SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA UNA ECUACIÓN TIPO BENJAMIN-BONA-MAHONY

JHON ALEX MEJIA ZUÑIGA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2018

SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA UNA ECUACIÓN TIPO BENJAMIN-BONA-MAHONY

TRABAJO DE GRADO
EN MODALIDAD DE INVESTIGACIÓN, PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

JHON ALEX MEJIA ZUÑIGA

DIRECTOR: DR. ALEX MANUEL MONTES P.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN

2018

Nota de aceptación

____

____

____

____

Director: __________________________

Dr. Alex Manuel Montes P.

Jurado: __________________________

Dr. Aida Patricia González.

Jurado: __________________________

Dr. Ramiro Miguel Acevedo.

Fecha de sustentación: Popayán, 19 de julio de 2018.

Agradecimientos

A mi madre, quien ha dedicado gran parte de su vida a formarme de una manera integra y gracias a ella también logre mi formación académica, además agradezco a mis familiares quienes me apoyaron incondicionalmente en esta etapa de la vida.

A mis profesores, por ser un pilar fundamental en mi formación profesional, especialmente a mi director, el profesor Alex Montes quien compartio sus conocimientos académicos para la realización de este trabajo de grado.

A mis amigos, con quienes se vivieron experiencias unicas en nuestra carrrera como universitarios y además por su apoyo brindado, fueron unos muy buenos tiempos.

Índice general

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales son ampliamente utilizadas en diferentes campos de la matemática y las ciencias naturales como por ejemplo en geometría diferencial, análisis complejo, mecánica de fluidos, mecánica cuántica, física del plasma, dinámica de poblaciones, óptica no lineal, entre otros. En particular, ecuaciones diferenciales parciales no lineales son usadas para modelar la evolución de ondas de agua largas con pequeña amplitud. Es conocido que estas ecuaciones no lineales relacionadas con modelos de ondas de agua son derivadas del "problema completo de ondas de agua" (full problem of water waves) mediante un proceso de aproximación y bajo la imposición de algunas restricciones para los parámetros que afectan la propagación de las ondas. Un ejemplo típico (ver [6], [7], [11]) es la ecuación Korteweg-de Vries que modela la evolución de ondas largas de pequeña amplitud en un canal de poca profundidad:

$$\partial_t u + \partial_x \left(u + \partial_x^2 u\right) = -\frac{1}{2}\partial_x \left(u^2\right). \tag{KdV}$$

T. B. Benjamin, J. L. Bona y J. J. Mahony en [1] derivaron la ecuación BBM como un mejoramiento de la ecuación KdV para modelar la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud:

$$(I - \partial_x^2)\partial_t u + \partial_x \left(u + \partial_x^2 u\right) = -\frac{1}{2}\partial_x \left(u^2\right). \tag{BBM}$$

Aunque, en primera instancia, la ecuación BBM fue formalmente derivada para describir la evolución de ondas largas en un canal de poca profundidad, se ha probado que esta ecuación también aparece en problemas de hidromagnetismo, teoría del plasma, acústica, entre otras áreas de las ciencias naturales. Por esta razón la ecuación BBM, como otras ecuaciones diferenciales parciales, ha llamado la atención de investigadores y científicos de las ciencias exactas y de las ciencias naturales.

En este trabajo de grado consideraremos el estudio de una ecuación tipo Benjamin-Bona-Mahony con términos lineales y no lineales de orden superior. Estudiaremos la siguiente ecuación

$$(I-\partial_x^2+\partial_x^4)\partial_t u+\partial_x\left(\alpha u+\gamma\partial_x^2 u\right)=-\partial_x\Big[\lambda u^2+\delta G(u)\Big]-\mu(I-\partial_x^2+\partial_x^4)\left(u\partial_x u\right), \quad (1)$$

donde

$$G(u)=(\partial_x u)^2-(\partial_x^2 u)^2-3\partial_x^2\big[(\partial_x u)^2\big].$$

En particular estudiaremos la existencia y la unicidad de la solución del problema de valor inicial asociado a la ecuación (1) con condición inicial

$$u(0,\cdot)=u_0(\cdot), \quad (2)$$

donde u_0 es una función periódica, que por comodidad consideraremos de período 2π.

El término no lineal en la ecuación (1) es motivado por el trabajo [3]; en tal trabajo los autores, siguiendo el artículo [4], estudiaron la ecuación

$$(I-\partial_x^2+\partial_x^4)\partial_t u=-\partial_x\Big[u^2+\frac{1}{2}G(u)\Big]-(I-\partial_x^2+\partial_x^4)\left(u\partial_x u\right), \quad (3)$$

donde

$$G(u)=(\partial_x u)^2-(\partial_x^2 u)^2-3\partial_x^2\big[(\partial_x u)^2\big].$$

Note que si $\alpha=\gamma=0, \lambda=\mu=1$ y $\delta=\frac{1}{2}$ en la ecuación (1) obtenemos la ecuación (3). Esta ecuación aparece en el estudio de ciertas métricas definidas en la variedad, $\mathcal{D}$, de todos los difeomorfismos del círculo, $\mathbb{S}$, que preservan orientación.

Vemos que la ecuación (1) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_t u+(I-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}\partial_x\left(\alpha u+\gamma\partial_x^2 u\right)=-(I-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}\partial_x\Big[\lambda u^2+\delta G(u)\Big]-\mu u\partial_x u,$$

donde el operador $(I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}$ se le puede dar sentido vía series de Fourier para funciones periódicas. Entonces la ecuación en consideración se puede escribir de la forma

$$\partial_t u + M(u) = F(u), \tag{4}$$

donde M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}\partial_x\Big[\alpha u + \gamma\partial_x^2 u\Big], \quad A(u) = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)u,$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = -A^{-1}\partial_x\Big[\lambda u^2 + \delta G(u)\Big] - \mu u\partial_x u.$$

Es conocido del Principio de Duhamel que si $S(t)u_0$ es la solución en t del problema lineal asociado con (4),

$$\partial_t u + M(u) = 0, \quad u(0,\cdot) = u_0(\cdot), \tag{5}$$

entonces el problema de valor inicial (1)-(2) puede reformularse por medio de la ecuación integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)\, F(u(\tau))d\tau. \tag{6}$$

Ahora, supongamos que existen dos espacios de Banach $Y \hookrightarrow X$, donde la inclusión es continua, tales que M y F son funciones continuas de Y en X. Supongamos además que para cada $u_0 \in Y$ existe un número real $T > 0$ y una única función

$$u \in C\left([0,T], Y\right)$$

que satisface la ecuación integral (6). Además supongamos que la aplicación dato inicial - solución $u_0 \to u$ es continuo de Y en $C\left([0,T], Y\right)$. En este caso diremos que el problema de valor inicial (1)-(2) posee *solución local* en Y. Si T puede elegirse arbitrariamente grande, el problema de valor inicial se dice que posee *solución global* en Y. Recordemos que si E es un espacio de Banach entonces $C([0,T], E)$ denota el espacio de funciones continuas definidas en $[0,T]$ con valores en E.

En este trabajo mostraremos la existencia de soluciones locales para el problema de valor inicial (1)-(2) en un espacio de Banach de funciones periódicas, para esto notamos que si definimos, en un espacio adecuado, el operador Φ:

$$\Phi(u(t)) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))\,d\tau,$$

entonces mostrar la existencia de solución para la ecuación integral (6) es equivalente a mostrar la existencia de un punto fijo para el operador Φ.

Es conocido que para el problema de valor inicial asociado con la ecuación BBM existen soluciones locales y globales en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 0$ (ver el trabajo de J. Bona y N. Tzetkov en [2]). Para esto los autores de la prueba de este resultado usaron un estimativo no lineal de la forma

$$\|(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(uw)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}\|w\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad s \geq 0. \tag{7}$$

D. Roumegoux en el artículo [8] obtuvo un resultado similar para la ecuación BBM en espacios de Sobolev de tipo periódico $H^s_{per}(\mathbb{R})$, usando un estimativo de la misma forma

$$\|(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(uw)\|_{H^s_{per}(\mathbb{R})} \leq K\|u\|_{H^s_{per}(\mathbb{R})}\|w\|_{H^s_{per}(\mathbb{R})}, \quad s \geq 0. \tag{8}$$

En el trabajo [3], los autores mostraron que el problema de valor inicial asociado a la ecuación

$$(I-\partial_x^2+\partial_x^4)\partial_t u = -\partial_x\Big[u^2 + \frac{1}{2}G(u)\Big] - (I-\partial_x^2+\partial_x^4)\,(u\partial_x u)\,, \tag{9}$$

donde $G(u) = (\partial_x u)^2 - (\partial_x^2 u)^2 - 3\partial_x^2\big[(\partial_x u)^2\big]$, posee soluciones globales en el espacio tipo Sobolev

$$\mathcal{H}_{2,p} = \big\{w \in H^2(\mathbb{R}) \quad : \quad \partial_x^2 w \in L^p(\mathbb{R})\big\}, \quad 2 < p < \infty.$$

A. M. Montes en el artículo [5] consideró la ecuación (1) como una generalización de la ecuación BBM y de la ecuación (9). Mostró que en el caso de que α, γ, λ y μ son números reales cualesquiera y δ un número real diferente de cero, el problema de valor inicial asociado a la ecuación (1) posee soluciones locales en el espacio $H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 2$, mejorando el resultado de existencia local del trabajo [3] ya que no usó la condición $\partial_x^2 w \in L^p(\mathbb{R})$. Para este trabajo el autor adaptó la técnica usada por J. Bona y N. Tzetkov en el trabajo [2] y usó el mismo estimativo (7).

En este trabajo de grado estudiamos el problema de valor inicial asociado a la ecuación (1) con condición inicial periódica; para tal caso, siguiendo el trabajo [5], usaremos el estimativo (8). El trabajo se desarrolló en la modalidad trabajo de investigación, adscrito al proyecto de investigación "Estudio analítico de algunos modelos y sistemas para ondas de agua largas", proyecto inscrito en Vicerrectoría de Investigaciones con el código I.D. 4240, y está dividido en los siguientes tres capítulos: Series de Fourier, donde estudiamos algunas propiedades de la serie y la transformada de Fourier de una función continua periódica. Espacios de Sobolev periódicos, donde estudiamos este tipo de espacios desde el punto de vista de las funciones generalizadas. Existencia de soluciones periódicas, donde mostramos que el problema de valor inicial asociado a la ecuación (1) tiene soluciones locales de tipo periódico.

Capítulo 1

Series de Fourier

En este capítulo estudiamos algunas propiedades de la serie y la transformada de Fourier de una función continua y periódica con periodo 2π. Denotaremos por $C^n_{per}[-\pi,\pi], n \in \mathbb{N}$, la colección de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^n que son $2\pi-$periódicas. En el caso $n = 0$ simplemente escribimos $C_{per}[-\pi,\pi]$, también usaremos la notación $\mathscr{P} = C^\infty_{per}[-\pi,\pi]$ para el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables periódicas con periodo 2π. Asumiremos familiar la teoría básica de los espacios ℓ^p y L^p en $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. *La transformada de Fourier de una función $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$ se define como la sucesión compleja $\widehat{f} = \big(\widehat{f}(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ dada por*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Los números $\widehat{f}(k)$ se denominan los coeficientes de Fourier de f y la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}$, se dice que es la serie de Fourier generada por f.

El objetivo principal de este capítulo es mostrar que bajo algunas condiciones la serie de Fourier generada por f converge uniformemente a f. Primero tenemos los siguientes resultados

Teorema 1.1. *La aplicación $\mathscr{F} : f \to \widehat{f}$ que envia f en su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es una aplicación lineal continua de $(C_{per}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_{L^1[-\pi,\pi]})$ en $\ell^\infty(\mathbb{C})$.*

Demostración. La linealidad de la aplicación se sigue de las propiedades de linealidad de la integral. Ahora,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1[-\pi,\pi]}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, obtenemos que

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{C})} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1[-\pi,\pi]}.$$

Así, $\mathscr{F}$ es una transformación lineal continua. ■

Teorema 1.2. *Sea* $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$ *entonces la serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2 \tag{1.1}$$

converge. Además se satisface la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]},$$

y la propiedad de Riemman-Lebesgue,

$$\lim_{|k|\to\infty}\widehat{f}(k) = 0.$$

Demostración. Primero introducimos las funciones:

$$\Theta_k(x) = e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces dado que

$$\langle\Theta_k,\Theta_j\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}\overline{e^{ijx}}dx = \begin{cases} 0 & si \quad j \neq k \\ 2\pi & si \quad j = k, \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Big\|f - \sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}(k)\Theta_k\Big\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} \\ &= \langle f - \sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}(k)\Theta_k, f - \sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}(k)\Theta_k\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\ &= \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi\sum_{k=-N}^{N}|\widehat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier $N \in \mathbb{Z}^+$,

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]}.$$

De ahí que $(S_N)_{N\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión creciente y acotada y por tanto es convergente. Así la serie (1.1) converge y satisface que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]}.$$

Finalmente, de la convergencia de la serie (1.1) obtenemos la propiedad de Riemman-Lebesgue. ■

Teorema 1.3. *Sea $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces tenemos que*

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Si $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$ entonces usando la definición de la transformada de Fourier, integrando por partes y usando que $f(-\pi) = f(\pi)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(f(x) e^{-ikx}|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (ik) f(x) e^{-ikx} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (ik) f(x) e^{-ikx} dx = ik\widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

■

Observación 1.1. Si $f \in C^m_{per}[-\pi,\pi]$, entonces usando un argumento de inducción obtenemos que para $n = 0, 1, \ldots, m$,

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $f^{(n)}$ denota la derivada n-ésima de f.

Los siguientes teoremas garantizan la convergencia uniforme y la convergencia puntual de la serie de Fourier generada por una función f en $C^1_{per}[-\pi,\pi]$. Para demostrar la convergencia uniforme usaremos el criterio de Weierstrass que indica que si $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de funciones en $C[a,b]$ de valor complejo y existe una sucesión de constantes no negativas $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$|g_k(x)| \leq M_k, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \text{ y para todo } x \in [a,b],$$

entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} M_k$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_k(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$.

Teorema 1.4. *Sea $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces la serie de Fourier generada por f converge uniformemente. En general, si $f \in C^m_{per}[-\pi,\pi]$ entonces la serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^n \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad n = 0, 1, \ldots, m-1,$$

converge uniformemente.

Demostración. Teniendo en cuenta la propiedad de periodicidad podemos mostrar que la serie de Fourier generada por una función $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$ converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$. Note que

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|.$$

Así por el criterio de Weierstrass es suficiente demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty.$$

Dado que $\widehat{f'}(k) = (ik)\widehat{f}(k)$ entonces para $k \neq 0$, $|\widehat{f}(k)| = \dfrac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|}$. Además usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad de Bessel concluimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{0<|k|\leq N} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|} \\
&\leq |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_{0<|k|\leq N} |\widehat{f'}(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{0<|k|\leq N} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \\
&\leq |\widehat{f}(0)| + C\|f'\|_{L^2[-\pi,\pi]},
\end{aligned}$$

donde $C^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Luego $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|$ es convergente y por tanto la serie de Fourier de f converge uniformemente. Por otra parte, si $f \in C^m_{per}[-\pi,\pi]$ entonces $f^{(n)} \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$ para $n = 0, 1, \ldots, m-1$, por consiguiente la serie de Fourier generada por $f^{(n)}$ converge uniformemente y esta serie es $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^n \widehat{f}(x) e^{ikx}$ por la Observación 1.1. ∎

Teorema 1.5. *Sea $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge puntualmente a $f(x_0)$, esto es,*

$$f(x_0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx_0}.$$

Demostración. Sea $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, supongamos primero que f es tal que $f(0) = 0$. Consideremos la función g definida de la siguiente manera,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{ix}-1}, & si\ \ x \neq 0 \\ -if'(0), & si\ \ x = 0. \end{cases}$$

Note que g es periódica y continua, luego por la propiedad de Riemman-Lebesgue

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}(k) = 0. \tag{1.2}$$

Como $f(x) = (e^{ix}-1)g(x)$, entonces la transformada de Fourier de f safisface que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{ix}g(x) - g(x))e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ix(k-1)}dx - \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k). \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(n).$$

De donde usando (1.2) vemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) = f(0) = 0.$$

Ahora bien, para probar el caso general modificaremos la función f de tal manera que satisfaga el caso que se probó anteriormente, para ello sea $x_0 \in [-\pi,\pi]$ y definamos la siguiente función auxiliar

$$g(x) = f(x+x_0) - f(x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observe que por construcción g es una función continua y 2π-periódica, por tanto la serie de Fourier de g converge a 0, esto es

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k) = 0.$$

Por otra parte, los coeficientes de Fourier de g están dados por

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k)e^{ikx_0} & si \;\; k \neq 0 \\ \widehat{f}(0) - f(x_0) & si \;\; k = 0, \end{cases}$$

luego

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx_0} - f(x_0).$$

De ahí que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx_0} = f(x_0).$$

■

Como consecuencia inmediata del teorema anterior y de la Observación 1.1 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Si $f \in \mathscr{P}$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^n \widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{1.3}$$

En el siguiente teorema resumimos los resultados anteriores y mostramos la conocida identidad de Parseval.

Teorema 1.6. *Sea $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces la serie de Fourier generada por f converge uniformemente a f. Además se satisface la identidad de Parseval,*

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{C})}.$$

Demostración. Como la serie de Fourier de f converge uniformemente y además converge puntualmente a f, entonces dicha serie de Fourier converge uniformemente a f. Además, por el Teorema 1.2 tenemos que $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{C})$. Por otra parte, para probar la identidad de Parseval consideremos

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Como en la prueba de la desigualdad de Bessel, tenemos que

$$\|f - S_N\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \|f\|_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2.$$

De otro lado, dado que $S_N \to f$ uniformemente vemos que

$$\|f - S_N\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - S_N(x)| \to 0.$$

Pero

$$\|f - S_N\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \leq 2\pi\|f - S_N\|^2_\infty,$$

por tanto

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f - S_N\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} &= \|f\|_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi\|f - S_N\|^2_\infty. \end{aligned}$$

Entonces tomando el límite cuando $N \to \infty$ obtenemos que

$$0 \leq \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq 0.$$

■

A continuación demostraremos que la aplicación $\mathscr{F} : C^1_{per}[-\pi,\pi] \to \ell^\infty(\mathbb{C})$ es inyectiva.

Teorema 1.7. *Sean $f, g \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, si $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sabemos que para $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de f converge puntualmente a f, entonces

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

De igual manera

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k)e^{ikx}.$$

Ahora, dado que $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ concluimos que

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k)e^{ikx} = g(x), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

■

Capítulo 2

Espacios de Sobolev periódicos

En este capítulo estudiamos los espacios de Sobolev de tipo periódico, desde el punto de vista de las distribuciones. Primero presentaremos el concepto de función periódica generalizada o distribución periódica, luego estudiamos la transformada y la serie de Fourier de una distribución periódica, para finalizar con la definición y algunas propiedades de los espacios de Sobolev $H^s_{per}(\mathbb{R})$.

Definición 2.1. *Un funcional lineal continuo definido en $\mathscr{P}$, $T : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$, se denomina una distribución periódica si existe una sucesión $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathscr{P}$ tal que*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in \mathscr{P}.$$

El conjunto de todas las distribuciones periódicas será denotado por $\mathscr{P}'$.

Observación 2.1. Sea $f \in C_{per}[-\pi, \pi]$, entonces la fórmula

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx, \;\; \varphi \in \mathscr{P},$$

define una distribución periódica. De aquí tenemos que

$$\mathscr{P} \subset C_{per}[-\pi, \pi] \subset \mathscr{P}'.$$

Probemos este resultado; consideremos la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier generada por f, esto es

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Por lo tanto

$$\|f - S_n\|_\infty \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} S_n(x)\varphi(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Notando que $S_n \in \mathscr{P}$ tenemos que f es una distribución periódica.

Definición 2.2. *Diremos que una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathscr{P}'$ converge a $T \in \mathscr{P}'$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \textit{para toda } \varphi \in \mathscr{P}.$$

En este caso, escribiremos $T_n \to T$ en $\mathscr{P}'$.

Definición 2.3. *La derivada distribucional de un funcional $f \in \mathscr{P}'$, denotada por f', se define de la siguiente forma*

$$f'(\varphi) = \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{P}. \tag{2.1}$$

De la misma manera definimos $f^{(n)}$ por

$$f^{(n)}(\varphi) = \langle (f^{(n-1)})', \varphi \rangle = -\langle f^{(n-1)}, \varphi' \rangle.$$

Observación 2.2. De la definición anterior notamos que $f^{(n)}$ es un funcional lineal continuo definido en $\mathscr{P}$, es decir $f^{(n)} \in \mathscr{P}'$. Además, toda distribución periódica es infinitamente diferenciable. Más aún,

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{P}.$$

A continuación extendemos la teoria de la transformada y las series de Fourier a funciones generalizadas en $\mathscr{P}'$. Seguiremos usando la notación:

$$\Theta_k(x) = e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{Z}.$$

Definición 2.4. *La transformada de Fourier de una distribución periódica $f \in \mathscr{P}'$ se define como la sucesión $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ dada por*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\langle f, \Theta_{-k}\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Además, si $f \in \mathscr{P}'$

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\Theta_k(x),$$

se denomina la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a f.

En el siguiente teorema mostramos que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge a f en $\mathscr{P}'$.

Teorema 2.1. *Sea $f \in \mathscr{P}'$, entonces $S_n(f) \in \mathscr{P}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $S_n(f) \to f$ en $\mathscr{P}'$.*

Demostración. Sea $f_n = S_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Note que $f_n \in \mathscr{P}$ ya que es un polinomio trigonométrico. Por otra parte, $\widehat{f_n}(k) = \widehat{f}(k)$ si $|k| \leq n$ y $\widehat{f_n}(k) = 0$ si $|k| > n$. Entonces usando la identidad de Parseval y la fórmula

$$\widehat{\overline{\varphi}}(k) = \overline{\widehat{\varphi}(-k)}, \quad \varphi \in \mathscr{P},$$

obtenemos para todo $\varphi \in \mathscr{P}$ que

$$\begin{aligned}
\langle f_n, \varphi\rangle &= \langle f_n, \bar{\varphi}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f_n}(k)\widehat{\varphi}(-k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \Theta_{-k}\rangle\widehat{\varphi}(-k).
\end{aligned}$$

Pero para alguna $(\Psi_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathscr{P}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \langle f, \Theta_{-k}\rangle\widehat{\varphi}(-k) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_m(x)\Theta_{-k}(x)dx\right)\widehat{\varphi}(-k) \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_m(x) \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\varphi}(-k)\Theta_{-k}(x)dx \\
&= \langle f, S_n(\varphi)\rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\langle f_n, \varphi \rangle = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) = \langle f, S_n(\varphi) \rangle. \tag{2.2}$$

Como $S_n(\varphi) \to \varphi$ en $\mathscr{P}$ y $f \in \mathscr{P}'$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, S_n(\varphi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Luego $f_n \to f$ en $\mathscr{P}'$. ■

Como una consecuencia del teorema anterior obtenemos la siguiente generalización de la identidad de Parseval.

Corolario 2.1. *Si $f \in \mathscr{P}'$ y $\varphi \in \mathscr{P}$, entonces tenemos que*

$$\langle f, \varphi \rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k).$$

Demostración. Usando el teorema anterior y la igualdad en (2.2), tenemos que

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, S_n(\varphi) \rangle = \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k).$$

■

Otra consecuencia del Teorema 2.1 es la siguiente caracterización de $\mathscr{P}'$.

Corolario 2.2. *$\mathscr{P}'$ es el dual topológico de $\mathscr{P}$.*

Demostración. Tenemos que toda distribución periódica define un funcional lineal continuo, luego toda distribución periódica es un elemento del dual de $\mathscr{P}$. Ahora bien, si $f : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo, entonces podemos definir su transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$ y por tanto la correspondiente suma parcial de la serie generada por f que denotaremos por $S_n(f)$. Sea $\varphi \in \mathscr{P}$, razonando como en la prueba de (2.2) tenemos que

$$\langle f, \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\varphi}(k)\Theta_k \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\varphi}(k)\langle f, \Theta_k \rangle.$$

Ahora dado que $S_n(f) \in \mathscr{P}$ y además $S_n(f) \to f$ en $\mathscr{P}'$, vemos que

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f, S_n(\varphi)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\varphi}(k)\Theta_k \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\varphi}(k)\langle f, \Theta_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\Theta_{-k} dx\right]\langle f, \Theta_k\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \Theta_{-k}(x)\langle f, \Theta_k\rangle\right] dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \Theta_{k}\langle f, \Theta_{-k}\rangle\right] dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\left[\sum_{k=-n}^{n} \Theta_{k}(x)\widehat{f}(k)\right] dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) S_n(f) dx.
\end{aligned}$$

De esta manera tomando $\Psi_n = S_n(f)$ tenemos que f satisface la definición de distribución periódica. ■

Ahora tenemos la siguiente fórmula para la transformada de Fourier de la derivada distribucional de una función en $\mathscr{P}'$.

Teorema 2.2. *Sea $f \in \mathscr{P}'$, entonces para $n \in \mathbb{Z}^+$*

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k).$$

Demostración. Si $f \in \mathscr{P}'$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi}\langle f', \Theta_{-k}\rangle = -\frac{1}{2\pi}\langle f, (\Theta_{-k})'\rangle \\
&= -\frac{1}{2\pi}\langle f, -ik\Theta_{-k}\rangle = \frac{ik}{2\pi}\langle f, \Theta_{-k}\rangle \\
&= ik\widehat{f}(k),
\end{aligned}$$

y razonando de manera inductiva podemos ver que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k).$$

■

A continuación comenzamos el estudio del tema central de este capítulo.

Definición 2.5. *Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev $H^s_{per} = H^s_{per}(\mathbb{R}) = H^s_{per}[-\pi, \pi]$ es definido por*

$$H^s_{per}[-\pi,\pi] = \{f \in \mathscr{P}' \ : \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty\}.$$

El siguiente resultado muestra que los espacios de Sobolev de tipo periódico son espacios completos.

Teorema 2.3. *Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ es un espacio de Hilbert con respecto a la métrica inducida por el producto interno dado por*

$$\langle f, g\rangle_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Demostración. Verifiquemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s_{per}}$ es un producto interno en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$. Notemos primero que si $f, g \in \mathscr{P}'$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha f + g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\langle \alpha f + g, \Theta_{-k}\rangle = \frac{\alpha}{2\pi}\langle f, \Theta_{-k}\rangle + \frac{1}{2\pi}\langle g, \Theta_{-k}\rangle \\ &= (\alpha\widehat{f} + \widehat{g})(k).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\langle \alpha f + g, h\rangle_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s (\widehat{\alpha f + g})(k)\overline{\widehat{h}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s (\alpha\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k))\overline{\widehat{h}(k)} \\ &= 2\pi\alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{h}(k)} + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{g}(k)\overline{\widehat{h}(k)} \\ &= \alpha\langle f, h\rangle_{H^s_{per}} + \langle g, h\rangle_{H^s_{per}}.\end{aligned}$$

También tenemos que

$$\langle f, g\rangle_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \overline{\langle g, f\rangle}_{H^s_{per}},$$

y también vemos que

$$\langle f, f\rangle_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \geq 0.$$

Además, claramente $\langle f, f\rangle_{H^s_{per}} = 0$ sí y sólo si $f(x) \equiv 0$. Por tanto $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s_{per}}$ es un producto interno en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$. De lo anterior, tenemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s_{per}}$ induce una métrica en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ dada por

$$\|f\|_{H^s_{per}} = \langle f, f\rangle_s^{1/2} = \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Probemos ahora que el espacio de Sobolev $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ es un espacio completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^s_{per}}$. En efecto, si $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$, entonces

$$\|f_m - f_n\|^2_{H^s_{per}} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n, m \to \infty.$$

Pero

$$\|f_m - f_n\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{f_m}(k) - \widehat{f}_n(k)|^2.$$

De aqui que si $g_n(k) = (1+|k|^2)^{s/2}\widehat{f}_n(k)$ entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^2(\mathbb{C})$ que es un espacio completo, por tanto existe $g \in \ell^2(\mathbb{C})$ tal que

$$\|g_n - g\|_{\ell^2(\mathbb{C})} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por tanto si definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(k)}{(1+k^2)^{s/2}} e^{ikx},$$

tenemos que $f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ y además

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s \left|\widehat{f}_n(k) - \frac{g(k)}{(1+k^2)^{s/2}}\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(1+k^2)^{s/2}\widehat{f}_n(k) - g(k)|^2 \\
&= 2\pi \|g_n - g\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. De esta manera hemos demostrado que $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ es un espacio de Banach con respecto a la norma dada por $\|\cdot\|_{H^s_{per}}$.

$\blacksquare$

A continuación presentaremos algunas propiedades de los espacios de Sobolev $H^s_{per}[-\pi,\pi]$.

Teorema 2.4. *Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces $\mathscr{P}$ es denso en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$.*

Demostración. Recordemos que $f \in \mathscr{P}$ define una distribución periódica dada por

$$< f, \phi >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathscr{P}.$$

De aquí que $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}'$. Además para $f \in \mathscr{P}$ se tiene que $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$, por lo tanto $f \in H^0_{per}[-\pi,\pi]$. Ahora si $s \leq 0$ entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty,$$

por tanto $f \in H^s_{per}([-\pi,\pi])$ para $s \in \mathbb{R}^-$. Por otro lado, si $f \in \mathscr{P}$ y $s \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 &\leq C_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^{2s}) |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq C_s \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2s} |\widehat{f}(k)|^2 \right) \\
&\leq C_s \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{m} |\widehat{f}(k)|^2 \right) \\
&= C_s \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2 \right),
\end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $2s \leq m$. Luego $\mathscr{P} \subset H^s_{per}[-\pi,\pi]$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Ahora probaremos que $\mathscr{P}$ es denso en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$. Si $g \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ definamos la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ por

$$g_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g_n}(k)\Theta_k(x),$$

donde

$$\widehat{g_n}(k) = \begin{cases} \widehat{g}(k) & si \quad |k| \leq n \\ 0 & si \quad |k| > n, \end{cases}$$

por tanto

$$g_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g_n}(k)\Theta_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k)\Theta_k(x).$$

Note que $g_n \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ y además

$$\|g-g_n\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{g}(k)-\widehat{g}_n(k)|^2 = \sum_{|k|>n}(1+|k|^2)^s|\widehat{g}(k)|^2.$$

Puesto que $g \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$, tenemos que $\|g-g_n\|_{H^s_{per}} \to 0$, cuando $n \to \infty$. ■

Teorema 2.5. *Sean $s, r \in \mathbb{R}$ tales que $s \geq r$, entonces $H^s_{per}[-\pi,\pi] \hookrightarrow H^r_{per}[-\pi,\pi]$, es decir que $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ está continua y densamente incluido en $H^r_{per}[-\pi,\pi]$. Además,*

$$\|f\|_{H^r_{per}} \leq \|f\|_{H^s_{per}}, \quad f \in H^s_{per}[-\pi,\pi].$$

Demostración. Note que $(1+|k|^2)^r \leq (1+|k|^2)^s$ si $s \geq r$. De aquí que

$$\|f\|^2_{H^r_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+|k|^2)^r|\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|^2_{H^s_{per}}.$$

Así obtenemos que $H^s_{per}[-\pi,\pi] \subset H^r_{per}[-\pi,\pi]$ y la inclusión es continua. Además como $\mathscr{P}$ es denso en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ entonces $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ es denso en $H^r_{per}[-\pi,\pi]$. ■

Ahora identificaremos los espacios de Sobolev $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ para $s > \frac{1}{2}$ a través de funciones continuas y periódicas, de periodo 2π; este resultado es conocido como el Lema de inmersión de Sobolev.

Teorema 2.6. *Supongamos $s > \frac{1}{2}$ entonces $H^s_{per}[-\pi,\pi] \hookrightarrow C_{per}[-\pi,\pi]$ y además*

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \leq C\|f\|_{H^s_{per}}, \quad f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]. \tag{2.3}$$

Demostración. Sea $s > \frac{1}{2}$ y $f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$, entonces usando la desigualdad de Cauchy Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}(k)|}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{-s}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\|f\|_{H^s_{per}}, \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

donde $C = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{-s}\right)^{\frac{1}{2}}$. Por tanto $\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{C})$ y por lo cual

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{2.5}$$

converge uniformemente. Además vemos que $f = g$ en $\mathscr{P}'$, ya que que si $\varphi \in \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned}
\langle g, \varphi\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}\right)\varphi(x)dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\varphi(x)dx = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \\
&= \langle f, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

De (2.4) tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| = |g(x)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)| \leq C\|f\|_{H^s_{per}} \ ,$$

por tanto

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \leq C\|f\|_{H^s_{per}}.$$

■

Observación 2.3. Del Lema de inmersión de Sobolev vemos que si $f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ con $s > \frac{1}{2}$, entonces f "tiene un representante en $C_{per}[-\pi,\pi]$" dado por (2.5), el cual denotaremos también por f. Por tanto podemos definir el producto de f y g de la siguiente manera:

Definición 2.6. *Sean $s > \frac{1}{2}$ y $f, g \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$. El producto fg se define por*

$$\langle fg, \phi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathscr{P}.$$

El objetivo a continuación es mostrar que $H^s_{per}[-\pi,\pi]$, $s > \frac{1}{2}$, es una álgebra de Banach. Para establecer este resultado, usaremos el concepto de convolución de sucesiones y la desigualdad de Young para la convolución.

Definición 2.7. *Sean $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dos sucesiones de números complejos. Entonces la convolución de α y β se define como la sucesión $\alpha * \beta$ dada por*

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \beta_{k-j}.$$

Teorema 2.7. *Sean $\alpha \in \ell^1(\mathbb{C})$ y $\beta \in \ell^2(\mathbb{C})$, entonces $\alpha * \beta \in \ell^2(\mathbb{C})$ y además*

$$\|\alpha * \beta\|_{\ell^2(\mathbb{C})} \leq \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})}\|\beta\|_{\ell^2(\mathbb{C})}.$$

Demostración. Consideremos $\alpha \in \ell^1(\mathbb{C})$ y $\beta \in \ell^2(\mathbb{C})$ entonces aplicando la desigualdad de Cauchy Schwartz obtenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|(\alpha * \beta)_k| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j \beta_{k-j}| \\
&\leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|\right)^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})}^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\alpha * \beta\|_{\ell^2(\mathbb{C})}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\alpha * \beta)_k|^2 &\leq \|\alpha\|_{l^1(\mathbb{C})} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_{k-j}|^2 \\
&\leq \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|\right) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\beta_m|^2\right) \\
&= \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})}^2 \|\beta\|_{\ell^2(\mathbb{C})}^2.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.8. *Si $s > \frac{1}{2}$ entonces existe una constante positiva C_s que depende unicamente de s tal que para toda $f, g \in H^s_{per}[-\pi, \pi]$,*

$$\|fg\|_{H^s_{per}} \leq C_s \|f\|_{H^s_{per}} \|g\|_{H^s_{per}}, \quad f, g \in H^s_{per}[-\pi, \pi].$$

Demostración. Por el Lema de inmersíon de Sobolev, tenemos que para $s > \frac{1}{2}$, la serie de Fourier de una función en $H^s_{per}[-\pi, \pi]$ converge uniformemente. Por tanto, si $f, g \in H^s_{per}[-\pi, \pi]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{fg}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j)e^{ilx} \right) g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-i(k-j)x}dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j).
\end{aligned}$$

Recordemos que para $a, b > 0$ y $s \geq 0$ existen constantes positivas m_s y M_s tales que

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s(a^s + b^s).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \right| \\
&\leq M_s \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \big(1 + |k-j|^s + |j|^s\big) \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \right| \\
&= M_s \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \big(\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) + |k-j|^s \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) + |j|^s \hat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\big) \right| \\
&\leq M_s\big(|(\widehat{f} * \widehat{g})(k)| + |(\widehat{f} * \widehat{r})(k)| + |(\widehat{h} * \widehat{g})(k)|\big),
\end{aligned}$$

donde $\widehat{r}(k) = k^s\widehat{g}(k)$ y $\widehat{h}(k) = k^s\widehat{f}(k)$. Note que

$$\|\widehat{r}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k^s\widehat{g}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{g}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g\|^s_{H^s_{per}}.$$

Análogamente, tenemos que $\widehat{h} \in \ell^2(\mathbb{C})$ y $\|\widehat{h}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2_{H^s_{per}}$. Ahora, usando la desigualdad de Young tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|fg\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{fg}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \right|^2 \\
&\leq 2\pi M_s^2 \bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(\widehat{f} * \widehat{g})(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(\widehat{f} * \widehat{r})(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(\widehat{h} * \widehat{g})(k)|^2 \bigg) \\
&\leq 2\pi M_s^2 \big(\|\widehat{f} * \widehat{g}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|\widehat{f} * \widehat{r}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|h * \widehat{g}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} \big) \\
&\leq 2\pi M_s^2 \big(\|\widehat{f}\|^2_{\ell^1(\mathbb{C})} \|\widehat{g}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|\widehat{f}\|^2_{\ell^1(\mathbb{C})} \|\widehat{r}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|\widehat{g}\|^2_{\ell^1(\mathbb{C})} \|\widehat{h}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} \big) \\
&\leq M_s^2 C^2 \big(\|f\|^2_{H^s_{per}} \|g\|^2_{H^s_{per}} + \|f\|^2_{H^s_{per}} \|g\|^2_{H^s_{per}} + \|g\|^2_{H^s_{per}} \|f\|^2_{H^s_{per}} \big) \\
&\leq 3 M_s^2 C^2 \|f\|^2_{H^s_{per}} \|g\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}
$$

Así, existe $C = C(s)$ tal que $\|fg\|_{H^s_{per}} \leq C \|f\|_{H^s_{per}} \|g\|_{H^s_{per}}$, siempre que $s > \frac{1}{2}$. ■

Capítulo 3

Existencia de soluciones periódicas

En este capítulo estudiamos el problema de valor inicial asociado con la ecuación tipo Benjamin-Bona-Mahony con términos lineales y no lineales de orden superior,

$$(I-\partial_x^2+\partial_x^4)\partial_t u+\partial_x\left(\alpha u+\gamma\partial_x^2 u\right)=-\partial_x\Big[\lambda u^2+\delta G(u)\Big]-\mu(I-\partial_x^2+\partial_x^4)\,(u\partial_x u)\,, \quad (3.1)$$

con la condición inicial

$$u(0,\cdot)=u_0, \quad (3.2)$$

donde $u_0\in H^s_{per}[-\pi,\pi]$, y donde la función G está definida por

$$G(u)=(\partial_x u)^2-(\partial_x^2 u)^2-3\partial_x^2\big[(\partial_x u)^2\big].$$

En particular, en este trabajo mostraremos que el problema de valor inicial (3.1)-(3.2) posee soluciones locales en el espacio $H^s_{per}[-\pi,\pi]$, con $s\geq\frac{5}{2}$. Para ello utilizaremos algunos estimativos lineales, algunos estimativos no lineales y el Teorema de punto fijo de Banach que enunciamos a continuación.

Definición 3.1. *Sea X un espacio normado. Un operador $\Phi: X\to X$, se dice una contracción si existe k, $0<k<1$, tal que*

$$\|\Phi u-\Phi v\|\leq k\|u-v\|, \quad \textit{para todo } u,v\in X.$$

Teorema 3.1. *Sea X un espacio de Banach y $\Phi : X \to X$ una contracción, entonces Φ tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $u \in X$ tal que*

$$\Phi u = u.$$

Demostración. Sea $u_0 \in X$ un punto arbitratio. Definamos u_n por

$$u_{n+1} = \Phi u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y probemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X. Como Φ es una contracción, existe $0 < k < 1$ tal que

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\| &= \|\Phi(u_n) - \Phi(u_{n-1})\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\| \\
&= k\|\Phi(u_{n-1}) - \Phi(u_{n-2})\| \leq k^2\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \\
&\leq \cdots \leq k^n\|u_1 - u_0\|.
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando la desigualdad triangular y la fórmula de la suma para la serie geométrica tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_{n+m}\| &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \ldots + (u_{n+m-1} - u_{n+m})\| \\
&\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \cdots + \|u_{n+m-1} - u_{n+m}\| \\
&\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1})\|u_1 - u_0\| \\
&\leq k^n(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1} + \cdots)\|u_1 - u_0\| \\
&= k^n(1-k)^{-1}\|u_1 - u_0\|,
\end{aligned}$$

de donde

$$\|u_n - u_{n+m}\| \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por tanto $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X; además como X es un espacio de Banach, existe $u \in X$ tal que

$$u_n \to u, \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$$

Veamos que u es un punto fijo de Φ. Como

$$\|\Phi u_n - \Phi u\| \leq k\|u_n - u\| \to 0, \;\; \text{cuando} \;\; n \to \infty,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Phi u_n = \Phi u.$$

Luego

$$\Phi u = \lim_{n\to\infty} \Phi u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = u.$$

Por otra parte, si u y u' son puntos fijos de Φ entonces

$$\|u - u'\| = \|\Phi u - \Phi u'\| \leq k\|u - u'\|,$$

y como $0 < k < 1$ concluimos que $\|u-u'\| = 0$, de donde $u = u'$. Por tanto hemos probado que Φ tiene un único punto fijo en X. ∎

Ahora, notemos que si definimos el operador $A : H^s_{per}[-\pi,\pi] \to H^{s-4}_{per}[-\pi,\pi]$, $s \in \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$Au = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)u,$$

entonces tenemos que $\widehat{Au}(k) = (1 + k^2 + k^4)\widehat{u}(k)$ y por tanto

$$Au = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{Au}(k)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + k^2 + k^4)\widehat{u}(k)e^{ikx}.$$

Por consiguiente definimos el operador $A^{-1} : H^s_{per}[-\pi,\pi] \to H^{s+4}_{per}$, $s \in \mathbb{R}$, por medio de la fórmula

$$A^{-1}(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{w}(k)}{1 + k^2 + k^4}e^{ikx},$$

observando entonces que

$$\widehat{A^{-1}}(k) = \frac{\widehat{w}(k)}{1 + k^2 + k^4}.$$

Así la ecuación (3.1) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_t u + M(u) = F(u),$$

donde M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}\partial_x\Big[\alpha u + \gamma\partial_x^2 u\Big],$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = -A^{-1}\partial_x\Big[\lambda u^2 + \delta G(u)\Big] - \mu u\partial_x u.$$

Seguidamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *$M : H^s_{per}[-\pi,\pi] \to H^{s+1}_{per}[-\pi,\pi]$ es un operador lineal acotado para $s \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Para $u \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(A^{-1}\partial_x)u\|^2_{H^{s+1}_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{s+1} |\widehat{A^{-1}\partial_x u}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+k^2)^{s+1}}{(1+k^2+k^4)^2} |\widehat{\partial_x u}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^2(1+k^2)^{s+1}}{(1+k^2+k^4)^2} |\widehat{u}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{s} |\widehat{u}(k)|^2 \\
&= \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Análogamente vemos que

$$\begin{aligned}
\|(A^{-1}\partial_x^3)u\|^2_{H^{s+1}_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^6(1+k^2)^{s+1}}{(1+k^2+k^4)^2} |\widehat{u}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{s} |\widehat{u}(k)|^2 \\
&= \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Por tanto existe una constante $C = C(\alpha,\gamma)$ tal que

$$\|M(u)\|^2_{H^{s+1}_{per}} \leq C(\|(A^{-1}\partial_x)u\|^2_{H^{s+1}_{per}} + \|(A^{-1}\partial_x^3)u\|^2_{H^{s+1}_{per}}) \leq C\|u\|_{H^s_{per}}.$$

Entonces hemos demostrado que M es un operador lineal acotado. ■

A continuación caracterizamos las soluciones del problema lineal asociado a la ecuación (3.1). En efecto, si u es una función que satisface la ecuación

$$\partial_t u = -A^{-1}\big(\partial_x[\alpha u + \gamma \partial_x^2 u]\big),$$

entonces tomando transformada de Fourier en la variable espacial x, tenemos que

$$\widehat{\partial_t u}(t,k) = -\frac{\alpha\widehat{\partial_x u}(t,k) + \gamma\widehat{\partial_x^3 u}(t,k)}{1+k^2+k^4} = -i\frac{(\alpha k - \gamma k^3)\widehat{u}(t,k)}{1+k^2+k^4}.$$

Un simple cálculo muestra que $\widehat{\partial_t u}(t,k) = \partial_t \widehat{u}(t,k)$, de donde u debe satisfacer la ecuación

$$(\partial_t \widehat{u})(t,k) = \frac{-i(\alpha k - \gamma k^3)\widehat{u}(t,k)}{1+k^2+k^4}, \quad \widehat{u(0,\cdot)} = \widehat{u_0}(k).$$

Por tanto,

$$\widehat{u}(t,k) = \widehat{u_0}(k)e^{-it\varphi(k)},$$

donde $\varphi(k) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\varphi(k) = \frac{k(\alpha - \gamma k^2)}{1+k^2+k^4}.$$

Asi, $u(t) = S(t)u_0$, donde

$$S(t)u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-i\varphi(k)}\widehat{u}(k)e^{ikx}. \tag{3.3}$$

Por tanto, si u es solución del problema lineal

$$\partial_t u + M(u) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{3.4}$$

entonces $u(t) = S(t)u_0$, con $S(t)$ definido por la expresión (3.3). Inversamente, a través de un cálculo sencillo podemos ver que si $u(t) = S(t)u_0$ con $S(t)$ definido por (3.3) entonces u es solución del problema (3.4). Por consiguiente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *La única solución del problema* (3.4) *está dado por*

$$u(t) = S(t)u_0,$$

donde $S(t)$ está definida por

$$S(t)u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-it\varphi(k)}\widehat{u}(k)e^{ikx},$$

y la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\varphi(k) = \frac{k(\alpha - \gamma k^2)}{1+k^2+k^4}.$$

El operador $S(t)$ cumple con la siguiente propiedad:

Lema 3.1. *Suponga $s \in \mathbb{R}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ es un operador lineal acotado de $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$. Más aún, para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$\|S(t)u\|_{H^s_{per}} = \|u\|_{H^s_{per}}.$$

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}
\|S(t)u\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |\widehat{S(t)u}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |e^{-it\varphi(k)}\widehat{u}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 \\
&= \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S(t)u$ tiene la propiedad requerida. ■

A continuación estableceremos unos estimativos para el operador no lineal F. Para esto usaremos un estimativo bilineal obtenido por D. Roumegoux en [8] y también usaremos los estimativos para el operador de Kato (ver [9] y [10]). No presentaremos las pruebas de estos resultados porque se deben usar herramientas avanzadas del análisis funcional y de análisis armónico y el estudio de este tema está por encima del nivel del presente trabajo.

Teorema 3.4. (*D. Roumegoux*, [8]) *Sea $s \geq 0$, entonces existe una constante $C_1 > 0$ tal que para toda u, v en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$,*

$$\|(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(uv)\|_{H^s_{per}} \leq C_1 \|u\|_{H^s_{per}} \|v\|_{H^s_{per}}.$$

En el teorema anterior, el operador $B = (I-\partial_x^2)^{-1}$ se define a través de la transformada de Fourier

$$\widehat{B(w)}(k) = \frac{\widehat{w}(k)}{1+k^2},$$

es decir que

$$B(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{w}(k)}{1+k^2} e^{ikx}.$$

También definimos el operador $J^s = (I-\partial_x^2)^{s/2}$, $s \in \mathbb{R}$, por

$$\widehat{J^s w}(k) = (1+|k|^2)^{s/2}\widehat{w}(k),$$

y el conmutador de Kato $[,]$ por

$$[J^s, u]v = J^s uv - uJ^s v.$$

Teorema 3.5. *Sean $s > \frac{3}{2}$ y $t > \frac{1}{2}$. Entonces existe una constante $K > 0$ tal que*

(1) $\|[J^s, u]w\|_{H^0_{per}} \leq K\|u\|_{H^t_{per}}\|w\|_{H^{s-1}_{per}}$.

(2) $\|u\partial_x w\|_{H^0_{per}} \leq K\|\partial_x u\|_{H^s_{per}}\|w\|_{H^0_{per}}$.

Teorema 3.6. *Sea $s \geq \frac{5}{2}$ entonces existen constantes $K_1, K_2 > 0$ tales que*

(1) $\|F(u)\|_{H^s_{per}} \leq K_1\|u\|^2_{H^s_{per}}$.

(2) $\|F(u) - F(v)\|_{H^s_{per}} \leq K_2\|u - v\|_{H^s_{per}}(\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}})$.

Demostración. Sea $s \geq \frac{5}{2}$, usando los estimativos del Teorema 3.5 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|u\partial_x v\|_{H^s_{per}} &= \|J^s(u\partial_x v)\|_{H^0_{per}} \\
&\leq \|[J^s, u]\partial_x v\|_{H^0_{per}} + \|u\partial_x J^s v\|_{H^0_{per}} \\
&\leq K(\|u\|_{H^s_{per}}\|\partial_x v\|_{H^{s-1}_{per}} + \|J^s v\|_{H^0_{per}}\|\partial_x u\|_{H^{s-1}_{per}}) \\
&\leq 2K\|u\|_{H^s_{per}}\|v\|_{H^s_{per}},
\end{aligned}$$

por tanto

$$\|u\partial_x u\|_{H^s_{per}} \leq K_1\|u\|^2_{H^s_{per}}.$$

De la definición del espacio $H^s_{per}[-\pi, \pi]$ vemos que

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\partial_x^3(u)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + k^2)^s|\widehat{A^{-1}\partial_x^3 u}(k)|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{k^6(1 + k^2)^s}{(1 + k^2 + k^4)^2}|\widehat{u}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + k^2)^{s-1}|\widehat{u}(k)|^2 \\
&= \|u\|^2_{H^{s-1}_{per}},
\end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\partial_x(u)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{k^2(1 + k^2)^s}{(1 + k^2 + k^4)^2}|\widehat{u}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi C_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{k^2(1 + k^2)^{s-2}}{(1 + k^2)^2}|\widehat{u}(k)|^2 \\
&= C_2\|(I - \partial_x^2)^{-1}\partial_x(u)\|^2_{H^{s-2}_{per}}, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

para alguna constante $C_2 > 0$. Además, usando que $H^s_{per}[-\pi, \pi]$ es un álgebra para $s > \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\partial_x^3[(\partial_x u)^2]\|_{H^s_{per}} &\leq \|(\partial_x u)^2\|_{H^{s-1}_{per}} \\
&\leq C_s \|\partial_x u\|^2_{H^{s-1}_{per}} \\
&\leq C_s \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad (3.5), el Teorema 3.4 y que $s \geq \frac{5}{2}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\partial_x[(\partial_x^2 u)^2]\|_{H^s_{per}} &\leq C_2 \|(I - \partial_x^2)^{-1}\partial_x[(\partial_x^2 u)^2]\|_{H^{s-2}_{per}} \\
&\leq C_2 C_s \|\partial_x^2 u\|^2_{H^{s-2}_{per}} \\
&\leq C_2 C_s \|u\|^2_{H^s_{per}},
\end{aligned}$$

donde $C_2 C_s$ es una constante positiva. Similarmente podemos ver que

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\partial_x[(\partial_x u)^2]\|_{H^s_{per}} &\leq C_2 \|(I - \partial_x^2)^{-1}\partial_x[(\partial_x u)^2]\|_{H^{s-2}_{per}} \\
&\leq C_2 C_1 \|\partial_x u\|^2_{H^{s-2}_{per}} \\
&\leq C_2 C_1 \|u\|^2_{H^{s-1}_{per}} \\
&\leq C_2 C_1 \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

También vemos que

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\partial_x(u^2)\|_{H^s_{per}} &\leq C_2 \|(I - \partial_x^2)^{-1}\partial_x(u^2)\|_{H^{s-2}_{per}} \\
&\leq C_2 C_1 \|u\|^2_{H^{s-2}_{per}} \\
&\leq C_2 C_1 \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Entonces usando los estimativos anteriores, la definición de F y de G tenemos que

$$\|F(u)\|_{H^s_{per}} \leq \|A^{-1}\partial_x[\lambda u^2 + \delta G(u)]\|_{H^s_{per}} + \|\mu u \partial_x u\|_{H^s_{per}},$$

pero

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\partial_x(\delta G(u))\|_{H^s_{per}} \leq &|\delta| \big(\|A^{-1}\partial_x[(\partial_x u)^2]\|_{H^s_{per}} + \|A^{-1}\partial_x[(\partial_x^2 u)^2]\|_{H^s_{per}} \\
&+ \|A^{-1}\partial_x^3[(\partial_x u)^2]\|_{H^s_{per}} \big) \leq K_\delta \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Por tanto existe una constante $K_1 = K_1(\lambda, \delta, \mu) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|F(u)\|_{H^s_{per}} &\leq \|A^{-1}\partial_x(\lambda u^2)\|_{H^s_{per}} + \|A^{-1}\partial_x(\delta G(u))\|_{H^s_{per}} + \|\mu u \partial_x u\|_{H^s_{per}} \\ &\leq K_1 \|u\|^2_{H^s_{per}}.\end{aligned}$$

Procediendo como anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\partial_x^3[(\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2]\|_{H^s_{per}} &\leq \|(\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2\|_{H^{s-1}_{per}} \\ &= \|(\partial_x u - \partial_x v)(\partial_x u + \partial_x v)\|_{H^{s-1}_{per}} \\ &\leq C_s \|\partial_x u - \partial_x v\|_{H^{s-1}_{per}} \|\partial_x u + \partial_x v\|_{H^{s-1}_{per}} \\ &\leq C_s \|u - v\|_{H^s_{per}} (\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}}).\end{aligned}$$

También podemos ver que

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\partial_x[(\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2]\|_{H^s_{per}} &\leq C_2 \|(I - \partial_x^2)^{-1}\partial_x[(\partial_x u - \partial_x v)(\partial_x u + \partial_x v)]\|_{H^{s-2}_{per}} \\ &\leq C_2 C_1 \|\partial_x u - \partial_x v\|_{H^{s-2}_{per}} \|\partial_x u + \partial_x v\|_{H^{s-2}_{per}} \\ &\leq C_2 C_1 \|u - v\|_{H^s_{per}} (\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}}).\end{aligned}$$

Similarmente tenemos que

$$\|A^{-1}\partial_x(u^2 - v^2)\|_{H^s_{per}} \leq C_2 C_1 \|u - v\|_{H^s_{per}} (\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}}).$$

Además

$$\begin{aligned}\|u\partial_x u - v\partial_x v\|_{H^s_{per}} &\leq \|u(\partial_x u - \partial_x v)\|_{H^s_{per}} + \|(u - v)\partial_x v\|_{H^s_{per}} \\ &\leq 2K \|u - v\|_{H^s_{per}} (\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}}).\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}F(u) - F(v) = {} & A^{-1}\partial_x\big[\lambda(u^2 - v^2)\big] + A^{-1}\partial_x\big[\delta\big((\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2\big)\big] \\ & + A^{-1}\partial_x\big[\delta\big((\partial_x^2 u)^2 - (\partial_x^2 v)^2\big)\big] + A^{-1}\partial_x^3\big[\delta\big((\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2\big)\big] - \mu(v\partial_x v + u\partial_x u)\end{aligned}$$

Por tanto, existe $K_2 = K_2(\lambda, \delta, \mu) > 0$ tal que

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^s_{per}} \leq K_2 \|u - v\|_{H^s_{per}} (\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}}).$$

■

A continuación estableceremos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.7. *Suponga $s \geq \frac{5}{2}$, entonces para toda $u_0 \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ existe $T > 0$ que depende solamente de $\|u_0\|_{H^s_{per}}$ tal que el problema (3.1)-(3.2) tiene una única solución que satisface*

$$u \in C([0,T], H^s_{per}[-\pi,\pi]).$$

Además, para todo $0 < T' < T$ existe una vecindad $\mathbb{V}$ de u_0 en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ tal que la correspondencia $\tilde{u}_0 \to \tilde{u}(\cdot)$, que asocia a $\tilde{u}_0$ la solución $\tilde{u}(\cdot)$ de la ecuación (3.1) con la condición inicial $\tilde{u}_0$ es una función Lipschitz de $\mathbb{V}$ en $C([0,T'], H^s_{per}[-\pi,\pi])$.

Demostración. Dado $T > 0$, definamos el espacio $X^s(T) = C([0,T], H^s_{per}[\pi,\pi])$ equipado con la norma dada por

$$\|u\|_{X^s(T)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{H^s_{per}}.$$

Entonces es claro que $X^s(T)$ es un espacio de Banach. Ahora, Sea $B_R(T)$ la bola cerrada de radio R centrada en el origen del espacio $X^s(T)$, esto es

$$B_R(T) = \{u \in X^s(T) \ : \ \|u\|_{X^s(T)} \leq R\}.$$

Fijada $u_0 \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$, definimos el operador

$$\Psi(u(t)) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau,$$

donde $u \in X^s(T)$ y mostremos que la correspondencia $u(t) \to \Psi(u(t))$ envia a $B_R(T)$ en si mismo y es una contracción si R y T son escogidos adecuadamente. En efecto, si $t \in [0,T]$ y $u \in B_R(T)$, entonces usando el Lema 3.1 y el Teorema 3.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t))\|_{H^s_{per}} &\leq \|u_0\|_{H^s_{per}} + K_1 \int_0^T \|u(\tau)\|^2_{H^s_{per}} d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{H^s_{per}} + K_1 R^2 T. \end{aligned}$$

Escogiendo $R = 2\|u_0\|_{H^s_{per}}$ y $T > 0$ tal que

$$4K_1\|u_0\|_{H^s_{per}} T \leq 1, \tag{3.6}$$

obtenemos que

$$\|\Psi(u(t))\|_{H^s_{per}} \leq \|u_0\|_{H^s_{per}}(1 + 4K_1\|u_0\|_{H^s_{per}}T) \leq 2\|u_0\|_{H^s_{per}} = R.$$

De manera que Ψ mapea $B_R(T)$ en si mismo. Probemos ahora que Ψ es una contracción. Si $u, v \in B_R(T)$, entonces de la definición de Ψ tenemos que

$$\Psi(u(t)) - \Psi(v(t)) = \int_0^t S(t-\tau)\left[F(u(\tau)) - F(v(\tau))\right] d\tau.$$

Entonces, usando la afirmación (2) del Teorema 3.6 vemos que para $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u(t)) - \Psi(v(t))\|_{H^s_{per}} &\leq K_2 \int_0^t (\|u(\tau)\|_{H^s_{per}} + \|v(\tau)\|_{H^s_{per}})\|u(\tau) - v(\tau)\|_{H^s_{per}} d\tau \\
&\leq 2K_2 RT\|u - v\|_{X^s(T)} \\
&\leq 4K_2\|u_0\|_{H^s_{per}} T\|u - v\|_{X^s(T)}.
\end{aligned}$$

Ahora escogemos T lo suficiente pequeño para que se cumpla (3.6) y además

$$4K_2\|u_0\|_{H^s_{per}} T \leq \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

De donde concluimos que

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{X^s(T)} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{X^s(T)}.$$

Así Ψ es una contracción, por tanto usando el teorema de punto fijo de Banach tenemos que existe un único punto fijo de Ψ en $B_R(T)$, el cual es una solución de la ecuación integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau. \tag{3.8}$$

Note que si u es solución de esta ecuación integral entonces u satisface el problema (3.1)-(3.2). La unicidad de la solución es consecuencia del siguiente argumento. Sean $u(t)$, $v(t)$ dos soluciones de la ecuación (3.8) con condición inicial u_0 y v_0 respectivamente, satisfaciendo

$$u, v \in C([0, T], H^s_{per}[-\pi, \pi]).$$

Entonces, si $t \in [0,T]$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|_{H^s_{per}} &\leq \|S(t)(u_0-v_0)\|_{H^s_{per}} \\ &\qquad + K_2\int_0^t (\|u(\tau)\|_{H^s_{per}}+\|v(\tau)\|_{H^s_{per}})\|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^s_{per}}d\tau \\ &\leq \|u_0-v_0\|_{H^s_{per}} + 2K_2N\int_0^t \|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^s_{per}}d\tau,\end{aligned}$$

donde asumimos que

$$\|u\|_{X^s(T)}, \|v\|_{X^s(T)} \leq N.$$

Entonces, tomando $K_3 = 2K_2$ y usando la desigualdad de Gronwall, tenemos que para todo $t \in [0,T]$ se safisface

$$\|u(t)-v(t)\|_{H^s_{per}} \leq e^{K_3NT}\|u_0-v_0\|_{H^s_{per}}. \tag{3.9}$$

Ahora, si $u_0 = v_0$ entonces concluimos que $\|u-v\|_{X^s(T)} = 0$, lo cual nos da la unicidad de la solución en el espacio $X^s(T)$. Por otro lado, de la discusión de la existencia de soluciones para el problema (3.1)-(3.2), para $u_0 \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ tenemos garantizada la existencia de un tiempo T de la solución asociada caracterizado por las desigualdades (3.6) y (3.7). Entonces si $0 < T' < T$ definimos

$$\mathbb{V} = \{v_0 \in H^s_{per} \;\; : \;\; \|v_0-u_0\|_{H^s_{per}} < \epsilon\},$$

con $\epsilon = (\frac{1}{T'}-\frac{1}{T})\epsilon'$ y $0 < \epsilon' < \text{mín}\{\frac{1}{4K_1}, \frac{1}{8K_2}\}$. Note que si $v_0 \in \mathbb{V}$,

$$\|v_0\|_{H^s_{per}} \leq \|v_0-u_0\|_{H^s_{per}} + \|u_0\|_{H^s_{per}} \leq \epsilon + \|u_0\|_{H^s_{per}}. \tag{3.10}$$

Por tanto, tenemos que

$$4K_1\|v_0\|_{H^s_{per}}T' \leq 1, \quad 8K_2\|v_0\|_{H^s_{per}}T' \leq 1. \tag{3.11}$$

En efecto, usando (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned}4K_1\|v_0\|_{H^s_{per}} &\leq 4K_1(\epsilon + \|u_0\|_{H^s_{per}}) \\ &\leq 4K_1\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right)\epsilon' + 4K_1\|u_0\|_{H^s_{per}} \\ &\leq 4K_1\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right)\epsilon' + \frac{1}{T} \\ &< \frac{1}{T'}.\end{aligned}$$

Similarmente, usando (3.7)

$$\begin{aligned}
8K_2\|v_0\|_{H^s_{per}} &\leq 8K_2(\epsilon + \|u_0\|_{H^s_{per}}) \\
&\leq 8K_2\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + \frac{1}{T} \\
&< \frac{1}{T'}.
\end{aligned}$$

Entonces de (3.11) concluimos que para cualquier $v_0 \in \mathbb{V}$ existe una única solución $v(t) \in C([0,T'], H^s_{per}[-\pi,\pi])$ de la ecuación (3.1) con condición inicial v_0. Además, $v \in B_R(T')$ con $R = 2\|v_0\|_{H^s_{per}}$. Entonces usando (3.10), para $v_0, w_0 \in \mathbb{V}$ con soluciones asociadas v y w respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{X^s(T)} + \|w\|_{X^s(T)} &\leq 2(\|v_0\|_{H^s_{per}} + \|w_0\|_{H^s_{per}}) \\
&\leq 4(\epsilon + \|u_0\|_s) \\
&\leq 4\left(\frac{1}{4K_1}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{4K_1 T}\right) \\
&\leq \frac{1}{K_1 T'}.
\end{aligned}$$

Entonces usando (3.9) con $N = (K_1T')^{-1}$ obtenemos que para todo $t \in [0,T']$,

$$\|v(t) - w(t)\|_{H^s_{per}} \leq e^{NK_3T'}\|u_0 - w_0\|_{H^s_{per}} \leq C\|v_0 - w_0\|_{H^s_{per}},$$

donde $C = e^{2K_2K_1{}^{-1}}$. Así, la correspondencia $\tilde{u}_0 \to \tilde{u}(\cdot)$, que asocia a $\bar{u}_0$ la solución $\bar{u}(\cdot)$ de la ecuación (3.1) con la condición inicial (3.2) es una función Lipschitz de $\mathbb{V}$ en $C([0,T'], H^s_{per})$, y esto completa la prueba. ∎

Bibliografía

[1] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A.* 227 (1972), 47–78.

[2] J. L. Bona, N. Tzvetkov. Sharp well-posedness results for the BBM equations. *Discret. Contin. Dyn. Syst.* 23 (2009), 1241–1252.

[3] G. M. Coclite, H. Holden, K. H. Karlsen. Well-posedness of higher-order Camassa-Holm equations. *J. of Differential Equations.* 246 (2009), 929–963.

[4] A. Constantin, B Kolev. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle. *Comment. Math. Helv.* 78(4) (2003), 787–804.

[5] A. Montes. The local Cauchy problem for a class of nonlinear dispersive equations. *International Journal of Mathematical Analysis.* 10(23) (2016), 1137-1152.

[6] J. Hammack, H. Segur. The Korteweg-de Vries equation and water waves. II. Comparison with experiments. *J. Fluid Mech.* 65 (1974), 289–313.

[7] D. Korteweg, G. de Vries. On the chance of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* 39 (1895), 422–443.

[8] D. Roumegoux. A Sympletic non-squeezing theorem for BBM equation *Dynamic of PDE.* 10(4) (2010), 289–305.

[9] T. Kato. On the Cauchy problem for the (generalized) Kortewg-de Vries equation. Studies in Applied Mathematics, Vol 8, 1983, 93-128.

[10] B. Zhang. Taylor series expansion for solutions of the Korteweg-de Vries equation with respect to their initial values. *J. of Funtional Analysis*, 1995, 293-324.

[11] N. Zabusky. C. Galvin, Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, *J. Fluid Mech.* 47 (1971), 811–824.

[12] R. Iorio. Fourier Analysis and partial differencial equations. Cambridge university press. 2001.