SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA LA APROPIACIÓN DE TÉCNICAS DE CÁLCULO DE LA DERIVADA

GERARDO HOMERO ANACONA ERAZO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN

2019

SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA LA APROPIACIÓN DE TÉCNICAS DE CÁLCULO DE LA DERIVADA

GERARDO HOMERO ANACONA ERAZO

Director:
Dr. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN

2019

Agradecimientos

Agradezco primordialmente a Dios por brindarme la capacidad, fortaleza y perseverancia para culminar este proyecto y poder finalizar esta importante etapa de mi vida.

A mis padres que con su incondicional apoyo y esfuerzo me dieron la confianza para emprender este difícil proyecto, pero, que sin su ayuda no hubiese sido posible concluirlo.

A mi director de práctica pedagógica Dr. Yilton Ovirne Riascos Forero por su acompañamiento en mi proceso de formación.

A mi evaluadora (nombre) por aceptar y tomarse el tiempo de evaluar el actual proyecto.

Finalmente agradecer a mis amigos, compañeros y todas aquellas personas que me han acompañado y han hecho parte de esta etapa de mi vida.

Nota de aceptación:

____

Director: ____________________

Ph.D Yilton Ovirne Riascos Forero.

Asesora: ____________________

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 8 de agosto de 2019

Índice

Introducción

Las Prácticas pedagógicas(PP) son cuatro asignaturas dentro del plan de estudio del programa de Licenciatura en Matemáticas. Estas asignaturas son un espacio que pretende aproximar al estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas a la realidad profesional del Sistema Educativo Colombiano y Regional,así como tambien procuran dotar al estudiante de una fundamentación teórica que posibilite esta aproximación.

En las dos primeras de las prácticas se estudia todo el andamiaje teórico, en la tercera se hace un aproximamiento del estudiante al aula y en la última fase, a saber, práctica pedagógica IV, el estudiante debe realizar su práctica dentro del aula y sistematizar su experiencia dentro de la misma, este texto es la culminación de dicho proceso, esta practica fue desarrollada en el colegio CESCO (corporacion educativa del suroccidente colombiano) que cuenta con dos sedes, la principal ubicada en la carrera 3 # 6-09 y una segunda sede ubicada en: calle 8 # 6-59 Centro histórico. Se trabajó con un grupo de 24 estudiantes, 9 mujeres y 15 varones.

El objetivo de esta práctica pedagógica IV fue dotar a los estudiantes del colegio CESCO de una serie de habilidades para el cálculo de la dervada mediante el estudio de límites.

Para ello se llevó a cabo una selección de ítems que le permitiera al estudiante adquirir ciertos conocimientos en el cálculo de límites que se considerarón pertinentes a la hora de calcular la derivada, como por ejemplo: límites polinómicos, límites trigonométricos, el conjugado de una expresión algebraica, entre otros.

Además, una vez terminado todo el proceso en el aula con su respectiva evaluación se decidió incluir en este trabajo una escala donde se clasificaran los estudiantes según sus respuestas, dicha escala fue realizada según las observaciones hechas sobre las evaluaciones, este trabajo está dividido en los siguientes capítulos:

Capítulo dos:Se explica la teoría de Brousseau y los posibles obtaculos didáctcos en la enseñanza de límites, ambos items son la fundamentación de este trabajo.

Capítulo tres: En este se incluye toda la teoría desarrollada en el aula y que se considera necesaria para enfrentar la derivada.

Capítulo cuatro: En este capítulo se detalla lo hecho en cada sesión dentro del aula.

Capítulo cinco: En este se muestran los resultados en el aula, además de la escala donde se clasifican las estrategias de los estudiantes.

Capítulo seis: Se dan las conclusiones y recomendaciones del estudiante. Por último hay un capítulo denominado anexos, en él se introdujeron los talleres y evaluaciones que se realizaron en el aula, además de tablas donde se especifica las notas de los estudiantes dentro de este proceso.

1. Referentes teóricos

Teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau

Como primer referente para este trabajo se tomó la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau en la cual, como primer acercamiento se entienden los procesos de enseãnza como un escenario propicio para la producción de conocimientos matemáticos, estos conocimientos tienen origen cuando el estudiante se enfrenta a un medio que se resiste a ser moldeado por el mismo. “El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” (Brousseau, 1986)

Estos medios que son diseñados por el docente deben de cumplir al menos dos condiciones, una es que deje una gama de posibilidades para dar solución al problema y dos que el estudiante puede identificar el objetivo de la tarea(medio) sin que necesariamente sepa cuál es el conocimiento que se le pide alcance (sadovsky,2005), este objetivo de la tarea es que le permitirá al estudiante identificar si sus propuestas para dar solución es acertada o no, de lo contrario deberá decidir si debe cambiar de estrategia.

Cuando el medio le impone esta serie de cuestiones al estudiante estamos hablando de una retroacción del medio, estas retroacciones hacen que el estudiante no solo se enfrente ahora con el problema inicial sino con sus nuevos conocimientos puestos en juego.

Como vemos en este tipo de teoría el medio y el estudiante llevan una especie de diálogo en el cual el estudiante escoge una solución, la pone en práctica y luego la verifica frente al medio, gracias a que el medio cuenta con la propiedad de verificabilidad de las respuestas, aunque el docente entra en juego en esta serie de relaciones el docente se mantiene al margen de explicitar o de dirigir al estudiante al conocimiento que desea que adquiera, a esta relación del estudiante con el medio se le denomina situación a didáctica.

Dicho de otra manera la situación adidáctica es el proceso por el cual el estudiante toma decisiones frente a un medio que exige solución por parte de él sin que el docente interfiera dando a conocer el conocimiento que se espera adquiera el alumno.

Pero... ¿entonces qué papel juega el docente en esta teoría además de propiciar un medio para que se dé el conocimiento? Para responder a esta pregunta primero debemos preguntarnos si es para la teoría lo mismo conocimiento que saberes, para Brousseau además que el estudiante aprenda con un medio que se resista a su manipulación, también sostiene que el conocimiento matemático es un producto cultural, con lo que permite diferenciar entre conocimiento y saberes, los saberes son objetos descontextualizados y que pueden usarse en cualquier situación en los que sean pertinentes (Brousseau, 1986), mientras que los conocimientos tienen estrecha relación con la situación que los hace surgir, esto es son objetos que dependen del contexto en que se inscriban y aunque tengan que ver con los saberes matemáticos muchas veces esta relación no es del todo explicitable, es ahí donde entra en juego el papel del docente, el docente como representante de la disciplina matemática plantea el medio que hará surgir el conocimiento esperado (intención didáctica).

Una vez el conocimiento este adquirido por el estudiante el deberá hacer el tránsito desde ese conocimiento a un saber lo que se denomina en la teoría como institucionalización, además el docente debe hacer que el estudiante se haga cargo del problema que lo tome como suyo, indicarle algunos conceptos necesarios para el desarrollo de la estrategia escogida por el estudiante y además de las reglas pertinentes lo que en la teoría se conoce como: “la devolución”, hay que decir además que aparte de las dos tesis expuestas en este marco teórico: el estudiante aprende cuando hay un medio que se resiste, el conocimiento matemático es un producto cultural, debemos agregar que: “para cada saber hay un medio ,al cual dentro de la teoría se conoce como situación fundamental, que puede comunicarse sin apelar a dicho conocimiento y para el cual dicho conocimiento es una estrategia óptima de resolución” este es de nuevo un papel del docente escoger una situación fundamental ya que no todas las situaciones fundamentales requieren los mismos saberes externos (prerrequisitos) al conocimiento que se quiere el estudiante adquiera, en otras palabras no todas las situaciones son óptimas ya que eso dependerá del grado matemático de los estudiantes.(Brousseau, 1986)

Como es notorio en la teoría hay relaciones que se dan dentro del proceso enseñanza aprendizaje que son insoslayables, relación estudiante-medio, estudiante-docente, como vimos el estudiante tiene una especie de diálogo con la situación fundamental que se escogió para hacer surgir un determinado conocimiento, en dicho diálogo el estudiante analiza, decide, se rige por normas y reglas, pregunta al docente, a sus compañeros, pero todo esto bajo ciertos comportamientos que rigen la clase y los saberes matemáticos, a esta serie de comportamientos del estudiante y del profesor que son regidos alrededor de un saber matemático se le denomina:“contrato didáctico” dentro de la teoría de Brousseau.

Obstáculos en el aprendizaje de límites.

En el aprendizaje de los límites existen almenos tres obstáculos a considerar a la hora de analizar los procesos de enseñanza aprendizaje de los liímites, estos obstáculos son: el concepto de infinito, los distintos sistemas de representación de un concepto matemático y el concepto de función, pueden existir muchos más pero para efectos del trabajo actual nos dedicaremos a estos. Primero definamos que entenderemos por obstáculo, “los obstáculos son conocimientos aparentes, que impiden tener acceso a nuevos conocimientos y que, ocasionalmente, al ser movilizados, se develan precisamente como impedimentos” (Brousseau, 1983).

Brousseau además agrega: “un obstáculo puede ser un conocimiento o se comporta como tal en un cierto hábitat, pero que, modificado este, puede volverse insuficiente e inadaptado y ser fuente de errores o presentarlos; y que se caracterizan además por reaparecer "de manera intempestiva y obstinada” aun después de haberse tomado consciencia de ellos”. (Brousseau, 1983)

Se distinguen tres tipos de obstáculos:

1. Los ontogenéticos se originan en las características del desarrollo del aprendiz.

2. Los didácticos: son producto de la enseñanza.

3. los epistemológicos: se relacionan intrínsecamente con la matemática bajo estudio.

Del primer tipo de obstáculo podemos decir que va ligado a las características cognitivas del sujeto que aprende, esto es, no es lo mismo un sujeto de primer semestre de universidad que uno de primer semestre de bachillerato, así que encontraremos dificultades al intentar introducir un concepto de primer semestre de universidad en un aula de primer grado de bachillerato.

El segundo tiene que ver, cómo ello mismo lo indica, con las diferentes formas de interpretación y enseñanza de los profesores a sus alumnos, ejemplo de ello es la enseñanza de los números enteros, nominando a los positivos como pertenencia de dinero y los negativos como deudas, este tipo de transpociones pueden generar en el tiempo obstáculos. El último tipo hace referencia a las propias características de las matemáticas en estudio y su complejidad como concepto.

Una vez definido que es un obstáculo veamos porque el infinito es un obstáculo para los estudiantes de cálculo en muchos niveles.

El principal problema que se verifica es que los estudiantes que llegan a recibir un curso de cálculo llegan al aula de clase con un bagaje ya establecido y a veces erróneo con lo que se refiere a infinito. Esto es, la mayoría de veces sus concepciones se basan en procesos meramente empíricos, como diría (Hitt , s.f): “los alumnos que ingresan por primera vez a un curso de cálculo, generalmente han tenido un acercamiento intuitivo del infinito, muy probablemente con aspectos de la “vida real” (p.e. que el universo es infinito), sin haber reflexionado sobre aspectos propios del infinito en matemáticas; ello dificulta en cierta medida su comprensión en un contexto matemático. En el aprendizaje del concepto de límite (fundamental para la construcción adecuada de los conceptos del cálculo) se requiere un conocimiento sobre los procesos infinitos.”

El segundo problema que es necesario hacer notar es que muchos profesores y en general muchos matemáticos de elite, se ven enfrentados a dos clases de infinitos, a saber: El infinito actual y potencial, estos tipos de infinitos están estrechamente ligados a las matemáticas y en particular al cálculo, la historia demuestra que los matemáticos siempre se han visto enfrentados a estos dos tipos de infinitos, sin que muchas veces logren sobrepasar dicho obstáculo, como dice Hitt y Páez (2016): “historia de la matemática nos ha mostrado que el concepto es complejo y que probablemente los obstáculos que tuvieron algunos matemáticos para entender y formalizar este concepto, aparecerán en el aula de matemáticas. Aún más. Considerando que el problema es complejo. y que hubo muchos matemáticos que no lograron sobrepasar ese obstáculo generado por el infinito potencial ("designa la posibilidad de ir más lejos, continuación indefinida ...,"Hitt, 2003) para concebir el infinito actual (“es la toma de conciencia simultánea de todos los elementos de un conjunto infinito,” Idem). Es de suponerse que algunos profesores de matemáticas pudieran tener problemas en el aprendizaje del mismo.”

Es por estas razones que cálculo de límites al ser un proceso que recurre al infinito actual y potencial tiene obstáculos, “El cálculo tiene que ver directamente con los procesos infinitos. Puesto que límite es uno de los primeros conceptos del cálculo en donde el concepto de infinito aparece. Los conflictos de aprendizaje se hacen presentes de inmediato.”(Hitt y Páez, 2016)

Otro obstáculo a tener en cuenta son los distintos tipos de representación que se dan a un objeto matemático, en muchas aulas está siempre presente la representación meramente algebraica del concepto a ilustrar dejando de lado representaciones como la geométrica y por ende dejando de lado las visualización de conceptos como las funciones que juegan un papel importante en el cálculo de límites, con respecto a este punto esto es lo que afirma (Hitt s.f): “generalmente tanto los estudiantes como algunos profesores se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto, que produce una limitación en su comprensión. En lo general, la actividad de conectar las diferentes representaciones de un concepto, no es considerada por muchos profesores como tarea fundamental en la construcción del conocimiento matemático y, en lo particular, las tareas de conversión son minimizadas por parte de los profesores en relación al concepto de función.”

Además afirma con respecto a esta falta de visualizaciones : “La visualización matemática tiene que ver con procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, en pizarrón o en computadora, generadas de una lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una interacción entre representaciones para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en juego. La literatura suministra ejemplos de experimentación educativa donde se analizan problemas de aprendizaje que presentan muchos estudiantes e incluso algunos profesores de matemáticas con respecto a los temas de funciones, límites, continuidad, derivada e integral de funciones. Muchos de estos problemas son enmarcados en la falta de una habilidad ligada a la visualización matemática,”

Por último al estar el concepto de función ligado con el cálculo diferencial es necesario ver los posibles obstáculos que se presentan con respecto a este concepto en el aula.

El proceso de enseñanza de funciones se ve disminuido en una parte por la falta de representaciones alternas a la algebraica, que como se mencionó antes es uno de los problemas que son inherentes a la enseñanza del cálculo, veamos lo que dice Hitt (1996): “ generalmente tanto los estudiantes como algunos profesores se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto, que produce una limitación en su comprensión."

Dentro de los obstáculos que se vislumbran podemos encontrar además que la mayoría de estudiantes no distingue la diferencia entre las partes de una función y con ello la dependencia de variables entre sí, o como dirían en una de sus investigaciones Gómez, Hernández y Chaucanes (2015) "Los estudiantes de este grupo presentan serias dificultades para identificar los elementos de una función, y por ende para encontrar relaciones de dependencia entre las magnitudes que intervienen en la situación."

Otros últimos dos posibles obstáculos en el concepto de función es que los estudiantes y este es más un problema por parte del docente, el problema reside en escoger sus ejemplos de manera inadecuada llevando al estudiante a concepciones erróneas e inconexas. "Se recomienda que se utilicen ejemplos bien desarrollados que no deriven en incoherencias como las que el profesor desarrolló. Las aplicaciones de la matemática son importantes como para proponer ejemplos inconexos que mal formarán a los estudiantes, corriendo el peligro de que en lugar de llevarlos a un nivel más profundo sobre los conceptos matemáticos en juego, los volvamos insensibles a incoherencias y contradicciones lógicas." (Hitt, 2002).

Por último tenemos el obstáculo derivado de la graficación de funciones que hacen que el estudiante relacione la función continuidad y crea que al tabular puntos está viendo la generalidad de la función. "La graficación de funciones, a menudo se inicia con alguna expresión algebraica, se sustituyen algunos valores para formar una tabla, y enseguida se le solicita al estudiante unir esos puntos por medio de una curva. Ello producirá en el estudiante (al igual que en algunos profesores) dos tipos de conflictos:

Primero: Falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones. Este conflicto se puede detectar de inmediato al solicitar la tarea de dada una gráfica de una función, construir su correspondiente expresión algebraica. Y segundo Una concepción de función como función continua" Hitt (2002)

2. Objeto matemático

Acontinuacion se presentan todos los contenidos dictados en el aula del colegio CESCO, que son la propuesta con la cual se esperaba los esudiantes adquirieran los saberes y conocimientos que les permitieran desarrollar habilidades que les ayudarán con el cálculo de la derivada.

2.1. Límites que involucran funciones polinómicas

En esta sección se introducen conceptos como límite y la función polinómica[1] que van a ser la primera parte del trabajo en clase, para posteriormente generalizar todas las propiedades a cualquier tipo de función distinta de las polinómicas. Además se intrudicirá el límite del logaritmo y algunas funciones trigonométricas.
La razón por la cual se inicia en este tipo objetos matemáticos, es por la familiaridad que los estudiantes tienen con estos durante todo su bachillerato.

Definición 2.1 *Un polinomio (P(x)) es un objeto matemático de la siguiente forma*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$$

donde $a_0 \neq 0$ *y* $a_i \in \mathbb{R}$*, para cada i.*

Definición 2.2 *sea P(x) un polinomio.*
Si P(x) esta definido para valores x *próximos a un número dado* a *y si al acercarse los valores de* x *al número a encontramos que los vaores de P(x) se acercan más y más a un número real* L*, entonces decimos que* L *es el límite de P(x) cuando* x *tiende a* a *y escribimos*

$$\lim_{x \to a} P(x) = L$$

Definición 2.3 *Si* **P(x)** *y* **Q(x)** *son polinomios y* $\lim_{x\to a}(P(x)) = L$ *y* $\lim_{x\to a}(Q(x)) = M$ *entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$
2. $\lim_{x\to a}(P(x) + Q(x) = P(a) + Q(a) = L + M$. *(El límite de una suma es la suma de los límites)*
3. $\lim_{x\to a}(P(x) \times Q(x)) = P(a) \times Q(a) = L \times M$. *(El límite de un producto es el producto de los límites)*

[1]Hay que hacer diferencias entre función polinómica y polinómio el primer concepto a referencia a una relacion que cumple con las carácteristicas de función, mientras que el concepto de polnomio es una representación algebraica constituida de la suma de productos de variables y constantes o bien una sola constante o una sola variable, aquí se manejaron como iguales sin llegar a serlo.

4. $\lim_{x\to a}(P(x) \div Q(x)) = P(a) \div Q(a) = L \div M$ *(El límite de un cociente es el cociente de los límites)*

5. $\lim_{x\to a} P(x)^n = (\lim_{x\to a} P(x))^n = P(a)^n = L^n$ *donde* n *es un entero positivo*

6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{P(a)} = \sqrt[n]{L}$

7. $\lim_{x\to a} \ln P(x) = \ln P(a) = \ln L$ *con* $L > 0$

8. $\lim_{x\to a}\ sen P(x) = \ sen(\lim_{x\to a} P(x)) = \ sen(P(a)) = \ sen(L)$

9. $\lim_{x\to a}\ cos(P(x)) = \ cos(\lim_{x\to a} P(x)) = \ cos(P(a)) = \ cos(L)$

10. $\lim_{x\to a}\ tan(P(x)) = \ tan(\lim_{x\to a} P(x)) = \ tan(P(a)) = \ tan(L)$

2.2. Límites de una función

Puesto que las fucniones polinomicas no son las únicas funciones existentes es necesario hacer una extensión de las propiedades que vimos para los polinomios, para el resto de funciones, esto es de lo que nos encargaremos en esta sección, hay que decir que la única propiedad que no se puede extender a todas las fucniones es la propiedad uno de los polinomios, ya que esto solo se cumple en funciones que tienen una propiedad denominada continuidad, que esta fuera del alcance de este curso, que en principio solo se encarga de dar una serie de herramientas para afrontar los límites que tienen que ver con la derivada.

Definición 2.4 *Dados dos conjuntos A y B, una función entre ellos es una asociacón* f : $A \to B$ *que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B. A es llamado dominio de f y B rango de f.*

Observaciones:

1. Los polinomios son un tipo particular de función, donde:

$$A = B = \mathbb{R}$$

2. En muchas ocasiones A=B, como en el caso anterior.

Definición 2.5 *Si una función f esta definida para valores de* x *próximos a un número dado* a *y si al acercarse los valores de* x *al número a encontramos que los vaores de f(x) se acercan más y más a un número real* L*, entonces decimos que* L *es el límite de f(x) cuando* x *tiende a* a *y escribimos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Definición 2.6 *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones cuyos límites existen y estan dados por:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. *Si $f(x) = c$ (constante) entonces* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$ *(El límite de una suma es la suma de los límites)*
3. $\lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L \times M$ *(El límite de un producto es el producto de los límites)*
4. $\lim_{x\to a}(f(x) \div g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \div \lim_{x\to a} g(x) = L \div M$*, donde $g(x)$ y M son distintos de cero. (El límite de un cociente es el cociente de los límites)*
5. $\lim_{x\to a} f(x)^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n = L^n$ *donde n es un entero positivo*
6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$
7. $\lim_{x\to a} \ln f(x) = \ln(\lim_{x\to a} f(x)) = \ln L$ *con $L > 0$*
8. $\lim_{x\to a} \; sen f(x) = \; sen(\lim_{x\to a} f(x)) = \; sen(L)$
9. $\lim_{x\to a} \; cos(f(x)) = \; cos(\lim_{x\to a} f(x)) = \; cos(L)$
10. $\lim_{x\to a} \; tan(f(x)) = \; tan(\lim_{x\to a} f(x)) = \; tan(L)$

2.3. Límites trigonométricos

Identidades trigonométricas.

Para cotinuar con tema de los límites es necesario abordar los límites que comprenden a las identidades trigonométricas, por esta razón las abordamos en esta sección, dejando claro que son solo instrumentales para calcular limites como los que veremos en la siguiente sección

1. Identidades reciprocas.

1.a $\csc(x) = 1/senn(x)$

2.a $\sec(x) = 1/cos(x)$

2. Identidades por cociente

2.a $\tan(x) = sen(x)/cos(x)$

2.b $\cot(x) = cos(x)/sen(x)$

Generalmente los límites donde se involucra una función trigonométrica se resuelven usando estas identidades y unos límites que generalmente son llamados: límites trigonométricos notables que son los que veremos enseguida, estos lí mites tienen demostración pero dicha prueba esta fuera el alcance de estas notas.

Límites trigonométricos notables
Se llama: límites notables a los dos siguientes límites, ya que su uso es frecuente en la mayoría de los casos donde hay límites que involucran funciones trigonométricas.

1. $\lim_{x\to 0}\ sen(x)/x = 1$

2. $\lim_{x\to 0}(1 -\ cos(x))/x = 0$

Ejemplos Aquí algunos ejemplos que involucran límites notables.

1. $\lim_{x\to 0}\ tan(x)/x = 1$

2. $\lim_{x\to 0}\ sen(ax)/x = a$

3. $\lim_{x\to 0}\ sen(ax)/\ sen(bx) = a/b$

entre otros.

2.4. Límites que involucran indeterminaciones

Hasta ahora se han estudiando los límites, olvidando que algunos de ellos cuando son calculados conducen a expresiones en las cuales no es posible determinar si el límite existe o no sin antes haber realizado un proceso algebraico que permita dar cuenta de la verdadera naturaleza del límite, dichas expresiones son las que estudiaremos a continuación, así como algunas técnicas para resolverlas, ya que son parte fundamental dentro de las herramientas necesarias para afrontar límites como la derivada con cierto grado de éxito.

Definición 2.7 *Son llamadas ideterminaciones las expresiones matemáticas de la forma;*

$$\mathbf{0/0} \quad , \quad \infty/\infty, \quad \infty - \infty, \quad \mathbf{1}^{\infty}, \quad \mathbf{0}^{\infty}$$

entre otras.

Observaciónes:

1. En este curso solo nos ocuparemos de las dos primeras, debido a cuestiones de tiempo y el alcance matemático de los estudiantes.

2. En muchas de las indeterminaciones aparte de usar los límites trigonométricos notables, es necesario recordar los productos notables, este es el porque de esta pequeña sección siguiente.

Productos notables
Son llamados productos notables todos aquellos productos que pueden ser realizados, sin necesidad de verificación de los productos y sumas que en el se involucran, ejemplos:
sean $a,\ b\ y\ c \in \mathbb{R}$ entonces siempre se tiene:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Estos son algunos de los productos notables que se usaran en estas notas, vale decir que existen más productos notables, pero no es necesario para este curso, aunque vale la pena que sean concocidas por el estudiante, enseguida ejemplos de límites que dan en principio una indeterminación y que es necesario de algún producto notable para su resolución.
Ejemplos

1. $\lim_{x\to 2} (x^2-4)/(x-2)$ $tipo\ de\ indeterminacin\ 0/0$

2. $\lim_{x\to 3} (x^3-27)/(x-3)$ $tipo\ de\ indeterminacin\ 0/0$

3. $\lim_{x\to \infty} (x^2+1)/(x^2-1)$ $tipo\ de\ indeterminacin\ \infty/\infty$

4. $\lim_{x\to \infty} (x+1)^2/x^3$ $tipo\ de\ indeterminacin\ \infty/\infty$

5. $\lim_{x\to 0} (1-cos(x))/x$ $tipo\ de\ indeterminacin\ 0/0$

6. $\lim_{h\to 0} (\sqrt{x+h}-\sqrt{x})/h$ $tipo\ de\ indeterminacin\ 0/0$

Observación

1. En la mayoría de límites solo es necesario aplicar productos notables para solucionar las indeterminaciones, exepto en el cinco y seis.

2. En los límites seis y cinco se debe aplicar un concepto llamado conjugado que es lo que veremos a continuación.

Definición 2.8 Expresión algebraica
Conjunto de números y de símbolos ligados entre sí por los signos de las operaciones del álgebra y que no contiene más funciones que aquéllas que pueden calcularse con las operaciones del álgebra.

Ejemplos

1. $mx+b$

2. $5x^3+7x^2+3$

3. x^2

4. $x+1$

Definición 2.9 Conjugado
Dadas dos expresiones algebraicas a(x) y b(x) relacionadas por una suma o un resta, su conjugado sera una expresión algebraica con los mismos términos

$$a(x)\ \ y\ \ b(x)$$

pero almenos uno de los términos con signo contrario a la expresión original[2].

[2] Esta definición fue construida de manera artificial en este texto, ya luego de buscar en varios lugares, se encontraron pocas definiciones y todas ellas no constituian una definición formal de este objeto.

Observación:

1. En muchos casos a(x) o b(x) es una expresión constante.

Ejemplos
Aqui vemos una serie de ejemplos de expresiones algbraicas y enseguida su conjugado.

1. $1 - \cos(x)$ su conjugado es: $1 + \cos(x)$

2. $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ su conjugado es: $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$

3. $a - b$ su conjugado es: $a + b$

Ejemplos
continuando con los ejemplos cinco y seis al multimplicarlos por su conjugado tenemos.

1. $\lim_{x \to 0}(1 - \cos(x)^2)/x(1 + \cos(x)) = 0$

2 $\lim_{h \to 0}((\sqrt{x+h})^2 - \sqrt{x})/h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) = 1/2\sqrt{x}$

Observación

1. este último límite tiene como nombre, derivada. Que es un concepto que vamos a definir a continuación.

2.5. La derivada

la derivada en si misma tiene al menos dos aplicaciones como son:

1. el hallazgo de la recta tangente en un punto dado.

2. la capacidad de hallar el incremento de la variable dependiente en un momento exacto.

estas dos aplicaciones son las más conocidas y son una forma de aproximación a la derivada, en estas notas no se hace hincapié en estas dos aplicaciones, ya que el objetivo de las mismas es solo alcanzar capacidad para manejar la derivada como límite. en este capítulo primero se introduce el concepto de tabulación de funciones, con el objetivo de facilitar el hallazgo del cociente de variación que interviene en la derivada y que en muchos casos representa un obstáculo para el estudiante que esta acostumbrado a tabular valores precisos y no valores que involucran variables.

Definición 2.10 *Dada una función f(x) con dominio y recorrido $\mathbb{R}$, evaluar la función significa tomar elementos del dominio y reemplazarlos por la variable de la función.*

Ejemplo:
Evalue las fucnión dada en los puntos 4, 3, a, x+h.

1. $f(x) = x + 1$

Solución

1. $f(x) = x + 1$ $f(4) = (4) + 1 = 5$
   $f(3) = (3) + 1 = 4$
   $f(a) = (a) + 1$
   $f(x + h) = (x + h) + 1 = x + h + 1$

Definición 2.11 Derivabilidad

Se dice que una función $f(x)$ es derivable si

$$\lim_{h\to 0}[f(x + h) - f(x)]/h$$

existe

observación

1. si dicho límite existe, este límite es la derivada de la función$f(x)$ y se nota: f'(x) , $\dot{f(x)}$ o $df(x)/dx$

Ejemplos
Hallemos la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \ sen(x)$$

Solución
Sabiendo que $sen(a + b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$ se tiene que:
$\lim_{h\to 0}[sen(x + h) - sen(x))]/h$
$= \lim_{h\to 0}[sen(x)cos(h) + sen(h)cos(x) - sen(x)]/h$
$= \lim_{h\to 0} -(sen(x)(1 - cos(x))/h) + \lim_{h\to 0} sen(h)cos(x)/h$
$= cos(x)$
Esto debido a los límites notables mencionados anteriormente, con lo que tenemos que:

$$sen'(x) = cos(x)$$

Observación
De este ejemplo se deduce que para hallar la derivada se deben realizar los siguientes pasos:

1. hallar $f(x+h)$

2. hallar $f(x+h) - f(x)$

3. hallar $(f(x+h) - f(x))/h$

4. Hallar $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h$

Ejemplo
Halle la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$
Siguiendo los pasos tenemos

1. $f(x+h) = \sqrt{x+h}$

2. $f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$

3. $(f(x+h) - f(x))/h = (\sqrt{x+h} - \sqrt{x})/h$

4 $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h = \lim_{h\to 0}(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})/h$
Este límite vimos en secciones anteriores que tenia como resultado$1/2\sqrt{x}$, con lo que tenemos:

$$(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$$

3. Secuencias en el aula

En el colegio Cesco se realiza en la semana una sesión de dos horas dedicadas al cálculo, las horas tiene una duración de cincuenta minutos, en el trayecto de este trabajo se realizaron un total de catorce sesiones, con lo cual se obtuvo un total de veintiocho horas dentro del aula. En el total de las sesiones se dictaron los siguientes conceptos:

1. Límites de funciones polinómicas

2. Límites de una función.

3. Límites de funciones trigonométricas.

4. Límites que involucran indeterminaciones.

5. La derivada.

Las sesiones tenían una distribución de la siguiente manera:

1. Revisión de talleres dejados para la casa.

2. Repaso de conceptos y solución de algunos puntos del taller.

3. Introducción de un concepto nuevo con sus respectivos ejemplos.

4. Taller en clase de dicho concepto.

5. Propuesta de taller para la casa.

En la mayoría de los casos las sesiones tenían este orden, a excepción de cuando había una previa la clase anterior, entonces cambiaban los dos primeros puntos del grupo citado antes por:

1. Entrega de previas.

2. Repaso de conceptos y solución de la previa.

En este trabajo se le llamará bloque didáctico a una unidad que busca determinado objetivo u objetivos, un bloque didáctico puede abarcar más de una sesión.
En total fueron tres previas y una prueba diagnóstica que se realizó en la segunda sesión y que consistía en:
Primero. Poner a los estudiante frente a cuatro gráficas de funciones que correspondían a funciones ya conocidas por ellos como la lineal, la cuadrática y la cúbica, además se le agrego una gráfica de una función logarítmica con el fin de que ellos entendieran de que existen más

funciones a parte de las conocidas por ellos, el objetivo es que ellos decidieran si las gráficas eran de funciones lineales, cuadráticas, cúbicas o ninguna de las anteriores.

Segundo. Colocar a los estudiantes frente a expresiones algebraicas que correspondían a funciones cuadráticas, lineales, cúbicas y otras de orden trigonométrico pero con argumento lineal, de nuevo el objetivo de este ítem era que decidieran si dichas expresiones correspondían a una recta, una parábola, una función cúbica o ninguna de las anteriores.
En cuanto a las demás previas siempre fueron por lo regular de cinco puntos que consistían en preguntas similares a las resueltas en clase, pero cambiándoles algunos valores. Para terminar los talleres siempre fueron en vías de fortalecer la algoritmización de los ejemplos vistos en clases, las previas y talleres se pueden visualizar en la parte de anexos. En lo que queda de este capítulo se describe con detalle cómo fue cada una de las sesiones.

Bloque didáctico 1.
Duración: una sesión

En esta sesión debía llevarse a cabo la prueba diagnóstica que diera cuenta los saberes previos de los alumnos, prerrequisito para este punto del grado que cursaban, dicha prueba no se llevó a cabo porque la misma aún estaba culminada, a cambio de esto se realizó un actividad que diera cuenta de los saberes previos de los alumnos en saberes particulares, a saber: función lineal, cuadrática y cúbica y esto es en síntesis lo que se obtuvo:
Para la función lineal.
Es una función de la forma $y = mx + b$ donde m es la pendiente y b representa el corte con el eje x, además esta función es una "línea" en el plano.
Para la función cuadrática.
Es una función de grado dos, cuya gráfica es una parábola Para la función cúbica.
Es una función de grado tres, pero en esta aseguraron no tener mucho tiempo de trabajo.
Una vez recogida esta información se les pidió graficar una función lineal, cuadrática y cúbica, para analizar la conceptualización gráfica de las expresiones algebraicas, acto seguido se desarrolló en el tablero para la discusión de los puntos no claros, en esta parte se obtuvo que una fracción del curso realizaba lo siguiente:
Cuando la potencia era dos (o cualquier otro número) ellos no realizaban el producto del número por sí mismo, sino que multiplicaban el número de la base por el del exponente.

Cuando se terminó la actividad de sondeo de los conocimientos antes expuestos (reconocimiento de la expresiones algebraicas, sus propiedades y su graficación), se les pidió a los estudiantes tabular y graficar una función lineal alrededor de un punto fijo escogido por el practicante, esto con el fin de introducir la noción de "cercanía" que nos llevaría a la noción de límite objeto único de esta sesión, una vez terminado el ejercicio se introdujo la noción de límite y su notación habitual.

Bloque didáctico 2.
Duración: dos sesiones

Objetivo principal:
Explicitar las propiedades de los límites de polinomios.

Objetivos secundarios:

1. Realizar la prueba diagóstica.

2. Realizar ejercicios ”representativos” que acerquen al estudiante a propiedades de los límites.

3. Realizar un taller grupal donde se apliquen dichas propiedades.

En esta sesión se puso en ejecución la prueba diagnóstica, de la cual se obtuvo:
Los estudiantes identificaban la mayoría de las gráficas con sus respectivas clasificaciones, el único yerro, no general valga decirlo, fue con la función logarítmica, la cual clasificaban como lineal. Otro error encontrado en esta prueba fue el que muchos tuvieron con la función dela forma $\imath y = x \jmath$ la cual no clasificaron como lineal.
Con estos datos se procedió a recordarles que una función lineal es un polinomio de grado uno y además se les hablo de la función logarítmica que es en la cual fallaron.
Acto seguido se hizo un recuento de la definición del límite y se introdujeron sus propiedades con funciones polinómicas, dichas propiedades se pueden ver en el orden que se dictaron en el objeto matemático, además se expusieron ejemplos donde se ilustraba el uso de cada propiedad y al final se introdujó un par de ejemplos que usaba la mayoría de propiedades.
Después de esto se propuso un taller en clase donde se debían de aplicar dichas propiedades, lo que se obtuvo en la gran mayoría de casos es que los estudiantes luego de enfrentarse a una situación en solitario y luego solicitar sugerencias para la solución para el mismo, seguían teniendo problemas a la hora de identificar que propiedad era la que se debía de usar, por lo que se usó la sesión tres para reforzar dichos conceptos.

Bloque didáctico 3.
Duración: dos sesión

Objetivo general.

Introducir los límites trigonométricos notables.

Objetivo específico.

1. Revisar el taller de la clase anterior y responder a comentarios hechos por los estudiantes.
2. Introducir la noción de límite trigonométrico aprovechando la continuidad de dichas funciones.
3. Recordar identidades trigonométricas.
4. Recordar las definiciones de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

En esta sesión se agregaron dos propiedades más a las de las polinomios que fueron las propiedades de los límites del seno y el coseno introduciendo el límite al argumento aprovechando la continuidad de estas funciones, se propuso algunos ejemplos y les recordaron las gráficas de dichas funciones y sus propiedades. Acto seguido se planteó un par de ejercicios similares donde el argumento de las funciones trigonométricas eran polinomios, en síntesis lo que se obtuvo en general fue que los estudiantes evaluaban el polinomio en el punto límite sin ningún inconveniente.
Acabada esta fase se introdujeron los dos límites notables trigonométricos y las definiciones de las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante, algunos ejemplos donde los límites eran resueltos por medio de límites notables y un taller para la casa donde se hacían preguntas similares a las expuestas en el tablero, con una pregunta adicional sobre el límite de la tangente cuando se acerca $\pi/2$.

Bloque didáctico 4.
Duración: tres sesiones

Objetivo general.

Introducción de las indeterminaciones infinitos sobre infinito y cero sobre cero.

Objetivos específicos.

1. Recordar los productos notables de álgebra.
2. Realizar ejercicios con productos notables.
3. Introducir el concepto de conjugado de una expresión algebráica.
4. Realizar ejercicios que involucren indeterminaciones matemáticas de las formas antes expuestas.
5. Recoger el taller de límites trigonométricos notables.

En esta sesión se procedió a recordar lo visto en la clase anterior y a revisión del taller sobre límites trigonométricos notables en síntesis las preguntas que eran similares a las expuestas en el tablero fueron resueltas sin inconvenientes, exceptuando una situación que requería de la multiplicación y división por una misma expresión, estrategia recurrente a la hora de resolver límites trigonométricos notables, con lo que fue necesario la exposición de varios ejemplos haciendo hincapié en que el número uno es a la vez una fracción con numerador y denominador iguales, así al dividir y multiplicar por una misma expresión esta no altera a la misma ya que es multiplicar por uno, una vez hecho esto se propuso un taller para afianzar dicha estrategia.
Culminada este taller se le propuso un límite que involucraba una indeterminación de la forma cero sobre cero y se les pidió investigar sobre la misma, se recordaron productos notables y se hizó un pequeño taller para recordar la forma de uso de los mismo, en general esta parte operativa solo tenía problemas a la hora de identificar las variables y como acomodarlas para obtener un producto notable.

En la sesión seis se habló sobre el taller de límites notables de nuevo se recordaron los productos notables y se habló de la indeterminación cero sobre cero y su imposibilidad en las matemáticas, como en la clase anterior se les había propuesto un límite de la forma cero sobre cero se resolvió en el tablero, ya que este era solucionable por productos notables, se introdujó otra indeterminación de la forma infinito sobre infinito, se resolvieron ejercicios en el tablero de estas dos indeterminaciones con productos notables y en seguida se propuso un taller para afianzar dichos conocimientos, lo que se obtuvo de esto fue de nuevo la imposibilidad de reconocer productos notables como una diferencia de cuadrados y algunos productos de grado tres.
Por último se les propuso un taller de dos ejercicios para la casa de indeterminaciones, pero que involucraban una técnica desconocida para ellos que era la de multiplicar y dividir por el

conjugado, esto con el objetivo de que investigaran sobre la misma.

En la sesión siete lo que se hizó fue resolver los ejercicios de la clase pasada y que tenían como estrategia el conjugado, se introdujo el concepto de conjugado y de forma posterior se resolvieron más ejercicios de indeterminaciones que se resolvían con dicha estrategia para de forma posterior proponer un taller y resolver dudas, en este taller en síntesis se obtuvieron almenos dos cosas, la primera: aún habían problemas para reconocer que uno era igual a una fracción con igual numerador y denominador y que multiplicar y dividir por una misma fracción no altera un límite y dos: se les dificultaba reconocer que cuando se multiplica y divide por el conjugado de una expresión algebraica, ya sea en el numerador o el denominador se obtiene una diferencia de cuadrados.

Bloque didáctico 5.
Duración: cuatro sesiones

Objetivo general. Evaluar los conceptos de límite, sus propiedades y límites trigonométricos e indeterminaciones.

Objetivos específicos.

1. Realizar un resumen de las propiedades de los límites polinómicos y un respectivo taller de lo mismo.
2. Evaluar la aplicación de las propiedades de los límites de polinomios.
3. Realizar un resumen de los límites trigonométricos.
4. Realizar un taller y una previa de los límites trigonométricos.
5. Realizar un resumen de las indeterminaciones y la forma de resolverlas.
6. Evaluar los conceptos de indeterminaciones.

En la sesión ocho se realizó un taller sobre las propiedades de los límites aplicados a los polinomios, al ir resolviéndolo se hallaron inconvenientes a la hora de utilizar varías propiedades a la vez, como por ejemplo un cociente dentro de un radical que implica dos propiedades a la vez. Al final de la esta sesión se realizó una previa de cinco puntos, en síntesis se halló dificultad para utilizar varias propiedades de los límites a la vez, cosa que no hallo con productos y divisiones de polinomios.
En la sesión nueve se resolvió la previa de la clase pasada y se procedió a recordar lo concerniente a límites trigonométricos notables, las técnicas más utilizadas para resolver dichos límites, se propuso un taller de cinco puntos, donde se halló el reconocimiento por parte de un grupo de alumnos de la técnica de división y multiplicación por un término, pero con fallas del objeto a multiplicar y dividir ya que en ocasiones se dividía y multiplicaba por un número

o expresión algebraica incorrecta, al final de clases se realizó una previa del mismo tema hallando la misma falencia.

En la sesión diez se resolvió el examen de la clase anterior y se hizo un recuento de productos notables y las indeterminaciones que se resolvían con esta estrategia, de forma posterior se propuso un taller de productos notables e indeterminaciones con productos notables, lo que se halló en este taller fue la incapacidad en grupo de estudiantes de reconocer la diferencia de cuadrados y relacionarla con un binomio cuadrado, además cierta dificultad para reconocer productos notables de grado tres.
En la sesión once se realizó un recorderis de las indeterminaciones que se resolvían con el conjugado y se procedió a realizar un taller de cinco preguntas concerniente a esta técnica, lo que se halló en el mismo y la prueba posterior al taller, fue que un grupo de estudiantes, aunque vislumbraba que debía usarse la técnica de multiplicación y división de un conjugado, tenía a veces problema con el paso siguiente que era la resolución de la diferencia de cuadrados que esta genera.

Bloque didáctico 6.
Duración: tres sesiones

Objetivo principal.
Introducir la definición de derivada y algunas derivadas “notables”.

Objetivos específicos.

1. Hablar de que significa evaluar la función en determinada expresión.

2. Comunicar el cociente de diferencias que marca a la derivada.

3. Realizar ejemplos de aplicación del límite de la derivada, para llegar a ciertas derivadas que después serán de tabla.

La sesión doce se resolvió el examen de la clase anterior y luego se dedicó exclusivamente a la tabulación de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas además de las trigonométricas y otras ya conocidas por los estudiantes como el logaritmo y las raíces, se realizaron ejemplos y forma posterior se propuso un taller, el cual se halló facilidad para tabular en números más en muchas ocasiones se tenía problemas cuando el objeto a reemplazar era una variable, se recordó que cuando se tabula esto puede dar un número o simplemente una expresión que dependa de las variables reemplazadas.

En la sesión trece se realizó un recorderis de tabulación y se introdujo el coeficiente de variación que interviene en la derivada, así como un el concepto de derivada algunos ejemplos que contenían productos notables y conjugados para el cálculo de la derivada y posteriormente se un algoritmo para hallar la derivada y que consistía en los siguientes puntos:

1. Halle f(x+h)
2. Halle f(x+h)-f(x)
3. Halle [f(x+h)-f(x)]/h
4. Halle el límite del cociente anterior.
5. Concluya quien es la derivada de f(x).

En la sesión catorce se recordó el concepto de derivada y el algoritmo antes mencionado, se realizaron otro par de ejemplos y se propuso un taller con otras derivadas que conformarían una tabla, en este taller de nuevo el problema fue la tabulación de la función en el punto x=x+h en funciones como la cúbica y las trigonométricas en las cuales se usa la fórmula para la suma de ángulos, esta fue la última sesión que se dictó en el colegio Cesco.

4. Resultados

Estando en la práctica pedagógica cuatro, se realizó además de la intervención en el aula el análisis y recolección de datos alrededor de la misma, en esta sección que puede dividirse en dos subtemas se expone, de manera detallada las notas obtenidas por los estudiantes con los cuales se trabajó en el aula, haciendo distinción entre hombres y mujeres, distinción que no altera el resultado de esta práctica y que solo se hace debido a la imposibilidad de llamar a los alumnos por su nombre, claro que en gráficas posteriores veremos el desempeño de las mujeres versus al de los hombres, esta sección es meramente informativa y contiene solamente datos numéricos correspondientes a las notas alcanzadas por los alumnos, debe decirse que muchas notas fueron asignadas no solo haciendo caso a los procedimientos matemáticos de los sujetos, sino también al esfuerzo mostrado por los mismos en el aula de clase, en el colegio CESCO, además de las notas asignadas por el profesor se les permite a los estudiantes autoevaluarse, esto con el fin de crear seres humanos conscientes de sus actos y con criterios éticos y morales para valorar su trabajo, esto en principio es la idealización del colegio, el problema es que la mayoría aun siendo conscientes de su desempeño, utilizaban esta nota para subir el promedio de sus calificaciones. En la segunda parte de este capítulo se puede encontrar una clasificación de las estrategias tomadas por los estudiantes para resolver las situaciones planteadas en el aula de clase, esto como un agregado al trabajo, ya que la intención de este trabajo en principio fue dar cuenta de le hecho en el aula y la forma como se llevaron a cabo las clases dentro de la misma, no considero esto como algo investigativo, es solamente una clasificación que podría ser otra para el método de resolución de problemas, es más, la verdadera investigación sería entender el porqué de dichas soluciones.

4.1. Resultados en el aula

4.2. Descripción de tablas y gráficas a encontrar

En el colegio CESCO se aprueba con una nota superior a 3.5 y la nota mayor en el mismo corresponde al guarismo 5.0, mi estadía en el colegio fue de aproximadamente tres meses en el cual se me asigno por completo el grado once y el grado décimo, con lo cual estuve obligado a responder por los dos periodos restantes tanto con notas como por los temas establecidos por la institución.
En dicho colegio se discriminan tres áreas para dar una nota final, la primera saber, saber hacer y ser, la primera se recogen todos los registros de tareas en clase y en casa, así como los talleres tanto dentro y fuera de la institución, dicha discriminación corresponde al 45 % de la nota total, un 35 % corresponde al saber hacer donde se recogen notas sobre evaluaciones como quizes y evaluaciones finales, las cuales fueron tres, como se expuso en la sección anterior, por último para completar el 100 % de la evaluación, se tiene en cuenta el ITEM ser que al cual le corresponde un 20 % de la nota total, en este ITEM se considera la autoevaluación hecha por los estudiantes además de una nota apreciativa del docente correspondiente a la participación de los estudiantes tanto en el aula como en la presentación de sus labores escolares.

En total fueron veinticuatro estudiantes los intervenidos en el aula de clase, dieciséis varones y nueve mujeres, en las tablas que vamos a ver enseguida, se ha hecho una lista dando la asignación H, para el estudiante hombre y M para el estudiante mujer. en los anexos podemos encontrar tablas con las notas que obtuvieron los estudiantes durante los dos periodos, y tablas donde se discrimina los items de la evaluación, saber ser, saber hacer y las discriminaciones antes mencionadas, en esta sección solo veremos los resultados, pero en promedios tanto de hombres como mujeres.

A continuación veremos la tabala de resultados en promedio de los esudiantes en el segundo y tercer periodo, así como su respectiva gráfica.

Estudiante	Segundo periodo	Tercer periodo
Hombre	3,6	3,9
Mujer	4,0	4,4

Tabla 1. Resultados obtenidos por los estudiantes en el segundo y tercer periodo

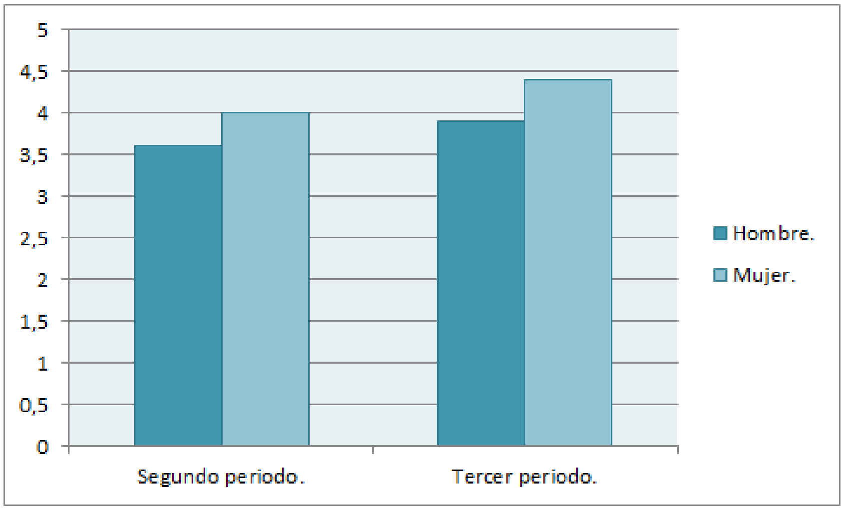


Figura 1: resultados de los estudiantes en el segundo y tercer periodo

También se ha decidido exponer los resultados sobre las evaluaciones del segundo y tercer periodo o lo que en la institución se denomina saber hacer, mediante una tabla y su respectiva gráfica.

Tabla2. resultados obtenidos por los estudiantes en el ITEM saber hacer.

Estudiante	S.H segundo periodo	S.H tercer periodo
Hombre	3,7	3,2
Mujer	3,7	4,1

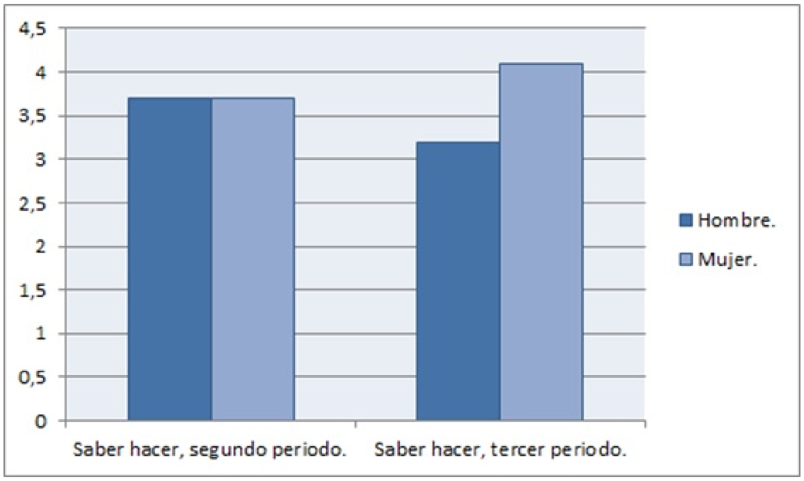


Figura 2: Resultados de os estudiantes en el ITEM saber hacer

Aquí damos por terminado esta primera subsección de la sección principal, denominada resultados, enseguida encontraremos una "clasificación" de estrategias hechas por los estudiantes para resolver algunas situaciones establecidas en las previas de límites trigonométricos notables e indeterminaciones.
Clasificaciones de estrategias de los estudiantes en previas referentes al curso.

4.3. Categorización de estrategias

Esta sección tiene por objetivo clasificar de alguna manera los intentos de los estudiantes por resolver las situaciones que se le presentaron en el aula con el fin de que él ejecutara unos determinados conocimientos como el recurso más económico para alcanzar un buen término, en principio las estrategias son solo la aplicación de los conocimientos que se desean que el estudiante aplique como forma más económica de resolución del problema, de forma posterior se clasifica aquellos métodos que pudieron ser los óptimos pero por diversas causas se malograron en el proceso de diálogo del estudiante con el medio, como estrategias se incluyeron: confunde diversas estrategias y las aplica al tiempo o intenta aplicarlas al tiempo y no resuelve el problema propuesto, además se incluye una tabla donde se insertan de manera compacta las estrategias y las frecuencias absolutas de cada estrategia, así como un gráfico para visualizar de manera más detallada dichas estrategias, debe decirse que aunque en las dos primeras estrategias se acumulan los estudiantes que catalogaríamos como aquellos que aprendieron, lo único que podemos deducir de sus respuestas es que adquirieron un conocimiento que les permitió llevar a buen término el ejercicio planteado.
Estas clasificaciones que de nuevo reitero son un plus del trabajo, se realizaron sobre las previas de indeterminaciones que se suscitan en los límites y resolución de límites trigonométricos notables, enseguida encontramos dichas clasificaciones enumeradas y una especificación de cada una, así como en algunas imágenes que ilustran la clasificación mencionada.

Estrategias.

C1. Reconoce la indeterminación y los procesos para resolverla.

C2. Reconoce los límites trigonométricos y la estrategia de resolución.

C3. Reconoce la indeterminación y los procesos para resolverla, pero comete errores en el proceso.

C4. Reconoce los límites trigonométricos y la estrategia de resolución, pero comete errores en el proceso.

C5. Reconoce que existe un problema e intenta resolverlo combinado diversas técnicas. (Procedimientos incomprensibles)

C6. Identifica la indeterminación pero no realiza procesos para resolverla.

C7. No resuelve el problema.

Descripción de cada estrategia e imágenes de ilustración.

Estrategia C1. En esta estrategia se agrupan aquellos alumnos que alcanzaron el objetivo de resolver el problema planteado mediante el medio, sin errores de procedimiento en sus respuestas, como se dijo anteriormente, de aquí no se puede inferir un saber institucionalizado, lo único que se puede inferir es un conocimiento por parte del alumno.

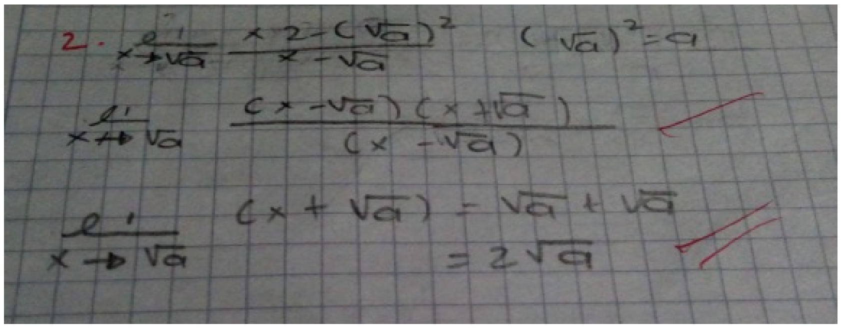


Figura 3:

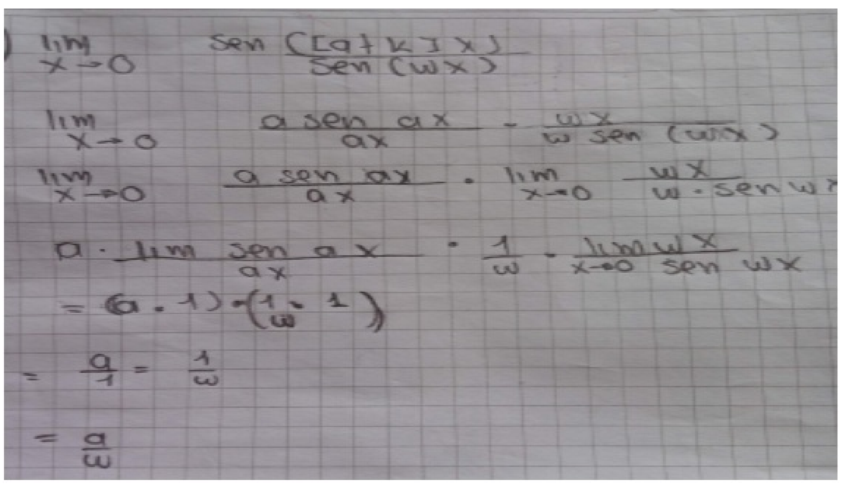


Figura 4:

Estrategia C2. Bajo esta estrategia se cobijan aquellos estudiantes que frente al problema bosquejan la solución al mismo de manera farragosa, esto es, reconocen a que problema se enfrentan, reconocen la estrategia para su solución, pero no llevan a cabo todo el procedimiento sin cometer errores en sus soluciones pensadas.

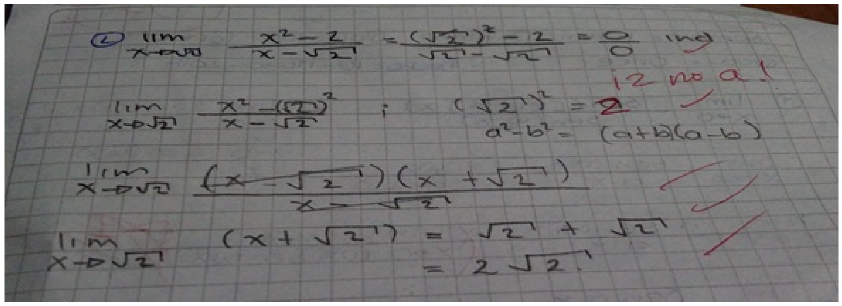


Figura 5:

Estrategia C3. Bajo esta estrategia se agrupan todos aquellos estudiantes, que aunque reconocen que existen algunas estrategias para la resolución de límites, no saben identificar aun cuando es necesario la aplicación una u otra estrategia.

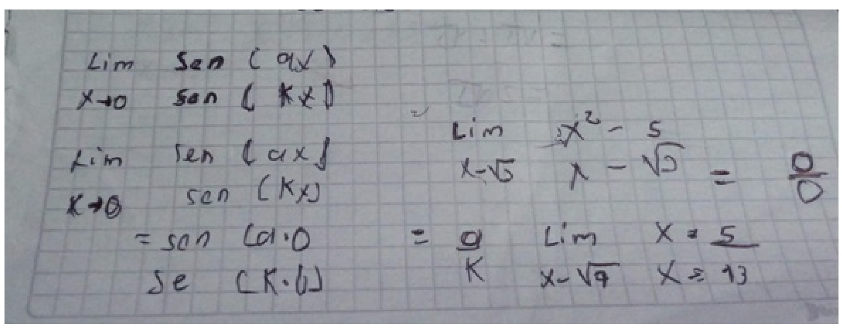


Figura 6:

Estrategia C4. En esta estrategia se agrupan aquellos estudiantes que llegan a la resolución del problema pero no dejan especificado el método por el cual llegaron a dicha respuesta.

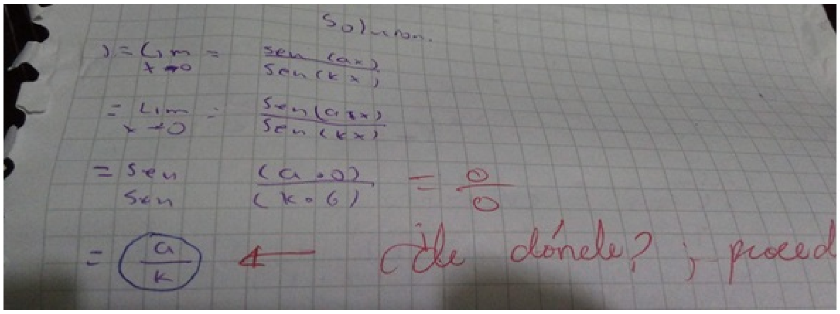


Figura 7:

Estrategia C5. El estudiante calcula la indeterminación pero no aplica métodos para resolver dicha indeterminación.

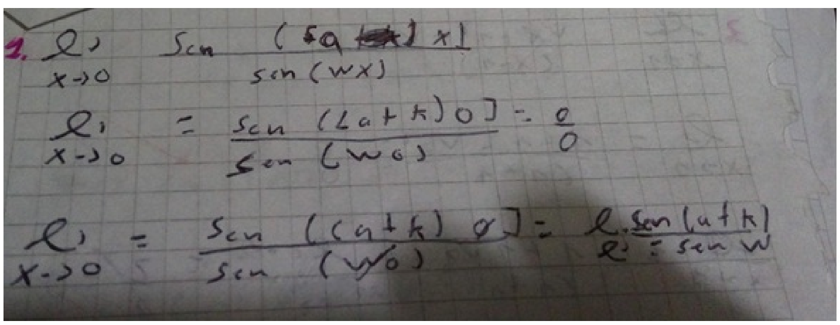


Figura 8:

Estrategia C6. Bajo esta estrategia quedan abrigados todos aquellos estudiantes, que por razones que no se pueden inferir de la práctica no resuelven el ejercicio, dejándolo totalmente sin ningún procedimiento.

Enseguida vemos la tabla que resume, el número de estudiantes que se clasificación en una u otra estrategia para la resolución de problema planteado, además la gráfica de la misma.

Estrategia utilizada	Límite trigonométrico	indeterminación
C.1	10	8
C.2	10	7
C.3	1	0
C.4	1	0
C.5	3	2
C.6	0	0

Observaciones sobre la tabla.

1. Como se puede ver en la tabla, en la previa que involucraba indeterminaciones, que tenían que ver con productos notables y conjugado solo asistieron diecisiete estudiantes, que son los reseñados en la tabla.

2. En la previa correspondiente a límites trigonométricos notables, asistieron todos los estudiantes del curso que se estaba dictando.

3. Todos los estudiantes ya sea de una manera correcta o incorrecta dejaron explicitado, una posible solución del medio planteado por el practicante.

Gráfica de la tabla que resume las estrategias tomadas por los estudiantes frente a los problemas planteados.

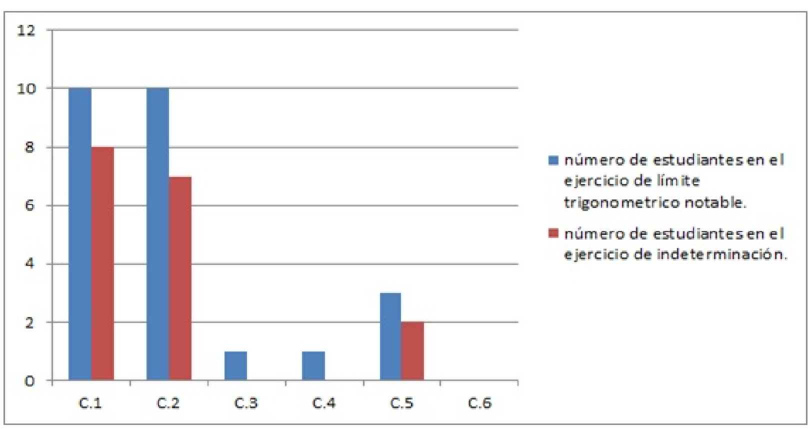


Figura 9: Estrategías de los estudiantes

5. Conclusiones

1. Aportar a los estudiantes un apropiamiento netamente procedimental (algebraico) aproxima al estudiante a poder manipular los límites de manera algebraica sin llegar con esto a asegurar comprensión de la relación de estos con la realidad y las implicaciones que traen consigo unas cantidades que varían sobre la función a la cual se le está estudiando el límite, pero la aproximacón algebraica si es un paso para la comprensión de un concepto matemático.

2. Favorecer la representación algebraica sobre otras representaciones, puede generar conflictos si se desea evaluar otros aspectos que no sean netamente algebraicos y de forma recíproca el favorecer otras representaciones sobre la algebraica podría conducir a falencias en el tratamiento algebraico.

3. El establecimiento de una clasificación de estrategias de los estudiantes debe ser acompañada de una herramienta que permita clasificar obstáculos didácticos, los cuales nos permitirán una mejora dentro del aula, además de realizar una posible investigación sobre algunos obstáculos que sean relevantes para el educador matemático.

4. Existen conceptos los cuales son usados por de manera indiscriminada como lo son el concepto de función polinómica y polinomio, los cuales si no son aclarados de manera pertinente por el educador pueden generar conflicto en el estudiante.

5. En general las practicas pedagógicas deben centrarse en varias representaciones de un mismo objeto sin privilegiar una de la otra, ya que privilegiando puede llegar a generar obstáculos didácticos en los estudiantes en cambio dando una gama variada de representaciones puede llegar a dar más herramientas para que el estudiante pase de un conocimiento a un saber.

Anexos

1. Tablas complementarias

En esta sección se encuntran documentados algunos talleres realizados en clase con los estudiantes, así como las previas y además las notas que estos obtuvierón durante los dos periodos de la mi permanencia en el colegio CESCO, con estas tablas iniciamos esta sección.

Observación En la siguiente tabla podemos observar los resultados del segundo periodo, en ella se pueden encontrar resultados de talleres (límites polinómicos y límites trigonométricos notables) y la evaluación de la aplicación de los límites polinómicos. Como observación adicional hay que decir que la última estudiante obtuvo un promedio de 3,2 aun cuando no asistió a clases, debido a calamidades domésticas y se pudo establecer con ella que eso era lo más que se podía hacer, esperando mejor desempeño en el próximo periodo lectivo.

Tabla 3. Resultados segundo periodo.

Estudiante	Saber 45%			saber hacer 35%			Ser 20%			Definitiva
	Taller 1.	Taller 2.	Definitiva.	Evaluacion 1.	Evaluacion2.	definitiva	Par-Tici-Pac-Ión.	Autoevaluación	definitiva	
1. M	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	2,0	5,0	3,5	3,5
2. M	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	1.0	5,0	3,0	3,2
3. H	3,5	4,0	3,8	3,5	3,5	3,5	1.0	5,0	3,0	3,5
4. H	3,6	4,0	3,8	3,5	3,5	3,5	1.0	5,0	3,0	3,5
5. H	4,3	3,5	3,8	3,5	3,5	3,5	1.0	5,0	3,0	3,5
6. M	4,7	4,7	4,7	5.0	5.0	5.0	5,0	5,0	5,0	4,8
7. H	3,6	3,5	3,6	3,5	3,5	3,5	1,8	5,0	3,4	3,5
8. H	4,0	3,5	4,0	3,5	3,5	3,5	1,0	5,0	3,0	3,6
9. H	3,8	3,8	3,8	3,5	3,5	3,5	3,0	5,0	4,0	3,7
10.H	2,5	3,5	3,1	3,5	3,5	3,5	1,0	5,0	3,0	3,2
11.H	4,5	4,5	4,5	5,0	5,0	5,0	3,0	5,0	4,0	4,7
12.H	3,5	4,0	3,8	3,5	3,5	3,5	1,0	5,0	3,5	3,5
13.H	4,3	3,5	4,3	3,5	3,5	3,5	1,0	5,0	3,0	3,7
14.M	4,1	3,5	4,7	3,5	3,5	3,5	3,0	5,0	4,0	4,0
15.M	3,0	3,5	3,7	3,5	3,5	3,5	2,0	5,0	3,5	3,5
16.M	4,0	3,5	3,7	3,5	3,5	3,5	2,0	5,0	3,5	3,5
17.H	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	2,0	5,0	3,5	3,5
18.M	5,0	5,0	5.0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0
19.H	3,9	4,2	4,2	5,0	5,0	5,0	4,0	5,0	4,5	4,6
20.H	2,5	3,5	3,1	3,5	3,5	3,5	1,0	5,0	3,0	3,2
21.H	4,7	3,5	4,2	3,5	3,5	3,5	1,0	5,0	3,0	3,5
22.M	4,7	4,7	4,7	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	4,9
23.H	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	1,0	5,0	3,0	3,5
24.M	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	1,2	5,0	3,2	3,2

Observación En esta tabla se pueden observar los resultados del tercer periodo académico, de los talleres correspondientes a indeterminaciones y cálculo de la derivada por definición, también se encontrarán las evaluaciones correspondientes a límites trigonométricos notables e indeterminaciones de manera respectiva.

Tabla 4. Resultados en talleres.

Estudiante	Saber 45%			saber hacer 35%			Ser 20%			Definitiva
	Taller 1.	Taller 2.	Definitiva.	Evaluacion1.	Evaluacion2.	definitiva	Par-Tici-Pac-Ión.	Autoevaluación	definitiva	
1. M	5,0	5,0	5,0	2,7	2,7	2,7	2,0	5,0	3,5	3,8
2. M	4,2	4,2	4,2	3,5	3,5	3,5	3,0	5,0	4,0	3,8
3. H	3,9	3,9	3,9	3,5	3,5	3,5	2,0	5,0	3,5	4,0
4. H	3,5	3,5	3,5	3,0	3,0	3,0	1,0	5,0	3,0	3,5
5. H	3,8	3,8	3,8	3,0	3,0	3,0	2,0	5,0	3,5	3,8
6. M	5,0	5,0	5,0	4,8	4,8	4,8	5,0	5,0	5,0	4,8
7. H	5,0	5,0	5,0	4,5	4,5	4,5	3,0	5,0	4,0	4,6
8. H	4,8	4,8	4,8	3,5	3,5	3,5	3,0	5,0	4,0	4,0
9. H	4,5	4,5	4,5	3,5	3,5	3,5	3,0	5,0	4,0	4,0
10.H	4,2	4,2	4,2	4,2	4,2	4,2	3,0	5,0	4,0	4,2
11.H	4,5	4,5	4,5	2,0	2,0	2,0	3,0	5,0	4,0	3,5
12.H	4,4	4,4	4,4	2,0	2,0	2,0	1,0	5,0	3,0	3,8
13.H	4,0	4,0	4,0	3,5	3,5	3,5	2,0	5,0	3,5	3,7
14.M	4,3	4,3	4,3	4,5	4,5	4,5	3,0	5,0	4,0	4,2
15.M	4,7	4,7	4,7	3,8	3,8	3,8	4,0	5,0	3,5	4,3
16.M	4,2	4,2	4,2	3,5	3,5	3,5	3,0	5,0	4,0	4,2
17.M	4,4	4,4	4,4	2,3	2,3	2,3	3,0	5,0	4,0	4,0
18.M	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0
19.H	4,7	4,7	4,7	4,0	4,0	4,0	4,0	5,0	4,5	4,3
20.H	4,3	4,3	4,3	3,5	3,5	3,5	2,0	5,0	3,5	4,0
21.H	4,3	4,3	4,3	2,8	2,8	2,8	3,0	5,0	4,0	4,2
22.M	4,7	4,7	4,7	4,8	4,8	4,8	4,0	5,0	4,5	4,8
23.M	3,8	3,8	3,8	2,7	2,7	2,7	2,0	5,0	3,5	3,7
24.M	4,3	4,3	4,3	3,0	3,0	3,0	2,0	5,0	3,5	4,0

A continuación encontraremos una tabla del desempeño de los estudiantes en el segundo periodo versus el tercer periodo. una gráfica del promedio de estos resultados se puede ver en la figura 1 de la sección 5.2.

Tabla 5. Resultados segundo periodo vs tercer periodo.

Estudiante	Definitiva Segundo periodo	Definitiva Tercer periodo.
1. M	3,5	3,8
2. M	3,2	3,8
3. H	3,5	4,0
4. H	3,5	3,5
5. H	3,5	3,8
6. M	4,8	4,8
7. H	3,5	4,6
8. H	3,6	4,0
9. H	3,7	4,0
10.H	3,2	4,2
11.H	4,7	3,5
12.H	3,5	3,8
13.H	3,7	3,7
14.M	4,0	4,2
15.M	3,5	4,3
16.M	3,5	4,2
17.H	3,5	4,0
18.M	5,0	5,0
19.H	4,6	4,3
20.H	3,2	4,0
21.H	3,5	4,2
22.M	4,9	4,8
23.H	3,5	3,7
24.M	3,2	4,0

También se ha decidido exponer los resultados sobre las evaluaciones del segundo y tercer periodo o lo que en la institución se denomina saber hacer, mediante una tabla.Una gráfica del promedio de estos resultados se puede ver en la figura 2 de la sección 5.2.

Tabla 6. Saber hacer segundo periodo vs tercer periodo.

Estudiante	saber hacer 35%	saber hacer 35%
	Definitiva del segundo periodo.	Definitiva Tercer periodo.
1. M	3,5	2,7
2. M	3,5	3,5
3. H	3,5	3,5
4. H	3,5	3,0
5. H	3,5	3,0
6. M	5.0	4,8
7. H	3,5	4,5
8. H	3,5	3,5
9. H	3,5	3,5
10.H	3,5	4,2
11.H	5,0	2,0
12.H	3,5	2,0
13.H	3,5	3,5
14.M	3,5	4,5
15.M	3,5	3,8
16.M	3,5	3,5
17.H	3,5	2,3
18.M	5,0	5,0
19.H	5,0	4,0
20.H	3,5	3,5
21.H	3,5	2,8
22.M	5,0	4,8
23.H	3,5	2,7
24.M	3,2	3,0

2. Talleres

Taller de límites polinómicos en clase

1. $\lim_{x\to 2}(x^3 + x^2 + 1)$

2. $\lim_{x\to 0}(x^6 + x^2 + 1)$

3. $\lim_{x\to 1}[(x^3 + x^2 + 1) + (x^2 + 3)]$

4. $\lim_{x\to 100}(x^3 + x^2 + 1)^0$

5. $\lim_{x\to 3}[(x + 1) * (x^2 + 5)]$

6. $\lim_{x\to 0}[(x^3 + x^2 + 1) \div (x^{12} + x^3 + 5)]$

7. $\lim_{x\to 2} \sqrt{(x^3 + x^2 + 4) \div (2x)}$

8. $\lim_{x\to 4} \ln((x + 3) \div 7)$

9. $\lim_{x\to 1}[\ln(x^{10} + x^3) \div \ln(5x)]$

10. $\lim_{x\to 0} \cos(x^3 + x^2)$

11. $\lim_{x\to 0} \sin(x^3 + x^2)$

12. $\lim_{x\to \pi/4} \cos(2x)$

13. $\lim_{x\to 0} tan(x^3 + x^2)$

Taller de límites de polinómios para la casa

1. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\ln(x^3+x^2+1)}$

2. $\lim_{x\to 0} \sqrt{(x^2+x+1)/(x^5+1)}$

3. $\lim_{x\to 2} \ln(\sqrt{(x^3+x^2+4)/4x})$

4. $\lim_{x\to 0}(x^2+5)*(x^3+7)*(x^8+10)*(x)$

5. $\lim_{x\to 1} \sqrt{\sqrt{\ln((5x+1)/6x)}}$

Taller de límites trigonométricos para la casa

1. $\lim_{x\to 0} \sin(7x)/x$

2. $\lim_{x\to 0} \sin(3x)/\sin(4x)$

3. $\lim_{x\to 0} \tan(5x)/5x$

4. ¿Qué se puede decir del siguiente límite? $\lim_{x\to \pi/2}\ tan(x)$ ¿existe o no existe? justifique su respuesta.

Taller de límites trigonométricos en clase

1. $\lim_{x\to 0} \sin(ax)/x$

2. $\lim_{x\to 0} \sin(ax)/\sin(bx)$

3. $\lim_{x\to 0} \sin(5x)/x$

4. $\lim_{x\to 0} \sin(6x)/sin(5x)$

5. $\lim_{x\to 0} \tan(ax)/ax$

6. $\lim_{x\to 0} \tan(3x)/3x$

7. $\lim_{x\to 0}(1 - cos(x))/x$

8. $\lim_{x\to 0}(\sin(x)/x)^2$

9. $\lim_{x\to 0}(\sin(x)/x)^3$

10. $\lim_{x\to 0}(\sin(x)/x)^4$

11. $\lim_{x\to 0}(\sin(x)/x)^n$

12. $\lim_{x\to 0}(\sin(ax)/x)^n$

13. $\lim_{x\to 0}(\sin(ax)/\sin(bx))^2$

Talller de indeterminaciones para la casa

En los siguientes límites utilice los productos notables para resolver la indeterminación. En l último límite busque el concepto de conjugado de una expresión algebraica. Realice los mismos ejercicios pero cuando x tiende a ∞.

1. $\lim_{x\to 1}(x^2-1)/(x-1)$

2. $\lim_{x\to -2}(x^2+4x+4)/(x+2)$

3. $\lim_{x\to 1}(x^3-3x^2+3x+1)/(x-1)$

4. $\lim_{y\to 2}(y^3-8)/(y-2)$

1. $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})/(x-1)$

Taller de indeterminaciones para la el salón

En los siguientes límites utilice los productos notables y la técnica del conjugado para resolver la indeterminación. Realice además los puntos 1, 4 y 7 cuando x tiende a ∞.

1. $\lim_{x\to a}(x^2-2ax+a^2)/(x-a)$

2. $\lim_{x\to 3}(x^2-6x+9)/(x-3)$

3. $\lim_{x\to 4}(x^2-8x+16)/(x-4)$

4. $\lim_{x\to a}(x^2-a^2)/(x-a)$

5. $\lim_{x\to 3}(x^2-9)/(x-3)$

6. $\lim_{x\to 2}(x^2-4)/(x-2)$

7. $\lim_{x\to\sqrt{a}}(x^2-a)/(x-\sqrt{a})$

8. $\lim_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)/(x-\sqrt{3})$

9. $\lim_{x\to\sqrt{5}}(x^2-5)/(x-\sqrt{5})$

10. $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+(n-1)}-\sqrt{n})/(x-1) \quad n>0, \quad (x+(n-1))>0$

11. $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})/(x-1)$

12. $\lim_{x\to 0}(1-cos(x))/x$

13. $\lim_{h\to 0}(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})/h$

Taller 2. de indeterminaciones para la casa

En los siguientes límites utilice los productos notables y la técnica del conjugado para resolver la indeterminación. Realice además los puntos 1, 3 cuando x tiende a ∞.

1. $\lim_{x\to a}(x^3 - a^3)/(x - a)$

2. $\lim_{x\to 5}(x^3 - 5^3)/(x - 5)$

3. $\lim_{x\to a}(x^3 - 3x^2a + 3xa^2 + a^3)/(x - a)$

4. $\lim_{x\to 3}(x^3 - 9x^2 + 27x + 27)/(x - 3)$

5. $\lim_{h\to 0}(\sin(x + h) - \sin(x))/h$

Taller de evaluación de funciones

Evalue las siguientes funciones en los puntos: 3, 1, 0, 5, t, g, x+h.

1. $f(x) = x$

2. $f(x) = x^2$

3. $f(x) = x^3$

4. $f(x) = 5$

5. $f(x) = 10{,}000$

6. $f(x) = c,$ c una constante.

7. $f(x) = \sqrt{x}$

8. $f(x) = \sin(x)$

9. $f(x) = \cos(x)$

10. $f(x) = tan(x)$

Taller de derivadas para la casa

Siguiendo los pasos vistos en clase, halle las derivadas de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \cos(x)$

2. $f(x) = \tan(x)$

3. $f(x) = x$

4. $f(x) = x^2$

5. $f(x) = x^3$

6. $f(x) = 5$

7. $f(x) = x + 1$

Taller de derivadas para el aula

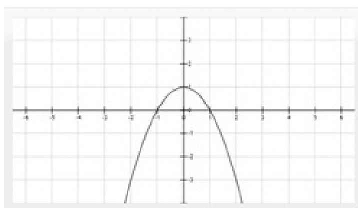
Siguiendo los pasos vistos en clase, halle las derivadas de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \sin(x)$
2. $f(x) = x + 1$
3. $f(x) = (x + 1)^2$
4. $f(x) = (x + a)$
5. $f(x) = (x + a)^2$
6. $f(x) = (x + a)^3$
7. $f(x) = c$ c una constante(un número)
8. $f(x) = 3$
9. $f(x) = 5$
10. $f(x) = 10{,}000$ (concluya de aquí cuanto vale la derivada de un número)
11. $f(x) = \sqrt{x}$

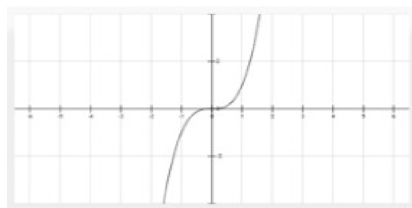
3.Previas realizadas.

Prueba diagnóstica

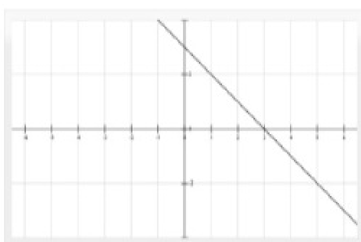
1. En las siguientes gráficas decida si estas corresponden a funciones lineales, cuadráticas o cúbicas.



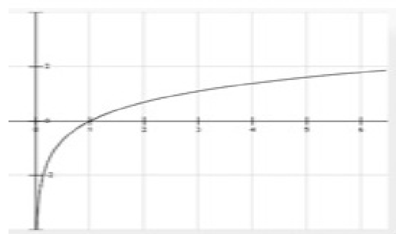
(A) ________________



(B)________________



(C)________________



(D)________________

2. Enfrente de cada expresión decida si esta corresponde a una función lineal, cuadrática o cúbica.

2a. $f(x) = x^2 + x + 2$

2b. $f(x) = x^3 + x + 3$

2c. $f(x) = x + 5$

2d. $f(x) = x$

2e. $f(x) = \sin(x + 1)$

Examen de límites de polinomios

Realice los siguientes límites especificando en cada punto las propiedades utilizadas.

1. $\lim_{x\to 0}(x^6 + x^2 + 1)$

2. $\lim_{x\to 0}(x^2 - 23) * (x^3 + 12) * (x^8 + 10) * (x)$

3. $\lim_{x\to 1} \sqrt{\sqrt{\ln((5x + 5)/10x)}}$

4. $\lim_{x\to 0}[(x^3 + x^2 + 1) \div (x^{12} + x^3 + 5)]$

5. $\lim_{x\to 0} \sin(x^3 + x^2)$

Examen de límites trigonométricos notables

Resuelva los siguientes límites utilizando las técnicas vistas en clase.

1. $\lim_{x\to 0} \sin(ax)/\sin(wx)$

2. $\lim_{x\to 0} \sin(ax)/\sin(kx)$

3. $\lim_{x\to 0} \sin(3x)/\sin(5x)$

4. $\lim_{x\to 0} \tan(ax)/ax$

5. $\lim_{x\to 0} \tan(5x)/5x$

6. $\lim_{x\to 0}(\sin(x)/x)^2$

Evaluación sobre indeterminaciones

Realice los siguientes límites utilizando las técnicas vistas en clase.

1. $\lim_{x \to 3}(x^2 - 6x + 9)/(x - 3)$

2. $\lim_{x \to a}(x^2 - a^2)/(x - a)$

3. $\lim_{x \to \sqrt{2}}(x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$

4. $\lim_{x \to \sqrt{5}}(x^2 - 5)/(x - \sqrt{5})$

5. $\lim_{x \to 0}(1 - cos(x))/x$

Referencias

[1] Sadovsky, P (2005)*La teoría de sitaciones didáaticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de las matemáticas*.

[2] Brousseau, G. (1994): *Los diferentes roles del maestro en Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.*. Buenos Aires, Paidós Educador.

[3] Brousseau, G. (1986)*Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física.

[4] Sanmartí, N (1999)*Los contratos didácticos: un instrumento para la institucionalizacióñde la gestión del aula*. Barcelona,España.

[5] Teoría de situaciones didácticas (s.f.) En WiKipedia. Recuperado el 16 de enero de 2018 de https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_situaciones_didácticas.

[6] Normas APA (2017). Acerca de normasapa.com. Recuperado de http://normasapa.com/acerca-de-normasapa-com/

[7] Apostol, T (1984)*CALCULUS, One -Variable Calculus, with an introduction to Linear Algebra.* Badalona, Barcelona.

[8] Masini, G(1980)*El romance de los números.Historia de los números.* Barcelona, España.

[9] Magaña,Pedro(s.f.)El origen de los números .Santiago de Cali, colombia: Monografias. recuperado de https://www.monografias.com/trabajos38/origen-numeros/origen-numeros2.shtml.

[10] Hitt, F (2003). *El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones* México, D. F.

[11] Hitt, F (s.f.) *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* Universidad de Quebec.

[12] Hitt, F y Páez, R (s.f.) *Dificultades en el aprendizaje del cálculo y actividades de enseñanza*. Universidad de Quebec.

[13] Gómez, Hernández y Chaucanes (2015) *Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media.* Pereira. Colombia.