PRÁCTICA PEDAGÓGICA: LA INCIDENCIA DE LA LEY DE LOS SIGNOS EN LA SUMA DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN GRADO SÉPTIMO

ISABEL CRISTINA GUZMÁN LÓPEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2018

PRÁCTICA PEDAGÓGICA: LA INCIDENCIA DE LA LEY DE LOS SIGNOS EN LA SUMA DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN GRADO SÉPTIMO

ISABEL CRISTINA GUZMÁN LÓPEZ

Director

Mg: ERUIN ALONSO SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2018

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo de
Grado fue aprobado
Por los asesores y
Respectivo evaluador

Vo. Bo. Wilmer Libardo Molina Yepez
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Eruin Alonso Sánchez
Director

Vo. Bo. Yilton Ovirne Riascos Forero
Evaluador

Agradecimientos

A Dios por darme la vida, la fortaleza, el entendimiento y la sabiduría para culminar mi vocación como futura profesional.

A mi familia en especial a mis padres Liliana López y Francisco José Guzmán Valencia por ser mis más grandes pilares. Gracias a sus oraciones, esfuerzos y buenos principios que me enseñaron soy la persona de hoy en día. A mis hermanas que con su alegría y compañía colaboraron para que nunca abandonara mi vocación.

A los estudiantes de grado séptimo A de la Institución Educativa Los Comuneros, quienes brindaron su tiempo y su colaboración para realizar este trabajo en el aula y a la Institución por la autorización para llevar a cabo mi práctica como docente.

A mis profesores Eruin Alonso Sánchez director y profesor de la práctica pedagógica quien me acompañó en todo este proceso y Yilton Ovirne Riascos Forero, por su tiempo y dedicación. Además, por su valiosa formación en el ámbito personal, académico y profesional.

A todas las personas que en cierto modo fueron ejemplo a seguir y motivación para culminar mis estudios. Por sus consejos, compañía y toma de decisiones.

TABLA DE CONTENIDO

FIGURAS

TABLAS

INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta, la resolución del MEN No. 6966, de agosto de 2010, en su artículo seis; la práctica pedagógica es un espacio curricular que permite al estudiante del programa de Licenciatura en Matemática conocer el contexto de su futuro desempeño y enfrentarse a las realidades básicas del ejercicio para fortalecer el desarrollo de sus competencias profesionales como docente en Matemáticas, desde una perspectiva crítica, reflexiva y pedagógica en Instituciones de Educación Formal o no Formal. De tal manera que con esta práctica se pueda facilitar la cualificación profesional del estudiante como educador mediante una experiencia directa, continua y progresiva del ejercicio docente.

En este documento se pretende dar a conocer el trabajo realizado durante la práctica pedagógica en la Institución Educativa Los Comuneros en grado séptimo A. En la primera sección, se encuentran las reflexiones pedagógicas cuyo objetivo fue describir el entorno y la experiencia adquirida por el practicante en el aula. Se especifican aspectos como relación estudiante – practicante, estudiante – estudiante, titular – practicante, modelo pedagógico, el comportamiento de los estudiantes con respecto a la disciplina, la elaboración de actividades para lograr los aprendizajes significativos, la evaluación y contenidos a desarrollar.

En la segunda sección, se presenta una introducción a la investigación en Educación Matemática cuyo objetivo es describir la manera como incide la ley de los signos en la suma de números enteros que realizan los estudiantes de grado séptimo. Aquí, se muestra el campo de la Educación matemática; los antecedentes acerca de distintas investigaciones que evidencian problemas en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros, los referentes teóricos presentando la teoría formal de los números enteros desde lo matemático y la Educación Matemática. Asimismo, se explica la metodología utilizada para la enseñanza de los temas desarrollados y las actividades realizadas en el aula, el análisis de resultados de la práctica pedagógica enfocados a la investigación y finalmente las conclusiones.

1. COMPONENTE PEDAGÓGICA

1.1 REFLEXIONES PEDAGÓGICAS

Al realizar la práctica pedagógica III en La Institución Educativa los Comuneros en el grado séptimo A se observaron diferentes relaciones que a continuación se describirán:

1.1.1 RELACIÓN ESTUDIANTE – PRACTICANTE

Teniendo el material listo para ser implementado por primera vez en el aula de clase, en la fase de planificación y organización del contenido matemático donde se estudió el diseño, elección o modificación de los problemas que se proponen a los alumnos, se encontró la necesidad planear y desarrollar procesos de enseñanza, fundamentados en secuencias didácticas, que permitieran lograr fijar la mirada de los estudiantes en lo divertido que pueden llegar a ser las matemáticas y con ello alcanzar aprendizajes significativos apoyados en trabajos de experimentación relacionados con situaciones de la vida diaria, para así lograr deducciones por parte de los estudiantes que más adelante serán conocimientos que ellos mismos construirán con la ayuda del practicante.

El primer acercamiento que se dio en el aula, fue la presentación del practicante y de los estudiantes con el fin de establecer una relación inicial estudiante – practicante, que más adelante se fue fortaleciendo. Para tal fin fue importante, entre otros factores, el reconocimiento de cada uno de ellos a través del llamado de lista. Seguidamente, se dio un pequeño planteamiento sobre la metodología a trabajar y la forma de evaluar el curso. Con esta actividad se pudo percibir qué tan activos y respetuosos son en general y particularmente los estudiantes con la llegada de un nuevo educador.

En el desarrollo de la práctica se pudo apreciar que a pesar de que los alumnos viven en un entorno económico y sociocultural complicado, la mayoría de ellos fueron cordiales en el trato con el practicante en el momento del desarrollo de las actividades planteadas, se sentían en la capacidad o confianza para preguntar cuando no entendían ciertas actividades y conceptos o más aun, cuando sentían que estaban haciendo algunos procedimientos inadecuados. Se puede afirmar que este tipo de comportamiento se dio por los acuerdos para la convivencia planteados en el manual de convivencia "Educación para nutrir la vida" por la Institución en el proyecto de formación en valores y derechos humanos donde se fortalece la *"construcción del sujeto autónomo". p 36*

Además, se pudo observar que, dependiendo de la actividad, ya sea analítica o práctica[1] y del tema a desarrollar en el aula, se encontró que, entre los 30 estudiantes, seis de ellos fueron los más participativos en ambas actividades y el resto se destacó en las actividades prácticas, tales como aquellas relacionadas con trabajos manuales. También, se pudo observar en varias actividades analíticas que los estudiantes sentían confianza para participar en la salida al tablero en clase y realizar aportes sobre lo que pensaban de ciertos conceptos antes de darles la definición formal, fueron participativos en la solución de talleres y divulgación de sus inquietudes acerca de ciertas soluciones.

La relación estudiante – practicante se fortaleció en la medida del desarrollo de las secuencias didácticas logrando una participación activa de los alumnos con el tema a desarrollar y el acompañamiento del practicante.

1.1.2 RELACIÓN ESTUDIANTE – ESTUDIANTE

En el desarrollo de las actividades realizadas para la práctica, se observaron ciertos comportamientos entre los estudiantes. Algunos de estos fueron:

[1] Se entiende como actividad analítica las que están relacionadas a la transmisión y aprendizaje de conceptos específicos – el saber y actividades prácticas, aquellas que están relacionadas con las manualidades – el hacer.

En actividades analíticas los estudiantes en general adoptaron un buen comportamiento, respondiendo respetuosamente a lo planteado en la metodología de trabajo que consistía en prestar atención a la explicación por parte del docente, tomar apuntes de los temas vistos, desarrollar actividades prácticas y taller en clase, participar activamente respetando la palabra de los compañeros y presentar la evaluaciones escritas sin tener llamados de atención por acciones incorrectas. Pero en general un grupo de cinco alumnas hicieron indisciplina en el desarrollo de la práctica prestando interés a eventos distintos de las actividades planteadas como hacer cartas, dibujos, maquillarse en clase, no respetar la palabra de los compañeros cuando participaban en clase generando un mal ambiente escolar por su forma de actuar y responder a los llamados de atención.

En las actividades prácticas se logró la atención de los estudiantes, esto se pudo vivenciar porque para ellos es más llamativo la realización de trabajos manuales que los trabajos analíticos y según E.P.N.V[2]. una de las razones por lo cual sucede es debido al entorno sociocultural que pertenecen los estudiantes que es la comuna seis de Popayán a la cual hacen parte barrios populares como los Comuneros (Ver anexo 1) donde se implementa más el hacer que el saber . Sin embargo, de nuevo hubo indisciplina en particular por parte de las cinco estudiantes antes mencionadas, esto debido a que se sentían libres de poder hacer y expresar lo que querían y los materiales para realizar dichas actividades se facilitaban para que hicieran desorden un ejemplo en particular fue lanzarse las semillas de lentejas entre ellos de la ruleta (Ver anexo 7) generando de nuevo un mal ambiente escolar siendo agresivos e irrespetuosos en su trato verbal, esto se debe también a su entorno sociocultural ya que muchos de ellos hacen parte de poblaciones en situación de desplazamiento por la violencia, lo que llevó al profesor Eruin Alonso Sánchez docente titular de la asignatura de matemáticas en el grado séptimo en la Institución educativa a hacer un acompañamiento constante al practicante. Se puede concluir que todas las actividades planteadas por el practicante los estudiantes siempre las terminaban ya fueran analíticas o prácticas en casa o en la próxima clase.

[2] Institución educativa los comuneros, proyecto educativo institucional : Educación para nutrir la vida: Acuerdos para la convivencia.

1.1.3 RELACIÓN TITULAR – PRACTICANTE

Una parte a favor en la práctica fue que el profesor Eruin Alonso Sánchez pudo hacer un acompañamiento en la mayoría de las actividades desarrolladas en la institución puesto que además de ser el director de la práctica, él era el profesor de matemáticas del grupo, lo cual ayudó a mantener la disciplina y la atención de los estudiantes. Por otra parte, para la realización de las actividades que se efectuaron en el grado séptimo de la Institución Los Comuneros se tuvo en cuenta las sugerencias que el docente del grupo propuso, entre ellas, la escogencia del tema a trabajar basado en el plan de estudios de la Institución; la recopilación sobre los temas vistos en el anterior año, en este caso, los números naturales mediante un taller diagnóstico en el que se enunciaron definiciones y seguidamente se plantearon los ejercicios a desarrollar, con el fin de saber cuáles son las nociones que manejan los estudiantes sobre este conjunto y las dificultades que presentaban con mayor frecuencia en particular con las operaciones básicas, puesto que la práctica se realizó comenzando año y era necesario hacer una recopilación sobre las operaciones de este conjunto para poder seguir con el tema "El conjunto de los números enteros ". También se tuvo en cuenta, que a los estudiantes les gustan las actividades relacionadas con la manualidad información obtenida por el diagnostico que se realizó antes de escoger la Institución Educativa los Comuneros y que se encuentra planteado en el E.P.N.V pág. 35. Por tal razón, tres de las actividades estaban diseñadas con este fin, permitiendo a los alumnos realizar su instrumento de trabajo y a la vez de aprendizaje haciéndoles sentir agrado con lo que están haciendo y poder obtener buenos resultados en la introducción de nuevos temas.

Cabe destacar, que todas las actividades realizadas para la práctica fueron revisadas y corregidas por el docente Eruin Alonso Sánchez lo cual brindó seguridad a la practicante en el desarrollo de éstas. Además, como el profesor hizo un acompañamiento en la mayoría de las ocasiones, él ayudaba a aclarar dudas a los estudiantes en el desarrollo de las actividades que la practicante hizo.

1.2 LA DISCIPLINA ESCOLAR

Según el texto EPNV "La disciplina es sinónimo de responsabilidad" para la Institución Educativa Los Comuneros, al mismo tiempo es un acto de autonomía ejercido por el individuo capaz de tomar sus propias decisiones, sin que se le esté controlando desde su exterior. p. 52

En el plan de convivencia: "Educación para nutrir la vida", realizado por la Institución Educativa Los Comuneros, la disciplina está considerada como el comportamiento o forma de actuar dada por principios y valores, que a su vez son determinados culturalmente. Uno de los principios de la Institución es "La educación como una apuesta ética" la cual genera actitudes como la constancia y la tenacidad, comportamientos como el cumplimiento, puntualidad, orden, la organización, el espíritu y el rigor científico.

Lo anterior justifica ciertas actitudes y comportamientos de los estudiantes en cuanto a la disciplina. Un ejemplo de ello fue la presentación del curso, donde los estudiantes fueron muy respetuosos cuando se dio a conocer cómo se iba a trabajar y a evaluar las actividades de la práctica pedagógica. Además, en el desarrollo de las actividades estuvieron disciplinados y atentos con toda la disposición de aprender destacando que en la mayoría de veces se interesaron por entender las actividades analíticas y prácticas.

Todos los alumnos pusieron atención a la explicación de las actividades relacionadas con las manualidades, realizaron su instrumento de trabajo de forma activa y responsable sin necesidad de que el practicante hiciera un seguimiento permanente. Asimismo, algunos de ellos fueron muy participativos en las actividades analíticas saliendo al tablero a hacer ejercicios. En cuanto a la puntualidad y orden, la mayoría de los estudiantes fueron responsables pues no había necesidad de estarles llamando la atención por no cumplir con lo establecido por la Institución.

1.3 MODELO PEDAGÓGICO

Según Flórez, (2001) La educación está relacionada directamente con la cultura, los valores, las creencias y distintos modos de pensar de una sociedad, por lo tanto, nacen los modelos pedagógicos como respuesta a la necesidad de formar a los hombres en sus sentimientos, convicciones, valores y pensamientos. Así pues, la pedagogía nos presenta una serie de modelos de enseñanza que nos ayudan a educar y responder a ciertas necesidades anteriormente mencionadas ya que un modelo es una herramienta conceptual para entender mejor un evento; es la representación del conjunto de relaciones que describen un fenómeno.

Flórez, (2001) señala que un modelo pedagógico es la representación de las relaciones que predominan en el acto de enseñar, es también un paradigma que puede coexistir con otros y que sirve para organizar la búsqueda de nuevos conocimientos en el campo de la pedagogía.

Esta teoría cognitiva de Piaget[3] esboza que el conocimiento no es una copia de la realidad sino una elaboración del ser humano utilizando los esquemas o conocimientos previos que ya posee y de actividades externas o internas que el individuo realiza de un tema en particular donde el docente desde el punto de vista del constructivismo, pasa de ser un transmisor del conocimiento a ser un mediador del mismo, facilitando el aprendizaje por descubrimiento del individuo.

Según el punto de vista constructivista, la concepción del alumno cambia de ser un simple receptor o reproductor de saberes culturales o sólo ser un acumulador de aprendizajes específicos, a ser una persona con una identidad personal y autónomo con un proceso claro y bien demarcado de individualización y socialización en un contexto cultural determinado.

[3] Jean Piaget - Wikipedia, la enciclopedia libre. Epistemólogo, psicólogo y biólogo suizo famoso por sus aportes al estudio de la infancia y por su teoría constructivista del desarrollo de la inteligencia.

Esta nueva idea de alumno implica al mismo el deber de aprender a aprender, al docente le corresponde enseñar a pensar aplicando didácticas por descubrimiento y actuar sobre contenidos significativos y contextuados.

Además, se podría decir que el constructivismo explica que el conocimiento no se da en el ser humano de manera espontánea producto del ambiente o disposiciones internas, sino que es una elaboración interna que se va produciendo día tras día como resultado de su capacidad y evolución cognitiva, su relación con el entorno en el aspecto social y afectivo.

Todo lo anterior permitió que al estudiar la serie de factores de la Institución Educativa los Comuneros como el entorno social, manejo del lenguaje, la cultura, el desarrollo personal de los estudiantes y teniendo en cuenta este modelo pedagógico fundamentado en los planteamientos de Jean Piaget se realizaran secuencias didácticas[4] con un enfoque constructivista para lograr que los alumnos aprendieran a pensar y se autoenriquecieran con estructuras, esquemas y operaciones mentales internas que les permitieran pensar, resolver y decidir con éxito situaciones académicas y vivenciales puesto que como afirma Piaget, (1979) la actividad del sujeto en la construcción, el conocimiento es fundamental.

Asimismo, este modelo permitió que la practicante ejerciera el rol de moderador, coordinador, facilitador, mediador y ser un participante más en las secuencias didácticas, ayudando a que los alumnos y alumnas construyeran el conocimiento, pues el objetivo de la practicante como educadora fue, además de enseñar, ser entendida.

En este orden de ideas Takahashi, (1991) plantea que:

> "*El oficio del maestro es enseñar. Enseñar es señalar, mostrar, indicar la ruta. Hay que dar a los alumnos la oportunidad de transitar su propio camino y encontrar las cosas por sí mismos. Cada vez que entregamos a un alumno un conocimiento ya elaborado y decantado, le estamos quitando la oportunidad de descubrirlo. Lo importante es enseñar a aprender" p.3*

[4] El concepto de secuencia didáctica será ampliado en la sección dedicada al referente teórico.

En esta perspectiva un buen maestro es el que da al alumno la oportunidad de transitar su propio camino y encontrar las cosas por sí mismo, ya que las ideas deben nacer en la mente del alumno por medio de preguntas y respuestas intentando construir el conocimiento, la labor del maestro es ayudar a encontrar la ruta conveniente.

Como ya se ha dicho, en la teoría de Piaget el alumno no es un ente pasivo que se limita a recibir conocimientos, sino que estos en todo caso, necesitan ser construidos activamente por el propio alumno para poder realmente ser comprendidos. En caso contrario, el conocimiento se convierte únicamente en memorización literal superficial, desvinculada de las estructuras con las que el alumno interpreta el medio que le rodea.

Como comenta Duckworth, (1981)

> *"No es la presión de los hechos lo que produce la comprensión. Es, al contrario, el esfuerzo del propio niño por darle algún sentido a los hechos" p. 167*

De ahí que, al tomar la posición Piagetiana se aseguró que las secuencias didácticas elaboradas tuviesen un entorno rico en estímulos que dé las posibilidades para que el alumno, trabajando por sí mismo, a su propio ritmo, sea capaz de construir nuevas estructuras cognitivas.

1.4 LAS TEORÍAS DE APRENDIZAJE

Según el MEN, (2006) la visión sobre las matemáticas escolares propuesta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se prepara para la transición hacia el dominio de las competencias al incorporar una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático, en la cual se utilizan los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas eficaces mediante las cuales se lleva a la práctica determinados tipos de pensamiento lógico y matemático dentro y fuera de la institución educativa. También pueden reinterpretarse como potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel donde la significatividad del aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido, utilidad y eficacia. La competencia es entendida como el conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras, relacionadas entre sí. Esta noción describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase. Por eso se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo. p. 48 – 49

Para Ausubel, (1983) el aprendizaje tiene que ser lo más significativo posible; es decir, la persona que aprende tiene que atribuir un sentido, significado o importancia relevante a los contenidos nuevos. Esto depende, de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento.

Por tanto, los aprendizajes vistos desde el modelo cognitivo deben ser significativos y requieren de la reflexión, comprensión y construcción de sentido.

Según Flórez, (2001).

> *"La mente no es una estructura plana sobre la cual se imprimen las representaciones de las cosas, la mente no es un espejo fiel; es una estructura multidimensinal activa y transformadora que produce ideas y teorías a partir de su anterior experiencia y de su acción sobre ellas" p. 47*

Al respecto Sarramona, (2008) afirma que el hombre construye modelos de su mundo y estos no son construcciones vacías, sino significativas. El modelo constructivista se caracteriza por enfocarse en una enseñanza de aprendizajes significativos conceptualizando el aprendizaje en una actividad significativa para la persona que aprende de tal forma que se pueda colocar en contacto la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el poseído por el alumno.

El modelo pedagógico constructivista se caracteriza por propender por un aprendizaje significativo. Entre los aportes realizados a tal modelo se encuentra Ausubel[5], aportando principalmente la relevancia para la adquisición del conocimiento de los aprendizajes previos o como él los llama ideas ancla, además de la importancia de la actitud del alumno, este debe estar dispuesto a lograr un aprendizaje significativo, trabaja en el desarrollo de habilidades de pensamiento y solución de problemas, el alumno adquiere el conocimiento por medio de la evolución de conceptos, volviéndolos cada vez más finos y depurados.

El conocimiento desde el punto de vista de la teoría significativa es no literal, esto quiere decir, que aprender no es recitar, es saber explicar o aplicar un concepto a través de un lenguaje adecuado, el profesor elabora materiales potencialmente significativos para lograr puentes cognitivos entre los conocimientos previos del alumno y el conocimiento nuevo, es promotor de habilidades de pensamiento y aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo anterior, se decidió la elaboración de secuencias didácticas como mediadoras de aprendizajes significativos y la realización de ciertas actividades con definiciones hechas a través de la experiencia y conceptos ya estudiados con el fin de hacer más comprensible la enseñanza y aprendizaje de los temas a trabajar con los estudiantes.

Lo que se planeó con la realización de secuencias didácticas para la introducción de los temas formales en la práctica, fue que los estudiantes no se convirtieran en receptores pasivos de información, sino que desde su interior leyeran y reinterpretaran lo recibido con sus propios esquemas porque entender es pensar y pensar es construir sentido.

Seguidamente, en ciertas actividades analíticas se desarrolló un aprendizaje por descubrimiento en particular en la resolución de problemas de suma y resta de enteros en el que no había forma única de llegar a la respuesta, pues antes de plantear a los estudiantes soluciones, se exploró con ellos diferentes maneras de enfrentar el mismo problema; pues no es pertinente enseñar cosas acabadas, sino los métodos para descubrirlas.

---

[5] Psicólogo estadounidense, nacido en el año de 1918, hijo de una familia judía emigrante de Europa Central. Estudio en la Universidad de Nueva York. http://slideplayer.es/slide/5547615/

Para la realización de estas secuencias didácticas como mediadoras de aprendizajes significativos se estudió:

- El interés de los alumnos y alumnas en la elaboración de actividades relacionadas con las manualidades.
- Conocer las necesidades de cada uno de ellos debido a su entorno socio-cultural.
- La comprensión porque no se pretenden enseñanzas memorísticas o mecánicas.
- Contextualizar las actividades.

Por lo anterior, las teorías de aprendizaje promueven la participación activa del estudiante, favoreciendo sus conocimientos previos.

1.5 LA EVALUACIÓN

Según el Ministerio de Educación Nacional la evaluación es esencial para la calidad educativa, ya que arroja distintas clases de información que permiten tomar decisiones mejor informadas y entender procesos de enseñanza y aprendizaje que no son tan claros sin su aplicación. El uso pedagógico de los resultados orienta el trabajo de las instituciones, los docentes, los estudiantes y los padres y madres de familia. De ahí la importancia de verla como una herramienta para potenciar los aprendizajes y los procesos que ocurren en el aula, dentro del ciclo de calidad que busca fortalecer las instituciones educativas y conjuga estándares básicos de competencia, procesos de evaluación y diseño e implementación de planes de mejoramiento institucional.

De ahí que, la evaluación tiene una función pedagógica, pues permite reconocer cambios surgidos durante los procesos de enseñanza y aprendizaje e identificar el grado de apropiación de conceptos y procedimientos, para proponer revisiones y reelaboraciones.

Por consiguiente, existen distintas formar de evaluación como la tradicional que se utiliza al finalizar una actividad para detectar si el aprendizaje se produjo y decidir si el alumno aprueba la materia o no. Ésta evalúa el aprendizaje del alumno de manera cualitativa o cuantitativa. También, se tiene la evaluación formativa que, según Flórez, (2001)

> "*consiste en obtener información acerca de los descubrimientos del alumno y su grado de apropiación de la estructura básica de la ciencia al final del proceso" p. 44*

Teniendo en cuenta lo anterior, estas dos evaluaciones fueron desarrolladas en la práctica pedagógica. La tradicional se hizo uso en el momento de tener que entregar una nota final cuantitativa para la aprobación del primer periodo de los estudiantes de grado séptimo A, evaluando actividades en clase y exámenes de finalización de tema.

Cabe destacar que la evaluación realizada en la práctica no sólo fue un instrumento cuantitativo en el sentido que no se hizo uso del examen como única forma de regular conceptos y definiciones, sino también cualitativo, donde se evaluó la forma de trabajo en grupo, la construcción del material didáctico, el rol de cada estudiante teniendo en cuenta los descubrimientos del alumno y su grado de apropiación a la hora de utilizar estrategias para la solución de situaciones. Esta evaluación cualitativa no se centró en los resultados finales sino específicamente se evidencio en las actividades grupales en las que trabajaron secuencias didácticas, pues permitió que el practicante estuviera muy atento a las participaciones de sus alumnos y de la calidad de sus intervenciones puesto que educar va más allá de asignar una nota de acuerdo al conocimiento que el alumno tenga de cierto tema. De ahí que, en estas actividades que se aplicaron secuencias didácticas la evaluación corresponde a la actitud y comportamiento de los alumnos. Así, la evaluación fue integral se tuvo presente el saber, el ser y el hacer de cada estudiante.

En lo que concierne a la evaluación de los temas vistos en la práctica, el comportamiento de los estudiantes fue sorprendente puesto que la mayoría de ellos hicieron un buen trabajo individual, cada uno se concentraba en su examen y no sentían la necesidad de copiarse.

1.6 EL CURRÍCULO

Los educadores y las instituciones se apoyan en documentos oficiales como Estándares básicos de Competencias en Matemáticas y Lineamientos Curriculares (MEN, 2006 – 1998) para la realización de los contenidos y distribución de actividades de cada grado.

En MEN (2006), páginas del 80 hasta 89, se desarrolla una distribución en cinco conjuntos de grados primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo para dar mayor flexibilidad a las actividades dentro del tiempo escolar y apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo que estimulen a los estudiantes a superar, a lo largo de dichos grados los niveles de competencia respectiva de ese conjunto de grados. Es así que el estudiante cuando avanza significativamente en los grados de estudio va superando niveles de complejidad creciendo en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo de procesos educativos.

Para Llinares, (2000) ser profesor de Matemáticas debería ser entendido desde la perspectiva de participar en una práctica social: enseñar matemáticas y la práctica del profesor se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas (diseño de problemas, planificación y gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje) que definen la enseñanza de las matemáticas que corresponden con el objetivo curricular de cada sistema educativo, en este sentido la clase de matemáticas no se puede percibir aislada del currículo y de la institución en la que se desarrolla.

En términos generales, para Flórez, (2001)

> "*un currículo es la manera de aplicar la teoría pedagógica en el aula a la enseñanza real. Un currículo es la medición entre la teoría y la realidad de la enseñanza, es el plan de acción que desarrolla el profesor con sus alumnos en el aula." p. 82*

Se debe entender que, según Lineamientos Curriculares, (MEN, 1998) la organización curricular de cada institución , en coherencia con su PEI[6] , busca el desarrollo de un trabajo integrado en los distintos pensamientos, lo cual se logra con el trabajo que se realice en el aula aprovechando las posibilidades de relacionar los estándares y los tipos de pensamiento matemático asociados.

De ahí que, para la planificación, organización de contenidos matemáticos, secuencias didácticas a desarrollar y la evaluación en la práctica III, se estudió la malla curricular de la Institución Educativa Los Comuneros en el respectivo grado. Asimismo, se estudió el pensamiento matemático entendido desde Piaget, como la forma de razonar el cual está directamente relacionado con el número y el espacio dando lugar a la aritmética y la geometría puesto que el tema a enseñar era el sistema de los números enteros.

El pensamiento matemático estipulado en Lineamientos Curriculares, (MEN, 1998) está dividido en cinco tipos de pensamiento entre los que encontramos el pensamiento numérico y sus sistemas numéricos, ellos simultáneamente desarrollan pensamiento lógico, que desde Piaget es entendido como el que actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones.

Por tanto, la creación de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición, la recomposición y la comprensión de las propiedades numéricas. Cuando se usa un algoritmo ya sea utilizando papel y lápiz o calculadora, el pensamiento numérico es importante, entre otras formas, cuando se reflexiona sobre las respuestas.

Otro aspecto valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables.

[6] Proyecto Educativo Institucional

Según Lineamientos Curriculares, (MEN, 1998)

> *"El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático*." *p 26*

En particular, es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos.

Según Mcintosh, (1992)[7] el pensamiento numérico es la comprensión que tiene una persona sobre el número, su representación, las relaciones que existen entre ellos y las operaciones que con ellos se efectúan en cada uno de los sistemas numéricos, se caracteriza por irse adquiriendo gradualmente y va evolucionando en la medida en que los niños tienen la oportunidad de pensar en los números y usarlos en contextos significativos.

En Estándares Básicos de Competencia Matemáticas (MEN, 2006) el pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan.

Con esto se logró que en la práctica III después de analizar el currículo de la institución en grado séptimo, el pensamiento numérico se desarrollara a través de situaciones y conceptos que condujeron a la comprensión de los diversos significados de los números enteros, sus operaciones, propiedades y las relaciones entre operaciones. Por su parte, los estudiantes cuando aplicaban propiedades aritméticas para inventar procedimientos de cálculo utilizaban conexiones entre operaciones para pensar y resolver problemas, especialmente la

[7] Tomado de Lineamientos Curriculares, (MEN, 1998). p. 26

relación inversa, manipulando los números enteros y sus operaciones en la formulación y resolución de problemas, desarrollan pensamiento numérico.

Inicialmente la práctica pedagógica se realizó en el grado séptimo A en la Institución Educativa Los Comuneros, ya que en este curso según el documento de Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se estudia el concepto número entero en el primer periodo escolar coincidiendo con el tema de elección a realizar en la práctica III.

El tema preparado los números enteros, y los subtemas que se trabajaron fueron los siguientes:

1. Construcción del conjunto de los números enteros
2. Orden de los números enteros
3. Valor absoluto de los números enteros
4. Operaciones entre los números enteros.

A partir del subtema cuatro se dio una introducción investigativa a esta práctica.

Con base en los Estándares Básicos de Competencia Matemáticas (MEN, 2006) y lo considerado para enseñar en el grado séptimo sobre los números enteros con relación al pensamiento numérico y sistemas de numeración los temas abordados desde la práctica fueron:

- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.

2. COMPONENTE INVESTIGATIVO

2.1 INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Para realizar la práctica pedagógica III y hacer un estudio adecuado acerca de los resultados obtenidos, se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos.

2.1.1 EL CAMPO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Según Estándares Básicos de Competencia Matemáticas (MEN, 2006) desde años atrás la matemática ha sido considerada como parte indispensable de la formación intelectual de toda persona puesto que le permite obtener una mejor compresión del mundo que lo rodea. Por tal razón la matemática es un área del conocimiento de la Educación Básica y Media orientada a la enseñanza y aprendizaje de la misma que contribuye a la formación integral del estudiante y desarrollar su potencialidad en los niveles interpretativo, argumentativo y propositivo; de tal forma que esté en capacidad de resolver problemas de la vida cotidiana a través de actividades constructivas que le permita interactuar con su entorno para obtener un buen aprendizaje de las matemáticas.

Resulta fundamental que estas actividades de aprendizaje despierten en los estudiantes curiosidad y que estén relacionadas con experiencias de su vida habitual para generar motivación y una actitud positiva hacia las matemáticas y hacia ellos mismos, puesto que los estudiantes también aprenden investigando en su entorno físico y cultural mediante la exploración, el descubrimiento, la abstracción, concentración y construcción.

Por lo anterior, la formación matemática desde hace muchos años es una de las grandes prioridades en todo sistema educativo.

Como señala Mogens, (1998)

> "*el estudio de la matemática comenzó porque era útil, continúa porque sigue siendo útil, y es valioso para el mundo por la utilidad de sus resultados" p.8*

Hoy en día la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un punto central de la investigación y de la teoría de la educación matemática.

Según Kilpatrick, (1998)

> *"se ha desarrollado debido a que matemáticos y educadores han enfocado su atención hacia qué matemáticas se enseñan y se aprenden en la escuela y cómo se llevan a cabo estos procesos; también se han interesado en el qué y en el cómo de las matemáticas que deberían enseñarse y aprenderse en la escuela" p. 1*

De ahí que, una de las preocupaciones por parte de los educadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es buscar la mejor forma por un lado, de mostrar a los estudiantes los objetos matemáticos y conceptos, y por otro, diseñar actividades que permitan la construcción de los mismos para contribuir de esta forma al desarrollo de sus habilidades y conocimientos matemáticos.

En este sentido para Kilpatrick, (1998)

> *"la investigación actual en educación matemática cubre una gran variedad de temas, desde cómo el niño aprende a contar, hasta cómo el adolescente aprende a integrar y, desde los efectos de utilizar calculadoras, hasta la estructura de los cursos en general y de las clases en particular" p. 6*

Así que, la labor del profesor debe estar orientada bajo un buen modelo curricular donde los objetivos y los métodos de la enseñanza de las matemáticas estén adaptadas a las nuevas demandas de la sociedad como el uso de las TIC[8].

[8] Tecnologías de la información y las comunicaciones

Con respecto a esto Bonilla, (1989) señala lo siguiente:

> *"Lo primero que quizás debiera decirse acerca de la Educación Matemática es que ésta es una disciplina nueva. Nuestro objetivo aquí es analizar la constitución de la Educación Matemática como una disciplina en sí misma y como resultado de ello obtener un perfil de los educadores en las matemáticas. No hay un punto de vista único, sino diversos intentos por explicar la naturaleza de la disciplina. Cada uno tiene un enfoque distinto y pone énfasis sobre un aspecto particular" p. 2*

En este sentido existen numerosos investigadores que han elaborado distintos métodos para poder determinar la naturaleza de la Educación Matemática. Entre los distintos métodos se encuentra el de Higginson (1980)[9] reconocido como el modelo del tetraedro quien considera a la matemática, psicología, filosofía y después de la década de los 70, la sociología como las cuatro disciplinas fundamentales de la Educación Matemática, estas distintas dimensiones asumen las preguntas básicas que se plantean en nuestro campo:

Qué enseñar (matemáticas)

Por qué (filosofía)

A quién y donde (sociología)

Cuándo y cómo (psicología)

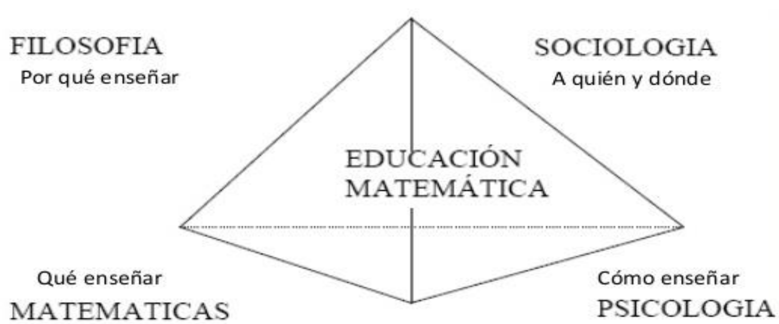


Figura 1: Tetraedro de Higginson (1980) para la Educación Matemática

[9] Tomado de Bonilla, (1989). La Educación Matemática: una reflexión sobre su naturaleza y su metodología

En 1985 Steiner plantea que La Educación Matemática admite una interpretación global dialéctica como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica puesto que esta disciplina trabaja el complejo fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno.

Transcurrido 5 años Steiner diseña un modelo en donde relaciona la Didáctica de la Matemática con otras disciplinas y sistemas.

Estas disciplinas son:

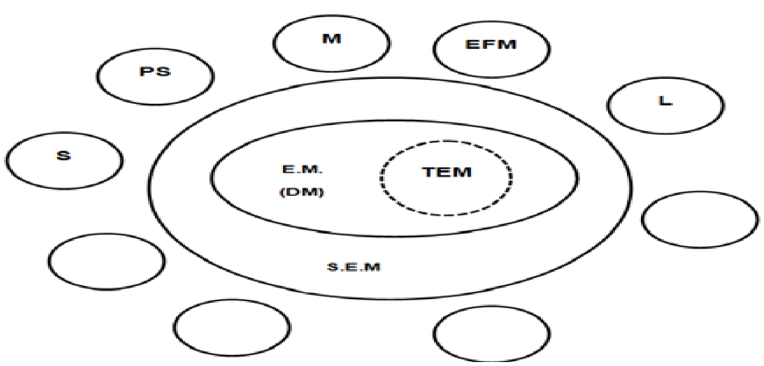
Matemáticas (M)

Epistemología y filosofía de las matemáticas (EFM) - Historia de las matemáticas (HM)

Psicología (PS)

Sociología (SO)

Pedagogía (PE), etc.



S.E.M: Sistema de enseñanza de las matemáticas (Formación de profesores, desarrollo curricular, materiales didácticos, evaluación, etc.)
E.M: Educación matemática (o Didáctica de las Matemáticas)
T.E.M: Teoría de la Educación Matemática
M: Matemáticas
E.F.M: Epistemología y Filosofía de las matemáticas
PS: Psicología
L: Lingüística
Etc.

Figura 2: Modelo de Steiner (1990)

Entre los sistemas tenemos el Sistema de Enseñanza de la Matemática (SEM) en donde se identifican subsistemas componentes como:

La propia clase de matemáticas (CM)

La formación de profesores (FP)

Desarrollo del currículo (DC)

La propia clase de matemáticas (CM)

La propia Educación Matemática (EM), como un subsistema que forma parte del SEM.

De ahí que, La Educación Matemática es una disciplina que permite analizar, comprender y desarrollar todo tipo de modelo que se le ha asignado para lograr la excelencia que se desea obtener en el momento de la enseñanza y el aprendizaje en cuanto a las matemáticas puesto que estos conocimientos juegan un papel muy importante en la sociedad permitiendo grandes avances, entre ellos la adquisición tecnológica.

Joshua & Dupin, (1993) en su texto plantean, la enseñanza de las ciencias y las matemáticas se han constituido en un gran reto social, es por esto que se han creado distintas reformas para mejorar la calidad de la enseñanza, aunque todavía hace falta encarar algunas dificultades acerca de ésta ya que a través de sus modificaciones también han surgido decepciones.

Es aquí, donde la didáctica de las matemáticas se hace presente puesto que la didáctica de una disciplina es la encargada del estudio de los fenómenos de la enseñanza, el aprendizaje y transmisión, dentro y fuera del aula para llegar a un por qué de lo que está sucediendo y a partir de esto generar investigaciones.

Según Joshua y Dupin, (1993)

> *"Si se ha de arriesgar una definición, se podría decir que la didáctica de una disciplina es la ciencia que estudia, para un campo en particular (en este caso las ciencias y las matemáticas), los fenómenos de enseñanza, las*

condiciones de la transmisión de la "cultura" propia de una institución (específicamente aquí las instituciones científicas) y las condiciones de adquisición de conocimientos por una aprendiz" p.3

Desde Godino, (2012) la didáctica de las matemáticas es una ciencia que estudia las actividades didácticas que tiene como objetivo la enseñanza, necesita un proceso de investigación para poder entender todos los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que se encuentran en el aula y por tanto es primordial el planteamiento de un problema para estudiarlo. Como estos planteamientos no son tan fáciles de realizarlos aparecen autores como Freudental, (1981) y Wheerles, (1984) que han querido investigar acerca de la didáctica de la matemática apoyándose en marcos teóricos y teorías específicas para poder entender estos fenómenos didácticos como lo son los problemas epistemológicos y los paradigmas metodológicos.

De acuerdo a esto es necesario el uso de enfoques sistemáticos que no solo estudien los subsistemas de enseñanza y conceptuales sino también los subsistemas didácticos que relacionan al profesor, alumnos y el saber enseñado.

Según Joshua & Dupin, (1993)

"En la base de una enseñanza de tipo escolar, se ponen en relación tres elementos: el alumno, el profesor, un saber. Estos tienen historias y determinaciones particulares que los estructuran en una autonomía parcial de los unos en relación de los otros." p.5

Además, Chevellard considera necesario incluir el estudio de un subsistema denominado noosfera que son todas las investigaciones con una mirada desde afuera del aula y los distintos roles.

Brousseau, (1986) plantea que el objeto de estudio de la didáctica es la enseñanza, entre cuyos componentes están:

1. El saber matemático y la transposición didáctica: Establece que el saber se puede dar en diversas formas estas pueden ser en preguntas y respuestas, que está adaptada para la enseñanza y además permite al alumno como al profesor llegar al conocimiento científico. Pero este saber tiene sus desventajas, ya que no es muy apropiado darlo a conocer como tal, es por eso que para su enseñanza este saber se desglosa en un conocimiento más entendible enseñando conceptos no tan científicos para poderlos llevar al aula; a esto los epistemólogos la llaman transposición didáctica que es entendida como la forma o modificaciones de llevar todo el saber al alumno.
2. El trabajo del matemático: Consiste en tomar todo ese conocimiento y convertirlo en conocimiento científico y en el momento de darlo a conocer fija términos.
3. El trabajo del alumno: Se espera que el alumno actué, formule, pruebe, construya conceptos acerca del saber que ya conoce, que no solo aprenda definiciones y conceptos, sino que haga saber científico, en este caso, en las matemáticas.
4. El trabajo del profesor: Consiste en que todo el conocimiento que el profesor tiene, debe llevarlo de la mejor forma al aula ya que este conocimiento se va a convertir en el saber de un estudiante ofreciéndoles un contexto adecuado para cada definición.

Así, el conocimiento matemático, en tanto saber cultural y social, se construye en interacción con otros. Nadie construye sus saberes en forma aislada, sin interactuar con un otro, ya sean personas, libros, objetos, etc. La escuela, ámbito privilegiado para la construcción de los conocimientos, debe enfatizar las relaciones alumno – alumno, docente – alumno, a fin de permitir la construcción social del saber. Son las situaciones de aula, el espacio en el cual el alumno, interactuando con otros en la superación de obstáculos cognitivos, construye su conocimiento.

2.2 ANTECEDENTES

A lo largo de toda la enseñanza básica, los números han conformado un tema central en la educación matemática, el interés de la enseñanza se ha centrado en el aprendizaje significativo de tal forma que se logre en los estudiantes un avance en el conocimiento, construyendo, por sí mismos, su propio concepto o imagen del objeto matemático.

Según como lo reseñan las investigaciones y las experiencias de docentes, los números enteros representan una gran dificultad en la mayoría de los alumnos en aspectos relacionados con problemas de aprendizaje en la adición y sustracción ya que tienen la idea de que un problema de sumar es añadir, ganar. Mientras que restar significa lo contrario: quitar, perder; lo cual dificulta en algunos casos resolver operaciones con números enteros de igual y distinto signo.

Después de haber buscado artículos sobre los números enteros, según Gallardo (1996) existen distintos intereses por investigar este conjunto de números. Uno de ellos son las investigaciones desde una perspectiva teórica teniéndose en cuanta los trabajos de Piaget (1960), otros de carácter experimental como los trabajos de Vergnaud (1989) y otros relacionados con la enseñanza y aprendizaje como lo son nuestras prácticas pedagógicas donde se analizan dificultades con respecto al aprendizaje y obstáculos presentados por los alumnos.

Algunos de estos artículos son:

La tesis de maestría en matemática educativa: *Aprendizaje de los números enteros una "Experiencia significativa" en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música*, por la Licenciada Dania Yulisa Borjas Franco presentada en junio 2009 a la universidad pedagógica nacional Francisco Morazán con número de páginas 1 – 155.

Este trabajo está enfocado inicialmente en buscar, de una u otra forma, cómo hacer que el aprendizaje de las matemáticas sea mucho más agradable y, ante todo, más fácil para los estudiantes. Logrando en ellos la compresión de los conceptos teóricos, procedimientos, relaciones y operaciones con los números enteros (negativos y positivos), para así poder tener una buena base a la hora de llevarlos al campo práctico.

El objetivo general de este trabajo es explorar el conocimiento matemático relativo a la adición y sustracción de números enteros en alumnos de séptimo grado en educación secundaria. Se analizan las dificultades en la apropiación de los números enteros, en especial con la adición y sustracción de los mismos. Asimismo, la estructura conceptual relativa al conocimiento en la adicción y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos hasta identificar las dificultades operativas y sintácticas del contenido relativo al conocimiento didáctico matemático en la adición y sustracción del número entero.

El objeto matemático que se trató fue la adición y sustracción de números enteros. Se mostró la importancia que tiene el aprendizaje de los números enteros y las dificultades que tienen los alumnos para su aprendizaje.

Para lograr este proyecto se realizó una serie de actividades con objetivos específicos. La primera actividad se llamó números y fichas, con la cual se pretendía reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con igual signo utilizando como recurso el modelo operatorio de fichas. La segunda actividad se llamó cálculo con los números, el objeto de estudio fue reforzar el cálculo en la realización de operaciones de sumas de números enteros con igual signo sin utilizar el modelo operativo por fichas. La tercera actividad se llamó sumando con números enteros, la intención de esta actividad era reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de suma de números enteros con signos diferentes y la última actividad se llamó restando números enteros, cuyo objetivo central fue afianzar el cálculo mental y la seguridad en la realización de las operaciones de sustracción de números enteros por medio de una serie de problemas.

El modelo utilizado fue el constructivista, donde el estudiante va construyendo el conocimiento matemático, a partir de este modelo concreto, permitiendo descubrir las reglas de operación que rige a los números enteros y trasladando sus experiencias del modelo real al mundo de los símbolos escritos de la matemática.

Mediante la participación de los estudiantes, el mediador, la propuesta misma y el modelo de enseñanza se lograron dar vida al desarrollo de las actividades y la comprensión de los conceptos logrando alcanzar los objetivos propuestos.

La enseñanza de los números enteros es considerada por estudiantes de pregrado un tema de interés para abordar en su trabajo de grado. Un ejemplo, es la práctica pedagógica investigativa: *La enseñanza de los números enteros en grado séptimo*, por Mayer Alina Ipia, Mónica Caicedo Ortiz y Oscar Orlando Hoyos como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad del Cauca con un número de páginas de 1 – 88.

En su trabajo, se planteó un objetivo con respecto a la práctica pedagógica; que consistió en lograr que los estudiantes operen con números enteros, este objetivo fue medido mediante las notas obtenidas por los estudiantes en las diferentes situaciones diseñadas y se planteó un problema de investigación en Educación Matemática, el cual se constituyó a través de una pregunta: ¿Cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de grado séptimo al sumar o restar números enteros, después de la metodología enseñada para resolver este tipo de situaciones?

La presentación de este trabajo se realiza en tres capítulos; en el primer capítulo, se presentan los principales referentes teóricos utilizados, entre las que se encuentra la investigación en Didáctica de las Matemáticas y en ella el tipo de investigación de análisis de comportamiento. En el segundo capítulo se describen tanto el problema en la práctica pedagógica a desarrollar en el aula, como el problema de investigación en Didáctica de las Matemáticas; el primero se refiere a las dificultades que presentan los estudiantes al operar con números enteros, y el segundo se refiere a la descripción de las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver una situación en esta temática. En el tercer y último capítulo se dan a conocer el análisis de resultados de la práctica pedagógica y de la investigación, las conclusiones y recomendaciones.

La propuesta metodológica de enseñanza fue satisfactoria, ya que la mayoría de los estudiantes aprobó el tema desarrollado en la práctica. No obstante, en la investigación se encontraron estrategias de los estudiantes, muy poco elaborados, que sugieren atención por parte del docente.

De este trabajo cabe resaltar que para los practicantes hay que trabajar más en las operaciones de resta y polinomios aritméticos, en el conjunto de los números enteros, ya que en estos temas es donde se encuentra una mayor dificultad, particularmente en la utilización de la ley de los signos.

En la educación básica y media, la enseñanza y aprendizaje de los números enteros en el campo de la investigación educativa se convierte en un aspecto fundamental para estudiar los sistemas matemáticos de signos, los significados y sentidos que los estudiantes confieren al momento de abordarlos. Aurora Gallardo y Abraham Hernández en su proyecto investigativo*: Emergencia de los números enteros* afirma que cuando se comienza a enseñar matemáticas, quizás no se enfatiza la importancia del cero y de la negatividad, como elementos fundamentales en la construcción del concepto de número signado, siendo que éste es uno de los más difíciles de adquirir por los alumnos.

Es cierto que pueden venir a nuestra mente representaciones muy elementales de la vida corriente donde encuentran aplicación estos números, como: las temperaturas, las ganancias y las pérdidas, etc. Pero en el momento de sumar y restar números enteros el problema se complica por ejemplo cuando se tiene el número 5 y le quiere quitar 6, ya no hay modo: la operación no tiene solución en los naturales. Todavía muchos matemáticos del Siglo de las Luces (XVIII), cuando un problema se traduce en una ecuación que conduce a una solución de este tipo, optaban por decidir que se trataba de un problema mal planteado, porque así planteado no tiene solución. Asimismo, para muchos estudiantes de grado séptimo cuando se enfrentan a esta operación 5 – 6 su respuesta es “No se puede hacer”. Esto se debe a que en el currículo escolar se habla sobre enseñanza de los números negativos sólo al introducirse los números enteros.

Para Aurora y Abraham son pocos los estudios que relacionan de manera explícita la vinculación del cero con la negatividad. En su proyecto se pretende conocer las concepciones de los estudiantes de educación básica, al hacer uso del cero y los negativos, así como, comprobar si la concientización de estas concepciones promueve una experiencia matemática significativa en el alumno.

De ahí que, estos trabajos se tomaron en consideración porque están relacionados con los conceptos que se desarrollaron en el aula de clase en el momento de llevar a cabo la práctica pedagógica y son de útil aporte para la realización de este informe.

2.3 REFERENTES TEÓRICOS

El referente teórico está compuesto por conceptos desde el punto de vista matemático y con teorías desde la educación matemática de base necesaria para el desarrollo del trabajo final de la práctica alimentado a su vez por reflexiones pedagógicas propias teniendo en cuenta la población educativa con la que se trabajó.

2.3.1 DESDE LO MATEMÁTICO

2.3.1.1 HISTORIA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

En el trabajo realizado por Torres, (2007) sobre el origen e historia de los números enteros, se puede percibir que el hombre desde la era primitiva utilizó recursos para relacionarse con el medio que lo rodea, llevándolo a la noción de cantidad dándole sentido racional a las cosas. Es así, como aparece el número por medio de representaciones a la hora de llevar cuentas de sus pertenencias y su sistema numérico como herramienta para contar; de ahí surgieron los números naturales los cuales se pueden sumar y multiplicar, pero no todos se pueden restar o dividir, por ello los matemáticos se ven en la necesidad de realizar una extensión al conjunto de los números negativos.

Es como aparece el conjunto de los números enteros, formado por los números naturales y los números negativos o antiguamente conocidos como “números deudos” o “números absurdos" incluyendo el cero, los cuales vienen de una época donde el interés central era convivir con los problemas cotidianos de la naturaleza. Las primeras manifestaciones de su uso se remontan al siglo V en oriente, y no llega a occidente hasta el siglo XVI.

Sin embargo, los chinos no aceptaron la idea de que un número negativo pudiera ser solución de una ecuación. Mientras que los indios fueron los encargados de expresar reglas numéricas para ello, con resultados positivos y negativos. A ellos, corresponde la diferenciación entre números positivos y negativos, además del cero, distinguiéndolos simbólicamente.

Los números negativos y el cero no eran reconocidos ni aceptados universalmente como tales, sino hasta finales del siglo XVIII, ya que su origen no era natural, pero muchos matemáticos los estudiaron, tales como:

- Stifel (1487 – 1567) en el siglo XV, quien dio la notación para los números positivos y negativos con la difusión de los símbolos germánicos (+) y (-), puesto que antes de ello se utilizaba la abreviatura de p para los positivos y m para los negativos.

- Gerolamo Cardano en el siglo XVI, llamaba a los números negativos "falsos", pero en su Ars Magna (1545) los estudió exhaustivamente.

- Jhon Wallis (1616 - 1703), en su Aritmética Infinitoum (1655), "demuestra" la imposibilidad de su existencia diciendo que "esos entes tendrían que ser a la vez mayores que el infinito y menores que cero".

- Leonardo Euler es el primero en darles estatuto legal, en su Anteitung Zur Algebra (1770) trata de "demostrar" que $(-1)*(-1)=+1$; argumentaba que el producto tiene que ser $+1$ ó -1 y que, sabiendo que se cumple $(1)*(-1)=-1$, tendrá que ser: $(-1)*(-1)=+1$

- Piaget (1960), afirma que constituye uno de los grandes descubrimientos de la historia de las matemáticas, el hecho de haber convertido al cero y a los negativos, en números.

Según Torres, (2007) entre los investigadores que han estudiado los números negativos y el cero en el campo de la Educación Matemáticas se encuentran los siguientes: Freudental (1973); Glaeser (1981), Vergnaud (1987) entre otros. El análisis de este tema, fundamental para la educación matemática, continua vigente hasta nuestros días.

Así que, los números naturales junto con los negativos y el cero formaron el conjunto de los números enteros dónde:

Los enteros positivos, se denota con Z+ y son también conocidos como los naturales.

Los enteros negativos, se denota con Z- y son llamados los inversos de los naturales.

El cero no tiene signo, es neutro.

Se denomina valor absoluto de un número entero como la distancia (en unidades) que lo separa del cero en la recta numérica. Es decir, si la distancia del cero a un número entero positivo es $+a$ entonces, será la misma que la de un negativo -a; ambos con igual magnitud.

El cero es aquel número entero que no posee ningún signo respectivo, es decir no es positivo ni negativo.

Entonces los números enteros se representan por Z y está formado por los números naturales, sus "opuestos" (los números negativos) y el cero. Esto es:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

De ahí que, el concepto de número entero fue manejado en forma un poco ambigua al principio y no fue sino hasta mediados del siglo XIX, cuando aparecieron los trabajos de Peano, que se pudo formalizar utilizando el lenguaje riguroso de la matemática.

2.3.1.2 CONSTRUCCIÓN FORMAL DE LOS NÚMEROS ENTEROS A PARTIR DE LOS NÚMEROS NATURALES

En Flores, (1971) se encuentra la construcción de un número entero negativo mediante los números naturales usando la teoría de conjuntos, operación binaria y el concepto de clase de equivalencias.

Por tal razón, se hace necesario conocer el conjunto N, llamado conjunto de los Números Naturales, cuyos elementos son los números naturales. Es decir

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

En este conjunto se tienen un par de operaciones binarias, llamadas suma y producto, las cuales son denotadas por "+" y ".", que satisfacen las siguientes propiedades

Propiedad Clausurativa

Para todo par de números naturales m y n, se cumple que

$m + n$ es otro número natural

$m \cdot n$ es otro número natural.

Propiedad Conmutatividad

Para todo par de números naturales $m\ y\ n$, se cumple que

$$m + n = n + m$$
$$m \cdot n = n \cdot m$$

Propiedad asociativa

Para $m, n\ y\ s$, números naturales se tiene

$$m + (n + s) = (m + n) + s$$
$$m \cdot (n \cdot s) = (m \cdot n) \cdot s$$

Elemento neutro

Para todo número natural n se tiene

$$n + 0 = 0 + n = n$$
$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

Propiedad distributiva

Para $m, n\ y\ s$, números naturales se tiene

$$m \cdot (n + s) = m \cdot n + m \cdot s$$

Estas propiedades nos permiten desarrollar toda la aritmética de los números naturales.

Luego, Si $m\ y\ n$ son números naturales es natural plantearse las ecuaciones

$$x + m = n$$

$$x \cdot m = n$$

Pero este tipo de problemas no siempre tiene solución dentro del conjunto de los números naturales. Así, para que exista un n que pertenezca a los naturales la primera ecuación exige que $n \geq m$ y la segunda que m/n

Por ejemplo, si hacemos m = 5 y n = 2, entonces no existe un número natural x tal que satisfaga $x + 5 = 2$.

Usando las reglas usuales de la aritmética, se tendría que $x = 2 - 5$ pero esta expresión carece de sentido en este conjunto. Entonces, para resolver estas ecuaciones, se tuvo que ampliar el conjunto de los números naturales y considerar nuevos números.

Así, se construye el conjunto de los números enteros donde estas ecuaciones tienen soluciones cualesquiera que sean m y n en los enteros.

Recordemos que una operación binaria sobre un conjunto A es una función que va desde el producto cartesiano de A consigo mismo, hasta A. Entonces, el producto cartesiano de dos conjuntos A y B, denotado por A $\times$ B, se define como el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (a, b), donde a está en A y b está en B. En particular, el conjunto N $\times$ N es el conjunto de todos los pares ordenados de números naturales.

Cuando tenemos una operación binaria definida en un conjunto, entonces se dice que dicho conjunto se le ha dotado de una estructura y esto lo hace más interesante para los matemáticos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales posee dos operaciones binarias bien conocidas que son la suma y la multiplicación. Mientras que la resta no es una operación binaria, dentro del conjunto de los naturales.

En el conjunto A $\times$ A se define la relación binaria R en donde los elementos a, b están contenidos en A y se relacionan mediante la relación R si el par (a, b), pertenece a R. Se usa la notación $a\mathrm{R}b$, o bien $a \sim b$, para indicar que a y b están relacionados.

Así, una relación R sobre A se dice que es una relación de equivalencia, si se cumple lo siguiente:

Es reflexiva

Todo elemento de A está relacionado consigo mismo. Esto es $a \sim a$, para todo a en A.

Es simétrica

Si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a . Esto es $a \sim b$, implica que $b \sim a$.

Es transitiva

Si a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c. Esto es $a \sim b$ y $b \sim c$, implica que $a \sim c$.

Cuando se tiene una relación de equivalencia R definida en un conjunto A, entonces dado un elemento a cualquiera en A, se puede considerar el conjunto formado por todos los elementos de A relacionados con él. Dicho conjunto, denotado por $[a]$, se llama la clase de equivalencia de a. El conjunto de todas las clases de equivalencias de A, bajo la relación R se llama conjunto de las clases o conjunto cociente. Generalmente se denota por A /~.

A continuación, se dará la construcción formal de los números enteros. En primer lugar, se definirá el conjunto y luego se podrá observar que tiene una estructura similar a los números naturales, en el sentido de estar dotado de un par de operaciones suma y producto.

Para dichas operaciones se cumplen todas las propiedades y otras adicionales, estudiadas en el caso de los naturales. Este nuevo conjunto se considera una ampliación o generalización de los naturales.

Sea el conjunto A = N × N se define la relación binaria R denotada por ~

$$\mathrm{R} = (a, b) \sim (a', b') \leftrightarrow a + b' = b + a'$$

Se trata de una relación de equivalencia donde se cumple lo siguiente:

Es reflexiva

Todo elemento de N está relacionado consigo mismo. Esto es (a, a) ~ (a, a), para todo a, a' en N.

Es simétrica

Si (a, b) está relacionado con (a', b'), entonces (a', b') está relacionado con (a, b) . Esto es (a, b) ~ (a', b'), implica que (a', b'), ~ (a, b).

Es transitiva

Si (a, b) está relacionado con (a', b') y (a', b') está relacionado con (a'', b''), entonces (a, b) está relacionado con (a'', b'') . Esto es (a, b) ~ (a', b') y (a', b') ~ (a'', b'') , implica que (a, b) ~ (a'', b'') .

Luego, el conjunto de todas las clases de equivalencias de A = N × N, bajo la relación R se llama conjunto de las clases o conjunto cociente se denota por A = N × N /~ y es conocido como el conjunto de los números enteros dentado por Z.

Veamos a continuación como podemos dotar a Z de un par de operaciones, llamadas suma y producto de números enteros. Para lograr este objetivo usaremos la suma y producto de números naturales.

Si (a,b) y (c,d) son dos números enteros, entonces la suma y el producto se define

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \times (c,d) = (a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Cabe resaltar que el símbolo "+" en el lado izquierdo indica suma de números enteros, mientras que el mismo signo en el lado derecho indica una suma de números naturales. La misma observación es válida para el producto.

Probemos ahora que la suma está bien definida

Sea

$$(a,b) = (a', b') \rightarrow a + b' = b + a'$$
$$(c,d) = (c', d') \rightarrow c + d' = d + c'$$

Así,

$$a + b' + c + d' = b + a' + d + c' \rightarrow (a+c) + (b' + d') = (b+d) + (a' + c')$$
$$\rightarrow (a+c, b+d) = (a' + c', b' + d')$$
$$\rightarrow (a,b) + (c,d) = (a', b') + (c', d').$$

Ahora, probemos que el producto está bien definido

Sea

$$(a,b) = (a', b') \rightarrow a + b' = b + a'$$
$$(c,d) = (c', d') \rightarrow c + d' = d + c'$$

Así,

$$a \cdot c + b' \cdot d = b \cdot c + a' \cdot c$$
$$b \cdot d + a' \cdot d = a \cdot d + b' \cdot d$$
$$a' \cdot c + a' \cdot d' = a' \cdot d + a' \cdot c'$$
$$b' \cdot d + b' \cdot c' = b' \cdot c + b' \cdot d'$$
$$\rightarrow a \cdot c + b \cdot d + a' \cdot d' + d' \cdot c' = b \cdot c + a \cdot d + a' \cdot c' + b' \cdot d'$$

$\rightarrow (a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) = (a' \cdot c' + b' \cdot d', a' \cdot d' + b' \cdot c')$

$\rightarrow (a, b) \times (c, d) = (a', b') \times (c', d')$

Una vez demostrado que la suma y el producto con enteros están bien definidos, se puede verifican que todas las propiedades de la aritmética, estudiadas en los naturales, también se cumplen para los números enteros. Estas son:

Propiedad Clausurativa

Para todo par de números enteros m y n, se cumple que

$m + n$ es otro número entero

$m \cdot n$ es otro número entero

Propiedad Conmutatividad

Para todo par de números enteros m y n, se cumple que

$$m + n = n + m$$

$$m \cdot n = n \cdot m$$

Propiedad asociativa

Para m, n y s, números enteros se tiene

$$m + (n + s) = (m + n) + s$$

$$m \cdot (n \cdot s) = (m \cdot n) \cdot s$$

Elemento neutro para la suma y el producto

Para todo número entero n**,** existe un número entero denotado por 0 y 1 tal que

$$n + 0 = 0 + n = n$$

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

Existencia de opuestos para la suma o negativos

Dado un número entero n, entonces existe otro número entero, llamado el opuesto o negativo de n y denotado por $-n$, el cual verifica

$$n + (-n) = -n + n = 0$$

Propiedad distributiva

Para m, n y s, números enteros se tiene

$$m \cdot (n + s) = m \cdot n + m \cdot s$$

Se puede observar que dado un número entero $m = (a, b)$ pueden ocurrir tres casos:

1. Si $a > b$,

   $m = (a, b) = (a - b, 0) = (m, o)$ Para $m \epsilon$ N
2. Si $a = b$

   $m = (a, b) = (0,0)$
3. Si $a < b$,

   $m = (a, b) = (0, b - a) = (o, n)$ Para $n \epsilon$ N

Es decir, cualquier número entero puede representarse por una de estas tres formas:

$$(m, 0), \quad (0,0), \quad (0, n)$$

Llamadas formas canónicas del número entero o elementos canónicos de la clase. Luego, estos elementos se designan por la notación

$$(m, 0) = +m$$
$$(0,0) = 0$$
$$(0, n) = -n$$

En donde los signos $+$ y $-$ son predicativos. Por tanto, el conjunto Z está definido como

Z^+, subconjunto de los enteros positivos $(+m)$

0, entero nulo o cero (0,0)

Z^-, subconjunto de los enteros negativos $(-n)$

Así que, para la suma de enteros se tiene los siguientes casos

I. $(m, 0) + (n, 0) = (m + n, 0)$ esto es

   $(+m) + (+n) = +(m + n)$

II.

a) Si $m > n$

$(m, 0) + (0, n) = (m, n) \coloneqq (m - n, 0)$ esto es

$(+m) + (-n) = \ (m - n)$

b) Si $m < n$

$(m, 0) + (0, n) = (m, n) \coloneqq (0, n - m)$ esto es

$(+m) + (-n) = \ -(n - m)$

c) Si $m = n$

$(m, 0) + (0, n) = (m, n) \coloneqq (0,0)$ esto es

$(+m) + (-n) = \ 0$

III. $(0, m) + (0, n) = (o, m + n)$ esto es

$(-m) + (n) = \ -(m + n)$

Que construyen la conocida regla de los signos de la adición de números enteros.

Luego para la multiplicación de enteros tenemos

$$(+m) \cdot (+n) = (m, n) = \ +m \cdot n$$
$$(+m) \cdot (-n) = (m, n) = \ -m \cdot n$$
$$(-m) \cdot (+n) = (m, n) = \ -m \cdot n$$
$$(-m) \cdot (-n) = (m, n) = \ +m \cdot n$$

Que son igualdades que constituyen la conocida regla de los signos de la multiplicación de números enteros.

De esta manera se puede observar que no se puede deducir en el aula de clases la ley de los signos para operar con números enteros, ya que se necesitan de conceptos más elaborados, que en el salón de aula no se abordan, por esta razón, en la mayoría de los casos, los profesores dan a conocer la ley de signos y la forma de utilizarla y en general los estudiantes lo que hacen es memorizar estas leyes y aplicarlas a la resolución de las situaciones.

2.3.2 DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2.3.2.1 EL OCTÓGONO DE CARLOS EDUARDO VASCO EN LA INVESTIGACIÓN MATÉMATICA

Debido a que la formación matemática es una de las grandes prioridades en todo sistema educativo La Educación Matemáticas ha logrado elaborar distintos modelos para poder definir su naturaleza. El enfoque más adecuado para esta definición es el que nos plantea Rosa Elisa Bonilla, (1989) en el texto “La Educación Matemática: una reflexión sobre su naturaleza” definiéndola como una actividad operacional fundamentada en una variedad de áreas de estudio y cuyo objetivo es el análisis de la comunicación en las matemáticas. Wain G.T. (1978). p.3

Entre los distintos modelos se encuentra el de Carlos Eduardo Vasco en 1994 con el modelo “El Octógono de la Educación Matemática” planteando a la Educación Matemática como una nueva disciplina en proceso de conformación, y la ubica en relación con las matemáticas y ocho disciplinas: Biología, Filosofía, Lógica, Lingüística, Informática, Antropología, Psicología e Historia de las Matemáticas, necesarias para la Educación Matemática y útiles para el desarrollo de las prácticas pedagógicas en un enfoque investigativo permitiendo al practicante mantenerse informado en muchos aspectos; utilizando a veces la visión del psicólogo, la del antropólogo, la del historiador, la del especialista en informática, etc. para orientarse en los entornos sociales, aprender más sobre la enseñanza de las matemáticas y tener evidencia de todo aquello que necesita para avanzar en su investigación.

Asimismo, este modelo plantea la posibilidad de adoptar dos miradas la interna y externa, la primera consiste en la mirada del practicante que es la visión del maestro que sabe matemáticas al nivel que él necesita saberlas y la segunda consiste en la mirada del investigador que reflexiona las herramientas teóricas y permite diferenciar a La Educación Matemática como una disciplina pensada.

Este modelo de Carlos Eduardo Vasco, incorpora dos perspectivas la interna referida a la actividad propiamente matemática donde se reconoce lo realizado por las matemáticas, docentes y público en general; y la externa donde se explica y justifica la necesaria intervención de ocho disciplinas de las ciencias formales, naturales y sociales, para dar cuenta de aquella actividad matemática que tiene múltiples manifestaciones a lo largo de su devenir histórico.

De acuerdo con esta mirada se han realizado análisis de las matemáticas en contextos socioculturales que han configurado las líneas de investigación denominadas: etnomatemática, enculturación matemática y educación matemática crítica.

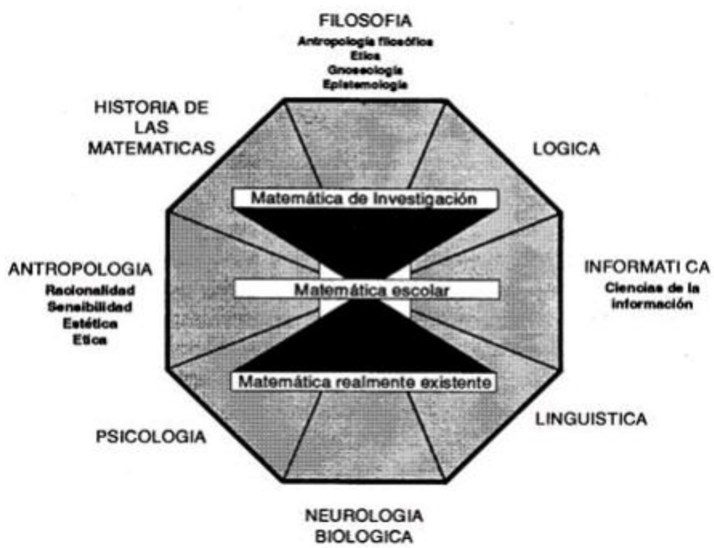


Figura 3: Octógono de Vasco

En este trabajo, se realizó las dos miradas planteadas por Vasco, (1994) puesto que para desarrollar la práctica pedagógica se cumplió con los requisitos en cuanto a la aprobación de materias exigidos por la Universidad del Cauca considerando que se tenía el nivel apropiado para hacer la intervención en el aula de clase en el área de matemáticas; asimismo, se desarrolló técnicas de observación, registros diarios para analizar y comunicar los resultados del trabajo realizado en el aula y una variedad de secuencias didácticas para lograr identificar la forma como incide[10] los signos en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros en el grado séptimo A de la Institución Educativa los Comuneros.

Además, el modelo de Vasco, (1994) por medio de su mirada interna y externa permitió al practicante identificar cuál mirada es la más conveniente en el momento de ejercer la práctica pedagógica para analizar las ventajas y desventajas que se presentan en la hora de la enseñanza y aprendizaje de los números enteros permitiendo identificar la mejor manera de transmitir lo deseado o más aún saber observar las diferentes técnicas, metodologías y estrategias que desarrollan otros colegas y aprender de éstas puesto que las prácticas matemáticas no son universales dependen del entorno donde son realizadas.

2.3.2.2 TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

La didáctica de las matemáticas se produjo en Francia a finales de los años sesenta por un grupo de investigadores ante la necesidad de abordar de manera científica las cuestiones vinculadas a los fenómenos y procesos ligados a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, primeramente, en situación escolar y luego, en general, en los fenómenos vinculados a la difusión de los saberes y conocimientos matemáticos.

Enseñar matemáticas demanda conocimientos matemáticos específicos para construir situaciones de enseñanza y de esta manera poder llevar adelante procesos de interacción entre los alumnos y una situación que permita la apropiación de los conocimientos, descubriendo su organización interna y utilizarlos en la solución de problemas variados.

---

[10]La palabra incidir admite varios usos, pero en este trabajo lo analizamos desde el siguiente punto de vista. **Incidir**: *Cosa que se produce en el transcurso de un asunto, un relato, etc. Y que repercute en él, alterándolo o interrumpiéndolo.*
"*Otra aplicación de la palabra incidir surge a la hora de querer dar cuenta de la repetición enfática que una determinada cualidad, característica, presenta en una persona cuando se observa detenidamente su manera de actuar, o sea, que este sentido lo usamos mayormente para enfatizar ciertos aspectos que presentan algunas personas o cosas. El sentido más usado de la palabra incidir es aquel que expresa el efecto que algo provoca en otro, o en su defecto, en otra cosa, así es que cada vez que algo marque un cambio en nuestra vida es común que lo refiramos en términos de incidir. En tanto, será en esta referencia que la palabra incidir se encuentra estrechamente vinculada al concepto de incidencia"*
Título: Incidir. Sitio: Definición ABC. Fecha: 24/04/2012. Autor: Florencia Ucha. URL: https://www.definicionabc.com/general/incidir.php

Dentro de esta disciplina aparece Guy Brousseau[11] uno de los precursores más reconocido por los aportes que realizó, fundador de la Teoría de las Situaciones Didácticas. En su teoría estudia las relaciones entre alumno, docente y las condiciones en las cuales se constituye el saber, con el fin de su optimización, su control y su reproducción en situaciones escolares.

Para Brousseau la enseñanza de las matemáticas es un proceso centrado en la producción de los conocimientos en el ámbito escolar con su respectiva validación. La comprensión y la explicación de los fenómenos contemplan el mejoramiento de la enseñanza, no se trata desde esta teoría, manifestar directamente a los docentes cómo hacer la clase, pero sí posibilita la explicación de los momentos importantes que se presentan en la clase de matemáticas. Esos momentos son definidos como situaciones en relación con nuestras experiencias dentro del aula, desde un posicionamiento como estudiante o como docente.

Inicialmente en su teoría Brousseau toma las hipótesis centrales de la epistemología genética de Jean Piaget como marco para modelizar la producción de conocimientos. Sostiene al mismo tiempo que el conocimiento matemático se va construyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otros problemas. Luego, propone una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden.

De ahí que, la Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista en el sentido Piagetiano del aprendizaje, postulando que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación de un "medio" resistente con el que interactúa, concepción que es caracterizada por Brousseau, (1986) de esta manera:

> *"El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la*

[11] Comenzó su carrera profesional como maestro de escuela primaria. Se formó posteriormente como matemático y obtuvo el título de Doctor en Ciencias de la Universidad de Burdeos. Su contribución teórica esencial al campo de la Didáctica de las matemáticas es la Teoría de las Situaciones.

sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje." p. 11

Según Sadovsky, (2015) Brousseau postula que para todo conocimiento (matemático) es posible construir una situación fundamental, que pueda comunicarse sin apelar a dicho conocimiento y para la cual éste determinada la estrategia óptima (1988 a).

Ahora bien, los psicólogos han demostrado, respecto de los fenómenos de aprendizaje y desde diferentes perspectivas, la importancia de la tendencia natural de los sujetos a adaptarse a su medio: Piaget se ocupa esencialmente de la génesis no escolar de los conocimientos y, para ello, concibe (desde su formación científica) dispositivos experimentales[12] donde el niño revela sus modos de pensamiento y el investigador reconoce, en sus comportamientos, las estructuras y los conocimientos matemáticos de su elección, Vygotsky estudia las modalidades de la influencia del medio sociocultural en el aprendizaje de los alumnos y el estudio del medio en sí mismo da lugar, en consecuencia, a un ámbito ideológico o científico y Brousseau, (1986) sostiene que un medio debe tener intenciones didáctica ya que "*un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera." p.11*

En esta perspectiva Brousseau, (2007) sustenta que los comportamientos de los alumnos revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Por tanto, lo que se necesita modelizar, pues, es el medio. Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas.

Luego, las interacciones entre sujeto – medio y alumno – docente conforman en la Teoría de Situaciones un sistema, es decir que no pueden concebirse de manera independiente una de las otras. Este sistema es la situación didáctica.

[12] Brousseau, Guy. (2007). p. 7

El rol fundamental que esta teoría otorga a la "situación" en la construcción del conocimiento se ve reflejado en la descripción que tomamos de Brousseau, (2007):

> *"Hemos llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas situaciones requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético", a partir de saberes previos." p. 16*

Con respecto a esto Brousseau, (1999) plantea que una situación es el conjunto de las circunstancias en las que una persona se encuentra, y de las relaciones que la unen con su medio. Luego las situaciones didácticas sirven para enseñar y son:

> *"(...) el entorno (en su totalidad) del alumno, el docente y el sistema educativo en sí mismo también incluido" p.2*

Por tanto, la enseñanza es concebida como las relaciones entre el sistema educativo y el alumno vinculadas a la transmisión de un saber dado. La matemática tiene la responsabilidad de legitimar el saber escolar, las ciencias de la comunicación se responsabilizan por la traducción en mensajes adaptados, la pedagogía y la psicología cognitivas por comprender y organizar las adquisiciones y los aprendizajes del alumno, etc., luego el propósito de dichos mensajes es, esencialmente, la enculturación del alumno por parte de la sociedad.

Brousseau, (1999) nos da los elementos que se deben considerar para una modelización de las situaciones con fines didácticos. Como primer punto se debe recurrir a los "medios" (textos, materiales, etc.) para enseñar un conocimiento determinado o controlar su adquisición, la ingeniería didáctica estudia y produce estos medios materiales a través de las piezas de un juego, una prueba, un problema, un ejercicio, una ficha y afirma que:

"solo el funcionamiento y el desarrollo efectivo del dispositivo, las parte efectivamente jugadas, la resolución del problema etc., pueden producir un efecto de enseñanza" p.3

Según Brousseau, (1999) los conocimientos se manifiestan esencialmente como los instrumentos de control (los dispositivos) de las situaciones. De allí la modelización de estas situaciones bajo las siguientes formas: como necesidad teórica, deducida del saber en sí mismo, y de un funcionamiento mínimo supuesto del alumno o como presentación de las situaciones reales, didácticas o no, donde el conocimiento debería "ser deducido" a partir de las decisiones y de los comportamientos del sujeto por los modelos de estímulo y respuesta.

Por tal razón, es importante estudiar las variantes y las variables que pueden determinar las condiciones óptimas de difusión de determinados conocimientos, o explicar aquellos que aparecen como respuesta optimal a las condiciones propuestas al alumno.

Una noción importante de esta teoría es la variable didáctica. Brousseau, (1999) llama variable cognoscitiva, a una variable de la situación tal que por la elección de valores diferentes se pueden provocar los cambios optímales del conocimiento. Las variables didácticas serán, entre las variables cognoscitivas, aquellas que pueden ser fijadas por el docente utilizando valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. Las modificaciones de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes. Según esta perspectiva los alumnos se convierten sencillamente en reveladores de las características de las situaciones a las cuales reaccionan.

Con lo mencionado anteriormente, se puede conceptualizar los elementos principales de la teoría. En primera instancia, diremos que una situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. Según Brousseau, (1982) es el conjunto de relaciones que se establecen de manera implícita o explícita entre un grupo de alumnos, un entorno o medio (que puede incluir materiales o instrumentos) y el profesor, con el fin de que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. Las situaciones son específicas del mismo, esto significa que cada conocimiento (sean estos conceptuales y procedimentales) permiten resolver una situación en particular.

Al comienzo de la clase, al presentar una situación se establece entre el docente y el grupo de estudiantes el Contrato didáctico, este puede ser explícito o implícito, consiste en la presentación de las actividades a realizar, los modos de trabajo, las expectativas que el docente tiene respecto de grupo de estudiantes y lo que el grupo espera del docente. En síntesis, son las reglas puestas en consideración para el trabajo en el aula.

Cabe resaltar que, para generar un conocimiento, es necesario que el estudiante se interese en la resolución de un problema que forma parte de la situación didáctica. La perspectiva de generar situaciones en las que el alumno genere su propio conocimiento para resolverlas, ha permitido considerar varios momentos que son centrales en dicha teoría y que son concebidos como momentos en los que el alumno se encuentra solo con el problema sin la intervención del maestro en cuestiones relativas al saber en juego. En otras palabras, cuando el alumno se responsabiliza por el problema, el docente toma cierta distancia, y sus intervenciones quedan relegadas a algunas preguntas orientadoras (sin dar las respuestas al problema) durante el proceso de resolución.

El momento en el que el docente se despoja de la situación y logra que el alumno asuma el problema como propio, e intenta resolverlo generando un proceso de búsqueda autónomo se denomina situación a-didáctica definida así por Brousseau (1986):

> *"El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin*

intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego." Panizza, (2007) p.2

En este caso se dice que se ha logrado la devolución de la situación al alumno. El proceso de resolución de la situación por parte del estudiante se asemeja a un juego de estrategia. Lo que caracteriza la perspectiva constructivista, es la voluntad de poner al alumno en situación de producir conocimientos (en general reformulando y luchando contra conocimientos anteriores) en referencia en primer lugar al problema, y no en primer lugar a la intención de la enseñanza. Es la presencia y la funcionalidad en la situación didáctica de una etapa de situación a-didáctica la marca principal de la diferencia con las situaciones estrictamente formales o tradicionales.

En primer lugar, es posible al comienzo del descubrimiento de este dominio, confundirse con la interpretación de los términos "didáctica" y "a-didáctica".

La situación didáctica es una situación que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución.

Asimismo, Brousseau, (1999) postula que para todo conocimiento existe una situación fundamental que de alguna manera representa la problemática que permite la emergencia de dicho conocimiento. Esto significa que el conocimiento en cuestión aparece como la estrategia óptima para resolver el problema indicado. Según Brousseau, (1986) *"cada conocimiento puede caracterizarse por una o más situaciones a-didácticas que preservan su sentido y que llamaremos situaciones fundamentales." p.11*

Además, cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás. Luego, conjeturamos que el conjunto de situaciones que caracterizan una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales. Como el alumno no puede resolver de entrada cualquier situación a-didáctica, el maestro le procura aquellas que están a su alcance. Las situaciones a-didácticas preparadas con fines didácticos determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar por efecto de las restricciones y deformaciones aportadas a la situación fundamental.

En conclusión, las situaciones fundamentales son el conjunto de situaciones a-didácticas que pone en juego el profesor para que el estudiante forme un conocimiento.

Es necesario resaltar que la definición de situación a-didáctica contiene distintos aspectos que conviene analizar separadamente:

- **El carácter de necesidad de los conocimientos:** la "situación" se organiza de manera tal que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, en el sentido de que la situación no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende generar. La comprensión de esta idea es fundamental para el análisis didáctico de una situación, y en particular para identificar en una secuencia de enseñanza los distintos aspectos a los que se apunta en cada etapa. El problema es que a menudo se confunde lo que es necesario con lo que es posible de utilizar como procedimiento para resolver un problema, y en consecuencia se confunden los conocimientos que se requieren o no poner en juego para dominar la situación.

- **La noción de "sanción":** no debe entenderse como "castigo" por una "culpa, o equivocación". La idea es que la situación debe estar organizada de manera tal que el alumno interactúe con un medio que le ofrezca información sobre su producción. Que el alumno pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción, y que tenga posibilidad de intentar nuevas resoluciones son criterios fundamentales para que, por sí mismo, establezca relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtiene.

- **La “no intervención” del maestro en relación al saber:** Una vez establecida la importancia y el significado de la no intervención del maestro en la situación a-didáctica, queda aún por comprender que la entrada en una fase a-didáctica es algo que debe gestionar el mismo maestro. Esto dio lugar al concepto de “devolución” desarrollado por Brousseau, (1998, Cap.V): *“La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.” Panizza, (2007) p. 8*

Asimismo, la teoría distingue tres tipos de situaciones didácticas: son las situaciones de acción, de formulación y de validación:

- **Las situaciones de acción:** son aquellas relaciones establecidas entre el alumno y un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos por parte del alumno, abordando el problema de manera individual. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

- **Las situaciones de formulación**: son situaciones en las que el alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje. El objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

- **Las situaciones de validación**: consisten en que dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones. Se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones.

Según Brousseau, (1999) la acción, luego la formulación, luego la validación cultural y la institucionalización parecen constituir un orden razonable para la construcción de los saberes. Por lo tanto, la Teoría de las Situaciones Didácticas en el salón de clase, es una estrategia que permite al profesor planear situaciones con fines didácticos, donde los estudiantes actúen facilitando la acción, formulación, validación e institucionalización del nuevo conocimiento.

La Teoría de Situaciones presenta algunos fenómenos que se producen en la actividad de la enseñanza y que se muestran en marcos muy diferentes lo cual permite construir un modelo de los protagonistas en presencia de las relaciones y de las dificultades que los ligan causando efectos. Estos son los siguientes:

- **Efecto Topaze:** cuando el profesor da la respuesta o lleva al estudiante a ella por medio de preguntas cada vez más fáciles.

- **Efecto Jourdain:** es un malentendido, él estudiante llega a la respuesta, pero no sabe ni está seguro que está bien y el profesor cree que el estudiante tiene los conocimientos correctos para asegurar su procedimiento.

- **Deslizamiento Metacognoscitivo**: el profesor busca los medios para que el estudiante entienda un concepto matemático sacándolo de su contexto, es decir intenta por medio de métodos, reglas, gráficos, entre otros, hacer que el estudiante se apropie de este conocimiento desglosándolo mucho y por tanto se empobrece la verdadera significación del concepto haciendo que se vuelva abstracto e instrumental.

- **Uso abusivo de la analogía:** es el uso abusivo de ejercicios repetitivos para que el estudiante resuelva el ejercicio planteado inicialmente de forma análoga.
- **Envejecimiento de las situaciones de enseñanza:** cuando el profesor intenta realizar las clases de la misma manera sin tener en cuenta que esto no siempre funciona ya que lo deseado es que haya una buena pedagogía en la hora de enseñar.

También, un concepto importante en esta teoría es el de Institucionalización, que es de alguna manera complementaria a la devolución. Brousseau, (1986) reconoce en estos dos procesos los roles principales del maestro, y afirma:

> *"(...) En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo a-didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status. (...)". p 37*

Esta descripción pone a la luz uno de los aspectos teóricos y prácticos más delicados de la articulación entre ambos procesos: los comportamientos o las producciones "libres" del alumno durante las fases a-didácticas de aprendizaje son constitutivos del sentido de los conocimientos que los alumnos construyen; definir las relaciones entre esos comportamientos o producciones y el saber cultural o científico significa que la institucionalización supone preservar el sentido de los conocimientos construidos por los alumnos en las fases a-didácticas de aprendizaje.

Según el punto de vista teórico el concepto de institucionalización no parece en sí mismo ser más complejo que otros. Sin embargo, es habitual observar en el docente que se inicia en esta disciplina, mayores dificultades en la gestión de la institucionalización, que al llevar a la práctica otros conceptos de la teoría.

Una explicación posible de este fenómeno puede encontrarse en el análisis de Brousseau, (1994):

> *"Por supuesto, todo puede reducirse a la institucionalización. Las situaciones de enseñanza tradicionales son situaciones de institucionalización, pero sin que el maestro se ocupe de la creación del sentido: se dice lo que se desea que el niño sepa, se le explica y se verifica que lo haya aprendido. Al principio los investigadores estaban un poco obnubilados por las situaciones a-didácticas porque era lo que más le faltaba a la enseñanza tradicional." Panizza, (2007) p. 15*

Debe comprenderse que la institucionalización supone establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural, y no debe reducirse a una presentación del saber cultural en sí mismo desvinculado del trabajo anterior en la clase.

Durante la institucionalización se deben sacar conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, se debe recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica, etc., a fin de poder establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.

Cabe destacar que Brousseau deseo con su teoría propiciar una reflexión acerca de las relaciones entre los "contenidos" de la enseñanza y los métodos de la educación. Luego, de un modo más amplio, abordar la didáctica como un área de investigación cuyo objeto es la comunicación de los saberes matemáticos y sus transformaciones.

2.3.2.3 SECUENCIAS DIDÁCTICAS

Las secuencias didácticas son un ejercicio y un posible modelo que se propone al docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas.

Según Tabón, (2010)

> *"las secuencias didácticas son, sencillamente, conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos" p. 20*

Asimismo, las secuencias didácticas son una metodología relevante para mediar los procesos de aprendizaje (el maestro entra a mediar) en el marco del aprendizaje; para ello se retoman los principales componentes de dichas secuencias, como las situaciones didácticas (a las que se debe dirigir la secuencia) relevantes o significativas.

En este trabajo se presentan secuencias didácticas sobre la suma de números enteros, desarrolladas desde una perspectiva constructivista, basadas en la elaboración de materiales lúdicos en el que los estudiantes a través del juego mediante la resolución de una actividad específica elaborada por el practicante, desarrollen las habilidades que se usan en los procesos de construcción del saber matemático en el momento de preguntar, predecir, observar, interpretar, comunicar y reflexionar de lo que está aprendiendo generando sus propios conocimientos y comprensiones.

De esta manera, las secuencias implementadas dieron a los estudiantes la oportunidad de expresarse en sus propias palabras, de escribir sus propias opiniones, hipótesis y conclusiones, a través de un proceso colaborativo y libre que les aumente la confianza en sí mismos y su autonomía como aprendices para luego, construir un conocimiento formal por medio de los contenidos matemáticos desarrollados en el transcurso del curso por el practicante.

2.4 DESARROLLO INVESTIGATIVO

2.4.1 CONTEXTO DE LA PRÁCTICA

La práctica pedagógica III se realizó en la Institución Educativa "Los Comuneros" (Ver anexo 2) que es una entidad pública al servicio de la comunidad. Inició su funcionamiento como "Los Comuneros" a partir del 10 de Julio de 1998 por orden de la Secretaría de Educación Departamental con el fin de ofrecer los cursos de primaria y bachillerato.

Actualmente se encuentra ubicada en la comuna seis de la ciudad de Popayán carrera séptima No 21 – 04 y está conformada por los barrios Alfonso López, Los Comuneros, Primero de Mayo, entre otros (Ver anexo 1). Ofrece en sus tres sedes: educación preescolar, básica primaria y media; en las jornadas mañana, tarde, noche y sabatina. Maneja unas políticas públicas sementadas en los acuerdos de convivencia "Educación para nutrir la vida", construidos por la misma Institución teniendo en cuenta las problemáticas sociales, económicas y culturales de sus estudiantes, para darle solución a las múltiples situaciones como problemas de drogadicción y conflictos de pandillas que se encuentran en este entorno. Asimismo, da paso al cumplimiento misional de la Institución "Contribuir a la Construcción de una ciudadanía saludable en la Comuna Seis de Popayán."

A partir de algunas de las características de los estudiantes que hacen parte de la Institución, se realizan estrategias pedagógicas para responder a las necesidades sociales y culturales de la comuna a través de proyectos que integran a los estudiantes por interés no por grado ni edad. Dentro de sus proyectos matemáticos están los lúdicos enfocados al ajedrez, proyectos sociales enfocados al teatro, proyectos de formación enfocados en valores y derechos humanos entre otros.

Estas actividades se llevan a consideración debido a que algunos estudiantes de esta Institución presentan poco interés por las actividades académicas y en particular las relacionadas con matemáticas les parece más productivo realizar otro tipo de actividades de tipo informal distintas a las de producción académica.

De ahí que, en este trabajo a través de secuencias didácticas basadas en un enfoque constructivista se buscó caracterizar la forma como incide un número signado y los resultados que se obtienen de los estudiantes en grado séptimo A, del colegio Los Comuneros por medio de actividades de aprendizaje relevantes y significativas al trabajar la definición de números enteros cuyo tema hace parte del primer periodo en la malla curricular de la misma Institución Educativa (Ver anexo 3). Se realizaron contenidos para un periodo académico y se planeó actividades para el aula que permitieron el desarrollo del pensamiento matemático en los alumnos orientándolos a ser matemáticamente competentes.

Dentro de los Estándares básicos de competencia en matemáticas se propone el desarrollo del pensamiento lógico y el pensamiento matemático para la Educación Básica y Media. El tema de números enteros se encuentra dentro del pensamiento matemático en la subdivisión que corresponde al pensamiento numérico donde se trabaja la compresión y el significado de los números, sus operaciones y las relaciones entre ellos.

Por lo anterior, para la elaboración de las secuencias didácticas se tuvo en cuenta el medio social y material de los alumnos, como ya se había dicho, según Brousseau, (2007) los medios creados son importantes en el éxito de la difusión de los conocimientos matemáticos.

2.4.2 LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA

Después de haber cumplido los requisitos exigidos en el plan de estudio del programa de Licenciatura en Matemáticas, se pudo dar inicio a la práctica pedagógica I. En ésta se desarrollaron varias actividades, como el estudio y análisis de documentos acerca de cómo sistematizar una experiencia vivida y obtener aprendizajes críticos, fundamentación teórica sobre sistematización como proceso investigativo y ejecución de un proyecto de intenciones.

Durante este periodo se estudiaron algunos documentos como por ejemplo "*Orientaciones teórico – prácticas para la sistematización de experiencias*" de Jara, (2013) este documento permitió tener una visión general sobre lo que respeta a sistematización de una experiencia.

Jara, (2013) afirma que:

> *"La sistematización es aquella interpretación critica de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explicita la lógica del proceso vivido en ellas; los diversos factores que intervinieron, cómo se relacionan entre sí y por qué lo hicieron de ese modo. La sistematización de experiencias produce conocimientos y aprendizajes significativos que posibilitan apropiarse de los sentidos de las experiencias, comprenderlas teóricamente y orientarlas hacia el futuro con una perspectiva transformadora". p 4*

Asimismo, Jara, (2013) nos define desde su punto de vista las sistematizaciones de experiencias no sólo para clasificar, ordenar y recoger informaciones sino para obtener un aprendizaje crítico de nuestras experiencias. Lo principal de una sistematización de experiencias es hacer un proceso de reflexión e interpretación crítica sobre la práctica que se está haciendo para luego extraer aprendizajes significativos y compartirlos con los futuros practicantes, permitiendo realizar un documento de intenciones con el fin de encontrar una temática en la cual desarrollar prácticas pedagógicas y realizar una introducción a la investigación en Educación Matemática.

Este documento permitió al practicante realizar un formato de registro diario de actividades (Ver anexo 4) sobre cada clase realizada para analizar en el momento de la sistematización de la práctica por qué ese proceso se está desarrollando de esa manera, entender e interpretar lo que está aconteciendo, a partir de una reconstrucción de lo sucedido y un ordenamiento de los distintos elementos objetivos y subjetivos que han intervenido en el proceso, para comprenderlo, interpretarlo y así aprender de nuestra propia práctica.

A partir de esto, se consideró que para sistematizar una propuesta metodológica se debe tener en cuenta algunos aspectos, entre ellos están haber participado de la experiencia y tener registros de ello, cuestionarnos acerca de lo que queremos hacer, enseñar, con qué fin, qué procedimientos vamos a seguir en nuestra sistematización, hacer una reconstrucción del proceso vivido, reflexiones y por último formular conclusiones y sugerencias.

Finalmente, se estudió el documento *"La investigación como proceso investigativo o la búsqueda de la episteme de las prácticas"* de Mejía, (2007) este documento permitió estudiar temas sobre la Educación popular, practica investigativa, episteme del conocer, episteme del conocimiento científico, teoría y práctica, paradigma positivista, acción, conocimiento científico, conocimiento de la modernidad, conocimiento teórico matematizado.

Marco Raúl Mejía divide el texto en dos literales, introducción general y en busca de las epistemes de la práctica. Define que las practicas investigativas tienen una perspectiva histórica donde el conocimiento está relacionado con su propia historia permitiendo transformar las condiciones de vida de las personas. Por ello, la propuesta de sistematización como forma de investigación y producción de saber y conocimiento desde la práctica acompañando la acción desde la episteme del conocimiento científico ubica a la sistematización en un contexto histórico. Por tanto, se hace necesario darle un status a la práctica y se muestra que el proceso de acción – saber – conocimiento no son niveles separados, sino que están entremezclados.

Una vez hecho el estudio correspondiente sobre la sistematización de experiencias, se estudiaron las diferentes Instituciones donde se podía efectuar la práctica, para luego, hacer la escogencia del curso y los respectivos temas a desarrollar en matemáticas según su malla curricular y lo que plantea el MEN, (2006). De esta manera, se dio inicio al contenido del documento de intenciones que se enfocó en la enseñanza de los números enteros en el grado séptimo.

Posteriormente, en la práctica II se procedió a la elaboración de las actividades a desarrollar en el aula con la ayuda del director de la práctica, teniendo en cuenta que éstas debían cubrir 32 horas lo que es equivalente a tres meses de clases. Por tal razón la práctica III duraría todo un periodo escolar en el que se cubriría clases analíticas y prácticas, trabajos en grupo e individuales y la evaluación.

Así, la práctica pedagógica III se realizó con los estudiantes de grado séptimo A de la Institución Educación los Comuneros, ya que en este curso según el documento de Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se da a conocer a los estudiantes el concepto de los números enteros en el primer periodo escolar coincidiendo con el tema de elección en la práctica II. El director de curso es el Magister Eruin Alonso Sánchez. El curso está conformado por 30 alumnos de los cuales 15 son niños y 15 niñas.

Figura 4: Gráfico Circular total estudiantes

Se realizó un plan de trabajo, en el que se consideraron 11 actividades a desarrollar en 3 meses, las cuales fueron corroboradas por el docente de la práctica pedagógica y llevadas a cabo por el practicante durante todo el primer periodo escolar.

En la primera actividad (Ver anexo 5 y 6) se realizó un repaso y el Taller 1 como prueba diagnóstica sobre el conjunto de los números naturales con el objetivo de estudiar por medio del taller la comprensión que los alumnos tenían del tema e identificar las falencias y los errores conceptuales que están tras esas falencias. La prueba consistió en tres problemas que involucraban la conceptualización acerca de los números naturales su representación y operaciones.

En la segunda actividad (Ver anexo 7) se realizó la primera secuencia didáctica: "Ganancias y pérdidas" con el objetivo de dar una noción sobre las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros mediante el juego y lograr en los estudiantes inquietudes acerca de los resultados obtenidos. Asimismo, con la intención que el estudiante a través de la acción, formulación y validación de la situación, pudiera construir un concepto informal sobre la suma y resta con números enteros para así evitar obstáculos más adelante en el desarrollo de la práctica con ejercicios formales sobre este tema. En efecto esta situación fue utilizada para introducir el estudio del algoritmo de la suma y resta en enteros.

Los comportamientos esperados por los estudiantes se enuncian en la siguiente tabla:

Tabla 1: Previsión Secuencia didáctica 1

INTERACCIÓN	Previsión de comportamientos del estudiante
ACCIÓN	Se espera que el estudiante modele la situación planteada y relacione las fases de la ruleta con el número registrado en la hoja de evidencias. Asimismo, asocie tal acción con la operación de suma y resta de nuevos números con signos.
FORMULACIÓN	En este momento el estudiante deberá interpretar los registros al manipular la ruleta y argumentar por medio de una expresión algebraica, la relación existente entre las diferentes formas de sumar números enteros. En este momento se espera que los estudiantes realicen diferentes tipos de lenguaje, formal, algebraico, entre otros.
VALIDACIÓN	En este momento el estudiante debe ir reconociendo en los tiros jugados la posibilidad de ser generalizada la solución a los otros registros, frente a lo cual se espera que discutan en pareja y propongan la solución sin necesidad de hacer todo el procedimiento.
INSTITUCIONALIZACIÓN	En este momento la docente deberá formalizar la socialización de conjeturas de los estudiantes frente a sus procedimientos, el conocimiento puesto en juego en esta actividad, a saber, el concepto de número entero dejando como inquietud el significado del signo o negatividad de estos.

Es necesario resaltar que la secuencia didáctica se planeó desde esta perspectiva ya que los antecedentes analizados muestran que efectivamente hay problemas con estas operaciones en el conjunto de los números enteros. En el ámbito de la educación matemática, ha resultado difícil que los estudiantes tengan habilidad para operar con números enteros. Es posible que esta dificultad surja, porque los conocimientos adquiridos en matemática en los primeros años escolares son referidos a los números naturales y en este conjunto, las palabras agregar y aumentar están relacionadas con la adición; quitar y disminuir con la sustracción.

Sin embargo, en el conjunto de los números enteros, se observa que estas palabras, aumentar o quitar, no siempre se relacionan en forma natural con la adición y sustracción respectivamente. En ocasiones, el cálculo de una adición con números de distintos signos puede dar como resultado un número negativo, del mismo modo ocurre en la sustracción, en donde al restar dos números positivos el resultado puede ser un número negativo.

De ahí que, al resolver la actividad de “Ganancias y pérdidas” los estudiantes, se pretendió que se familiarizaran con los conceptos de suma de dos números enteros con signos iguales y distinto signo al agrupar semillas de una misma fase; el principio de cancelación cuando las semillas tenían el mismo cardinal de las fases; el concepto de operaciones con enteros al realizar varias sumas y restas de números enteros dentro de una misma expresión cuando agrupan las semillas de las mismas fases, realizando la operación correspondiente y al final volver agrupar semillas para conservan el signo de la fase con mayor semillas llegando al resultado deseado (Ver anexo 8).

Para exponer el tema los números enteros, se realizó la tercera actividad (Ver anexo 9) la cual tenía como objetivo definir a los estudiantes quiénes conforman el conjunto de los números enteros a partir de los números naturales, logar que identificaran las características del conjunto y su utilidad en la vida diaria, la ubicación gráfica, orden en la recta numérica y por último el desarrollo de una actividad en clase para aplicar lo enseñado (Ver anexo 10).

La cuarta actividad (Ver anexo 11) se realizó para dar a conocer a los estudiantes los conceptos matemáticos formales de las operaciones de suma y resta de números enteros con el objetivo que el estudiante por medio de ejemplos de la vida cotidiana entendiera la suma y resta de estos. Asimismo, se realizó una actividad en clase (Ver anexo 12) para estudiar, observar y analizar la comprensión que los alumnos tenían del tema e identificar las incidencias de los signos en la suma y resta de números enteros.

Finalmente, se elaboró la segunda secuencia didáctica: “Ascender y descender” (Ver anexo 13) con el objetivo de que los estudiantes pusieran en práctica el manejo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros, se divirtieran con el tablero didáctico y reforzaran los conceptos vistos para el Examen 1: “el conjunto de los números enteros” (Ver anexo 14) en el que se evaluaría cuantitativamente dicha temática acerca de la representación, ubicación en la recta de los números enteros, comparación y las operaciones de suma y resta de estos.

Una vez acabado el tema donde se va a realizar la investigación por el practicante, se dio paso a trabajar las otras actividades (Ver anexos 15 hasta 17) acerca del tema valor absoluto, multiplicación y división con números enteros. Para ello se utilizaron ejemplos de la vida cotidiana pretendiendo que los estudiantes analizaran la aplicación de las operaciones con multiplicación y división de estos números, con el fin, de que los estudiantes conceptualizaran la ley de signos para la multiplicación y división de números enteros haciendo uso de estos conceptos en operaciones usuales.

Por último, se realizó el Taller 2 (Ver anexo 18) donde se evaluó cuantitativamente todas las operaciones de los números enteros vistas en las anteriores actividades con el fin de observar y analizar las incidencias de los signos en la suma y resta de números enteros cuando se aplica al mismo tiempo las operaciones de multiplicación y división.

Para el análisis de resultados y toma de información de cada una de las actividades realizadas por el practicante como ya se mencionó anteriormente, se realizó un formato de registro donde se describía por sección la actividad a trabajar, el tiempo empleado, el por qué se hizo cada actividad, quienes participaron, resultados, observaciones e impresiones.

Cabe resaltar que la elaboración del contenido matemático de las actividades realizas para la práctica pedagógica III fueron hechas con los conocimientos previos del practicante acerca del tema y documentos sobre la enseñanza y aprendizaje de los números enteros[13] encontrados en la web aplicando el modelo constructivista de Piaget. Por tanto, se escogieron ejemplos y ejercicios específicos de la vida cotidiana para que los estudiantes fueran construyendo el concepto matemático formal de cada temática a través de la indagación y participación en clase.

Asimismo, la elaboración de las dos secuencias didácticas "Ganancias y pérdidas"[14], "Ascender y Descender"[15] basados en juegos matemáticos se encontraron en la web y se adaptaron a la situación deseada.

Finalmente, la investigación de la práctica pedagógica tuvo un enfoque cualitativo más que cuantitativo, puesto que se utilizó para describir un fenómeno que es muy frecuente en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros. Además, esta investigación tuvo un sentido exploratorio ya que permitió un acercamiento de una manera más efectiva a los procesos afectivos y cognitivos que experimentan los estudiantes durante su aprendizaje.

Con base al tema escogido: Los números enteros y la introducción a la investigación de: *La incidencia de la ley de los signos en la suma de los números enteros en Grado Séptimo*, surge la pregunta ¿Continúan los estudiantes del grado Séptimo de la Institución educativa los Comuneros con las operaciones de los números naturales, al realizar cálculos de suma y resta con números enteros? Esta pregunta permite reflexionar al practicante si los estudiantes al aplicar dichas operaciones con números enteros en el trabajo de aula, las secuencias didácticas desarrolladas cumplieron con el objetivo de evitar dificultades.

---

[13] www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/1quincena3/1quincena3.pdf

[14] www.youtube.com/watch?v=O3bUHb9qxVI

[15] www.youtube.com/watch?v=IAGczKSd848

2.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA

En esta sección se presenta un análisis de la información recolectada a lo largo del proceso de la investigación. Se divide en dos apartados. En el primero, el análisis de las actividades por separado y la información obtenida por las dos secuencias didácticas. En el segundo, la evaluación propuesta a los estudiantes sobre las incidencias encontradas en la suma de los números enteros.

En la etapa de ejecución se realizó un análisis de tipo cualitativo del desempeño de los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo, con el objeto de explorar el conocimiento matemático relativo a la suma de números enteros.

A continuación, se presenta el análisis de las actividades por separado y la información obtenida por las dos secuencias didácticas, así como el de la evaluación propuesta a los estudiantes.

2.5.1 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y LA INFORMACIÓN OBTENIDA EN LAS DOS SECUENCIAS DIDÁCTICAS

Las actividades de aprendizaje se desarrollaron con el propósito de describir y explorar los problemas de aprendizaje que tienen los estudiantes con respecto a las operaciones en el conjunto de los números enteros, especialmente en la suma.

La primera actividad (Ver anexo 6) prueba diagnóstica entendida como el conjunto de técnicas y procedimientos que se aplican antes y durante el desarrollo del proceso de instrucción, para determinar, describir, explicar y valorar aquellos aspectos del conocimiento inicial del estudiante, se realizó un análisis de tipo cualitativo buscando evidencias de cómo los estudiantes se apropian de la operación con números naturales. Para encontrar tales evidencias, se centró la atención en los siguientes aspectos: observar si los estudiantes estaban haciendo una adecuada aplicación de las operaciones de suma, resta y multiplicación con números naturales y conocer alguna de sus estrategias para resolver las situaciones que se les propusieron.

A continuación, se muestran los resultados y un análisis de la prueba diagnóstica, aplicada a los estudiantes del grado séptimo A de la Institución Educación los Comuneros.

Actividad 1

Recordemos que en el conjunto de los números naturales **sumar** es unir, juntar, añadir; **restar** es quitar, hallar lo que falta o lo que sobra, es decir, calcular la diferencia y **multiplicar**, es una forma abreviada de realizar una suma de sumandos iguales, y cada uno cumple sus respectivas propiedades, además se debe tener en cuenta el orden para realizar las operaciones.

1) De acuerdo con lo anterior desarrolla las siguientes operaciones

a) $255 + 45 \times 5 =$	b) $27 + 3 + 45 \times 5 + 16 =$
c) $18 \times 6 + 45 \times 3 + 18 =$	d) $3 \times (2 \times 4 + 12) \times (6 - 4) =$
e) $28 \times (24 - 16) \times 2 =$	f) $3 \times 9 + (6 + 5 - 3) + 12 \times 4 =$
g) $240 + 24 \times (48 + 40 \times 8) =$	h) $440 + [30 + 6 \times (19 - 2)] =$
i) $27 + 3 \times 5 - 16 =$	j) $2 \times \{4 \times [7 + 4 \times (5 \times 3 - 9)] - 3 \times (40 - 8)\} =$

Los resultados obtenidos de esta prueba fueron los siguientes:

El concepto de número natural y su representación gráfica es apropiada por los alumnos, asimismo las operaciones utilizando paréntesis, corchetes y llaves. Esto se debe, quizás a que los números naturales se han trabajado desde grados inferiores como lo expresa Stewart, (2012) el concepto de número nos es familiar, surge desde la aparición del hombre como sujeto pensante, es decir, desde la evolución de su esquema mental.

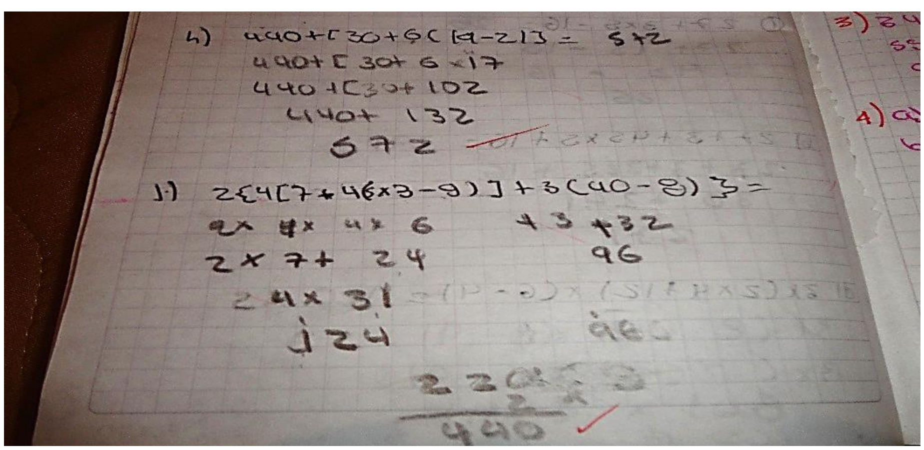


Figura 5: Evidencia del buen uso de las operaciones con paréntesis, corchetes y llaves

Sin embargo, una de las evidencias observadas en los ejercicios planteados que no tenían paréntesis es que algunos estudiantes no tuvieron la precaución del orden en que se deben hacer las operaciones, puesto que primero realizaban las sumas, restas y por último la multiplicación.

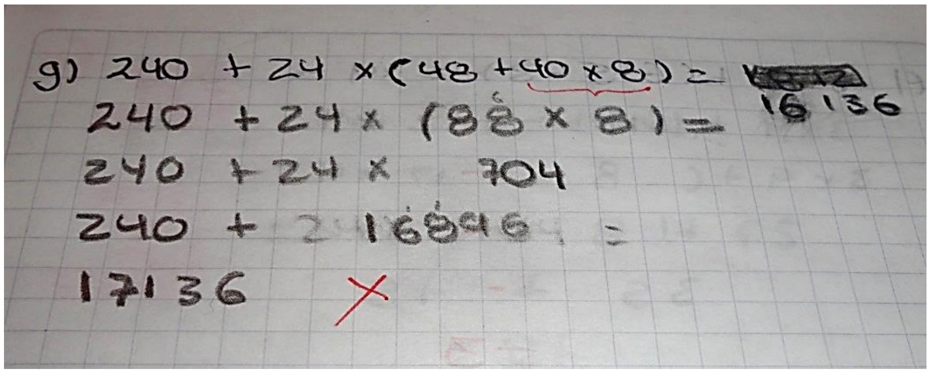


Figura 6: Evidencia del desconocimiento de las reglas de uso de los signos de agrupación

Por último, no hubo problemas con la solución de los ejercicios que tenían que ver con la relación de orden y se notó que los estudiantes hacen una buena interpretación en la resolución de problemas relacionados con las operaciones de los números naturales.

La segunda actividad (Ver anexo 7), fue realizada por todos los estudiantes del grado séptimo A y estos fueron organizados en 8 grupos de 3 estudiantes y 1 grupo de 4 estudiantes para repartir el material didáctico.

Figura 7: Momentos de la elaboración de la ruleta para la actividad practica “Ganancias y pérdidas” por los estudiantes en grupo

Se puede evidenciar la realización de la primera actividad practica diseñada por el practicante, donde el hacer, se ve reflejado cuando los alumnos realizaron su instrumento de trabajo y a la vez de aprendizaje generando un ambiente agradable y bienestar con la actividad manual tal como lo plantea el P.E.I de la Institución los Comuneros y teniendo en cuanta lo que plantea Brousseau, (1993) La Teoría de las Situaciones Didácticas consiste en organizar localmente el aprendizaje de los conocimientos elementales considerando su adecuación a las circunstancias y a las posibilidades del sujeto. (Dávila, 2003) p. 174.

Esta actividad practica ejecutada como secuencia didáctica “Ganancias y Pérdidas” generó curiosidad en los estudiantes sobre el uso de la ruleta, se preguntaban para qué tenían que colocar signos de + y - a las fases de colores que habían pintado.

Se utilizó como estrategia el modelo operatorio de “Ganancias y pérdidas” en la secuencia didáctica 1 para permitir más adelante en las actividades análogas que los estudiantes justifiquen bien la estructura de suma y resta de los números enteros y obtener evidencias de cómo ellos se apropian de estas operaciones a través del juego. Según Brousseau, (2007) la situación de juego es a menudo un buen modelo de situaciones reales y la teoría del juego permite entonces estudiar los dilemas que se presentan. p. 32

A continuación, se muestran los resultados y un análisis de la secuencia didáctica 1, aplicada a los estudiantes del grado séptimo A de la Institución Educación los Comuneros.

Una vez indicada la metodología de cómo se construye la ruleta y cómo se juega se establece de manera implícita el contrato didáctico entre el alumno y el maestro, pues el proceso de hacer cada uno lo que le corresponde, no se da de manera automática, sino que está dirigida por la intencionalidad de los diseños didácticos. Según la perspectiva de Brousseau (en Montiel: 2002) se le llama Contrato Didáctico a la relación del profesor con el alumno dentro de una situación didáctica, propia de un conocimiento específico.

Después de plantear la situación los alumnos tienen la responsabilidad de buscar una estrategia para resolverlo. Según Charnay, (1994) en la fase de acción es de gran importancia la anticipación; ya que consiste en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permite anticipar el resultado de una acción no realizada todavía de la que se dispone de cierta información. p.58

Brousseau, (2007) afirma:

> *"En general, una estrategia se adopta rechazando intuitivamente o racionalmente una estrategia anterior. Una estrategia nueva se somete a la experiencia y puede ser aceptada o rechazada según la apreciación que tenga el alumno sobre su eficacia. La sucesión de situaciones de acción constituye el proceso por el cual el alumno va a "aprenderse" un método de resolución de su problema" p. 22*

Esto se evidencio cuando los estudiantes al ir jugando y lanzando las semillas en la ruleta después de varios intentos de juego, realizaron sus propias estrategias para realizar el registro de datos y apresurar el juego para volver a llegar a su turno de lanzamiento.

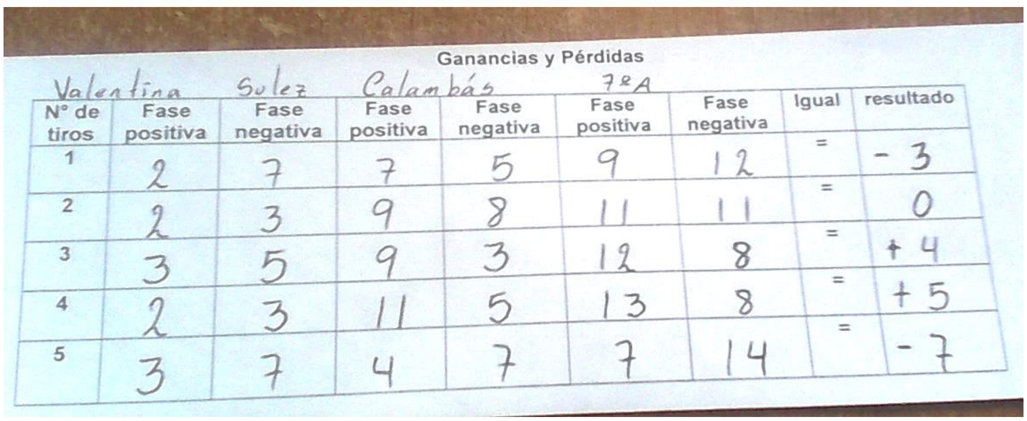
Todos los alumnos en su respectivo grupo participaron de la actividad y llenaron la tabla de control de acuerdo al número de tiros que realizaron. (Estos fueron 5).

Figura 8: Momentos de la actividad “Ganancias y pérdidas” por los estudiantes en grupo

Tabla 2: Registro de los datos de la secuencia didáctica 1

Resultados obtenidos por cada estudiante			
Correctos	Incorrectos	Regulares	Sin respuesta
11	5	10	4

Con esta actividad se pretendía que los estudiantes entendieran el significado de los números con signo, observando que los signos más y menos tienen dos funciones separadas y distintas. Pueden indicar cuándo un número es positivo o negativo, y también señalan la operación de la suma o resta.


Ganancias y Pérdidas

Valentina Solez Calambás 7ºA

Nº de tiros	Fase positiva	Fase negativa	Fase positiva	Fase negativa	Fase positiva	Fase negativa	Igual	resultado
1	2	7	7	5	9	12	=	- 3
2	2	3	9	8	11	11	=	0
3	3	5	9	3	12	8	=	+ 4
4	2	3	11	5	13	8	=	+ 5
5	3	7	4	7	7	14	=	- 7

Figura 9: Evidencia de un registro correcto de la secuencia didáctica 1

Se pudo observar que algunos niños fueron muy activos y preguntaban la manera de cómo debían registrar los resultados que obtenían en la tabla de control. Pues muchos de estos se trataban de números enteros negativos, mientras que otros niños hicieron la actividad sin sentido. Asimismo, buscaban la verificación por parte del docente acerca de los resultados que estaban registrando puesto que debido a los varios intentos que tuvieron para lanzar las semillas algunos estudiantes en la fase de formulación, manifestaron que los datos asignados en las fases positivas y negativas se sumaban sin necesidad de realizar el agrupamiento de cada fase y que el resultado final era una resta conservando el signo de la fase con mayor cantidad de semillas, comunicando a sus compañeros de grupo que su estrategia resulta válida. Lo que provoco en varias situaciones obtener respuestas por el docente que le generaran incertidumbre e indagación para llegar a lo que descubrió a través de una situación en acción. Además, este procedimiento fue un antecedente fundamental para comprender posteriormente la operación convencional de la suma y resta entre números enteros. Según Brousseau, (2007) en la concepción más general de la enseñanza, la marca de un saber es una asociación entre las buenas preguntas y las buenas respuestas.

Se pretendió en términos pedagógicos arribar a una etapa a-didáctica, en ésta no cambia el sentido de la situación didáctica, sin embargo, en ella, el alumno resuelve problemas a partir de sus conocimientos, por motivación propia, sin que el maestro intervenga.

Por otra parte, la comunicación ayudó a que los alumnos desarrollaran su aprendizaje con respecto a la suma de enteros cuando interactuaban entre ellos puesto que el lenguaje ayudaba a que organizaran sus ideas y pensamientos generando de forma implícita el conocimiento o el razonamiento de cierto concepto en este caso de la suma de números enteros. Piaget (1984) sostiene que al igual que el lenguaje interno, el pensamiento reflexivo ayuda a generar aprendizajes significativos.

Finalmente se pudo evidenciar que desde el dispositivo de las situaciones didácticas el alumno indaga, reflexiona sobre procedimientos, confronta soluciones, valida resoluciones y cuando el profesor institucionaliza el concepto, esto le permite adquirir herramientas funcionales y flexibles para la vida diaria.

En la tercera actividad, se realizó una introducción de los números enteros con situaciones de la vida diaria relacionadas con la temperatura, deudas, ganancias, graficas de ascender y descender. Estos problemas tenían como objetivo determinar que tanto podían los estudiantes interpretar números enteros, haciendo corresponder a determinadas situaciones de la vida cotidiana los números enteros positivos cuando tenga el signo (+) y los enteros negativos cuando tenga el signo (-).

Se pudo vivenciar por parte de los estudiantes muchas preguntas acerca de situaciones que representan la utilización de números enteros negativos y la secuencia didáctica “Ganancias y Pérdidas”, sirvió para explicar este tipo de situaciones porque se pudieron ubicar en su contexto y funcionamiento, además, la secuencia permitió que los estudiantes conocieran la existencia de estos números negativos. También, se pudo observar que no hubo problema en la identificación y nominación de los números opuestos, claro está, hasta el momento.

Seguidamente se dio a conocer cómo está constituido el conjunto de los números enteros y su representación gráfica en la recta numérica, cómo se ordenan y comparan. Estos conceptos se afianzaron con la actividad en clase (Ver anexo 10) en el que los estudiantes fueron muy participativos y comunicaban sus resultados.

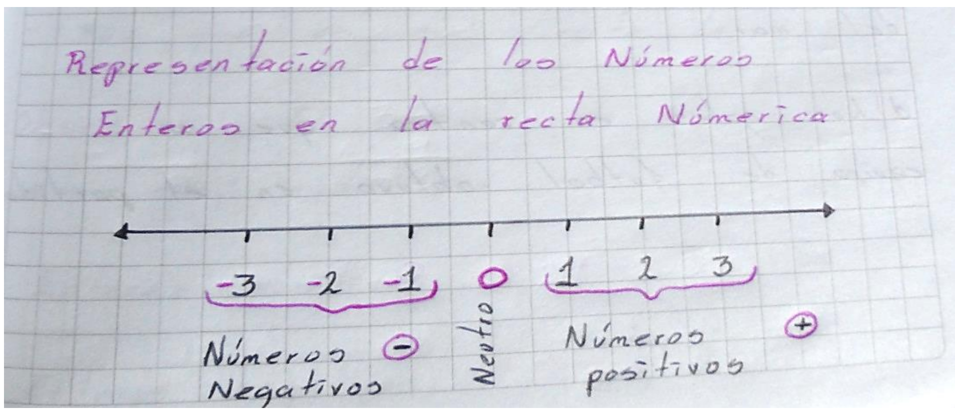


Figura 10: Representación de los números enteros en la recta numérica

Finalmente, se trabajó las operaciones de suma y resta con números enteros (Ver anexo 11) haciendo uso de ejemplos de la vida cotidiana y la representación de la suma en la recta numérica. Se evidencio que no hubo problema en la aceptación de la definición del conjunto de los números enteros y sus números opuestos, sin embargo, la representación gráfica del conjunto en la recta numérica, algunos estudiantes no se fijaron en el signo que diferenciaba a los números enteros positivos de los enteros negativos, los simbolizaban igual.

Con respecto a la suma de enteros positivos no hubo dificultad en entender la operación, su funcionamiento y representación en la recta numérica. Esto se alcanza porque los enteros positivos vienen siendo los mismos números naturales que ya conocen y se supone que deben manejar.

En cuanto a la suma de enteros negativos lo hacen de forma mecánica. Para sumarlos tienen en cuenta que se suma su parte entera (Valor absoluto) y al resultado se les coloca el signo negativo, pero en el momento de graficar esta suma hay dificultad, pues si la suma es $(-4) + (-3) = -7$. La representación de -4 es correcta por el alumno, pero la representación de -3 es incorrecta pues lo grafican desde el 0 y no desde la posición del -4 generando confusión en el resultado. En este momento no se dan cuenta que la suma de estos dos números en la recta tiene que ser -7.

Según Borjas, (2009) diversos autores (Bell, 1992; Bruno y Martinón, 1994; Car Maternas, 1984; Ernesto, 1985; Kuchemann, 1981; Liebeck, 1990; Mukhopadhyay, 1997) han puesto de manifiesto que los alumnos tienen dificultades para interpretar la suma y resta de números naturales o enteros usando el modelo de la recta numérica. Básicamente, se observa que tienden a representar los números y el resultado de operación como puntos aislados en la recta, no como vectores que les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo.

También, se analiza que para algunos estudiantes no es claro la existencia de números enteros negativos, todavía los nombran como un entero positivo, pues no hacen la distinción del menos que llevan a su izquierda.

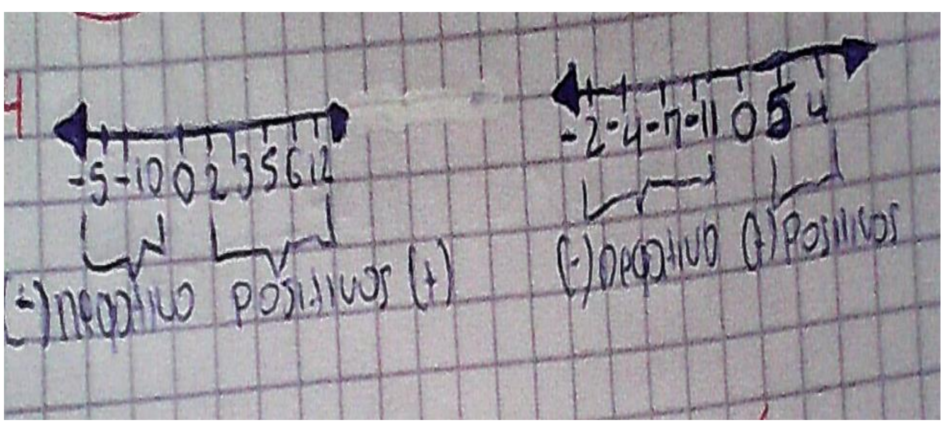


Figura 11: Evidencia de una ubicación de los números enteros errónea en la recta numérica

Para la parte de suma de enteros de distinto signo cuando el entero positivo es mayor que el entero negativo no hubo dificultades ni en dar el resultado correcto del ejemplo ni en interpretar los problemas planteados. Esto resulta porque es un caso particular de la resta de números naturales pero la representación gráfica no fue tan evidente, hubo dificultad en el momento de graficar el entero negativo, todavía no asimilan que el desplazamiento va hacia la izquierda del entero positivo ya ubicado.

Al darles la definición de suma de números enteros de distinto signo donde el entero negativo sin tener en cuenta el signo, es mayor que el entero positivo, los estudiantes son capaces de dar ejemplos y su resultado de forma correcta. Pero en el momento de solucionar ejercicios no es muy claro este concepto, hay confusión y su representación gráfica no se les hace fácil realizarla.

De lo anterior se pone de manifiesto que algunos de los estudiantes no logran por completo uno de los niveles que propone Gallardo, (2002) y es el número negativo formal, el cual implica que los estudiantes ven los números negativos como resultado y no como un número en sí.

Como ya se había mencionado anteriormente, se realizó un taller final (Ver anexo 12) que sirvió para analizar los argumentos que daban los estudiantes al solucionar los problemas planteados.

A continuación, se muestran los resultados y un análisis del primer punto del Taller Nº1 sobre suma y resta de números enteros, realizado en clase por estudiantes del grado séptimo A de la Institución Educación los Comuneros.

Actividad 1

1) Escribe "V" si es cierta o "F" si es falsa a las siguientes:

   a) La suma de dos números enteros negativos el resultado siempre es un número negativo.
   b) La suma de dos números enteros positivos, el resultado siempre es un número positivo.
   c) La suma de un número entero positivo con un número entero negativo, el resultado siempre es un número positivo.

d) La suma de un número entero negativo con un número entero positivo, el resultado es un número entero negativo cuando el mayor valor de estos dos números, es un número entero negativo.

e) La suma de un número entero positivo con un número entero negativo, el resultado es positivo cuando el mayor valor de estos dos números, es un número entero positivo.

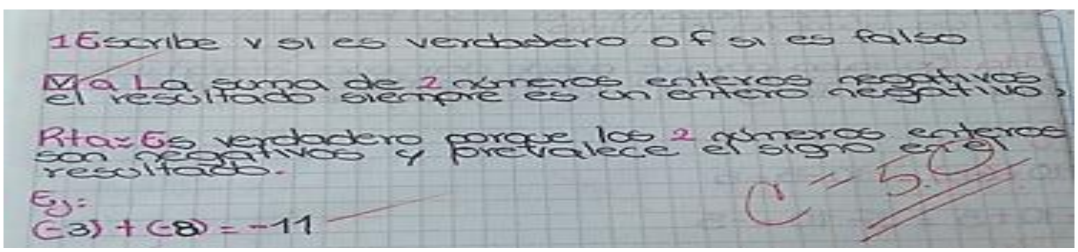
El resultado obtenido en esta actividad se presenta en el siguiente cuadro:

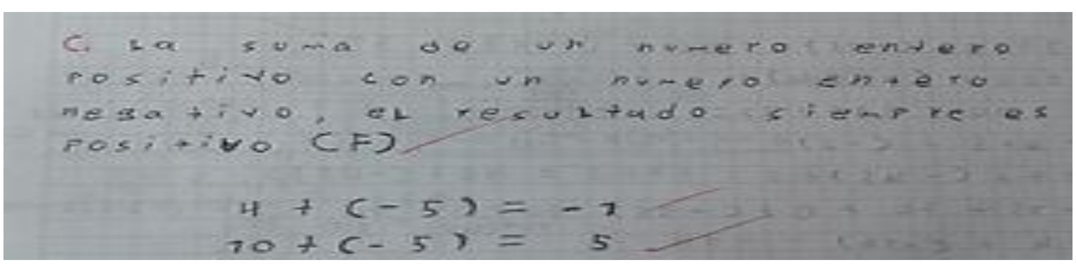
Tabla 3: Registro de los datos de la actividad 1

Resultados obtenidos por cada estudiante			
Correctos	Incorrectos	Regulares	Sin respuesta
24	2	4	0

Con esta actividad se pretendía que el estudiante argumentara los conocimientos que tenían sobre las operaciones de suma y resta con números enteros.

En esta actividad se obtuvieron 24 resultados buenos, unos estudiantes justificaron de la siguiente manera:


1Escribe V si es verdadero o F si es falso
V a La suma de 2 números enteros negativos, el resultado siempre es un entero negativo,
Rta: Es verdadero porque los 2 números enteros son negativos y prevalece el signo en el resultado.
Ej:
(-3) + (-8) = -11
C = 5.0


C. La suma de un número entero positivo con un número entero negativo, el resultado siempre es positivo (F)
4 + (-5) = -1
10 + (-5) = 5

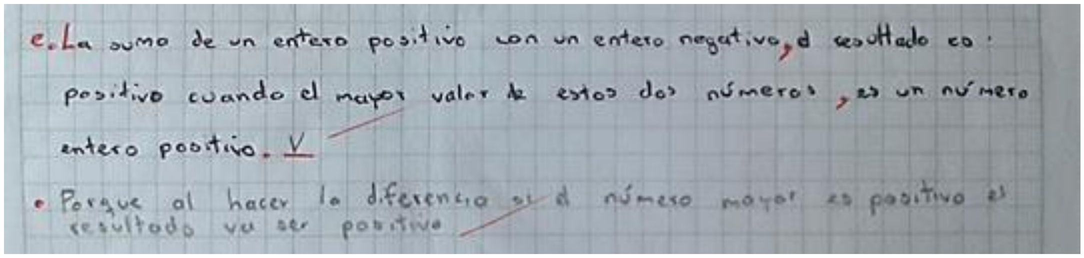


Figura 12: Evidencia de un registro correcto de la actividad 1

Los estudiantes además de entender correctamente la actividad, da sentido y significado a las operaciones como lo manifiestan algunos investigadores, (NTCM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; McIntoh, 1992) según Borjas, (2009) ya que reconocen el efecto de cada operación y las relaciones.

En el caso de los dos estudiantes que respondieron incorrectamente se podría intuir que aún hay dificultades en la comprensión de las operaciones con los números enteros.

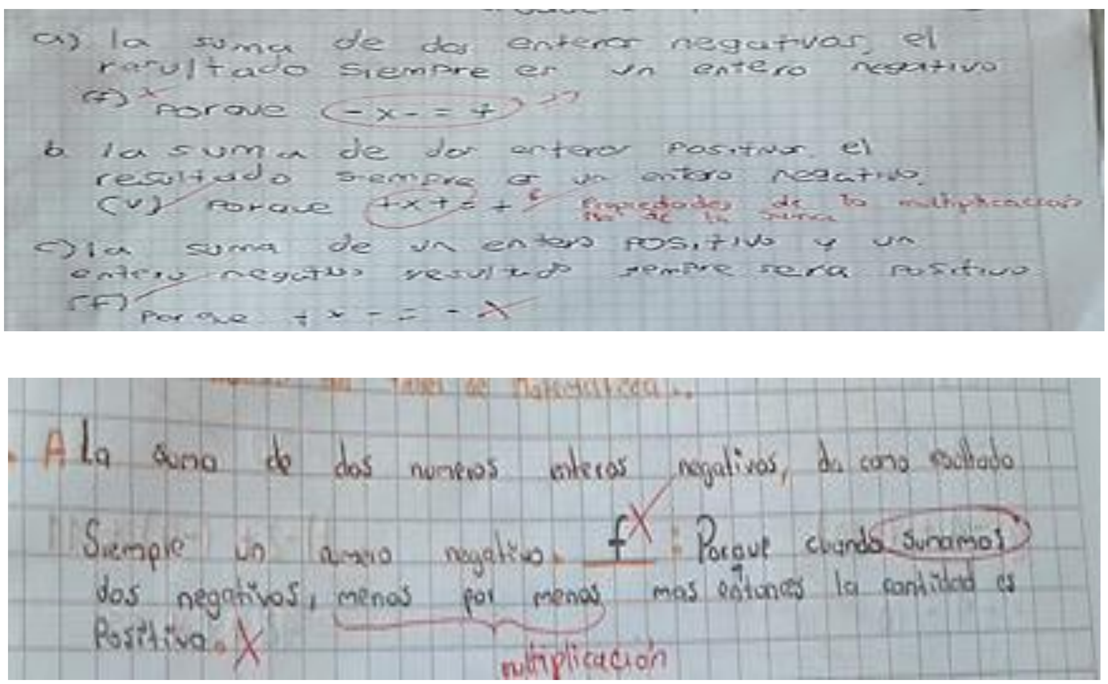


Figura 13: Evidencia de un registro incorrecto de la actividad 1

Se puede observar que para justificar su respuesta utiliza la regla multiplicativa de los signos en vez de la definición de suma entre números negativos. Bell, (Op.Cit,) considera que éste tipo de justificaciones se debe a que los alumnos no están acostumbrados a interpretar la resta entre números positivos como diferencia (resultados de una comparación) sino, más bien, como la acción de quitar al sustraendo al minuendo por tal razón la resta de dos números negativos se les dificulta comprender que da como resultado otro número negativo según Borjas, (2009).

Para dar por terminado esta sección sobre las operaciones de suma y resta con números enteros y pasar a evaluar estos temas enseñados a los alumnos, se realizó la secuencia didáctica 2: "Ascender y Descender" (Ver anexo13) segunda actividad practica en la que los estudiantes interactuaron en grupo, comunicaron sus estrategias de juego y que en varias ocasiones les colaboraban a sus compañeros para buscar una estrategia que les ayudara a ganar el juego. Se utilizó el modelo de ascender y descender para poner en práctica el cálculo mental de los estudiantes y entender que el desplazamiento hacia arriba indican números positivos y desplazamientos hacia abajo indican números negativos teniendo en cuenta la perspectiva de Bell, (1982) que sigue convencido de que a través de los modelos es como deben introducirse los enteros como lo planta Borjas, (2009) p. 199


Figura 14: Momentos de la actividad “Ascender y Descender” por los estudiantes en grupo

Se puedo evidenciar que los estudiantes después de varios intentos de tiro cuando lanzaban los dados ya tenían noción de cuanto tenían que sacar en los dados para poder ganar la partida. Según Brousseau, (2007) afirma que el medio para cada uno de los alumnos está constituido por el conjunto de partidas jugadas, en especial por la última. Puesto que para ganar no alcanza con que un alumno conozca cómo ganar, pues debe poder comunicar a sus compañeros la estrategia que propone, ya que esta es la única manera que tiene de actuar sobre la situación. p.23

En la actividad del valor absoluto con números enteros, quedó claro para los estudiantes que es la distancia desde el cero hasta dicho número entero y que su magnitud siempre va a ser positiva. Igual que las actividades anteriores, se hizo primero una construcción del concepto a través de situaciones de la vida cotidiana para luego enseñarles la definición formal. No hubo problemas en la solución del ejercicio planteado en clase.

Por último, en las actividades de operaciones con multiplicación y división de enteros se pudo analizar que la introducción del concepto con sus respectivos ejemplos no hubo dificultad por parte del alumno en entenderlos, sin embargo, a la hora de resolver el Taller 2 que recopila todos los conceptos trabajados en los números enteros se presentan varias incidencias en las operaciones y definiciones que no se analizan en este documento ya que el objeto matemático en esta práctica se trató sobre la incidencia en la adición de números enteros.

2.5.2 ETAPA DE LA EVALUACIÓN

La actividad de evaluación se desarrolló con el propósito de analizar las incidencias de la ley de los signos en la suma de los números enteros para describir, explorar y corregir los problemas de aprendizaje que tienen los estudiantes con respecto a esta operación.

A continuación, se muestran los resultados y un análisis del Examen 1: Conjunto de los números enteros a partir de los resultados conseguidos del punto sexto del examen, aplicado a los estudiantes del grado séptimo A de la Institución Educación los Comuneros.

Examen 1

6. Completa el siguiente cuadro y resuelva las operaciones de suma y resta con números enteros:

Valores				*a + (-b) + d*	*-b + (-c) + d*
a	*b*	*c*	*d*		
15	*10*	*0*	*3*		
9	*17*	*6*	*12*		
5	*21*	*7*	*16*		

La metodología enseñada en clase para la solución de la situación fue la siguiente:

- Identificar el número opuesto.
- Clasificar y operar los números en enteros positivos y enteros negativos en filas.
- Restar los resultados anteriores teniendo en cuenta el signo.

El resultado obtenido en esta evaluación con respecto al punto sexto, se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 4: Registro de los datos del examen 1 con respecto al punto sexto

Resultados obtenidos por cada estudiante			
Correctos	Incorrectos	Regulares	Sin respuesta
7	5	11	4

Con el punto 6 del examen se pretendía que el estudiante además de reemplazar las variables dadas de forma correcta, mostrara los procedimientos que realizó para solucionar la expresión algebraica con respecto a la operación de suma con números enteros.

Dentro de los resultados obtenidos se pueden observar y clasificar los procedimientos utilizadas por los alumnos con las incidencias encontradas de la siguiente manera:

1. **Procedimiento que tiene correspondencia con la metodología indicada**

En este punto se obtuvieron 7 resultados correctos, los estudiantes justificaron de la siguiente manera:

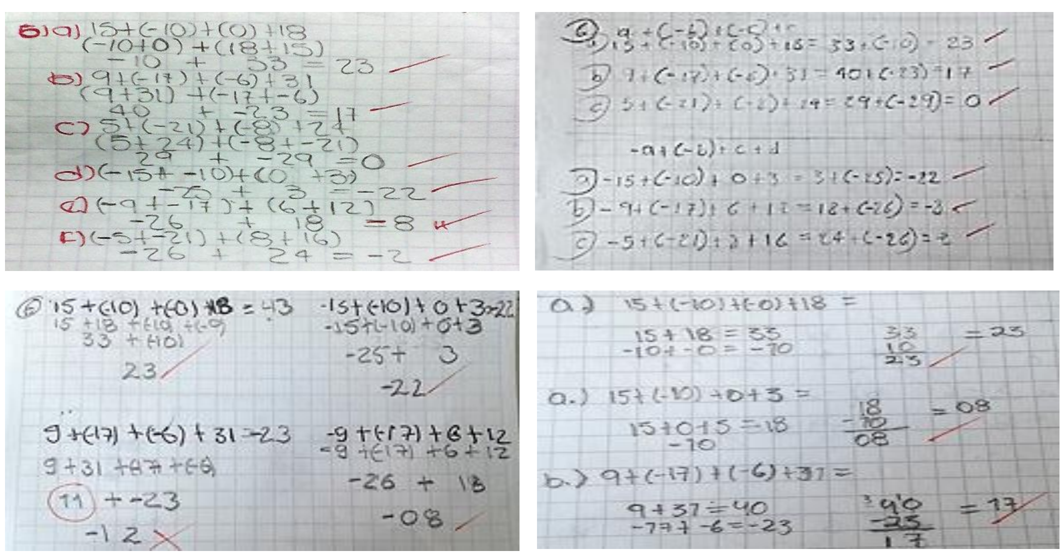


Figura 15: Realiza el ejercicio utilizando la metodología enseñada en clases

Como se puede observar en la Tabla 4, siete estudiantes no presentaron inconvenientes con la suma de números enteros, se puede intuir que estos estudiantes han logrado desarrollar quizás pensamiento numérico, como se manifiesta en los Estándares (MEN, 2006) el pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación al usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones.

Por lo anterior, para que los estudiantes desarrollen su pensamiento numérico, los docentes deben favorecer el incremento de su inteligencia teniendo en cuenta la perspectiva psicológica de Piaget el cual afirma que todos los organismos, en particular los seres humanos poseen inteligencia, pero que su desarrollo depende, hasta cierto tiempo, del desarrollo biológico, en este sentido, se trabaja con estudiantes, con edades comprendidas entre 12 y 13 años, que se ubican, según esta teoría, en la etapa de operaciones formales.

Asimismo, cuando el alumno da respuesta de lo ocurrido y es verdadero Brousseau, (2007) lo considera teorema en acto pues el alumno lo descubrió a través de una situación en acción.

2. Procedimiento no exitoso con la metodología indicada

En este punto se obtuvieron 5 resultados incorrectos, los estudiantes justificaron de la siguiente manera:

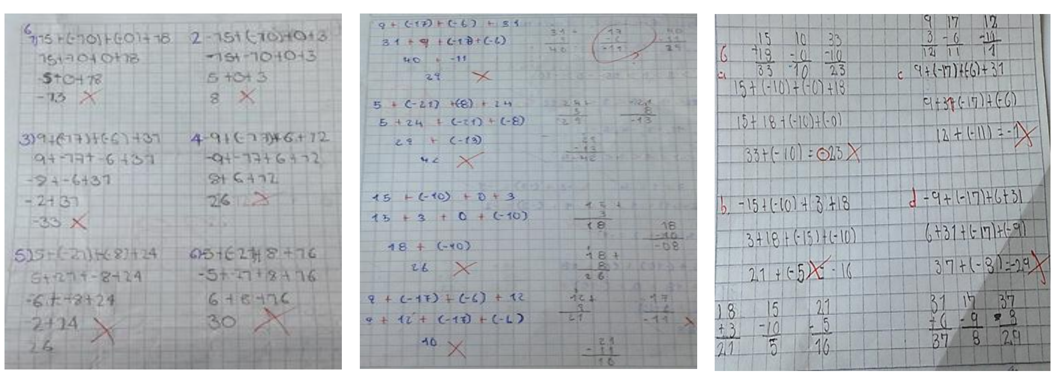


Figura 16: Realiza el ejercicio utilizando la metodología enseñada en clase, pero no llega al resultado correcto

Aquí**,** los estudiantes realizan el ejercicio utilizando la metodología enseñada en clases, sin embargo, no llegan a la solución correcta. Se puede intuir que aplicaron el concepto sin embargo, no se llega a la respuesta correcta quizás porque aún hay confusión en hacer el uso adecuado de los signos contrarios. Se puede evidenciar que cuando tiene signos contrarios suman como si fuesen cantidades positivas obteniendo un resultado incorrecto.

Una de las dificultades más frecuentes en el trabajo con números enteros es realizar la operación suma con números negativos, a los estudiantes les resulta extraño que cuando suman dos números negativos de otro "negativo". Se puede evidenciar en la Figura 16 que existe una incidencia en los signos ya que el estudiante clasifica los números en enteros positivos y enteros negativos en filas, pero no utiliza la operación resta entre los resultados anteriores teniendo en cuenta la definición de suma de enteros de distinto signo, tiene confusión sobre las dos maneras que se definieron para la suma de enteros con signos opuestos en las actividades analíticas. Según Borba, (1995) cree encontrar indicios de que se resuelven mejor las operaciones que afectan a números del mismo signo que las que afectan a números de distinto signo.

3. **Procedimiento no exitoso con metodología distinta a la indicada**

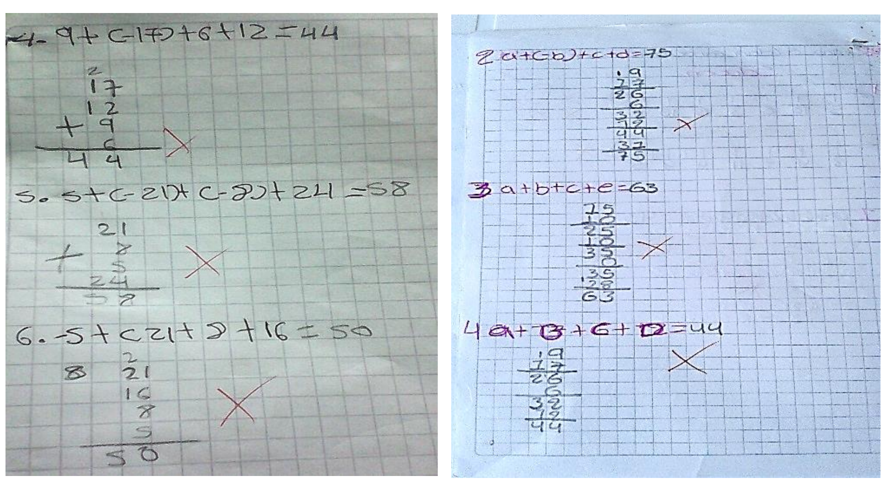


Figura 17: Realiza el ejercicio utilizando algoritmos no vistos en clases

Se puede observar, que el alumno cuando suma números enteros lo "asemejan al de los naturales, todos los números los convierte en números naturales y hace su respectiva suma en los naturales llegando a una respuesta no exitosa; esto generalmente ocurre por el uso del contexto puesto que según Godino, (2004) los estudiantes tienden a atribuir las características del conjunto de los números naturales al de los enteros, además influye la interpretación que se le dé a la situación. p.262

4. Procedimiento no exitoso sin resultados

Como se puede observar en la Tabla 4, en este punto seis del examen se obtuvieron 11 resultados regulares, los estudiantes justificaron de la siguiente manera:

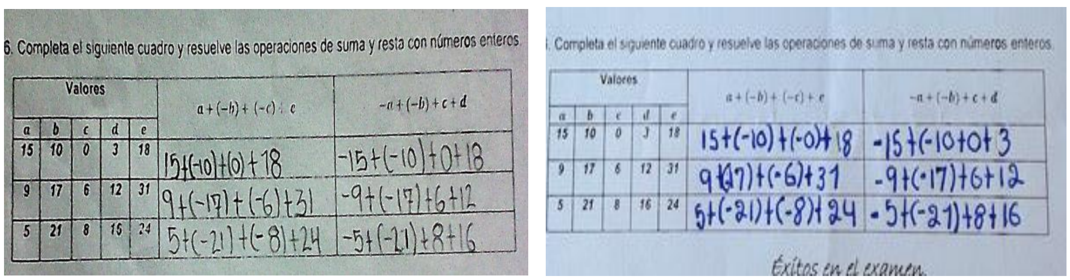


Figura 18: Realiza el ejercicio y no presenta ninguna solución de la situación propuesta

Aquí, el estudiante ha hecho un ejercicio valioso de asignar valores a las letras, sin embargo, el ejercicio quedó incompleto pues no presenta ninguna solución de la situación propuesta.

Hay una cantidad bastante relevante de estudiantes que utilizaron esta estrategia, es decir, no realizaron ningún procedimiento para desarrollar la situación, esto porque, el estudiante no aprendió la estrategia para desarrollar la situación, o comienza por las situaciones que sabe desarrollar y no le alcanza el tiempo, o se le olvidan conceptos y procedimientos para la resolución.

5. Procedimiento exitoso desconocido y procedimiento no exitoso sin justificación

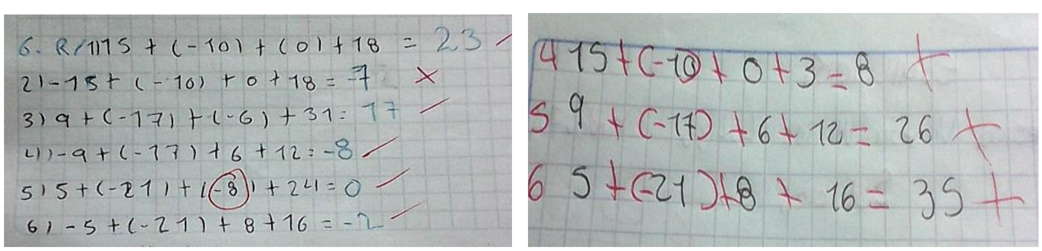


Figura 19: Realiza el ejercicio y escriben el resultado sin mostrar un procedimiento

Aquí, el estudiante llega al resultado, pero no muestra la estrategia que le permitió llegar a la respuesta de tal forma que no se puede observar ni intuir cómo está operando ni qué tipo de pensamiento numérico está desarrollando.

Algunas hipótesis que se pueden plantear son: Los estudiantes utilizan otras estrategias no vistas en clase porque el profesor, en cursos anteriores, se las ha enseñado, en particular a los repitentes; además, algunos le piden explicación a algún amigo que esté en cursos superiores o a un familiar, y ellos les explican estas estrategias.

6. **Procedimiento exitoso con errores de procedimiento.**

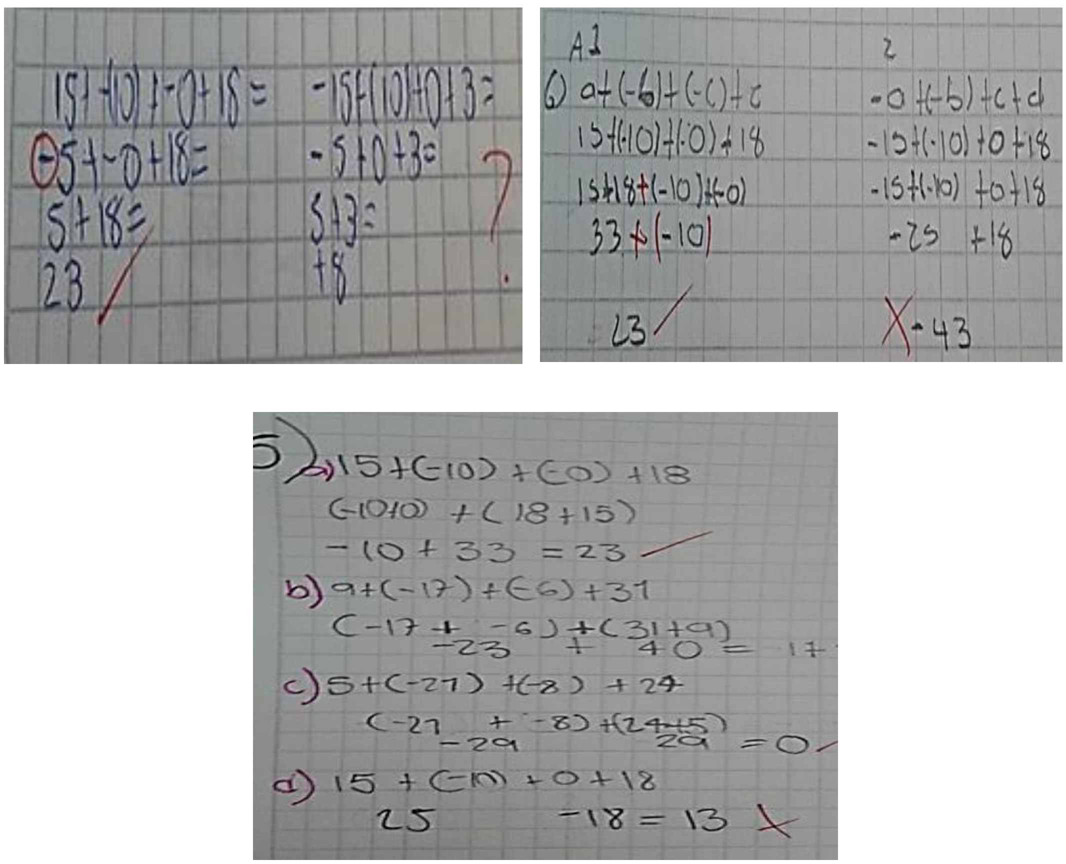


Figura 20: Realiza el ejercicio y coinciden con la metodología enseñada en clase, pero fallan en algunos resultados

Se puede analizar que los estudiantes realizan los ejercicios, sin embargo, se equivocaron en algunos resultados porque son accidentales (generados, por ejemplo, por falta de atención o por un fallo puntual de la memoria).

Finalmente, cabe resaltar que el Examen 1: “El conjunto de los números enteros” en el que se evaluó cuantitativamente la temática acerca de la representación, ubicación en la recta de los números enteros, comparación y las operaciones de suma y resta se obtuvieron los siguientes resultados:

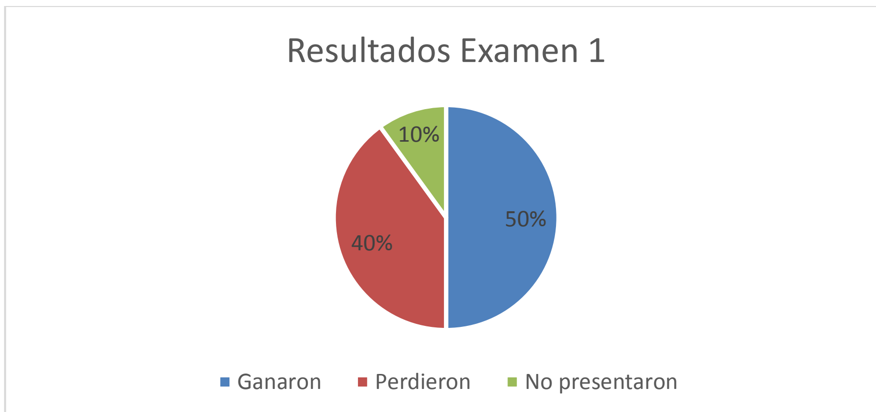


Figura 21: Gráfico Circular resultados examen 1

Presentaron el examen 27 alumnos, lo ganaron 15 de los cuales 13 fueron niños y 2 niñas; lo perdieron 12 alumnos de los cuales sólo 1 niño y 11 niñas; no lo presentaron 3 alumnos de los cuales 1 niño y 2 niñas.

La nota definitiva se obtuvo que ganan 22 alumnos de los cuales 14 fueron niños y 8 niñas; pierden 8 alumnos de los cuales 1 niño y 7 niñas.

Finalmente, al revisar las notas del examen 1 y las definitivas se puede inferir que la metodología de enseñanza propuesta en este trabajo cumplió las expectativas propuestas por la practicante de licenciatura para su práctica pedagógica, la cual era que los estudiantes lograran operar con números enteros, es decir que utilizaran procedimientos exitosos para resolver problemas de suma con números enteros.

2.6 CONCLUSIONES

- El paso de los números naturales a los números enteros no fue una tarea fácil para los matemáticos y sólo a finales del siglo pasado se dio una definición satisfactoria de los mismos. Esta imposibilidad de manejar números negativos fue uno de los grandes obstáculos epistemológicos que frenaron el desarrollo del Algebra durante siglos y puede ser parte de la razón por la cual aún en la actualidad su concepto y operaciones presentan dificultades a la hora de la enseñanza y aprendizaje para los alumnos.

- La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son dos procesos que deber ser desarrollados de manera conjunta. El interés de un maestro en matemática es hacer que sus estudiantes aprendan esta área y que al final la apruebe. De ahí que, la investigación que se llevó a cabo en esta práctica pedagógica pretende abarcar no sólo algunos aspectos relacionados con problemas de aprendizaje en la suma de números enteros, sino un panorama amplio de las incidencias existentes en este tema.

- De las incidencias obtenidos se encontró que los alumnos de grado séptimo, presentan dificultades de tipo conceptual y procedimental con la suma de números enteros, en particular cuando tienen que realizar operaciones con sumandos que tienen signos contrarios.

- Por los resultados obtenidos en los diferentes talleres y exámenes realizados por los estudiantes de manera individual y grupal, se observó que para algunos estudiantes su rendimiento es mejor al trabajar en forma grupal que en forma individual.

- La propuesta metodológica de enseñanza fue satisfactoria, ya que la mayoría de los estudiantes aprobó el tema desarrollado en la práctica pedagógica. No obstante, en la investigación se encontraron estrategias de los estudiantes, muy poco elaborados, que sugieren atención por parte del docente.

- Finalmente se puede concluir que el desarrollo de una práctica pedagógica en el aula es totalmente diferente a lo que se pretende obtener cuando se elabora, puesto que nada te garantiza que lo realizado con un objetivo específico se va a desarrollar en el aula como se tenía planeado.

- Para realizar una buena introducción a la investigación de práctica pedagógica sería bueno ir haciendo este tipo de actividades desde semestres o prácticas anteriores y no sólo en el último semestre ya que esto facilitará la identificación de las dificultades existentes en el aula tanto de los estudiantes como de los practicantes y una vez identificados se tendrían en cuenta para realizar un mejor estudio investigativo.

2.7 BIBLIOGRAFÍA

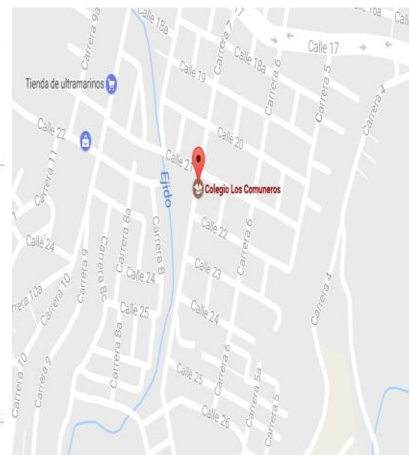
- Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1983). Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo. Trillas.
- Bonilla, Rosa Eliza. (1989). La Educación Matemática: una reflexión sobre su naturaleza y su metodología. Revista Educación Matemática. Vol.1, No. 2, Agosto 1989. Grupo Editorial Iberoamérica, México. Pág. 28 – 42.
- Borjas Franco, Dania Yulisa. (2009). Aprendizaje de los números enteros una "Experiencia significativa" en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa, MCD. Junio de 2009. Pág. 1 – 155.
- Borba, R.E. (1995). Comprensión y operaciones con enteros: dificultades y obstáculos. Actas de la XIX Conferencia Internacional de PME, Brasil, vol. 2. Pág. 226 – 231
- Brousseau, Guy. (1986). Fundamentos y métodos de las didácticas de las matemáticas. Vol. 7 Nº 2. Pág. 1 – 56.
- Brousseau, Guy. (1993). La teoría de las situaciones didácticas. Universidad de Montreal. Ginebra. Pág. 1 – 71.
- Brousseau, Guy. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. 1a ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal. Traducido por Dilma Fregona
- Flores, Raúl. (1971). Fundamentos de los sistemas numéricos: Construcción formal de los Números Enteros Interamericana. México.
- Flórez Ochoa, Rafael. (2001). Docentes del Siglo XXI: Cómo desarrollar una práctica docente competitiva. Bogotá Colombia: McGraw - Hil. Interamericana S.A de C.V.
  http://modelospedagogicos.webnode.com.co/modelo-constructivista/
- Gallardo, A. (1996). Análisis cualitativo en el estudio de números negativos. Actas de la XX Conferencia Internacional de PME, Valencia, vol. 2, 377-384. http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf

- Gallardo. Aurora y Hernández. Abraham. Emergencia de los números enteros. https://www.google.com.co/search?q=aurora+y+gallardo+emergencia+de+los+numeros+enteros&oq=aurora+y+gallardo+emergencia+de+los+numeros+enteros&aqs=chrome..69i57j0.15003j1j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8
- Godino, Juan. (2012). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de la matemática.
- Institución Educativa los Comuneros. Educación para nutrir la vida: Acuerdos para la convivencia. Municipio de Popayán – Cauca.
- Ipia, Alina. Caicedo, Mónica y Hoyos, Oscar. (2012). La enseñanza de los números enteros en grado séptimo, Universidad del Cauca. Popayán. Pág. 1 – 88.
- Jara Holliday, Oscar. (2013). Orientaciones teórico – prácticas para la sistematización de experiencias. Biblioteca virtual RS. 26 de agosto de 2013. Pág. 17
- Joshua, S. & Dupin. (1993). Introducción a la didáctica de las ciencias y las matemáticas. París, PUF.
- Kilpatrick, Jeremy. (1998). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. Universidad de Georgia. Bogotá
- Kilpatrick, Jeremy. Gómez, Pedro. Rico, Luis. (1998). Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, Resolución de problemas, Evaluación Historia. Universidad de los Andes. Bogotá
- Llinares, Salvador (2000). 4. Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. Departamento de Didácticas de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Lisboa, Portugal. Pág. 109 – 132
- Mejía J., Marco Raúl. (2007). La sistematización como proceso investigativo o la búsqueda de la episteme de las practicas. Expedición pedagógica nacional. Programa Ondas de Colciencias. Bogotá
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- Mogens, **N**iss. (1998). ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? Departament of Education and Science (DES). Madrid: MEC, 1985.
- Panizza, Mabel. (2007). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. Pág. 1- 17
- Piaget, J. (1960). Teoría constructivista. http://www.ub.edu/dppsed/fvillar/principal/pdf/proyecto/cap_05_piaget.pdf
- Piaget, J. (1979). Tratado de lógica y conocimiento científico (1). Naturaleza y métodos de la epistemología. Buenos Aires: Paidós
- Sadovsky, Patricia. (2015). La teoría de situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Pág. 1- 25
- Sarramona, Jaume. (2008). Teoría de la educación: Investigación disciplinar y retos epistemológicos. Barcelona: Ariel.
- Takahashi, Alonso. (1991). El maestro y su oficio. Medellín – Colombia, 26 de agosto.
- Tobón Tobón, Sergio. Herminio Pimienta, Prieto Julio. García Fraile, Juan Antonio. (2010) Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias. Pearson educación, México, Pág. 216
- Torres, C. (2007). Números Enteros: Origen e historia. edumate.wordpress.com. Recuperado el 28 de 08 de 2010. http://casanchi.com/mat/enteros01.pdf
- Vergnaud, G. (1989). L’obstacle des nombres négatifs et l’introduction à l’algèbre. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.),Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Les Editions Agence d’ARC, Quebec, 76-83.

2.8 ANEXOS

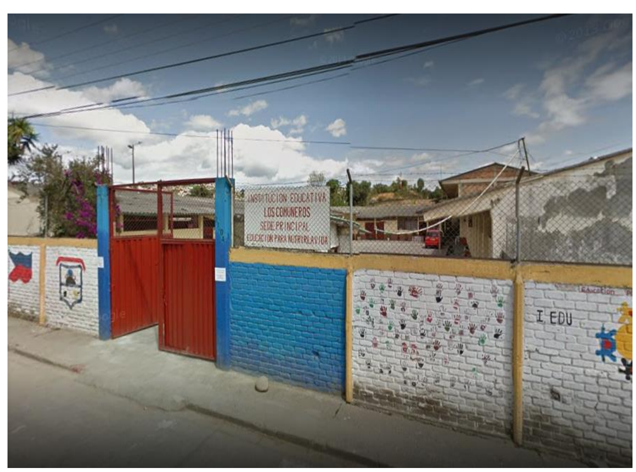
2.8.1 **Anexo 1.** Ubicación geográfica de la Institución Educativa “Los Comuneros” de Popayán



Imágenes tomadas de Google maps.

https://www.google.com.co/maps/place/Colegio+Los+Comuneros.

2.8.2 **Anexo 2:** Instalaciones de la Institución Educativa “Los Comuneros” de Popayán



2.8.3 **Anexo 3:** Maya curricular grado séptimo de la Institución Educativa “Los Comuneros” de Popayán

GRADO SEPTIMO				
EJE TEMATICO	CONTENIDO	COMPETENCIAS	INDICADORES DE LOGROS	LOGROS
PENSAMIENTO NUMERICO Y SISTEMAS NUMERICOS	**UNIDAD 1** **EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.** 1.1 Aproximación al conjunto de los números enteros. 1.2 Ubicación y desplazamiento en la recta numérica. 1.3 Relaciones de orden. 1.4 Operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación. 1.5 Polinomios aritméticos y jerarquía de operaciones. **Estándares considerados**	**INTERPRETATIVA** Reconoce números enteros, racionales y establece relaciones y operaciones entre ellos. Identifica la representación de un número entero, de un racional y la utiliza para resolver problemas.	➢ Hace cálculos y realiza las operaciones; suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación con los números enteros. ➢ Resuelve polinomios aritméticos estableciendo la jerarquía entre las operaciones aritméticas	➢ Que el estudiante efectúe operaciones básicas con los números enteros, aplicando las propiedades correspondientes. Que el estudiante resuelva polinomios aritméticos estableciendo la jerarquía entre las operaciones aritméticas

2.8.4 **Anexo 4:** Formato de registro diario de actividades

FORMATO DE REGISTRO DIARIO

Nombre: Isabel Cristina Guzmán López **Fecha: 8 y 11 de Febrero de 2013**

Proyecto: Práctica Pedagógica III / Área: Matemáticas / Programa: / Sección: 4 y 5

Qué hice hoy	Tiempo utilizado	Para qué lo hice	Quienes participaron	Resultados	Observaciones e impresiones
Realización de la secuencia didáctica No. 1: Pérdidas y Ganancias	1 hora y 50 min.	Esta secuencia didáctica “Ganancias y Pérdidas” se hizo con dos intenciones: 1. Dar una noción sobre las operaciones de suma y resta en el conjunto de los números enteros. 2. Permitir a los alumnos realizar su instrumento de trabajo y a la vez de aprendizaje haciéndoles sentir agrado con lo que están haciendo y poder obtener buenos resultados con el objetivo de la secuencia didáctica.	❖ 26 estudiantes ❖ El docente de matemáticas de la IELC de Popayán, sede principal.	Todos los alumnos pusieron atención a la explicación de la realización de la ruleta, midieron las circunferencias planteadas, dibujaron, recortaron, pintaron, pegaron y realizaron su instrumento de trabajo de forma dinámica.	Para la realización de la actividad se organizaron 8 grupos de 3 estudiantes y 1 grupo de 4 estudiantes. En la elaboración de la ruleta, los estudiantes se preguntaban para qué tenían que colocarles signos de + y − a las fases de colores que habían pintado. Se notó pulimiento por parte de los alumnos querían que lo que estaban haciendo les quedara bien y bonito.

2.8.5 Anexo 5: Guía sobre la clase el conjunto de los números naturales

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Diagnóstico a los estudiantes
sobre el conjunto de los números naturales

Clase N° 1 **Tema:** El conjunto de los números naturales

Objetivo general: Realizar un repaso sobre el conjunto de los números naturales

Una vez hecha la presentación del curso donde se expondrá la forma como se trabajará y se evaluará la materia, se hará una breve historia de cómo nació las matemáticas y de donde vino, con el fin de darles a conocer a los alumnos que no sólo existe el conjunto de los números naturales sino también otros conjuntos como lo son los Enteros, los Racionales, los Irracionales y por último los Reales que tendrá una duración de aproximadamente 15 – 20 minutos. Una vez hecha esta actividad, se dará paso a realizar un repaso de los Números Naturales y el uso de sus propiedades, para así tener en cuenta que vacíos o lagunas tienen los estudiantes, esto con el fin de que al momento de iniciar con la introducción del conjunto de números enteros podamos avanzar significativamente con la práctica llenando esos vacíos e incrementar el nivel intelectual de cada estudiante.

Contenido Temático:

LOS NÚMEROS NATURALES

Definición: El conjunto de los números naturales es aquel que utilizamos para contar y está compuesto por los números 0, 1, 2, 3, … A este conjunto lo denotaremos con el siguiente símbolo

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

LOS NÚMEROS NATURALES EN LA RECTA NUMÉRICA

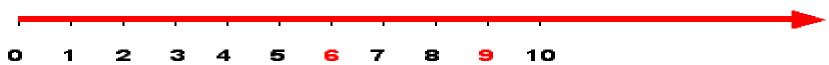
Sobre una recta señalamos un punto, que marcamos con el número cero. A la derecha del cero, y con las mismas separaciones, situamos de menor a mayor los siguientes **números naturales**: 1, 2, 3, ...

Se explicará que los números naturales constituyen un conjunto ordenado, esto quiere decir, que hay números naturales menores y mayores que otros.

Un número natural es menor que otro, si está colocado a la izquierda de él en la recta numérica.

Ejemplo:

El número 6 está a la izquierda del número 9, lo que quiere decir, que 6 es menor que 9 y utilizamos el símbolo (<)

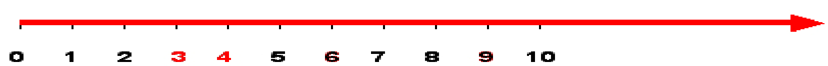


Por lo tanto, podemos decir que 6 **<** 9.

Un número natural es mayor que otro, si está colocado a la derecha de él en la recta numérica.

Ejemplo:

El número 4 está a la derecha del número 3, lo que quiere decir, que 4 es mayor que 3 y utilizamos el símbolo (>)



Por lo tanto, podemos decir que 4 **>**3

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS NATURALES

Con los números naturales podemos realizar distintas operaciones como la suma, la resta, la multiplicación y la división. Cada una de estas operaciones con números naturales presenta ciertas características y propiedades.

SUMA

Sumar es unir, juntar, añadir.

PROPIEDADES DE LA SUMA

Propiedad clausurativa: El resultado de sumar dos números naturales es otro número natural.

$\mathbf{a + b} \in \mathbb{N}$

$\mathbf{5 + 11 = 16} \in \mathbb{N}$

Propiedad Conmutativa: La suma no varía al cambiar el orden de los sumandos.

a + b = b + a

8 + 6 = 6 + 8

= 14

Propiedad Asociativa: El resultado de la suma es independiente de la forma en que se agrupen los sumandos

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(3 + 2) + 6 = 3 + (2 + 6) = 11$

Elemento neutro: El 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

$\mathbf{a + 0 = a}$

$3 + 0 = 3$

RESTA

Restar es quitar, hallar lo que falta o lo que sobra, es decir, calcular la diferencia.

PROPIEDADES DE LA RESTA

No es clausurativa: El resultado de restar dos números naturales no siempre es otro número natural.

$2 - 5 \notin \mathbb{N}$ se lee “No pertenee a los numeros naturales”

No es conmutativa: El resultado de cambiar dos números naturales no siempre es otro número natural.

$5 - 2 \neq 2 - 5$

MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO

Multiplicar, es una forma abreviada de realizar una suma de sumandos iguales.

Por ejemplo

Si un comerciante vende 5 helados a $ 250 cada uno el dinero que ingresa es:

250 + 250 + 250 + 250 + 250 = 250 x 5 = $1250

PROPIEDADES DEL PRODUCTO

Propiedad Conmutativa

El producto no varía al cambiar el orden de los factores

$\mathbf{a \,.\, b = b \,.\, a}$

$8 \,.\, 6 = 6 \,.\, 8$

$= (48)$

Propiedad Asociativa

El resultado de la multiplicación es independiente de la forma en que se agrupen los factores

(a . b) . c = a . (b .c)

(3 . 2) . 6 = 3 .(2 . 6)

= (36)

Elemento neutro: El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

a · 1 = a

3 · 1 = 3

Propiedad distributiva: El producto de unos números por una suma (o resta), es igual a la suma (o resta) de los productos parciales del número por cada sumando.

a . (b + c) = a . b + a .c

a . (b - c) = a . b - a .c

Por ejemplo

a · (b + c) = a · b + a · c

2 · (3 + 5) = 2 · 3 + 2 · 5

2 · 8 = 6 + 10

16 = 16

DIVISIÓN

La división es la operación matemática inversa a la multiplicación y consiste en encontrar cuantas veces está contenido un número en otro.

Repartir a partes iguales o partir en partes de un determinado tamaño.

Sean $D \div d = c$. Los términos que intervienen en una división se llaman, D, **dividendo** y d **divisor**. Al resultado, c, lo llamamos **cociente**.

División exacta:

Una división es exacta cuando el resto es cero.

D = d x c

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \cline{2-2} \boxed{0} & 3 \end{array}$$

Luego, 15 = 5 x 3

División entera:

Una división es entera cuando el resto es distinto de cero.

D = (d x c) + r

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} \boxed{2} & 3 \end{array}$$

Luego,17 = (5 x 3) + 2

PROPIEDADES DE LA DIVISION

No es clausurativa: El resultado de dividir dos números naturales no siempre es otro número natural.

$$2 \div 6 \notin \mathbb{N}$$

No es conmutativa:

$$\mathbf{a \div b \neq b \div a}$$

$$6 \div 2 \neq 2 \div 6$$

Cero dividido entre cualquier número da cero.

$$0 \div 5 = 0$$

No se puede dividir por 0.

ORDEN EN QUE SE DEBE HACER LAS OPERACIONES

En las expresiones con operaciones combinadas, hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis, corchetes y llaves.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones
- Por último, a las sumas y a las restas

2.8.6 **Anexo 6:** Taller que se aborda durante la sección de clase

Institución Educativa “Los Comuneros” – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Diagnóstico a los estudiantes
sobre el conjunto de los números naturales

Taller N° 1 **Tema:** Operaciones con los números naturales

EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES

Recordemos que **sumar** es unir, juntar, añadir; **restar** es quitar, hallar lo que falta o lo que sobra, es decir, calcular la diferencia y **multiplicar**, es una forma abreviada de realizar una suma de sumandos iguales, y cada uno cumple sus respectivas propiedades, además se debe tener en cuenta el orden para realizar las operaciones.

2) De acuerdo con lo anterior desarrolla las siguientes operaciones:

k) $255 + 45 \times 5 =$	l) $27 + 3 + 45 \times 5 + 16 =$
m) $18 \times 6 + 45 \times 3 + 18 =$	n) $3 \times (2 \times 4 + 12) \times (6 - 4) =$
o) $28 \times (24 - 16) \times 2 =$	p) $3 \times 9 + (6 + 5 - 3) + 12 \times 4 =$
q) $240 + 24 \times (48 + 40 \times 8) =$	r) $440 + [30 + 6 \times (19 - 2)] =$
s) $27 + 3 \times 5 - 16 =$	t) $2 \times \{4 \times [7 + 4 \times (5 \times 3 - 9)] - 3 \times (40 - 8)\} =$

3) Utiliza los símbolos menores que (<) ó mayor que (>) para las siguientes parejas de números:

a) 344 ___ 433 b) 553675 __ 553756 c) 900900__ 9008990

4) Resuelve los siguientes ejercicios utilizando el conjunto de los números naturales y las operaciones convenientes:
   a) En un partido de baloncesto, un jugador de 2,05 m de altura, ha encestado 12 canastas de dos puntos y 5 de tres puntos. ¿Cuántos puntos anotó? r/ 39
   b) Mi padre tiene 36 años, mi madre 34 y yo 12. ¿Cuántos años tendrá mi madre cuando yo tenga 21 años? r/ 43 años
   c) Ana es menos alta que Lucía y más que Alicia. ¿Quién es la más alta de las tres? r/Lucía (Lucía>Ana>Alicia)

2.8.7 **Anexo 7:** Primer secuencia didáctica

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Secuencia didáctica N° 1 **Tema: Suma y resta con números enteros**

Objetivo general

- Mediante la secuencia didáctica "Ganancias y Pérdidas" se pretende dar una noción sobre las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros.

Objetivos específicos

- Que a través del juego los estudiantes escriban en una hoja de control la expresión numérica y el resultado correcto, obtenido al lanzar las semillas en la ruleta
- Lograr que los estudiantes se interroguen acerca del resultado, cuando la fase negativa tiene mayores elementos que en la fase positiva.
- A través de varios intentos de juego y sus respectivas anotaciones el estudiante pueda construir un concepto informal sobre la suma y resta con números enteros. Para así evitar obstáculos en el futuro con ejercicios formales sobre este tema.

Contenido temático:

Ganancias y Pérdidas

El siguiente recurso didáctico reciclable en forma de ruleta nos representará ganancias y pérdidas en cuatro fases de distintos colores a los cuales se les asignaran signos positivos y negativos como lo muestra la figura.

Para esta actividad se necesitan semillas de lentejas que representaran los números y luego se deberá escribir la expresión numérica de cada fase con su respectivo signo, para así hacer una buena representación numérica. El estudiante debe adquirir una cantidad moderada de semillas y luego lanzarlas dentro de la ruleta cuando está girando, como muestra la figura.

Ya teniendo las semillas en la ruleta, se empiezan a agrupar en cada fase para contar y hacer la respectiva anotación. Luego se agruparán las cantidades positivas en una fase positiva y las cantidades negativas se agruparán en una fase negativa y se volverá a contar las semillas para así escribir la nueva expresión numérica obtenida.

Y por último, el estudiante dará a conocer el resultado de la expresión numérica que obtuvo.

2.8.8 **Anexo 8:** Hoja de control de los datos obtenidos en cada sección de lanzamiento del estudiante

Institución Educativa “Los Comuneros” – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Ganancias y pérdidas

N° de tiros	Fase positiva	Fase negativa	Fase positiva	Fase negativa	Suma total Fase positiva	Suma total Fase negativa	Igual	Resultado final
1							=	
2							=	
3							=	
4							=	
5							=	

Una vez terminada la ruleta por el grupo asignado el registro de datos se da. Los estudiantes empiezan a jugar entre ellos por turno, lanzan las semillas, realizan los agrupamientos en cada fase y escriben en la hoja los datos sobre el número de semillas. Una vez hecho esto, realizan el agrupamiento de semillas en la fase positiva y en la fase negativa para obtener la suma total de cada fase y proceder al resultado final escribiendo en la hoja el número obtenido con signo y luego sigue el siguiente jugador**.**

2.8.9 **Anexo 9:** Guía sobre la clase el conjunto de los números enteros

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Clase N° 2 **Tema: el conjunto de los números enteros**

Objetivos

- Definir quienes conforman el conjunto de los números enteros a partir de los números naturales.
- Identificar las características del conjunto de los números enteros y su utilidad en la vida diaria.
- Ubicación gráfica y orden del conjunto de los números enteros en la recta numérica.

Mediante el siguiente ejemplo de la vida cotidiana se pretende que los estudiantes identifiquen la existencia de un nuevo conjunto que incluye el conjunto de los números naturales y los opuestos a ellos. Con los números naturales se resuelven diversos problemas, por ejemplo, de adición y sustracción.

Ejemplo

Imaginemos que en un invierno en la ciudad de New York la temperatura es de 4 °C. Si bajó 7 °C más, ¿cuál es la nueva temperatura?

O supongamos que en el juego de la ruleta en fase positiva caen 4 semillas y en la fase negativa caen 7 semillas, ¿Cuántas semillas me quedan y en qué fase?

La resta 4 – 7 no tiene solución en los números naturales y el cero. Esto significa que necesitamos tener otros números que nos permitan realizar ese tipo de operaciones.

¿Cómo representas 18 °C bajo cero con un solo número o 18 semillas en la fase negativa? Probablemente lo hacemos así: -18, el cual se lee "menos 18" o el opuesto de 18.

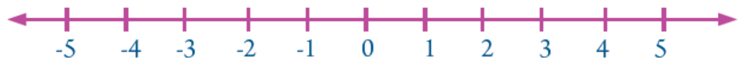
Para poder representar este número es necesario considerar otro conjunto de números, el que incluye los números positivos, negativos y el cero, y se denomina conjunto de los números enteros.

Contenido temático

Definición: el conjunto de los números enteros está constituido por el conjunto de los números naturales con sus correspondientes opuestos**.** A este conjunto lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{Z}$

Representación gráfica de los números enteros en la recta

Definición: Para representar los números enteros en la recta numérica marcamos el punto que representa el cero y definimos a partir de él dos sentidos: hacia la derecha, colocamos los números positivos y hacia la izquierda, los números negativos.



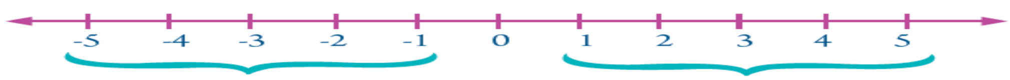
Por lo tanto, el conjunto de los números enteros es

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

"Una recta está formada por puntos que esta uno a continuación del otro y se extienden indefinidamente hacia la izquierda y derecha. Esta situación se representa por flechas que aparecen en los extremos. Para representar los números, se marcan puntos de la recta, que se encuentran a la misma distancia uno del otro, a estas marcas se le hace coincidir números, 1, 2, 3, ... A esta recta se llama recta numérica." (Explicación)

Números opuestos

En la recta también podemos observar números que están a la misma distancia del cero, pero en lados contrarios. A estos se les llama, números opuestos.



Números negativos (–)   Números positivos (+)

El conjunto de los números enteros, facilita la representación de situaciones que, en el conjunto de los números naturales, es más difícil. Por ejemplo, la representación de situaciones que deben realizarse con números opuestos, como las siguientes:

a) La representación de temperatura bajo cero.
b) La pérdida obtenida al efectuar cuentas.
c) La distancia vertical bajo el nivel del mar.
d) Los goles en contra que un equipo de futbol obtuvo en un partido.

Ejemplo

1. Julián lanzó en la ruleta 10 semillas y todas cayeron en las fases negativas. Representaríamos este número como – 10 que es el opuesto a 10
2. Santiago perdió 14 canicas durante el descanso. Representaríamos este número como -14 que es el opuesto a 14
3. Un pez está nadando a una profundidad de 5 mt por debajo del nivel del mar. Este número se mostraría como -5 que es el opuesto a 5
4. Tatiana debe a Jairo $1800. Este número se representaría -1800 que es el opuesto a 1800

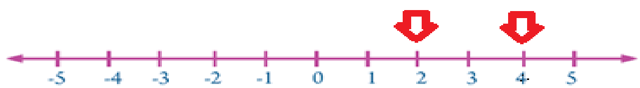
Ordenar y comparar números enteros

En la recta numérica se puede ordenar y comparar números enteros.

- Un número entero es mayor que otro, si está colocado a la derecha de él en la recta numérica.

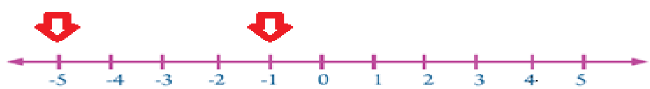
Ejemplo:

1. El número 4 está a la derecha del número 2, lo que quiere decir, que 4 es mayor que 2 y utilizamos el símbolo (>)



Por lo tanto, podemos decir que 4 **>** 2

2. El numero -1 está a la derecha del número -5, lo que quiere decir, que -1 es mayor que -5.

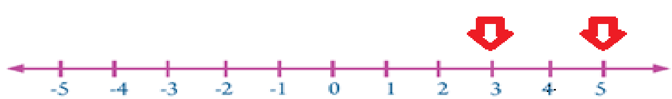


Por lo tanto, podemos decir que -1 **>** -5

- Un número entero es menor que otro, si está colocado a la izquierda de él en la recta numérica.

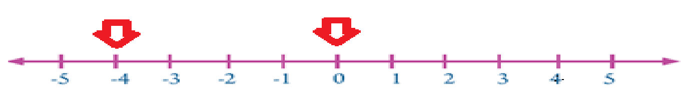
Ejemplo:

1. El número 3 está a la izquierda del número 5, lo que quiere decir, que 3 es menor que 5 y utilizamos el símbolo (<)



Por lo tanto, podemos decir que 3 **<** 5.

2. El número -4 está a la izquierda del número 0, lo que quiere decir, que -4 es menor que 0 y utilizamos el símbolo (<)



Por lo tanto, podemos decir que -2 **<** 0.

Observación

El conjunto de los números enteros está conformado por:

Enteros positivos	z^{+}
Enteros negativos	z^{-}
Cero	$\{0\}$

Esto es

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{-} \cup \{ 0 \} \cup \mathbb{Z}^{+}$$

2.8.10 **Anexo 10:** Taller que se aborda durante la sección de clase

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

ACTIVIDAD EN CLASE

1. Escribe en tu cuaderno el número opuesto de:

a) 7 **b)** − 5 **c)** – 1 **d)** 0 **e)** 237

2. Escribe en tu cuaderno en cada caso el tipo de numero entero que lo representa: P si le corresponde un entero positivo; N si es negativo; C si es cero.

a) Las ganancias de una fábrica.
b) la cantidad de semillas que caen en la ruleta están en las fases positivas
c) Un equipo tiene igual número de goles a favor que en contra.
d) La cantidad de goles en contra.
e) Gastar más de lo que se gana.
f) Ahorrar en una alcancía.
g) En la ruleta caen en las fases positivas y en las fases negativas, igual cantidad de semillas.

3. Escribe en tu cuaderno dentro de cada cuadro el número que falta.

2.8.11 **Anexo 11:** Guía sobre la clase las operaciones del conjunto de los números enteros

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Clase N° 3 **Tema: operaciones de suma y resta con números enteros**

Objetivos

- Entender por medio de ejemplos de la vida cotidiana la suma y resta de enteros.
- Resolver ordenadamente ejercicios de suma y/o resta de números enteros
- Resolver con orden problemas de suma o resta de números enteros.

Mediante el siguiente ejemplo de la vida cotidiana se pretende que los estudiantes analicen como se resuelven operaciones de suma y resta con los números enteros. Con el fin de que identifiquen si es un número entero positivo o un número opuesto y al mismo tiempo verificar que la operación propuesta por los estudiantes es la correcta a dicha situación.

Ejemplo

En la tienda de la Institución Educativa los Comuneros se introdujo en sus productos la venta de frutas y jugos naturales. Los encargados llevaron registros de ganancias y pérdidas.

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
P = \$2000	G = \$500	G = \$1000	P = \$1500	G = \$2500

Donde
G = ganancias
P = pérdidas
¿Durante estos días se obtuvieron ganancias o pérdidas?
Probablemente lo que se pretende es:
P = 2000 + 1500 = 3500
G = 500 + 1000 + 2500 = 4000
Luego
G – P = 500

Otra solución posible y que debería ser la correcta es:
Cuando hablamos de pérdidas y ganancias, significa que se utilizaran números positivos y números negativos, para saber si la tienda gano o perdió se plantea la siguiente suma:

$-2000 + 500 + 1000 + (-1500) + 2500$

En el ejemplo anterior podemos plantear un cambio entre las ganancias y pérdidas e interactuar con los alumnos con sus posibles respuestas.

Contenido temático

Suma de números enteros
En la suma podemos definir tres casos estos son:

Suma de números enteros positivos: Para **sumar dos números enteros positivos**, se suman sus valores y al resultado se le añade el mismo signo positivo que tienen.

Ejemplos:

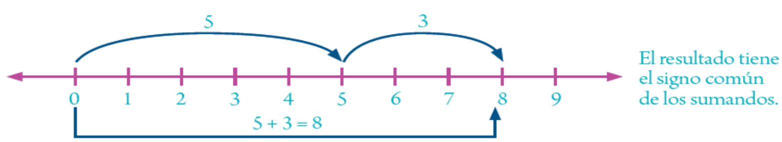
1. $5 + 4 + 10 + 45 = 64$

2. $1500 + 5300 + 700 = 7500$

3. Manuel tiene 5 canicas y gana 3. ¿Cuántas canicas tiene?

Solución:

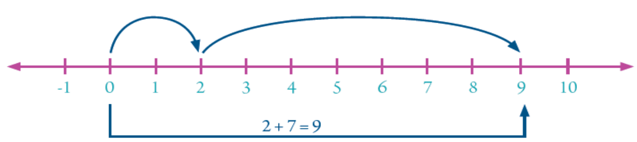
Como este caso se trata de "tener" y de "ganar", ambos números son positivos. Esto se representa por medio de la suma 5 + 3. En la recta numérica esta suma se representa así,



R: Manuel posee un total de 8 canicas.

4. En un partido de futbol, Juan hizo 2 goles en el primer tiempo y 7 goles en el segundo tiempo. ¿Cuántos goles hizo Juan en el partido?

Solución:
Como este caso los goles del primero y segundo tiempo fueron a favor, estos se representan por medio de la suma 2 + 7. En la recta numérica esta suma se representa así,



R: Juan hizo 9 goles en total.

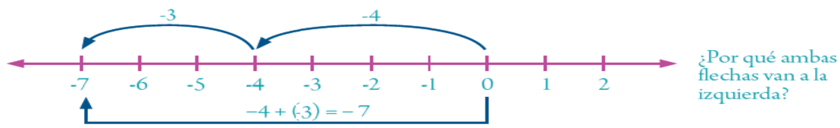
Suma de números enteros negativos: Para sumar dos números enteros negativos, se suman sin tener en cuenta el signo y al resultado se le añade el mismo signo negativo que tienen.

Ejemplos:

1. (– 5) + (– 7) + (– 9) = – 21

2. (– 1250) + (– 3500) = – 4750

3. Observa ahora como sumamos – 4 + (− 3) en la recta numérica.

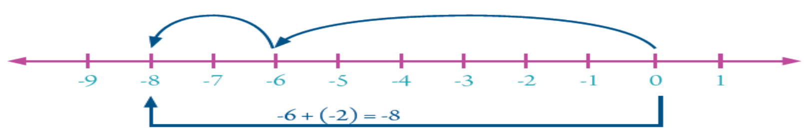


En este caso como los números a sumar son los números opuestos de 4 y 3, su desplazamiento es hacia la izquierda por tanto la suma de dos números opuestos da otro opuesto. Así, – 4 + (− 3) = – 7.

4. Pablo le debe 6 dólares a Carlos y 2 dólares a María. ¿Cuántos dólares debe en total?

Solución:

A la palabra debe le podemos asignar el símbolo menos, es decir – 6, – 2 y se suman – 6 + (– 2). Se representa gráficamente así:



R: Pablo debe en total, – 6 + (– 2) = – 8

Suma de números enteros de distinto signo: en está encontramos dos casos

- Si el número entero positivo sin tener en cuenta el signo es mayor que el número entero negativo sin tener en cuenta el signo, el resultado que se obtiene conserva el signo positivo.

Ejemplo

1. Al lanzar las semillas en la ruleta, 4 caen en la fase positiva y 1 en la fase negativa, tendremos como resultado 3 positivo. Esto es

   4 + (– 1) = 3

2. Si tengo $600 y me gasto en la tienda $350, me sobrarían $250. Simbólicamente, esto es

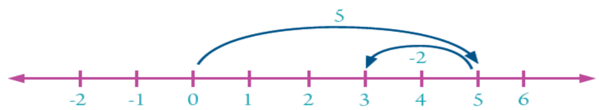
   600 + (– 350) = 250

3. ¿Qué número se debe sumar a 5 para obtener 3?

Solución:

5 + __ = 3

El problema lo podemos plantear así:
¿Crees que el sumando que falta puede ser menor que alguno de los valores dados?
Para poder contestar, se utilizará la recta numérica.



Puedes ver que la segunda flecha tiene dos espacios hacia la izquierda, ya que representa a – 2, que es el opuesto a 2.
El número que se debe sumar a 5 para obtener 3 es − 2
¿Cuál es el resultado de 5 + (− 2)? Se puede ver en el grafico que 5 + (− 2) = 3.

Observación

I. Miremos que la primera flecha va hacia la derecha, cuando el número es positivo. Y si el número es negativo va hacia la izquierda. El resultado será el último número que señala la segunda flecha.

II. A los números negativos los llamaremos los opuestos de los números positivos, esto es

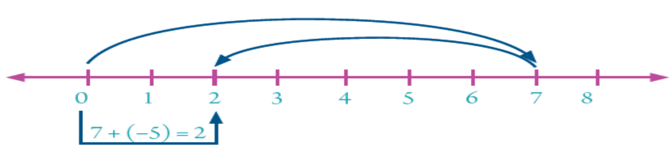
– 5 es el opuesto de 5
– 100 es el opuesto de 100

Pero, NO solamente los números negativos son los números opuestos, hay que tener en cuenta que

5 es el opuesto de – 5 y 5 no es un número negativo.
100 es el opuesto de – 100 y 100 no es un número negativo

Luego, en nuestro curso los números opuestos nos representan a los números negativos.

4. Resuelve la siguiente suma 7 + (− 5)



Observa que la respuesta tiene el signo del mayor valor de los sumandos.

- Si el número entero opuesto sin tener en cuenta el signo es mayor que el número entero positivo sin tener en cuenta el signo, el resultado que se obtiene conserva el signo del número opuesto.

Ejemplo

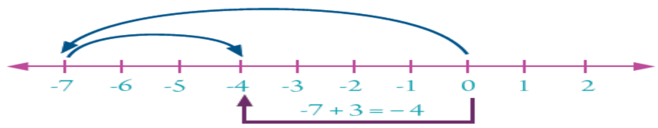
1. Al lanzar las semillas en la ruleta, caen 20 en la fase negativa y 5 en la fase positiva, tendremos como resultado – 15, que es el opuesto a 15. Esto es

– 20 + 5 = – 15

2. Si Ángela le debe 7 dólares a Luisa y le abona 3 dólares. ¿Cuánto le queda debiendo?

   − 7 + 3 =

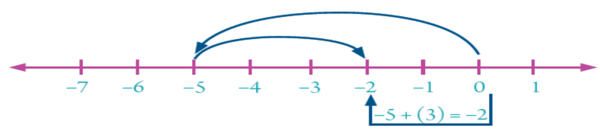
Solución:
Como la deuda se representa por enteros negativos, caso contrario son ganancias como los ahorros, abonos, etc., se representa por un entero positivo.



R: − 7 + 3 = – 4

Observación:
Miremos que para representar la deuda en la recta se hace con una flecha cuyo origen está en cero y llega a −7; pero el abono se hace con otra flecha que va desde −7 tres espacios hacia la derecha y el número que señala es la respuesta. (Explicarla)

3. Tengo en la tienda una deuda de $800 y pago $500, ¿cuánto quedo debiendo?, serian $300. Esto es ¿cuánto es – 8 + 5 = – 3? Así, – 3 es el opuesto de 3.
4. Ahora suma – 5 + 3 en la recta numérica.



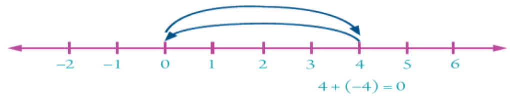
La respuesta tiene el signo del número mayor.

R: – 5 + 3 = – 2

Observación
Miremos mediante un ejemplo en donde si los sumandos son opuestos el resultado es cero, es decir, la suma de dos números enteros opuestos es igual a cero.

Ejemplos:
1. 4 + (− 4)

Solución:



2. – 2350 + 2350 = 0

3. 23 + (– 10) + 5 + (– 18) = 0

2.8.12 **Anexo 12:** Taller que se aborda durante la sección de clase

Institución Educativa “Los Comuneros” – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

ACTIVIDAD EN CLASE

2) Escribe “V” si es cierta o “F” si es falsa a las siguientes:

f) La suma de dos números enteros negativos el resultado siempre es un número negativo.
g) La suma de dos números enteros positivos, el resultado siempre es un número positivo.
h) La suma de un número entero positivo con un número entero negativo, el resultado siempre es un número positivo.
i) La suma de un número entero negativo con un número entero positivo, el resultado es un número entero negativo cuando el mayor valor de estos dos números, es un número entero negativo.
j) La suma de un número entero positivo con un número entero negativo, el resultado es positivo cuando el mayor valor de estos dos números, es un número entero positivo.

2) Encuentra el resultado de las siguientes sumas:

a) 37 + 8 + (– 15) =	b) − 226 + (− 194) =
c) – 700 + 537 + 32 =	d) − 2 + (−9) + 11 =
e) − 4 + 5 + (– 2)=	f) − 15 + 70 + 0 + (– 25) =
g) 37 + (− 45) + 3 =	h) − 4 + (− 10) =

3) Escribe el opuesto de:

a) 7	b) – 3	c) – 2
d) – 8	e) 1	f) 0

2.8.13 **Anexo 13:** Segunda secuencia didáctica

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción de operaciones
con el conjunto de los números enteros

Secuencia didáctica N° 2 **Tema: Suma y resta con números enteros**

Objetivo general

- Mediante la secuencia didáctica "Ascender y Descender" se pretende que el estudiante practique el manejo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros.

Objetivos específicos

- Este juego nos permitirá analizar si los estudiantes han entendido el concepto de números opuestos.
- Nos facilitará que los estudiantes aprendan a manejar las operaciones de suma y resta con el conjunto de los números enteros en el momento de realizar ejercicios formales sobre este tema.
- Analizar si la expresión numérica y el resultado que han obtenido en los intentos de juego son los correctos teniendo en cuenta que la hoja entregada para llevar su registro de las operaciones va a estar en blanco.

Contenido temático

Ascender y Descender

El siguiente recurso didáctico reciclable en forma de tablero tiene a su lado izquierdo y derecho la representación de los números enteros, donde la parte superior va desde 1 hasta 6 que son los números positivos y en la parte inferior va desde -1 hasta -6 que son los números opuestos de la parte superior como lo muestra la figura.

Para jugar se necesita dos dados de distinto color, uno representa ascender y el otro descender, además se necesitará 6 tapas reciclables material para seis jugadores. Los jugadores se posicionarán en el punto cero que es la partida o inicio del juego con la tapa en su casilla.

El primer jugador lanzará los dados y se empieza a jugar a “Ascender y Descender” y así sucesivamente se hará hasta el sexto jugador terminando la primera ronda.

¿Cómo se juega?

Una vez el jugador lance los dados y saca 4 para ascender y dos para descender, debe subir 4 casillas y bajar 2, luego anotar en una hoja de control la expresión numérica realizada.

Para ganar este juego se debe tener en cuenta que en la parte superior e inferior del tablero hay casillas que devolverán al jugador al inicio del juego y únicamente en la parte superior el número seis además de estar en el juego nos representará la meta.

Así que, para poder ganar, si el jugador está en la casilla 5 deberá sacar 2 con el dado que asciende y 1 con el que desciende para llegar a la casilla 6 o mejor dicho a la meta.
Ahora si el jugador está en la casilla 5 y saca con el dado que asciende 3 y con el que desciende cualquier otro número, el jugador se tendrá que devolver al inicio. Análogamente sucede si el jugador está en la casilla 5 negativa y saca 2 para ascender y saca 4 para descender 0 más de 4 tendrá que regresarse al inicio del juego.

Finalmente ganará el jugador que primero llegue a la casilla 6.

2.8.14 **Anexo 14:** Primer examen acumulativo sobre el conjunto de los números enteros

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Examen "Primera parte",
sobre el conjunto de los números enteros

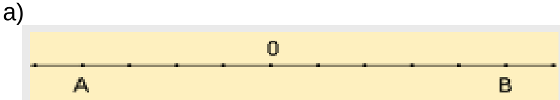
Examen N° 1 **Tema: Conjunto de números enteros**

1. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:

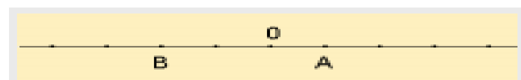
a) La temperatura bajo a 5°C
b) La fase positiva en la ruleta tiene 16 semillas
c) Tatiana debe $1300 a Julián y $ 1500 a Diana
d) Pablo lanzó 10 semillas, 7cayeron en la fase positiva y 3 en la fase negativa.

2. ¿Cuál es el valor de A y de B?

a)



b)



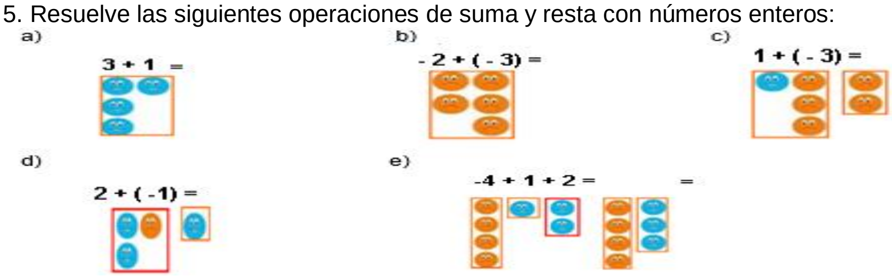
3. Escribe el signo (<) o (>) según convenga:

a) – 2 ___ – 6 b) – 2 ___ 4 c) 5 ___ 12 d) 4 ___ 8

4. Ordena de menor a mayor.

a) 6, –5, –10, 12 b) 4, – 20, – 7, – 4

5. Resuelve las siguientes operaciones de suma y resta con números enteros:



6. Completa el siguiente cuadro y resuelva las operaciones de suma y resta con números enteros:

Valores				***a + (-b) + d***	***-b + (-c) + d***
a	***b***	***c***	***d***		
15	***10***	***0***	***3***		
9	***17***	***6***	***12***		
5	***21***	***7***	***16***		

Éxitos en el examen

2.8.15 **Anexo 15:** Guía sobre la clase valor absoluto con los números enteros

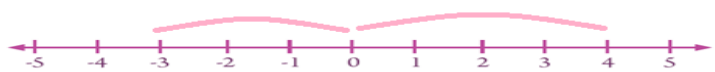
Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Clase N° 4 **Tema: Valor absoluto con números enteros.**

Objetivos

- Definir el valor absoluto haciendo uso del concepto intuitivo de distancia, mediante una secuencia didáctica.

El estudiante dibujara sobre el suelo del aula una recta numérica en donde ubicarán un número positivo y un número negativo, con el fin de medir la distancia que hay entre dos números sin tener en cuenta su signo. Así el estudiante podrá reflexionar sobre esta magnitud, la cual siempre va a ser positiva.
Por ejemplo, desplazarse de 0 a +4 hay 4 unidades de distancia, el valor absoluto de +4 es 4. Desde 0 a -3 también hay 3 unidades de distancia, el valor absoluto de -3 es 3.



Contenido temático

Definición
El valor absoluto de un número es la distancia desde cero hasta dicho número en la recta numérica.

El valor absoluto de -7 es 7	El valor absoluto de +6 es 6
El valor absoluto de -12 es 12	El valor absoluto de +15 es 15
El valor absoluto de -50 es 50	El valor absoluto de +34 es 34

El valor absoluto de un número entero es el mismo número sin considerar su signo.

Así, el valor absoluto de un número se representa encerrando al número entre dos barras verticales | a | y se lee "valor absoluto de a"

Ejemplo:

El valor absoluto de 5, que se representa como | 5 |, es 5, ya que se halla a 5 unidades de 0 en la recta numérica.
De igual forma, el valor absoluto, de − 5, denotado por | − 5 |, también es 5, porque – 5 está a 5 unidades de 0:

$|-5| = 5$ $|5| = 5$

Observación

El resultado del valor absoluto de un número, siempre es positivo o cero y se denota por el símbolo | |

Ejemplo

¿Cuál es el valor absoluto de 7, − 8 y 0?

Número	Valor absoluto
7	$\lvert 7 \rvert = 7$
-8	$\lvert -8 \rvert = 8$
0	$\lvert 0 \rvert = 0$

Porque 7 está a 7 unidades de 0.

Porque -8 está a 8 unidades de 0.

Porque 0 es el origen y no se ha corrido ninguna distancia.

Ejercicio en clase

1. Jorge practica alpinismo. Descendió a un cañón una distancia de 520 m. Después, ascendió o escaló 132 m y descansó. ¿A qué distancia de la parte superior del cañón se encuentra Jorge?

Solución:
Como descendió 520 m, esto es − 520 m. Al ascender 132 m, esto es + 132 m = 132 m.
Luego $|-520| - |132| = 520 - 132$
$= 388$ m es la distancia a la parte superior del cañón.

2.8.16 Anexo 16: Guía sobre la clase multiplicación con los números enteros

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Clase N°5 **Tema: multiplicación de números enteros**

Objetivos

- Entender por medio de ejemplos de la vida cotidiana la multiplicación con números enteros.
- Resolver ejercicios de la multiplicación con números enteros.

Mediante ejemplos de la vida cotidiana se pretende que los estudiantes analicen como se resuelven operaciones de la multiplicación con números enteros. Con el fin de que conceptualicen la ley de los signos en la multiplicación. Y hagan uso de este concepto en operaciones usuales.

Contenido temático

Multiplicación con números enteros

Definición: la multiplicación es una suma repetitiva.

Ejemplo

6×3 significa $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$

4×5 significa $5 + 5 + 5 + 5 = 20$

2×-3 significa $(-3) + (-3) = -6$

En la multiplicación podemos definir 3 casos estos son:

Multiplicación con enteros positivos: la multiplicación de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.

Ejemplo

A Juan le regalaron 5 cajas, cada una de ellas tiene 6 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan en total?

R/ $5 \times 6 = 30$

Una máquina de hacer pozos perfora 15m al día. Si ha tardado 8 días en perforar un pozo de petróleo ¿qué profundidad tiene el pozo?

R/ $15 \times 8 = 120$

Multiplicación con números enteros de signos opuestos: la multiplicación de un número entero positivo con un número entero negativos es un número entero negativo. Se tiene lo mismo cuando se multiplica un número entero negativo con un número entero positivo.

Camilo debe 5 pensiones en su colegio, si cada pensión tiene un costo de $15.000 ¿Cuánto debe Camilo en total?

R/ $5 \times -15.000 = -75.000$

Marina y Juan pescan juntos en un lago. El anzuelo de Juan se encuentra a − 2 m con respecto al nivel del lago. El anzuelo de Marina se encuentra sumergido tres veces más que el de Juan. ¿A qué profundidad se encuentra el anzuelo de Marina?

R/ Para calcular a que profundidad se encuentra el anzuelo de Marina, debes encontrar a que es igual 3 veces – 2 o sea:

$(-2) + (-2) + (-2) = -6$

Lo cual se abrevia así: $3 \times (-2) = -6$

El anzuelo de Marina se encuentra a – 6 m, o sea a 6 m bajo el nivel del lago.

Multiplicación con enteros negativos: la multiplicación de dos números enteros negativos es un número entero positivo.

Recordemos la definición de número opuesto: el opuesto de un número entero positivo es un número entero negativo, y el opuesto de un número entero negativo es un número entero positivo. El opuesto de 8 es – 8 y el opuesto de – 3 es 3. Entonces cual sería el opuesto de – (– 15).

De manera similar:

− 4 × (− 3) = opuesto de 4 × (− 3) = 12

− 2 × (− 6) = opuesto de 2 × (− 6) = 12

− 7 × (− 3) = opuesto de 7 × (− 3) = 21

Observación: la multiplicación de dos números enteros positivos o negativos, es la multiplicación de sus valores absolutos.

Ejemplo

$$\begin{aligned} 5 \times 4 &= |5| \times |4| \\ &= 5 \times 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \times 15 &= |3| \times |15| \\ &= 3 \times 15 \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -13 \times -7 &= |-13| \times |-7| \\ &= 13 \times 7 \\ &= 91 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -20 \times -9 &= |-20| \times |-9| \\ &= 20 \times 9 \\ &= 180 \end{aligned}$$

Multiplicación por cero: Cuando uno de los factores es 0, el producto es igual a 0:

Ejemplo

a) $5 \times 0 = 0$

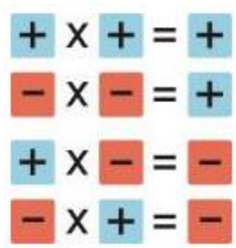
b) $0 \times 8 = 0$

c) $-3 \times 0 = 0$

d) $0 \times -7 = 0$

Todo número multiplicado por cero (0) es igual a cero.

Ley de los signos



2.8.17 **Anexo 17:** Guía sobre la clase división con los números enteros

Institución Educativa “Los Comuneros” – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Clase N°6 **Tema: división con números enteros**

Objetivos

- Entender por medio de ejemplos de la vida cotidiana la división con números enteros.
- Resolver ejercicios de división con números enteros.

Mediante ejemplos de la vida cotidiana se pretende que los estudiantes analicen como se resuelven operaciones de división con números enteros. Con el fin de que puedan aplicar la ley de los signos en la división. Y hagan uso de este concepto en operaciones usuales.

Contenido temático

División con números enteros

Definición: La división es una operación que consiste en averiguar cuántas veces un número (**divisor**) está contenido en otro número (**dividendo**). El resultado de una división recibe el nombre de ***cociente***. De manera general puede decirse que la división es la *operación inversa* de la multiplicación.

Recordemos que cuando se trabajó con los números naturales y el cero se tiene una división exacta si el residuo es 0 por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 56 & \underline{\;8\;} \\ 0 & \;7 \end{array} \qquad \text{porque } 7 \times 8 = 56$$

Recordemos:

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \underline{\text{divisor}} \\ \text{Residuo} & \text{cociente} \end{array}$$

En la división podemos definir 3 casos estos son:

División con enteros positivos: la división de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.

Ejemplo

Armando tiene 72 naranjas y coloca 9 naranjas en una bolsa. ¿Cuántas bolsas se necesitan?

R/ se necesitan 8 bolsas.

En cierto mes, el premio mayor de la Lotería del Cauca fue de $ 200.000 para el billete ganador. Si este posee veinte ganadores, ¿cuánto gana cada uno?

R/ 200.000 ÷ 20, o sea $ 10.000.

$$\begin{array}{r|l} 200{,}000 & \underline{\;20\;} \\ 00000 & 10{,}000 \end{array}$$

División con números enteros de signos opuestos: la división de un número entero negativo con un número entero positivo es un número entero negativo.

Ejemplo

Camilo debe $75.000 de pensión en su colegio, y pagó 5 meses ¿Cuánto valía cada pensión?

R/ − 75.000 ÷ 5 = **−**15.000

La división con enteros negativos: la división de dos números enteros negativos es un número entero positivo.

Ejemplo

(−1000) ÷ (− 10) = 100

(−15)÷(−3) = 5

Ley de los signos

$+ \div + = +$

$- \div - = +$

$+ \div - = -$

$- \div + = -$

Resumen de la ley de los signos en las operaciones básicas

Signos de los números	Suma	Resta	Multiplicación	División
Cuando los números son positivos. Ejemplos 6 y 2 2 y 6	La suma siempre es positiva $6+2=8$ $2+6=8$	La resta puede ser positiva o negativa $6-2=4$ $2-6=-4$	El producto siempre es positivo $6\times 2=12$ $2\times 6=12$	El cociente siempre es positivo $6\div 2=3$ $2\div 6$ no se puede realizar en los enteros.
Cuando los números son signo contrario. Ejemplos 6 y -2 -6 y 2	La suma puede ser positiva o negativa de acuerdo al signo del mayor valor absoluto $6+(-2)=4$ $-6+2=-4$	La resta puede ser positiva o negativa $6-(-2)=8$ $-6-(2)=-8$ De acuerdo al mayor valor absoluto	El producto siempre es negativo $6(-2)=-12$ $-6(2)=-12$	El cociente siempre es negativo $6\div(-2)=-3$ $-6\div 2=-3$
Ambos números son negativos. Ejemplos -6 y -2 -2 y -6	La suma siempre es negativa $-6+(-2)=-8$ $-2+(-6)=-8$	La resta puede ser positiva o negativa $-6-(-2)=-4$ $-2-(-6)=4$	El producto siempre es positivo $-6(-2)=12$ $-2(-6)=12$	El cociente siempre es positivo $-6\div(-2)=3$ $-2\div(-6)$ No se puede realizar en los enteros

2.8.18 **Anexo 18:** Taller que se aborda durante la sección de clase

Institución Educativa "Los Comuneros" – Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Práctica Pedagógica
Introducción del conjunto de los números enteros

Taller N°2 **Tema: Operaciones con números enteros**

1. Efectúa los siguientes productos:

a) 20 × (− 5) =
b) (− 45) × 13 =
c) −9 × (− 51) =
d) (115) × (40) =
e) −598 × 0 =

2. Encuentra el cociente de las siguientes divisiones:

a) 36 ÷ (− 9) =
b) −200 ÷ (− 4) =
c) 105 ÷ 5 =
d) −56 ÷ 7 =
e) 1255 ÷ (−5) =

3. Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\{(-8)\ \times(-9)+[(-4)+(-6)]\ \}\div(-31)$
b) $\{\ [(-5)\times\ 3]+[(-9)+(-3)]\ \}\div(-27)$
c) $7+(\ -8\ \times\ 5)+[(-75)\div(-5)+4\ ]$
d) $[\ 5+(-15)+(-20)+10]\ \times(-30)$
e) $\{\ [-(-50)+15\ ]\times[(-6\ \times 7)+4]\ \}\ \div(-10)$

Responda las preguntas 1 al 3 de acuerdo con la siguiente información:

Se realiza el juego de los dados con dados de infinitas caras del mismo o de diferentes colores. La tira sobre la que se juega termina exactamente llegando al 10 positivo.

1. Una persona que se encuentra en 3 negativo debe sacar:

A. 13 negativo para ganar.
B. 13 positivo para ganar.
C. 7 negativo para ganar.
D. 7 positivo para ganar.

2. La persona se encuentra en 5 positivo y desea bajar hasta 7 negativo, entonces debe sacar:

A. 12 negativo. B. 12 positivo.
C. 2 positivo. D. 2 negativo.

3. La persona se encuentra en 6 positivo y desea ganar. Una de las siguientes combinaciones no le sirve:

A. 10 positivo y 4 negativo.
B. 12 negativo y 16 positivo.
C. 23 positivo y 19 negativo.
D. 18 negativo 14 positivo.

4. El resultado de multiplicar (-23) por (-25) es:

A. −575 B. −48
C. 2 D. 575

5. El resultado de dividir 540 entre (-30) es:

A. −18 B. 570
C. 510 D. 18