ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE LA SEDE JOSÉ ANTONIO GALÁN No.1 PARA MODELAR PROBLEMAS DE LA VIDA REAL

ALBERTO GARCÍA DURÁN

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2019

ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE LA SEDE JOSÉ ANTONIO GALÁN No.1 PARA MODELAR PROBLEMAS DE LA VIDA REAL

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

ALBERTO GARCÍA DURÁN

DIRECTOR

Mg. ERUIN ALONSO SÁNCHEZ ORDOÑEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2019

Nota de aceptación

____

____

____

____

Director: ___________________________________

Mg. ERUIN ALONSO SÁNCHEZ ORDOÑEZ

Jurado: ___________________________________

MG. DUMAS MANZANO

Jurado: ___________________________________

MG. ÁNGEL HERNÁN ZUÑIGA

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 11 de abril de 2019

Contenido

INTRODUCCIÓN 7

PRAXIS PEDAGÓGICA 7

Práctica Pedagógica 7

1. Relaciones interpersonales: 9

a) Estudiante –Practicante 9

b) Estudiante-Estudiante 11

c) Titular – Practicante 11

2. Modelo pedagógico constructivista: 11

INVESTIGACIÓN 12

OBJETIVOS 12

Objetivo general 12

Objetivos específicos 12

JUSTIFICACIÓN 13

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA 14

RESEÑA HISTÓRICA DE LAS MATEMÁTICAS 15

1. Construcción de las matemáticas 16

2. Inicios de la matemática clásica 16

a. Geometría euclidiana. 16

b. Método analítico. 16

3. Algunas necesidades para la construcción de las matemáticas 17

4. Resultados improvistos como aporte para la construcción de las matemáticas: 17

5. Diferentes líneas de las matemáticas que aportaron a la construcción de las matemáticas ... 18

6. La Educación Matemática 19

8. El constructivismo como un constructor de las matemáticas 19

MARCO CONTEXTUAL 20

Propuesta institucional 20

Ubicación geográfica 22

REFERENTES CONCEPTUALES 22

Desde la Matemática 22

Conjuntos: 23

Operaciones entre conjuntos: 23

Números naturales: 23
Números enteros: 24
Números racionales: 24
Números irracionales: 24
Números reales: 25
Cardinalidad: 25
Desigualdades: 25
Valor absoluto: 26
Distancia en R: 26
Intervalos: 26
Variable: 26
Constante: 27
Constantes numéricas 27
Constantes arbitrarias 27
Cantidad algebraica 27
Expresión algebraica 27
Suma algebraica 27
Ecuación 27
Función 27
Función lineal 27
Sucesiones 28
Progresión aritmética 28
Bola abierta en R 29
Bola cerrada en R 29
Norma en Rn: 29
Propiedades de norma en Rn: 30
Bola abierta en Rn: 30
Bola cerrada en Rn: 30
Desde la Educación Matemática 30
Una aproximación a la teoría de las situaciones didácticas 31
Situación Didáctica 31
Situación problema 31

Clasificación de situaciones 31
Situación acción 31
Situación de comunicación 32
Situación de validación 32
Institucionalización 32
Modelación 32
ANÁLISIS DE RESULTADOS 32
SITUACIÓN PROBLEMA 32
INSTITUCIONALIZACIÓN 36
CONCLUSIONES 39
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 42
ANEXOS 43

Imagen 1 35
Imagen 2 35
Imagen 3 35
Imagen 4 37

INTRODUCCIÓN

La investigación muestra dos partes: La primera considera aspectos que se escribirán a partir de las notas de diario de campo, especialmente las diferentes relaciones que se presentaron inmersas en el sistema didáctico, fundamentadas en autores estudiados en los diferentes cursos de la línea de educación matemática del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca. La segunda toma varios elementos para desarrollar un proceso de investigación en educación matemática a partir del objeto de conocimiento matemático que emergió en la práctica pedagógica, trabajando una situación problema fundamentada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

La situación expuesta en la segunda parte de la investigación se basa en poder contar las páginas que hay entre un par de ellas que se eligen como extremos de una cierta parte de un libro. Lo cual conduce a ciertas aplicaciones de la vida real, hasta llegar a comprender que el objeto matemático investigado es un caso especial de la fórmula de progresión aritmética.

PRAXIS PEDAGÓGICA

Práctica Pedagógica

Según Zambrano (2002) la pedagogía hace referencia a un saber teórico- práctico, generado por los pedagogos a través de la reflexión personal y dialogal sobre su propia práctica pedagógica, específicamente en el proceso de convertirla en praxis pedagógica, es decir práctica, pero con reflexión, partiendo de su propia experiencia y de los aportes de otras prácticas y disciplinas que interceptan con su quehacer.

Zambrano (2002) afirma que para realizar un buen trabajo pedagógico hay que tener en cuenta tres aspectos: 1. El aprendizaje, el cual se caracteriza porque el alumno mantiene una relación estrecha con el saber y el profesor ocupa el lugar de acompañante, es decir, el profesor solo guía al alumno. El alumno se debe preocupar por entender el saber. 2. La enseñanza, en ella el docente mantiene una relación estrecha con el saber y el alumno está relegado al plano de simple espectador, es decir, el alumno solo se limita a escuchar o aprender de lo que dice el docente según su saber. 3. La formación como proceso pedagógico tiene lugar cuando el alumno y el profesor establecen de manera estrecha y solidaria las pautas y mecanismos para acceder al saber, es decir, que tanto el docente como el alumno interactúan con el saber.

La relación pedagógica hace que el individuo o los individuos tejan su práctica pedagógica escolar, es decir, el educando, educador y el saber estén estrechamente relacionados para así llevar a cabo una buena formación. De acuerdo con Zambrano (2002) en la relación pedagógica hay que ser fuerte ante las fragilidades y débil ante las fortalezas de los otros. Según Gaviria, Velasco, Castaño, Chávez, Cerón, Guevara (2008) los buenos argumentos no implican poderosas razones para eliminar al interlocutor, someterlo o condicionarlo.

La educación no resulta per se, sino que debe haber como mínimo dos personas que toman como propias ciertas leyes para vivir en comunidad. Ésta educación se lleva acabo cuando la practicamos. De acuerdo con lo anterior sugiere Zambrano que "La educación no puede, por si misma actuar si no es a través de la presencia de por lo menos dos individuos que, en forma asimétrica, intentan, sobre el presupuesto de la perfectibilidad, someterse mutuamente a través de una fuerza simbólica." (2002, p.1).

La anterior realidad se verifica con la aparición de las nuevas tecnologías, las cuales no pueden desplazar al profesorado ya que siempre se necesita del control humano, por ejemplo, en un problema de la vida real el computador no puede tomar decisiones por una persona.

El fin de la educación es mejorar la calidad de vida, por esta razón se habla de crear políticas para erradicar el analfabetismo, problemas sociales y de estar desactualizados. Por ende, la educación es un ente regulador y de orden. Aunque la educación sea diferente de un lugar a otro, hay ciertos principios fundamentales e invariantes, uno de ellos es el derecho a la vida. En lo relacionado al orden y la regulación en la sociedad, Zambrano afirma que

> "Así, la acción educativa es la forma práctica de la supraconciencia y como práctica humana permite vigilar la conducta agresiva, con el fin de que ésta se adecue a lo que dicta la supraconciencia: Regulación y orden. En ésta relación sin fin se generan unos límites de acción como: lo permitido y lo que no, los cuales se vuelven fronteras que hacen posible el devenir de la propia especie humana." (2002, p.2).

En cuanto al currículo se puede decir que tiene objetivos en la construcción de la cultura; métodos como forma de desarrollo para mejorar la calidad de vida, solucionando problemas de la comunidad, buscando alternativas; experiencias; no repitiendo las prácticas anteriores que hayan sido perjudiciales para el nivel educativo; y su evaluación. Los principales implicados en estas reformas e innovación son los docentes y aquellos que se están formando como licenciados en las diferentes áreas del saber, para un buen desarrollo cultural. Por lo cual el currículo como propuesta en la escuela, dice Gimeno.

> "El curriculum se plasma dentro de un sistema escolar concreto, se dirige a unos determinados profesores y alumnos, se sirve de unos medios, cuaja, en definitiva, en un contexto que es el que acaba por darle el significado real. De ahí que la única teoría posible que puede dar cuenta de esos procesos ha de ser de tipo crítico, poniendo de manifiesto las realidades que lo condicionan." (1995, p.23).

Por tanto, la pedagogía, la educación y el currículo no son términos definidos, porque al pasar el tiempo se van modificando en sus estructuras, pero éstos están estrechamente ligados en la formación, desarrollo social, cultural; y supervivencia. Involucrando al estudiante, profesor y el saber.

El saber matemático es uno de los objetos de investigación de la didáctica de las matemáticas, preguntándose sobre cómo se transmite el saber y la manera de aprenderlo, es decir, enseñanza y aprendizaje. Este saber matemático debe ser despersonalizado y descontextualizado para ser enseñado a los alumnos, se conoce como transposición didáctica "El trabajo que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza" (Chevallard, 1998, p.45) esto se realiza dentro de un sistema didáctico el cual lo componen los siguientes subsistemas: alumnos, profesor, saber enseñado y sus relaciones. Los diferentes sistemas didácticos están reunidos por el sistema de enseñanza, el cual está sumergido en la noosfera, que significa el lugar donde se producen los conflictos entre el sistema de enseñanza y el entorno, y es el espacio de privilegio donde se expresan los matemáticos y enseñantes, además está constituida por el entorno. En el entorno, se ve a los matemáticos y el ministerio de educación entre otros como reguladores. "Todo proyecto Social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenidos de saberes como contenidos a enseñar."[1]

1. Relaciones interpersonales:

La experiencia de la práctica pedagógica, se llevó a cabo durante el primer período con estudiantes de grado sexto de la Sede José Antonio Galán No. 1 de la Institución Educativa Los Comuneros. En dicha experiencia se destacan cuatro actores importantes: los estudiantes, el docente practicante, la docente titular y el director de grupo. De acuerdo con los primeros tres actores se describen las siguientes relaciones interpersonales.

a) Estudiante –Practicante

Las relaciones de los estudiantes con el practicante fueron buenas, ya que hubo respeto de los estudiantes hacia el practicante. Cuando el practicante les presentaba actividades, ellos las realizaban sin ningún problema, les gustaba salir al tablero. (Ver anexo sesión nueve del diario de campo del practicante). Por otra parte el docente practicante planteó, de manera implícita, a los estudiantes el contrato didáctico, informándoles que se tendría en cuenta la participación, toma de apuntes, tareas, trabajos en clase y la disciplina. Según dice Brousseau (1985) "el contrato didáctico es un conjunto de reglas con frecuencia no enunciados explícitamente que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas", este contrato se conoce como el filtro del contrato didáctico, Chevallard (1998) establece que: "La utilización de las "capacidades" debe pasar, efectivamente, por el filtro del contracto didáctico." Este contracto didáctico se evidencia en las normas de la Institución así "Los primeros encuentros deben definir conjuntamente las reglas de juego, comenzando con la difusión del Horizonte Institucional, haciendo claridad sobre el aporte que se le hace desde el

[1] Chevallard, Ives, La transposición didáctica, Del saber sabio al saber enseñado, Editorial AIQUE, Buenos Aires, 1998, P.45.

desarrollo del núcleo o el área que comienzan"[2]. Se dio confianza a los alumnos para expresarse con preguntas sobre las actividades, se saludó a los estudiantes con respeto, al inicio de clase, y al terminar con "unas gracias" a todos por estar atentos, se tuvo en cuenta los conocimientos preliminares del alumnado, (Ver anexo sesión seis de las notas de campo).

Las actitudes del practicante descritas anteriormente se enmarcan en lo que Gaviria y otros (2008) denominan el papel del docente. Ellos consideran que un docente de la Institución Educativa los Comuneros debe conocer de sus estudiantes los deseos, las debilidades, las fortalezas, y diferentes acciones tales como el obrar en la institución y fuera, su opinión de lo que lo rodea y la manera de discurrir los asuntos que se le presentan, además de cumplir compromisos y funciones.

Al respecto de la relación estudiante profesor plantea Ausubel "La experiencia humana no solo implica pensamiento, sino también afectividad y únicamente cuando se consideran en un conjunto se capacita al individuo para enriquecer el significado de su experiencia.

Para entender la labor educativa, es necesario tener en consideración otros tres elementos del proceso educativo: los profesores y su manera de enseñar; la estructura de los conocimientos que conforman el currículo y el modo en que éste se produce y el entramado social en el que se desarrolla el proceso educativo." (1983, p.1).

En cuanto al papel de los docentes, Gaviria y otros, (2008) afirman que sus compromisos y funciones son determinados por el proceso particular de planificación de su asignación académica, pero fundamentalmente les corresponde destinar los tiempos para alcanzar el conocimiento de los niños, niñas y jóvenes a su cargo.

En el cual se consideró las distintas variedades de capacidades de los alumnos inmersas en el ser (escritura, lectura, participación en las actividades, habilidades matemáticas; capacidades para trazar, cortar, medir, entre otras).

En relación con la disciplina se tendrá en consideración lo que plantea el libro Educación para Nutrir la Vida, para él ella es la forma de actuar con principios y valores asumidos desde la Institución, uno de estos principios es la educación como una apuesta ética que genera actitudes, tenacidad y diferentes comportamientos. "La disciplina es sinónimo de responsabilidad", por lo tanto, es un acto de autonomía ejercido por el individuo capaz de tomar sus propias decisiones, sin que se le esté controlando desde su exterior." (Gaviria y otros, 2008, p.52).

[2] Educación para Nutrir la Vida, Editorial FERIVA, Santiago de Cali, 2008, P.81.

b) Estudiante-Estudiante

Entre los estudiantes hubo compañerismo en varios aspectos, tales como compartir los útiles, se explicaban los unos a los otros, cuando el docente practicante les solicitaba a los estudiantes que entendían cierto tema que explicaran a los otros estudiantes que no habían logrado entender, estos estaban prestos para ayudar a sus compañeros. (Ver anexo sesión siete y once del diario de campo).

c) Titular – Practicante

La docente titular fue cordial con el docente practicante, desde el primer momento que se tuvo la plática para organizar el programa del primer período del grado sexto, aportando al practicante material relacionado con el grado. La docente titular estuvo presente un cierto tiempo en las sesiones, colaborando en varias ocasiones en la explicación de ejercicios a los alumnos tanto individual y grupalmente para su desarrollo, ya que en el mismo instante el docente practicante no alcanzaba a atender a todos. Por otro lado, el docente practicante tuvo en cuenta algunas consideraciones de la docente titular sobre el programa a seguir, aunque la docente titular dejó la libertad de que el docente practicante tomara la decisión propia para el desarrollo del programa de primer período del año en curso. Esta parte facilitó la creatividad del docente practicante para desarrollar el programa y poder obtener un objeto matemático buscado.

Luego, de presentar estas relaciones es importante conocer cuál es el modelo pedagógico que sustenta la propuesta pedagógica de la Institución Educativa los Comuneros Sede José Antonio Galán No. 1

2. Modelo pedagógico constructivista:

Este modelo se fundamenta en cuatro corrientes importantes.

> “En su primera corriente, establece que la meta educativa es que cada individuo acceda, progresiva y secuencialmente, a la etapa superior de su desarrollo intelectual de acuerdo con las necesidades y condiciones particulares. El maestro debe crear un ambiente estimulante de experiencias que faciliten en el niño su acceso a las estructuras cognitivas de la etapa inmediatamente superior. En consecuencia, el contenido de dichas experiencias es secundario, lo importante no es que el niño aprenda a leer y a escribir, siempre que esto contribuya al afianzamiento desarrollo de su capacidad de pensar, de reflexionar.” (Flórez, 2001, p.43).

> “Una segunda corriente del enfoque cognitivo se ocupa del contenido de la enseñanza y del aprendizaje, y privilegia los conceptos y estructuras básicas de las ciencias, por encontrar en ellas un material de alta complejidad que brinda mejores oportunidades de desatar la capacidad intelectual del alumno y enseñarle como a un aprendiz de científico. J. Bruner (1973) es el iniciador de este enfoque optimista que asegura que cualquier contenido científico puede ser comprendido por los niños si

se les enseñan bien y se les traduce a su lenguaje, facilitando que los niños entiendan por si mismos los conceptos básicos estructurales y los modos de investigar de cada ciencia, como en un aprendizaje por descubrimiento". (Flórez, 2001, p.44).

"Una tercera corriente cognitiva orienta la enseñanza y el currículo hacia la formación de ciertas habilidades cognitivas que se consideran más importantes que el contenido, científico o no, donde se desarrollan. Por ejemplo, Hilda Taba (1967) propone que la enseñanza debe dirigirse propiciar en los alumnos el pensamiento inductivo y para ello propone algunas estrategias y actividades secuencias y estimuladas por el profesor mediante preguntas desafiantes formuladas en el momento oportuno". (Flórez, 2001, p.45).

"Una cuarta corriente Social-cognitiva que basa los éxitos de la enseñanza en la interacción y de la comunicación de los alumnos y en el debate y la crítica argumentativa del grupo para lograr resultados cognitivos y éticos colectivos y soluciones a los problemas reales comunitarios mediante la interacción teórico-práctica". (Flórez, 2001, p.46).

Los párrafos precedentes muestran las reflexiones pedagógicas obtenidas en el desarrollo de la práctica pedagógica. Fruto de estas reflexiones y del proceso desarrollado en la práctica pedagógica, a continuación, se presenta el proceso de la investigación desarrollada

INVESTIGACIÓN

OBJETIVOS

Objetivo general

Determinar las estrategias que utilizan los estudiantes para encontrar una expresión algebraica que modele una situación real.

Objetivos específicos

a) Determinar la forma como los estudiantes pasan del lenguaje natural al lenguaje matemático.

b) Identificar el uso que dan los estudiantes a una expresión algebraica para resolver situaciones de su realidad.

c) Identificar las estrategias que usan los estudiantes para obtener expresiones algebraicas.

JUSTIFICACIÓN

Algunos docentes de matemáticas consideran aún que el álgebra está reservada para ser estudiada en grado octavo de la Educación Básica, en el sistema educativo colombiano, lo cual fue modificado con los planteamientos hechos en Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y en Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) acerca de que el pensamiento variacional y los sistemas analíticos y algebraicos pueden y deben ser trabajados desde el grado primero. En este sentido, es importante tener en cuenta que, en los primeros grados de la educación básica secundaria, en particular en grado sexto, es necesario que los estudiantes aprendan a trabajar con el lenguaje matemático formal.

Realizar esta tarea requiere, entre otras cosas, partir de ejercicios o actividades que en muchas ocasiones se presenta en la vida real, como, por ejemplo, contar el número de páginas de un libro o el número de días en un determinado intervalo de tiempo. En cualquiera de estas dos actividades los estudiantes pueden recurrir a realizar un conteo mental o bien a realizar un conteo con material concreto. Pero debe crearse en ellos la inquietud acerca de qué pasa cuando dichas acciones no pueden hacerse de manera concreta, ni mental porque las cantidades utilizadas son demasiado grandes y en este caso forzarlos a buscar y a adoptar la simbología matemática como una fuente economizadora de tiempo que facilita el desarrollo científico y sintetiza el conocimiento.

La comisión internacional de instrucción matemática (1988) define los economizadores de pensamiento así: "Cuando aparece una teoría, un método, una ley que condensa ciertas regularidades, este tipo de resultados permite economizar tiempo y esfuerzo de pensamiento, y permite pasar rápidamente a la práctica y al diseño de nuevas investigaciones."[3]

Por tal motivo se presenta una situación que al enfrentarse a ella requiere que el estudiante realice operaciones básicas con números naturales como la suma y la resta, además si se generaliza puede extenderse a los números enteros. Al mismo tiempo se refiere a situaciones de la vida real, y motiva al alumno a buscar la solución, requiere pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico, y contribuye a mejorar la comprensión del lenguaje algebraico.

[3] Recuperado en internet: https//. journalusco. edu. Co.

Es importante enseñar, en los primeros grados de educación básica secundaria, a los estudiantes a manejar el lenguaje matemático para que en el futuro no se dificulte entender los conceptos matemáticos donde aparecen los símbolos

Cuando se quiere realizar un ejercicio mentalmente o resolverlo por medio de la práctica, pero aparece una forma de carácter complejo de no poder realizarlo satisfactoriamente se debe buscar y adoptar la simbología matemática como una fuente economizadora de tiempo que facilita el desarrollo científico y sintetiza el conocimiento.

Las matemáticas siempre han comenzado con ejercicios elementales de lo real. Como ejemplo tenemos el conteo. El presente proyecto tiene como base un ejercicio aparentemente sencillo que ayudará a las personas a contar de una manera fácil las páginas de un libro, ayuda al empresario a determinar de una manera rápida el valor que se debe cobrar por cierta cantidad de páginas impresas, disminuye la utilización de saliva o de que humedezca los dedos índice y anular del empleado que saca fotocopias y que le sirve como fórmula preventiva para la salud por el contacto de las hojas, ya que los libros son manipulados por muchas personas.

La situación motiva a desarrollar pensamiento numérico cuando los números de los extremos que representan las páginas son muy distantes; es decir, hay un amplio número de páginas entre ellos, lo cual lleva a los alumnos a pensar qué deben hacer, ya que no se puede realizar mentalmente, ni contar hoja por hoja.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Tradicionalmente en la educación básica secundaria, en el sistema Educativo colombiano, la matemática de grado sexto centraliza sus esfuerzos en desarrollar algunos elementos del pensamiento numérico y fundamentalmente en la aplicación de algoritmos, descuidando y considerando que el trabajo con el pensamiento variacional, no puede implementarse desde la básica primaria, esto conllevaría hacia una mayor dificultad para comprender expresiones algebraicas en grados superiores, sin haber tenido una experiencia real con estos objetos matemáticos, Lo anterior muestra de cierta forma la falta de trabajo con elementos de los sistemas algebraicos, por ejemplo, la diferenciación de variables y constantes, del lenguaje natural y matemático, de la distancia y cardinalidad, de lo particular y lo general. Para tal fin es necesario que, desde temprana edad, de manera implícita, se tome una apropiación del lenguaje matemático, haciendo énfasis en el pensamiento variacional, para que posteriormente mediante la solución de diversas situaciones, a comienzos de la secundaria, aparezcan explícitamente las variables construidas por los mismos estudiantes y que descubran la importancia de las mismas. Esta enseñanza de las variables hace despertar un interés por modelar problemas de la vida real y es un aporte a las nuevas tecnologías. Con respecto a esto, Lineamientos dice: “El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los fenómenos de cambio y variación de la vida práctica". (1998 p.47).

Ahora bien, en la realidad se encuentran situaciones relacionadas con intervalos de números naturales, para las cuales los estudiantes recurren a resolverlas contando todos los elementos, pero cuando el intervalo es demasiado grande no logran avanzar en la resolución de las mismas, por ejemplo: para saber cuántas fotocopias se deben sacar de un libro de la página 15 hasta la 17 el estudiante cuenta página a página y obtiene la cantidad requerida. Si, además, el alumno se pregunta ¿cuántas páginas le faltan a 15 para llegar a 17? quizá su respuesta no sea la misma obtenida en la acción concreta, identificando una contradicción entre los dos resultados. Por otra parte, si las fotocopias que va a sacar son de la página 48 hasta la 131 la misma situación exige buscar otras estrategias de conteo, puede ser la mental, la cual le puede dar un margen de error en uno sin que él lo note, o él puede recurrir a realizar la operación de resta de los números naturales en el cuaderno sin tener en cuenta que persista el mismo margen de error anterior.

En este sentido, se evidenció en los estudiantes dificultades para encontrar una expresión algebraica que modele o sirva como regla general para resolver situaciones de la realidad, por tanto, vale la pena preguntarse: ¿Qué estrategias usan los estudiantes del grado sexto de la sede José Antonio Galán No.1 en la modelación de problemas de la vida real?

En relación con lo anterior se presenta una reseña histórica de las matemáticas la cual motiva al lector a formar parte del desarrollo de las mismas, las cuales muestran una serie de estrategias que se aplicaron en la antigüedad para modelar ciertas situaciones de la vida real en su época.

RESEÑA HISTÓRICA DE LAS MATEMÁTICAS

En el texto se presenta de una manera sencilla la forma como han venido construyéndose las matemáticas a través de la historia, destacando algunos de los matemáticos que influyeron en su construcción, las cuales las podemos ver hoy con una formalidad y una independencia propia de las demás ciencias. Además, se dan a conocer algunos aportes teóricos de los investigadores que han tomado la tarea de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En diferentes cursos del programa de Licenciatura en Matemáticas se hizo apropiación a un bagaje de objetos matemáticos de la geometría, el álgebra y el análisis matemático. Como futuros profesores, se debe conocer la historia de la construcción de las matemáticas, por lo cual la construcción de las matemáticas motiva a los estudiantes a interesarse por las matemáticas al oír, leer y ver lo que implica este conocimiento que es un gran aporte a las otras ciencias.

1. Construcción de las matemáticas

Las matemáticas se construyen a través de la historia por medio de métodos que fueron surgiendo en cada tiempo y que cada día se fueron perfeccionando, hasta obtener las matemáticas estructuradas e independientes de las demás ciencias como la física, y la biología. Se ve en las matemáticas la necesidad de conocer el mundo natural o su alrededor, lo que lleva a los matemáticos a inventar objetos matemáticos necesarios para cada época, pero en algunos casos por inventar algo nuevo, se descubrieron otros objetos matemáticos que no se pensaba conocer. Lo que fue un gran aporte para la construcción de las matemáticas y que actualmente siguen descubriendo otras maneras de pensar con todo el acervo cultural de las matemáticas, es decir descubriendo un objeto matemático, a este se le sigue un estudio minucioso descubriendo sus características más importantes, por ejemplo, sea la función el objeto matemático descubierto, luego unas de sus características encontradas es ser función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente, decreciente, continua, discontinua, acotada, no acotada, derivable etc. lo que indica que las matemáticas no son un ente acabado.

2. Inicios de la matemática clásica

Después del mundo de las ideas de Platón, se da inicio a las matemáticas clásicas, compuesta por la geometría y el análisis. Destacándose, Euclides con la geometría euclidiana y Descartes con el método analítico.

a. Geometría euclidiana.

Euclides con su genialidad y su intuición comienza a construir matemáticas, define los elementos primigenios de la geometría como punto, recta, círculo, cuadrado, rectángulo, traza, a partir de estas figuras concretas, las cuales define para construir su propia teoría y matemática utilizando los elementos primigenios de la geometría como el punto, la recta el círculo, el cuadrado, el rectángulo. Se debe enseñar a los estudiantes en los primeros grados de escolaridad la geometría, mostrándoles diferentes objetos geométricos con sus distintas representaciones como el cuadrado, triángulo, círculo, etc. Según Piaget (vemos que para construir matemáticas en el aula tenemos que aplicar el objeto sensible en las primeras etapas de estudio para que el niño comience a desarrollar las propiedades del objeto). Henri Poincaré nos dice que debemos de llegar a los alumnos con varios ejemplos antes de presentarle una definición formal.

b. Método analítico.

En la matemática clásica también encontramos el análisis con su principal representante Rene Descartes, quien comenzó a unificar la geometría con la aritmética ya que antes de él había una distancia muy grande entre ellas. Esta unificación da inicio al método analítico que se puede resumir como se plantea a continuación:

“Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya hecho, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras” (Descartes, 1947, p.53). Es decir, dado un problema para su demostración se debe iniciar suponiendo lo que se quiere probar, luego identificar las variables y las respectivas nociones para su posterior demostración. En el cual se realiza una combinación entre los términos sintético y analítico. Aquí el término sintético es el método hipotético deductivo mientras en el analítico es una división del objeto matemático en partes más sencillas o simples, para que por medio de deducciones lógicas se llegue a una síntesis.

3. Algunas necesidades para la construcción de las matemáticas

Se infiere que el concepto de número aparece por la necesidad de contar, luego este pensamiento numérico produce pensamiento matemático, se ve que a través de la historia los matemáticos han utilizado principios básicos para generar la ciencia de las matemáticas como la experiencia o síntesis inductiva, la intuición, la creatividad, la experimentación, las nociones, método inductivo, lógica, método deductivo como producto transformaciones lógicas, las definiciones, axiomas, teoremas y un gran compendio de escritos de un esfuerzo colectivo de grandes pensadores matemáticos que se han preocupado por encontrar la verdad de las ciencias.

Las reglas que son creadas a través de la historia por los matemáticos son para no cometer ambigüedad en los procesos de demostración que se llevan a cabo, las cuales son regidas y aceptadas por la comunidad matemática de la época en cuestión llevando los registros a una sistematización.

Cada pensador según su desempeño adherido a la comunidad matemática de cada época debe enunciar y demostrar lo propuesto para que pueda engrosar el contenido de esta ciencia de las matemáticas.

4. Resultados improvistos como aporte para la construcción de las matemáticas:

Surgieron otras teorías a partir de la necesidad de encontrar otros objetos matemáticos que resultarían por una secuencia ordenada, pero que en un momento dado hubo un desvío en la directriz planteada obteniendo nuevos descubrimientos, por ejemplo, tenemos la geometría no euclidiana y el descubrimiento de los grupos:

a. Geometría no euclidiana la cual surgió por la no aceptación del quinto postulado de Euclides, como una verdad evidente, es decir no lo aceptaban como axioma, y al quererlo demostrar este axioma por varios siglos llegaron a encontrar otra nueva teoría con existencia propia y que no contradecía el quinto postulado de Euclides, los principales expositores de esta nueva geometría no euclidiana, fueron Gauss, Bolyai, y Lobatchvsky. Vemos que como aporte a la construcción de las matemáticas fue un gran acontecimiento de todos los tiempos desde los antiguos griegos según “Ya hemos señalado que la creación de la geometría no euclídea fue el paso de mayores consecuencias y más revolucionarios desde los tiempos de los griegos”. (Morris Kline, 1994, p.1161).

b. Otro ejemplo de construcción de las matemáticas fue lo que pasó con el descubrimiento de los grupos, que, al querer encontrar la solución de ecuaciones de cuarto grado, quinto grado y así sucesivamente terminaron encontrando el primer grupo de permutaciones, luego sus respectivas características.

c. También podemos ver otra manera para construir matemáticas, para tal hecho hay que realizar una descontextualización del saber sabio o científico, para llevarlo al saber enseñado, es decir, se toma un conocimiento del saber sabio y se asigna como saber a enseñar este sufre una serie de transformaciones hasta ser transformado en saber enseñado, lo que indica que, si hay una buena transposición didáctica, el alumno despierta el interés por el objeto matemático aprendido, por ende, lo motiva en sus estructuras cognitivas a que desarrolle pensamiento matemático.

Pero la especificidad del tratamiento didáctico del saber puede comprenderse mejor a través de la confrontación de los dos términos de la distancia que los separa, más allá de lo que los acerca e impone confrontarlos).

5. Diferentes líneas de las matemáticas que aportaron a la construcción de las matemáticas

Euclides con su geometría euclídea, realizaba trazos de figuras planas con regla y compás, fundamentándose en los objetos (5 axiomas, 23 definiciones, 9 nociones, y varios teoremas)

En el siglo XVII los métodos algebraicos se inician con Vieta y Descartes que consistían en llevar los problemas geométricos al lenguaje de las ecuaciones, los métodos algebraicos tuvieron una debilidad al querer desarrollar objetos matemáticos más complicados como el infinito, que durante la historia desde Euclides había sido un problema por resolver. Lo que conllevó a los matemáticos a utilizar el concepto de función, limite, serie, derivada e integral para llegar al conocimiento del análisis matemático de nuestros tiempos, que es una construcción de admirar, con una teoría única e independiente que aporta a las demás ciencias.

El análisis actual no es el mismo que el análisis de Cauchy ya que por comodidad se dejó el análisis que hoy día se utiliza en el siglo XXI. Si se hubiera dejado el análisis de Cauchy para ser utilizado sería otra forma de construcción de las matemáticas llamado análisis no estándar.

Diferentes líneas de las matemáticas: objetos de la geometría (axiomas y definiciones, nociones, teoremas), objetos del álgebra (operaciones algebraicas, variables dependientes e independientes) y los objetos del análisis matemático (función y el limite).

6. La Educación Matemática

La Educación Matemática se encuentra inmersa en el ámbito social y su objetivo cualitativo lleva a analizar todos los aspectos involucrados en las matemáticas escolares para beneficio actual y posterior. A través de la historia, la Educación Matemática en contextos socio culturales se ha ido desarrollando por varios autores, quienes expusieron diferentes puntos de vista para desarrollar nuevas investigaciones. Entre los cuales están: Freudenthal (1978), Kilpatrick (1985), Elisa Bonilla (1989), Godino (1991), Steiner (1990), Higginson (1980), Vasco (1994), Ubiratan D´ Ambrosio (1985), Ole Skovsmose (1994) y Alan J. Bishop (1988) este último fue quien propuso la enculturación matemática, la cual fue aceptada en el campo de la educación matemática, esta plantea la "existencia de unas matemáticas hegemónicas o dominantes que determinan singulares procesos de asimilación o apropiación de todo aquel bagaje conceptual, intelectivo y cosmogónico de que son portadoras" (Zúñiga y Riascos,1998. pp.2-5).

8. El constructivismo como un constructor de las matemáticas

Para construir matemáticas se requiere de un método que construya capacidad de pensar y reflexionar acerca de las experiencias que está sumergido, ayudando a los alumnos a ir descubriendo los contenidos del más simple al más complejo, Para eso se tiene en primer lugar el método constructivista inspirado por Dewey, Kolhberg y Piaget. Este método constructivista plantea su objetivo educativo "la meta educativa es que cada individuo acceda, progresiva y secuencialmente, a la etapa superior de su desarrollo intelectual de acuerdo con las necesidades y condiciones particulares". (Rafael, 2001, pp. 42-43).

> El constructivismo según Lineamientos curriculares (1998 p.25) "Está muy relacionado con el intuicionismo pues también considera que las matemáticas son una creación de la mente humana, y que únicamente tiene existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos. Con las ideas constructivistas van muy bien algunos planteamientos de Georg Cantor (1845-1918): "La esencia de las matemáticas es su libertad. Libertad para construir, libertad para hacer hipótesis" (Davis, Hersh, 1988:290).
>
> El constructivismo matemático es muy coherente con la pedagogía activa y se apoya en la psicología genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da, todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales; cada estudiante necesita a su vez realizarlas en eso nada ni nadie lo puede reemplazar".

De la anterior reseña histórica se dan las siguientes consideraciones:

- Las matemáticas han surgido por las necesidades que se han presentado en cada época y querer encontrar la verdad de las cosas.

- Se ha construido una estructura propia simplificada para su mejor comprensión, expresada en una sistematización.

- Para las matemáticas llegar a la construcción del análisis matemático tuvo que realizar una ruptura con la geometría. Pero no se puede desligar para la enseñanza y el aprendizaje.

- Las matemáticas no es un ente acabado, ya que está en continuo descubrimiento.

MARCO CONTEXTUAL

Propuesta institucional

La Institución Educativa Los Comuneros Sede José Antonio Galán No.1 fundamenta su propuesta pedagógica en el modelo pedagógico histórico cultural. El cual tiene las siguientes características: “

- Retoma el rol protagónico del estudiante como el sujeto de sus procesos de aprendizaje.
- Rescata al docente de la marginalidad y lo ubica como sujeto de los procesos de enseñanza.
- Considera el conocimiento como el legado cultural de la humanidad, digno de ser conocido y comprendido.
- Considera la comprensión de la realidad, el punto de llegada, para cuyo estudio confluyen diferentes procesos cognitivos adquiridos con anterioridad.
- Se centra en el individuo como realidad socio cultural.

Este modelo tiene como objetivo formar personas pensantes, críticas y creativas; apropiadas del conocimiento creado por la humanidad y en constante búsqueda de alternativas divergentes y éticas, para la resolución de los problemas que afecten a la sociedad.

El docente ejerce el papel de mediador de los aprendizajes, establece una relación intencionada y significativa con los estudiantes, encargándose en potenciar en ellos, las capacidades que no pueden desarrollarse de forma autónoma (Zona de Desarrollo próximo) y se encarga de seleccionar, organizar, planificar los contenidos, variando su frecuencia y amplitud, para garantizar reflexiones y procesos de ≪ reorganizacion cognitiva ≫, con el ejercicio y desarrollo de funciones y operaciones de pensamiento, que orienten la elaboración de conclusiones.

Tiende a lograr que los estudiantes conozcan su propia realidad y adquieran aprendizajes con sustentos en el análisis de la problemática comunal.

Se orienta al desarrollo del pensamiento crítico-reflexivo que permite que el estudiante en un proceso de reflexión-acción, logre incorporarse en el proceso de transformación social, todo esto a través del uso de la lectura y de la escritura para potenciar la verbalización socializadora.

Tiene un gran componente de transversalidad. Se usan con frecuencia:

- El trabajo grupal.
- La auto gestión.
- El análisis de problemas e investigación.

Se concibe como un proceso constante y participativo donde se evalúa tanto el proceso como el producto.

Para diseñar el currículo,

- Se analiza la realidad social y en forma transversal e integral se selecciona, apropia y evalúa los conocimientos.
- Los contenidos científicos y culturales son reconstruidos, se recomienda la enseñanza de las lenguas clásicas, historia antigua, matemáticas y los conceptos de la ciencia y de la técnica más conveniente al proceso de la construcción del conocimiento.

La metodología que guía este modelo está basada en:

- Las asignaturas se organizan de tal forma que lleva a los estudiantes a pensar en forma creadora, el maestro contribuye a organizarlas para que los estudiantes promuevan su desarrollo intelectual.
- Las actividades van acorde al periodo desarrollo de los niños, desde el juego en la edad escolar hasta las actividades sociales del adolecente.
- En el aprendizaje se da primero la asimilación de conocimientos generales y abstractos para luego familiarizarse con los conocimientos particulares y concretos.
- Los recursos son los correspondientes a cada actividad.

Se evalúa bajo los preceptos de la reconstrucción del conocimiento, la capacidad de desarrollo del pensamiento del niño y la expresión en su lenguaje y Se propicia la evaluación formativa, la auto evaluación y coevaluación."

A continuación, se hace una breve presentación de la sede José Antonio Galán No.1

Ubicación geográfica

La Institución Educativa Los Comuneros Sede José Antonio Galán N°1, da inicio a la jornada sabatina en el año 2002 y en el año 2003, la básica secundaria en la jornada de la mañana. Esta sede se encuentra ubicada en el departamento del Cauca al sur de la ciudad de Popayán en la comuna 6, en la carrera 6ta entre calles 15 y 16 # 15-06 del Barrio Alfonso López, teléfono 8353495, su modalidad es académica, su naturaleza oficial, de calendario A, y de carácter mixto.

En su infraestructura, a nivel deportivo consta de dos patios uno de ellos grande, donde está la cancha deportiva, con cubierta, y el piso de concreto, en el cual se práctica futbolito microfútbol, voleibol y baloncesto, el otro patio es aproximadamente la cuarta parte del grande, se encuentra una mesa de pimpón y otra para el deporte ciencia (ajedrez), un juego de pesas. Para el trabajo académico cuenta con una sala de informática para un buen desarrollo de las nuevas tecnologías, una huerta escolar para que el alumnado despierte el interés por la tierra ya que les puede beneficiar en muchas ocasiones para la alimentación diaria, hay salones para cada curso, de grado sexto hasta once. A nivel de Bienestar cuenta con un restaurante escolar cuyo propósito es ayudar en la economía de las familias del estudiantado y alimentar para que haya un mejor rendimiento escolar, se cuenta con el centro de escucha, que sirve de mediador y proporciona una buena convivencia,

Los alumnos de la sede presentan compañerismo, son espontáneos al hablar, realizan muchas preguntas, les gusta el deporte, son atentos cuando se les requiere. Algunos necesitan de afecto y compresión, por esta razón se resalta los sueños de la institución para poder diseñar estrategias de enseñanza y aprendizaje con lúdica, para que el proceso pedagógico sea mejor y poder alcanzar el éxito.

El barrio cuenta con servicios públicos, servicios de transporte urbano que facilitan la movilidad de los estudiantes que viven en otros barrios, en seguridad recibe el apoyo del CAI Alfonzo López y como preventivo está el Centro universitario de salud.

REFERENTES CONCEPTUALES

Desde la Matemática

Se da a continuación una serie de objetos matemáticos que se tendrán de referente para consolidar la investigación y poder tener una visión más amplia, entre los cuales se tiene conjuntos y sus operaciones, números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, cardinalidad, desigualdades, valor absoluto, distancia, intervalos, sucesiones, bola abierta y cerrada en R, norma, bola abierta y cerrada en R^n :

Conjuntos:

La palabra conjunto es un término no definido. Pero intuitivamente se puede decir que, un conjunto es una lista o colección de objetos bien definidos. Los conjuntos se representan por letras mayúsculas $A, B, X, Y, \ldots$ Los objetos comprendidos en un conjunto son los elementos del conjunto y se representan por letras minúsculas $a, b, x, y, \ldots$ La proposición "p es un elemento de A" o, equivalentemente, "p pertenece a A" se expresa $p \in A$. La negación de $p \in A$ se escribe $p \notin A$.

Operaciones entre conjuntos:

La unión de dos conjuntos A y B, que se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, es decir, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$

La intersección de dos conjuntos A y B, que se denota $A \cap B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B, es decir, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$

Si $A \cap B = \emptyset$, es decir, si A y B no tienen elementos comunes, se dice que A y B son disjuntos.

El complemento relativo de un conjunto B respecto a un conjunto A, o simplemente la diferencia de A y B, que se denota $A \setminus B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B. Esto es, $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Obsérvese que $A \setminus B$ y B son disjuntos, es decir $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

El complemento absoluto o simplemente, complemento de un conjunto A, que se denota A^c es el conjunto de los elementos que no pertenecen a A, es decir, $A^c = \{x : x \in E, x \notin A\}$

En otras palabras, es la diferencia del conjunto referencial E y el conjunto A.

Números naturales:

Dado un conjunto A definimos el sucesor de A como $s(A) = A\ U\ \{A\}$. El conjunto N de los números naturales se construye de la siguiente manera: En primer lugar $\emptyset \in N$. Luego, agregamos $s\ (\emptyset)$ y así sucesivamente, para cada $n \epsilon N$ agregamos $s(n)$. De esta forma, un conjunto pertenece a N, si es vacío o si se puede obtener a partir del vacío mediante aplicaciones sucesivas de la regla s. Se denota así:

$0 = \emptyset$

$1 = S(0) = \emptyset\ U\ \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$2 = S(1) = 1\ U\ \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = s(2) = 2\ U\ \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$4 = s(3) = 3\ U\ \{3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

.

.

.

$N = \{0,1,2,3,\ldots\}.$

Números enteros:

Los números enteros surgen por la necesidad de resolver problemas en que involucran a números naturales a, b de la forma $a - b$ con $a < b$.

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0,1,2,3, \ldots\}$ Conjunto de los números enteros

$Z^+ = \{1,2,3,\ldots\}$ Conjunto de los números enteros positivos.

$Z^+\ U\ \{0\} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ Conjunto de los números enteros no negativos.

$Z^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ Conjunto de los números enteros negativos.

$Z^-\ U\ \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ Conjunto de los números enteros no positivos.

Números racionales:

$Q = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in Z \wedge q \neq 0\right\}.$

Números irracionales:

El conjunto de los números irracionales se conocen como el conjunto de los números decimales infinitos no periódicos los cuales se denotan I y se pueden ver como el complemento de los números racionales.

$I = Q^c$

Números reales:

Los números reales es el conjunto de elementos que están en I o están en Q

$R = I \cup Q$

Se tiene que $I \cap Q = \emptyset$

Los números reales correspondientes a los puntos a la derecha de 0 en la recta numérica se llaman números reales positivos mientras que aquellos correspondientes a los puntos a la izquierda de 0 se llaman números reales negativos. El número real 0 no es ni positivo ni negativo. La colección de números reales positivos.

Cardinalidad:

Denotemos por $In = \{1, 2,3, \dots, n\}$, el cual representa un conjunto con cantidad finita de elementos. Dos conjuntos son coordinables si existe una biyección entre ellos. Un conjunto X es finito si es vacío o si es coordinable con In para algún $n \in N$.

Si X es coordinable con In decimos que la cardinalidad de X es n, o que X tiene n elementos ($n = 0$ si $X = \emptyset$). También escribimos $|X| = n$. Si X no es finito decimos que es infinito.

Desigualdades:

Sí a y b son números reales positivos y $a - b$ es positivo, decimos que a es mayor que b, y escribimos $a > b$. Esto es equivalente a decir que b es menor que a, lo cual se escribe $b < a$

Sean $a, b \in R$, entonces $a \leq b$ si y solo si $a - b \leq 0$.

Se dice que " $\leq$ " es una relación de orden lineal en un conjunto X si para todo $a, b, c \in X$ se cumple:

1) $a \leq a$
2) $a \leq b,\ b \leq a \ \rightarrow a = b$
3) $a \leq b,\ b \leq c \ \rightarrow \ a \leq c$.

Dados $a, b \in X$ siempre se cumple exactamente una de las relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$. Sean $a, b \in R$ y $a < b$, entonces a está a la izquierda del punto b en la recta numérica.

Valor absoluto:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

El número no negativo $|a|$ se llama el valor absoluto de a.

Para todo a y b que pertenecen al conjunto de los reales, se tiene:

$$|a| < b \quad \leftrightarrow \quad (-b < a < b) \wedge \mathrm{b} \geq 0$$

$$|a| > b \quad \leftrightarrow \quad a > b\ o\ a < -b$$

$$|a| = b \quad \leftrightarrow \quad a = b\ o\ a = -b$$

$$|a| \leq b \quad \leftrightarrow \quad (-b \leq a \leq b) \wedge \mathrm{b} \geq 0$$

$$|a| \geq b \quad \leftrightarrow \quad a \geq b\ o\ a \leq -b$$

Distancia en R:

Sean a y b respectivamente las coordenadas de dos puntos A y B sobre una recta coordenada l. La distancia entre A y B, denotada por $d(A, B)$ está dada por

$$d(A, B) = |b - a| .$$

Intervalos:

Intervalos de la recta real se definen: Sean a, b números reales tales que $a < b$

Intervalo abierto de a hasta b $= \{x: a < x < b\} = (a, b)$

Intervalo cerrado de a hasta b $= \{x: a \leq x \leq b\} = [a, b]$

Intervalo abierto - cerrado de a hasta b $= \{x: a < x \leq b\} = (a, b]$

Intervalo cerrado - abierto de a hasta b $= \{x: a \leq x < b\} = [a, b)$.

Variable: Una variable es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto referencial, donde cada elemento del conjunto referencial es un valor de la variable. Las variables Por lo general son representadas con las últimas letras del alfabeto x, y, z .

Constante: Una constante es un símbolo que representa un valor fijo, es decir es el símbolo que designa el elemento de un conjunto unitario.

Constantes numéricas: Las constantes numéricas o absolutas son aquellas que conservan los mismos valores en todos los problemas.

Constantes arbitrarias: Las constantes arbitrarias o parámetros son aquellas a las que se les pueden asignar valores numéricos, y que durante todo el proceso conservan esos valores asignados. Estas constantes se representan por las primeras letras del alfabeto como: a, b y c entre otras.

Las constantes arbitrarias son equivalentes a las incógnitas.

Cantidad algebraica: Una cantidad algebraica es la que expresa el valor absoluto de las cantidades y por medio del signo su valor relativo.

Expresión algebraica: Una expresión algebraica está compuesta por una o varias operaciones algebraicas.

Suma algebraica: Una suma algebraica es una expresión algebraica que la componen partes diferentes conectadas por los signos más o menos.

Ecuación: Es una igualdad que posee al menos una variable.

Función: Una función f es un conjunto de parejas ordenadas $f = \{(x, y): f(x) = y\}$ tal que Si $(x. y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.

Función lineal:

La función f, definida por la ecuación de primer grado

$f = \{(x, y) \ / \ y = mx + b\}$, donde m y b son constantes.

Sucesiones:

Una sucesión $\{a_{\mathrm{n}}\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos. Los valores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman los términos de la sucesión

$$\begin{array}{ccc} 1, \ldots & , 2, \ldots & , a, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, \ldots & , a_2, \ldots & , a_n, \ldots \end{array}$$

Cuando decimos que una colección de objetos está en sucesión queremos decir que la colección está ordenada de modo que tiene un primer elemento identificado, un segundo elemento, etcétera.

Una sucesión es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n que pertenece a los números enteros positivos y es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, con $n \in Z^+$.

Si una sucesión es creciente y decreciente se llama monótona.

Si $a_n < a_{n+1}$, $n \in Z^+$ se le conoce como sucesión estrictamente creciente, y si $a_n > a_{n+1}$ para $n \in Z^+$ sucesión estrictamente decreciente.

Progresión aritmética:

Una progresión aritmética es una sucesión en la cual cada término después del primero se obtiene sumando al término precedente el mismo número fijo. Llamado diferencia común. Además, una progresión aritmética es una sucesión definida por una función lineal.

$f = mx + b$

$a_n = \ a_1 + (n - 1)d$

a_1: primer término

a_n: $\mathrm{n} -$ ésimo término

n : cantidad de términos

d: diferencia común, la cual se obtiene así $d = \ a_{n+1} - \ a_n$

Los n primeros términos de una progresión aritmética se representa de la siguiente manera $a_1, \ a_1 + d, \ a_1 + 2d + \cdots + (n - 1)d$.

Bola abierta en $\boldsymbol{R}$:

Sea $x_0 \in R$ y $r > 0$, entonces la bola de centro x_0 y radio r, se denota por $B(x_0, r)$ y se define $B(x_0, r) = \{x \in R = \left| x - x_0 \right| < r\}$.

Bola cerrada en $\boldsymbol{R}$:

Sea $x_0 \in R$ y $r > 0$, entonces la bola de centro x_0 y radio r, se denota por $B(x_0, r)$ y se define $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in R = | x - x_0| \leq r\}$.

Norma en $\boldsymbol{R^n}$:

Sean x y y puntos en R^n. La distancia entre x y y, denotada por $d(x, y)$ está dada por

$d(x, y) = \|x - y\|$.

Un conjunto ordenado de números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama punto n - dimensional o vector con n componentes reales. Se denota $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde $x_i \in R$ para cada i = 1,2,…,n "$i -$ esima componente de x"

Si x y y son elementos de R^n se tiene:

1) Si $x = y$ si y sólo si $x_i = y_i$, para cada $i = 1,2, \dots, n$).

2) $x \pm y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \pm (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n)$=

$\sum_{k=1}^{n} (x_i \pm y_i) e_{i.}$

donde $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Si $0 \in R^n$ y está dado por $0 = (0,0, \dots, 0)$.

4) $x * y = \sum_{k=1}^{n} (x_{i*} y_i)$.

5) $\|x\| = (x * x)^{½} = (\sum_{x=1}^{n}({x_k}^2))½$.

Propiedades de norma en $\boldsymbol{R^n}$:

Si x y y son elementos de R^n y $t \in R$

a. $\|x\| > 0 \leftrightarrow x \neq 0$

b. $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$

c. $\|tx\| \geq 0 = |t|\|x\|$

d. $\|x - y\| = \|y - x\|$

e. $\|x * y\| \leq \|x\| * \|y\|$

f. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

g. $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$

Bola abierta en $\boldsymbol{R^n}$:

Sea $x_0 \in R^n$ y $r > 0$, entonces la bola de centro x_0 y radio r, se denota por $B(x_0, r)$ y se define $B(x_0, r) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| < r\}$.

Bola cerrada en $\boldsymbol{R^n}$:

Sea $x_0 \in R^n$ y $r > 0$, entonces la bola de centro x_0 y radio r, se denota por $B(x_0, r)$ y se define $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq r\}$.

Desde la Educación Matemática

También se cuenta con una serie de objetos teóricos para soportar la investigación y poder trazar un camino a seguir, entre los cuales se tiene los conceptos de situación didáctica, situación problema, la clasificación de situaciones como situación acción, situación de comunicación y situación de validación, y la institucionalidad.

Una aproximación a la teoría de las situaciones didácticas

Situación Didáctica: La situación didáctica **es** un objeto teórico que estudia las leyes y la afinidad de un saber. Generalmente, las relaciones e interacciones entre actores con el medio en que se encuentran se conocen como situación.

Se da a continuación dos perspectivas de acuerdo a las situaciones didácticas.

- La situación cuyo objetivo es enseñar por medio de un problema o ejercicio en los cuales haya la intervención del educador.
- La situación que muestra el medio que es utilizado para que el estudiante comprenda un problema, el medio puede ser el profesor, pero sin actuar en el desarrollo de la situación. Brousseau (2000).

Las situaciones en que los profesores intervienen en el transcurrir de la acción del aprendiz para provocar, orientar, restringir y controlar aquella acción, se conoce como situación didáctica, en cambio así haya presencia del educador, pero ausencia de toda intervención se conoce como situación a-didáctica.

Situación problema: Una situación problema, es el grupo de actividades matemáticas que exigen a los estudiantes que tomen sus conocimientos previos y que recurran a sus estructuras cognitivas para dar respuestas o generar nuevos conocimientos. (Múnera y Obando, 2003, p.185).

Clasificación de situaciones

Brousseau (2000, p.10) llama "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable."

La teoría de las situaciones comprende lo que realiza el profesor y el estudiante, además, la creación de problemas que podrán ser adaptados al saber y a los estudiantes para que pueda haber una interacción entre el científico y el docente.

Brousseau (2000), anuncia tres clases de situaciones:

Situación acción:

En una situación acción el profesor determina las acciones con condiciones establecidas y que resulten teorías implícitas para que los estudiantes las puedan tomar como modelos a seguir.

Situación de comunicación: Una situación de comunicación son los enunciados que facilitan la comprensión de los modelos y lenguajes que se presentan en la clase.

Situación de validación: Una situación que valida es la encargada de justificar culturalmente las acciones por medio de argumentos utilizando teorías relacionadas con los conocimientos implícitos que surgen en la situación acción.

- **Directa**: una situación de validación de forma directa es cuando se dan apreciaciones acerca de un conocimiento en el mismo instante en que se plantea el problema.
- **Estrategias**: Una situación de validación por estrategias es la utilización del medio para dar respuesta a alguna inquietud. Brousseau (2000)

La clasificación de situaciones favorece la creación y la observación del transcurrir de la variedad de situaciones argumentadas para cambiarlas por la prueba.

Institucionalización

La institucionalización es la que da carácter importante a los conocimientos que surjan en el aula de clases, teniendo presente la simbología que se utiliza para un continuo trabajo y que haya una armonía en la comunicación entre los actores (Brousseau, 1986).

Modelación

En cuanto a la modelación lineamientos dice: "La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación" (1998, p.67). Además, considera que la situación problema real y su generalización son el inicio y la cima respectivamente de la modelación.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación, se presentan las estrategias desarrolladas por los estudiantes al aplicar la siguiente situación:

SITUACIÓN PROBLEMA

Encontrar la cantidad de páginas que hay de la página 15 hasta la página 17 de un libro. De la página 26 hasta la 30. De la 5 hasta la 20, de la 2163 hasta la 4678 y de la 16489 a la 76489.

Hubo total participación de los estudiantes dando en forma directa diferentes valores de aproximación a la respuesta, aunque sin coincidir con la respuesta correcta ya que la mayoría de los estudiantes afirmaban que eran dos páginas que había de la página 15 a la página 17, pero al insistir sobre la misma pregunta los alumnos pensaban y dialogaban entre ellos. Luego, con el mismo objetivo se preguntó cuántas páginas habrá de la página 26 a la página 30, algunos coincidieron con la respuesta, y cuando se preguntó de la página 5 hasta la página 20 la mayoría acertó, entonces a los que acertaban con la respuesta se les preguntaba qué estrategia habían utilizado y decían que habían realizado una resta y una suma, otros decían que habían aumentado uno. Cuando se incrementó el tamaño del intervalo, de la siguiente manera, página 2163 hasta página 4678 y de 16489 al 76489, entonces los estudiantes comenzaron a coincidir con el valor de la respuesta correcta, algo que sorprendió ya que al haber mayor cantidad de páginas entre los extremos se podía esperar mayor dificultad en los alumnos, aunque ocurrió que los estudiantes ya habían interiorizado el concepto, porque al incrementarse el nivel, ellos pudieron dar respuesta al problema planteado.

Los estudiantes utilizaron diferentes medios para dar solución a las preguntas hasta que su respuesta la presentaron de la forma siguiente (17- 15) +1 = (2) +1 = 3 que representaría el número de páginas exactas que hay de la página 15 a la página 17, luego se hizo lo mismo con las otras preguntas. Por último, se pensó en la existencia de una expresión algebraica que modelara la situación problema, para que facilitara el conteo de una sucesión o un conjunto finito de números naturales.

Por tanto, se alcanzó a observar la importancia de enseñar por el método constructivista, para obtener la generalización del objeto de enseñanza, mostrando primeramente ejemplos particulares de forma sencilla y con participación de los estudiantes e ir aumentando el nivel de complejidad y realizando las respectivas preguntas hasta la mayor comprensión del objeto de enseñanza en su generalización. La mayoría de los estudiantes asimilaron el método que surgió en la situación de acción para calcular el número de páginas. A medida que se presentaba la variedad de ejemplos y se insistía con preguntas, entonces algunos estudiantes decían que había que hacer una resta, pero al verificar no coincidía con la respuesta, sin embargo, en un momento un estudiante contestó que se debía de realizar una resta y sumarle uno, entonces los demás también coincidieron con lo que el primer estudiante respondió dijo.

Algunas estrategias observadas por el practicante y además de preguntarles a los estudiantes como habían abordado la situación problema real, fueron las siguientes: la estrategia mental, es decir, dar la respuesta de una forma rápida sin utilizar dedos, lápiz y papel; la estrategia de material concreto que utilizaron fue con los dedos de la mano empero no se llegaba a la respuesta correcta, también solicitaron el libro para practicar y dar su respectiva respuesta, los alumnos notaron que al comparar las respuestas sus valores no coincidían, por tanto eligieron como respuesta la del libro porque pudieron comprender en la práctica que el libro les daba mayor garantía en la respuesta. Luego se recurrió a papel y lápiz para realizar las operaciones de resta y suma, una de las estrategias que dio buenos resultados fue la utilización del libro cuando éste tenía los extremos de las páginas que se requerían, no obstante, cuando los extremos de las páginas eran muy distantes y no aparecían en el libro toco que recurrir a una estrategia que favoreciera dicha situación, lo anterior llevo a que hubiera una concepción mutua de adoptar que siempre había que hacer una resta y una suma de la siguiente manera, después de haber identificado los extremos, se realiza una resta con estos extremos que representaban números naturales, luego a su diferencia se le aumentara uno.

El concepto de variable apareció cuando se remplazó letras por los números que representaban los extremos de las páginas. Para ello primeramente se hizo una pregunta abierta ¿Cuánto dinero tiene en el bolsillo?, sabiendo que si alguien le regala 2000 pesos la persona tendrá 5000 pesos, los estudiantes coincidieron que era tres mil que hay en el bolsillo, lo que podemos modelar de la forma $x + 2000 = 5000$, $x + 2000 - 2000 = 5000 - 2000$, $x = 3000$ esto se realizó con el objetivo de involucrar el concepto de incógnita, y además el concepto de variable ésta es cuando se le puede asignar varios valores, así con la misma idea se asigna la letra a al extremo inferior y al extremo superior la letra b, entonces se realiza la diferencia con estas letras $(b - a)$ y al resultado se le aumentó uno lo cual se representa de la siguiente manera $(b - a) + 1$.

Luego se mostró a los estudiantes dos documentos de propagandas correspondientes a dos establecimientos públicos. Uno de ellos es de una tienda de elementos de la canasta familiar y el otro de un almacén de artículos electrónicos, se entregó a un alumno el primer documento de la canasta familiar para que lo roten y observen en la hoja principal la parte superior donde aparecía la fecha de la oferta así: del 1 de julio al 6 de julio. Por tanto, se les preguntó a los estudiantes ¿Cuántos días de oferta aparecen en el documento? Entonces los alumnos empezaron a aplicar la estrategia aprendida restando los dos extremos y al resultado sumarle uno, de esta misma manera se resolvió cuando se entregó el documento del almacén que ofrecía una vigencia del 16 al 25 de diciembre de 2017 para la venta de artículos electrónicos del hogar, donde se les preguntó ¿cuántos días hay de vigencia para comprar los artículos. Las respuestas se hicieron de manera oral, las cuales fueron 6 días de oferta, y 10 días de vigencia respectivamente. (Ver imágenes 1 y 2).

¿Cuántos días hay de oferta?

Imagen 1. Recuperado de ofertas publicitarias El Vecino.

¿Cuántos días hay de vigencia?

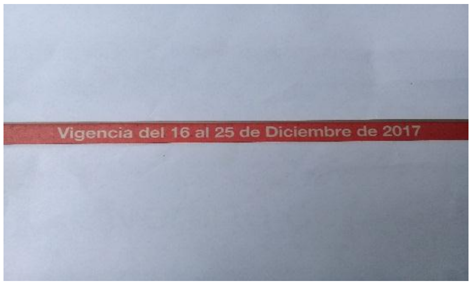


Imagen 2. Recuperado de ofertas publicitarias éxito.

Posteriormente, en la actividad de carácter diagnóstico en uno de sus ítems se presentó el siguiente enunciado: Un joven tiene un libro en la mano de 325 hojas, el joven se pregunta ¿Cuántas páginas hay de la página 49 a la página 356?

¿Qué haces para ayudar al joven a resolver la pregunta?

A continuación, se exhiben algunas de las soluciones dadas por los estudiantes.

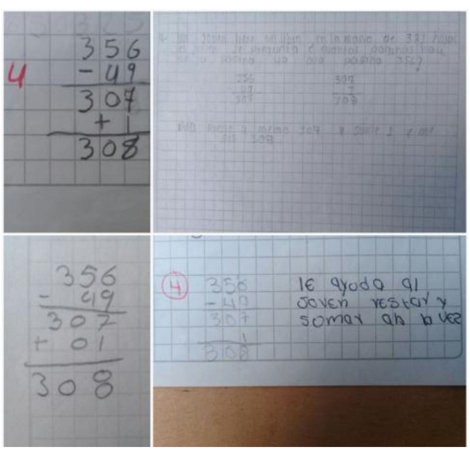


Imagen 3. Se realizó al grupo de estudiantes.

Se observa en las soluciones planteadas que los alumnos satisfactoriamente dan respuesta a lo requerido, utilizando las operaciones básicas de números naturales como suma y resta, lo cual lo podemos verificar en la imagen 3 respecto a la actividad 2. En dicha actividad un estudiante tuvo una inquietud respecto a la pregunta del ítem 4 así: Si hay 325 hojas como se utilizaran 356 páginas, entonces se explicó al alumno la diferencia que existe entre hoja y página de un documento, es decir, una página es solo la parte del frente o el reverso de las hojas del libro, en cambio una hoja está compuesta por dos páginas y por tal razón con 325 hojas que tiene el libro se encuentran 650 páginas, de este modo el problema se puede realizar.

INSTITUCIONALIZACIÓN

Todo comenzó con la situación problema sobre cómo calcular las páginas de un libro, en la cual los alumnos aportaron sus respectivas estrategias, luego queriendo mostrar una generalización se eligieron las primeras letras del alfabeto como la a y b para que representaran los números naturales (variables), dado que las letras podían ser representaciones de cualquier número del conjunto de los números naturales, de tal forma que se pudieran hacer comparaciones de la siguiente manera: al número 15 se le asignó la letra a y al número 17 la letra b, luego se realizó la respectiva resta $(17 - 15)$ a la que se le dio la notación $(b - a)$, como a $(17 - 15)$ deberíamos sumarle una unidad se obtiene $((17 - 15) + 1)$ y a ésta asignamos $((b - a) + 1$

Estas manipulaciones llevaron a construir operaciones con sólo números y operaciones que involucraron las variables o incógnitas a , b y un valor numérico, en este caso la resta y la suma para obtener de forma simbólica su estructura y poder obtener mayor comprensión del objeto matemático visto (ver imagen 4 y anexos sesión uno del diario de campo).

), en esta primera versión fue intuitiva su presentación, aunque se llevó a representar parte del contenido en el tablero, sin ninguna presión, sino que los alumnos adquirieran el gusto y el interés por las matemáticas, además de poder crear nuevos objetos matemáticos.

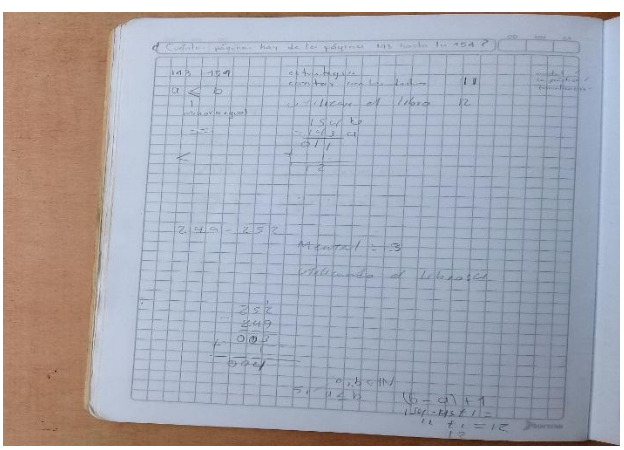


Imagen 4. A un alumno se le realizó esta pregunta.

En el desarrollo de la investigación se fue perfeccionando la siguiente expresión Sean $a, b \in N$, entonces $(b-a)+1$, es la cantidad de números naturales que hay de a hasta b. La expresión "es la cantidad que hay de a hasta b", para la situación de las fotocopias de un libro quiere decir la cantidad de páginas que hay de la página a hasta la página b.

De la expresión anterior se deducen los ítems 1 al 13 expresados en uno de los siguientes párrafos de esta institucionalización los cuales fueron obtenidos por el interés que despertó en los actores este novedoso conocimiento. Por ésta razón se profundizó en la expresión anterior hasta descubrir que la progresión aritmética tenía algo de relación con el objeto de estudio surgido en el grado sexto, ya que la progresión aritmética es una función que permite determinar el término enésimo de cierta sucesión, pero que al modificarla con ciertas restricciones se puede obtener una expresión similar a $(b-a)+1$.

Más adelante, se pregunta a los alumnos la cantidad de elementos que puede tener un conjunto con una cantidad finita de elementos, por ejemplo, contar la cantidad de elementos del conjunto de los números dígitos. La respuesta la pueden obtener por conteo o por la estrategia aprendida, restando sus extremos y a este resultado sumarle uno. Esto se hizo notorio, se alcanzó a observar que el conjunto de los números dígitos están ordenados secuencialmente con una diferencia común de 1, es decir, para todo elemento del conjunto de los números dígitos y su sucesor tienen una diferencia de una unidad, $d = 1$, esto llevó a pensar al investigador si esta estrategia se puede aplicar a los números múltiplos de dos, tres, cuatro, etc. En efecto se cumplió siempre y cuando existiera una sucesión. Por ejemplo, si queremos hallar la cantidad de los primeros múltiplos de 4 hasta el 24 en los números naturales: podemos utilizar la siguiente estrategia $((24-0)/4)+1=7$. O hallar la cantidad de números múltiplos de cuatro a partir del 16 hasta el 32, se aplica la misma estrategia $((32-16)/4)+1=5$. Como podemos ver, la diferencia común, representa el divisor en la expresión anterior. Luego, podemos expresar lo siguiente $((b-a)/d)+1$ es la cantidad de números naturales múltiplos de d que se encuentran de a hasta b, con a y b múltiplos de d.

Por otra parte, si cada fotocopia que se saca posee dos páginas entonces utilizaremos la siguiente expresión matemática $((b-a)/2)+1$ con las siguientes condiciones: si $((b-a)/2)$ es exacta, entonces $((b-a)/2)+1$ es la cantidad de fotocopias, y si $((b-a)/2)$ es inexacta, se toma el cociente natural k de la división y se incrementa en una unidad, como podemos ver $((b-a)/2)=k$, $k+1$, entonces k+2 es el número de copias, donde k es la razón natural o parte entera. Además la expresión $((b-a)/2)+1$, cuando $((b-a)/2)$ es exacta y al menos uno de los extremos a y b es impar, da el total de números impares en la secuencia, pero si a y b son pares nos da la cantidad de números pares que hay en la sucesión, y sí $((b-a)/2)$ es inexacta nos da la cantidad de números pares en una sucesión de números naturales. (sugerencia, cuando el cociente es un número decimal positivo se deja la parte entera).

A continuación, se presenta la institucionalización del saber que surgió en la práctica pedagógica. El primer ítem fue escrito en el tablero y posteriormente al cuaderno de la siguiente forma: Si $a, b \in N, a \leq b$ entonces $(b-a)+1$, es la cantidad que hay de a hasta b.

1. Si a y $b \in N$, $a \leq b$ donde a y b son números que representan las páginas de un libro entonces $(b-a)+1$ es la cantidad de páginas que hay de la página a hasta la página b.

2. Si a y $b \in N$, $a \leq b$, donde a y b son números que representan los extremos de una sucesión de números naturales en un conjunto finito entonces $(b-a)+1$ es la cantidad de números naturales que hay de uno de los extremos al otro.

   Ejemplo:
   - Si $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces $|D| = (9-0)+1 = 10$ (La expresión $|D|$ representa el cardinal o el número de elementos del conjunto D)

3. Si a y $b \in N$, $a < b$, donde a y b son números que representan los extremos de un intervalo de números naturales entonces $(b-a)+1$ es la cantidad de números naturales que hay de uno de los extremos al otro.

Luego, se tiene el siguiente conjunto expresado en diferentes formas y el cálculo de su cardinalidad:

- Si $P = \{2,3,4,5\} = \{x \in N: 2 \leq x \leq 5\}$, entonces $|P| = (5-2)+1 = 4$

Escudriñando una formalización del objeto matemático en estudio, se llegó a concluir que para todo a, b que pertenecen al conjunto de los números enteros se tiene:

4. Si $A = \{x \in N: a \leq x \leq b\}$, entonces $|A| = (b-a)+1$

5. Si $A = \{x \in N: a < x \leq b\}$, entonces $|A| = (b - a)$

6. Si $A = \{x \in N: a \leq x < b\}$, entonces $|A| = (b - a)$

7. Si $A = \{x \in N: a < x < b\}$, entonces $|A| = (b - a) - 1$

Además, se llegó a las generalizaciones de los anteriores objetos matemáticos de los ítems 4, 5, 6, y 7, utilizando el conjunto de los números enteros, donde se obtuvo:

8. Si a y $b \in Z$, $a < b$, donde a y b son números que representan los extremos de un intervalo de números enteros entonces $(b - a) + 1$ es la cantidad de números enteros que hay de uno de los extremos al otro.

También buscando una formalización del objeto matemático se llegó a concluir que para todo a y b que pertenecen al conjunto de los números enteros se tiene:

9. Si $A = \{x \in Z: a \leq x \leq b\}$ entonces $|A| = (b - a) + 1$, (tomando sus extremos).

10. Si $A = \{x \in Z: a < x \leq b\}$ entonces $|A| = (b - a)$, (tomando el extremo derecho).

11. Si $A = \{x \in Z: a \leq x < b\}$ entonces $|A| = (b - a)$, (tomando el extremo izquierdo).

12. Si $A = \{x \in Z: a < x < b\}$ entonces $|A| = (b - a) - 1$, (sin incluir sus extremos).

Luego, para todo a, b y c que pertenecen al conjunto de los números enteros tenemos:

13. Si $A = \{x \in Z: a \leq x + c \leq b\}$, entonces $|A| = (b - a) + 1$, cuenta, tomando sus extremos.

Ejemplo:

$A = \{x \in Z: -3 \leq x + 8 \leq 15\} \rightarrow |A| = \big(15 - (-3)\big) + 1 = 19$, como lo podemos verificar $A = \{-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

CONCLUSIONES

Los estudiantes tomaron el nuevo objeto aprendido como una estrategia para resolver problemas de la forma: poder encontrar los días de vigencia, días de oferta, cantidad de números dígitos, contar hojas de un libro de algún extremo a otro.

Se infiere, que los alumnos tienen variedad de formas de aprendizaje, y por este hecho tenemos que estar atentos para no producir un obstáculo en ellos. Ya que los conocimientos preliminares de los estudiantes son importantes, porque son tomados como estrategias para poder resolver problemas matemáticos o poder encontrar nuevas estrategias.

La toma de datos conocidos, la utilización de la inducción intuitiva, la asignación de variables e incógnitas a datos desconocidos, la comunicación y la búsqueda de generalizaciones son algunas de las maneras como los estudiantes pasan del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

La observación, comparación, correspondencia, identificación de las condiciones, jerarquía de operaciones y la socialización de la expresión algebraica con los compañeros, es el uso que dan los estudiantes de una expresión matemática.

El lenguaje, las operaciones mentales y escritas, la intuición, el material concreto, los conceptos preliminares y las partes del cuerpo son otras estrategias que aplican los estudiantes para resolver problemas.

Asignación de incógnitas y variables a valores conocidos y desconocidos respectivamente, comparación y el orden de operaciones son estrategias de los estudiantes para obtener expresiones algebraicas.

A partir de la pregunta ¿Cuántas páginas hay entre cualquier par de extremos en un libro? Se pudo inferir una serie de aplicaciones expuestas en la institucionalización del presente documento. Por otro lado, a causa de la reflexión sobre la práctica pedagógica el investigador realizó la siguiente estrategia, la cual cuenta la cantidad de números naturales o enteros en una sucesión del conjunto de números enteros, que tiene una diferencia común d, donde a y b indican los extremos, entonces la cantidad de números que se encuentran es representada de la siguiente manera $((b-a)/d)+1$. Como se puede apreciar por la siguiente ecuación $n=((b-a)/d)+1$, $d\neq 0$. Si $(b-a)=0$, entonces $n=1$. Además, podemos encontrar la cantidad de números impares en dicha sucesión (n_i) así:

Caso I) d es impar

$n_i = (b-a)/2d$, pero si $(b-a)/2d$ es inexacta, entonces del cociente tomamos la parte entera del número decimal y le agregamos uno.

Caso II) d es par

1. a es impar
   $n_i = ((b-a)/d)+1$
2. a es par
   $n_i = 0.$

Y hallar la cantidad de pares (n_p) se utiliza la siguiente notación $n - n_i = n_p$.

Se llegó a afirmar la existencia de la progresión aritmética para sucesiones estrictamente crecientes y estrictamente decrecientes, pero no monótona, de la siguiente manera si $((b-a))/d \ +1 \ = n$, $d \neq 0$, para todo a y b que pertenecen al conjunto de los enteros y $d \in Z \setminus \{0\}$

$$((b-a)/d) \ +1 \ = n$$

$$((b-a)/d) = n-1$$

$$b-a = (n-1)d$$

$$b = a + (n-1)d$$

Sea $a = \ a_1$ y $b = \ a_n$

$$a_n = a_1 \ + (n-1)d.$$

Además, relacionando por medio del producto el objeto matemático en estudio $((b-a)/d) \ +1$ y la expresión $\frac{a+b}{2}$, entonces obtenemos la suma de la cantidad de los n números que se encuentran en la sucesión, representada por (S_n). Veamos $[((b-a)/d) \ + 1]\left[\frac{a+b}{2}\ \right] = \ S_n$. Como $((b-a)/d) \ +1 \ = n$, entonces $[n]\left[\frac{a+b}{2}\ \right] = \ S_n$. Vemos que $[n]\left[\frac{a+b}{2}\ \right] = \ S_n$. La anterior expresión ha existido desde hace tiempos en la comunidad matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Zambrano, A. Complejidad del concepto de educación, 2002, pp.1-5.

Educación para Nutrir la Vida, Editorial FERIVA, Santiago de Cali, 2008, P.81. Recuperado en internet: https//. journalusco. edu. Co.

ZÚÑIGA, A. H., RIASCOS, (1998) Y. Memorias del Seminario de Educación Matemática del Departamento de Matemática de la Universidad del Cauca. Sin Editar.

Flórez, Rafael. 2001. Evaluación Pedagógica y cognición. Editorial M_c Graw Hill. Bogotá pp. 42-46.

Lineamientos Curriculares Matemáticas, Ministerio de Educación Nacional República de Colombia, Bogotá, julio de 1998. P.25.

Brousseau, G. ¿que pueden aportar a los estudiantes a los diferentes enfoques de la Didáctica de las matemáticas (segunda parte), IREM, Université de Bordeaux, Francia?

OBANDO ZAPATA, Gilberto y MÚNERA CÓRDOBA, John Jairo. “las situaciones problemas como estrategias para la conceptualización matemática”. En revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, no. 35, (enero - abril), 2003. pp.185-199.

Brousseau, G. Educación matemática, En revista Educación y didáctica de las matemáticas, Vol. 12, N_0 1 abril 2000 pp. 5-38.

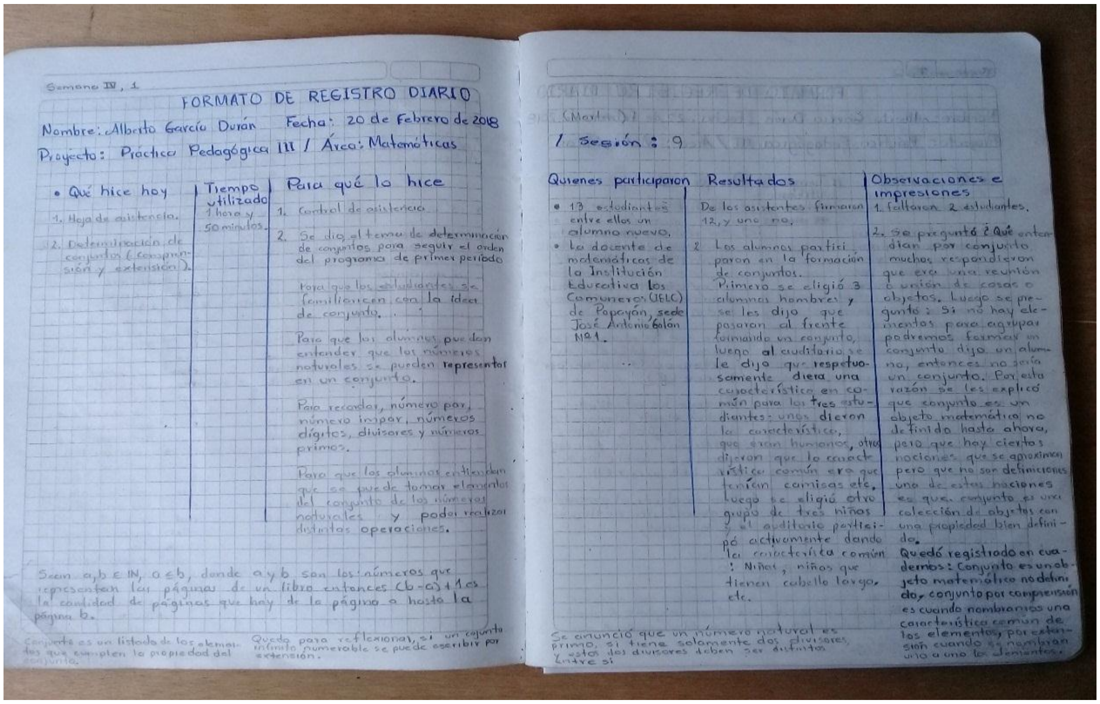
Números naturales. Sistemas de numeración, E. Cid, J. D. Godino y C. Batanero.

Earl W. Swokowski. Marquette University. Cálculo con geometría analítica. Primera edición, Editorial Wadsworth Internacional Iberoamericana. México 1982.

Granville Smith Longley. Cálculo diferencial e integral. Segunda Edición. Unión Tipográfica Editorial Hispano-americana. México 1966.

Seymour Lipschutz. Topología General. Serie de Compendios Schaum. Teoría y problemas. Versión Latinoamericana de Editorial Norma.

ANEXOS



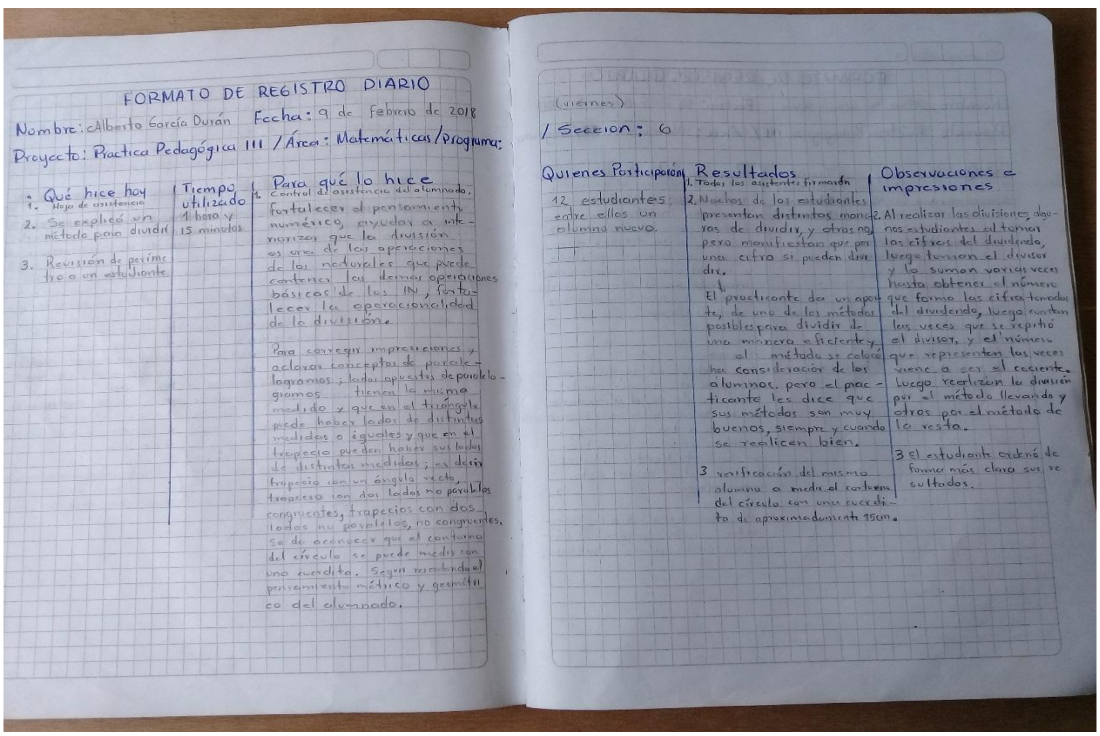
FORMATO DE REGISTRO DIARIO

Nombre: Alberto García Durán Fecha: 20 de Febrero de 2018

Proyecto: Práctica Pedagógica III / Área: Matemáticas

Sesión: 9

Qué hice hoy	Tiempo utilizado	Para qué lo hice	Quienes participaron	Resultados	Observaciones e impresiones
1. Hoja de asistencia. 2. Determinación de conjuntos (comprensión y extensión).	1 hora y 50 minutos.	1. Control de asistencia. 2. Se dio el tema de determinación de conjuntos para seguir el orden del programa de primer periodo.	13 estudiantes entre ellos un alumno nuevo. La docente de matemáticas de la Institución Educativa los Comuneros (IELC) de Popayán, sede José Antonio Galán Nº1.	De los asistentes formaron 12, y uno no.	1. Faltaron 2 estudiantes.



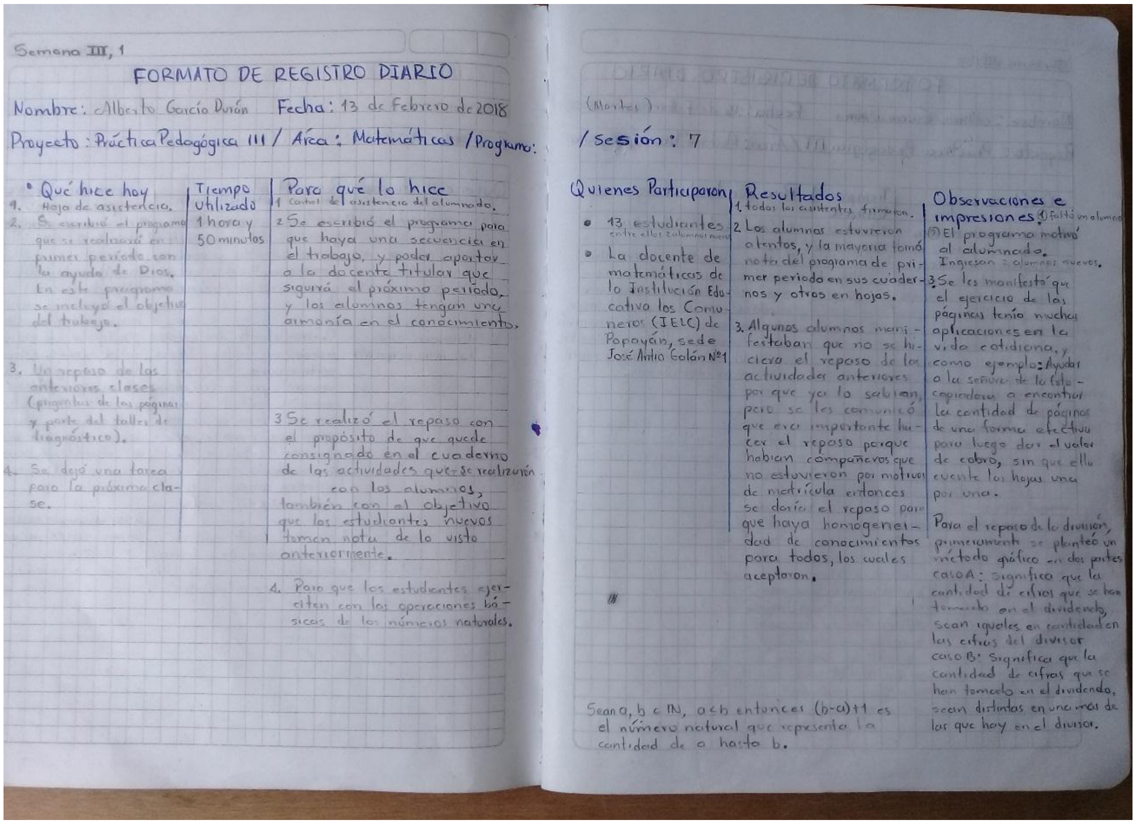
FORMATO DE REGISTRO DIARIO

Nombre: Alberto García Durán Fecha: 9 de Febrero de 2018

Proyecto: Práctica Pedagógica III / Área: Matemáticas/Programa:

Sesión: 6

Qué hice hoy	Tiempo utilizado	Para qué lo hice	Quienes participaron	Resultados	Observaciones e impresiones
1. Hoja de asistencia. 2. Se explicó un método para dividir. 3. Revisión de perímetro a un estudiante.	1 hora y 15 minutos.	1. Control de asistencia del alumnado.	12 estudiantes: entre ellos un alumno nuevo.	1. Todos los asistentes firmaron.	



Semana III, 1

FORMATO DE REGISTRO DIARIO

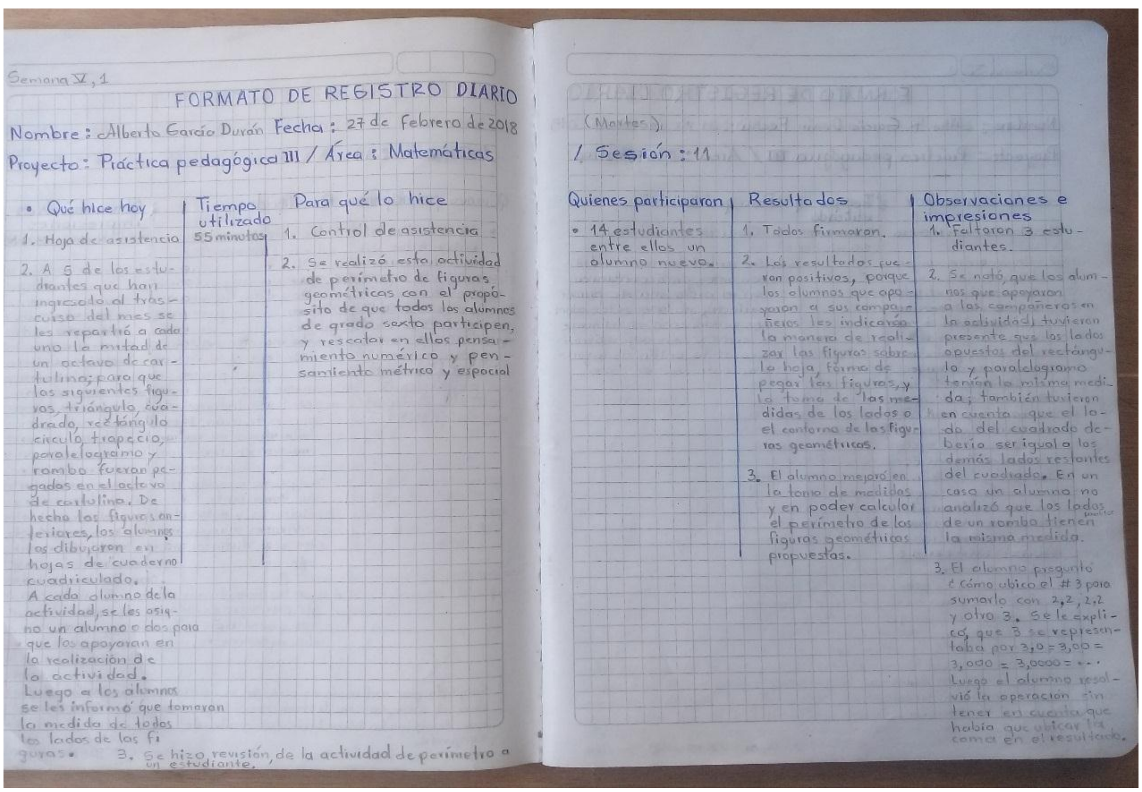
Nombre: Alberto García Durán Fecha: 13 de Febrero de 2018 (Martes)

Proyecto: Práctica Pedagógica III / Área: Matemáticas / Programa: / Sesión: 7

• Qué hice hoy	Tiempo utilizado	Para qué lo hice
1. Hoja de asistencia.	1 hora y 50 minutos	1 Control de asistencia del alumnado.
2. Se escribió el programa que se realizará en primer período con la ayuda de Dios. En este programa se incluyó el objetivo del trabajo.		2 Se escribió el programa para que haya una secuencia en el trabajo, y poder aportar a la docente titular que seguirá el próximo período, y los alumnos tengan una armonía en el conocimiento.
3. Un repaso de las anteriores clases (preguntas de las páginas y parte del taller de diagnóstico).		3 Se realizó el repaso con el propósito de que quede consignado en el cuaderno de las actividades que se realizaron con los alumnos, también con el objetivo que los estudiantes nuevos tomen nota de lo visto anteriormente.
4. Se dejó una tarea para la próxima clase.		4. Para que los estudiantes ejerciten con las operaciones básicas de los números naturales.

Quienes Participaron	Resultados	Observaciones e impresiones
• 13 estudiantes entre ellos 2 alumnos nuevos • La docente de matemáticas de la Institución Educativa los Comuneros (IELC) de Popayán, sede José Antonio Galán Nº1	1. todos los asistentes firmaron. 2. Los alumnos estuvieron atentos, y la mayoría tomó nota del programa de primer periodo en sus cuadernos y otros en hojas. 3. Algunos alumnos manifestaban que no se hiciera el repaso de las actividades anteriores por que ya lo sabían, pero se les comunicó que era importante hacer el repaso porque habían compañeros que no estuvieron por motivos de matrícula entonces se daría el repaso para que haya homogeneidad de conocimientos para todos, los cuales aceptaron.	① faltó un alumno ② El programa motivó al alumnado. Ingresan 2 alumnos nuevos. 3. Se les manifestó que el ejercicio de las páginas tenía muchas aplicaciones en la vida cotidiana, y como ejemplo: Ayudar a la señora de la fotocopiadora a encontrar la cantidad de páginas de una forma efectiva para luego dar el valor de cobro, sin que ella cuente las hojas una por una. Para el repaso de la división, primeramente se planteó un método gráfico en dos partes caso A: significa que la cantidad de cifras que se han tomado en el dividendo, sean iguales en cantidad en las cifras del divisor caso B: significa que la cantidad de cifras que se han tomado en el dividendo, sean distintas en una o más de las que hay en el divisor.

Sean $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ entonces $(b-a)+1$ es el número natural que representa la cantidad de a hasta b.



Semana V, 1

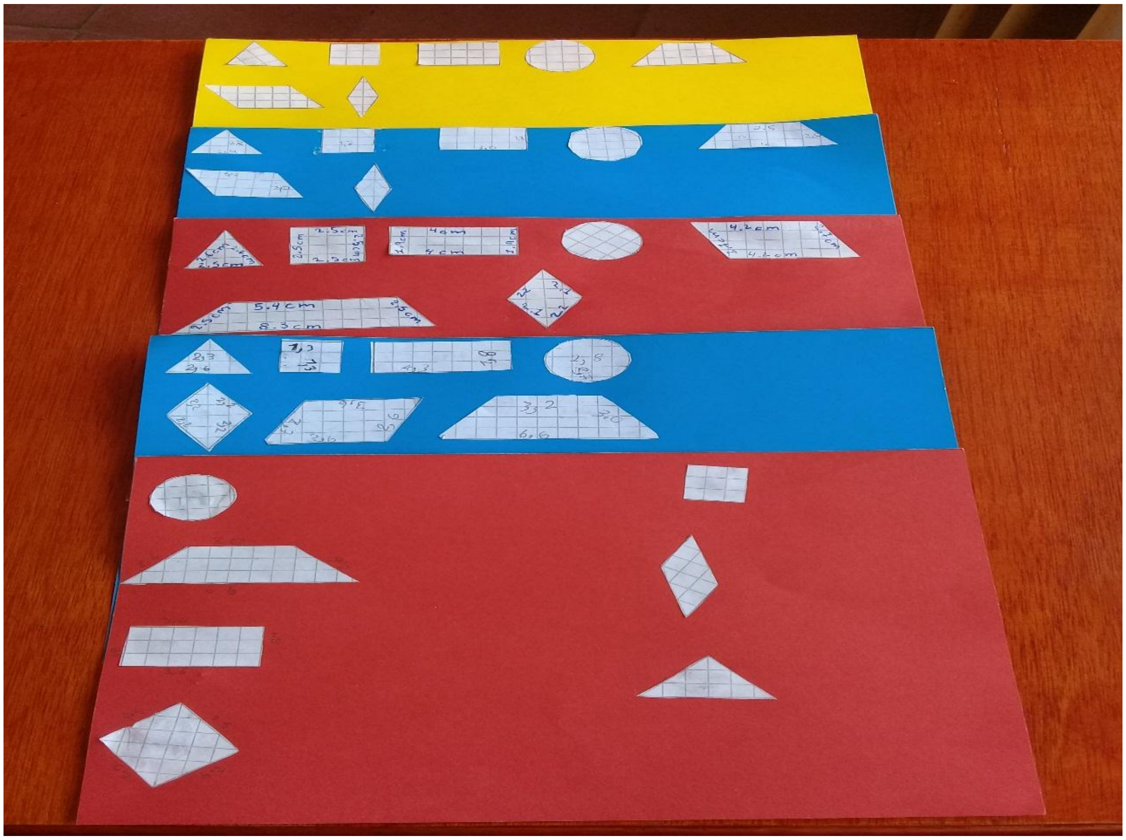
FORMATO DE REGISTRO DIARIO

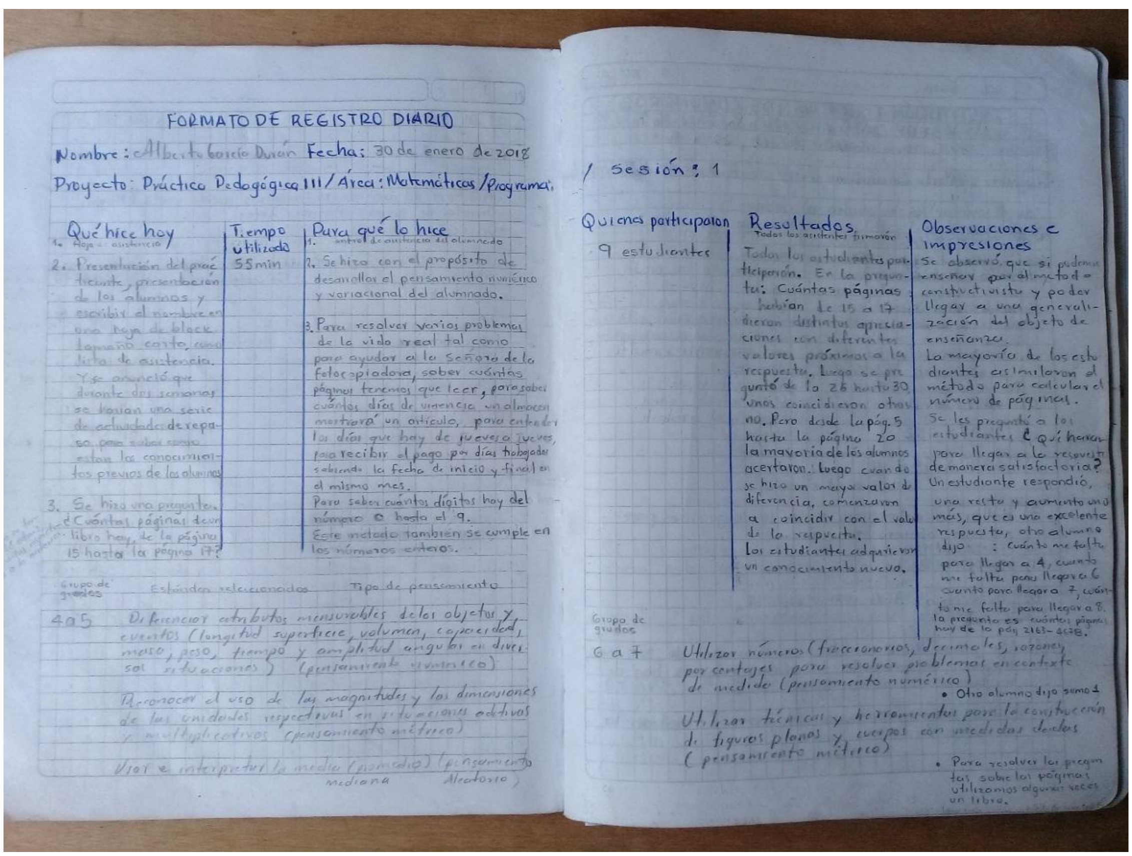
Nombre: Alberto García Durán Fecha: 27 de Febrero de 2018 (Martes)

Proyecto: Práctica pedagógica III / Área: Matemáticas / Sesión: 11

• Qué hice hoy	Tiempo utilizado	Para qué lo hice
1. Hoja de asistencia	55 minutos	1. Control de asistencia
2. A 5 de los estudiantes que han ingresado al trascurso del mes se les repartió a cada uno la mitad de un octavo de cartulina; para que las siguientes figuras, triángulo, cuadrado, rectángulo circulo, trapecio, paralelogramo y rombo fueran pegados en el octavo de cartulina. De hecho las figuras anteriores, los alumnos los dibujaron en hojas de cuaderno cuadriculado. A cada alumno de la actividad, se les asignó un alumno o dos para que los apoyaran en la realización de la actividad. Luego a los alumnos se les informó que tomaran la medida de todos los lados de las figuras.		2. Se realizó esta actividad de perímetro de figuras geométricas con el propósito de que todos los alumnos de grado sexto participen, y rescatar en ellos pensamiento numérico y pensamiento métrico y espacial
3. Se hizo revisión de la actividad de perímetro a un estudiante.		

Quienes participaron	Resultados	Observaciones e impresiones
• 14 estudiantes entre ellos un alumno nuevo.	1. Todos firmaron. 2. Los resultados fueron positivos, porque los alumnos que apoyaron a sus compañeros les indicaron la manera de realizar las figuras sobre la hoja, forma de pegar las figuras, y la toma de las medidas de los lados o el contorno de las figuras geométricas. 3. El alumno mejoró en la toma de medidas y en poder calcular el perímetro de las figuras geométricas propuestas.	1. Faltaron 3 estudiantes. 2. Se notó, que los alumnos que apoyaron a los compañeros en la actividad, tuvieron presente que los lados opuestos del rectángulo y paralelogramo tenían la misma medida; también tuvieron en cuenta que el lado del cuadrado debería ser igual a los demás lados restantes del cuadrado. En un caso un alumno no analizó que los lados paralelos de un rombo tienen la misma medida. 3. El alumno preguntó ¿Cómo ubico el # 3 para sumarlo con 2,2, 2,2 y otro 3. Se le explicó, que 3 se representaba por 3,0 = 3,00 = 3,000 = 3,0000 = ... Luego el alumno resolvió la operación sin tener en cuenta que había que ubicar la coma en el resultado.




FORMATO DE REGISTRO DIARIO
Nombre: Alberto García Durán Fecha: 30 de enero de 2018
Proyecto: Práctica Pedagógica III / Área: Matemáticas / Programa:
/ sesión: 1
Qué hice hoy
Tiempo utilizado
55min
Para qué lo hice
2. Se hizo con el propósito de desarrollar el pensamiento numérico y variacional del alumnado.
3. Para resolver varios problemas de la vida real tal como para ayudar a la señora de la fotocopiadora, saber cuántas páginas tenemos que leer, para saber cuántos días de vigencia un almacén mostrará un artículo, para entender los días que hay de jueves a jueves, para recibir el pago por días trabajados sabiendo la fecha de inicio y final en el mismo mes.
Para saber cuántos dígitos hay del número 0 hasta el 9.
Este método también se cumple en los números enteros.
3. Se hizo una pregunta. ¿Cuántas páginas de un libro hay, de la página 15 hasta la página 17?
Grupo de grados
Estándares relacionados
Tipo de pensamiento
4 a 5
Quienes participaron
9 estudiantes
Resultados
Todos los asistentes firmaron
Todos los estudiantes participaron. En la pregunta: Cuántas páginas habían de 15 a 17 dieron distintas apreciaciones con diferentes valores próximos a la respuesta. Luego se preguntó de la 26 hasta 30, unos coincidieron otros no. Pero desde la pág. 5 hasta la página 20 la mayoría de los alumnos acertaron. Luego cuando se hizo un mayor valor de diferencia, comenzaron a coincidir con el valor de la respuesta.
Los estudiantes adquirieron un conocimiento nuevo.
Observaciones e impresiones
Se observó que si podemos enseñar por el método constructivista y poder llegar a una generalización del objeto de enseñanza.
La mayoría de los estudiantes asimilaron el método para calcular el número de páginas.
Se les preguntó a los estudiantes ¿Qué hacen para llegar a la respuesta de manera satisfactoria?
Un estudiante respondió, una resta y aumento uno más, que es una excelente respuesta, otro alumno dijo : cuánto me falta para llegar a 4, cuánto me falta para llegar a 6 cuánto para llegar a 7, cuánto me falta para llegar a 8.
Grupo de grados
6 a 7
Utilizar números (fraccionarios, decimales, razones, porcentajes para resolver problemas en contexto de medida (pensamiento numérico)
• Otro alumno dijo sumo 1
Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas (pensamiento métrico)