido instaurando la población ha cambiado notablemente, no solo en la cantidad de la población sino en las características de estos niños y niñas. la psicóloga y también encargada de la primaria, comenta que para los habitantes de la vereda en la cual se encuentra la escuela hay una condición especial para que sus hijos puedan estar en la escuela, consiste en realizar el pago de una parte de la matrícula por parte de los papás o mamás con trabajo en la escuela, ya sea en la granja u otros proyectos, pero sin embargo había que pagar un dinero que era la mitad de la matrícula, estrategia económica que no ha ayudado a que los

niños y niñas del sector entren a la escuela, ya que por los bajos recursos de los padres, prefieren mandarlos más lejos pero que no les cobren nada.

El carácter privado y la lejanía con relación a la ciudad de la IE ha llevado a que en el periodo de la práctica pedagógica los grados de bachillerato cuenten con muy pocos estudiantes lo cual se ha asumido con el trabajo en grupos multigrado, dividido en dos, en particular el grupo de la práctica pedagógica está integrado por los grados 6, 7 y 8. Hay que tener en cuenta que esta modalidad ha estado vinculada al trabajo de la escuela con los proyectos que permiten el trabajo con varios grupos, es decir que la participación en proyectos y otras actividades con varios grupos también responde a la estrategia pedagógica definida por la institución, pero ahora el trabajo en multigrado se ha movido hacia los talleres de conocimientos específicos, como la matemática escolar, ya que a menos estudiantes la escuela contrata menos profesores.

1.2 Currículo y Plan de Estudios de Matemáticas.

En el PEI de la IE-TAGEA se plantea que para la ejecución de los planes de estudios con niños, niñas y jóvenes se caracteriza la población con la cual se ha pretendido relacionar al proceso educativo, la cual es una población vulnerable y que pertenecen a los siguientes grupos: grupos étnicos (indígenas y afrocolombianos), grupos con necesidades educativas especiales (discapacidad auditiva y cognitiva), grupos de la población afectada por el conflicto armado (desplazados). Además en la institución se atienden a estudiantes que han sido desplazados o desertores del sistema escolar tradicional y niños o jóvenes extraescolares (no vinculados al sistema escolar y por su edad no se pueden matricular en los primeros grados). La mayor parte de esta población es flotante (entra y sale en cualquier época del año escolar) y presenta dificultades y debilidades de aprendizaje y comportamiento.

Para esta población así caracterizada la IE-TAGEA plantea el siguiente objetivo de formación: “Brindar una educación inclusiva de calidad para poblaciones de diferentes condiciones vulnerables en el departamento del Cauca propiciando la construcción de proyectos de vida que trascienden en la vida personal y social de niños, niñas, jóvenes y sus familias” (PEI, 2015, 8), a este propósito se adaptan parcialmente los fines y objetivos planteados en la Ley General de la Educación 115 del 8 de febrero de 1994; los indicadores de logros curriculares para la educación formal establecidos en la resolución 2343 de 1996; finalidades y alcances del decreto 230 del 11 de febrero de 2002; decreto 1290 del 2009, los lineamientos curriculares por niveles y áreas fundamentales de julio de 1998 y los estándares curriculares propuestos por el MEN a partir de Mayo de 2003.

La educación inclusiva que propende la IE propone adaptar a los diferentes niveles los estándares, temas y contenidos los proyectos y talleres. Otras veces, se aprovechan las técnicas de Freinet, las tecnologías apropiadas y las actividades propias de los proyectos para trabajar los estándares, temas y contenidos. Los que no se pueden trabajar, se desarrollan independientemente hasta donde el tiempo lo permita.

Las actividades además buscan indagar y practicar la filosofía que plantea la escuela la cual se encuentra enmarcada en los siguientes principios:

- ✓ Todos enseñamos a todos. Todos aprendemos juntos. Todos en unión aprenden juntos, se aprende de las actitudes y cualidades de los otros estableciendo un diálogo de saberes que propende una actitud humilde y sincera frente a la ciencia. Los hombres nos relacionamos, educándonos con el mundo como mediador. Al aprender en comunidad se participa de un saber colectivo, pero teniendo en cuenta que también se aprende de manera individual.
- ✓ la escuela debe ser el espacio donde el niño y joven descubra su vocación y desarrolle sus aptitudes para la vida. La escuela debe ser el lugar para que los niños, las niñas y los jóvenes descubran sus habilidades y vocaciones hacia un futuro a corto, mediano y largo plazo. Trabajando por proyectos se pueden descubrir las vocaciones.
- ✓ Las contradicciones y conflictos con uno mismo y los demás forman parte del proceso. Si no hay problemas no hay nada para resolver. Evadir un conflicto es cobardía. Los problemas se deben discutir en grupo. Si no hay conflictos no sería posible descubrir la propia identidad. Siempre va haber diferencias. Debemos estar abiertos al cambio. El reto es que a pesar de ser distintos podamos trabajar juntos. La pregunta es: ¿cómo llegar a acuerdos cuando hay diferencias?
- ✓ el conocimiento no se transmite...se facilita. El conocimiento se produce de nosotros mismos. Cada persona coge una idea de lo que se produce según su propia naturaleza. Hay saberes que sí se transmiten y hay otros que se elaboran nuevamente. Un ejemplo es que el color verde para unos significa la paz y para otros no.... El conocimiento es algo abierto, dinámico, cambiante, multifacético. El conocimiento se produce cuando se combinan las informaciones y el trabajo con la realidad y se enriquece y se valida en la medida que sea confrontado, sistematizado y socializado con los demás.

El plan de estudios de matemática se desarrolla atendiendo a la concepción pedagógica de la escuela, a los lineamientos y estándares básicos de competencias, la siguiente tabla es un ejemplo de cómo se estructura el plan de estudios.

Tabla 1

Plan de estudios grado sexto. IE-TAGEA.

ACTIVIDAD PEDAGÓGICA	TEMA CONTENIDO	ESTÁNDAR
Se parte de la observación fuera de la maloka del entorno natural inmediato, personas, plantas, animales, construcciones, objetos de la GEA. El	TEORÍA DE CONJUNTOS –	Utilizo diferentes

<p>estudiante determina características comunes formando grupos y clasificando por color y tamaño, forma, particularidad, cantidad, etc.</p> <p>Sistematización de lo observado, conceptualización de teoría de conjuntos dentro de la maloka. Desarrollo de ejercicios con fichas.</p> <p>Los estudiantes realizan gráficas de rectas numéricas, dividiéndolas en segmentos iguales utilizando diferentes distancias, para luego ubicar números naturales de acuerdo a una posición indicada.</p> <p>Observa y compara los símbolos utilizados en diferentes sistemas de numeración, consulta en biblioteca sobre signos numéricos de diferentes culturas, realiza las gráficas de los símbolos utilizados por ellos con equivalencia en nuestro sistema.</p> <p>Talleres prácticos sobre sistemas de numeración binaria - romano – decimal.</p> <p>Los estudiantes realizarán diagramas de árbol con múltiplos y divisores de números naturales.</p> <p>Juego “numéricos primos”. Los estudiantes elaborarán en cartulina un naípe para jugar con 99 cartas numeradas del 2 al 100, armas y pilas con números primos y sus múltiplos.</p> <p>Ejercicios prácticos sobre múltiplos - divisores y números primos con fichas</p>	<p>OPERACIONES :</p> <p>Definición</p> <p>Notación</p> <p>Diagramas de Venn</p> <p>Unión</p> <p>Intersección</p> <p>Diferencia</p> <p>Complemento</p> <p>Diferencia simétrica</p> <p>SISTEMA DE NÚMEROS NATURALES:</p> <p>Representaciones gráficas</p> <p>Polinomios aritméticos</p> <p>Sistemas de numeración</p> <p>Sistema binario – romano</p> <p>Sistema decimal</p> <p>TEORÍA DE NÚMEROS:</p> <p>Múltiplos</p> <p>Divisores</p> <p>Números primos y compuesto</p> <p>Criterios de divisibilidad</p>	<p>representaciones gráficas para mostrar un conjunto de datos y resolver problemas.</p> <p>Describo y represento situaciones de variación por medio de diagramas y expresiones verbales.</p> <p>Comparo e interpreto información que obtengo de diferentes fuentes.</p> <p>Descompongo un número teniendo en cuenta las propiedades del sistema decimal.</p> <p>Encuentro la expresión general para expresar propiedades de los números naturales (par, impar, primo) y las relaciones entre dos de ellos (divisor de, múltiplo de)</p>
---	--	--

LOGRO	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICA
<ul style="list-style-type: none"> Comprende el concepto y el uso de los conjuntos Representa los números naturales, establece comparación con otros sistemas de 	<ul style="list-style-type: none"> Comprende y desarrolla los conceptos de proposición y de conjuntos lógicos. Determina claramente, opera y diagrama los diversos conjuntos matemáticos Utiliza lenguaje matemático para determinar conjuntos por extensión y comprensión Conoce y determina las clases de 	<p>Tanteo experimental</p> <p>Calculo vivo</p> <p>Fichas autocorrectiva</p>

<p>numeración.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Maneja el concepto de divisibilidad, múltiplo y números primos. 	<p>conjuntos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representa en forma concreta y grafica cantidades numéricas y usa procedimientos matemáticos que permiten la construcción de conceptos. • Establece relaciones entre diversas representaciones de los números naturales • Descompone un número de acuerdo al valor posicional. • Establece con claridad los conceptos de múltiplo y divisor • Identifica y sustenta la calidad de número primo 	<p>s</p>
--	---	----------

Los elementos del plan de estudio que se pueden observar en la tabla 1 son los siguientes: *Actividad pedagógica.* Se plantea desde la observación fuera del aula de clase, en un entorno natural, que permita determinar características, que son llevadas a la conceptualización dentro del aula de acuerdo al tema que se esté trabajando, luego los estudiantes relacionan lo aprendido con situaciones cotidianas después se pasa a una abstracción general, por último el estudiante plantea problemas cotidianos y posibles respuestas.

Tema contenido. Se encuentra dividido en más o menos tres temáticas, en cada temática se presentan los contenidos de matemáticas específicos enseñados, estos contenidos tienen una secuencia, además los contenidos se presentan en representaciones geométricas, definiciones, operaciones, propiedades y notaciones.

Estándar. Hay más estándares que temáticas o capítulos en el tema, es decir que a cada capítulo le puede corresponder más de un estándar, todos los estándares están relacionados con alguna temática.

Logro. Hay un logro `por cada temática y está relacionado con el tema principal.

Indicador de logro. Está ligado a la capacidad de reconocer en la naturaleza características importantes, de establecer relaciones entre los conceptos de las matemáticas y situaciones cotidianas, de modelar situaciones, de plantear y resolver problemas, de realizar operaciones y representar.

Técnica. Para todos los cursos se plantea el tanteo experimental, el cálculo vivo y las fichas autocorrectivas.

A continuación, se explicitan las técnicas de Freinet que en el desarrollo de la práctica se aplicaron para tener mayor coherencia entre la que se planteó como unidad didáctica y lo que la escuela fue exigiendo y demandando, la descripción de las técnicas fue realizada por una profesora de la escuela Amalaka y de la interpretación que la práctica permitió darle, es una mirada desde lo que se hace en la escuela, que no es exactamente lo que puede plantear la pedagogía de C. Freinet.

Texto libre / texto vivo – un medio para la enseñanza del lenguaje: expresión libre, composición libre. Es la expresión del estudiante respecto a un interés actualizado relativo a

su vida, a su vinculación con el ambiente y el interés de la institución por una temática. Por ejemplo. Cuando regresaban de salidas pedagógicas los niños escriben una breve descripción de la experiencia. Escribir no significa solamente escribir con palabras sino también contar mediante los dibujos.

Los textos libres generalmente son leídos por sus autores a toda la clase, aunque en el caso de no querer hacerlo entonces se omite este acto. Son puestos a discusión por toda la clase. Se advierten los errores ortográficos y gramaticales, se clarifica la puntuación, la sintaxis, el léxico; el contenido se precisa mejor y, si es necesario, se enriquece.

Freinet considera el texto libre como un lazo afectivo entre la vida y la escuela. Lo fundamental de este texto es que el estudiante es su autor, con la colaboración del maestro. Partiendo de este texto se pueden idear diversidad de ejercicios, que facilitan una adquisición más rápida de lo que desea aprender. Además, con esta técnica se desarrolla sus capacidades, gana confianza en sí mismo y se autovalora.

Es conveniente dejar hablar al joven, escuchar sus expresiones, procurar que no solo se exprese verbalmente sino también por medio de sus representaciones de lo que se va aprendiendo.

Según Freinet los progresos en el dibujo, en la lectura y en la escritura se hacen mediante el tanteo experimental.

Cálculo vivo: Consiste en resolver los problemas que nos plantean nuestro ambiente y el mundo en general. Los problemas propuestos surgieron:

- a. Del trabajo en grupo
- b. De lo que aportaron los estudiantes
- c. De las reflexiones de la observación.

Los estudiantes reflexionan frente a un problema, exponen sus procedimientos de solución, preguntan, exponen y oyen críticas. Se mejora la solución elegida.

Asamblea escolar: Se crea para discutir cosas que les preocupan, ayuda a los escolares a descargar inquietudes, omisiones y clarificar y liberar la conciencia. Toma de decisiones sobre diversos problemas. Es una reunión en el aula (maloca) grande. Se organizan las sillas formando un semicírculo. Un estudiante toma acta de la reunión – el profesor ayuda. Se organiza el orden del día – todos tienen derecho de proponer temáticas. Están presentes estudiantes y profesores, en ocasiones también se invita a padres de familia. En el acta se escribe un resumen y las conclusiones de la asamblea. Al final de la asamblea todos los que están presentes firman. En Amalaka se hace asamblea cada viernes – última hora.

1.3 Temáticas o Unidad Didáctica enseñadas.

La temática que se desarrolló para la presente sistematización tiene el título de “la líneas recta, curva y aproximación a la medida”, esta temática se encuentra generalmente en el marco de la geometría pero trasciende otros espacios de las matemáticas como lo son la teoría

de números, algebra y el cálculo. Las líneas están acompañando la forma como observamos, interpretamos y representamos lo que nos rodea, están presentes en cuanta forma del mundo concreto existe, esa es la manera como se ha estado representado la realidad física, las líneas han llegado hasta el más alto nivel del conocimiento abstracto, en forma de segmentos, rectas, círculos, parábolas, elipses. Los niños y niñas en sus primeros encuentros con el lápiz, los colores y otros trazan enmarañados trazos de líneas rectas y curvas, ya cuando entran a primeros grados de primaria siguen con las líneas un poco más organizadas y armónicas, sin embargo se llega a bachillerato y comienza a desaparecer aceleradamente las líneas y entonces surge la pregunta ¿para qué dibujar tantos trazos con líneas en los primeros años escolares si al final ya no sirven? esto al menos es la percepción que se tiene, ya que si bien los profesores están constantemente utilizando líneas para representar fenómenos de la realidad que buscan modelar la realidad física, obteniendo figuras geométricas, los argumentos hechos con representaciones tienen poca o casi nada de validez y por ende la comodidad para enseñar en las matemáticas no se refleja en la comodidad del estudiante para considerar lo que es correctamente conocimiento, entonces se exigen procedimientos analíticos para resolver problemas y los procedimientos en representaciones solo sirven de adorno.

Las temáticas enseñadas abarcan conocimientos de geometría que se presentan en los planes de estudio de primaria, de sexto, séptimo y octavo, conocimientos de matemáticas de sexto, séptimo y octavo, se presentan según el orden en que se desarrollaron en la docencia directa. Además, las temáticas se dividen en tres capítulos, los cuales tienen unos contenidos que en su mayoría se trabajaron en el orden que se presentan, sin embargo, algunos de estos contenidos “aparecieron” antes de su presentación y se les dio el espacio en cada momento que fue necesario, es decir que aunque un contenido emergiera en una actividad y no estaba presupuestada su aparición se trabajaba pero con distinto rigor. A continuación, se presentan las temáticas y sus contenidos, las temáticas son línea recta y curva; postulados, definiciones y propiedades; medida de líneas rectas y curvas.

Línea recta y curva

Definición de forma

Clasificación de las formas (simples, complejas, bidimensionales)

Definición de trayectorias

Noción de punto (concreto y abstracto)

Noción de línea

Noción de superficie

Noción de espacio

Noción de curva

Elementos de representación

Punto alineado

Postulados, definiciones y propiedades

Postulados de conexión
 Postulados de orden
 Definición de segmento

Medida de líneas rectas y curvas

Congruencia de segmentos
 Cantidad de longitud
 Relación de equivalencia (propiedad simétrica, reflexiva y transitiva)
 Noción de medida
 Unidad de medida
 Patrón de medida
 Definición de longitud de un segmento
 Segmentos consecutivos
 Suma de segmentos
 Suma de longitudes
 Propiedades de la suma de longitudes
 Ordenación de longitudes
 Línea abierta y cerrada
 Longitud de una línea abierta y cerrada
 Longitud de una línea curva
 Longitud de la circunferencia
 Perímetro de la circunferencia
 Aproximación al número irracional pi

La enseñanza de este conocimiento se dio a través del método de tanteo experimental, esto llevo a la indagación luego al planteamiento de problemas que permitían rescatar conceptos y proposiciones que se profundizaban en exposiciones, clases discursivas y magistrales, utilizando los recursos pedagógicos de la escuela, es decir las técnicas de C. Freinet filosofía, talleres.

Tabla 2.

Actividad, objetivos y contenidos de la docencia directa.

Actividad	objetivo	contenido
observación y descripción de las plantas	identificar formas lineales unidimensionales, bidimensionales en la naturaleza	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Definición de forma ✓ Simetría en las formas
Reconociendo los elementos básicos de las formas.		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Clasificación de formas ✓ Dos dimensiones ✓ Tres dimensiones ✓ naturales
observando la caída de un objeto y representando el	representar las formas lineales bidimensionales y unidimensionales	<ul style="list-style-type: none"> ✓ definición de trayectorias ✓ traslación

recorrido		
Construir y resolver el crucigrama.	Conceptualizar las formas lineales unidimensionales de la naturaleza.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Punto ✓ Línea ✓ Superficie ✓ Espacio
encontrando las posiciones entre puntos y líneas		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Elementos de representación de la forma ✓ Líneas rectas y curvas ✓ Superficie ✓ Puntos alineados
Proponiendo postulados y definiciones a partir de las construcciones.		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Postulados de conexión ✓ Postulados de orden
Comparando segmentos y encontrando la cualidad de longitud.	identificar la magnitud continua de longitud	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Definición de segmento ✓ Congruencia de segmentos
buscando un elemento que permita comparar cantidades de longitud	relacionar la magnitud continua de longitud	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Relación de equivalencia ✓ Cantidad de longitud
Comprensión del proceso de conservación de magnitud.		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Medida ✓ Unidad de medida
capturando lo continuo con lo discreto	relacionar y operar la magnitud continua de longitud	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Suma de segmentos
midiendo las curvas	Realizar mediciones de segmentos con un procedimiento adecuado.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Segmentos consecutivos
aproximación de pi		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Suma de longitudes ✓ Razón y Proporción.

1.4 Consideraciones Matemáticas.

Existen cantidad de esbozos antiguos plasmados en cuevas, monolitos y en el suelo que se han descubierto, estos primeros dibujos tienen una característica común los bordes de estos dibujos son líneas. Para representar un rostro hacían una línea más o menos ovalada, para

hacer una animal combinación de líneas curvas y rectas donde diera lugar como en el caso de las líneas de nazca de Suramérica y otras en distintas partes y distintas épocas.



Figura 1 pintura rupestre

Fuente:http://historiaybiografias.com/arte_rupestre/

Pero también desde muy temprano la humanidad considero necesario observar cierta particularidad que tenían algunos objetos, animales, la naturaleza y sus propios cuerpos, esta cualidad está relacionada por ejemplo con el largo de una flecha necesaria para cazar, la distancia suficiente para atrapar un animal, el largo de sus brazos, la altura de los árboles, la distancia de un pueblo a otro, la distancia al río, la profundidad de un hueco entre otras. Esta cualidad llamada longitud que se abstrae implícita o explícitamente de las actividades concretas de supervivencia de la humanidad se fue ajustando a medida que pasa el tiempo, hasta que concretamente se llegó a la actividad de medir.

Con los trabajos de los antiguos constructores que realizaban obras civiles para los distintos desarrollos que se presentaron en varias partes del mundo, como las pirámides de los egipcios, de los mayas, de los incas, así como de los trabajos que presentaban los artesanos y artistas, que también requería de la utilización de instrumentos de medida que les ayudará en el refinamiento de sus obras, esto da lugar a que en algunas culturas se le dé importancia a este fenómeno y es así como en los siglos V y VI A.C. en los sitios de Grecia y otros lugares del medio oriente, se empezó a precisar en algunos problemas relacionados con las líneas rectas finitas o segmentos tanto para representar magnitudes, números y cantidades inconmensurables, además de cálculos que tenían que ver con longitudes, uno de los más conocidos la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, este problema y otros aunque no fueron solucionados con “claridad”, generó otros resultados que desarrollaron las matemáticas.

Con el trabajo de Euclides se entra a otra forma de concebir el mundo que nos rodea, en particular la medida empieza un riguroso camino, esto es un tema central en su obra los elementos, en la cual recoge y sistematiza muchos resultados que ya se habían desarrollado como los de tales de Mileto que en su mayoría estaban ligados con la medida de magnitudes: segmentos, ángulos, figuras planas y sólidos. En esta obra no se define el concepto de medida, se “establece la operación de medir mediante un proceso de comparación, respetando el principio de homogeneidad, en el sentido de que sólo es posible comparar magnitudes de

igual dimensión” (Bobadilla, 2012, pag 17); de hecho toda su obra está relacionada con el concepto de medida, además su obra habla de una medida relativa.

Se considera que la idea de línea recta esta sugerida por eventos de la realidad concreta tales como un cordel fino bien estirado, un rayo de sol, el borde de una superficie, estos ejemplos se refieren a fenómenos de representación finita, de acuerdo a Kline (1992) en los elementos de Euclides se trataban las líneas rectas siempre de longitud finita, es decir lo que hoy llamaríamos segmento, esta idea se representaba concretamente así:



Figura 2 línea recta

Fuente: Hernando lagos

Para la actualidad una definición para esta representación en la matemática, se da con el objeto matemático denominado segmento y se define de la siguiente manera:

Segmento. Para dos puntos cualesquiera A y B, el segmento AB es el conjunto de puntos A y B, y de todos los puntos que están entre A y B, los puntos A y B se llaman extremos de AB.

No obstante estas entidades que se introdujeron en los elementos de Euclides, posteriormente en la obra de Hilbert pasaron a ser entidades ideales, los cuales por una parte se trata de objetos que no corresponden a nada en la intuición espacial y por otra parte son objetos cuya incorporación dan unidad y simplicidad a la teoría, al evitar la existencia de casos especiales en los que ciertos casos no se cumplan.

Para los segmentos se encuentra una cualidad especial “la longitud” que es una magnitud y que se rastrea en los elementos de Euclides de la siguiente manera: “una línea es una longitud sin anchura” Kline (1992. P.91).

De esta definición Kline (1992) expone que la palabra línea se refiere o significa curva, de acuerdo a esto se puede decir que la longitud es una línea, pero de qué tipos de líneas se refería Euclides, Euclides caracteriza por línea algo que tiene longitud, pero mediante esa caracterización una línea puede ser una curva o una línea recta de longitud finita. Es decir, con esta definición se habla de línea en general... es decir, aquellas que se pueden ver como composiciones de varias líneas (pag 91). Entonces de acuerdo a Euclides una magnitud continua en un solo sentido se llama longitud, y una longitud finita es una línea. Modernamente el tema de líneas se encuentra bajo la teoría de David Hilbert, en esta concepción la línea es una recta y la porción de una línea comprendida entre dos puntos se denomina segmento rectilíneo o simplemente segmento, pero este es un caso particular de lo que es una línea, ya que se encuentran también las líneas curvas y algunos autores también definen las curvas “mixtas” aquellas que están formadas por líneas rectas y curvas.

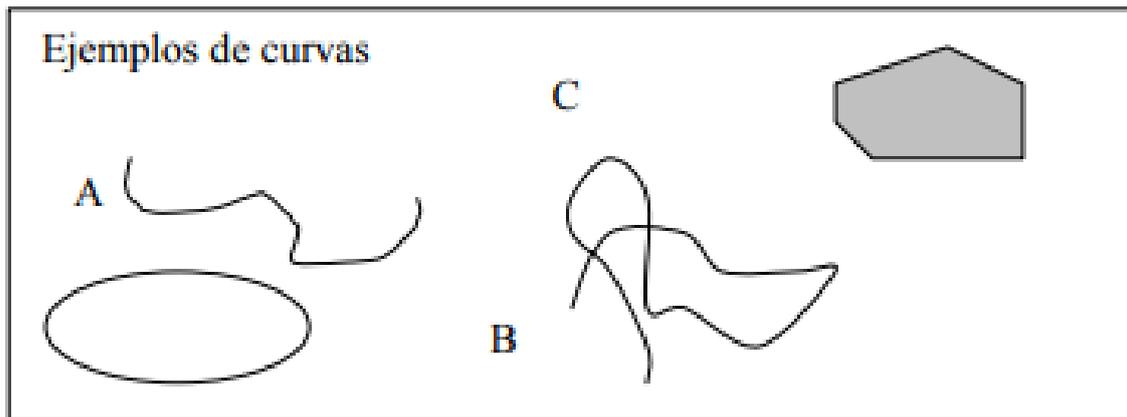


Figura 3 líneas rectas y curvas

Fuente: geometría y su didáctica para maestros. Juan Godino.

La siguiente presentación de punto recta y segmento es como Godino y Ruiz (2002) propone que se debe entender estas abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos, en la figura 4 se describen las letras A, B, P, Q a la derecha de una diminuta marca redondeada. Estas marcas son las que generalmente llaman puntos.

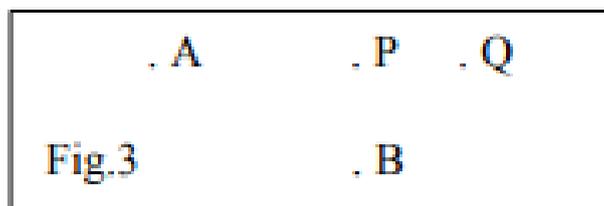


Figura 4. Puntos

Fuente: matemáticas y su didáctica para maestros. Godino.

El punto, como objeto o figura geométrica, se considera una idea intuitiva que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio. En la figura 5 se puede decir que hay representadas dos líneas rectas designadas con las letras r y s, aunque para ser más precisos faltaría las puntas que se colocan en los extremos para indicar que continúa prolongándose:

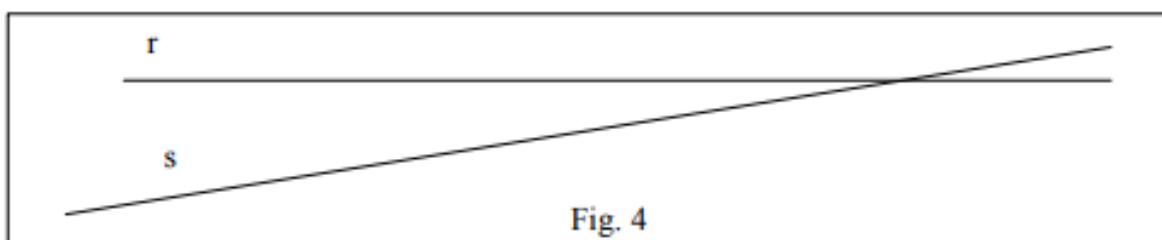


Figura 5. Líneas.

Fuente: matemáticas y su didáctica para maestros. Godino.

De acuerdo a Godino y Ruia (2002)

“Este objeto o figura geométrica llamado línea recta está caracterizada por algunos atributos que no se pueden representar en el dibujo, Se considera que las rectas son ilimitadas por ambos extremos, así como que no tienen ningún espesor, lo que hace imposible "representar" las rectas. La característica de ser ilimitadas por ambos extremos se suele indicar marcando flechas en cada extremo pero esto lleva a contradicciones en los argumentos cuando se enseña. Otras experiencias que sugieren la idea de recta pueden ser un hilo tirante, el borde una regla. Se considera que dos puntos determinan una y sólo una línea recta que contiene a dichos puntos. Tres o más puntos pueden determinar varias rectas, pero si están contenidas en una recta se dice que son colineales. Tres puntos no colineales se dice que determinan un plano, figura geométrica que suele ser evocada por una hoja de papel apoyada sobre una mesa, la propia superficie de una mesa, la pizarra. De nuevo al objeto o figura geométrica designada con la palabra ‘plano’ se le atribuyen unas características ideales que no tienen tales objetos perceptibles, como no tener límites en ninguna dirección, ni tampoco ningún espesor. Se dice que las rectas y los planos son conjuntos de puntos. Se considera el espacio como el conjunto de todos los puntos. Cualquier subconjunto de puntos del espacio se considera como una figura geométrica. El objetivo de la geometría será describir, clasificar y estudiar las propiedades de las figuras geométricas. Dos rectas contenidas en el plano que no tienen ningún punto en común se dice que son paralelas. Si tienen un punto en común se dice que son concurrentes. Una recta que corta a otras dos se dice que es una transversal. Todo punto P divide a una recta que lo contiene en dos subconjuntos formados por los puntos que están situados a un mismo lado respecto de P. Estos subconjuntos se dice que son semirectas o rayos de extremo P. También se habla de semiplanos: cada una de las dos partes en que queda dividido un plano al quitar una recta del mismo. También serán semiplanos abiertos o cerrados, según que se incluya o no la recta a partir de la cual se forma”.

En el siguiente cuadro decimos que está representado el segmento AB, conjunto de puntos comprendidos entre los puntos A y B, que se dice son los extremos del segmento.



Figura 6. Segmento

Fuente: matemáticas y su didáctica para maestros. Godino.

La distancia entre los puntos A y B se dice que es la longitud del segmento AB. Dos segmentos AB y CD se dice que son congruentes si tienen la misma longitud. Un segmento se puede definir también como la intersección de dos semirectas contenidas en una misma recta. Los segmentos pueden ser abiertos o cerrados según que en las semirectas se consideren incluidos o no los extremos

La línea curva es una de las formas más básicas e importantes de la matemática, en torno a la cual se establecen un sinnúmero de estructuras y relaciones de gran importancia. Podríamos describir a la línea curva como una línea recta que toma algún tipo de desviación en su rectitud de manera progresiva, no repentina ni violenta porque en ese caso estaríamos hablando de la unión de dos curvas rectas perpendiculares sobre un punto. La línea curva puede formar, si se cierra, diversas formas y estructuras que varían dependiendo del ángulo con que esa línea se vaya armando sobre el espacio y sobre el plano.

Las líneas curvas son las que más han generado dificultad a la hora de medirlas ya que por lo general para medir longitudes se utilizan instrumentos con bordes “en forma de segmentos”, a esto se adiciona que en los primeros años de educación se empiezan a introducir en general solo una línea curva, la circunferencia, de la cual se conoce una fórmula para determinar su longitud, en los grados de secundaria de décimo y once se introducen otras líneas curvas pero también con la misma condición de que se conoce alguna ecuación que ayuda a determinar ciertas propiedades, sin embargo las líneas curvas en general no se tratan pero se sabe que estas son las que más se presentan en los objetos perceptibles, los griegos introdujeron un método para encontrar la longitud de una línea curva, el cual consistía en aproximar la línea curva por medio de segmentos y así determinar la longitud de la línea, ¿se puede considerar otra forma de hacer esto?

La idea que hasta hoy es la más “adecuada” para calcular la longitud de una curva C contenida en el plano o en el espacio consiste en dividirla en segmentos pequeños, escogiendo una familia finita de puntos en C , y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal que pasa por dichos puntos. Cuantos más puntos escojamos en C , mejor será el valor obtenido como aproximación de la longitud de C .

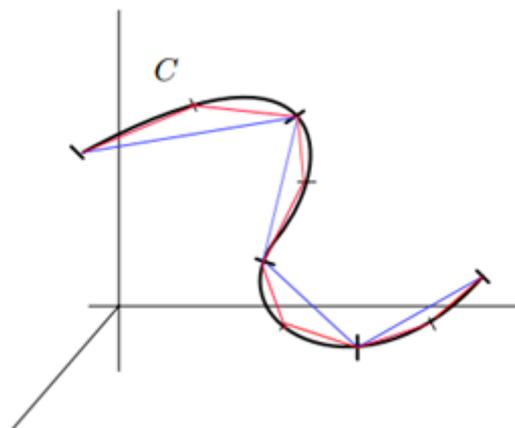


Figura 7. Longitud de una curva

Fuente: <http://aguilarserrano.blogspot.com.co/2011/06/32-longitud-de-curvas.html>

El proceso de medir es el mismo que se utilizaba en la antigüedad, este proceso involucra los siguientes aspectos: abstracción, estrategia, aparato o sistema de medición, unidad de medida o sistema de referencia y operador, en cambio el concepto moderno de “medida” que

se ha construido es diferente y se fundamenta básicamente en el concepto de función, y el campo numérico continuo y ordenado de los números reales. Euclides no contaba con estos aspectos para elaborar una teoría abstracta de la medida; sin embargo, podemos mostrar que en los Elementos se desarrolla una teoría de la medida relativa: Euclides mide segmentos, mide ángulos, mide áreas, mide volúmenes y mide números. Para el caso de los segmentos o trozos de líneas rectas, se tiene que el número que expresa la distancia que hay de un extremo a otro se llama medida o longitud. Y para hallar tal medida se tiene que tener en cuenta la idea de correspondencia entre punto geométrico y número real, es decir la relación entre la recta geométrica y el conjunto de los números reales, esta idea se presenta rigurosamente así:

Postulado 8.1.1 (De la distancia)

A cada par de puntos diferentes les corresponde un único número real no negativo.

Definición 8.1.1

A cada par de puntos diferentes A y B corresponde un único número real no negativo llamado la *distancia* entre A y B , o también la *medida* del segmento AB y la cual denotamos como $d(A, B) = m(\overline{AB})$.

La distancia entre dos puntos o la medida del segmento determinado por ellos tiene las siguientes propiedades:

- a. $m(\overline{AB}) = d(A, B) \geq 0$.
- b. $m(\overline{AB}) = m(\overline{BA}) = d(A, B) = d(B, A)$.
- c. $m(\overline{AB}) = d(A, B) = 0$ si y sólo si A coincide con B ($A = B$).

La propiedad (c) nos dice que al segmento nulo (o al punto) le asignamos una medida cero.

Para abreviar en la nomenclatura de la $d(A, B) = m(\overline{AB})$, escribimos simplemente AB . Debemos tener presente que cuando escribimos \overline{AB} nos referimos a la figura geométrica del segmento y con AB nos referimos a un número que es la medida o

Figura 8 definición de medida

Fuente: Geometría Euclidiana, Jose Rodolfo Londoño (segunda edición, 2006)

Es claro que la distancia entre A y B no depende de cuál de los dos puntos se nombre primero, $d(A, B) = d(B, A)$, ni de la colocación de la regla.

Si ponemos la regla de tal manera que el cero coincida con A , es fácil hacer la lectura y vemos que la distancia es 5 cm.

Si ponemos la regla de tal manera que el 4 coincida con A , vemos que al punto B le corresponde el 9. En este caso la distancia entre A y B será $9 - 4 = 5$ cm (figura 8.2). También podemos hacer esta lectura como $4 - 9 = -5$, pero como la distancia siempre es positiva tomamos el valor absoluto de la diferencia entre los números y tenemos así la siguiente definición de distancia.

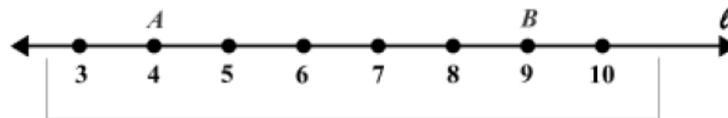


Figura 8.2

Definición 8.1.2

La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia entre los números reales correspondientes.

Figura 9. Correspondencia entre la línea recta y los números

Fuente: Geometría Euclidiana, José Rodolfo Londoño (segunda edición, 2006)

1.5 Consideraciones Didácticas.

Los contenidos de la intervención pedagógica están ligados implícitamente a los contenidos que el plan de estudios de la IE-TAGEA tiene establecidos para los grados 6, 7 y 8, no se encuentran tal como se pretenden enseñar en ningún capítulo de los tres cursos, pero están presentes en algunos temas especialmente de geometría. En particular algunos contenidos que están relacionados con la temática de la práctica, explícitamente se encuentran en los cursos de primaria, al menos los títulos de los contenidos lo expresan así, de estos se puede observar que desde los primeros años escolares se trabaja el tema de línea recta (segmentos) y una curva, la circunferencia, es así como en primero se tiene destinado un capítulo a la geometría y uno de los temas es líneas rectas y curvas y figuras geométricas, Para el grado segundo se observa que en los contenidos para el taller de matemáticas hay un capítulo para la geometría, en todo este capítulo se puede observar relaciones entre rectas, definiciones relacionadas con líneas, medida y unidades de medida estándar, en los demás cursos de primaria hay un trabajo relacionado con figuras geométricas. De los contenidos de primaria se tendrán en cuenta para la práctica los siguientes:

Líneas caminos abiertos y cerrados

-Líneas rectas

-Líneas paralelas

-Líneas perpendiculares

-Figuras planas

- Cuerpos, cono, esfera, cubo, cilindro
- Giros rotación
- Longitud – Medir
- Centímetros, decímetros, metro
- Largo – ancho
- Áreas, cubrir figuras

Cuerpos y líneas

- Líneas abiertas y cerradas
- Plegado
- Segmentos
- Plano
- Líneas horizontales y verticales
- Relación entre líneas rectas
- Triángulos
- Cuadriláteros
- Circunferencia
- Círculo

Figuras tridimensionales

- Caras
- Lados
- Capacidad

los conocimientos de primaria tendrán un tratamiento diferente, no obstante se advierte que por la línea metodológica que se plantea tanto de la IE como de la prácticase realizaran acercamientos a los conocimientos desde el campo concreto, pero esto se discutirá en los aspectos metodológicos, reconociendo que, en 6, 7 y 8 de bachillerato estos contenidos parecen ser los mismos, pero solo en el nombre porque en la profundización es diferente, ya que, los esquemas de los estudiantes son distintos en cada etapa y por tanto su razonamiento es también distinto.

Los contenidos antes mencionados que se trabajan explícita o implícitamente en la IE-TAGEA y los presentados en algunos libros de matemáticas de 6, 7 y 8 tienen la particularidad de que su desarrollo con relación a las líneas curvas es muy poco o casi nada, solo se presenta la noción de este objeto y no hay más al respecto, en la práctica se trabaja por igual las líneas rectas y curvas, teniendo en cuenta que es un concepto fundamental de la matemáticas y que no se necesita estar en cursos avanzados para el aprendizaje de algunas características que estas presentan.

Teniendo en cuenta que en la IE-TAGEA se adaptan a los proyectos y talleres los lineamientos curriculares, se hace énfasis en el pensamiento espacial y sistemas geométricos y en el pensamiento métrico y sistemas de medidas, del primero se atiende al planteamiento de la necesidad de volver a recuperar el sentido espacial intuitivo, en toda la matemática, para ello propone la geometría activa, la cual es la que proyecta que se debe conocer el medio natural a través de la explotación no contemplativa es decir, de acuerdo a

Carlos Vasco “se trata pues de ‘hacer cosas’, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna”(MEN.1998). Con respecto a la longitud propone que “al pasar el dedo por el borde común de dos superficies se aprecia la diferencia entre superficie y línea y entre línea recta y curva, y se prepara el concepto de longitud y el de prolongación de una línea en la misma dirección y sentido del movimiento del dedo. La interrupción del movimiento prepara el concepto de línea como frontera de una superficie, y el movimiento del dedo prepara el concepto de línea recta, el de segmento y el de longitud.” (Vasco, C. pág. 35). Del pensamiento métrico y sistemas de medida se tiene en cuenta los logros propuestos para los sistemas métricos, los cuales van encaminados a acompañar a los estudiantes a desarrollar procesos y conceptos como los siguientes:

- La construcción del concepto de magnitud. En los lineamientos (MEN, 1998) se comenta que el concepto de magnitud empieza a construirse cuando se sabe que hay algo que es más o menos que otra cosa y se pregunta: más qué o más de qué. Puede darse una etapa intermedia de construcción de magnitudes que después se puedan fundir en una sola, como se ha señalado para la longitud, con las magnitudes intermedias de largo, ancho,().
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.” Es especialmente importante... ya que la captación de aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio, es imprescindible en la consolidación de los conceptos de longitud...” (MEN. 1998).
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”. “Aunque las magnitudes que nos ocupan son de naturaleza continua, en los primeros ensayos tendientes a encontrar una estimación de sus medidas, la repetición reiterada de patrones susceptibles de ser contados mediante los números naturales parece ocultar el carácter continuo de dichas magnitudes. Podríamos decir que, en este caso, hay un esfuerzo por capturar lo continuo (magnitudes) con lo discreto (números naturales).”(MEN. 1998).
- La apreciación del rango de las magnitudes. “Antes de seleccionar una unidad o un patrón de medida es necesario hacer una estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta, por ejemplo, la altura de una puerta, la longitud de un camino, el peso de un objeto, la duración de un evento, etc. Esta primera reflexión está estrechamente ligada al significado y a la familiaridad que tengan las personas con las unidades de medida y con cierta información que “podríamos llamar postes de guía o ejemplos paradigmáticos de procesos y objetos conocidos en los cuales el aspecto seleccionado por la magnitud tenga un valor fácil de recordar”(MEN. 1998)
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.” Hay una diferencia importante entre la unidad y el patrón de medida. Los libros que dicen que un centímetro cuadrado es un cuadrado de un centímetro de lado, estarían excluyendo que un disco también pueda tener un centímetro cuadrado de área, o que una región del plano se pueda subdividir en triángulos equiláteros de un centímetro cuadrado de área. El patrón es más concreto, la unidad es más abstracta. El patrón debe tener en lo posible una unidad de área. Pero la

unidad no tiene por qué estar ligada a un patrón determinado. La influencia de la longitud y del antiguo metro-patrón de París sirven como obstáculos epistemológicos para una conceptualización más completa del proceso de medición” (MEN. 1998)

- La asignación numérica.” Este proceso de asignación numérica tiene intrínsecamente una incertidumbre, una inexactitud incorporada. La abstracción de la magnitud concreta y de la magnitud abstracta provienen de comparaciones, y la igualdad de magnitud, o equivalencia con respecto a la magnitud, es una relación derivada de la desigualdad o equivalencia, precisamente cuando falla la ordenación por mayor y menor. Y el fracaso de esa ordenación depende de la precisión del aparato o calibrador respectivo (así sea un órgano de nuestro cuerpo como el pulgar y el índice; de todas maneras la última instancia de cualquier calibrador es un órgano de nuestro cuerpo, generalmente el ojo), y depende además de la habilidad en su utilización.” (MEN. 1998)

1.6 Consideraciones Metodológicas.

Al momento de iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, lo que el estudiante ya sabe sobre ese tema de las matemáticas (formal o informalmente), o sea, sus concepciones previas, sus potencialidades y sus actitudes, son la base de su proceso de aprendizaje.(MEN 2006)

Con lo anterior se busca empezar la enseñanza considerando que los estudiantes de bachillerato ya llegan en general con muchas ideas de lo que son las líneas, esto es algo que no es difícil de saber, sin embargo estas líneas que trabajan los estudiantes se encuentran en un campo concreto ya que en los cursos de primaria hacen dibujos en los cuales se trazan líneas, se hacen caminos abiertos y cerrados con rayas y muchas más actividades de pintar y dibujar donde aparecen rayas o rayones que son una representación de la línea, esto se hace en varias materias, además en los cursos de matemáticas de primaria se empieza desde muy temprano con el reconocimiento de figuras geométricas conocidas o básicas por ejemplo el triángulo, el cuadrado, el círculo, esto se puede observar en el plan de estudios de la IE-TAGEA, estas figuras los profesores las dibujan en el tablero y los estudiantes las reproducen en sus cuadernos y tienen una característica fundamental, se hacen con líneas. Es conocido que para el desarrollo de los conocimientos geométricos se parte de las figuras básicas establecidas matemáticamente y se busca después estas representaciones en la realidad física del estudiante, es decir se intenta inducir a los estudiantes a ver el mundo a través de triángulos, cuadrados y círculos, esto induce a tener una imagen simplificada del mundo. Para el trabajo de este objeto en los cursos de sexto, séptimo y octavo se abordará al contrario, es decir, se parte de la forma del mundo físico y se consiente que las prácticas matemáticas acomoden de forma natural los elementos que componen la forma de este mundo concreto (plantas, hojas) a estructuras que ya existen como las de geométrica, pero no excluyendo las demás.

De lo anterior se tiene que, para esta práctica y el desarrollo de los contenidos es importante principiar desde el concepto fundamental de forma, teniendo en cuenta algunas perspectivas entre ellas la de la psicología, dentro de la explicación de la percepción, que

consideran al igual que la filosofía de la Gestal que en la relación sujeto-objeto, el sujeto es el encargado de extraer información relevante del objeto, pero no compartiendo que la conciencia en el momento de percibir un objeto externo tenga la tendencia a la racionalización de este objeto, sino más bien una opción que pueda asumir en la organización del conocimiento, entonces para empezar a trabajar estas nociones en bachillerato se hará en primera instancia una observación del fenómeno de la forma en la naturaleza, especialmente en las plantas, esta manera de acercarse a objetos abstractos recibe el nombre de método del tanteo experimental, el cual la escuela tiene como principal potenciador de la construcción de conocimiento del estudiante. Se parte con este método para pretender atribuir un sentido, significado o importancia relevante a lo que se intenta imponer. No se pretende llevar un conocimiento a los estudiantes sino al contrario que los estudiantes planteen sus pensamientos.

Estas formas que se encuentran en la naturaleza se llevarán a la reflexión a través de escritos que reflejaran la idea de cada estudiante con respecto a la experiencia, sin dejar de lado los dibujos que tienen de ellas cuestión que no se pide explícitamente en todas las actividades pero que la mayoría de estudiantes es probable que manejen, por ser una de las actividades que los estudiantes más utilizan para poder hacerse entender y explicar. Las ideas que cada estudiante vaya logrando entender representadas en dibujos, en escritos y en gestos pasan a ser parte del grupo a través de una “práctica discursiva”, es decir se utiliza la pregunta para poner en consideración conocimientos y criterios de veracidad, teniendo en cuenta que la finalidad de la pregunta no es evaluar, no obstante, se puede hacer una imagen de cómo cada estudiante está trabajando. Lo anterior permite además observar que el desarrollo de la práctica estará en primer lugar en el sentido espacio natural-aula, es decir se parte de los conocimientos que están fuera del aula de clase, despojando el poder que se le atribuye al aula de clase como lugar donde solo es posible el conocimiento, pero también se tendrá el sentido aula-realidad física.

Es así como se busca construir un entramado por parte de los estudiantes y el profesor alrededor de los ascendientes objetos llamados líneas finitas en relación a la forma, concepto geométrico fundamental. Este entramado el profesor lo va recogiendo y lo hace conocer a todos en los momentos que sea necesario, se intentan hacer algunas preguntas o poner a los estudiantes en situaciones que movilicen lo ya establecido, pero en general se trata de no modificarlo arbitrariamente, esto teniendo en cuenta que al igual que en la práctica, la IE-TAGEA plantea que:

El conocimiento se produce de nosotros mismos. Cada persona coge una idea de lo que se produce según su propia naturaleza. Hay saberes que sí se transmiten y hay otros que se elaboran nuevamente. Un ejemplo es que el color verde para unos significa la paz y para otros no... Debe haber participación de todas las personas involucradas, es decir, el conocimiento no es unidireccional. El compartir experiencias de toda índole hace que todos aprendan. (PEI. 2015, pag 10)

Capítulo 2 Docencia Directa

2.1 Modelo de Enseñanza

Antes de describir el modelo de enseñanza mencionare que en una práctica pedagógica el para qué se enseña tiene una respuesta implícita y superficial y es que se enseña para hacer posible la práctica, ya que es parte ineludible de la propuesta, por la forma en que se propone y se direcciona, es decir no se concibe la educación sin la enseñanza. No obstante en esta propuesta se propone una enseñanza que trate de evitar algunos inconvenientes que le generan muchas dificultades a la educación, por tanto se aporta una intención considerando la responsabilidad del que enseña, la cual para esta práctica es interferir lo menos posible en la relación que tienen los estudiantes con los objetos concretos o abstractos, no con el propósito de inhibirse en dar conocer lo que se sabe, sino con el ánimo de “observar” si el estudiante hace la misma relación o que otras relaciones hace con su conocimiento ya establecido, dándole al estudiante el papel protagónico de su aprendizaje, luego la intervención del profesor se hace solo cuando el que aprende lo solicite, explícita o implícitamente, porque esto nos acerca al querer aprender.

El proceso de enseñanza en la IE-TAGEA partió de considerar a los estudiantes de 6, 7 y 8 como individuos que piensan, que tienen conocimientos previos, que pueden decidir si quieren o no compartir sus conocimientos y que admiten que un profesor les enseñe mas no necesariamente que van a aprender, es así como se tiene en cuenta las consideraciones que tienen los estudiantes sobre la práctica, sobre el tema y sobre todo la metodología, después de proponer una actividad se deja un tiempo considerable para que el estudiante conecte las nuevas ideas con experiencias previas, expresadas por medio del texto, del discurso, y de los gestos corporales, no hay obligación de comunicar las ideas, no obstante todos participaran de cada una de las actividades de la práctica por un previo acuerdo hecho con el profesor titular, el coordinador y los estudiantes.

Para la presentación de los conocimientos a los estudiantes en cada clase, se hace una actividad, algunas veces en el aula otras veces fuera del aula, esto dependiendo de las condiciones de los estudiantes que en ocasiones piden que se haga en determinado lugar de la escuela, por la comodidad de la misma actividad o condiciones climáticas, esta actividad tiene en ocasiones implícitamente el tema que se quiere compartir, mas no se comenta nada al respecto por parte del profesor antes de que los estudiantes hayan pasado por el tema por ellos mismo, lo perciban o lo caractericen de inmediato, la actividad en la mayoría de casos está sujeta a la percepción que los estudiantes tienen del mundo físico o natural, y para evitar que se desborde la subjetividad presente en la realidad se activa la intervención del profesor, el cual propone algunas acciones para limitar las variables que pueden aparecer en la actividad, en otras palabras se proponen los contenidos y se establece una dirección de trabajo.

Los estudiantes después de pasar por la observación, tienen una cantidad considerable de imágenes, olores y sensaciones que será convertido al lenguaje habitual teniendo en cuenta

que cada estudiante lo hará desde sus concepciones, en especial se pedirá que se haga en un primer momento en lenguaje escrito aunque se sabe que para algunos estudiantes esto resultara difícil y que limitara la descripción de lo observado, sin embargo se tendrá que hacer así para comenzar a registrar y caracterizar el pensamiento que surge de cada estudiante. Como se escribe haciendo uso de las concepciones consciente o inconscientemente, esta primera etapa del conocimiento tendrá una organización subjetiva, es decir el orden dependerá de lo que cada estudiante considere importante, cuestión que rompe con la tradición de considerar importante solo el conocimiento del profesor. Al principio el texto será bastante libre, lo que plantea que se tratara al máximo de evitar inducir temas matemáticos, considerando que si la matemática es una expresión del ser humano que ha sido abstraída de actividades panculturales entonces esto en cualquier momento surgirá, esta experiencia puede parecer bastante romántica pero si se considera que la temática es bastante trabajada en cursos anteriores y que hace parte del saber natural entonces está la posibilidad de que surjan muchas ideas expresados a través de los escritos. Buscando espacios adecuados para la lectura de lo que se escribió se intenta llegar a reflexiones sin la necesidad de la pregunta por parte del profesor, si se da solo se admitirá en la dirección del estudiante, esta parte será importante porque complementara los escritos, ya que el discurso de los estudiantes puede contener otra información de lo observado, otra interpretación que hace que los estudiantes se planten lo que escribieron y lo que han considerado al respecto del tema.

Después de que se ha expresado por cada estudiante su posición frente a los conocimientos que emergen de la actividad se pasa a otra reflexión, pero está estimulada por unas preguntas, en correspondencia con el planteamiento de los lineamientos curriculares (1998) que considera:

Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien qué hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones. (p. 13)

Por tanto se espera que planteadas preguntas por el profesor, surjan preguntas del estudiante, para ello se espera entre pregunta y pregunta un tiempo prudente para que escriban, dibujen, expresen con su cuerpo y piensen sus ideas, es decir se tiene en cuenta la decisión del estudiante para el desarrollo de la clase, una vez que los estudiantes comienzan a plantear respuestas con argumentos desde su quehacer cotidiano se espera hasta que la mayoría hayan participado, luego se observa en los comentarios y acciones de los estudiantes si el objeto a trabajar se encuentra, si es así se hace la intervención del profesor organizando las ideas, de tal manera que el estudiante pueda proponer nociones, postulados, definiciones y resultados, a partir de esto se siguen proponiendo nuevas preguntas que generan desconfianza en las afirmaciones de los estudiantes o ajustes de lo que han afirmado.

Dado ya un reconocimiento de contenido matemático y más precisamente el relacionado con la temática de la práctica se pasa a una “institucionalización” que algunas veces se hace

discursivamente, otras veces con representaciones en el tablero y otras veces con escritos en el tablero, esta institucionalización utiliza recursos de invocación tales como experiencia del grupo, experiencia del hablante, textos escolares, portafolio, por lo tanto tiene distintos matices en relación a lo que se considera legítimo, es decir, la institucionalización a veces llega hasta lo que el estudiante alcanza a interiorizar por el discurso del profesor, lo cual es incierto pero esto se valora por el profesor, en otras ocasiones por las discusiones del grupo frente a una situación, en otras ocasiones se establecen definiciones, postulados, proposiciones y procedimientos de libros o textos escolares de matemáticas de grados 6, 7 y 8 y otras veces se ajusta lo trabajado en una situación con el conocimiento propuesto en el portafolio. La posible institucionalización de los conocimientos que emergen de las actividades no necesariamente se hace al final de cada actividad, a veces se hace en medio del desarrollo de un taller, esto depende de la necesidad y predicción de los estudiantes a la hora de ir desarrollando las ideas.

Se presentan los conocimientos en la mayoría de las clases en situaciones del mundo físico, para luego hacer un encuentro con los conocimientos matemáticos, estos aunque rígidos en estructuras y formalismos en ocasiones se encuentran semejanzas entre fenómenos que pasan en el mundo físico con el mundo conceptual, esto es aprovechado para trabajar las nociones, postulados, definiciones y resultados aunque en general en el orden en que vayan apareciendo y no como está estructurado en los planes de estudio o los libros. Como la temática de la práctica está relacionada con contenidos matemáticos no presenta dificultad encontrar semejanzas con el mundo físico, luego siempre se encuentra con situaciones del mundo físico que pueden ser trabajadas en el mundo abstracto. Al final de cada objeto que se trabaja se hace un taller, se deja una pregunta para la casa, un problema con respuesta incierta que les permita seguir indagando en el tema, esto con la intención de observar que tanto se ha aprendido, que tanto se ha desaprendido, en otras palabras, se intenta percibir lo que han dejado de hacer o siguen haciendo de la misma manera para seguir avanzando.

2.2 Secuencia y Desarrollo de Contenidos.

Actividad: observación y descripción de las plantas.

Competencia matemática: identificar aspectos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales en la naturaleza, que permitan la clasificación de las formas en las plantas.

- se comenta que para esta actividad se saldrá a un espacio de la escuela ya determinado, en ese lugar se busca una planta y realiza una observación.
- Salimos con los estudiantes a un lugar de la escuela donde hay varias plantas, les dije que escogieran una planta y realizará una observación bien detallada de todo lo que consideran importante.

Desarrollo de la actividad.

- Los estudiantes observan las plantas.
- Pasamos al salón y los estudiantes realizaron una descripción escrita de lo que habían observado, los estudiantes preguntaron sobre que había que escribir, es decir algo específico de matemáticas, les conteste que debían escribir de lo observado, todo lo que crean conveniente contar.
- Se recogió el texto de la descripción y se leyeron algunos escritos por parte del profesor en voz baja, esto con la intención de ver si había algo relacionado el tema que se pretendía trabajar.

Escritos y reflexiones.

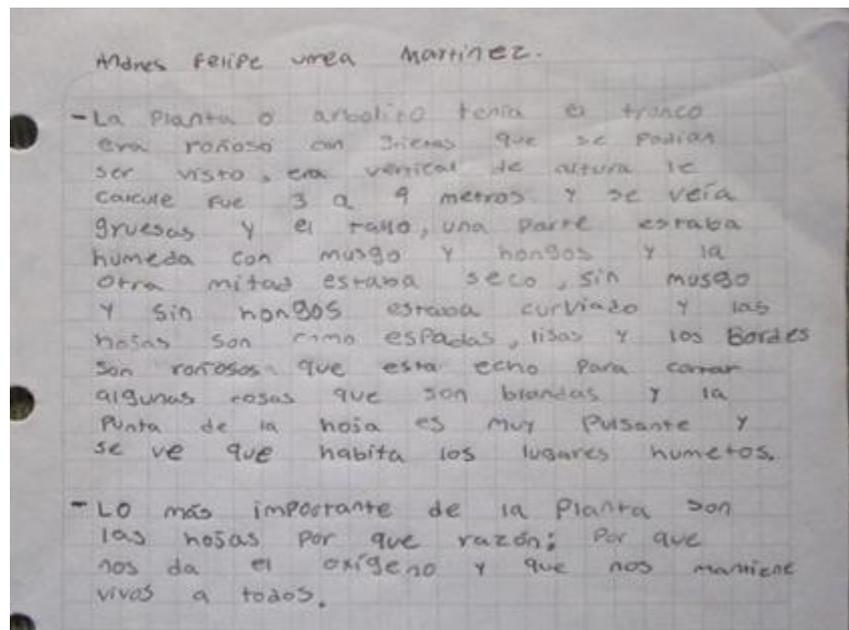


Figura 10 texto escrito por estudiante que describe la observación hecha en la actividad

Fuente: Hernando lagos

Preguntas.

- Se hace la siguiente pregunta a todo el grupo ¿Qué es lo más importante de lo observado?
- La mayoría de estudiantes se refirieron a aspectos relacionados con el color, tamaño, y aspectos de la naturaleza como el oxígeno que brindan las plantas, lo bellas que son, así como las partes de las que se compone, en este caso se tuvo en cuenta la raíz, tallo, hojas, flores, frutos y semillas. Cómo vive. Había aspectos de la matemática como debía medir (medida), era vertical, 3 a 4 metros (unidades de medida), curvado, liso, bordes, punta. Todo esto sirvió para empezar a trabajar, aunque explícitamente no apareció la palabra forma en la mayoría de escritos, solo dos estudiantes se refirieron a la forma, así que realice la siguiente pregunta ¿Qué diferencia hay entre las hojas de dos plantas distintas?

Institucionalización.

La forma

- Se adentra a la discusión alrededor de lo que diferenciaba una hoja de una planta con otra, algunas respuestas fueron: cambios de calores, oxígeno, ovaladas y triangulares.
- Después de que los estudiantes arrojaron varias ideas de lo que posiblemente diferencia las hojas de plantas distintas, dos estudiantes sugirieron que la forma es una característica que diferencia una hoja de otra, esto lo dijo espontáneamente.
- Se dieron algunos ejemplos discursivamente acerca de la forma, reconociendo que es una de las cualidades que hace que una cosa se distinga de otra, como el caso de una silla y una mesa, y que las formas van agrupando cosas en palabras, por ejemplo en la palabra silla están contenidas las sillas pequeñas, grandes y de todos los colores, de aquí se comenta que la forma es uno de los elementos importantes para tener información de los objetos.

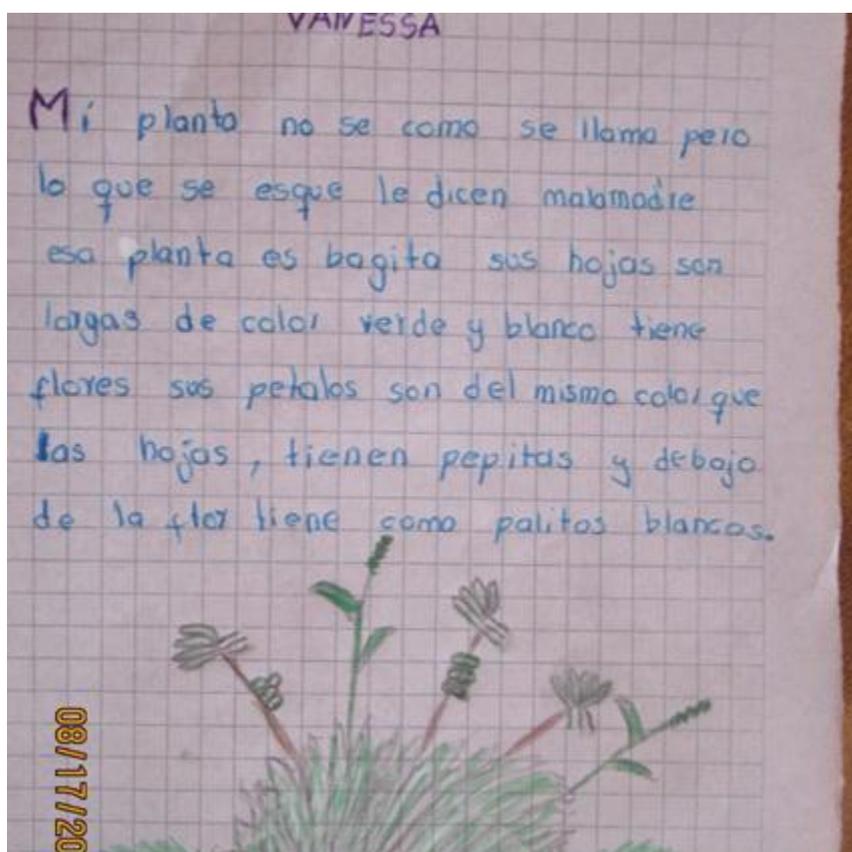


Figura 11. Texto escrito por estudiante, que describe la observación hecha en la actividad

Fuente: Hernando Lagos.

- se recogen las ideas de los estudiantes en un resumen al final, de estas ideas se hace una “abstracción” de la forma y la relacionan con figuras geométricas como el triángulo y óvalos, además de reconocer implícitamente algunos elementos que la componen, como las líneas, aunque el tema, elementos que componen la forma, es de la siguiente actividad.

Actividad: reconociendo los elementos básicos de las formas.

Competencia matemática: establecer una relación entre las formas de los objetos concretos estáticos y sus representaciones.

Desarrollo de la actividad.

- se realizó la observación de una hoja de una planta en el salón llevada por el profesor y se les pidió a los estudiantes que hicieran una descripción de su aspecto.
- En las descripciones se detectan algunos elementos que la componen entre ellos las líneas rectas, curvas, puntos y bordes, esto se refuerza indicando en una hoja estas características con un discurso por parte del profesor.

Escritos y reflexiones.

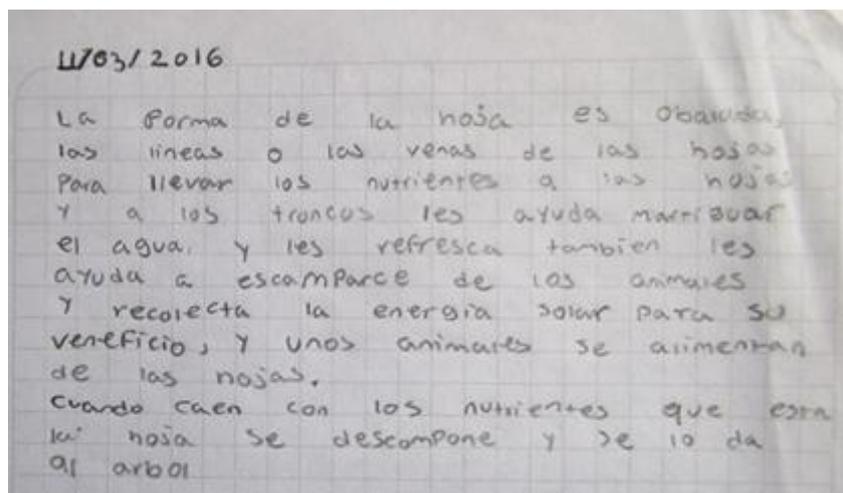


Figura 12. Descripción de una hoja hecha por un estudiante

Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.

- Se reconoció por parte de los estudiantes las líneas y otras palabras relacionadas con conceptos matemáticos como círculo, ovalada y otras en las formas. Además, se hacen algunas relaciones entre los elementos de la matemática y los del mundo físico por ejemplo se dice “las líneas o las venas de las hojas”, se le da a las venas de la hoja de una planta que es bastante delgada la cualidad de línea.

Institucionalización.

- A partir de la actividad de la anterior clase se encuentran los elementos que componen las formas de manera implícita, las líneas. Este es el lugar donde se quiere trabajar así que desvió los demás conocimientos para quedarme en el mundo de las líneas.
- Se clasifican por parte de los estudiantes las líneas en rectas, curvas y un estudiante además propuso que existen las mixtas el cual las nombro “recurviadas”, que son aquellas que están compuestas por líneas rectas y curvas, esto lo hizo realizando un dibujo en el tablero.

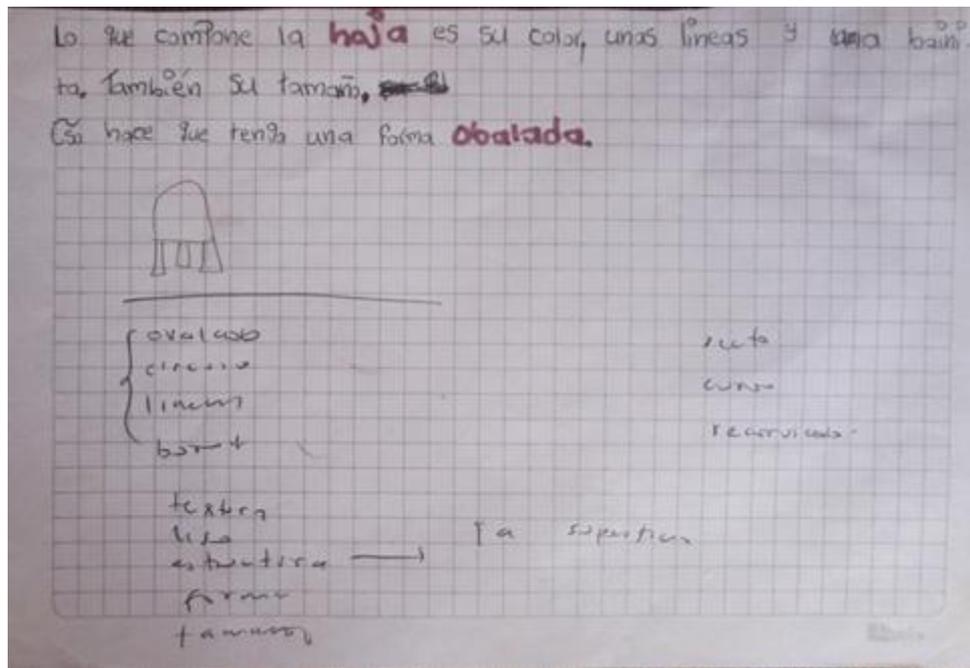


Figura 13. Texto de un estudiante, descripción de una hoja

Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.

Preguntas.

- A los estudiantes se les hizo la pregunta ¿todas las formas se pueden representar solo con líneas rectas y curvas? La pregunta no fue tan explícita así que se debió hacer ejemplos tales como dibujar una silla en el tablero y explicar que para representar la silla solo utilice líneas, realizó otro dibujo y pregunto que si ven otro elemento distinto a las líneas que componen el dibujo, ninguno pudo encontrar otro elemento así que doy por entendida la pregunta. Pero estaban con la duda de lo que les había dicho ya que ellos estaban pensando en si existía alguna cosa en el mundo compuesto por otros elementos distintos a las líneas, y eso no coincidía con lo que se había dicho, lo que se había planteado estaba relacionada con la representación de las cosas, solo con líneas.
- Se les pide a dos estudiantes que piensen en un objeto y que realicen su representación en el tablero, después de dibujarlo paso a preguntar ¿Qué elementos

básicos la componen?, para ello voy señalando en el dibujo las partes, y los estudiantes fueron diciendo que eran líneas rectas o curvas de acuerdo a lo observado, entonces finalizó con una reflexión discursiva diciendo que las líneas por ser los elementos con los cuales se pueden construir su representación de las formas de cualquier objeto, tienen una importancia en las matemáticas y que de ellas se pueden construir propiedades para generalizar el trabajo.

- Se hace un discurso acerca de que ya se tienen las líneas, que estas líneas las hemos tomado del mundo físico que de algo nos han de servir para la construcción de conocimiento. Así que buscando nuevos elementos que le den sentido a lo que se realiza se dejó una tarea para saber cómo encontrar el punto. Contestar a la pregunta ¿dónde se pueden encontrar los puntos? Esta pregunta se lanza diciendo que, así como se “encontró” un elemento llamado línea pensar en la posibilidad de dar con el punto.

Actividad: observando la caída de un objeto y representando el recorrido.

Competencia matemática: identificar las formas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales de la naturaleza mediante dibujos que muestren la experiencia escrita y observada para distinguir las superficies y las clases de líneas a partir del movimiento.

Desarrollo de la actividad.

- Se realiza el ejercicio de dejar caer un objeto desde una altura de unos 40 centímetros. Este ejercicio lo realizó primero el profesor, luego los estudiantes.

Preguntas y reflexiones.

- Después se hizo la siguiente pregunta. ¿Cuál es el camino que realiza el objeto?
- Se genera un diálogo entre estudiantes y profesor del cual se alcanzó a inferir, que este camino es como una huella que deja un objeto en movimiento pero que no se puede ver, a esto el profesor aclaró que en matemáticas este tipo de fenómeno recibe el nombre de trayectoria. Además, La mayoría de estudiantes respondieron que se trataba de una línea recta.
- Se realizó otra pregunta. ¿Cuál es la diferencia entre las líneas observadas en las hojas de las plantas y la línea dejada por el objeto que cae?
- Dos estudiantes respondieron que la línea formada por el objeto que caía no se puede ver, se imagina, en cambio las líneas de las hojas se pueden ver.

Institucionalización.

Contenido matemático: trayectoria, líneas.

- Se concluye que las líneas en las matemáticas son una abstracción posiblemente de las formas abstraídas de los objetos y se define el concepto de trayectoria en el tablero.

- Para trabajar las trayectorias o “caminos” desde el tanteo o la experiencia, se realizó el ejercicio de construir un cuadrado con los vértices bien marcados, se realizó la pregunta ¿Cuántas trayectorias se podían trazar de un vértice a otro? Para que ellos trazaran los caminos con el lápiz a través del dibujo.
- Después se dibujó una carta abierta

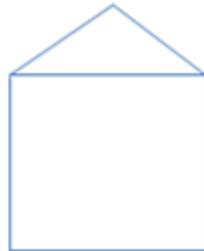


Figura 14. Trayectorias en una carta abierta

Fuente: Hernando Lagos.

- Se preguntó ¿Cuántas trayectorias se podían trazar de un vértice a otro?

Actividad: construir y resolver el crucigrama.

Competencia matemática: reconocer con líneas, trayectorias y superficies a través de la exploración con los sentidos.

Desarrollo de la actividad.

- Se empieza la clase diciendo que se va a resolver un crucigrama, los estudiantes lo copien en sus cuadernos, esta es una propuesta del profesor Jhony Muñoz y los estudiantes no ponen problemas. Además también proporciona ideas de cómo los estudiantes trabajaban con los puntos y las líneas.
- El taller que se trabajó en clase es el siguiente

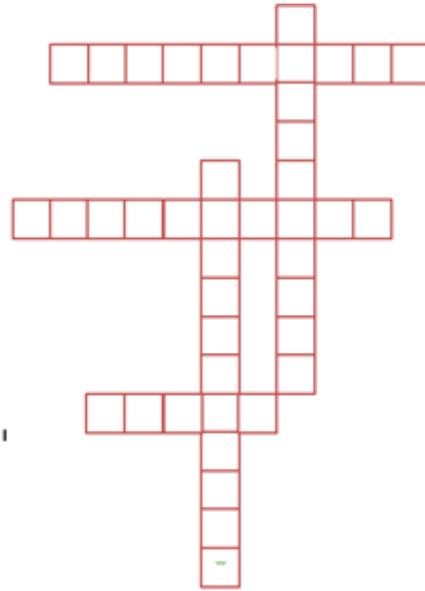


Figura 15. Crucigrama.

Fuente: Hernando Lagos.

1. Al terminar el recorrido de un borde que termina en punta esa interrupción del movimiento prepara la idea de...

2. Al pasar el dedo por el borde común a dos superficies planas se aprecia la noción de...

3. Al pasar el dedo por el borde común a dos superficies una posiblemente curva se aprecia la idea de

...

4. al pasar las manos por las caras o exteriores de objetos, muebles y paredes, o tal vez de un cuerpo cálido y amable, se aprecia más que con cualquier definición la diferencia entre cuerpos y superficies. La interrupción del movimiento prepara la idea de...

5. A diferencia de solo mirar una figura dibujada en el tablero o el libro, al dibujar uno mismo una línea en el piso, el tablero o el papel, en realidad está recorriendo activamente una...

- Se dibuja el crucigrama en el tablero y los estudiantes empiezan a dibujarlo, y lo que parecía que llevaría pocos minutos empezó a demorarse ya que varios estudiantes tenían poca destreza en el trazado de líneas. Empecé a ayudarle a algunos estudiantes a trazar líneas utilizando la regla, y como algunos no tenían regla se demoran más, porque intentaban hacerlo a pulso o utilizaban otros objetos que tenían la cualidad de la regla por ejemplo con un lapicero y otros esperando a que le prestaran la regla.
- Los estudiantes no entendían lo que decía los enunciados del crucigrama, no por la letra sino por la forma como estaba escrita, les comente que cada enunciado les estaba dando la indicación de lo que tenían que hacer para encontrar la palabra que llenaría

el crucigrama, además que se les dijo que las palabras que llenarían el crucigrama eran los términos que se habían trabajado desde el principio de la práctica, los más importantes.

- Los estudiantes intentaron hacer los otros puntos solos, pero se terminó la clase y no pudieron terminar el crucigrama, tan solo dos estudiantes encontraron dos respuestas más, la que estaba relacionada con el de punto y el de línea recta.

Preguntas y reflexiones.

- Los estudiantes deciden que el profesor realice las acciones de los enunciados que no se han entendido, esto lo realizó despacio tomando como objeto de guía una hoja de papel para que los estudiantes vayan pensando en lo que se hace, primero les pregunté ¿Cuál era el borde de la hoja? Todas la señalaron con sus dedos, luego empecé a recorrer el borde y en la esquina donde se terminó se hizo una pausa y les pregunté qué ¿Cómo se llamaba donde había terminado? A esto respondieron que era un punto, así de esta manera se pudo dar respuesta a dos enunciados, pero los dos últimos no los entendieron por más que les intente explicar el enunciado de diferentes maneras. Se trataba del enunciado que se propone para la superficie y para la trayectoria.

Institucionalización.

Formas, sólido, superficie, líneas, punto.

- Se explican todos los puntos del taller-crucigrama estableciendo de esta manera las nociones de punto, recta, trayectoria, superficie.

Actividad: encontrando las posiciones entre puntos y líneas

Competencia matemática: realizar algunas construcciones con líneas rectas y curvas que permitan establecer algunas propiedades que los puntos, las líneas rectas y curvas cumplen en el contexto concreto y el abstracto.

Desarrollo de la actividad.

- Se pide a los estudiantes que dibujen un punto y una línea. La mayoría de estudiantes dibujan una línea recta y un punto sin tocarse.
- Se hace la pregunta ¿Por qué todos han dibujado una línea recta?, la mayoría de estudiantes se acuerdan que las líneas también pueden ser curvas.
- Como la mayoría de estudiantes realizaron un dibujo de una línea recta y un punto que no tocaba la línea, se pregunta ¿Qué otras posibilidades hay de dibujar un punto y una línea?, ellos responden dibujando, que existe la posibilidad cuando la línea toca el punto, además que esto lo realizan para líneas rectas y curvas. Entonces se establece discursivamente que para una línea y un punto hay dos posibilidades que no se toquen o que se toquen.

- Se pide que dibujen un punto y que tracen todas las líneas que pasan por el punto, además se pregunta ¿Cuántas líneas pasan por el punto?

De la anterior forma se siguen haciendo otras construcciones entre puntos y líneas.

Preguntas y reflexiones.

En todas las construcciones de puntos y líneas surgieron preguntas y reflexiones, a continuación, una muestra.

- Se pide a los estudiantes que dibujen dos puntos y una línea, la mayoría dibujan los dos puntos separados de la línea, además que la línea la vuelven a trazar recta.
- Se hace la pregunta ¿Qué otras posibilidades hay de dibujar dos puntos y una línea?, los estudiantes proponen la línea curva y los puntos con las posibilidades de tocar los puntos o no tocarlos.
- Se les pide a los estudiantes que dibujen dos puntos y que construyan todas las líneas que pasan por los puntos, se pregunta ¿Cuántas líneas pueden pasar por dos puntos distintos?, la mayoría comenta que muchas, pero algunos estudiantes comentan que si es recta solo una, esta última afirmación es la que el grupo acoge como verdadera.
- Después se pregunta cuántas líneas rectas pasan, a lo que responden que solo una línea recta.

Institucionalización.

Construcciones de líneas, punto y posiciones de un punto y una línea

En todas las construcciones se hace una institucionalización de la relación entre puntos y líneas. A continuación, un ejemplo.

- Se pide que tracen dos líneas rectas, la mayoría trazan líneas “paralelas”, se pregunta ¿Qué otras posibilidades hay para dos líneas rectas?, aunque algunos no entendieron la pregunta, se construyeron otras posibilidades, las que se vieron fueron las que se interceptan y pregunte si no había otra posibilidad, los estudiantes no encontraron más opciones, así que les pregunté ¿Cuál era la línea recta que intercepta más de 1000 puntos de otra línea recta?
- Dos estudiantes comentan que la línea recta que cumplía esto era la línea recta que estaba encima de la otra línea, es decir la línea que se intercepta con todos los puntos, esto lo mostraron dibujando una línea recta sobre otra ya dibujada.
- Entonces se concluye que las posiciones relativas de dos líneas rectas eran las que no se tocan, las que se tocan en un punto y las que se tocan en todos los puntos.
- Se les pregunta ¿Que si las líneas curvas también presentaban estas mismas posiciones? A lo que una estudiante respondió que había más posibilidades.
- Por último, se hace la siguiente construcción en el tablero

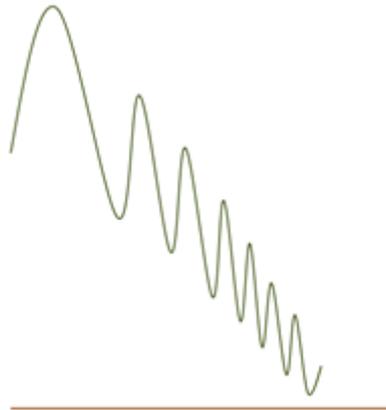


Figura 16.intercepción de líneas

Fuente: Hernando Lagos

- Se pregunta ¿se tocan la línea recta y la curva?

Actividad: proponiendo postulados y definiciones a partir de las construcciones.

Competencia matemática:

Desarrollo de la actividad.

- Se hace un repaso de las construcciones de la clase anterior, esto lo hacen los estudiantes y el profesor, se habla que sobre dos puntos distintos pasan muchas curvas y solo una recta y se introduce la notación para representar puntos con letras mayúsculas y la recta que pasa por dos puntos distintos A y B, AB , además que en la representación se deben colocar las puntas de la flecha para indicar que se prolonga indefinidamente.
- después se hace una discusión sobre la tarea que se había dejado, que estaba relacionada con el siguiente gráfico y la pregunta ¿se tocan la línea recta y la curva?

La mayoría respondieron que se tocaban porque la curva se seguía prolongando en la misma forma que venía desde “arriba”, les dije que esa era una posibilidad de la curva pero que también se podía prolongar en otra dirección ya que era una curva y las curvas tienen la característica de cambiar de dirección en cada momento, lo que no pasa con una línea que solo se prolonga en una dirección.

- Se dice a los estudiantes que cada uno va a recordar una construcción de la clase anterior y que la va hacer en el papel periódico que se ha llevado para tal actividad, después de la representación se pide que al frente de la representación escriban lo que indica tal representación, para que ellos entiendan mejor lo que estaba diciendo hago

el siguiente ejemplo: dibujo dos puntos y pasó por ellos una recta y al frente escribo por dos puntos distintos pasa una y sola una recta.

- El primer estudiante no se acordaba mucho de las construcciones así que me tocó ayudarlo, le dije que construyera una recta y que pensara en cuántos puntos como mínimo existían que no la tocaran, esto lo resolvimos con todo el grupo y una estudiante comentó que lo mínimo era un punto, de esta manera se procedió a terminar la construcción y escribir que “existe al menos un punto que no está en una recta”.

Preguntas y reflexiones.

- Después una estudiante trazo una recta por dos puntos distintos y le dije que representará otro punto en la recta que estuviera entre los puntos que había dibujado ella lo hizo y le pregunte que si entre el punto que había dibujado y otro punto se podía ubicar otro punto ella dijo que si, a lo que le pregunte que entonces cuántos puntos se podrían ubicar entre dos puntos, otra estudiante dijo que infinitos porque la recta estaba compuesta de infinitos puntos, después pregunte ¿Cuántos puntos como mínimo había entre dos puntos en una recta?, ellos contestaron que varios y pensaron un rato en la pregunta hasta que un estudiante comentó que había al menos uno. De esta manera el postulado quedó que por dos puntos distintos en una recta hay al menos un punto que está entre ellos.
- Una estudiante construyó una recta le pregunte que si cortamos un pedazo de esa recta como se llamaba ese pedazo, ella dijo que se llamaba segmento y le pregunté entonces ¿Qué era un segmento?, dijo que es una línea que estaba compuesta de puntos, comente que no estaba mal lo dicho, pero faltaba algo, así que entre a realizar la definición y la notación correspondiente.

Institucionalización.

En cada construcción se pide que se escriba el postulado, definición o resultado que se tiene, a continuación, un ejemplo.

- Un estudiante construyó tres segmentos y se pregunta ¿Cuál es la diferencia entre los segmentos? Después de algunas opiniones se rescata la que tenía que ver con la frase “más larga que” de allí se introduce la definición de longitud de un segmento la cual es propuesta por una estudiante, están definición la deje solo hasta ahí.
- Por último, se construyen dos curvas y se pregunta cuál es la diferencia entre ellas. Se dicen varias diferencias entre ellas con respecto a la representación y la longitud, pero las curvas las represente con cierta dificultad para no identificar tan fácilmente quién es más larga, los estudiantes intentaron decir que una u otra es más larga pero no hubo un acuerdo. Esto lo complemento diciendo que en general para comparar dos curvas distintas es muy difícil desde la observación.

Actividad: comparando segmentos y encontrando la cualidad de longitud.

Competencia matemática: relacionar la magnitud continua de longitud.

Desarrollo de la actividad.

- se empieza diciendo a los estudiantes que se realizará un taller, se entrega el taller y se les pide que lo lean despacio.

A continuación, se presenta el taller

Taller # 1

1. utilizar alguno de los siguientes segmentos para cerrar la figura, de tal manera que no sobre parte del segmento.

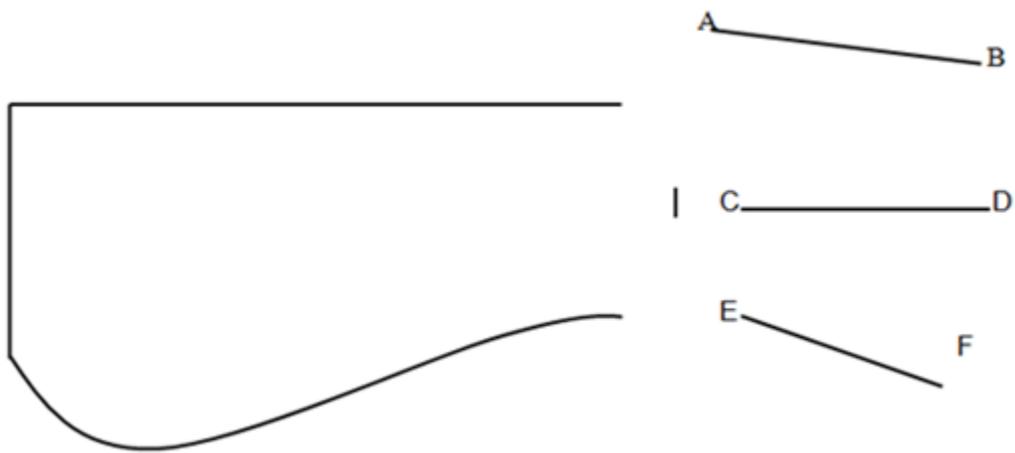


Figura 17. figura abierta

Fuente: Hernando Lagos.

Explicar los pasos que siguió para saber cuál o cuáles son los segmentos que cierran la figura.

2. Sobre la recta r construye el segmento AB

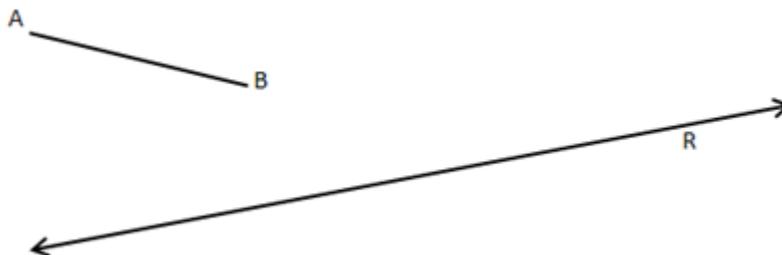


Figura 18. Segmento y recta

Fuente: Hernando Lagos.

Explicar en la hoja de forma escrita como realiza la construcción.

3. cuál es la cualidad que tienen los siguientes segmentos.

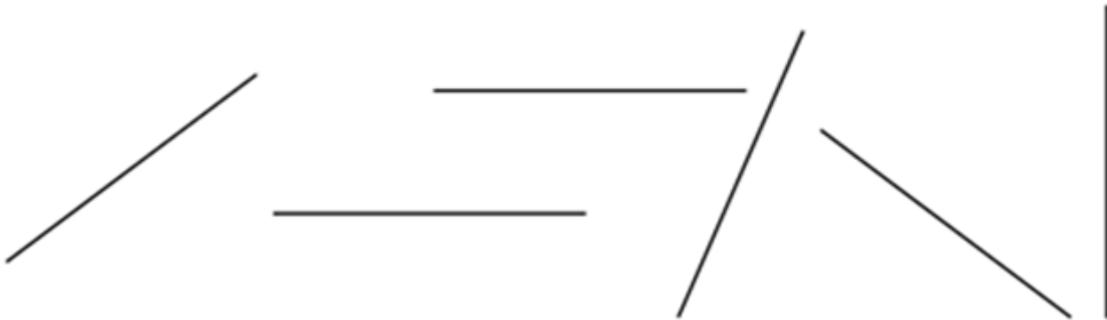


Figura 19 Segmentos

Fuente: Hernando Lagos.

Preguntas y reflexiones

- La estudiante E9 llama al profesor para explicar lo que iba a hacer en el primer punto, dice que para saber cuál de las líneas cerraba la figura exactamente se medía la parte de la figura donde se quería cerrar. A continuación, se presenta parte de la conversación que se tiene con la estudiante:

Profesor. ¿Qué es lo que lo te pide el ejercicio?

E9. La estudiante lee el enunciado del ejercicio.

Profesor. Explícamelo con tus propias palabras.

E9. Pues yo me puse como a medirla, esta queda muy grande (se refiere al segmento AB), está queda muy corta (se refiere al segmento EF) y esta queda pues exacto (se refiere al segmento CD).

Al decirle que indicara un segmento la estudiante señala los que están en el ejercicio, además le digo que se debe realizar el ejercicio de cerrar la figura, le preguntó cómo se debe hacer, ella responde que trazando una raya, le vuelvo a preguntar sobre el nombre de esas rayas ella responde rectas, luego duda y dice líneas. Esto está reflejado en la descripción del procedimiento que hizo en el taller y el video 1.

- La estudiante E5 pregunta al profesor donde se debe construir el segmento que se pide en el punto 2 del taller, se responde que sobre la recta r , ella pregunta que si en cualquier parte de la recta, le conteste que sí.
- La mayoría de estudiantes hicieron el primer punto midiendo con una regla u otro objeto la parte que faltaba para cerrar la figura y comparaban esa longitud con la de los segmentos de esta manera señalan que se trataba del segmento EF, esta es la respuesta correcta.

Gran parte de esta actividad se pasa resolviendo las dudas personalmente, es decir cada estudiante a medida que van leyendo los enunciados y se encuentran con algo que no puede entender llama al profesor de la práctica o al titular.

Institucionalización.

Congruencia de segmentos.

- Después de recoger el taller se resolvió en el tablero para aclarar dudas, se pasó a introducir el tema para el cual se había realizado el taller el cual es congruencia de segmentos, se comenta que cuando se hacía el ejercicio de comparar los segmentos con los extremos de la figura del primer punto se estaban comparando los extremos de segmentos, que por coincidir con los extremos del segmento EF se decía que estos segmentos son congruentes, en otras palabras que cuando se superponen y coinciden se dice que son congruentes, ¿Quiénes son congruentes? El segmento EF y el segmento que está implícitamente (imaginariamente) en la figura que se pretendía cerrar. Algo similar pasaba en el segundo y tercer punto.

“Dos segmentos están relacionados si son congruentes, esto es, si es posible superponerlos mediante un movimiento de tal modo que coincidan sus extremos” (Godino, j. Batanero C. 2002.p20)

- Luego se explica en el tablero las propiedades que cumple la congruencia de segmentos, la reflexiva, la simétrica. Se explica construyendo un segmento en el tablero y comentando que si se superpone con el mismo pues terminan coincidiendo, se introduce la notación que se utiliza en matemáticas para congruencia el símbolo

≅

y se dejó para la casa que investiguen la propiedad transitiva. en el último punto se explica que la cualidad que tienen todos en común es la longitud, ya que físicamente podemos realizar la comparación y comprobar la igualdad o desigualdad y decimos que establecemos una relación de equivalencia (se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva). Como consecuencia obtenemos una característica común a todos los objetos, es decir, que son iguales entre sí respecto de la cualidad de longitud. se dice que se puede tomar un solo segmento de los que están representados en el taller para representarlos a todos, ya que es igual a los demás, a este segmento se le llama segmento general.

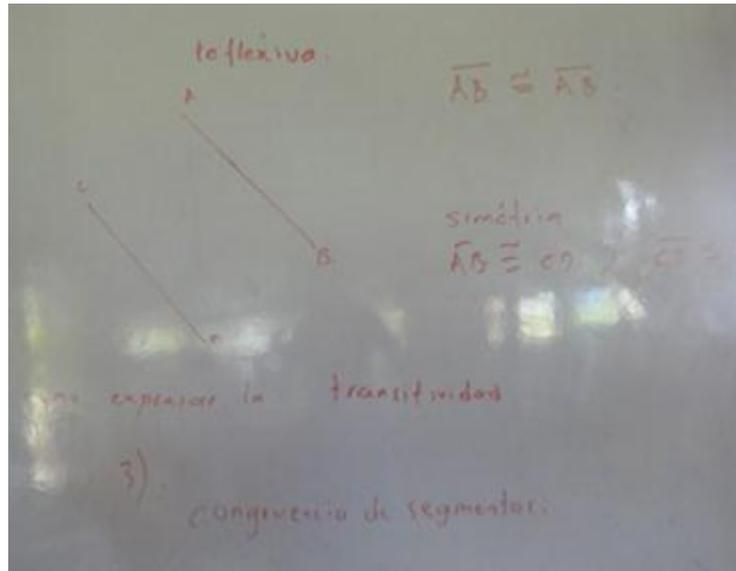


Figura 20. representación en el tablero de propiedades de la congruencia de segmentos

Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.

Actividad: buscando un elemento que permita comparar cantidades de longitud.

Competencia matemática: relacionar la magnitud continua de longitud

Desarrollo de la actividad.

- La clase se realiza en la granja al aire libre, se empieza con la revisión de la tarea sobre la propiedad transitiva, la mayoría no la hicieron, así que se decide resolver, esto se hizo de manera discursiva, diciendo que una relación de dos elementos sobre un conjunto es transitiva cuando se cumple que siempre que un elemento se relaciona con otro y éste último con un tercero, entonces el primero se relaciona con el tercero, luego se comenta que cuando se cumplían las tres propiedades se decía que es una relación de equivalencia.
- Cada estudiante pasó a buscar un ejemplo donde se cumplían las tres propiedades, yo propuse el siguiente como guía: “tener la misma estatura” explique cada propiedad para comprobar que era una relación de equivalencia, pocos estudiantes encontraron un ejemplo.
- Como la longitud de los segmentos cumplía estas propiedades se pasa a revisar el tema de medida de la longitud. Para ello se pregunta ¿Cómo se miden las longitudes? Los estudiantes responden que con el metro, luego se preguntó ¿Qué es medir?, algunos dijeron que es saber “qué tan grande es”, “cuán grande puede ser”, “cuanta longitud tiene un objeto”, esto es recogido en una hoja de cuaderno cuando cada estudiante verbalmente expresa lo que significa medir para ellos. Después de escuchar a los estudiantes se sigue hablando de medida sin hacer alguna definición, esperando que alguien se acerque más al término.

Preguntas y reflexiones.

- Les hice la pregunta ¿Cómo se medía antiguamente? Ellos dijeron que, con las manos, con los pasos, con los dedos, la mayoría se refirieron a medidas antropomórficas, se generó un diálogo sobre lo difícil que sería hoy en día esos dispositivos de medida ya que generarían muchos inconvenientes por la inexactitud, y la mayoría veían en el metro una buena forma para poder medir y que no generaba confusiones.
- Les dije que se inventaran o construyeran un elemento de medida para la longitud, después de unos minutos de reflexión en que podía servir para medir las longitudes cada estudiante presentó su objeto de medida, continuación los elementos de medida de los estudiantes:

E12: el largo de su cuerpo.

E10: cuartas, es decir el largo que hay entre el dedo meñique y el pulgar, con la mano abierta

E11: el largo del dedo índice.

E3: una tabla.

E9: el dedo

E5: un segmento que construyó en el cuaderno.

E13: el pie de ella.

E4: el paso abierto de ella.

Institucionalización.

- Cada estudiante señala la forma como iba a medir. Es decir, el que iba a medir con su cuerpo colocó una rama de un árbol paralela a su cuerpo empezando en el pie. El que va a medir con cuartas indicó en el aire la forma como iba a medir, colocando una cuarta después de la otra, el que dijo que iba a medir con el dedo índice señaló además las divisiones que se marcan en el dedo para tener un referente de cuanto había de su unidad más exactamente a la hora de medir algún objeto, la que dijo que utilizaría los pasos para medir lo expresó caminando y haciendo el paso lo más largo que pudo en el suelo.
- De esta manera cada estudiante expresa lo que entiende por medida y unidad de medida.

Actividad: comprensión del proceso de conservación de magnitud.

Competencia matemática: relacionar y operar la magnitud continua de longitud.

Desarrollo de la actividad.

- Se empieza la clase recordando los elementos con los que cada estudiante iba a medir, entre estos elementos de medida estaba el del estudiante E12 el cual había escogido el cuerpo.
- Se pide al estudiante E12 que pase al frente de los estudiantes, él lo hace sin ningún problema. Se dice al estudiante que piense en cómo mediría con su cuerpo un árbol. el estudiante con la colaboración de otros estudiantes dice que se coloca al lado del árbol, que haría una rayita, para referirse a una rayita, se coloca al lado de una guada que está en el salón y con su mano señala la raya a ras con su cabeza estando erguido (derecho), un estudiante dice que en filita para referirse que después de colocar su cuerpo junto al árbol se vuelve a hacer lo mismo pero ahora donde se traza la rayita. El estudiante E12 dice que después de la rayita “se encarama en el árbol” para seguir midiendo.

Preguntas y reflexiones.

- Se pregunta si esa forma de medir sería práctica, La estudiante E5 comenta que otra forma es “que la medida de E12 se coja en una cuerda o... si en una cuerda” se afirma lo de la estudiante E5 diciendo “o sea que pasemos la medida de el” la estudiante E5 dice si a una cuerda, se contesta que sí, esa es una buena forma.
- Se explica a todo el grupo lo que la estudiante E5 ha propuesto, es decir que para medir una longitud con cualquiera que sea el elemento con que se medirá, se debe pasar esa medida a algún objeto o elemento que pueda moverse sin dificultad para poder medir, en esta parte se está pensando implícitamente en la conservación de la medida ya sea por traslación o rotación, esto de la conservación de la longitud de un segmento es explicado discursivamente recogiendo las ideas de los estudiantes. sin descartar otra posibilidad que los estudiantes piensen.

Institucionalización.

Contenido matemático: concepto de medida, unidad de medida, patrón de medida, segmentos consecutivos, recta numérica.

- Se dibujó en el tablero tres segmentos consecutivos y se pregunta ¿Cómo se llama ese tipo de representaciones? Nadie contesta así que se decide comentarles que cuando dos o más segmentos son consecutivos se llama línea poligonal.
- Para finalizar se plantea el siguiente problema. “Si realizo el recorrido desde donde estoy hasta la puerta en línea recta siguiendo la condición de llegar siempre a la mitad del recorrido ¿puede llegar a la puerta?”, los estudiantes empiezan a pensar en la respuesta y algunos hacen el ejercicio de ir caminando hasta la mitad del recorrido luego aproximan la mitad y llegan hasta ese punto y así sucesivamente, después de intercambiar ideas entre ellos, algunos comentan que de esa forma nunca llegaría a la puerta, aunque otros dicen que si es posible. Hay respuestas como: nunca porque siempre hay el punto medio de algo, no porque los números son infinitos, no es posible porque el punto de llegada vuelve a ser el punto de partida.

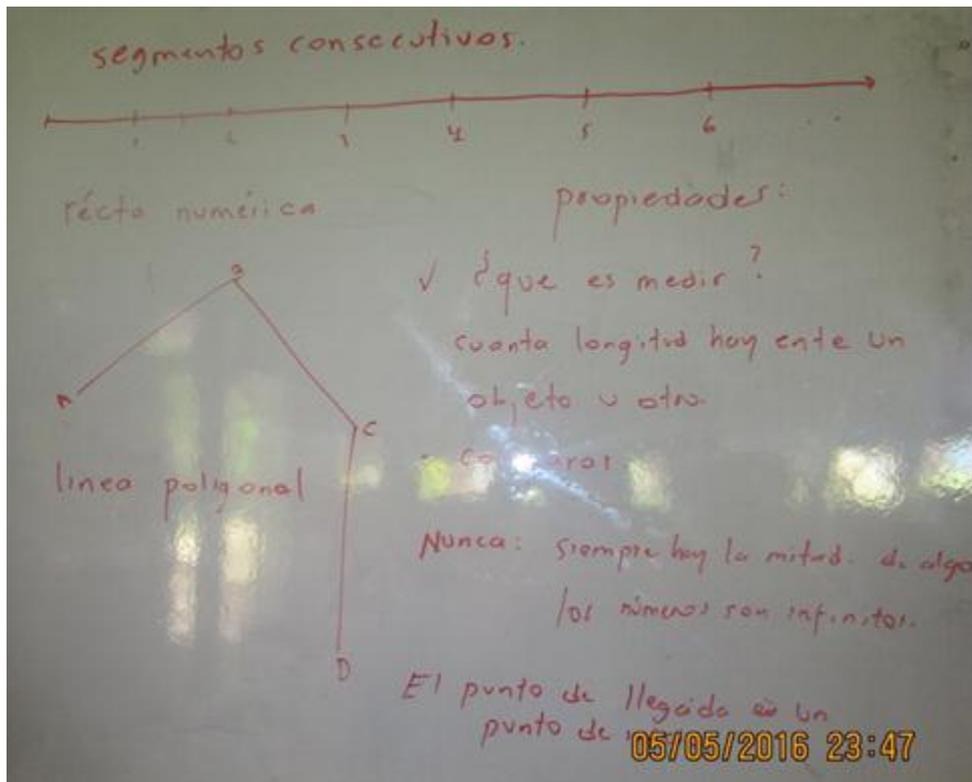


Figura 2 | expresiones de los estudiantes presentadas en el tablero

Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.

Actividad: capturando lo continuo con lo discreto

Competencia matemática: relacionar y operar la magnitud continua de longitud.

Desarrollo de la actividad.

- Se empieza la clase recordando el problema que se había dejado para resolver en casa, el cual tenía que ver con la longitud de segmentos. La mayoría de estudiantes piensan que no es posible llegar a la puerta teniendo que pasar por la mitad de lo que le falta por recorrer. se plantea que si se realiza el recorrido del camino hasta la puerta colocando un pie enseguida del otro paso por cada mitad del recorrido y además llegó a la puerta, se pregunta ¿Dónde está el dilema del problema? Algunos estudiantes vuelven a repetir las respuestas de la clase anterior, se les dice que les queda como problema abierto para que lo sigan pensando y que con el trabajo de esta clase pueda que resuelvan algunas dudas.
- Se pasa a decir que se desarrollará un taller en clase, que primero tienen que intentar solucionarlo ellos, luego se hará en clase el taller y se intentará resolver las dudas. Se entrega el taller.

A continuación, presento el taller con el que se desarrolló la clase 12

Taller

1. medir el siguiente segmento. Con los siguientes patrones de medida. Expresar la cantidad que cada patrón se encuentra en el segmento y explicar el procedimiento.



Fuente: hernando lagos.

a) la longitud del dedo índice de tu mano.

b) el siguiente segmento _____

c) el siguiente segmento _____

2. encontrar el orden en que deben estar los siguientes segmentos para que toquen los puntos dados.



3. construir un segmento de tal manera que al sumar el segmento construido con el segmento AB me otra vez el segmento AB.

4. hallar la medida de la siguiente curva, con respecto al segmento que va desde el centro hasta un punto de la circunferencia. Explicar el procedimiento y decir cuántas veces está el radio en la curva.

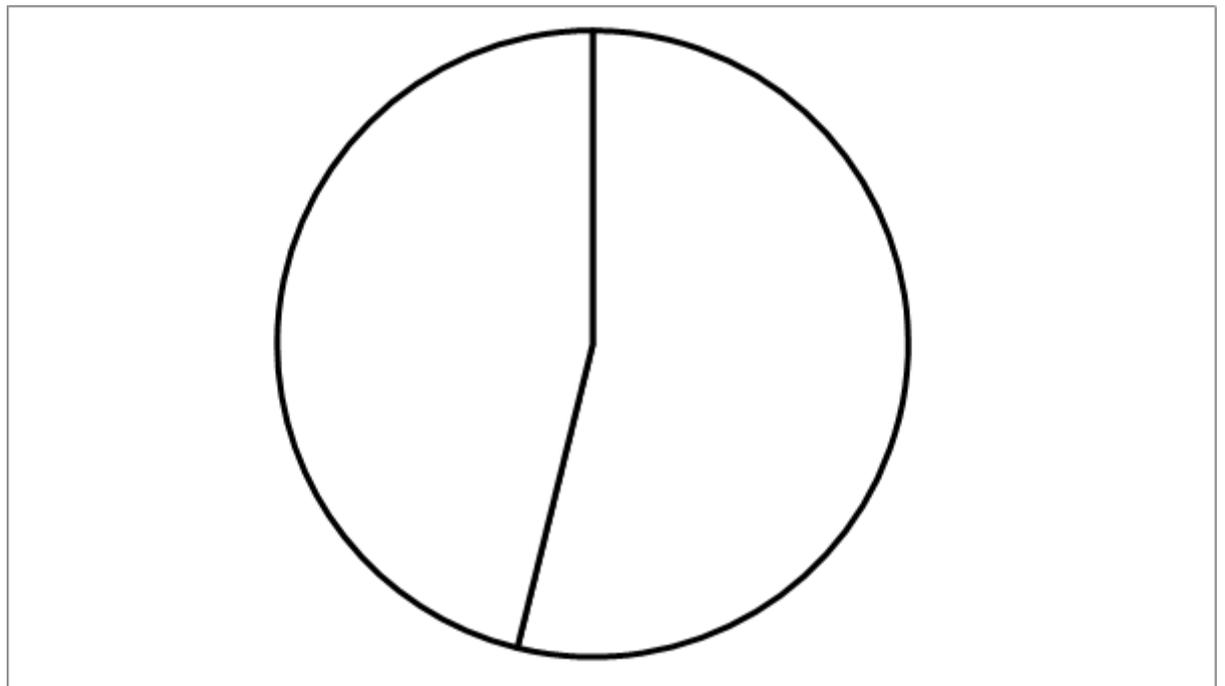


Figura 22 circunferencia con dos radios

Fuente: Hernando Lagos.

- Después de entregado el taller a los estudiantes se pasa a trabajar con el estudiante E7 quien es considerado como un estudiante con “capacidades distintas” se le dice que para trabajar el taller hay que tener un lápiz así que le pregunto si tiene uno, él no me contesta, parece que no quiere hacer nada, entonces lo dejo un rato solo y el profesor Johnny le llama la atención, ya que él había llegado a un acuerdo de trabajar en clase.
- La estudiante E9 pide que el profesor se acerque a ella para que le explique el primer punto del taller. Se lee frase por frase el enunciado y se va “confirmando” si entiende o no, por ejemplo cuando dice medir el siguiente segmento se pregunta qué es lo que va a medir, ella contesta que el segmento que está en la hoja y lo señala, luego se lee la frase con los siguientes patrones, y le preguntó a cuales patrones se refiere, ella responde que los que están en la parte de abajo, es decir con el dedo y con los segmentos ahí presentados, entonces se le dice que realice la primera medida con lo indicado, ella señala que sí con el dedo y se le contesta que sí, no queda tan segura de lo que va hacer pero dice que ya entendió.

Preguntas y reflexiones.

- La estudiante E9 pregunta ¿Cómo hacer para medir con el dedo, si el dedo no tiene números? (esto está registrado en el video MVI-1611), me pregunto en voz alta ¿Cómo hacemos? se le pregunta ¿Cómo se hizo la otra vez para que aparecieran esos símbolos que se llaman números?, pero ocurre que ella no estuvo en la otra clase, se le dice que no importa que lo intente hacer como considere y que al final se resuelve esa duda. Pero como ya tenía marcado el segmento del primer punto con una raya, se le pregunta ¿Cómo hiciste para hacer esto de aquí hasta acá?, esto para referirse a la marca en el segmento, ella muestra su dedo índice y hace una marca con el lapicero en la parte inferior del dedo, empieza a señalar con su dedo en el segmento como va marcando las longitudes y dice que al final del segmento le dio hasta cierta parte del dedo, ella señala el dedo diciendo “justico me llevo hasta esta línea”, se le dice “bueno y eso ¿cuánto es de tu dedo?” refiriéndose al segmento con respecto a su dedo, ella dice “serian dos dedos de este y la mitad de uno hasta aquí”, se le pide que exprese eso, ya sea con palabras o con otros símbolos, ella dice escrito.
- Con el estudiante E7 se pasa a trabajar el punto 1.a, se trata de medir el segmento AB con el segmento CD, le digo vamos a medir con el segmento CD el segmento AB. Se le dice que se suponga que tiene un palito y va a medir desde A hasta B con este palito, para ello con el dedo índice y el pulgar señala los extremos del segmento más pequeño y colocó esa abertura de los dedos en el segmento más grande, le preguntó a E7 ¿cómo lo haces?, E7 hace lo que acaba de ver pero coloca la abertura de los dedos en una posición cualquiera del segmento, se le dice que se debe hacer desde el inicio del segmento, entonces lo hace desde el extremo del segmento. Le explico que medir el segmento de esta forma puede generar que el segmento aumente o disminuya de longitud, así que se debe buscar un elemento exterior que permita llevar la longitud del segmento CD al segmento AB.

La mayoría de estudiantes entendieron los puntos 1 y 2. Sin embargo el tercer punto del taller no lo pudieron entender, así que les dije que al final de clase lo solucionaremos. Muchos no lo pudieron solucionar porque no sabían que era sumar dos segmentos.

- El cuarto punto se lo explique a varios estudiantes pero se considera que se entendió muy poco, sin embargo los estudiantes E11 y E10 me pidieron que les explicara el cuarto punto, lo primero que hace el estudiante E11 es leer la parte que dice hallar la medida de la siguiente curva, les pregunto ¿a qué se refiere cuando dice curva?, los estudiantes empiezan a señalar en el dibujo la circunferencia y también el radio, no están seguros a que se refiere con curva, les comentó que a lo que se refiere es a la circunferencia. Se continua con el enunciado “con respecto al segmento que va desde el centro hasta un punto de la circunferencia” y les digo señálame ese segmento, Los estudiantes señalan el radio de la circunferencia con los dedos. E10 me dice a ya entendí lo que quiso decir, le digo seguro y él contesta sí, me dice por ejemplo dándole la vuelta cuánto puede medir el círculo, pregunto cómo lo harías E10, él contesta como un relojito, le digo no te entiendo, entonces el estudiante E11 dice “o sea profe venga, imagínese aquí hay una bola entonces digamos este es el dibujito” el estudiante dibuja varios radios en el círculo y dice vamos midiendo aquí. Leo la última parte del enunciado “y decir cuántas veces está el radio en la circunferencia”, el estudiante E10 dice esta todas las veces que quiera. Vuelvo a preguntar qué es lo que van a medir, E10 me dice el círculo y señala la circunferencia. Seguimos dando vueltas al asunto y les recuerdo el primer punto, pero no me entienden.

Institucionalización.

- Se pasa al tablero a explicar todas las dudas que géneró el taller y los conceptos que no se entienden o que se querían hacer conocer. En el segundo punto se explica la suma de segmentos, diciendo que la suma de dos segmentos se da cuando se colocan los segmentos consecutivamente y en línea recta formando un nuevo segmento, en este punto se dice que la suma de segmentos cumple con la propiedad conmutativa y asociativa, para el tercer punto se explica que ya establecida la suma de segmentos el único segmento que no modifica el segmento dado es el segmento CC, es decir el segmento que tiene los extremos en el mismo lugar o sea el punto, cuya longitud es cero. En el cuarto punto explico cómo posiblemente se puede medir una circunferencia utilizando el radio de la circunferencia, esta forma consiste en encontrar un objeto al cual se pueda “pasar” la longitud del radio e ir superponiendo esta longitud en la circunferencia, este método lo planteo como el estudiante E10 lo logro hacer en el taller, al estudiante le dio seis y una parte el radio, también les comento que otra forma de hacerlo es inscribir una línea poligonal en la circunferencia.

Actividad: midiendo las curvas

Competencia matemática: relacionar y operar la magnitud continua de longitud

Desarrollo de la actividad.

- Se explica que la longitud de una curva está relacionada con el concepto de medir y que este a su vez con la actividad de comparar, además que hasta lo que se ha trabajado se puede decir que medir es comparar, pero que más adelante se podrá ver la medida como una función.

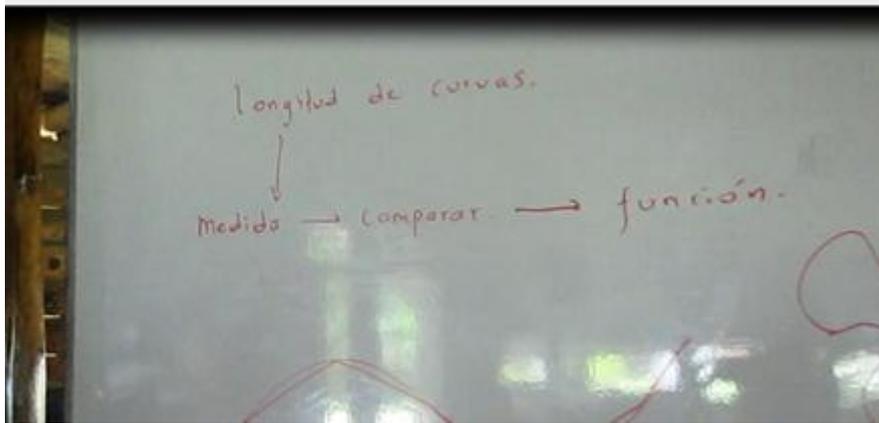


Figura 23. Expresiones de los estudiantes recogidos en el tablero

Fuente: Hernando Lagos.

- Se realiza en el tablero una curva y se pregunta ¿Cómo se puede medir la curva?, la estudiante E5 dice que tomamos un objeto flexible y lo superponemos sobre la curva, se interviene diciendo que como el objeto con el cual se va a medir la curva es flexible entonces el objeto termina siendo ¿qué?, E12 dice una línea recta, con eso se concluye que esa línea curva superpuesta sobre la curva en el tablero se puede enderezar y formarse una línea recta, la cual ya sabemos cómo medir, es decir la podemos comparar con un patrón de medida.
- Se dice además que otra forma para poder encontrar la medida de una curva es de ir colocando segmentos consecutivos que tomen la forma de la curva, estos segmentos no necesariamente tienen que ser congruentes y que estos segmentos entre más pequeños más se parecen a la curva, de esta manera sumando las longitudes de los segmentos de la línea poligonal que se parece a la curva se obtiene una gran aproximación de la longitud de la curva. Les comento que la aproximación es muy importante para poder entender muchos fenómenos de la naturaleza y que en la vida real lo que hacemos son aproximaciones, en todas las medidas que se hacen, que obviamente estas aproximaciones son muy buenas para que no ocurran accidentes o para tener más control del futuro.

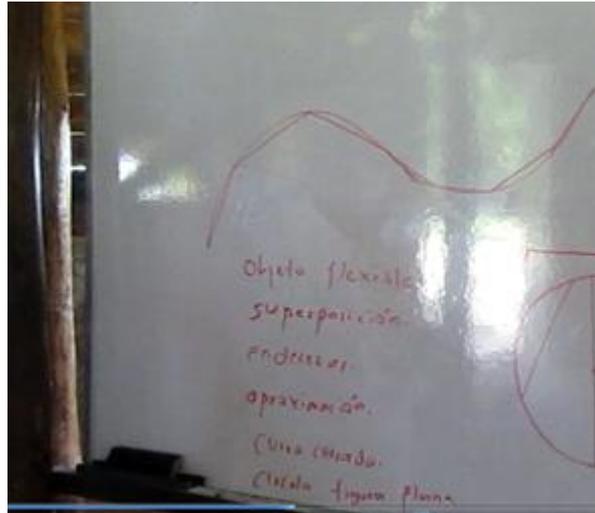


Figura 24. Explicación del profesor en el tablero

Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.

Institucionalización.

- Se hace una conclusión acerca de la importancia de medir en las matemáticas ya que estas han hecho la emergencia de otros números.

Línea abierta y cerrada.

- Se pasa a estudiar una curva muy conocida que es el círculo y como en la clase anterior ya se había hecho un ejercicio con la circunferencia y el estudiante E12 comenta que cuando se trataba del círculo aparecen otros números, de aquí paso a preguntar ¿Qué es el círculo?, me dicen que es una curva, pregunto ¿Qué tiene de especial esa curva? Responden que es una curva cerrada, paso a explicar líneas abiertas y cerradas, una estudiante dice que el círculo está en el plano, que tiene un centro y sus rayos son de la misma longitud, le pregunto a qué se refiere con rayos E4 me dice que el diámetro, a esto pregunto que es un diámetro, E4 me dice que es una línea que atraviesa el círculo, yo dibujo un segmento que toca dos puntos de la circunferencia y le digo este es una línea que atraviesa el círculo, E4 me dice que pase por el centro, entonces definimos diámetro como el segmento que tiene como extremos dos puntos de la circunferencia y que además pasa por el centro. Pregunto entonces como se llama el segmento que va desde el centro hasta un punto de la circunferencia, E12 me dice que es un radio, le digo a todos los estudiantes que de esta manera se define radio de una circunferencia,

Preguntas y reflexiones.

- Se hace la pregunta ¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia? Los estudiantes no pueden responder esta pregunta así que les digo que cuando se dice círculo se refiere a todo, a todo me refiero a lo que está dentro del borde de la curva cerrada como la misma curva cerrada, esto lo digo señalando con mis manos, cuando se refiere a circunferencia es solo la curva que bordea esta figura. La longitud de esta curva es el perímetro de la circunferencia. Teniendo en cuenta las ideas de los

estudiantes y respuestas a las preguntas hechas por el profesor se entra a la definición de circunferencia. Esto se hace escribiendo en el tablero.

- Se recuerda que en el taller anterior se había pedido encontrar cuántas veces el radio de una circunferencia estaba en la circunferencia, esto se había hecho con dos estudiantes E10 y E11 y se había encontrado que el radio estaba en la circunferencia seis veces y una parte de un radio. Les digo que sin importar el tamaño de la circunferencia al tratar de saber cuántas veces el radio está en la circunferencia me va a dar el mismo valor.
- Les pregunto por los símbolos $\leq \geq$ algunos estudiantes me dicen que los reconocen pero sin la raya que está abajo, luego una estudiante me dice que significan “más grande o igual que” les aclaro diciendo qué significan mayor o igual que o menor o igual que. Se hace un ejemplo para saber cómo los interpretan, el ejemplo es $2 \leq 9$, les pregunta sobre la veracidad de lo que escribo y la mayoría dicen que eso no puede ser porque 2 no es igual a 9, así que explico lo que significa el símbolo \leq , el cual tiene implícitamente un conector lógico “o” y que cuando interviene este conector la proposición es verdadera si cumple alguna de las dos proposiciones. Después de entendida esta parte escribe lo siguiente para seguir con el ejercicio de la razón entre la longitud de la circunferencia y el radio.

$$\frac{l}{r} > 6 \quad l \text{ longitud de la circunferencia}$$

$$r \text{ radio de la circunferencia}$$

$$r \frac{l}{r} > 6r \quad \text{multiplicando a ambos lados de la expresión por el radio, esto aplicando la propiedad uniforme, propiedad que explique ya que no la conocían.}$$

$$l > 6r \quad \text{pero como } 6 = 2 \cdot 3 \text{ entonces}$$

$$l > 2 \cdot 3r = 3(2r)$$

De la última expresión les digo a los estudiantes que hay que seguir pensando cómo llegar a una expresión que sea exacta para saber cuál es el perímetro de la circunferencia.

en esta parte se termina la clase y la práctica pedagógica

Actividad: aproximación de pi

Competencia matemática: relacionar y operar la magnitud continua de longitud

Desarrollo de la actividad

- Se va hacia el río para realizar la clase. Se lleva un tablero para realizar algunas explicaciones. Se pide a los estudiantes que dibujen un círculo, la mayoría lo intenta hacer a pulso, pero como se necesita una buena representación para el trabajo que se va a realizar se les pasa a los estudiantes algunos objetos que tienen formas circulares.

- Todos dibujan el círculo en una hoja que previamente se les ha entregado, ahora como se ha hecho un círculo con objetos no se tiene el centro del círculo entonces les pido a los estudiantes que encuentren la manera para hallar el centro del círculo.

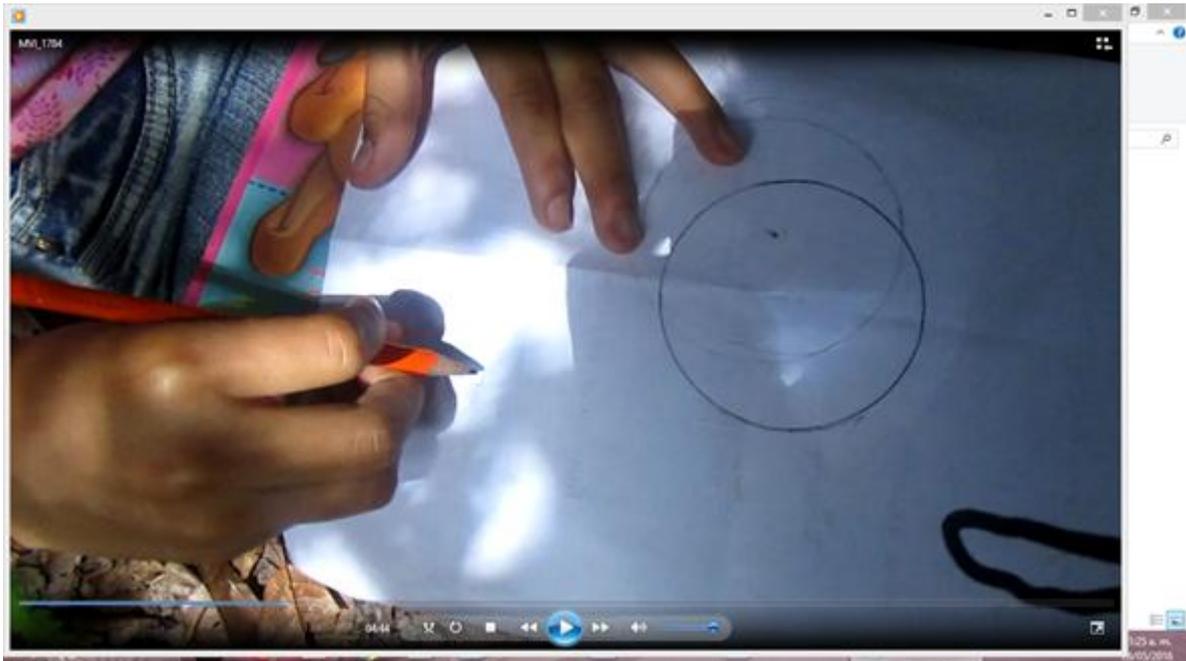


Figura 25. Estudiante tratando de encontrar el radio de la circunferencia

Fuente: video tomado por Hernando Lagos.

- El estudiante E10 dice que doblando el círculo, se le pregunta ¿Cómo así? Él dice que se dobla de tal manera que los extremos queden juntos y luego se vuelve a doblar. El estudiante lo va realizando para explicarlo. El estudiante lo que hace es sobreponer la mitad del círculo con la otra mitad, de esta forma lo que hace es trazar un diámetro, hace lo mismo en otro lugar del círculo y traza implícitamente otro diámetro, donde se cortan estos diámetros es el centro del círculo.



Figura 26. Estudiantes construyendo una circunferencia y tratando de buscar el centro y radio

Fuente: video hecho por Hernando Lagos.

Preguntas y reflexiones.

- Se pregunta al profesor titular que como encontraría el centro del círculo, él lo que propone es trazar cuerdas en el círculo paralelas y que estén a igual distancia para aproximarse a un diámetro, el profesor lo explica a los estudiantes pero no lo entienden, así que la mayoría se deciden por el método de E10. Aunque se incentiva a los estudiantes que para que intenten buscar otra forma.
- La estudiante E4 dice que otra forma de hallar el centro del círculo es cogiendo un diámetro, se le dice que esta suponiendo que es un diámetro porque no se sabe si es un diámetro, la estudiante dice que si porque todos los círculos tienen un diámetro, se le pregunta y para saber dónde está, el profesor Jhony dice cualquiera, la estudiante pone la regla en el círculo y aproximando dice aquí puede ser un diámetro, el profesor Jhony le dice después de que pase por el punto sabemos cuál es el diámetro, pero no se conoce el centro, la estudiante dice aproximando, lo que se toma como otra forma de hallar el centro.
- El profesor Jhony explica que construyendo un cuadrado que circunscribe a la circunferencia y trazando las diagonales se puede encontrar el centro. Un estudiante se acerca y dice que esta forma ya la estaba haciendo sino que no se atrevía a exponerlo, el estudiante lo que hacía era formar el cuadrado doblando la hoja en cuatro partes de tal manera que lado doblado tocará al círculo en un punto y por último doblar el cuadrado por las diagonales. Le digo que esa forma está bien pero hay que hacerlo con mucho cuidado para que sea lo más preciso.



Figura 27. Profesor titular explicando un método para hallar una aproximación al radio de la circunferencia

Fuente: video hecho por Hernando Lagos.

- Se explica que para hallar el centro del círculo se puede hacer trazando una línea tangente a la circunferencia, luego trazar una línea perpendicular a esta recta que pase o atravesase el círculo, esto se vuelve hacer en otro punto de la circunferencia y donde se cortan las dos líneas rectas es el centro de la circunferencia, se explica lo que significa recta tangente y recta perpendicular.
- Después de que los estudiantes han hallado el centro del círculo, trazan un radio y pasan la longitud del radio del círculo a otro objeto que sea flexible, para luego comparar el radio o el diámetro del círculo con respecto a la circunferencia, los estudiantes sobreponen el diámetro en la circunferencia



Figura 28. Estudiante explicando cómo medir la curva de una circunferencia utilizando el radio

Fuente: video hecho por Hernando Lagos.

Institucionalización.

- Los estudiantes se dan cuenta que el diámetro está 3 veces y sobra una parte del diámetro, les pregunto ¿Cuánto es lo que sobra con respecto al diámetro?, un estudiante me dice que es la mitad de un radio, les preguntó a los demás y me dicen que sí es más o menos la mitad del radio, los estudiantes todos hacen el ejercicio de comparar. Entonces paso al tablero para recoger lo que los estudiantes me han dicho en palabras y realizo las siguientes operaciones

La estudiante E5 recuerda que en la clase anterior se había llegado a que el radio estaba seis veces en la circunferencia, entonces se escribe la siguiente expresión

$$L > 2 \cdot 3 = 3(2r)$$

La estudiante E4 dice que el diámetro es dos veces el radio entonces la expresión queda así

$$L > 3D$$

Como se acaba de encontrar que falta un pedazo y ese pedazo de diámetro es más pequeño que $D/4$ entonces se plantea la siguiente expresión:

$3D + D/4$ realizando operaciones da $13D/4$ y haciendo la división de 13 entre 4 esto nos da un valor de 3,25, se les pregunta a los estudiantes que ya han averiguado la constante pi si está cerca del valor, los estudiantes dicen que está bastante próxima. Se comenta que este valor es hasta ahora el que el curso de 6, 7, y 8 ha podido construir o averiguar, pero que falta hacer mejores cálculos para tener cada vez mejores aproximaciones. Con esto se termina la clase y la práctica.

2.3 Sistema de Evaluación y Resultados Curriculares Obtenidos.

Para referirse al sistema de evaluación desde la posición de esta práctica, que parte de la perspectiva que considera, que el estudiante es el actor principal de la educación y que en coherencia con el modelo pedagógico de la IE-TAGEA (2015) que comenta que:

La escuela debe estar centrada en el sujeto de la educación, teniendo en cuenta que éste es miembro de una sociedad específica a la cual debe integrarse de forma activa y participativa.

La convivencia nos permite aprender juntos, aprendemos de las actitudes y cualidades de los otros estableciendo un diálogo de saberes que propende una actitud humilde y sincera. Los hombres nos relacionamos, educándonos con el mundo como mediador. Al aprender en comunidad participamos de un saber colectivo, pero teniendo en cuenta que también se aprende de manera individual. (PEI. 2015. Pag 35).

Lo anterior es solo discurso que hasta las instituciones más tradicionales proponen, pero se queda solo en discurso ya que en últimas solo se queda en satisfacer las demandas de la globalización, se llenan formato para cumplir con estadísticas, por tanto de esta práctica se considera que la evaluación aporta muy poco al aprendizaje, solo sigue siendo un tamizaje. Se considera por tanto que todos los estudiantes aprenden algo, esto se puede deducir sin necesidad de hacer una evaluación, en particular de esta práctica se aprendieron conocimientos de la temática, conocimientos de cada estudiante de su forma de pensar, de actuar, de reconocer al otro y aspectos del profesor tales como sus concepciones, capacidades y debilidades. Se puede decir que en todas las clases se aprendió y que la cantidad de lo que se aprendió solo es de interés del estudiante, ya que, él es autónomo de su proceso de aprendizaje. No obstante, como hay una exigencia por parte de los establecimientos educativos, se presentará una “evaluación” teniendo en cuenta que es una apreciación de alto nivel subjetivo, esto significa que tiende a ser solo una pequeña parte de lo que realmente aprendió el estudiante o tal vez no diga nada de lo que aprendió, solo es una apreciación, además no se hará en términos estandarizados, esto debido a que la recolección de datos para dar juicios sobre lo aprendido no está enmarcado en exámenes ni cumplimiento de objetivos porque no se realizaron exámenes, ya que para reconocer y auto reconocer las dificultades y capacidades del estudiante no es posible a través del examen, porque solo es un discriminador, enmarcado en cifras y tablas que generen comparaciones y por tanto medidas de lo que es ser buen o mal estudiante mas no de lo que aprendió. La evaluación estará guiada

por las reflexiones que surgieron de preguntas tanto del profesor como del estudiante en diálogos discursivas que se presentaron en el desarrollo de las actividades, es decir de las expresiones orales, además de las expresiones escritas y las corporales, teniendo en cuenta que estas actividades se desarrollaron en el marco de lo experimental, se parte de esto porque es una forma natural de manifestar ideas, y como el desarrollo y construcción de ideas a partir de la experiencia se puede considerar como la primera conceptualización, es decir la comprensión consciente y no necesariamente “verdadera” de los objetos del mundo, lo cual también es coherente con el objeto de estudio.

El procedimiento anteriormente propuesto se encuentra acorde con parte del pensamiento que propone la institución, la cual establece unos criterios de evaluación que se sustentan en los ejes del Desarrollo Humano Integral planteados por la escuela, PEI (2015)

Cada estudiante es un ser único con habilidades que permiten el trabajo grupal, por lo tanto, valoramos y calificamos los procesos de los estudiantes individualmente, permitiendo una valoración más equitativa e integral,... Pensamos que algunos estudiantes necesitan de mayor tiempo para alcanzar los logros, así como otros por sus habilidades lo hacen en tiempo establecido o más rápido. (PEI, 2015. Pag 30)

De acuerdo al profesor titular Muñoz (2016) el sistema de evaluación del colegio se centra en los requisitos que pide el ministerio de educación para cada área, de esto parte la pedagogía, en donde el profesor es el encargado de trabajar esos temas con la práctica, pero para poder llevar a un nivel académico se estudia y analiza las condiciones emocionales personales y familiares del estudiante, por tanto se busca trabajar con los padres de familia para que se pueda tener un cimiento que venga desde el hogar, permitiendo con el tiempo subir la autoestima del estudiante y su socialización con su entorno para poder poco a poco entrar en lo académico, en donde el estudiante es motivado por la investigación de sus talentos aplicando todos los requisitos que pide el ministerio de educación. Una vez el estudiante sea motivado por sus capacidades motrices y cognitivas se observa en la práctica los niveles de capacidad de entender conceptos que se brinda en clases para ser evaluados.

La evaluación de la práctica se describe de la siguiente manera:

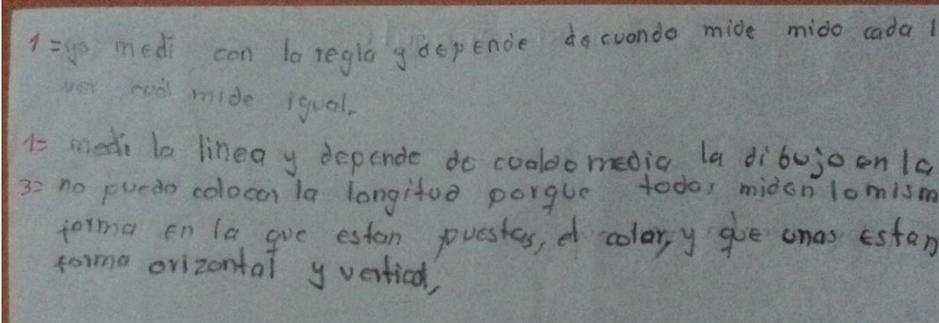
Expresiones de los estudiantes más relevantes en cada actividad que permitieron deducir los objetos aprendidos.

Tabla 3

Expresiones orales, escritas y gestuales.

Actividad	Expresión oral, expresión escrita y gestual
Observación y descripción de las plantas.	Las hojas son en forma de corazón aplastado.

<p>Reconociendo los elementos básicos de las formas.</p>	<p>Vertical... estaba "curviado" y las hojas son como espadas lisas y los bordes... y la punta de la hoja...</p>
<p>Observando la caída de un objeto y representando el recorrido.</p>	<p>"el recorrido de un objeto que cae es una línea recta que no se puede observar"</p>
<p>Construir y resolver el crucigrama.</p>	<p>""</p>
<p>encontrando las posiciones entre puntos y líneas</p>	<div data-bbox="689 624 1203 1160" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="719 1160 1171 1189">Figura 29. Trazado de líneas por un estudiante</p> <p data-bbox="675 1216 1214 1249">Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.</p>
<p>construyendo postulados y definiciones a partir de las construcciones</p>	<div data-bbox="491 1285 1430 2020" data-label="Image"> </div>

		Figura 30. construcción de líneas, postulados, definiciones y conjeturas Fuente: Hernando Lagos.
Comparando segmentos encontrando cualidad de longitud.	y la de	 <p>Figura 31. Procedimiento seguidos por estudiante para resolver problemas Fuente: Hernando Lagos.</p>
Buscando un elemento que permita comparar cantidades de longitud.	un que compare de	Cada estudiante señala la forma como iba a medir. Es decir, el que iba a medir con su cuerpo colocó una rama de un árbol paralela a su cuerpo empezando en el pie. El que va a medir con cuartas indicó en el aire la forma como iba a medir, colocando una cuarta después de la otra ...
Comprensión del proceso de conservación de magnitud.	del de de	“siempre hay la mitad de algo, entonces como siempre hay una mitad nunca voy a llegar a la puerta, es infinito los números, aunque muy pequeño siempre va haber una mitad”
capturando lo continuo con lo discreto	lo con lo	¿Cómo hago para medir si el dedo no tiene números?
midiendo las curvas		“se superpone un objeto flexible en la curva para medirla, como es flexible se endereza y termina siendo una línea recta, es decir un segmento y esto claramente se puede saber cuánto mide en relación a otro objeto”
aproximación de pi		Para encontrar el centro de la circunferencia se dobla el círculo por la mitad dos veces en distintas partes, esto lo hace es trazar dos diámetros y donde se interceptan es lo que se llama radio.

Las expresiones gestuales y/o escritas permiten valorarse como un conjunto de acciones que hacen referencia a las siguientes evidencias:

Los conocimientos adquiridos y la capacidad de los alumnos para aplicarlos en situaciones variada.

La mayoría de estudiantes lograron adquirir los conocimientos que se trabajaron en la práctica, esto se puede evidenciar en los diarios de campo cuando se observa que la mayoría participaron de las actividades sin ningún problema, los siguientes escritos tomados del diario de campo son indicios de que los estudiantes adquirieron conocimientos

- Los estudiantes respondieron a la pregunta en forma escrita. La mayoría acordaron que todas las formas se pueden construir por medio de líneas, aunque un estudiante

comentó que existen las formas que no están compuestas por líneas, pero que no se saben cuáles.

- Se realizó otra pregunta. ¿Cuál es la diferencia entre las líneas observadas en las hojas de las plantas y la línea dejada por el objeto que cae?
- Dos estudiantes respondieron que la línea formada por el objeto que caía no se puede ver, se imagina, en cambio las líneas de las hojas se pueden ver.
- Se concluye que las líneas en las matemáticas son una abstracción posiblemente de las formas abstraídas de los objetos.
- Se les pide a los y las estudiantes que dibujen dos puntos y que construyan todas las líneas que pasan por los puntos, se pregunta ¿Cuántas líneas pueden pasar por dos puntos distintos?, la mayoría comenta que muchas, pero algunos estudiantes comentan que si es recta solo una.

Todo el grupo de la practica pedagogica conformado por estudiantes de 6, 7 y 8 grado trabajaron las actividades en iguales condiciones, es decir, que no se discrimino a los estudiantes de cada grupo para realizar tareas “menos o mas” dificiles de acuerdo a su nivel tecnico de estudio, pero la profundizacion que cada estudiante alcanzo se dio por la perspectiva abstracta y simplificada del conocimiento del mundo que cada estudiante tiene y que se restrinjo por la influencia del grupo y del profesor, esto no necesariamente de acuerdo al grado en que se encontraba, a mayor grado de estudio no necesariamente mayor profundizacion, teoricamente si se tiene esta caracterizacion de cada grupo en la IE-TAGEA, no obstante, hace parte de las exigencias del estado mas no de su filosofia. En relacion a la tematica enseñada, la cual esta explicitada en el numeral 1.3 del contexto institucional se tienen los siguientes consideraciones en relacion a lo que se considera que se aprendio en los tres cursos.

Tabla 4

Objetos enseñados y aprendidos

Objeto enseñado	Objeto aprendido 6	Objeto aprendido 7	Objeto aprendido 8
Línea recta y curva	✓ Los estudiantes a partir de la experimentacion establecen la relacion entre los elementos basicos que componen las formas de la naturaleza con algunos elementos basicos de la geometria como puntos, lineas y superficies.	✓ Los estudiantes a partir de la experimentacion reconocen la forma como cualidad que permite tener informacion para caracterizar los objetos del mundo fisico	✓ Los estudiantes a partir de la experimentacion reconocen la forma como cualidad que permite tener informacion para caracterizar los objetos del mundo fisico
Postulados definiciones y propiedades	✓ Los estudiantes a partir de las representaciones de lineas, puntos y superficies abstraen	Los estudiantes a partir de las representaciones de lineas, puntos y	Los estudiantes a partir de las representaciones de lineas, puntos y superficies abstraen

	algunos postulados, definiciones (segmento) y propiedades, en el espacio físico y desde lo finito	superficies abstraen algunos postulados, definiciones (segmento) y propiedades, en el espacio físico y desde lo finito	algunos postulados, definiciones (segmento) y propiedades, en el espacio físico-conceptual y desde lo finito-infinito
Medidas de líneas rectas y curvas	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los estudiantes reconocen la cualidad de longitud en los segmentos y la relacionan con medidas estandar. ✓ Los estudiantes utilizan el metodo exhaustivo para apraximar la longitud de una curva con líneas poligonales. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los estudiantes abstraen la cualidad de longitud presente en objetos del mundo físico (altura, ancho, largo, profundo) y caracterizan los segmentos con esta cualidad. ✓ Los estudiantes utilizan el metodo exhaustivo para apraximar la longitud de una curva con líneas poligonales. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los estudiantes abstraen la cualidad de longitud presente en objetos del mundo físico (altura, ancho, largo, profundo) y caracterizan los segmentos con esta cualidad. ✓ Los estudiantes utilizan el metodo exhaustivo para apraximar la longitud de una curva con líneas poligonales. ✓ Los estudiantes relacionan la longitud de una circunferencia en relacion a su radio.

Los conocimientos aprendidos algunos se adquieren y otros se construyen, aunque es muy difícil de asegurar en cuales exactamente pasa una cosa o la otra, los escritos, los discursos y los gestos son la muestra de lo que saben, proponiendo soluciones a las preguntas formuladas que llevaban a reflexionar y llegar a acuerdos en relación a las respuestas, que no eran otra cosa que los conceptos y resultados en su primer estado o como lo plantea Vearnug conceptos en acción y teoremas en acción que la práctica proponía y que en últimas se institucionaliza. La aplicación en las situaciones acomodadas de las actividades no fue tan productiva como en las situaciones que emergen de las dinámicas de la clase.

Los alumnos contribuyen a aportar un nuevo significado al conocimiento, alterando incluso la dinámica de la interacción establecida por el docente en el aula.

De los conocimientos nuevos que emergen de las actividades se destacan los siguientes:

Reconocimiento de los elementos básicos que componen la forma.

Posiciones relativas entre puntos y líneas

Las líneas como rectas y curvas
Estrategias para medir líneas curvas
Medida, unidad de medida y patrón de medida
Perímetro de polígonos
Perímetro de la circunferencia,
Numero pi.

2.4 Hechos Pedagógicos y Didácticos (caracterización)

Los estudiantes después de las tres primeras clases se inquietan por el contenido que se está trabajando ya que lo consideran muy trivial, así que recomiendan que se intensifique en el tema. Esto, aunque ya previsto no se toma a mal, pero si inquieta mucho ya que, en el desarrollo de estas primeras actividades, los estudiantes no pudieron dar razón de algunas cuestiones que se plantearon, y que también se habían considerado triviales, por ejemplo, para los estudiantes no fue fácil o no fue tan explícito determinar que una cualidad importante de los objetos es la forma, a pesar de que se planteó el problema desde el contexto físico y el conceptual. Los estudiantes en las descripciones de los objetos físicos proponen figuras geométricas como óvalo, sólido, circunferencia, círculo para referirse a semejanzas con los objetos de la naturaleza pero no podían generalizar estos comentarios al concepto de forma, concepto vital en el desarrollo de esta práctica, es más cuando ya se logró colocar todas estas figuras geométricas que los estudiantes proponían en el concepto de forma para organizar las percepciones, les fue complicado decir explícitamente cuáles eran los elementos fundamentales de la forma. Tal vez los estudiantes consideran que la matemática deben ser números, ecuaciones y problemas tediosos de resolver, cuando la matemática es más que eso, es una forma de pensar y actuar, bueno esta es solo una opinión al respecto. Pero para continuar con el comienzo de esta situación, se les comenta a los estudiantes que en la práctica poco a poco se va a ir subiendo de “nivel” y que por ese momento lo mejor era empezar despacio ya que posiblemente después se iba a complicar la forma de razonar que se pretendía, los estudiantes estuvieron de acuerdo. Ya en el transcurso de la práctica se evidencio que los conceptos y problemas que contenía el tema de líneas rectas y curvas y su medida eran bastante complicados y no fue posible aclarar todos los temas en el nivel de 6, 7 y 8 porque los estudiantes desconocían operaciones básicas como suma resta y multiplicación de fracciones, de igual forma no entendían las propiedades de la suma y la multiplicación de números enteros que hacían evidentes en las operaciones con segmentos.

El asunto de trabajar una temática que no hacía parte de los contenidos del periodo en que se realizó la práctica tuvo algunas complicaciones para el profesor titular, porque se atrasaba en los contenidos que tenía que trabajar y que la escuela de alguna forma le exigía, estos contenidos si es cierto no hacían parte de los contenidos del periodo, estaban implícitamente relacionados con una cantidad de temas, que a medida que avanzó la práctica fueron apareciendo, entre los temas vitales para los cursos de 6, 7 y 8 que la práctica apporto fueron: lo continuo y lo discreto, la medida, el número, cantidad, magnitud, aproximación, lo infinito. Temas muy importantes para un curso de matemáticas de cualquier nivel, pero que en cursos

de bachillerato solo se considera desde las operaciones concretas dejando a un lado la esencia de estos pensamientos.

Cuando los estudiantes no alcanzan a realizar la abstracción de las líneas en las formas, como se pretendió en un principio se hacen otras observaciones en la naturaleza para interpretar la observación del estudiante y la posible relación con las líneas, la idea es que todo el grupo de trabajo coincida con los elementos que se van percibiendo y los sistemas de prácticas se hacen apreciables por el profesor. Se realiza la actividad de observación de las líneas rectas ya no en la naturaleza sino en su representación dibujada en el cuaderno y se pide encontrar los atributos o rasgos que varían de una línea recta a otra. Se sabe que desde cierta edad se reconoce una cualidad entre líneas finitas implícitamente esto se pone en práctica relacionando las distancias con palabras como lejos, cerca, en el alto de un árbol, en lo lejos que queda el colegio, luego la construcción de longitud se establece a partir de la necesidad de comparar, y esta necesidad surge en muchos problemas de la vida y no necesariamente de los propuestos por el profesor sino en los que explícitamente van emergiendo de las prácticas.

En las primeras clases se habló de forma y después se centró la discusión en las líneas y aunque se planteó desde un principio que cuando se hablaba de línea se hacía mención a las líneas rectas finitas que matemáticamente son llamadas segmentos y a las líneas curvas, es decir las que continúan y constantemente cambian de dirección, los estudiantes cada vez que se planteaba en un problema o pregunta el término línea tendían a considerar sólo las líneas rectas, debido tal vez que desde los primeros cursos de la matemática se trabajan sólo las líneas rectas, esto se puede observar al menos teóricamente en el plan de estudio de matemática de la IE-TAGEA, ya que se plantean en ellos unos contenidos pero se desprenden rápidamente de las curvas, por qué lo hacen no se sabe con exactitud, pero de alguna forma se hace para evitar complicaciones porque las curvas no son tan fáciles de controlar y porque en los planteamientos de la geometría no se trabajan las curvas, la única curva es la circunferencia. Sin embargo, en esta práctica se procuró trabajar considerando que en los objetos físicos de la naturaleza, las curvas están por todos lados, son las incuestionables a la hora de hablar de la forma y sus elementos básicos.

En el modelo de enseñanza estaba el elemento correspondiente a “examinar lo expresado a través de preguntas” los estudiantes se incomodaban mucho por la forma como se dirigían sus respuestas, pues siempre que había una respuesta de un estudiante no se afirmaba o negaba su respuesta sino que se dejaba en un “tal vez”, y para continuar con la discusión se plantea otra pregunta en relación a la respuesta, esta pregunta por lo general tenía la intención de hacer replantear la respuesta más que cambiarla. Pero los estudiantes no parecían gustarles mucho esta forma porque les dejaba más dudas de las que tenía en relación a una proposición, se sentían incómodos con la incertidumbre, querían una operación con un procedimiento establecido o un algoritmo que diera solución, les comentaba que todas las respuestas que ellos dieran serán tenidas en cuenta porque de alguna u otra forma alguna verdad tendrían, es claro que en la enseñanza de las matemáticas esto no se vea con buenos ojos porque se supone que la matemática es “precisa” por tanto las afirmaciones de un profesor “debería” ser

precisas, aunque no se trataba de cuestionar todos los contenidos que se presentarán, tampoco se pretendía pasarles una información y comentarles que eso es la verdad en matemáticas, se trataba de que pensarán.

Aunque la metodología de la IE-TAGEA se inclina a que todo conocimiento se debe acercar de manera experimental, en cuanto a la matemática del grupo con el que se trabajó no se hace así en general con el profesor titular, esto debido a que se considera por parte del profesor titular que esto en bachillerato no tiene sentido, esto hizo que los estudiantes al principio de la práctica no la acogieran con tanta responsabilidad y seriedad, el hecho de no copiar conceptos y teoremas en el tablero y explicitarlos con ejemplos no parecía tener mucha importancia en matemáticas sin embargo la dificultad en las preguntas que iban apareciendo permitió llamar la atención.

En relación a la medida una estudiante que estaba desarrollando un ejercicio de un taller que se había propuesto comenta que no entiende un punto, entonces me dirijo para intentar ayudarle, a continuación la conversación de la estudiante y el profesor de práctica:

La estudiante E9 pregunta ¿Cómo hacer para medir con el dedo, si el dedo no tiene números?, me pregunto en voz alta ¿Cómo hacemos? Y le pregunto ¿Cómo hicimos la otra vez para que aparecieran esos símbolos que se llaman números?, me acuerdo que ella no estuvo en la otra clase, le digo que no importa que lo intente hacer como considere y que al final se resuelva esa duda. Pero como ya tenía marcado el segmento del primer punto con una raya, le pregunto ¿Cómo hiciste para hacer esto de aquí hasta acá?, me refiero a la marca en el segmento, ella me muestra su dedo índice y ha hecho una marca con el lapicero en la parte inferior del dedo, me empieza a señalar con su dedo en el segmento como va marcando las longitudes y me dice que al final del segmento le dio hasta cierta parte del dedo, ella me señala el dedo diciendo “justico me llevo hasta esta línea”, le digo “bueno y eso ¿cuánto es de tu dedo?” refiriéndome al segmento con respecto a su dedo, ella me dice “serian dos dedos de este y la mitad de uno hasta aquí”, le digo que exprese eso, ya sea con palabras o con otros símbolos, ella dice escrito. (Esto está registrado en el video MVI-1611)

La pregunta ¿Cómo hacer para medir con el dedo, si el dedo no tiene números? Me causó inquietud, así que indague en los demás estudiantes a ver como estaban haciendo el punto de la estudiante que había planteado esta pregunta y me di cuenta que también habían implícitamente pensado esta pregunta, esto porque para resolver este problema los estudiantes median con una regla el objeto tomado como unidad para medir para luego llevar esta medida al segmento que se pedía que midieran y por último hacer una suma de cuantas veces estaba y expresaban este resultado en centímetros. Lo anterior no está mal y es lo habitual que los estudiantes de bachillerato en general hagan, ya que es un hábito que se empieza a realizar desde los primeros años escolares, pero limita el pensamiento, ya que cuando les hablan de medir sólo consideran la medida hecha con una regla o un metro y si no existen estas herramientas se bloquean para realizar la medición, porque no consideran la noción original de medir, la cual es comparar. Al proponer a los estudiantes que midan la longitud de la

circunferencia en relación al radio, se dieron circunstancias iguales o más complicadas a las del problema anterior ya que en primer lugar había una información que era distinta en el profesor y los estudiantes y a pesar de que se había dado una aclaración de lo que era círculo y circunferencia esto no había quedado claro, en segundo lugar porque el profesor se dio cuenta solo al final de la clase y en tercer lugar porque ni entendían que era medir la circunferencia utilizando el radio. Un estudiante confirmó lo anteriormente dicho cuando al preguntarle cuántos radios había en la circunferencia dijo que había infinitos se le pide que explique lo que dice y lo que hace es ir colocando radios desde el centro de la circunferencia hasta el borde de la misma tratando de llenar el círculo con radios.

La temática de la práctica correspondiente a las líneas y su medida, se trabajó desde varias ramas de la matemática, entre ellas la geometría, el álgebra, el cálculo, abordando contenidos desde primaria hasta noveno de bachillerato, esto permitió trabajar con un grupo multigrado sin mayores inconvenientes una misma temática sin la necesidad de dividir temáticas de acuerdo al curso, y aunque en el grupo algunos estudiantes tenían más claros ciertos conocimientos esto no hizo que se atrasaran con respecto a la adquisición de conocimientos al contrario ayudó a ajustar los conocimientos ya que en algunas ocasiones les explicaban a los que no entendían algún conocimiento, entonces los que entendían más no avanzaban en general en cuanto a contenidos pero sí en cuanto a profundización de conocimientos. No obstante, para los estudiantes que entendían más rápido los conocimientos que se proponían resultaba en algunos momentos repetitivo el discurso, lo que ellos llamaban dar vueltas al mismo tema, esto debido a que se buscaba que el tema que se pretendía enseñar quedara claro para la mayoría.

Capítulo 3 Reflexión en la Docencia.

3.1 Objeto de Estudio en la Docencia Directa.

Los modelos pedagógicos que en nuestro país se han impuesto tienen de alguna u otra forma influencia en la forma como imaginamos el mundo, esta influencia especialmente toca a los estudiantes quienes después de estar vinculados a una institución en particular, tienen que someterse a las políticas que hayan establecido, “bien o mal”. Esto se puede observar en un caso particular que en el proceso de adquisición o construcción de conocimiento matemático es bastante habitual, si se encuentra en un modelo tradicional entonces las situaciones problemáticas se conducen o están influenciadas en su mayoría por el docente, quien intenta que sus estudiantes se aprendan de memoria unas prácticas habituales que ya han sido establecidas culturalmente, sin tener en cuenta los procesos que internamente un estudiante está haciendo, por ejemplo para la situación ¿Cómo determinar, a partir de un conjunto de medidas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ la mejor estimación posible del verdadero valor x desconocido? Esta situación que tiene una posible solución dada desde la antigüedad calculando la suma total de las observaciones y dividiendo por el número de datos, en el modelo tradicional los profesores en general indican que se tiene que hacer lo ya dicho anteriormente y lo único que sigue es aplicarlo, luego hay una influencia de este modelo sobre esta práctica que conlleva a un objeto matemático y es que le hace memorizar el

procedimiento al estudiante y le dice lo que hay que hacer en un determinado caso donde tenga esta situación, sin preocuparse en lo más mínimo por los ajustes o desajustes que estén pasando en su mente por este nuevo objeto, llevando al estudiante a no intentar pensar otra alternativa porque le ha indicado implícitamente que esta es la manera verdadera como se debe hacer y lo más crítico es que se llega a desconocer los conceptos y resultados que puede estar pensando un estudiante cuando se está ante una situación como la anterior, al respecto Canfux señala que en relación al modelo tradicional “el contenido de la enseñanza consiste en un conjunto de conocimientos y valores sociales acumulados por las generaciones adultas que se transmiten a los alumnos como verdades acabadas; generalmente, estos contenidos están disociados de la experiencia de los alumnos y de las realidades sociales.

Así como el ejemplo anterior se tienen otras situaciones semejantes en otros modelos pedagógicos y cada uno de ellos va a influir en la forma como el profesor asuma que los estudiantes en las situaciones problemáticas se puedan relacionar o no con las prácticas habituales que se suponen ya tienen desarrolladas en cierta medida por su interacción en distintos contextos, por tanto cabe preguntarse ¿Cómo el modelo pedagógico influye en la identificación por parte del profesor de los invariantes operatorios del estudiante en su actuación ante situaciones relacionadas con problemas matemáticos? Pero de qué sirve que un profesor identifique invariantes operatorios en las actividades, pues hay que tener en cuenta que los invariantes son los componentes esenciales de los esquemas y estos son fundamentales porque generan acciones, incluyendo operaciones intelectuales, que el profesor se dé cuenta de los conocimientos que generan ciertas conductas en las actividades, es un inicio para dar criterios con relación al conocimiento de un estudiante ya que el conocimiento es muy diferente cuando él es explicitado en vez de quedar totalmente inmerso en la acción. El conocimiento explícito puede ser comunicado a otros y discutido, el conocimiento implícito no

Aunque es indiscutible que existen otras variables que influyen en la identificación del pensamiento observable de un estudiante como las concepciones del docente en las prácticas habituales que pueden ser trabajadas por los estudiantes, se sabe que en una institución formal el docente en general tiene el compromiso de someterse, al menos parcialmente, al modelo pedagógico que la institución ha acogido ya que hace parte de las políticas de las instituciones. Para el caso de esta práctica pedagógica se debe tener en cuenta que muchas de las indicaciones que el modelo pedagógico de la IE.TAGEA propone son tenidas en cuenta luego el proceder del profesor tiene en cierta manera coherencia con el modelo pedagógico.

Partiendo desde una contemplación pragmática de cómo la sociedad ha decidido darle a las instituciones educativas la responsabilidad de “formar” a los sujetos y teniendo en cuenta que cada institución cuenta con un modelo pedagógico que interviene en los procesos de aprendizaje, se busca establecer la influencia del modelo pedagógico en la identificación de los invariantes operatorio. A continuación, se explicita el objeto de estudio.

Objetivo general: establecer la influencia del modelo pedagógico de la IE-TAGEA en la identificación de invariantes operatorios expresados por el estudiante en el contexto de grupo multigrado y en su actuación ante la temática línea recta curva y aproximación de la medida.

Objetivos específicos

- Reconocer los elementos del modelo pedagógico de la IE-TAGEA que se presentan en el desarrollo de la práctica educativa.
- identificar los invariantes operatorios que emergen en el contexto de un grupo multigrado trasversado por elementos pedagógicos institucionales.

3.2 Marco Conceptual y Unidades de Análisis del Estudio.

Modelo pedagógico de la IE-TAGEA

- ✓ enfoque pedagógico: este enfoque plantea validar o desvirtuar sus referentes pedagógicos, a partir de la puesta en práctica de las ideas propuestas, estableciendo una coherencia entre discurso y práctica. Pero los referentes pedagógicos no son acogidos como sistemas dogmáticos, por ello propone la escuela más allá del edificio, es decir que no está aparte de la vida cotidiana ya que la calle, los medios de comunicación, la familia y la cultura influyen al estudiante.
- ✓ un método de aprendizaje: está relacionado con la filosofía y el método natural de Celestin Freinet, esta filosofía plantea que la adquisición de conocimientos arranca con el trabajo, por ello propone su método natural. Además, plantea que el conocimiento se produce al juntar cabeza, corazón y manos, es decir lo que se piensa, se siente y se hace en determinados aspectos de la vida, esta concepción es tomada de Pestalozzi.
- ✓ acceso al conocimiento: escalar y bajar montañas: de esta manera se plantea explicitar el método de aprendizaje, partiendo de que la educación atiende a procesos y no a resultados, se pretende empezar acercarse al conocimiento a partir de la experiencia, esto es planteado desde la técnica del tanteo experimental, la cual consiste en colocar los sentidos a trabajar en las actividades, esto hecho desde lo lúdico y de la información que le aportan los sentidos, es un avanzar y retroceder de acuerdo a las necesidades e interés que se tengan, sin obligar a aprender, el tanteo experimental plantea que el conocimiento no solo está en los libros, que hay diversas fuentes de información y que se afianza el conocimiento individualmente cuando se interactúa con el grupo, ya que en el grupo se estimula el diálogo y la conversación, marcado por preguntas y respuestas.
- ✓ estrategias pedagógicas: permiten guiar al estudiante en la práctica diaria, a continuación algunas estrategias.
La educación por el trabajo
Pedagogía centrada en el niño
Desarrollo del individuo con la ayuda del medio ambiente y del adulto

El estudiante construye por si mismo su personalidad
Una disciplina racional, emanación del trabajo organizado
La cooperación como pedagogía
Técnicas y proyectos (el en contexto institucional se describen las técnicas y proyectos)

- ✓ Carta de la escuela moderna: constituye un texto base para todos los movimientos Freinet. Entre los lineamientos más importantes están:
La educación debe ser gratuita y obligatoria. Tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales.
Oposición a todo adoctrinamiento.
Se rechaza la ilusión de una educación que sea suficiente por ella misma fuera de las influencias sociales y políticas que la condicionan.
La escuela del mañana será la escuela del trabajo.
La escuela estará centrada en el niño.
La investigación es la base y primera condición de nuestro esfuerzo de modernización escolar mediante la cooperación.

Sistema multigrado.

El concepto de multigrado en educación se ha restringido generalmente a los cursos de primaria y en unos contextos específicos, de acuerdo a esto Torres (1993) menciona que la escuela multigrado o escuela unitaria es aquella donde grupos de diferente edad y nivel académico son atendidas por un solo profesor. Considera que esta modalidad se la han atribuido a zonas rurales que tienen altos niveles de pobreza y por tanto los recursos para pagar profesores para distintas área y pocos estudiantes no es posible. Sin embargo manifiesta que este sistema es muy frecuente en muchos lugares e incluso en países desarrollados y que los resultados que los estudiantes obtienen al estar en una educación con característica de multigrado en muchas partes es mejor que los resultados de la educación graduada.

Según Torres (1993) esta concepción de la educación ha estado presente desde los inicios de la escuela formal, la organización de la educación en niveles, grados y áreas del conocimiento empezó con escuelas de un solo profesor y una sola aula, la escuela organizada por grados y conocimientos es una evolución que se ha venido dando en las ultimas décadas de la modernidad.

Una cuestión que se presenta en escuela multigrado es como asumir la enseñanza y el aprendizaje, de acuerdo a Torres (1993) esta modalidad cuenta con una metodología conveniente. Se tiene entonces una organización cuidadosa de contenidos y estrategias, aprendizaje auto-dirigido, materiales auto-instruccionales, trabajo en grupos, estudiantes cooperando como tutores de otros estudiantes, evaluación permanente. El profesor termina siendo un facilitador del conocimiento y no un instructor. Para poder atender la variedad de grupos presentes en un salón, con necesidades cognitivas distintas y contenidos diferentes se

necesita conocer y manejar una variedad de técnicas, que se combinaran de acuerdo a las situaciones que se presenten y el tiempo.

La escuela multigrado es recomendada para lugares con bajos recursos económicos, zonas dispersas con poca población y con pocos estudiantes. La experiencia que se ha observado en los lugares donde se plantea esta modalidad permite ser recomendada como un sistema que mejora los procesos de aprendizaje y los rendimientos académicos. En el multigrado la interacción entre distintas maneras de pensar hace posible el desarrollo de valores y actitudes de cooperación, responsabilidad y autodisciplina, el desarrollo de “aprender a aprender” esto según Torres (1993).

Para plantear un buen funcionamiento y buenos resultados de la modalidad multigrado Torres (1993) plantea que:

“dos factores han sido identificados como claves: la formación de los profesores y la disponibilidad de materiales adecuados para la enseñanza y el aprendizaje. El profesor de multigrado requiere una formación específica, realizada de manera rigurosa y sistemática. Dada la complejidad de su tarea, el profesor de multigrado necesita no menos sino más y mejor formación que el profesor de un único grado. Su trabajo no es posible, por otra parte, sin materiales apropiados, lo que en el sistema multigrado quiere decir materiales auto-instruccionales, diseñados de modo que los alumnos puedan avanzar en buena medida solos, o con la ayuda de otros alumnos”

Campos conceptuales.

De acuerdo a Vergnaud (1990) la teoría de los campos conceptuales es una teoría psicológica del proceso del desarrollo o construcción de ideas abstractas a partir de la experiencia de lo real que permite localizar y estudiar continuidades y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual (p.133).

Moreira (2002) plantea que Vergnaud reconoce igualmente que su teoría de los campos conceptuales fue desarrollada también a partir del legado Vygotsky. Eso se percibe, por ejemplo, en la importancia atribuida a la interacción social, al lenguaje y a la simbolización en el progresivo dominio de un campo conceptual por los alumnos. Para el profesor, la tarea más difícil es la de proveer oportunidades a los alumnos para que desarrollen sus esquemas en la zona de desarrollo próximo (p, 2).

Se plantea que la principal finalidad es la de proporcionar un marco que permita comprender las filiaciones y las rupturas entre conocimientos, en los niños y los adolescentes, entendiendo por “conocimientos” tanto los saber-hacer como los saberes expresados. Vergnaud toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales son, además del propio concepto de campo conceptual, concepto, situación, el

concepto de esquema (la gran herencia piagetiana de Vergnaud) e invariantes operatorios (teorema-en-acción y concepto en acción).

Campo conceptual

Para Vearnug un campo conceptual es un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. Esta teoría plantea que el conocimiento racional es operatorio. Campo conceptual es también definido por Vergnaud (1983) como un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes pero íntimamente relacionados (p.127).

Tres argumentos principales llevaron a Vergnaud (1983) al concepto decampo conceptual:

- 1) Un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones
- 2) Una situación no se analiza con un solo concepto
- 3) La construcción y apropiación de todas las propiedades de un concepto o de todos los conceptos de una situación lleva mucho tiempo. (p, 393)

Concepto

Se define como una tripleta de tres conjuntos:

C (S, I, G)

S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia)

I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el Significado)

G: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).

Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, en el curso del aprendizaje o durante su utilización, es necesariamente considerar estos tres planos a la vez. No hay en general biyección entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones. No se puede por tanto reducir el significado ni a los significantes, ni a las situaciones. Los principales conceptos que están alrededor de esta teoría y que permiten tener una idea de que son los invariantes operatorios son los conceptos de esquema,

Situaciones

El concepto de situación empleado por Vergnaud no es el de situación didáctica, pero si el de tarea, siendo que toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, para las cuales es importante conocer sus naturalezas y dificultades propias. Las situaciones son las que le dan sentido al concepto, un concepto se torna significado a través de una variedad de situaciones.

Esquema

Es la organización, de la conducta para una cierta clase de situaciones; teoremas-en-acción y conceptos-en-acción son invariantes operacionales, luego, son componentes esenciales de los esquemas y determinan las diferencias entre ellos. Teorema-en-acción es una proposición sobre lo real considerada como verdadera. Concepto-en-acción es un objeto, un predicado, o una categoría de pensamiento considerada como pertinente, relevante (Vergnaud 1996 c, p. 202; 1998, p. 167).

Invariantes operatorios

Vergnaud denomina por “concepto-en-acto” y “teorema-en-acto” (esto es, conceptos y teoremas que, sin ser explícitos, dirigen las conductas del sujeto) los conocimientos contenidos en los esquemas. Más globalmente los llama “invariantes operatorios”.

Hay una relación dialéctica entre conceptos-en-acción y teoremas-en-acción, toda vez que los conceptos son ingredientes de los teoremas y los teoremas son propiedades que dan a los conceptos sus contenidos. Pero sería un error confundirlos (Vergnaud 1998, p. 174). Conceptos-en-acción son ingredientes necesarios de las proposiciones. Pero los conceptos no son teoremas, pues no permiten derivaciones (inferencias o computaciones); las derivaciones requieren proposiciones. Las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas; los conceptos pueden ser apenas relevantes o irrelevantes. Aun así no existen proposiciones sin conceptos (Vergnaud 1994, p. 55). Recíprocamente, no hay conceptos sin proposiciones, pues es la necesidad de derivar acciones de las representaciones del mundo y de tener concepciones verdaderas (o por lo menos adecuadas) del mundo que tornan necesarios a los conceptos.

Conceptos y teoremas explícitos no constituyen más que la parte visible del *iceberg* de la conceptualización: sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios esa parte visible no sería nada. Recíprocamente, no se puede hablar de invariantes operatorios integrados en los esquemas sin la ayuda de categorías de conocimiento explícito: proposiciones, funciones proporcionales, objetos, argumentos (ibid.). Pero conceptos-en-acción y teoremas-en-acción pueden, progresivamente, tornarse verdaderos conceptos y teoremas científicos. El *status* del conocimiento es muy diferente cuando él es explicitado en vez de quedar totalmente inmerso en la acción. El conocimiento explícito puede ser comunicado a otros y discutido, el conocimiento implícito no (Vergnaud 1998, p. 175).

Moreira (2002) comenta que en general, los alumnos no son capaces de explicar ni tampoco de expresar en lenguaje natural sus teoremas y conceptos-en-acción. En el abordaje de una situación, los datos a ser trabajados y la secuencia de cálculos a ser realizados dependen de teoremas-en-acción y de la identificación de diferentes tipos de elementos pertinentes. La mayoría de esos conceptos y teoremas-en-acción permanecen totalmente implícitos, pero ellos pueden, también ser explícitos o tornarse explícitos y ahí encaja la enseñanza: ayudar al alumno a construir conceptos y teoremas explícitos, y científicamente aceptados a partir del conocimiento implícito. Es en este sentido que conceptos-en acción y

teoremas-en-acción pueden, progresivamente, tornarse verdaderos conceptos y teoremas científicos, pero eso puede llevar mucho tiempo. (p, 12).

3.3 Análisis de los Registros.

Metodología-invariantes operatorios.

Registro 1

Un aspecto del modelo pedagógico de la IE-TAGEA es su método de aprendizaje, el cual es llamado “método natural de aprendizaje” este elemento del modelo es apropiado en cierta parte por la práctica pedagógica ya que en las actividades propuestas se pueden observar las características más importantes del método. A continuación, se presenta estas características.

Acercarse al conocimiento de una manera experimental.

Proceso individual de adquisición de saberes y habilidades.

Desarrollo como grupo que interfiere decididamente en cada uno de nosotros.

El diálogo y la conversación.

“La pregunta tiene sabor a aprendizaje” momentos para reflexión y argumentación.

En la actividad “**observación y descripción de las plantas**” realizada el día 8 de marzo de 2016 se puede observar que en la descripción de la actividad realizada en el ítem *secuencia y desarrollo de la práctica* se pretendía que los estudiantes de bachillerato a partir de la observación pudieran encontrar la cualidad de la forma en las plantas. Luego se puede decir, a partir de la descripción de la actividad que se acerca al conocimiento de manera experimental, ya que no se observan discursos o escrituras en el tablero para empezar el tema ni mayores indicaciones en la actividad misma, es muy libre la observación. Aunque no es explícito, si esta actividad se hace individual o en grupo, la mayoría lo entendieron individualmente, esto es perceptible en los escritos que hicieron después, luego hay un proceso individual de adquisición de saberes.

En las descripciones además se puede observar que se intenta llevar a los estudiantes al tema permitiendo la reflexión y la argumentación por medio del dialogo y la conversación entre ellos.

De lo anterior se puede observar que los elementos característicos del método de aprendizaje de la IE-TAGEA están expuestos en esta primera actividad. Veamos si es posible a partir de este caso particular de cumplimiento del método en la actividad, observar su influencia en la identificación de invariantes operatorios. Para ello se revisa un documento escrito por una estudiante, realizada después de la observación

De acuerdo a la teoría de los campos conceptuales un concepto está compuesto por la tripleta (S, I, R), donde s es la situación, I los invariantes operatorios y R la representación con la que se explicitan los invariantes.

Para esta actividad se tiene que:

Situación: observación en objetos concretos.

Representación: escrito y dibujos

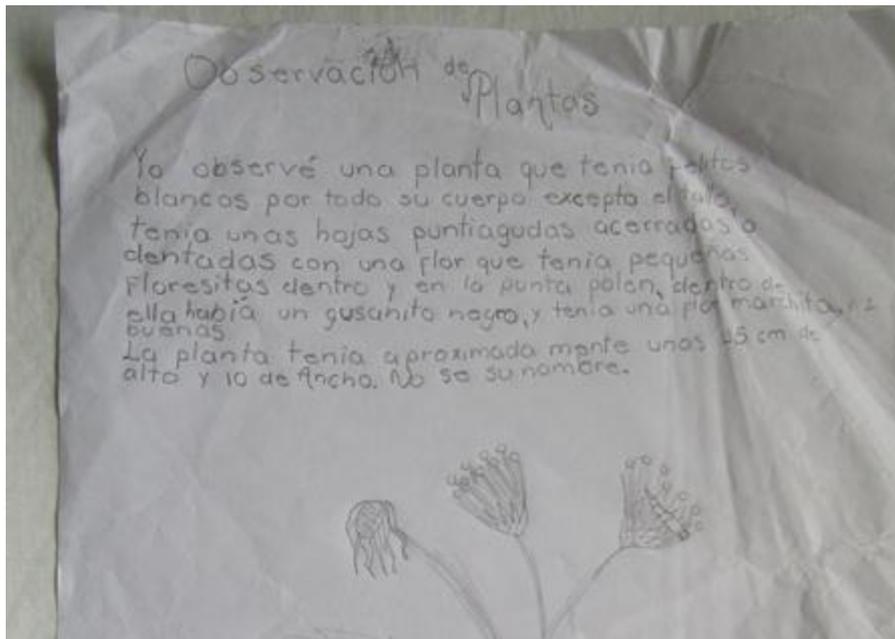


Figura 32. Expresión escrita de un estudiante después de una actividad.

Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.

Invariantes operatorios:

Tabla 5

Expresión escrita, oral e interpretación

Expresión	Invariante operatorio	Objeto matemático
Tenía hojas puntiagudas	Punta en los objetos concretos	Punto
Aserradas o adentadas (dentadas)	Líneas	Curvas y segmentos
La planta tenía aproximadamente unos 15 cm de alto y 10 cm de ancho	Aproximar	Medida de segmentos

Todo lo anterior se refiere a conceptos en acción que se encontraban implícitos en la acción del estudiante y que a través del escrito el profesor los hace explícitos al menos parcialmente, permitiendo sin formalismos excesivos empezar a trabajar en la temática planteada. Por tanto se puede decir que la metodología del modelo pedagógico de la IE-TAGEA permitió identificar varios elementos que hacen parte del concepto de forma.

Registró 2

El análisis del siguiente registro corresponde a la misma actividad del anterior “**observación y descripción de las plantas**”. Por tanto ya se sabe que la metodología que propone la IE-TAGEA si se encuentra en esta actividad. Ahora se trata de observar lo que el registro contiene en relación a los invariantes operatorios.

Situación: observación y descripción de las plantas.

Representación: lenguaje escrito y dibujos.

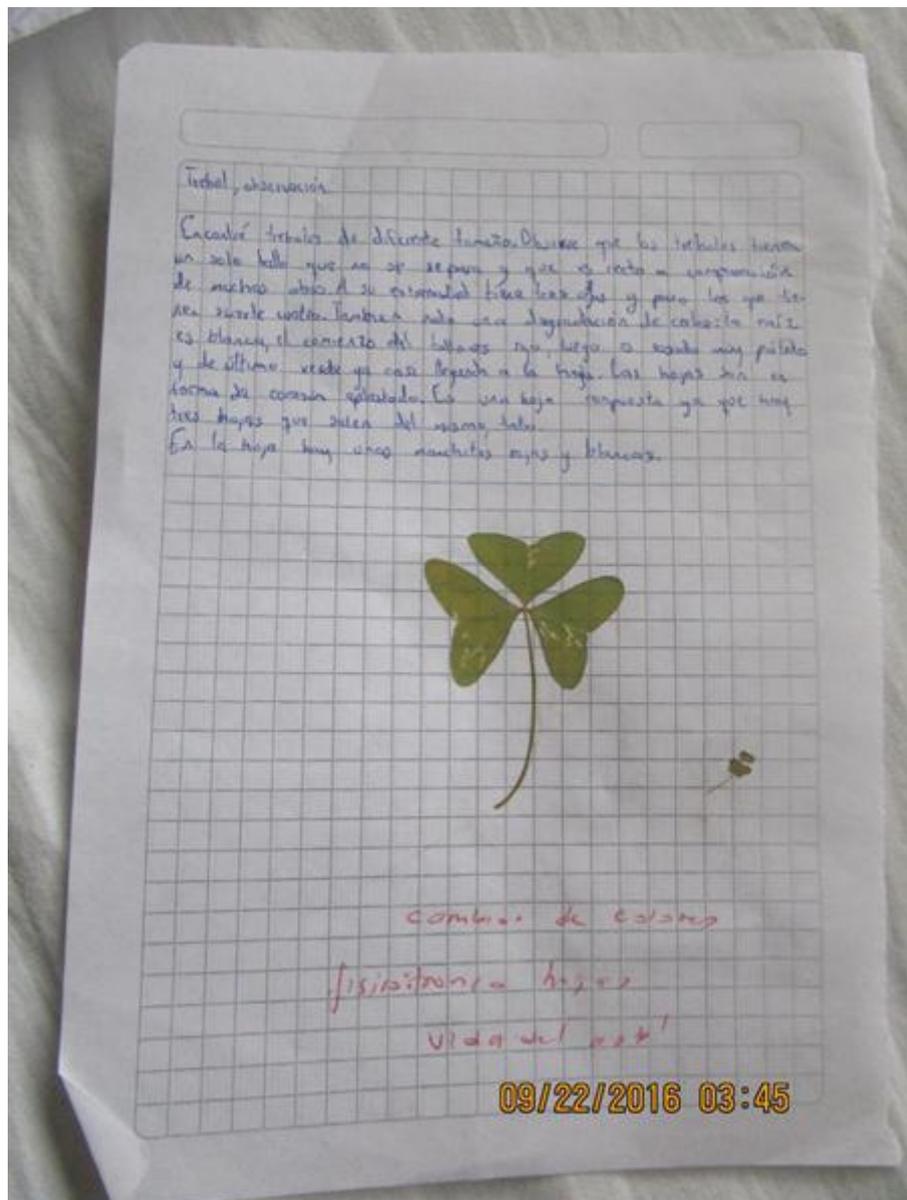


Figura 33. Expresión escrita de un estudiante después de una actividad

Fuente: foto tomada por Hernando Lagos.

Invariantes operatorios: las expresiones que se muestran en la tabla en la columna “expresión” están en la foto de la hoja, para alcanzar a ver hay que hacer zoom en la imagen.

Tabla 6

Expresión escrita, oral e interpretación.

Expresión	Invariante operatorio	Objeto matemático
Encontré tréboles de diferente tamaño.	Comparación de objetos en relación al tamaño	Magnitud
Que es recto	Cualidad de una recta	Segmento
Las hojas son en forma de corazón aplastado	Abstracción de mayor simplicidad	Semejanza

Al igual que en el caso anterior, la metodología permite observar invariantes operatorios, luego el modelo influye.

Registro 3

El registro corresponde a la actividad “**encontrando las posiciones entre puntos y líneas**” esta actividad está registrada en el capítulo correspondiente a la docencia directa, más precisamente en el numeral 2.2.

De acuerdo a las descripciones se puede establecer que en la actividad “encontrando las posiciones entre puntos y líneas” se parte desde preguntas, que llevan a la construcción de elementos geométricos en una hoja, es decir se acerca al conocimiento desde la experiencia, estas representaciones desarrollan pensamiento individual pero al poner estas ideas en consideración con el grupo se presentan discusiones y diálogos que intervienen en las ideas que cada estudiante ha construido, las preguntas que van surgiendo en las discusiones van cuestionando las construcciones que los estudiantes hacen. De lo anterior se tiene que el modelo metodológico de la IE-TAGEA está presente en esta actividad.

Ahora observemos si en los registros se evidencian invariantes operatorios, esto se analiza desde la tripleta situación, representación e invariantes operatorios.

Situación: construcción de puntos y líneas

Representación: dibujos y expresiones en una hoja.

Invariantes operatorios

Tabla 7

Expresión escrita, oral e interpretación

expresión	Invariante operatorio	Objeto matemático
Hay infinitas posibilidades	La línea está compuesta por infinitos puntos	Punto, línea e infinito
Curvas, rectas	Líneas	Líneas
Paralelas y perpendiculares	Líneas Paralelas y perpendiculares	Líneas Paralelas y perpendiculares

Al igual que en el caso anterior, la metodología permite observar invariantes operatorios, luego el modelo pedagógico influye en su identificación.

Registró 4

Veamos si la actividad “**comparando segmentos y encontrando la cualidad de longitud**” emplea parte de la metodología de la IE-TAGEA. Esto se hace en base a las descripciones del diario de campo.

Acercarse al conocimiento de una manera experimental. Esta la cumple la actividad ya que las anteriores actividades se habían planteado el acercamiento a los objetos a través de la percepción y esta actividad recoge en su mayoría los conocimientos de las anteriores clases, además la actividad no empieza con teoría sobre el tablero sino un taller que se les pasa a cada estudiante en una hoja de oficio.

En el desarrollo de la actividad presentado en el ítem 2.2 de la docencia directa para esta la actividad “comparando segmentos y encontrando la cualidad de longitud” se puede observar que hay un proceso individual de adquisición de saberes y habilidades ya que todos individualmente participan de la actividad con las construcciones que se propusieron, además hay un desarrollo como grupo que interfiere decididamente en cada uno de nosotros, esto llevado por el diálogo y la conversación, lo cual hace que estudiantes y profesor pregunten para afianzar conocimientos. Por tanto la metodología de la actividad es similar a la de modelo pedagógico de la IE-TAGEA.

Ahora a partir del registro propuesto en la imagen, se analizará la aparición explícita de invariantes operatorios.

Situación: encontrando las posiciones entre puntos y líneas.

Representación:

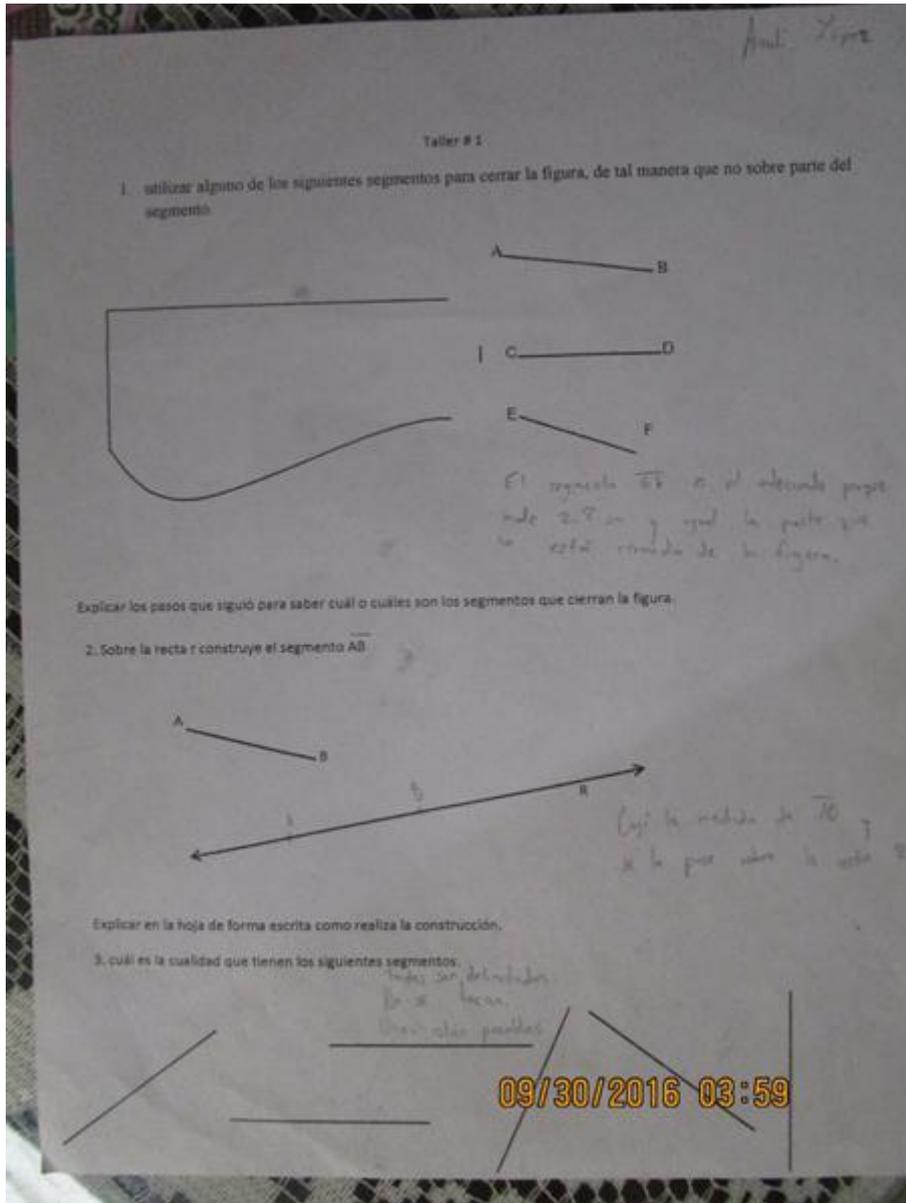


Figura 34. Taller desarrollado por un estudiante

Fuente: Hernando Lagos.

Invariantes operatorios:

Tabla 8

Expresión escrita, oral e interpretación

Expresión	Invariante operatorio	Objeto matemático
El segmento EF es el adecuado porque mide 2.8 cm, igual a la parte de la figura que no está cerrada	Medida estándar	Medida y unidad de medida
Cogí la medida de AB y se	Medir y superponer	Cantidad de longitud

la puse sobre la recta R	segmentos	
Todos son delimitadas	Segmento	Segmento
No se tocan	Puntos en común	Intersección
Unas están paralelas	Segmentos paralelos	Segmentos paralelos

De la tabla 6 se puede observar que la metodología de la IE-TAGEA hizo posible que se identificaran invariantes operatorios, por tanto en esta actividad se puede decir que el modelo influye en la identificación de invariantes.

Registró 5

Veamos si la actividad “**capturando lo continuo con lo discreto**” emplea parte de la metodología de la IE-TAGEA. Esto se hace en base a las descripciones del diario de campo.

En la descripción de la actividad “**capturando lo continuo con lo discreto**” realizada en el ítem 2.2 de la docencia directa, se puede observar que se acerca al conocimiento de una manera experimental ya que se empieza con un taller el cual se tiene que abordar experimentalmente porque en este taller hay que medir, comparar, trazar, representar, estas acciones hechas por cada estudiante llevan a un proceso individual de adquisición de saberes y habilidades. Lo anterior se refleja porque cada estudiante pide explicación de algún punto cuestión que el profesor no solucionaba con una respuesta sino con más preguntas que integraran al grupo a un debate, luego se presenta ideas en el grupo que interfieren o influyen decididamente en cada uno de los estudiantes. Cuando los estudiantes pedían la ayuda del profesor, no se limitaba a dar una respuesta sino a dialogar para que ellos mismo fueran organizando las ideas. Con todos los estudiantes individualmente y en grupo se hizo uso de la pregunta para que los estudiantes pensaran con respecto a lo que hacían o decían. Por tanto la metodología de la actividad es similar a la de modelo pedagógico.

Ahora a partir del registro propuesto en la imagen, se analizará la aparición explícita de invariantes operatorios.

Situación: capturando lo continuo con lo discreto.

Representación: texto y símbolos matemáticos en la imagen se puede observar.

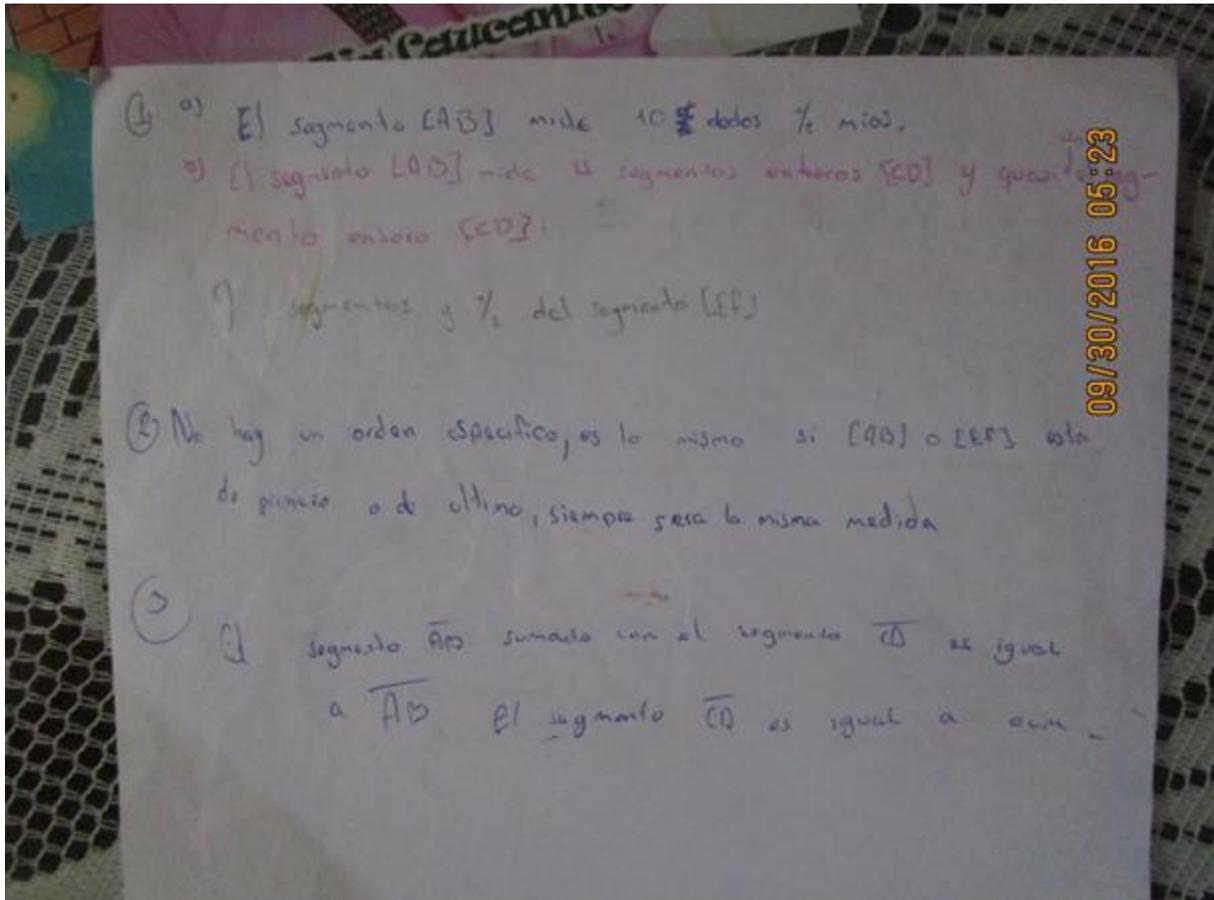


Figura 35. Desarrollo de un taller por un estudiante

Fuente: Hernando Lagos.

Invariantes operatorios.

Las expresiones son las respuestas de los estudiantes al taller que se encuentra en la actividad “**capturando lo continuo con lo discreto**”

Tabla 9

Expresión escrita, oral e interpretación

Expresión	Invariante operatorio	Objeto matemático
El segmento [AB] mide 10 dedos y 1/2 más	Comparar la unidad de medida con el segmento a medir	Medida unidad de medida
No hay un orden específico, es lo mismo si [AB] O [EF] está de primero o de último, siempre será la misma medida	Propiedad conmutativa y asociativa de la suma de segmentos	Propiedad conmutativa y asociativa de la suma de segmentos
Segmento AB sumado con	Suma de segmentos,	Suma de segmentos,

el segmento CD es igual a AB, el segmento CD es igual a 0 cm.	elemento neutro en la adición de segmentos, unidad de medida	elemento neutro en la adición de segmentos, unidad de medida
---	--	--

En la tabla 7 se puede observar cómo a través de escritos posibles por la metodología se pueden identificar explícitamente los invariantes, por tanto, se puede decir que el modelo pedagógico influyó en esta actividad específica para hacer visibles los invariantes.

Registro 6

El registro corresponde a la actividad “**aproximación de pi**” la cual esta descrita en el numeral 2.2 de la docencia directa.

De la descripción se puede observar que la clase se realiza en una bio-aula y que lo primero que se hace es dibujar una circunferencia, esto permite reconocer que se acerca al conocimiento de manera experimental, el problema de trazar un diámetro en la circunferencia dibujada plantea un proceso individual de adquisición y construcción de saberes y habilidades, al generar dificultades el trazado de un diámetro para algunos estudiantes se busca espontáneamente la ayuda de los que ya han encontrado la forma de hacerlo, esto permite una interferencia por parte del grupo en la forma de pensar este problema explicitado mediante el diálogo y la conversación generando preguntas para los que no tienen claro el ejercicio y explicaciones por parte de estudiantes. Luego se puede observar que la metodología de la IE-TAGEA está presente en esta actividad.

Ahora hay que analizar si aparecen los invariantes operatorios, los cuales se recogen desde la tripleta situación, representación e invariantes.

Situación: trazando figuras geométricas.

Representación: dibujos, expresiones verbales, expresiones escritas.

Invariantes operatorios:

Tabla 10

Expresión escrita, oral e interpretación

Expresión	Invariante operatorio	Objeto matemático
Se dobla el círculo en dos partes, de tal manera que las mitades queden superpuestas	Trazado del diámetro	Diámetro
Aproximando líneas hasta llegar al centro	Centro de la circunferencia	Centro de la circunferencia
Calcular el centro del círculo al ojo	Centro de la circunferencia, aproximación	Centro de la circunferencia, aproximación
	Construcción de un cuadrado que contenga al círculo. Trazado de las	Cuadrado circunscrito Diagonales del cuadrado

 <p>Figura 36. profesor titular explicando un método para hallar el radio de una circunferencia</p> <p>Fuente: Hernando Lagos.</p>	<p>diagonales del círculo</p> <p>Corte de las diagonales en el punto medio</p>	<p>Punto de medio de las diagonales de un cuadrado</p>
<p>radio mas radio da diametro</p>	<p>El diámetro es dos veces el radio</p>	<p>Diámetro igual a dos veces el radio</p>
 <p>Figura 37. Estudiante aproximando la longitud de la circunferencia utilizando el radio</p> <p>Fuente: Hernando Lagos.</p>	<p>Objeto abstracto para aproximar la longitud de un diámetro del círculo</p>	<p>Conservación de longitud</p>

De la tabla 8 se puede observar cómo a través de escritos, gestos, expresiones habladas que la actividad permitió en el marco de una metodología experimental se pueden identificar explícitamente varios invariantes, por tanto, se puede decir que el modelo pedagógico influyó en esta actividad específica para hacer visibles los invariantes.

3.4 Hechos de la Perspectiva Investigativa.

Desde la perspectiva que se trabaja la idea de modelo pedagógico se puede observar que el modelo abarca las finalidades de la educación, los conocimientos que se privilegian, la metodología, sistema de evaluación, secuencia del proceso formativo y recursos, sin embargo desde el análisis de los anteriores registros se puede reconocer que explícitamente se analiza la aparición de los invariantes solo desde la metodología, luego queda la pregunta ¿Cómo influyen en la identificación de los invariantes los demás componentes de un modelo? Una primera respuesta a esta pregunta se establece desde la concepción que se tiene de modelo pedagógico, en este caso se considera que cada componente del modelo pedagógico debe responder al todo, esto debido a que para el caso particular de la IE-TAGEA se tiene que es un modelo pedagógico centrado en el estudiante, por tanto en cada componente del modelo se expresa la filosofía que se concibe, luego analizar desde la metodología, también significa pensar en los conocimientos que se privilegian, el sistema de evaluación, secuencia del

proceso formativo y los recursos necesarios, estos elementos algunas veces analizados explícitamente otros implícitamente, pero quedan recogidos en las observaciones, esto considerando la coherencia que un modelo pedagógico debe tener.

Del análisis de registros se puede evidenciar la influencia del modelo pedagógico de la IE-TAGEA en la identificación de invariantes operatorios, es decir se explicita para el profesor una parte de lo que “pasa en la mente” del estudiante cuando se pone ante situaciones problemáticas, esta parte de los invariantes aunque es una pequeña parte observable de la actividad mental, ayuda para que se pueda adquirir y construir conocimiento, sin embargo hay que tener en cuenta que estos invariantes no son explícitos para el estudiante,

Una característica especial del grupo de práctica estaba relacionada con ser un grupo multigrado, esto permitió evidenciar invariantes distintos para una misma situación-problema. Los invariantes operatorios, es decir los conceptos y teoremas en acción que intervenían en las actividades tenían distinto nivel de adaptación, en especial en los estudiantes de mayor grado los invariantes identificados ayudaban al ajuste de conocimientos en los estudiantes de menor grado y en ocasiones los invariantes operatorios de los estudiantes de menor grado ayudaban a recordar ciertos conocimientos a los demás, este encuentro de conocimientos operatorios ayudaba a la adaptación de nuevos conocimientos. Todo lo anterior se posibilitaba por la identificación de invariantes.

Capítulo 4 Conclusiones y Recomendaciones.

4.1 Conclusiones

En un grupo de multigrado se debe ajustar una temática que atienda a varios frentes de conocimientos, esto para evitar trabajar por separado curso por curso, lo cual sería una alternativa, pero se perdería todo lo que pueden aportar a la construcción de conocimiento las distintas miradas y profundizaciones que se tienen por parte de los estudiantes de determinados conocimientos, además que al trabajar curso por curso temas distintos se disiparía la atención. No se debe olvidar que el desarrollo de la matemática se encuentra transversal por actividades panculturales tales como medir, contar, ordenar y aproximar y estas a su vez se encuentran en problemas que desprenden cantidad de conocimientos que cada persona puede ir profundizando de acuerdo a sus intereses. Por tanto, la dificultad de trabajar con grupos multigrados en matemáticas se encuentra en las políticas educativas establecidas mas no en el conocimiento en sí, ya que como se ha intentado proponer desde esta práctica las matemáticas son una forma de pensar.

La pretensión de acercarse al conocimiento a través de lo experimental provoca varias tensiones en los estudiantes que están acostumbrados al paradigma del ejercicio, una de las principales tensiones es que se considera que lo experimental no tiene validez, esto tiene sus consecuencias a la hora de contextualizar los contenidos, ya que se intenta pasar de un lenguaje matemático al habitual o viceversa, lo cual no es posible al menos que el profesor de un modelo de cómo hacerlo, ya que la falta de experimentación hace imposible la “conversión”.

El modelo pedagógico de la IE-TAGEA al plantear una pedagogía centrada en el estudiante permitió que los estudiantes se expresaran en las actividades de una forma libre y espontánea, desde la experiencia que han desarrollado en distintos contextos tales como el familiar, social y cultural, lo que amplió el criterio de verdad, evitando solo darle el criterio de verdad al conocimiento educativo, lo cual brinda autonomía al que aprende, de lo que quiere aprender, cuando quiera aprender y por qué aprenderlo, esto cuando se presentó ante situaciones de representación de figuras geométricas, explicitación de postulados, construcción de conceptos, medidas de longitudes y aproximación de longitudes. Además al partir de la filosofía y el método natural de aprendizaje de Celestin Freinet, que plantea el trabajo como origen del conocimiento, se dio la oportunidad de proponer clases desde la acción, lo que activo los sentidos para ajustar esquemas desde lo concreto a lo conceptual, evitando al máximo el paradigma del ejercicio. Estos esquemas que cada estudiante fue construyendo se presentaron de forma escrita, discursiva, dibujos, representaciones y gestos que permitieron abrir paso a nuevos conocimientos, recogidos por textos, talleres y preguntas lo cual fue posible por la aplicación de las técnicas del texto libre o vivo, cálculo vivo y asamblea escolar, al tener registro de las actividades se pudo observar parte de la conducta que los estudiantes tienen ante determinadas situaciones planteadas, lo cual refleja parte del conocimiento que cada estudiante va organizando y que se vuelve invariante al interactuar con los otros pero que no deja de ajustarse, y aunque no es posible afirmar absolutamente que la conducta refleje siempre el pensamiento y las operaciones mentales que se están efectuando en cada estudiante cuando se está en las condiciones expuestas, tampoco se puede rechazar lo que expresaron ya que es hasta ahora la única base para hacer las inferencias y reflexiones acerca de lo que el estudiante sabe. Todo lo anterior es posible porque en el modelo de enseñanza de la práctica se aplicó en gran medida la metodología de la escuela, luego se puede afirmar que el modelo pedagógico de la IE-TAGEA influyó en la identificación de invariantes operatorios ya que estos son los conocimientos contenidos en los esquemas, además constituyen la base implícita y explícita que permiten obtener información pertinente.

4.2 Recomendaciones.

Se instiga a que determinadas situaciones problemáticas de la vida real que puedan ser atendidas desde un pensamiento matemático, se abarquen desde pensamientos en distintos niveles para poder desprenderse de la adquisición de conocimientos e ir adentrándose en una posible reflexión del conocimiento que conduzca en primera instancia a la adquisición y a la construcción.

Lista de Referencias

- Ayer, A.J.: Lenguaje, Verdad y Lógica. Trad. Marcial Suárez. Barcelona: Editorial Martínez Roca, S.A., 1977.
- Kolmogorov, A & Fomin, S. (1978). Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Mir.
- Berrantes H. CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. 2006, Año 1, Número 2
- Bishop, A. Enculturización matemática. (1988). Una perspectiva de la educación matemática cultural. Ed. Paidós Madrid.
- Bello, S. (2004). Ideas previas y cambio conceptual. Revista “de aniversario”.
- Bobadilla, M L. (2012). Constitución histórica de la teoría de la medida y la integral de lebesgue: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico (tesis de doctorado). Universidad del valle. Cali.
- Bombal, F. 1991. La teoría de la medida. Universidad Complutense, Madrid. pgs. 107-144.
- Bungue, M. La investigación científica: su estrategia y su filosofía. Barcelona. Editorial argentina.
- Canfux, V. (1996). Tendencias pedagógicas contemporáneas. Colombia. Universidad de ibague.
- Chamorro, M & Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida: didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A.
- Duque J. H & Maca O. E. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura en los libros i y ii de los elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica. Tesis.
- EUCLIDES. (1991). *Los Elementos, Libros I – IV*. Primera edición 1991. Madrid, España: Editorial Gredos S.A.
- FANKHAUSER, A.M & PLAZA P. S. (2004) Conocer para transformar.
- Ferrán M.S. La polémica intuicionismo-formalismo en los años 20. Principio de Tercio Excluso

Freinet, C. (1996). La escuela moderna francesa: guía práctica para la organización material, técnica y pedagógica de la escuela popular. Madrid: Morata.

Freinet, C. “La Escuela Popular Moderna” Ministerio de Educación – Perú – 1971 –edic. Retablo de papel.

García Castro Ligia Ines, Osorio Cárdenas Andrea Milena. Modelos mentales sobre el concepto de medida. *atinoam.estud.educ.* 4(2): 135 - 150, 2008.

Godino, J y Ruiz F. geometría y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología 2002.

Jiménez, G.R. “Las técnicas de Freinet como desarrollo de una didáctica crítica” *Revista Kikiriki del Movimiento Cooperativo escuela Popular .Cooperación Educativa Numero 40*<http://www.quadernsdigitals.net/articuloquaderns.asp?IdArticle=3711>

Kline M. el pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días. Madrid: alianza editorial S.A. 1992.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. (1998) Lineamientos curriculares en matemáticas

Navarro J., Gómez J., & García F. Matemáticas. Profesores de Enseñanza Secundaria. Volumen Iii. E-book. 1 edición. España.

Oviedo, G.L. (2004). La definición del concepto de percepción en psicología en base a la teoría Gestalt. *Revista de estudios sociales.* No 18. Pp. 86-96.

Palacios, J. “¿Quién es... Célestin Freinet?” *Cuadernos de Pedagogía.* N° 54, junio 1979<http://didac.unizar.es/jlbernal/frein4.html>

Pérez, A.J. EL PENSAMIENTO DE RODOLFO KUSCH: UNA MANERA DE ENTENDER LO AMERICANO. *Mitológicas*, vol. XVIII, núm. 1, 2003, pp. 59-66. Centro Argentino de Etnología Americana Buenos Aires, Argentina

Psicología cognitiva y procesamiento de la información. Capítulo 6

Radford, H.L. La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. el caso de la didáctica de las matemáticas. Luis Radford-Hernandez

Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10,n° 2, 3, pp. 133-170, 1990.

Rico, P. (2003) La zona de desarrollo próximo (ZDP): procedimientos y tareas de aprendizaje. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

RIVAS.N.M (2008). Procesos cognitivos y aprendizaje significativo

Rodríguez, G.R; Fernández, O.M. Desarrollo cognitivo y aprendizaje temprano: la lengua escrita en educación infantil. 1997.

Rodríguez-Moneo, M., Conocimiento previo y cambio conceptual. AIQUE. Buenos Aires-Madrid, 2003.

Ruiz Ángel. Historia y filosofía de las matemáticas

Solórzano, M.J. Enseñar matemáticas desde los aspectos culturales un reto didáctico, Barranquilla, Ed. Coruniamericana, Vol. I, 2012. 53-63.

Torres, M., (1993), los achaques de la educación, Quito, Ecuador: Libresa.

Vasco, C.E. didáctica de las matemáticas. Artículos selectos. Universidad pedagógica nacional. Bogotá, Colombia 2006.

http://datateca.unad.edu.co/contenidos/551115/Modulo_en_Linea/leccin_45_el_analisis_didctico_como_procedimiento_para_organizar_la_enseanza6.html

<http://www.galileo.edu/facom/noticias/aprender-desaprender-y-reaprender/>

http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

<http://hadoc.azc.uam.mx/evaluacion/constructivista.htm>