

ANÁLISIS PARA UN PROBLEMA INVERSO DE
ELECTROENCEFALOGRAFÍA



WILSON ANDRÉS ANACONA MUÑOZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA

2018

ANÁLISIS PARA UN PROBLEMA INVERSO DE
ELECTROENCEFALOGRAFÍA



TRABAJO DE GRADO

En la modalidad investigación, presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático.

WILSON ANDRÉS ANACONA MUÑOZ

DIRECTOR:

Dr. WILLY WILL SIERRA ARROYO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA

2018

Nota de aceptación

Director:

Dr. WILLY WILL SIERRA ARROYO

Jurados:

Dra. Aida Patricia González Nieva

Dr. Alex Manuel Montes Padilla

Fecha de sustentación: 7 de Noviembre de 2018, Popayán.

Notaciones

\mathbb{R}	Campo ordenado de los números reales
\mathbb{N}	Conjunto de enteros positivos
\mathbb{Z}	Conjunto de números enteros
\mathbb{Z}_+	Conjunto de enteros no negativos
\emptyset	Conjunto vacío
\mathbf{x}	Vector en tres dimensiones, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$
\mathbb{Z}_+^n	Conjunto de vectores de dimensión n de enteros no negativos
$\overline{\Omega}$	Adherencia del conjunto Ω
$B_r(\mathbf{x}_0)$	Bola abierta, centrada en \mathbf{x}_0 y de radio $r > 0$
<i>c.t.p</i>	En casi todo punto
Ω	Conjunto abierto, acotado
$\partial\Omega$	Frontera del conjunto Ω
$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	Conjunto de matrices de orden 3
X	Espacio Vectorial sobre \mathbb{R}
X^*	Espacio dual de X
$I_Y _X$	El operador identidad $I : Y \rightarrow Y$, restringido al espacio $X \subset Y$
$X \subset\subset Y$	X esta compactamente contenido en Y
$\ \cdot\ _X$	Norma en el Espacio X
$(\cdot, \cdot)_X$	Producto interior en el espacio vectorial X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto de Dualidad
$ \boldsymbol{\alpha} $	Notación de multi-índice para $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$
\mathbf{n}	Vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$
∇	Gradiente
div	Operador Divergencia
curl	Operador Rotacional
Δ	Operador de Laplace
\mathcal{E} y \mathcal{H}	Campos eléctrico y magnético
\mathcal{J}_e	Densidad de la corriente aplicada
$\boldsymbol{\sigma}$	Conductividad eléctrica
$\delta_{\mathbf{x}_0}$	La distribución delta de Dirac centrada en \mathbf{x}_0
\mathbf{p}_0	Momento dipolar
ϵ	Permitividad eléctrica
μ	Permeabilidad magnética

\int_{Ω}	Integral de Lebesgue
$C^k(\Omega)$	Espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en Ω
$C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones k veces continuamente diferenciables de variable en Ω y valor en \mathbb{R}^n
$C_0^\infty(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω
$L^p(\Omega)$	Espacio L^p
$L^{p^*}(\Omega)$	Espacio dual de $L^p(\Omega)$
$W^{s,p}(\Omega)$	Espacios de Sobolev
$H^{-1}(\Omega)$	Espacio dual de $H_0^1(\Omega)$
\square	Culminación de una demostración.

Índice general

Índice general	V
Introducción	VI
1. Preliminares	1
1.1. Espacios normados y de Banach	1
1.2. Operadores lineales y acotados	2
1.2.1. Funcionales lineales	4
1.2.2. Operadores compactos	5
1.3. Espacios de Hilbert y Teorema de Lax-Milgram	5
1.3.1. Espacios con producto interior	6
1.4. Teoría de las distribuciones	9
1.5. Espacios de Sobolev	11
1.5.1. Espacios L^p	11
1.5.2. Espacios de Sobolev	13
1.5.3. Teorema de la Traza y desigualdades de Sobolev	15
1.5.4. Espacio de Sobolev asociado al operador divergencia	18
2. Existencia y unicidad de la solución del problema directo EEG por el método de sustracción	21
2.1. Modelo estático de las ecuaciones de Maxwell: Problema directo EEG	21
2.2. Formulación débil del problema	24
2.3. Existencia y unicidad	26
3. Análisis del Problema Inverso de EEG	36
3.1. Ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet homogéneas.	36
3.2. Un problema con condiciones de Neumann homogéneas.	40
3.3. Ecuación de Laplace con condiciones de Neumann homogéneas.	43
3.4. Problema Inverso de EEG.	49
Conclusiones y Aportes	53
Bibliografía	54

Introducción

El flujo y el procesamiento de la información ocurren en el cerebro de forma eléctrica y química, por lo que es preciso observar como varían estos procesos a lo largo del tiempo para entender su función. En particular, las técnicas electrofisiológicas se basan en registrar de forma cercana o distante la corriente eléctrica que circula a través de las membranas neuronales, o de corrientes secundarias que se derivan de éstas.

La electroencefalografía (EEG) es una técnica que permite estudiar la actividad cerebral de manera no invasiva y con excelente resolución temporal, del mismo orden que la de los procesos electro-químicos que dan lugar a dicha actividad, es decir del orden de milisegundos. Esta técnica consiste en medir el potencial eléctrico en el cuero cabelludo generado por grupos de neuronas activadas sincrónicamente, denominadas fuentes de actividad cerebral. El comportamiento eléctrico global de la cabeza visto como un sistema y por ende, la relación entre fuentes y potencial eléctrico, obedece a las ecuaciones de Maxwell.

El problema de localización de la actividad eléctrica del cerebro a través de las mediciones obtenidas por EEG es un problema inverso, es decir conocidas las mediciones del campo eléctrico y magnético en la superficie de la cabeza, se requiere determinar la fuente de densidad de corriente que produce dichos campos. Este problema inverso es conocido en la literatura como el *problema inverso EEG* (ver, por ejemplo [19]). Un punto crítico para resolver eficientemente el problema inverso EEG es la selección del método numérico apropiado para resolver el *problema directo EEG*, que consiste en simular los campos eléctrico y magnético generados por ciertos modelos de fuentes de densidad de corriente del cerebro (ver, por ejemplo [15]). Una descripción completa de los modelos usados en problemas de EEG puede ser consultada en [3].

En un trabajo de investigación anterior [5] se estudiaron varias formulaciones variacionales para el conocido como problema directo de EEG basado en el modelo estático de las ecuaciones de Maxwell, el cual, como ya se dijo antes, es requerido para posteriormente estudiar el problema inverso EEG. En el presente trabajo, se pretende abordar el problema inverso EEG, con el propósito de identificar y clasificar los diferentes tipos de fuentes de densidad de corriente para los cuales se obtiene unicidad a partir de una cierta medición dada en la frontera de la cabeza humana. Dado que para resolver el problema inverso EEG, se requiere ser capaz de identificar el tipo de fuente a partir de la medición de alguna característica del campo eléctrico en la superficie de la cabeza, un paso importante es precisamente conocer cuales son aquellas fuentes en las que se garantiza su unicidad, para posteriormente proceder a clasificarlas.

El estudio del modelo estático de ecuaciones de Maxwell en EEG es esencial para proponer el uso de otros modelos más generales a problemas de EEG, tales como el llamado *modelo de corrientes inducidas* (ver [17]). Por esta razón, el trabajo que aquí

se propone se encuentra en el marco del proyecto de investigación titulado *Acople de elementos finitos y elementos de frontera para modelos de corriente inducida: aplicación a E/MEG y a problemas con conductores ferromagnéticos*, proyecto conjunto entre el grupo de Investigación Espacios Funcionales de la Universidad del Cauca y el Grupo de Investigación en matemáticas de la Universidad del Norte, el cual está inscrito en el sistema de investigaciones de la Universidad del Cauca con código ID 3743 y es cofinanciado por COLCIENCIAS.

Adicionalmente, cabe resaltar que los temas que serán tratados en este trabajo no hacen parte del plan de estudios regular del programa de matemáticas, por lo cual se están abordando nuevos conocimientos que pueden servir como base para estudiantes que realicen trabajos futuros tanto en el área del análisis funcional y su aplicación a las Ecuaciones diferenciales parciales como en el análisis numérico de las mismas ecuaciones diferenciales parciales.

El trabajo se encuentra organizado en tres capítulos. El primero de ellos está dedicado a desarrollar los preliminares matemáticos necesarios para abordar el trabajo, principalmente se presentan temas importantes del análisis funcional (Espacios de Banach y de Hilbert), de la Teoría de distribuciones y de la Teoría de Espacios de Sobolev. En el segundo capítulo se presenta la teoría del problema directo de EEG, principalmente se analiza en detalle el llamado Método de Sustracción para abordar este problema. En el último capítulo se estudia del Problema Inverso EEG, más precisamente se realiza el procedimiento de clasificación de fuentes de acuerdo a si estas pueden o no ser determinadas univocamente mediante el conocimiento de cierta medición de la solución del problema directo sobre la frontera. El trabajo se finaliza con una pequeña sección de conclusiones y Aportes.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se pretende motivar al lector con la teoría necesaria para estudiar la solución del problema directo de electroencefalografía (EEG) mediante el método de sustracción para posteriormente estudiar y analizar el problema inverso de electroencefalografía.

En este capítulo iniciaremos con el estudio de los espacios normados y de Banach, seguidamente estudiaremos los operadores lineales, además se estudiarán los espacios de Hilbert y Teorema de Lax-Milgran, posteriormente presentaremos lo relacionado con la Teoría de las distribuciones y en la última sección encontraremos los Espacios de Sobolev.

1.1. Espacios normados y de Banach

En esta sección asumiremos que el lector está familiarizado con el concepto de Espacio normado, es decir con el concepto de Espacio Vectorial sobre el campo \mathbb{K} (que puede ser \mathbb{R} o \mathbb{C}), en el se definen las operaciones $+$: $X \times X \rightarrow X$ (suma vectorial) y \cdot : $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ (multiplicación por escalar) y una norma. En los espacios normados se define una métrica mediante la norma. Estos espacios son de gran importancia en las teorías matemáticas.

En un espacio normado están presentes dos estructuras de naturaleza diversa: una algebraica y una topológica. La estructura algebraica es la de Espacio Vectorial sobre el Cuerpo de los números reales o complejos, y la Topológica se introduce por medio de una norma que generaliza el concepto de módulo de un vector. Esta confluencia da lugar al desarrollo de una hermosa teoría de extraordinaria riqueza. Cuando el Espacio Normado es completo se le llama espacio de Banach. La Teoría de estos espacios fue desarrollada en gran parte por el matemático polaco Stefan Banach en 1932.

Ahora comenzamos dando algunas definiciones sobre los Espacios Vectoriales Normados. Los resultados que presentaremos en esta sección de algunos se realizará la demostración de otros se podrá consultar en el libro de análisis funcional de Kreyszig [12] que es el libro que se ha seguido para esta parte.

Definición 1.1. *Una función $\|\cdot\| : X \times \mathbb{K}$ es una norma sobre X si cumple las siguientes propiedades: para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$*

1. $\|x\| \geq 0$.
2. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

$$3. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$$

$$4. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un espacio X junto con una norma $\|\cdot\|$ se llama espacio vectorial normado y se denota $(X, \|\cdot\|)$. Es importante resaltar que $(X, \|\cdot\|)$ también es un espacio métrico con la métrica definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x, y \in X, \quad (1.1.1)$$

por ende todos los conceptos y definiciones de los espacios métricos valen en los Espacios Normados.

Definición 1.2. Una sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ en un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, se dice que converge si existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x\|_X = 0$$

En el ámbito de los Espacios Normados también hablamos de un Espacio Normado Completo, para lo cual presentamos la definición de sucesión de Cauchy y un criterio para determinar si el Espacio es Completo.

Definición 1.3. Dada una sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ en un espacio normado X , la sucesión es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$ se tiene que

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Claramente toda sucesión convergente es de Cauchy, mientras que el recíproco no es cierto lo cual da pie a la siguiente definición.

Definición 1.4. El espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice completo o de Banach si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

El siguiente Lema nos da una condición suficiente y necesaria para la convergencia de una sucesión de Cauchy.

Lema 1.5. Sea $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$. Entonces $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si ella posee una subsucesión convergente.

1.2. Operadores lineales y acotados

En análisis funcional tratamos con espacios métricos y espacios normados, siendo estos últimos los de más interés en este documento. En el caso de los espacios vectoriales y en particular los espacios normados a las funciones entre Espacios se les conoce como operadores. A la hora de estudiar los operadores son de interés aquellos operadores que conserven las dos operaciones algebraicas de un espacio vectorial. En este sentido presentamos la siguiente definición.

Definición 1.6. Un operador lineal T es una función

$$T : D(T) \rightarrow R(T)$$

donde

1. $D(T)$ y $R(T)$ son Espacios Vectoriales sobre el mismo campo.
2. Para todo $x, y \in D(T)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y), \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x). \end{aligned}$$

Observación 1.7. 1. $D(T)$ denota el dominio de T .

2. $R(T)$ denota el rango de T .

3. Para simplificar la escritura en el análisis funcional se acostumbra a escribir Tx en lugar de $T(x)$.

Definición 1.8. Definimos el kernel de un operador $T : D(T) \rightarrow Y$, simbolizado por $Ker(T)$, como

$$Ker(T) := \{v \in D(T) : T(v) = 0_Y\}.$$

En lo que hemos hablado de operadores no hemos tenido en cuenta el uso de las normas, en lo que sigue haremos uso de ellas para poder definir cuando un operador lineal es acotado y además definir su norma.

Definición 1.9. Sean X, Y espacios normados sobre \mathbb{R} y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Diremos que T es acotado si existe una constante c tal que

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad \forall x \in X. \quad (1.2.1)$$

Observación 1.10. 1. La condición (1.2.1) no implica que el rango de T sea acotado. Por ejemplo: $I : X \rightarrow X$ dado por $I(x) = x$ para todo $x \in X$, satisface $\|Ix\| = \|x\|$ con $c = 1$, pero I no tiene rango acotado

2. Si $B \subset X$ es acotado entonces existe $\rho > 0$ tal que $\|x\| \leq \rho$ para todo $x \in B$, luego si T satisface 1.2.1, entonces

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \leq c\rho \quad \forall x \in B.$$

Así, $T(B) = \{Tx | x \in B\}$ es acotado.

Dados dos espacios normados X y Y se denotará por $\mathcal{L}(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en Y , el cual es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

- $(T + S)x = Tx + Sx$,
- $(\lambda T)x = \lambda Tx$,

donde $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$; $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ son cualquiera. La siguiente definición nos proporciona una norma de un operador en $\mathcal{L}(X, Y)$:

Definición 1.11. Si $T : D(T) \rightarrow Y$ es un operador acotado, se define la norma de T , denotada por $\|T\|$, como:

$$\|T\| := \sup_{\substack{v \in D(T) \\ v \neq 0}} \frac{\|T(v)\|_Y}{\|v\|_X}. \quad (1.2.2)$$

Una herramienta fuerte para poder decidir si un operador lineal es continuo está dada por el siguiente Teorema.

Teorema 1.12. *Sea $T : D(T) \rightarrow Y$ un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. T es continuo,
2. T es acotado.

Demostración. Ver [12, Teorema 2.9-9] □

La ecuación (1.2.2) define una norma en:

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Corolario 1.13. *Sea $T : D(T) \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Entonces:*

1. Si $x_n \rightarrow x$, donde $x_n, x \in D(T)$, implica que $T(x_n) \rightarrow T(x)$.
2. El kernel de T es un subespacio cerrado.

Demostración. Ver [12, Corolario 2.7-10] □

1.2.1. Funcionales lineales

Un funcional f es un operador con dominio un Espacio Vectorial $D(f)$ y codominio el correspondiente cuerpo \mathbb{K} , es decir \mathbb{R} o \mathbb{C} . Denotaremos funcionales con letras minúsculas f, g, \dots , el dominio de f por $D(f)$, el rango por $R(f)$ y el valor de f en un $x \in D(f)$ por $\langle f, x \rangle$. Los funcionales son operadores por lo que se aplican las definiciones anteriores. En particular podemos presentar las siguientes definiciones dado que la mayoría de funcionales que consideraremos son lineales y acotados.

Definición 1.14. *Un funcional lineal f es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial X y rango en el campo escalar \mathbb{K} de X . Esto es*

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{K}$$

donde \mathbb{K} puede ser \mathbb{R} o \mathbb{C}

El conjunto de los funcionales lineales y acotados sobre X es un Espacio Vectorial sobre \mathbb{K} llamado *Espacio Dual* de X , denotado por X' . En X' , definimos la *Norma Dual* del funcional

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_X}.$$

Puede demostrarse (ver [10, capítulo 2]) que X' es un Espacio de Banach con la Norma Dual sin necesidad de que X sea o no un Espacio de Banach.

1.2.2. Operadores compactos

Presentamos una introducción a los operadores lineales compactos en Espacios de Banach y Espacios de Hilbert.

Definición 1.15. Sean X, Y espacios vectoriales sobre \mathbb{R} y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado. T es un operador compacto si la imagen de la bola unitaria bajo T tiene clausura compacta en Y , es decir

$$\overline{T(B_1(0))}$$

es compacta en Y .

Presentamos una caracterización alternativa de los operadores compactos.

Proposición 1.16. Sean X, Y dos espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces T es compacto si y sólo si (Tx_n) tiene una subsucesión convergente siempre que (x_n) sea una sucesión acotada en X .

Observación 1.17. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados tales que $X \subset Y$. Decimos que la inclusión $X \subset Y$ es compacta, si el operador

$$i : X \rightarrow Y$$

definido por

$$i(v) = v \quad \forall v \in X,$$

es compacto. El operador i definido anteriormente es llamado operador inclusión de X en Y .

1.3. Espacios de Hilbert y Teorema de Lax-Milgram

El origen de los espacios de Hilbert, se encuentra sin lugar a duda, en un trabajo de David Hilbert sobre teoría espectral publicado en (1906), la finalidad del mismo no era otra que profundizar un trabajo anterior de Fredholm sobre las ecuaciones integrales. Mas tarde en trabajos de E. Schmit y el propio Frechet presentan métodos geométricos para el estudio del espacio de Hilbert separable, explotando la similitud con la geometría euclidea en dimensión finita.

Dado que en los espacios vectoriales tenemos adición de vectores y multiplicación de vectores por escalar, pero para espacios normados generales se pide poder definir un producto análogo al producto punto usual de vectores de donde se conocen resultados como los siguientes. Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ donde $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$
- $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Dado que este producto se puede extender a espacios vectoriales arbitrarios esto nos conduce a los espacios con producto interno o interior y espacios completos con producto interno o interior, que se conocen como Espacios de Hilbert.

1.3.1. Espacios con producto interior

Definición 1.18. Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un producto interior en X es una función $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que cumple las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $(x + y, z)_X = (x, z)_X + (y, z)_X$.
2. $(x, y)_X = (y, x)_X$.
3. $(\alpha x, y)_X = \alpha (x, y)_X$.
4. $(x, x)_X \geq 0$ y $(x, x)_X = 0$ si y sólo si $x = 0$.

El siguiente resultado nos permite dotar de una estructura de espacio normado a nuestro espacio con producto interno X

Proposición 1.19. Sea $(X, (\cdot, \cdot))$ un espacio con producto interno, entonces

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}},$$

es una norma en X

Demostración. Ver [12, Teorema 3.2-2] □

En estos espacios con producto se verifica la siguiente desigualdad

Proposición 1.20 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Dado un producto interno (\cdot, \cdot) en un espacio vectorial X , se satisface lo siguiente,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demostración. Ver [12, Lema 3.2-1] □

Observación 1.21. ■ Si $X = H$ es completo con la métrica (1.1.1) diremos que $(X, (\cdot, \cdot))$ es un Espacio de Hilbert.

- De ahora en adelante H denotará siempre un Espacio de Hilbert.

Presentamos ahora una caracterización que afirma que una norma en un espacio vectorial X proviene de un producto interno si sólo si dicha norma verifica la siguiente identidad.

Lema 1.22 (Identidad del paralelogramo). Si una norma $\|\cdot\|$ sobre un espacio vectorial X es inducida por algún producto interno en X entonces

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Ver [12, sección 3.1]

Usando la caracterización de continuidad en los espacios métricos y la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos deducir la siguiente proposición.

Proposición 1.23 (Continuidad del producto interior). *Un producto interno (\cdot, \cdot) en un espacio vectorial X es continuo. Esto es si $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$, $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$, $x, y \in X$ son tal que*

$$\begin{aligned} x_m &\rightarrow x \quad \text{en } X, & \text{cuando } m &\rightarrow \infty, \\ y_m &\rightarrow y \quad \text{en } X, & \text{cuando } m &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

entonces

$$(x_m, y_m) \rightarrow (x, y) \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty.$$

Demostración. Ver [12, Teorema 3.2-2] □

En el siguiente teorema de representación se verá que cualquier aplicación lineal y continua de un espacio de Hilbert en \mathbb{R} tiene la forma del producto interior.

Teorema 1.24 (Teorema de representación de Riesz). *Sea $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y acotado. Existe entonces un único $u \in H$ tal que*

$$\langle f, v \rangle = (u, v)_H \quad \forall v \in H$$

y además

$$\|f\|_{H'} = \|u\|_H.$$

Demostración. Ver [23, Teorema 6.8,] □

Observación 1.25. *El Teorema de representación de Riesz induce un operador $\mathcal{R} : H' \rightarrow H$, definido por*

$$\langle f, v \rangle = (\mathcal{R}(f), v)_H \quad \forall v \in H \quad \forall f \in H'.$$

Note que el mismo Teorema de representación de Riesz garantiza

$$\|\mathcal{R}(f)\|_H = \|f\|_{H'} \quad \forall f \in H'.$$

El operador \mathcal{R} es llamado operador de Riesz.

Un espacio vectorial X con producto interno sobre \mathbb{K} , una función $\Phi : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ que es lineal en la primera coordenada y conjugada lineal en la segunda. Tal función se llama forma sesquilineal, ahora ampliaremos la noción de productos internos a espacios vectoriales en un campo arbitrario \mathbb{K} .

Definiremos lo que es una forma bilineal en un espacio de Hilbert y se darán algunos resultados y observaciones acerca de ellas.

Definición 1.26. *Sea $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que B es una forma bilineal sobre H , si para todo $u, v, w \in H$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene:*

1. $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w).$
2. $B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w).$

Se dice además que una forma bilineal B es acotada si existe $c > 0$ tal que

$$|B(v, w)| \leq c \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H.$$

Observación 1.27. La forma bilineal $(\cdot, \cdot)_{H'} : H' \times H' \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(f, g)_{H'} := (\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g))_H \quad (1.3.1)$$

define un producto interior en H' . Además, la norma inducida por este producto interior es precisamente la norma dual. En consecuencia, H' es un espacio de Hilbert con el producto interior (1.3.1).

Definición 1.28. Sea $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que B es definida positiva si

$$B(u, u) = 0 \implies u = 0,$$

y además es H -elíptica o simplemente elíptica, siempre que sea claro cual es el espacio H , si existe $\alpha > 0$ tal que

$$B(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

El análisis funcional es una rama importante de las matemáticas modernas que tiene muchas aplicaciones en campos como el de la teoría de ecuaciones diferenciales. Presentamos ahora un importante teorema de representación del análisis funcional, el teorema de Lax-Milgram también conocido como lema de Lax-Milgram debido al hecho de que fue originalmente presentado como un lema que representa el resultado de ecuaciones diferenciales parciales por Arthur Milgram y Petter Lax en 1954.

Teorema 1.29 (Teorema de Lax-Milgram). Sea $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y elíptica. Para todo $f \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Además,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H'},$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de elipticidad de B .

Demostración. Ver [4, Corolario 5.8] □

Como se puede observar en los resultados anteriores existe una conexión muy fuerte entre un espacio de Hilbert, o de Banach, y su espacio dual. Mas aún, como se verá a continuación dicha conexión permite definir un nuevo tipo de convergencia, diferente a la convergencia inducida por la normal, que llamaremos convergencia débil.

Definición 1.30 (Convergencia débil). Sea X un espacio lineal normado. Una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge débilmente a $x \in X$ si

$$f(x_m) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in X'.$$

Observación 1.31. Por Teorema de representación de Riesz, una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ converge débilmente a $x \in H$ si

$$(x_m, y)_H \rightarrow (x, y)_H \quad \forall y \in H.$$

Culminamos esta sección presentando dos teoremas que involucran la definición de convergencia débil.

Teorema 1.32. *Toda sucesión acotada $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ posee una subsucesión que converge débilmente.*

Demostración. Ver [7, Teorema 5.12] □

Este teorema lo podemos extender a otro tipo de espacios, como lo son los espacios de Banach reflexivos con espacios duales separables.

Teorema 1.33. *Toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo y separable tiene una subsucesión que converge débilmente.*

Demostración. Ver [7, Teorema 5.13] □

1.4. Teoría de las distribuciones

La necesidad de generalizar el concepto de función que da lugar a la teoría de las distribuciones o funciones generalizadas, tiene su origen en la necesidad de los físicos de utilizar derivadas de funciones no derivables. Esta necesidad proviene del hecho de que algunas soluciones físicas de las ecuaciones en derivadas parciales que representan a las ecuaciones fundamentales de la física corresponden a funciones no derivables o con derivadas discontinuas.

En análisis matemático una distribución o función generalizada es un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida.

Definiremos y estudiaremos el espacio de las distribuciones para posteriormente definir los Espacios de Sobolev. Una distribución que usaremos frecuentemente en el estudio del problema electrostático EEG es la distribución delta de Dirac.

En lo que sigue consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

Definición 1.34. *Un multíndice es una n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde cada α_i es un entero no negativo. La longitud de la n -upla se define como $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Para una función $\phi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ escribimos*

$$\partial^{\alpha} \phi := \frac{\partial^{\alpha} \phi}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}.$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$

Definición 1.35. *Considere $\{\phi_m\} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ y $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, decimos que:*

1. $\phi_m \rightarrow 0$ si satisface que:
 - a) Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp } \phi_m \subset K$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
 - b) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tenemos que $\partial^{\alpha} \phi_m \rightarrow 0$ uniformemente en K .
2. Decimos que $\phi_m \rightarrow \phi$ si $(\phi_m - \phi) \rightarrow 0$.

El espacio de las funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ con la convergencia definida anteriormente (def 1.35) es llamado el espacio de las funciones Test y se denota por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.36. Decimos que $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una distribución siempre que:

1. T es un operador lineal.
2. T es continuo en cero en $\mathcal{D}(\Omega)$. Esto es si $\phi_m \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces $T(\phi_m) \rightarrow 0$ en \mathbb{R} .

Cuando decimos que $\phi_m \rightarrow 0$ se esta haciendo referencia a la función nula 0. El espacio de las distribuciones que es el “dual” del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

En el siguiente ejemplo presentamos la distribución delta de Dirac.

Ejemplo 1.37 (La distribución de Dirac). Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Se define $\delta_{\mathbf{x}} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\langle \delta_{\mathbf{x}}, \phi \rangle := \phi(\mathbf{x}) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mostraremos que $\delta_{\mathbf{x}}$ es un funcional lineal y además una distribución. En efecto dados $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{x}}, \alpha\phi_1 + \phi_2 \rangle &= (\alpha\phi_1 + \phi_2)(\mathbf{x}) \\ &= \alpha\phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{x}) \\ &= \alpha \langle \delta_{\mathbf{x}}, \phi_1 \rangle + \langle \delta_{\mathbf{x}}, \phi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Para demostrar que $\delta_{\mathbf{x}}$ es una distribución supongamos que $\phi_m \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ cuando $m \rightarrow \infty$, entonces tenemos que $\phi_m(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, así

$$\langle \delta_{\mathbf{x}}, \phi_m \rangle = \phi_m(\mathbf{x}) \longrightarrow 0 = \langle \delta_{\mathbf{x}}, 0 \rangle, \quad \text{si } m \rightarrow \infty.$$

Con lo cual queda demostrado que $\delta_{\mathbf{x}}$ es una distribución.

En el siguiente ejemplo se mostrará que una función de $L^p(\Omega)$ (ver sección 1.5.1) se puede identificar con una distribución.

Observación 1.38. Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función en $L^1_{loc}\Omega$ (ver [18]). Definimos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_u(\phi) = \int_{\Omega} u\phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (1.4.1)$$

entonces T_u es una distribución.

En efecto, note que el operador T_u es lineal por la linealidad de la integral.

Sea $\phi_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_m \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}\phi_m \subset K$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y para cada $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tenemos que $D^\alpha\phi_m \rightarrow 0$ uniformemente en K así

$$|T_u\phi_m| = \left| \int_{\Omega} u\phi_m \right| \leq \int_K |u| |\phi_m| \leq \sup_{x \in K} |\phi_m(x)| \int_K |u|,$$

lo cual demuestra que $T_u\phi_m \rightarrow 0$ ya que en particular para el multiíndice $\alpha = (0, 0, 0)$ tenemos que $D^0\phi_m = \phi_m \rightarrow 0$ uniformemente en K

Ejemplo 1.39. (La derivada de una Distribución es una Distribución).
 Sea $S(\varphi) := D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$.
 S es lineal en efecto, sean $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 S(\varphi + \beta\psi) &= D^\alpha T(\varphi + \beta\psi) \\
 &= T(D^\alpha(\varphi + \beta\psi)) \\
 &= T(D^\alpha\varphi + \beta D^\alpha\psi) \\
 &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha\varphi) + (-1)^{|\alpha|} \beta T(D^\alpha\psi) \\
 &= D^\alpha T(\varphi) + \beta D^\alpha T(\psi) \\
 &= S(\varphi) + \beta S(\psi)
 \end{aligned}$$

Ahora sea $\phi_n \rightarrow 0$ en \mathcal{D} . Entonces para cada $\alpha \in \mathbb{N}^3$ se tiene que
 $|S(\phi_n)| = |(-1)^{|\alpha|} D^\alpha T(\phi_n)| = |T(D^\alpha \phi_n)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Lo cual prueba que la derivada de una Distribución es también una distribución.

1.5. Espacios de Sobolev

En esta sección estudiaremos los espacios funcionales naturales en los que se formulan de forma débil los problemas asociados a ecuaciones en derivadas parciales. Estos espacios son los llamados espacios de Sobolev y su estudio requiere de conocimientos de teoría de la medida y de la integración de Lebesgue, puesto que dichos espacios están basados en ciertos espacios más simples llamados espacios de Lebesgue o simplemente espacios L^p , que son pieza fundamental dentro de la teoría de integración de Lebesgue.

Esta sección está organizada de la siguiente forma, primero introduciremos los espacios L^p y alguna de sus propiedades, para posteriormente presentar la definición de los espacios de Sobolev y sus correspondientes propiedades. Seguidamente se presentará de forma especial la noción de Traza, que generaliza el valor de una función en la frontera de un conjunto acotado, dicha noción es necesaria para formular problemas de ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera. Además de la noción de Traza estudiaremos las llamadas desigualdades de Sobolev que nos presentan condiciones bajo las cuales las funciones que viven en un cierto espacio de Sobolev, tienen una mejor regularidad. Finalmente introduciremos el espacio de Sobolev asociado al operador divergencia teniendo en cuenta que este espacio tiene un rol muy relevante dentro de las ecuaciones diferenciales parciales que en este trabajo estudiaremos.

En adelante Ω es un conjunto medible y todas las funciones $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que aparezcan serán funciones medibles.

1.5.1. Espacios L^p

Definición 1.40. Definimos el espacio funcional $L^p(\Omega)$ como el conjunto

$$L^p(\Omega) := \left\{ \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |\phi|^p d\mu < \infty \right\}.$$

donde $1 \leq p < \infty$.

De ahí que si $f \in L^p(\Omega)$ definimos la norma de f por:

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\phi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Además se puede probar que $L^p(\Omega)$ con esta norma es un espacio de Banach.

Definición 1.41. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Se dice que f es esencialmente acotado en Ω y se denota $f \in L^\infty(\Omega)$ si y sólo si es finita la expresión

$$\|\phi\|_\infty = \mathbf{essup}_{x \in \Omega} |\phi(x)|.$$

Aquí **essup** denota el supremo esencial.

Observación 1.42. Si $p = 2, L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. En este caso el producto interno

$$(\phi_1, \phi_2)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \phi_1 \phi_2 d\mu \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in L^2(\Omega).$$

Presentamos ahora una serie de resultados cuyas demostraciones pueden ser consultadas en [9] y otras citas bibliográficas

Proposición 1.43. Sea $(\phi \in C_0^\infty(\Omega))$, entonces $\phi \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$

Demostración. Dado que ϕ es continua, ϕ es medible. Además si $K = \mathbf{supp} \phi$, entonces K es compacto y $\phi = 0$ en $\Omega \setminus K$. Luego:

$$\int_{\Omega} |\phi|^p d\mu = \int_K |\phi|^p d\mu + \int_{\Omega \setminus K} |\phi|^p d\mu.$$

Ahora como $\phi = 0$ en $\Omega \setminus K$ entonces tenemos

$$\int_{\Omega} |\phi|^p d\mu = \int_K |\phi|^p d\mu \leq \max_{x \in K} |\phi(x)|^p \int_K d\mu = |K| \max_{x \in K} |\phi(x)|^p < \infty$$

□

Teorema 1.44. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un abierto arbitrario. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Ver [4, Corolario 4.23]

□

Si los exponentes p y q satisfacen $1 \leq p, q < \infty$ y la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

decimos que p y q son exponentes conjugados.

Teorema 1.45. Suponga que $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$ son exponentes conjugados. Si $\phi_1 \in L^p(\Omega)$ y $\phi_2 \in L^q(\Omega)$ entonces $\phi_1 \phi_2 \in L^1(\Omega)$ y

$$\left| \int_{\Omega} \phi_1 \phi_2 d\mu \right| \leq \|\phi_1\|_{L^p(\Omega)} \|\phi_2\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [18, Teorema 1] □

Teorema 1.46. Si $1 < p < \infty$ y $f, g \in L^p(\Omega)$ entonces $f + g \in L^p(\Omega)$ y

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [18, Minkowski's Inequality] □

Proposición 1.47. Supongamos que $\mu(\Omega) < \infty$ y $1 \leq p < q \leq \infty$ entonces

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

y además

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} \leq (\mu(\Omega))^{\frac{q-p}{qp}} \|\phi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall \phi \in L^q(\Omega),$$

Demostración. Ver [18, Corolario 3] □

Teorema 1.48. Sea $\phi \in L^p(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} \phi v d\mu = 0, \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $\phi = 0$ c.t.p. en Ω .

Demostración. Ver [16, Teorema 1.47] □

1.5.2. Espacios de Sobolev

A continuación se desarrolla principalmente la teoría de los espacios de Sobolev que a menudo resultan ser el entorno adecuado para aplicar ideas del análisis funcional para obtener información sobre soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Estos espacios reciben su nombre del matemático ruso Sergei Sobolev quien los presentó en los años treinta.

Para estudiar este tipo de espacios tendremos en cuenta el concepto de derivada débil (distribucional).

Lema 1.49. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $v \in L^2(\Omega)$. Para $i = 1, 2, 3$, existe a lo más una función $w_i \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} w_i \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.5.1)$$

Demostración. Supongamos que existen w_i y \tilde{w}_i en $L^2(\Omega)$ tales que satisfacen la ecuación 1.5.1, entonces

$$- \int_{\Omega} w_i \phi = - \int_{\Omega} \tilde{w}_i \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

de ahí que

$$\int_{\Omega} (w_i - \tilde{w}_i) \phi = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

y así, por Teorema 1.48

$$w_i - \tilde{w}_i = 0 \quad c.t.p$$

de donde

$$w_i = \tilde{w}_i \in L^2(\Omega)$$

□

Definición 1.50. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $v \in L^2(\Omega)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Si existe $w_i \in L^2(\Omega)$ tal que (1.5.1) se verifica, diremos w_i es la i -ésima derivada débil de v y escribimos

$$w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Observación 1.51. Sea $v \in L^2(\Omega)$. Puesto que Ω es acotado entonces $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y así por 1.38 podemos identificar a v como una distribución. Notamos que

$$\left\langle v, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle := \int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi = - \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi \right\rangle.$$

Concluyendo así que la derivada débil y la derivada distribucional coinciden, siempre que la primera de estas derivadas exista.

Análogamente a como se definió la derivada débil de primer orden, se pueden definir las derivadas débiles de orden superior.

Más precisamente, si $v \in L^2(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_0^3$, entonces

$$w = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}},$$

se define como el único $w \in L^2(\Omega)$ (siempre que exista) que cumple

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi d\mu}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A continuación se presenta la definición de Espacios de Sobolev.

Definición 1.52. Espacio de Sobolev

Sea $k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es definido por,

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{para todo } |\alpha| \leq k \right\}$$

Observación 1.53. Si $p = 2$ escribimos

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

Utilizamos la letra H dado que se puede probar que $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. Note que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ y notamos por $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$. Donde $W_0^{k,2}(\Omega)$ denota la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$

Al espacio $W^{k,p}(\Omega)$ se le asocia la norma

$$\|\Phi\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \phi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

y la seminorma es

$$|\phi|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \phi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.54. Para $k \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [6, Teorema 2] □

Definición 1.55. El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está definido como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

Denotaremos por $H^{-k}(\Omega)$ al espacio dual de $H_0^k(\Omega)$ esto es

$$H^{-k}(\Omega) = (H_0^k(\Omega))'.$$

Con la norma dual definida por

$$\|\phi_1\|_{H^{-k}(\Omega)} := \sup_{\substack{\phi_2 \in H_0^k(\Omega) \\ \phi_2 \neq 0}} \frac{|\langle \phi_1, \phi_2 \rangle|}{\|\phi_2\|_{H^k(\Omega)}}.$$

Observación 1.56. $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$

1.5.3. Teorema de la Traza y desigualdades de Sobolev

Ahora se discutirá la posibilidad de asignar valores a lo largo de $\partial\Omega$ para una función $u \in H^1(\Omega)$ bajo el supuesto que $\partial\Omega$ es de clase C^1 .

Dado que $\partial\Omega$ tiene medida 0 en \mathbb{R}^3 , no tiene sentido en primera instancia, hablar de valores de u en $\partial\Omega$. Para solucionar este problema haremos uso de una herramienta que la proporciona el Teorema de la Traza.

Comenzamos definiendo el espacio funcional $L^p(\partial\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Definición 1.57. Sea $1 \leq p < \infty$. Se define $L^p(\partial\Omega)$ como

$$L^p(\partial\Omega) := \left\{ \phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\partial\Omega} |\phi|^p d\mu < \infty \right\}.$$

$L^p(\partial\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\phi\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |\phi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cuando $p = 2$ se tiene que $L^p(\partial\Omega)$ es un espacio de Hilbert. En lo que sigue se exige la condición de que $\partial\Omega$ sea de clase C^1 . Para ello presentamos la siguiente definición.

Definición 1.58. La frontera $\partial\Omega$ de un dominio acotado Ω es de clase C^1 si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un conjunto abierto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$ con $x \in \mathcal{O}$ y un sistema de coordenadas ortogonales $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ que tiene las siguientes propiedades. Existe un vector $\alpha \in \mathbb{R}^3$ con

$$\mathcal{O} := \{ \zeta \mid -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j, 1 \leq j \leq 3 \}$$

y una función de clase C^1 ψ definida en

$$\mathcal{O}' := \{ \zeta' \in \mathbb{R}^2 \mid -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j, 1 \leq j \leq 2 \},$$

con $|\psi(\zeta')| \leq \alpha_3/2$ para todo $\zeta' \in \mathcal{O}'$ tal que

$$\Omega \cap \mathcal{O} := \{ \zeta = (\zeta', \zeta_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \zeta_3 < \psi(\zeta'), \zeta' \in \mathcal{O}' \}$$

y

$$\partial\Omega \cap \mathcal{O} := \{ \zeta = (\zeta', \zeta_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \zeta_3 = \psi(\zeta'), \zeta' \in \mathcal{O}' \}.$$

Diremos simplemente que el dominio Ω es Lipschitz cuando la frontera sea Lipschitz continua.

Teorema 1.59 (Teorema de la traza). *Sea Ω acotado y con $\partial\Omega \in C^1$. Entonces existe un operador lineal acotado*

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega),$$

tal que

1. $\gamma_0(\phi) = \phi|_{\partial\Omega}$, si $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
2. $\|\gamma_0(\phi)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|\phi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para cada $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$, donde la constante c sólo depende de p y Ω .

Demostración. Ver [6, Teorema 1]. □

Al operador lineal $\gamma_0(\phi)$ lo llamaremos la traza de ϕ en $\partial\Omega$

Observación 1.60. *El rango de la función traza es denso en $L^2(\partial\Omega)$ esto es, el espacio*

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \{ \gamma_0(\phi) : \phi \in H^1(\Omega) \}$$

es denso en $L^2(\partial\Omega)$

Teorema 1.61 (Traza cero para funciones en $W_0^{1,p}$). *Asumamos que Ω es acotado y que $\partial\Omega$ es C^1 . Supongamos además que $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces*

$$\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si, y sólo si, } \gamma_0(\phi) = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Demostración. Ver [6, Teorema 2]. □

El teorema de la Traza permite generalizar las fórmulas de Green para funciones de $H^1(\Omega)$.

Teorema 1.62 (Integración por partes). *Sea Ω abierto-acotado, tal que $\partial\Omega$ de clase C^1 . Si $\phi_1, \phi_2 \in H^1(\Omega)$, entonces,*

$$\int_{\Omega} \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} d\mu + \int_{\partial\Omega} \phi_1 \phi_2 \nu_i d\mu \quad i = 1, 2, 3$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

Demostración. Ver [6, Apendice C]. □

Observación 1.63. *La integral*

$$\int_{\partial\Omega} \phi_1 \phi_2 \nu, \quad (\star)$$

en la igualdad anterior realmente es

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_0(\phi_1) \gamma_0(\phi_2) \nu. \quad (\star\star)$$

De ahora en adelante siempre que aparezcan integrales sobre la frontera $\partial\Omega$ se usará la escritura (\star) en lugar de $(\star\star)$.

Presentamos ahora la generalización de las identidades de Green, que son un conjunto de igualdades en el cálculo vectorial, nombradas así en honor al matemático George Green, el mismo que descubrió el teorema de Green.

Teorema 1.64. *Sea Ω abierto-acotado de clase C^1 . Si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$ entonces*

1. *Primera identidad de Green*

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, d\mu = - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) \, d\mu + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dA.$$

2. *Segunda identidad de Green*

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \, dA.$$

Demostración. Ver [14, Corolario 3.20]. □

Teorema 1.65 (Desigualdades de Sobolev). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado y abierto, con $\partial\Omega \in C^1$. Asumamos que $\phi \in W^{k,p}(\Omega)$:*

1. *Si $s < \frac{n}{p}$, entonces $\phi \in L^q(\Omega)$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$, y además*

$$\|\phi\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|\phi\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

donde la constante c depende sólo de s, p, n y Ω .

2. *Si $s \in \mathbb{Z}$ y $s > \frac{n}{p}$, entonces $\phi \in C^{s - [\frac{n}{p}] - 1}(\bar{\Omega})$. Además,*

$$\|\phi\|_{C^{s - [\frac{n}{p}] - 1}(\bar{\Omega})} \leq c \|\phi\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

donde la constante c depende sólo de s, p, n y Ω .

Demostración. Ver [6, Teorema 6] □

Definición 1.66. *Se define el promedio de una función $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$\bar{\phi} := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \phi \, d\mu$$

El siguiente resultado es importante para mostrar la equivalencia entre la norma de $H^1(\Omega)$ y la seminorma

$$\|v\|_{(L^2(\Omega))^3} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2}$$

en $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.67 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, acotado y conexo, con frontera $\partial\Omega \in C^1$. Supongamos que $p = 2$. Entonces existe una constante c , que depende sólo de Ω tal que*

$$\|\phi - \bar{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla\phi\|_{(L^2(\Omega))^3},$$

para cada función $\phi \in W^{1,2}(\Omega)$, donde $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right)$.

Demostración. Ver [6, Teorema 1] □

1.5.4. Espacio de Sobolev asociado al operador divergencia

Ahora se presenta un espacio de Sobolev, especial el cual se relaciona con el operador divergencia y tiene la propiedad de ser un espacio de Hilbert

Definición 1.68. *El operador divergencia se notará por div y se define como:*

$$\begin{aligned} \text{div} : \left[\begin{array}{l} (\mathcal{D}(\Omega))' \\ \phi \end{array} \right]^3 &\longrightarrow \begin{array}{l} (\mathcal{D}(\Omega))' \\ \text{div } \phi, \end{array} \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

donde

$$\text{div } \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi_i}{\partial x_i}.$$

Aquí las derivadas son entendidas en el sentido distribucional.

Definición 1.69. *El operador rotacional notado por \mathbf{curl} se define como*

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} : \left[\begin{array}{l} (\mathcal{D}(\Omega))' \\ \phi \end{array} \right]^3 &\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathcal{D}(\Omega))' \\ \mathbf{curl } \phi, \end{array} \right]^3 \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

donde

$$\mathbf{curl } \phi := \left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \right).$$

Las derivadas también son entendidas en el sentido distribucional.

A continuación se establecen algunos resultados concernientes al espacio de funciones con divergencia cuadrado integrable.

El espacio de funciones con divergencia cuadrado integrable se denota por $H(\text{div}; \Omega)$ y se define a continuación.

Definición 1.70. *Para $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y acotado, se define el espacio*

$$H(\text{div}; \Omega) := \{ \phi \in (L^2(\Omega))^3 \mid \text{div } \phi \in L^2(\Omega) \}.$$

Dotado de la norma

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} = \left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

A este espacio le asociamos el producto interno

$$(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)_{H(\operatorname{div};\Omega)} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)_{(L^2(\Omega))^3} + (\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}_1, \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}_2)_{L^2(\Omega)}.$$

Con el cual puede ser probado que $H(\operatorname{div};\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Presentamos ahora unas relaciones básicas entre los operadores divergencia y rotacional

Teorema 1.71. *Sea Ω un dominio Lipschitz en \mathbb{R}^3 y supongamos que $\boldsymbol{\phi} \in (L^2(\Omega))^3$. Entonces $\operatorname{curl} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ en Ω si, y sólo si, existe un campo escalar $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{\phi} = \nabla u$ y u es único salvo constantes aditivas.*

Demostración. Ver [14, Teorema 3.37] □

Teorema 1.72. *Sea Ω un dominio Lipschitz en \mathbb{R}^3 . Entonces*

$$H(\operatorname{div};\Omega) = \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^3}^{\|\cdot\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}}.$$

Demostración. Ver [14, Teorema 3.22]. □

El siguiente teorema muestra cómo funciones en $H(\operatorname{div};\Omega)$ admiten un tipo de traza en $\partial\Omega$. Para una función $\boldsymbol{\phi} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$, el operador traza normal es definido de la manera clásica $\gamma_{\mathbf{n}} : (C^\infty(\overline{\Omega}))^3 \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ como

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\phi}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}, \tag{1.5.4}$$

donde \mathbf{n} es un vector normal unitario.

Teorema 1.73. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio Lipschitz, con vector normal exterior unitario \mathbf{n} . Entonces:*

1. *La función $\gamma_{\mathbf{n}}$ definida en (1.5.4) en $(C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ puede ser extendida por continuidad a una función continua $\gamma_{\mathbf{n}}$ de $H(\operatorname{div};\Omega)$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.*
2. *El teorema de Green se tiene para funciones $\boldsymbol{\phi} \in H(\operatorname{div};\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$, esto es*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \nabla u + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}u) = \int_{\partial\Omega} u \gamma_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}).$$

Demostración. Ver [14, Teorema 3.24]. □

Teorema 1.74. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio acotado Lipschitz. Supongamos que existen $K_1, K_2 \subseteq \Omega$ dominios Lipschitz, tales que*

$$\Omega = \operatorname{int}(K_1 \cup K_2 \cup \Sigma),$$

donde

$$\Sigma := \partial K_1 \cap \partial K_2,$$

es una superficie. Sea $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ en $(L^2(\Omega))^3$. Entonces

$$\operatorname{div} \phi = 0 \quad \text{en } \Omega$$

si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \phi &= 0 \quad \text{en } K_1, \\ \operatorname{div} \phi &= 0 \quad \text{en } K_2, \\ \phi|_{K_1} \cdot \nu &= \phi|_{K_2} \cdot \nu \quad \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

donde ν es el vector normal unitario a $\partial\Omega$.

Demostración. Ver [14, Lema 5.3]. □

Definición 1.75. El espacio $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ es definido como la clausura de las funciones $(C_0^\infty(\Omega))^3$ en la norma de $H(\operatorname{div}; \Omega)$, es decir,

$$H_0(\operatorname{div}; \Omega) := \overline{(C_0^\infty(\Omega))^3}^{\|\cdot\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}}.$$

Teorema 1.76. Sea Ω un dominio acotado Lipschitz en \mathbb{R}^3 . Entonces

$$H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{\phi \in H(\operatorname{div}; \Omega) | \gamma_{\mathbf{n}}(\phi) = 0\}.$$

Demostración. Ver [14, Teorema 3.25]. □

Capítulo 2

Existencia y unicidad de la solución del problema directo EEG por el método de sustracción

2.1. Modelo estático de las ecuaciones de Maxwell: Problema directo EEG



Figura 2.1: Distribución de sensores para EEG. Imagen tomada de [17].

La electroencefalografía es una de las técnicas electrodiagnósticas de uso más extendido en la práctica médica. Consiste en el registro de la actividad eléctrica del cerebro mediante electrodos aplicados sobre el cuero cabelludo. Estos electrodos se colocan sobre las zonas correspondientes a las diferentes áreas del cerebro para así detectar y registrar patrones de actividad eléctrica y verificar la presencia de anomalías. En la actualidad y por su facilidad de uso y colocación se utilizan generalmente gorros de electrodos, que están constituidos por una malla elástica, en la cual están insertados electrodos de plata clorurada. Cada electrodo posee un orificio por el que se introduce un gel conductor que

facilita el contacto con el cuero cabelludo.

El estudio de la actividad electromagnética del cerebro hace parte de la rama de la ingeniería, basada en biotecnología, conocida como ingeniería biomédica. En EEG se miden las diferencias de potencial eléctrico entre pares de electrodos colocados en la superficie de la cabeza: en la figura 2.1 se muestra una capa elástica colocada en la cabeza de una persona, en la cual se han fijado 126 electrodos.

El problema de localización de la actividad eléctrica del cerebro a través de las mediciones obtenidas por EEG es un problema inverso, es decir conocidas las mediciones del campo eléctrico en la superficie de la cabeza, se requiere determinar la fuente de densidad de corriente que produce dichos campos. Este problema inverso es conocido en la literatura como el problema inverso EEG (ver, por ejemplo [19]).

En esta sección se estudiara primero el problema directo de EEG que consiste en suponer un tipo de fuente y a partir de ello se calcula el campo eléctrico y magnético. Para estudiar el problema directo de EEG se hará uso del modelo estático de las ecuaciones de Maxwell. En nuestro caso la fuente corresponde a un foco epiléptico¹, cuya representación matemática se realiza por medio de las funciones generalizadas o distribuciones. Mas precisamente un foco epiléptico centrado en el punto x_0 (foco) y con momento dipolar \mathbf{p}_0 (dipolo), se representa como

$$\mathcal{J}_e = \mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}, \quad (2.1.1)$$

donde $\delta_{\mathbf{x}_0}$ es la distribución delta de Dirac centrada en \mathbf{x}_0 .

Ya establecido el modelo de fuente a usar, precisamos el modelo estático de las ecuaciones de Maxwell, cuyo punto de partida es el sistema (completo) de Ecuaciones de Maxwell dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} \mathcal{H} - \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}_e, \\ \mathbf{curl} \mathcal{E} + \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{div}(\mu \mathcal{H}) &= 0, \\ \mathbf{div} \mathcal{E} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

donde \mathcal{E} y \mathcal{H} son respectivamente los campos eléctrico y magnético, y \mathcal{J}_e es la densidad de la corriente aplicada. Además, ϵ , μ y σ son funciones conocidas (están dadas por las condiciones del medio) que representan los parámetros físicos llamados permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica. Donde ϵ , μ son funciones reales y σ es una función matricial.

Para obtener el modelo estático de las ecuaciones de Maxwell supondremos que los campos no varían con el tiempo, esto es haciendo nulas las derivadas temporales de (2.1.2), obteniendo el siguiente sistema:

¹La epilepsia es un trastorno cerebral crónico que se caracteriza por la repetición de crisis debidas a una descarga excesiva de las neuronas cerebrales (crisis epiléptica), y que suelen asociarse a otros síntomas. Las crisis epilépticas se deben a cambios físicos que se producen en las neuronas (células cerebrales). Estos cambios pueden afectar a funciones como el movimiento o el comportamiento. También pueden afectar al nivel de conciencia (la noción de lo que sucede alrededor de uno). Los cambios normalmente duran solo unos segundos o unos minutos, después la crisis finaliza y el cerebro vuelve a funcionar normalmente.

$$\begin{aligned}
\mathbf{curl} \mathcal{H} &= \boldsymbol{\sigma} \mathcal{E} + \mathcal{J}_e, \\
\mathbf{curl} \mathcal{E} &= \mathbf{0}, \\
\operatorname{div}(\boldsymbol{\mu} \mathcal{H}) &= 0, \\
\operatorname{div} \mathcal{E} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

El modelo estático de las ecuaciones de Maxwell se consideran generalmente en todo \mathbb{R}^3 pero nuestro problema, las consideraremos en un dominio acotado \mathcal{D} . Puesto que $\operatorname{div}(\mathbf{curl} F) = 0$ para toda F de clase C^2 (ver [24]), la primera ecuación de (2.1.3) implica que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathcal{E} + \mathcal{J}_e) = 0. \tag{2.1.4}$$

Además el hecho de que $\mathbf{curl} \mathcal{E} = 0$ en \mathcal{D} permite introducir un potencial escalar u tal que

$$\mathcal{E} = -\nabla u \quad \text{en } \mathcal{D}.$$

A partir de esto y la linealidad del operador divergencia se tiene que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = \operatorname{div} \mathcal{J}_e \quad \text{en } \mathcal{D}. \tag{2.1.5}$$

Como en la gran mayoría de problemas físicos, la conductividad $\boldsymbol{\sigma}$ se anula en el exterior de una región Ω la cual está totalmente contenida en \mathcal{D} (en el caso de EEG se asume que Ω es la cabeza humana), suponemos además que $\operatorname{supp} \mathcal{J}_e \subseteq \Omega$.

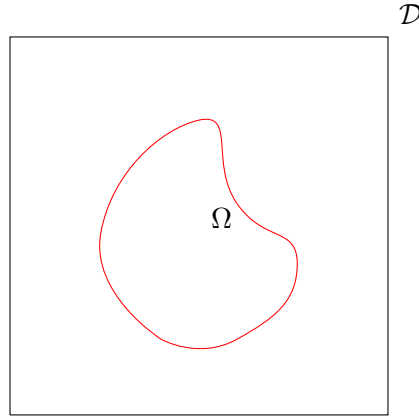


Figura 2.2: Representación en 2D del dominio acotado \mathcal{D} , donde Ω representa el dominio conductor, que en nuestro caso es la cabeza humana

Por propiedades del operador divergencia la ecuación (2.1.5) es equivalente a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[(\boldsymbol{\sigma} \nabla u - \mathcal{J}_e)] &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\
\operatorname{div}[(\boldsymbol{\sigma} \nabla u - \mathcal{J}_e)] &= 0 \quad \text{en } \mathcal{D} \setminus \overline{\Omega}, \\
(\boldsymbol{\sigma} \nabla u - \mathcal{J}_e) \cdot \mathbf{n} &= (\boldsymbol{\sigma} \nabla u - \mathcal{J}_e) \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

Puesto que $\boldsymbol{\sigma} = 0$ en Ω^c y $\text{supp } \mathcal{J}_e$ está contenido en Ω , entonces (2.1.5) puede reescribirse como sigue

$$\begin{cases} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla u) = \text{div } \mathcal{J}_e & \text{en } \Omega, \\ (\boldsymbol{\sigma}\nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como se mencionó anteriormente la fuente es un dipolo de corriente, es decir, \mathcal{J}_e es de la forma

$$\mathcal{J}_e = \mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}.$$

Por lo tanto tenemos que el problema directo EEG consiste en: Hallar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla u) = \text{div}(\mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}) & \text{en } \Omega, \\ (\boldsymbol{\sigma}\nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

La notación $(\boldsymbol{\sigma}\nabla u) \cdot \mathbf{n}$, hace referencia al producto interior usual de vectores en \mathbb{R}^3 .

La selección del método numérico para resolver (2.1.7) es esencial para el problema inverso EEG y dado que (2.1.7) es un problema tipo Poisson (se obtiene un problema de la forma $\Delta u = g$ si $\boldsymbol{\sigma}$ es constante), el método de elementos finitos es una buena alternativa. Para poder aplicar este método es necesario obtener formulaciones débiles de (2.1.7), que se obtendrá a partir del llamado método de sustracción y su respectiva solución.

En este método el potencial eléctrico u que es solución de (2.1.7) se escribirá como la suma de dos potenciales: un potencial de singularidad u_0 y un potencial de corrección \hat{u} , es decir

$$u = u_0 + \hat{u},$$

donde el potencial de singularidad se define como la solución para un dipolo con conductividad $\boldsymbol{\sigma}_0$ constante. Para mostrar la existencia y unicidad del potencial de corrección usaremos el potencial de singularidad, aplicaremos la teoría de elementos finitos y así quedará demostrada la existencia y unicidad del potencial total u .

Por lo visto anteriormente el problema directo EEG consiste en: Hallar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{cases} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla u) = \text{div}(\mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}) & \text{en } \Omega, \\ (\boldsymbol{\sigma}\nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1.8)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la conductividad eléctrica, \mathbf{p}_0 es el momento dipolar, $\delta_{\mathbf{x}_0}$ es la distribución delta de Dirac centrada en \mathbf{x}_0 y \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

2.2. Formulación débil del problema

Para el planteamiento y solución de la formulación débil del problema directo EEG por el método de sustracción debemos tener en cuenta algunas consideraciones que se plantean en Wolters e.t. al ([22]). Supongamos que existe $r_0 > 0$ tal que la conductividad $\boldsymbol{\sigma}$ es constante en $B_{r_0}(\mathbf{x}_0) \subsetneq \Omega$, esto es existe una matriz constante $\boldsymbol{\sigma}_0$ tal que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_{r_0}(\mathbf{x}_0).$$

Empecemos considerando el problema de Poisson que se obtiene reemplazando $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ en la primera ecuación de (2.1.8), esto es: hallar $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_0 \nabla u_0) = \operatorname{div}(\mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}) \quad \text{en } \Omega. \quad (2.2.1)$$

El caso de interes es cuando la conductividad es homogénea e isotrópica², o sea, de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \sigma_0 I_3, \quad \sigma_0 \in \mathbb{R},$$

donde I_3 representa la matriz identidad de tamaño 3×3 . A partir de (2.2.1) obtenemos el problema de Poisson: Hallar $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta u_0 = \operatorname{div}(\mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}) / \sigma_0. \quad (2.2.2)$$

Este problema posee solución única (ver Sarvas [19]), la cual es de la forma

$$u_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \frac{\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.2.3)$$

Como podemos observar u_0 tiene una singularidad en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, pero es una función suave en cualquier otro punto (esto es, $u_0 \in C^\infty(\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\})$).

En adelante asumimos que $\boldsymbol{\sigma}$ es una matriz simétrica y definida positiva, cuyas entradas σ_{ij} pertenecen a $L^\infty(\Omega)$, y son tal que existen constante positivas σ_{ij}^{\min} y σ_{ij}^{\max} que verifican

$$0 < \sigma_{ij}^{\min} \leq \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \leq \sigma_{ij}^{\max} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

y que $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$. En particular

$$0 < \sigma_{ij}^{\min} \leq \sigma_0(\mathbf{x}) \leq \sigma_{ij}^{\max}.$$

Ahora, supongamos que $\partial\Omega$ es de clase C^1 , y consideramos la nueva variable $\hat{u} = u - u_0$. Reemplazando en la primera ecuación de (2.1.8) y usando (2.2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) &= \operatorname{div}(\mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla u_0) \\ &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_0 \nabla u_0) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla u_0) \\ &= \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}) \nabla u_0). \end{aligned}$$

Así,

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) = \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \nabla u_0) \quad \text{en } \Omega.$$

De la segunda ecuación de (2.1.8) tenemos

$$(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) \cdot \mathbf{n} = -(\boldsymbol{\sigma} \nabla u_0) \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \partial\Omega.$$

De este modo, obtenemos el problema elíptico: Hallar $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

²En física, la isotropía, es la característica de los cuerpos cuyas propiedades físicas no dependen de la dirección en que son examinadas.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) = f & \text{en } \Omega, \\ (\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) \cdot \mathbf{n} = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

donde

$$f := \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)\nabla u_0), \quad g := -(\boldsymbol{\sigma}\nabla u_0) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.2.5)$$

Note que $f \in L^2(\Omega)$. En efecto, si $\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$ entonces

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3}), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \text{en } B_{r_0}(\mathbf{x}_0).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^2 &= \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\nabla u_0)|^2 \\ &= \int_{\overline{\Omega} \setminus B_{r_0}(\mathbf{x}_0)} |\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\nabla u_0)|^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

puesto que $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus B_{r_0}(\mathbf{x}_0))$.

Por otra parte, observamos que si $\boldsymbol{\phi} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ entonces $\gamma_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) := \boldsymbol{\phi}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}$ (donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$) lo identificamos como un elemento de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, definiendo

$$\langle \gamma_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}), u \rangle := \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}) u \quad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Por tanto, sabiendo que $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus B_{r_0}(\mathbf{x}_0))$, se tiene que

$$g = -(\boldsymbol{\sigma}\nabla u_0) \cdot \mathbf{n} = \gamma_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\sigma}\nabla u_0) \in H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

2.3. Existencia y unicidad

Las ecuaciones de (2.2.4) forman un problema elíptico, por lo cual para analizar la existencia y unicidad de la solución obtenemos su formulación débil (también llamada formulación o problema variacional) y así poder aplicar el Teorema de Lax-Milgram. La formulación débil (2.2.4) la obtendremos de la manera usual. Multiplicando la primera ecuación de (2.2.4) por $v \in H^1(\Omega)$, integrando sobre Ω y haciendo uso del teorema de integración por partes tenemos:

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u})v = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u} \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) \cdot \mathbf{n}v = \int_{\Omega} fv,$$

De ahí que, usando la condición de frontera de (2.2.4) obtenemos

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} fv + \int_{\partial\Omega} gv.$$

El problema variacional correspondiente es: Hallar $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.3.1)$$

Antes de analizar la existencia y unicidad de la solución de este problema, verifiquemos la condición de compatibilidad de los datos esto es

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0, \quad (2.3.2)$$

para garantizar la buena definición del problema (ver [11, sección 3.2.2.]). En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g &= \int_{\Omega} \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \nabla u_0) - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \nabla u_0) \cdot \mathbf{n} \\ &= \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \nabla u_0) \cdot \mathbf{n} - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \nabla u_0) \cdot \mathbf{n} \\ &= - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_0 \nabla u_0) \cdot \mathbf{n} \\ &= -\sigma_0 \int_{\partial\Omega} \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} \\ &= -\sigma_0 \int_{\Omega} \Delta u_0 \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}) \\ &= - \langle \operatorname{div}(\mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}), 1 \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}_0 \delta_{\mathbf{x}_0}, \operatorname{div} 1 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación (2.2.2) y que σ_0 es constante.

Para poder mostrar existencia y unicidad del potencial eléctrico \hat{u} , introducimos el siguiente subespacio de $H^1(\Omega)$, que es necesario para garantizar la unicidad de la solución,

$$H_*^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v = 0 \right\},$$

con la norma de $H^1(\Omega)$.

Proposición 2.1. *Se define el funcional $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$F(u) = \int_{\Omega} u, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Entonces el funcional F es lineal y continuo.

Demostración. El hecho de que F es lineal, se sigue de la linealidad de la integral.

Para la continuidad del operador F , es suficiente verificar que F es acotado. En efecto, sea $u \in H^1(\Omega)$, de ahí que

$$\begin{aligned} |F(u)| &\leq \int_{\Omega} |u|, \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} (\mu(\Omega))^{1/2}, \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} (\mu(\Omega))^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego, F es acotado y por tanto continuo. \square

Por otro lado, dado que

$$H_*^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : F(u) = 0\},$$

tenemos

$$H_*^1(\Omega) = \text{Ker}(F).$$

Como F es lineal y continuo, entonces $\text{Ker}(F)$ es cerrado y por consiguiente $H_*^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$.

A continuación probaremos algunos teoremas necesarios para mostrar la existencia y unicidad de nuestro problema variacional.

Teorema 2.2 (Variante de la desigualdad de Friedrichs). *Sean Ω un dominio acotado y $f : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo, con $f(1) = 1$. Entonces existe una constante $c = c(\Omega)$ tal que para todo $u \in H^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c(|f(u)| + |u|_1). \quad (2.3.3)$$

Demostración. Dado que para $u = 0$, la desigualdad se verifica. Por contradicción, suponemos que para todo $c > 0$, existe $u_c \neq 0 \in H^1(\Omega)$ de modo que:

$$\|u_c\|_{L^2(\Omega)} > c(|f(u_c)| + |u_c|_1).$$

En vista de que la desigualdad anterior se verifica para todo $c > 0$, en particular, se tendrá que para $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $u_n \in H^1(\Omega)$:

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n(|f(u_n)| + |u_n|_1). \quad (2.3.4)$$

Para

$$w_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}},$$

obtenemos que,

$$\begin{aligned} |f(w_n)| &= \left| f\left(\frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} u_n\right) \right|, \\ &= \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |f(u_n)|, \end{aligned}$$

entonces resulta que

$$|f(u_n)| = \|u_n\|_{L^2(\Omega)} |f(w_n)|.$$

Además,

$$\begin{aligned}
|w_n|_1 &= \|\nabla w_n\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \left\| \nabla \left(\frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} u_n \right) \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \left\| \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \nabla u_n \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \|\nabla u_n\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |u_n|_1,
\end{aligned}$$

de donde

$$|u_n|_1 = \|u_n\|_{L^2(\Omega)} |w_n|_1.$$

Por tanto, de (2.3.4) se tiene que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n \left(\|u_n\|_{L^2(\Omega)} |f(w_n)| + \|u_n\|_{L^2(\Omega)} |w_n|_1 \right),$$

entonces

$$1 > n (|f(w_n)| + |w_n|_1),$$

donde

$$\|w_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{y} \quad (|f(w_n)| + |w_n|_1) < \frac{1}{n}. \quad (2.3.5)$$

por otro parte,

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{H^1(\Omega)} &= \|w_n\|_{L^2(\Omega)} + |w_n|_1, \\
&= 1 + |w_n|_1 \\
&< 1 + \frac{1}{n}, \\
&< 2.
\end{aligned}$$

Luego $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en $H^1(\Omega)$. Como la inclusión de $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta, entonces existen una subsucesión

$$\{w_{n_j}\}_{j=1}^\infty \quad \text{de} \quad \{w_n\}_{n=1}^\infty,$$

y $w \in L^2(\Omega)$ tal que

$$w_{n_j} \rightarrow w \quad \text{en} \quad L^2(\Omega), \quad \text{cuando} \quad j \rightarrow \infty.$$

Así, de (2.3.5) obtenemos que

$$\|w_{n_j}\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \text{y} \quad (|f(w_{n_j})| + |w_{n_j}|_1) < \frac{1}{n_j}. \quad (2.3.6)$$

Luego,

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|w_{n_j}\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Además,

$$\begin{aligned} \left| |f(w_{n_j})| - |f(w)| \right| &\leq |f(w_{n_j}) - f(w)|, \\ &\leq |f(w_{n_j} - w)|, \\ &\leq k \|w_{n_j} - w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

De este modo, dado que $w_{n_j} \rightarrow w$ en $L^2(\Omega)$, tenemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |f(w_{n_j})| = |f(w)|. \quad (2.3.7)$$

Por otra parte, de (2.3.6) se tiene

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\nabla w_{n_j}\|_{(L^2(\Omega))^3} = \lim_{j \rightarrow \infty} |w_{n_j}|_1 = 0. \quad (2.3.8)$$

Así, si $\phi \in (C_0^\infty(\Omega))^3$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla w) \cdot \phi &= - \int_{\Omega} w (\operatorname{div} \phi), \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (w_{n_j}) \operatorname{div} \phi. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla w_{n_j}) \cdot \phi = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, como $(C_0^\infty(\Omega))^3$ es denso en $(L^2(\Omega))^3$, tenemos que

$$\nabla w = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.3.9)$$

De donde

$$|w|_1 = 0,$$

y así de (2.3.8) se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |w_{n_j}|_1 = |w|_1 = 0. \quad (2.3.10)$$

Usando (2.3.7) y (2.3.10) y haciendo que $j \rightarrow \infty$ en (2.3.6), obtenemos:

$$|f(w)| = 0.$$

Finalmente de (2.3.9) y por ser Ω conexo, tenemos

$$w = c \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega$$

con c constante y así,

$$\begin{aligned} 0 = |f(w)| &= |f(c)|, \\ &= |c| |f(1)|, \\ &= |c|, \end{aligned}$$

o sea $c = 0$ y por tanto,

$$w = 0 \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Sin embargo esto contradice el hecho de que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

□

Lema 2.3. Para el operador $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(w) := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} w, \quad (2.3.11)$$

tendremos que existe $c \geq 0$, $c = c(\Omega)$ tal que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c(|F(w)| + |w|_1). \quad (2.3.12)$$

Demostración. Probemos que F es un operador lineal, continuo y que $F(1) = 1$.

Nuevamente la linealidad de F se sigue de la linealidad de la integral.

Para la continuidad del operador F , basta con verificar que F es acotado. Sea $w \in H^1(\Omega)$, de ahí que

$$\begin{aligned} |F(w)| &\leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} |w| \\ &\leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} (\mu(\Omega))^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{(\mu(\Omega))^{1/2}} \|w\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Luego, F es acotado y por tanto continuo. Además un simple cálculo muestra que $F(1) = 1$

Así, por la variante de la desigualdad de Friedrichs (Teorema 2.2), existe $c = c(\Omega)$ de modo que para toda $w \in H^1(\Omega)$,

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c(|F(w)| + |w|_1).$$

□

Sean $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y $l : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional definidos por:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla u \cdot \nabla v, \quad (2.3.13)$$

y

$$l(v) := \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v, \quad (2.3.14)$$

donde f y g son las que se definieron en la ecuación (2.2.5).

Fácilmente, usando las propiedades de la integral y del operador gradiente se demuestra que la forma (2.3.13) es bilineal y que el funcional (2.3.14) es lineal.

Lema 2.4. La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ definida en (2.3.13) es lineal y acotada en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Demostración. Sea

$$\sigma_{\text{máx}} := \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \Omega \\ 1 \leq i, j \leq 3}} |\sigma_{ij}(\mathbf{x})|.$$

Para $u, v \in H^1(\Omega)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla u \cdot \nabla v \right| \\
&\leq |\sigma_{\text{máx}}| \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \\
&\leq \sigma_{\text{máx}} \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&\leq \sigma_{\text{máx}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

por tanto $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal acotada. \square

Lema 2.5. *La forma $a(\cdot, \cdot)$ definida en (2.3.13) es $H_*^1(\Omega)$ –elíptica.*

Demostración. Sean

$$\sigma_{\text{mín}} := \inf_{\substack{\mathbf{x} \in \Omega \\ 1 \leq i, j \leq 3}} |\sigma_{ij}(\mathbf{x})|,$$

y c la constante de la desigualdad de Friedrichs (Teorema 2.2). Para $u \in H_*^1(\Omega)$, por Lema 2.3, y recordando que $F(u) = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla u \cdot \nabla u \\
&\geq \sigma_{\text{mín}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\
&= \sigma_{\text{mín}} |u|_1^2 \\
&= \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1 + c^2} (|u|_1^2 + c^2 |u|_1^2) \\
&= \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1 + c^2} (|u|_1^2 + c^2 (|F(u)| + |u|_1)^2) \\
&\geq \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1 + c^2} (|u|_1^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&= \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1 + c^2} \|u\|_{H_*^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal $H_*^1(\Omega)$ –elíptica con constante de elipticidad $\frac{\sigma_{\text{mín}}}{1 + c^2}$. \square

Lema 2.6. *El funcional $l : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido en (2.3.14) es lineal y acotado. Es decir, $l \in (H^1(\Omega))'$.*

Demostración. Verifiquemos que l es acotado. En efecto, sea $v \in H^1(\Omega)$. Así por teorema de la traza (Teorema 1.59) obtenemos

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |f v| + \int_{\partial\Omega} |g v| \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + c_1 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= k \|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde

$$k := \|f\|_{L^2(\Omega)} + c_1 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Por tanto l es un funcional lineal y acotado, por lo cual $l \in (H^1(\Omega))'$. En particular obtenemos que $l \in (H_*^1(\Omega))'$. \square

Teorema 2.7 (Existencia y unicidad). *Sea Ω un conjunto abierto acotado y conexo, con frontera suave a trozos (por ejemplo un polígono). Entonces el problema variacional: hallar $u \in H_*^1(\Omega)$*

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

tiene exactamente una solución $u \in H_^1(\Omega)$.*

Demostración. Haremos uso del Teorema de Lax-Milgram para mostrar existencia y unicidad, pero antes de esto, consideremos los problemas:

Hallar $u \in H_*^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (2.3.15)$$

y hallar $u \in H_*^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_*^1(\Omega). \quad (2.3.16)$$

Mostremos que (2.3.15) y (2.3.16) son equivalentes. En efecto

1. (2.3.15) \Rightarrow (2.3.16): Se verifica ya que si (2.3.15) se cumple para todo $v \in H^1(\Omega)$, entonces en particular se cumple para toda $v \in H_*^1(\Omega)$ puesto que $H_*^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.
2. (2.3.16) \Rightarrow (2.3.15): Para esto consideremos $v \in H^1(\Omega)$ y definamos

$$\hat{v} := v + \bar{v},$$

donde

$$\bar{v} := -\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} v.$$

Notemos que \bar{v} es una constante. Además,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{v} &= \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} \bar{v} \\ &= \int_{\Omega} v - \frac{1}{\mu(\Omega)} \left(\int_{\Omega} v \right) (\mu(\Omega)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{v} \in H_*^1(\Omega)$. Ahora, sean $u \in H_*^1(\Omega)$ solución de (2.3.16), $v \in H^1(\Omega)$ y $\hat{v} := v + \bar{v} \in H_*^1(\Omega)$. Así de (2.3.16) tenemos

$$\begin{aligned} a(u, \hat{v}) &= a(u, v + \bar{v}) \\ &= a(u, v) + \bar{v}a(u, 1) \\ &= a(u, v) + \bar{v} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla u \cdot \nabla 1 \\ &= a(u, v). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
l(\hat{v}) &= l(v + \bar{v}) \\
&= \int_{\Omega} f(v + \bar{v}) + \int_{\partial\Omega} g(v + \bar{v}) \\
&= \int_{\Omega} fv + \bar{v} \int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} gv + \bar{v} \int_{\partial\Omega} g \\
&= l(v) + \bar{v} \left(\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g \right) \\
&= l(v).
\end{aligned}$$

La igualdad anterior se verifica por la condición de compatibilidad (2.3.2).

Así por los teoremas probados anteriormente tenemos que $a : H_*^1(\Omega) \times H_*^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (2.3.13) es una forma bilineal, acotada, $H_*^1(\Omega)$ -elíptica y $l : H_*^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (2.3.14) es un funcional lineal y acotado, así por Teorema de Lax-Milgram tenemos que existe un único $u \in H_*^1(\Omega)$ de modo que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_*^1(\Omega).$$

Dado que los problemas (2.3.15) y (2.3.16) son equivalentes, entonces tenemos que existe una única solución para nuestro problema (2.3.15). □

Observación 2.8. *Finalizaremos este capítulo, notando que si la solución (2.3.15) satisface*

$$\hat{u} \in H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

entonces \hat{u} es solución del problema fuerte (2.2.4), es decir,

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) = f \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \quad (\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

En efecto, si $v \in H^1(\Omega)$, la identidad de Green (teorema 1.64) implica

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u} \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) \cdot \mathbf{n}) v.$$

De donde,

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) \cdot \mathbf{n}) v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v.$$

Luego,

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) + f) v = \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) \cdot \mathbf{n} - g) v. \quad (2.3.17)$$

Tomando $v \in C_0^\infty(\Omega)$, el término de la derecha se anula. Así,

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \hat{u}) + f) v = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Además

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) + f = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

por tanto,

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) = f \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

En consecuencia de (2.3.17) se obtiene

$$\int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) \cdot \mathbf{n} - g) v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particular

$$\int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) \cdot \mathbf{n} - g) v = 0 \quad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

así por la densidad del espacio

$$\{v|_{\partial\Omega} : v \in C^\infty(\bar{\Omega})\}$$

en $L^2(\partial\Omega)$, tenemos que

$$(\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) \cdot \mathbf{n} - g = 0 \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega,$$

por lo tanto,

$$(\boldsymbol{\sigma}\nabla\hat{u}) \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

Capítulo 3

Análisis del Problema Inverso de EEG

El propósito de este capítulo es realizar el análisis del problema inverso del problema modelo de Electroencefalografía, más precisamente se llevará a cabo el proceso de identificación de fuentes de dicho problema modelo. En el contexto en el cual estamos trabajando, entenderemos por fuente, al dato conocido de la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) estudiada, más precisamente al que conocemos como “dato del lado derecho” de la ecuación sobre el dominio en el que se plantea la EDP, ya que solamente es necesario, como se explicará más adelante, analizar problemas con condición de frontera homogénea (ver Observación 3.1).

Para ser más precisos, el análisis del problema inverso se realizará en el sentido de clasificar las fuentes de acuerdo a si estas pueden ser determinadas unívocamente con el conocimiento de alguna medición en la frontera que no este dada por la condición de frontera propia de la EDP. Para ser más precisos, si por ejemplo la condición dada por la EDP es una condición Dirichlet (por ejemplo $u = 0$ en $\partial\Omega$), estamos interesados en determinar que tipos de fuentes quedan unívocamente determinadas con el conocimiento de la derivada normal en $\partial\Omega$. Si por el contrario, la condición de frontera dada por la EDP es una condición de Neumann (por ejemplo $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$), identificaremos el tipo de fuentes que pueden determinarse unívocamente por el conocimiento de u en $\partial\Omega$.

Para entender el proceso de análisis del problema inverso hemos planteado de manera progresiva cuatro ejemplos, hasta llegar al último de ellos que precisamente será el que corresponde al modelo de Electroencefalografía. Cada ejemplo a su vez se desarrolla en cuatro pasos, de los cuales el cuarto corresponde a la identificación de fuentes requerida.

3.1. Ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet homogéneas.

En primer lugar estudiaremos el problema de clasificación de fuentes para el problema de la Ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet homogéneas.

Paso 1. *Planteamiento del problema fuerte.* En este caso, como ya se dijo, estudiaremos

la Ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet homogéneas, es decir, estudiaremos el problema: Dado $f \in L^2(\Omega)$ (fuente conocida), hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Paso 2. *Fórmula de representación sobre la frontera.* En este paso debemos hallar una fórmula de representación de la fuente f sobre la frontera $\partial\Omega$. Para ello, en primer lugar notamos que para $v \in L^2(\Omega)$ suficientemente regular se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v &= - \int_{\Omega} v \Delta u \\ &= - \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\nabla u)] v \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \\ &= \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\nabla v) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \\ &= \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\nabla v) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \\ &= \int_{\Omega} u \Delta v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v. \end{aligned}$$

A continuación definimos un subespacio de $L^2(\Omega)$ en el cual se anulan las integrales sobre Ω del lado derecho de la igualdad anterior. Es decir que se anula el término

$$\int_{\Omega} u \Delta v.$$

En consecuencia consideramos el conjunto

$$\mathcal{W} = \{v \in H^1(\Omega) \mid \Delta v = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Obteniendo así la siguiente fórmula de representación

$$\int_{\Omega} f v = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.1.1)$$

Paso 3. *Descomposición ortogonal del espacio de la fuente.* En primer lugar notemos que \mathcal{W} no es un espacio trivial pues cualquier solución de la Ecuación de Laplace pertenece a \mathcal{W} .

Sea $W = \overline{\mathcal{W}}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}$. Es decir W es la adherencia de \mathcal{W} con respecto a la norma en $L^2(\Omega)$, con lo cual W es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$, y por lo tanto se tiene la siguiente descomposición ortogonal de $L^2(\Omega)$:

$$L^2(\Omega) = W \oplus W^{\perp}. \quad (3.1.2)$$

Paso 4. *Clasificación de las fuentes.* Este es el paso más importante, pues es el que está directamente relacionado con el problema inverso. Siempre es necesario considerar dos casos, dependiendo de a cuál de los dos factores de la descomposición ortogonal pertenece la fuente f .

Caso 1. $f \in W$. Deseamos saber si $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\partial\Omega$ implica que la fuente es cero en Ω es decir debemos demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ en } \partial\Omega \text{ implica } f = 0 \text{ en c.t.p.} \quad (3.1.3)$$

Observación 3.1. *Antes de proceder a verificar (3.1.3), es necesario resaltar la importancia de dicha implicación. En efecto, lo que se desea probar es que el conocimiento de $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ en $\partial\Omega$ es suficiente para determinar unívocamente a la fuente f que dio origen a la solución u . Más precisamente, si se consideran problemas con fuentes diferentes, es decir si se consideran los problemas*

$$\begin{cases} -\Delta u = f_1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = f_2 & \text{en } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

entonces, si (3.1.3) es válida y f_1, f_2 pertenecen a W , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} \text{ en } \partial\Omega, \text{ implica } f_1 = f_2 \text{ en } \Omega. \quad (3.1.5)$$

Finalmente, es importante notar que si en (3.1.4) consideramos condiciones Dirichlet no homogéneas $u = \tilde{u} = g$ en $\partial\Omega$, entonces también podemos concluir (3.1.5) a partir de (3.1.3), por esta razón es suficiente considerar problemas con condiciones de frontera homogéneas.

Ahora procedemos a demostrar (3.1.3). En efecto, supongamos que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ y demostraremos que $f = 0$ en Ω . En primer lugar notamos que como $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, la fórmula de representación (3.1.1) implica

$$\int_{\Omega} f v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.1.6)$$

Ahora debemos probar que

$$\int_{\Omega} f v = 0 \quad \forall v \in W. \quad (3.1.7)$$

En efecto, sea $v \in W$, entonces existe $(v_n) \subseteq \mathcal{W}$ tal que $v_n \rightarrow v$ en $L^2(\Omega)$, así

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} f v_n \right| &\leq \int_{\Omega} |f| |v - v_n|, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v_n - v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de donde observamos que el último término converge a cero si $n \rightarrow \infty$, pues como sabemos $v_n \rightarrow v$ en $L^2(\Omega)$. Luego, recordando que cada $v_n \in \mathcal{W}$ y usando (3.1.6), se deduce

$$\int_{\Omega} f v = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f v_n = 0,$$

de donde se concluye (3.1.7). Ahora como $f \in W$, se tiene que

$$\int_{\Omega} |f|^2 = \int_{\Omega} f f = 0,$$

concluyendo así que

$$f = 0 \quad \text{en c.t.p.}$$

Caso 2. $f \in W^\perp$. En este caso se demostrará que para cualquiera que sea $f \in W^\perp$, se tiene $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\partial\Omega$. Por lo tanto en este caso, la implicación (3.1.3) es falsa y por lo tanto el conocimiento de $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ no determina unívocamente a la fuente f que genera como solución a u .

Deseamos demostrar que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\partial\Omega$. Teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, debemos demostrar que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} z = 0 \quad \forall z \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (3.1.8)$$

En primer lugar, notamos que como $f \in W^\perp$, entonces $\int_{\Omega} f v = 0$ para todo $v \in W$ y así, dado que $\mathcal{W} \subseteq W$, la fórmula de representación (3.1.1) implica

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.1.9)$$

Ahora procedemos a demostrar (3.1.8). En efecto, sea $z \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ cualquiera y consideremos el problema: Hallar $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta \tilde{v} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \tilde{v} = z & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Deseamos probar que (3.1.10) tienen solución única. En efecto, como $z \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, existe $\tilde{w} \in H^1(\Omega)$ tal que $\tilde{w} = z$ en $\partial\Omega$. Demostraremos que existe un único $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\tilde{v} := w + \tilde{w}$ es la solución de (3.1.10). Notamos que en tal caso se tiene:

$$\Delta \tilde{v} = 0 \text{ en } \Omega \iff \Delta w = -\Delta \tilde{w} \text{ en } \Omega.$$

En consecuencia, debemos considerar el problema: Hallar $w \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\begin{cases} \Delta w = -\Delta \tilde{w} & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Sea $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ cualquiera. Multiplicando por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ a ambos lados de la primera ecuación (3.1.11) e integrando por partes sobre Ω se obtiene que la formulación débil del problema (3.1.11) es: hallar $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

el cual tiene solución única garantizada por el Teorema de Lax-Milgram, recordando que la seminorma

$$\varphi \mapsto \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \right)^{1/2},$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$ que es equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$.

Como consecuencia de lo anterior, $\tilde{v} := w + \tilde{w}$ es la única solución de (3.1.10). Más aún, de la primera ecuación de (3.1.10) se sigue que $\tilde{v} \in \mathcal{W}$ y así, usando (3.2.4) se obtiene

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \tilde{v} = 0,$$

luego, usando la segunda ecuación de (3.1.10), se deduce

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} z = 0.$$

En consecuencia, como $z \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ es cualquiera, se concluye (3.1.8), lo cual como ya habíamos dicho antes, implica

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

3.2. Un problema con condiciones de Neumann homogéneas.

Problema de Neumann

Estudiaremos el problema de clasificación de fuentes para un problema de Neumann con condiciones de frontera homogéneas.

Paso 1. *Planteamiento del problema fuerte.* Como ya se mencionó, estudiaremos un problema de Neumann con condiciones de frontera homogéneas, es decir, estudiaremos el problema: Dado $f \in L^2(\Omega)$ (fuente conocida), hallar $u \in H^1(\Omega)$ que satisface

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Paso 2. *Fórmula de representación sobre la frontera.* En este paso debemos hallar una fórmula de representación de la fuente f sobre la frontera $\partial\Omega$. Para ello, notamos que para $v \in L^2(\Omega)$ suficientemente regular se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v &= - \int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} u v \\ &= - \int_{\Omega} [\text{div}(\nabla u)] v + \int_{\Omega} u v \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v + \int_{\Omega} u v \\ &= - \int_{\Omega} u \text{div}(\nabla v) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u + \int_{\Omega} u v \\ &= - \int_{\Omega} u \Delta v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u + \int_{\Omega} u v \\ &= \int_{\Omega} u (-\Delta v + v) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u. \end{aligned}$$

A continuación definimos un subespacio de $L^2(\Omega)$ en el cual se anulan las integrales sobre Ω del lado derecho de la igualdad anterior. Es decir que se anula el término

$$\int_{\Omega} u (-\Delta v + v).$$

En consecuencia, consideramos el conjunto

$$\mathcal{W} = \{v \in H^1(\Omega) : -\Delta v + v = 0\}.$$

Obteniendo así la siguiente fórmula de representación

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.2.1)$$

Paso 3. *Descomposición ortogonal del espacio de la fuente.*

Sea $W = \overline{\mathcal{W}}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}$. Es decir W es la adherencia de \mathcal{W} con respecto a la norma en $L^2(\Omega)$, con lo cual W es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$, y se obtiene la siguiente descomposición ortogonal de $L^2(\Omega)$:

$$L^2(\Omega) = W \oplus W^\perp. \quad (3.2.2)$$

Paso 4. *Clasificación de las fuentes.*

Caso 1. $f \in W$. Deseamos saber si $u = 0$ en $\partial\Omega$ implica que la fuente es cero en Ω , es decir, probemos que

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega \text{ implica } f = 0 \text{ en } \Omega. \quad (3.2.3)$$

Observación 3.2. *Antes de verificar (3.2.3), resaltamos la importancia de esta implicación. En efecto, se desea probar que el conocimiento de $u \in \partial\Omega$ es suficiente para determinar unívocamente a la fuente f . Si consideramos los problemas*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f_1 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} + \tilde{u} = f_2 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

entonces, si (3.2.3) es válida y f_1, f_2 pertenecen a W , entonces

$$u = \tilde{u} \text{ en } \partial\Omega \text{ implica } f_1 = f_2 \text{ en } \Omega. \quad (3.2.4)$$

Demostremos (3.2.3). Supongamos que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y probemos que $f = 0$ en Ω . Notemos que como $u = 0$ en $\partial\Omega$, la fórmula de representación (3.2.1) implica

$$\int_{\Omega} f v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{W}, \quad (3.2.5)$$

y probemos que

$$\int_{\Omega} f v = 0 \quad \forall v \in W. \quad (3.2.6)$$

En efecto, sea $v \in W$, entonces existe $(v_n) \subseteq \mathcal{W}$ tal que $v_n \rightarrow v$ en $L^2(\Omega)$, así

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} f v_n \right| &\leq \int_{\Omega} |f| |v - v_n|, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v_n - v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de donde observamos que el último término converge a cero si $n \rightarrow \infty$, pues como sabemos $v_n \rightarrow v$ en $L^2(\Omega)$. Luego teniendo en cuenta que $v_n \in \mathcal{W}$ y usando (3.2.5),

$$\int_{\Omega} f v = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f v_n = 0$$

con lo cual se concluye (3.2.6).

Ahora como $f \in W$, se tiene que

$$\int_{\Omega} f f = 0,$$

entonces

$$\int_{\Omega} |f|^2 = 0,$$

esto es

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

concluyendo así que

$$f = 0 \quad \text{en} \quad \textit{c.t.p.}$$

Caso 2. Si $f \in W^\perp$. Demostremos que para cualquiera $f \in W^\perp$, se tiene $u = 0$ en $\partial\Omega$. Así en este caso, la implicación (3.2.3) es falsa, por lo tanto el conocimiento de u no determina unívocamente a la fuente f .

Probemos que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Como $u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, entonces $u = 0$ en $\partial\Omega$ si y sólo si

$$\langle z, u \rangle = 0 \quad \forall z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (3.2.7)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto de dualidad entre $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Deseamos demostrar (3.2.7). Para ello, notemos en primer lugar que como $f \in W^\perp$, entonces $\int_{\Omega} f v = 0$ para todo $v \in W$, y así, dado que $\mathcal{W} \subseteq W$, la fórmula de representación (3.2.1) implica

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.2.8)$$

Ahora si procedemos a demostrar (3.2.7). Sea $z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y consideremos el problema: Hallar $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v} + \tilde{v} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \mathbf{n}} = z & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Sea $w \in H^1(\Omega)$ cualquiera. Multiplicando a ambos lados de la primera ecuación (3.2.9) e integrando por partes sobre Ω se obtiene que la formulación débil del problema (3.2.9) es: hallar $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla w + \int_{\Omega} \tilde{v} w = \langle z, w \rangle \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

El problema anterior tiene solución única garantizada por el Teorema de Lax-Milgram, puesto que la forma bilineal

$$(\tilde{v}, w) \mapsto \int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla w + \int_{\Omega} \tilde{v} w,$$

es elíptica y acotada en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, y además el funcional $w \mapsto \langle z, w \rangle$ es lineal y acotado en $H^1(\Omega)$, puesto que $z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Finalmente, usando la segunda ecuación de (3.2.9), junto con (3.2.8), se deduce

$$\langle z, u \rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \mathbf{n}}, u \right\rangle = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \mathbf{n}} \cdot u = 0,$$

de donde, al ser $z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega)$, se verifica (3.2.7) y se concluye que

$$u = 0 \quad \text{en } H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega).$$

3.3. Ecuación de Laplace con condiciones de Neumann homogéneas.

Consideraremos el problema de Laplace con condición de frontera Neumann homogénea.

Paso 1. *Planteamiento del Problema Fuerte.* El problema fuerte a considerar en este caso es: hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial \Omega. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Antes de proceder con el siguiente paso (*fórmula de representación sobre la frontera*), recordaremos como se estudia el problema directo (3.3.1) (problema fuerte). En efecto, para obtener la formulación débil, sea $v \in H^1(\Omega)$ cualquiera. Así de (3.3.1) se sigue:

$$-\int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\Omega} f v,$$

integrando por partes el lado izquierdo, obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v = \int_{\Omega} f v,$$

así, usando ahora la condición de frontera en (3.3.1) se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En consecuencia, la formulación variacional de (3.3.1) es: hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.3.2)$$

Podemos fácilmente notar que la solución de (3.3.2) no es única, pues si $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ es solución de (3.3.2) entonces $\tilde{u} + c \in H^1(\Omega)$ es también solución de (3.3.2). Debido a esto es necesario reformular (3.3.2) como se explica a continuación.

Primero consideramos el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ definido por

$$H_*^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \int_{\partial \Omega} u = 0 \right\}. \quad (3.3.3)$$

Notamos en primer lugar que $\tilde{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{F}(v) = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

donde $|\partial\Omega|$ representa la medida $\partial\Omega$. Es un funcional lineal y continuo, como se demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *El operador $\tilde{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$\tilde{F}(v) = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v,$$

es lineal y continuo. Además, existe una constante $c > 0$ independiente de v tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(|\tilde{F}(v)| + |v|_1) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

donde $|\cdot|_1 := \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ representa la seminorma de $H^1(\Omega)$.

Demostración. Probemos que \tilde{F} satisface las condiciones de la desigualdad de Friedrichs (ver Proposición 2.2), esto es probemos que \tilde{F} es lineal, continuo y que $\tilde{F}(1) = 1$. La linealidad de \tilde{F} se sigue de la linealidad de la integral. Además note que

$$\tilde{F}(1) = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} 1 = 1.$$

Resta demostrar la continuidad, para lo cual basta probar que F es acotado. En efecto, notamos que para $v \in H^1(\Omega)$ cualquiera se tiene:

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(v)| &= \left| \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v \right| \\ &\leq \frac{1}{|\partial\Omega|} \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{|\partial\Omega|} |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &= \frac{C}{|\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde la existencia de constante $C > 0$ en la última desigualdad se debe al Teorema de la Traza en $H^1(\Omega)$ (ver Teorema 1.59). En consecuencia, existe $c = c(\Omega)$, donde c es la constante positiva garantizada por la variante de la desigualdad de Friedrich (Proposición 2.2), tal que para todo $v \in H^1(\Omega)$ se satisface

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(|\tilde{F}(v)| + |v|_1).$$

□

Como consecuencia de lo anterior, $H_*^1(\Omega)$ definido en (3.3.3), es el kernel del funcional lineal y acotado \tilde{F} , luego $H_*^1(\Omega)$ es en efecto un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ y por lo tanto, es un Espacio de Hilbert. Además, la inclusión de $H_*^1(\Omega)$ en el análisis, sugiere

que en lugar de la formulación variacional (3.3.2), consideremos la siguiente formulación variacional para el problema fuerte (3.3.1): Hallar $u \in H_*^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_*^1(\Omega). \quad (3.3.4)$$

En la siguiente proposición se muestra la equivalencia entre los problemas variacionales (3.3.2) y (3.3.4)

Proposición 3.4. *Los problemas variacionales (3.3.2) y (3.3.4) son equivalentes en el siguiente sentido: Si u es solución de (3.3.2) y $u \in H_*^1(\Omega)$ entonces u es solución de (3.3.4). Además si u es solución de (3.3.4) entonces u es solución de (3.3.2).*

Demostración. Es claro que si u es solución de (3.3.2) y $u \in H_*^1(\Omega)$ entonces u es solución de (3.3.4) pues $H_*^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$. Ahora probemos que si $u \in H_*^1(\Omega)$ es solución de (3.3.4) entonces u es solución de (3.3.2), en efecto sean $v \in H^1(\Omega)$ y $\tilde{v} := v - \bar{v}$, donde $\bar{v} := \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v$ (notése que \bar{v} es constante). Además, $\tilde{v} \in H_*^1(\Omega)$, pues

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \tilde{v} &= \int_{\partial\Omega} v - \int_{\partial\Omega} \bar{v} \\ &= \int_{\partial\Omega} v - \left(\frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v \right) \int_{\partial\Omega} 1 \\ &= \int_{\partial\Omega} v - \frac{|\partial\Omega|}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, sean $u \in H_*^1(\Omega)$ una solución de (3.3.4), $v \in H^1(\Omega)$ y $\tilde{v} = v - \bar{v} \in H_*^1(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \tilde{v} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - \bar{v}) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla \bar{v}) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que \bar{v} es constante. Lo cual verifica que u es solución de (3.3.2). \square

Teorema 3.5. *El problema variacional (3.3.4) posee una única solución $u \in H_*^1(\Omega)$, que además satisface*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Antes de realizar la prueba del Teorema 3.5 se demostrarán algunos resultados previos. Definamos

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \quad u, v \in H(\Omega). \quad (3.3.5)$$

En lo que sigue se demostrará que (3.3.5) es una forma bilineal, acotada y elíptica en $H_*^1(\Omega)$. Además note que (3.3.5) es una forma bilineal, lo cual se sigue por la linealidad del operador gradiente que aparece en esta forma.

Lema 3.6. *La forma bilineal a definida por (3.3.5) es acotada en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \\ &\leq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^3} \cdot \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^3} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

así a es acotada. □

Lema 3.7. *La forma bilineal a definida por (3.3.5) es elíptica en $H_*^1(\Omega)$.*

Demostración. Del Lema 3.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} &\leq c(|F(u)| + |u|_1) \\ &\leq c_1 (|F(u)|^2 + |u|_1^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

entonces se sigue que

$$\|u\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq c_1^2 (|F(u)|^2 + |u|_1^2),$$

luego se tiene que

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq c_1^2 \left(\left(\int_{\partial\Omega} |u| \right)^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right). \quad (3.3.6)$$

Ahora sea $u \in H_*^1(\Omega)$ entonces (3.3.6) es equivalente a

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq c_1^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

de este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &\leq c_1^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &= (c_1^2 + 1) \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

por tanto

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{c_1^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

luego $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal elíptica en $H_*^1(\Omega)$ con constante de elipticidad $\frac{1}{c_1^2 + 1}$. □

Finalmente, notamos que la demostración del Teorema 3.5 es una consecuencia del Teorema de Lax Milgram, dado que se cumplen las condiciones que este requiere. Por lo tanto existe un único $u \in H_*^1(\Omega)$ que satisface (3.3.4).

Ahora procedemos con el resto de pasos de nuestro análisis de identificación de fuentes.

Paso 2. *Fórmula de representación sobre la frontera.* En este paso hallamos una fórmula de representación de la fuente f sobre la frontera $\partial\Omega$. En primer lugar notamos que para $v \in H^1(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f v &= - \int_{\Omega} v \Delta u \\
&= - \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\nabla u)] v \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \\
&= - \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{div}(\nabla v) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u \\
&= - \int_{\Omega} u \cdot (\Delta v) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u.
\end{aligned}$$

Ahora definimos el subespacio de $L^2(\Omega)$ en el cual se anulan las integrales sobre Ω del lado derecho de la igualdad anterior. Es decir que se anula el término

$$- \int_{\Omega} u (\Delta v).$$

En consecuencia consideramos el conjunto

$$\mathcal{W} = \{v \in H^1(\Omega) \mid \Delta v = 0\}.$$

Obteniendo así la representación

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.3.7)$$

Paso 3. *Descomposición ortogonal del espacio de la fuente.* Sea $W := \overline{\mathcal{W}}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}$, es decir W es la adherencia de \mathcal{W} con respecto a la norma en $L^2(\Omega)$. De este modo obtenemos la siguiente descomposición ortogonal de $L^2(\Omega)$:

$$L^2(\Omega) = W \oplus W^{\perp}. \quad (3.3.8)$$

Paso 4. *Clasificación de las fuentes.*

Caso 1. $f \in W$. Deseamos saber si $u = 0$ en $\partial\Omega$ implica que la fuente es cero, es decir debemos demostrar

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega \text{ implica } f = 0 \text{ en } \Omega. \quad (3.3.9)$$

Supongamos que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Así, la fórmula de representación (3.3.7) implica

$$\int_{\Omega} f v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.3.10)$$

Ahora probemos que

$$\int_{\Omega} f v = 0 \quad \forall v \in W. \quad (3.3.11)$$

En efecto, sea $v \in W$, entonces existe $(v_n) \subseteq \mathcal{W}$ tal que $v_n \rightarrow v$ en $L^2(\Omega)$, así

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} f v_n \right| &\leq \int_{\Omega} |f| |v - v_n|, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v_n - v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de donde observamos que el último término converge a cero si $n \rightarrow \infty$, pues como sabemos $v_n \rightarrow v$ en $L^2(\Omega)$. Luego, usando (3.3.10) se sigue

$$\int_{\Omega} f v = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f v_n = 0.$$

Ahora como $f \in W$, se tiene que

$$\int_{\Omega} f f = 0,$$

entonces

$$\int_{\Omega} |f|^2 = 0,$$

esto es

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

concluyendo así que

$$f = 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Caso 2. $f \in W^{\perp}$. Debemos demostrar que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y dado que $u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, entonces $u = 0$ en $\partial\Omega$ es equivalente a demostrar que

$$\langle z, u \rangle = 0 \quad \forall z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Por la fórmula de representación, tenemos

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u \quad \forall v \in \mathcal{W}, \quad (3.3.12)$$

y como $f \in W^{\perp}$, entonces

$$\int_{\Omega} f v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{W}, \quad (3.3.13)$$

de ahí que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u = 0 \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (3.3.14)$$

Sea $\tilde{z} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tal que $\langle \tilde{z}, 1 \rangle = 0$, esta condición permite garantizar la existencia y unicidad de la solución del siguiente problema: hallar $\tilde{v} \in H_*^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{z} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.15)$$

En efecto multiplicando por $w \in H_*^1(\Omega)$ la primera ecuación de (3.3.15) e integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta \tilde{v} w &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla \tilde{v}) w \\ &= \int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} w \\ &= 0, \end{aligned}$$

de ahí que

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla w = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} w,$$

y como $z = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n}$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla w = \langle z, w \rangle \quad \forall w \in H_*^1(\Omega). \quad (3.3.16)$$

Esta última formulación variacional es justamente la formulación débil del problema (3.3.15). Puesto que ya hemos probado que $a(u, v)$ definida en (3.3.5) es una forma bilineal, acotada y elíptica en $H_*^1(\Omega)$ y dado $z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, podemos usar el Teorema de Lax Milgram para concluir que existe un único $\tilde{v} \in H_*^1(\Omega)$ que es solución de (3.3.16) y por lo tanto, solución de (3.3.15). En consecuencia, $\tilde{v} \in \mathcal{W}$ y

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = z,$$

y así por (3.3.14) se sigue

$$\langle z, u \rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n}, u \right\rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} u = 0,$$

luego

$$\langle z, u \rangle = 0 \quad \forall z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

En conclusión

$$u = 0 \quad \text{en } H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

3.4. Problema Inverso de EEG.

Consideramos el problema de identificación de fuentes de problema directo de EEG. Este problema directo fue introducido en el Capítulo 2 (ver Problema (2.2.4)).

Paso 1. *Planteamiento del problema fuerte.* De la misma forma que en los casos anteriores y tal como se explicó antes, es suficiente considerar el problema fuerte con condiciones de frontera homogéneas, es decir consideraremos el problema que se obtiene de hacer $g = 0$ en (2.2.4). Más precisamente, el problema fuerte que consideremos es: hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = \operatorname{div} \mathbf{J} & \text{en } \Omega, \\ (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

donde $\mathbf{J} := (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)\nabla u_0 \in (L^2(\Omega))^3$ es la fuente (dato) del problema y $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ es la conductividad eléctrica. La existencia y unicidad de la solución del problema fuerte (3.4.1) se analizó en el capítulo 2, por lo tanto procederemos a realizar el análisis del problema inverso.

Paso 2. *Fórmula de representación sobre la frontera.* Sea $w \in H^1(\Omega)$ cualquiera.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \nabla w &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{J} \cdot w + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})w \\
&= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{J})w \\
&= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla u)w \\
&= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\nabla u \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\nabla u \cdot \mathbf{n})u \\
&= - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla w) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\nabla w \cdot \mathbf{n})u.
\end{aligned}$$

Ahora consideramos el subespacio de $L^2(\Omega)$ en el cual se anulan las integrales sobre Ω del lado derecho de la igualdad anterior. Es decir, el espacio de funciones en las cuales se anula el termino

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla w).$$

Así, consideramos el subespacio

$$\mathcal{W} = \{w \in H^1(\Omega) \mid \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla w) = 0\},$$

obteniendo así la fórmula de representación

$$\int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \nabla w = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\nabla w \cdot \mathbf{n})u \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (3.4.2)$$

Paso 3 *Descomposición ortogonal del espacio de la fuente.* En este caso se considera el siguiente subespacio de $(L^2(\Omega))^3$

$$\Lambda = \{\nabla w \mid w \in \mathcal{W}\},$$

y sea

$$W = \overline{\Lambda}^{\|\cdot\|_{(L^2(\Omega))^3}},$$

esto es W es la adherencia de Λ con respecto a la norma en $(L^2(\Omega))^3$, luego obtenemos la siguiente descomposición ortogonal de $(L^2(\Omega))^3$:

$$(L^2(\Omega))^3 = W \oplus W^\perp.$$

Paso 3 *Clasificación de las fuentes.*

Caso 1. $\mathbf{J} \in W$. Se debe probar que si $u = 0$ en $\partial\Omega$ entonces $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ en Ω . Para ello probemos que

$$\int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W. \quad (3.4.3)$$

En primer lugar notamos que de la fórmula de representación (3.4.2), dado que $u = 0$ en $\partial\Omega$, se tiene

$$\int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \Lambda. \quad (3.4.4)$$

Para demostrar (3.4.3), tomemos $\mathbf{w} \in W$ cualquiera. Así, existe $(\mathbf{w}_n) \subseteq \Lambda$, tal que $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}$. Luego usando (3.4.4) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{w} \right| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{w} - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{w}_n \right| \leq \int_{\Omega} |\mathbf{J}| |\mathbf{w} - \mathbf{w}_n| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\mathbf{J}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{w}_n - \mathbf{w}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de donde se concluye (3.4.3) haciendo que $n \rightarrow \infty$ en la última desigualdad. Finalmente, como $\mathbf{J} \in W$, (3.4.3) implica que

$$\mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega.$$

Caso 2. $\mathbf{J} \in W^{\perp}$

Teniendo en cuenta que la condición de frontera de (3.4.1) es tipo Neumann, debemos probar que $u = 0$ en $\partial\Omega$, lo cual es equivalente a demostrar que

$$\langle g, u \rangle = 0 \quad \forall g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (3.4.5)$$

Para demostrar (3.4.5), sea $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ cualquiera y consideremos el problema: encontrar $\tilde{w} \in H_*^1(\Omega)$ tal que,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w}) = 0 & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{n} = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4.6)$$

donde

$$H_*^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\partial\Omega} v = 0 \right\},$$

fue introducido en el ejemplo anterior. Multiplicando por $z \in H_*^1(\Omega)$ la primera ecuación de (3.4.6) e integrando tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w}) \cdot z \\ &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \nabla z + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{n}) z, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \nabla z = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{n}) z,$$

que es equivalente a

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \nabla z = \int_{\partial\Omega} g z \quad \forall z \in H_*^1(\Omega). \quad (3.4.7)$$

En consecuencia, la existencia y unicidad de $\tilde{w} \in H_*^1(\Omega)$ solución de (3.4.6) se sigue del Teorema de Lax-Milgram. En efecto, dado que $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})^3$, se deduce

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla z \cdot \nabla z \geq \sigma_{\min} \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla z \quad \forall z \in H_*^1(\Omega),$$

donde

$$\sigma_{\min} := \min_{\substack{\mathbf{x} \in \Omega \\ 1 \leq i, j \leq 3}} |\sigma_{ij}(\mathbf{x})|.$$

Por lo tanto, usando el Lema 3.7, se sigue que la forma bilineal asociada al Problema (3.4.7) es elíptica en $H_*^1(\Omega)$. Las otras condiciones sobre la forma bilineal y sobre el funcional de la formulación (3.4.7) se deducen fácilmente. En consecuencia, el problema (3.4.7) tiene una única solución $\tilde{w} \in H_*^1(\Omega)$ y así existe un único $\tilde{w} \in H_*^1(\Omega)$ que verifica (3.4.6). De donde $\tilde{w} \in \mathcal{W}$ y además satisface $\boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{n} = g$.

Por otro lado, de la formula de representación (3.4.2) y recordado que $\mathbf{J} \in W^\perp$, se deduce

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \nabla w \cdot \mathbf{n}) u = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (3.4.8)$$

Así, en particular para \tilde{w} se tiene

$$\langle g, u \rangle = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{n}) u = 0$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta que $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ es cualquiera, se concluye

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Conclusiones y Aportes

Este trabajo debe entenderse como un primer acercamiento al estudio de problemas inversos relacionados con fenómenos electromagnéticos y su aplicación a problemas fisiológicos. En este primer acercamiento se ha estudiado un tipo de problema inverso de electroencefalografía, que consiste en la clasificación de fuentes que pueden o no determinarse unívocamente cuando la derivada normal del campo eléctrico es conocida sobre la frontera.

En resumen, las conclusiones y principales aportes del trabajo son los siguientes:

- Entre los preliminares que se presentan, se puede resaltar la introducción que se hace de la teoría de distribuciones, ya que esta además de no hacer parte de la temática usual de la carrera, es necesaria para poder definir y entender el problema directo de EEG
- Se presenta una descripción amigable del Problema Directo de EEG y su forma de abordarlo a través del Método de Sustracción, el cual usa la Teoría de soluciones débiles de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) para demostrar la existencia y unicidad de solución para dicho problema directo.
- Se introduce el problema inverso de clasificación de fuentes a través de problemas dados por EDPs más conocidas y más sencillas, para que se logre entender en qué consiste y como se hace esta clasificación.
- Finalmente, se lleva a cabo la clasificación de fuentes para el problema directo de EEG, en la cual se puede notar que se debió hacer una modificación respecto a como se realiza en los casos previamente estudiados, la descomposición del espacio de la fuente.

Bibliografía

- [1] R. Albanese, P. B. Monk, *The Inverse Source Problem for Maxwell's Equations*, Inverse problems 22, 2006, 1023-1035.
- [2] H. Ammari, G. Bao, J. L. Fleming, *An Inverse Source Problem for Maxwell's Equations in Magnetoencephalography*, SIAM J. Appl. Math. 62, 2002, 1369-1382.
- [3] S. Baillet, J. C. Mosher, and R. M. Leahy. *Electromagnetic brain mapping*, IEEE Signal Process. Magaz. 18(2001), pp. 14–30.
- [4] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [5] Sergio Andrés Córdoba, *Estudio de dos formulaciones débiles para un problema directo de Electroencefalografía*, Universidad del Cauca, 2013.
- [6] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [7] David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1998.
- [8] M. Gnewuch and S. A. Sauter, *Boundary Integral Equations for Second Order Elliptic Boundary Value Problems*, in Preprint No. 55, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften Leipzig, 1999.
- [9] Jürger Jost, *Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2002.
- [10] S. He, V. G. Romanov, *Identification of Dipole Sources in a Bounded Domain for Maxwell's Equations*, Wave Motion 28, 25-40, 1998.
- [11] S. Kesavan, *Topics in Funtional Analysis And Applications*, Wiley Eastern Limited, India, 1989.
- [12] Erwin Kreyszig *Introductory Functional Analipsis with Applications*, Wilay classics library, New York, 1978.
- [13] S. Lew, C. H. Wolters, T. Dierkes, C. Röer, R. S. Macleod, *Accuracy and Runtime Comparison for Differential Potential Approaches and Iterative Solvers in Finite Element Method Based EEG Source Analysis*, Appl. Numer. Math. 59, 1970-1988, 2009.

- [14] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford sciences publications, 2003.
- [15] J. C. Mosher, R. M. Leahy and P. S. Lewis. *EEG and MEG: Forward Solutions for Inverse Methods*, IEEE Transaction on Biomedical Engineering 46, pp. 245–259, 1999.
- [16] Eider Yesid Perdomo, *Formulación Débil y de Galerkin de la Ecuación Bidimensional de Poisson*, Universidad del Cauca, Popayán, 2011.
- [17] A. Alonso-Rodríguez and A. Valli. *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations: Theory, Algorithms and Applications*, Springer, Italia, 2010.
- [18] H. I Royden, P. M Fitzpatrick, *Real Analysis*, fourth edition, Pearson, 2010.
- [19] J. Sarvas, *Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem*, Phys. Med. Biol. 32, 1987, 11-22.
- [20] A. Valli , *Solving an Electrostatics-like Problem with a Current Dipole Source by Means of the Duality Method*, Appl. Math. Lett. 25(10), 1410-1414, 2012.
- [21] T. Waberski, H. Buchner, K. Lehnertz, A. Hufnagel, M. Fuchs, R. Beckmann and A. Rienöcker, *Properties of Advanced Headmodelling and Source Reconstruction for the Localization of Epileptiform Activity*, Brain Topography. 10, 283-290, 1998.
- [22] C. H. Wolters, H. Köstler, C. Möller, J. Härdtlein, L. Grasedyck, W. Hackbusch, *Numerical Mathematics of the Subtraction Method for the Modeling of a Current Dipole in EEG Source Reconstruction Using Finite Element Head Models*, SIAM J: Sci. Comput 30, 24-45,2007/08.
- [23] Gatica, N. Gabriel Algunos aspectos básicos del método de Elementos Finitos. Artículo divulgativo. Departamento de Ingeniería Matemática. Universidad de Concepción. Chile.
- [24] Cálculo vectorial Anthony J. Tromba