

# El problema de los valores propios cuadrático: un desarrollo teórico y numérico

Edwin Jayver Arteaga Gaitán

Universidad del Cauca  
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación  
Programa de Matemáticas  
Departamento de Matemáticas  
Popayán  
2018

# El problema de los valores propios cuadrático: un desarrollo teórico y numérico

Estudiante:

Edwin Jayver Arteaga Gaitán

Directora

Rosana Pérez Mera

Universidad del Cauca  
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación  
Programa de Matemáticas  
Departamento de Matemáticas  
Popayán  
2018

## Nota de aceptación

---

---

---

---

Directora \_\_\_\_\_

**Dra. Rosana Pérez Mera**

Jurado \_\_\_\_\_

**Mg. Eduard Mauricio Macías Caicedo**

Jurado \_\_\_\_\_

**Mg. Favián Enrique Arenas Aparicio**

**Fecha de sustentación: 24 de octubre de 2018, Popayán.**

# Índice general

Índice general	4
1. Introducción	5
2. Preliminares	9
3. El problema de los Valores Propios Cuadrático	12
4. Algoritmo y pruebas numéricas	18
5. Comentarios finales	33
Bibliografía	34

# Capítulo 1

## Introducción

Una de las ecuaciones matriciales no lineales más sencillas es la ecuación cuadrática matricial

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O}, \quad (1.1)$$

con  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\mathbf{O}$  denota la matriz cero de orden  $n$ . Las soluciones de (1.1), si existen se denominan *solventes*.

En gran parte, el estudio de resolver la ecuación (1.1) ha sido motivado por un problema que surge con frecuencia en el análisis de sistemas estructurales y en problemas de vibración [13] [14] [16] [26], el cual es conocido como *el problema de los valores propios cuadrático*. Este problema consiste en encontrar escalares  $\lambda \in \mathbb{C}$  y vectores no nulos  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ , tales que

$$Q(\lambda)\mathbf{z} = (\lambda^2 A + \lambda B + C)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

en este caso,  $\mathbf{z}$  es un vector propio de la matriz  $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$  correspondiente al valor propio  $\lambda$ . En este contexto, la matriz  $Q(\lambda)$  cuyas componentes son polinomios en  $\lambda$  de grado menor o igual a 2, es conocida como una *matriz  $\lambda$*  [1] [8] [26].

Este problema es posible reducirlo a un problema de *valores propios generalizados*, el cual consiste en encontrar escalares  $\lambda$  y vectores no nulos  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ , tales que  $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$ , donde  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  [10] [27]. En efecto, suponga que la matriz  $X$  es una solución de la

ecuación (1.1) y mediante operaciones algebraicas, se obtiene

$$\begin{aligned} C &= -BX - AX^2 \\ \lambda^2 A + \lambda B + C &= -BX - AX^2 - \lambda AX + \lambda^2 A + \lambda B + \lambda AX \\ &= -[B + AX + \lambda A]X + \lambda[B + AX + \lambda A] \\ &= -[B + AX + \lambda A][X - \lambda I_n], \end{aligned}$$

es decir, la matriz  $Q(\lambda)$  se puede factorizar de la forma:

$$Q(\lambda) = -[B + AX + \lambda A][X - \lambda I_n], \quad (1.3)$$

donde  $X$  es una solviente de (1.1). Esta factorización indica que los valores propios de la matriz  $Q(\lambda)$  son los valores propios del solviente  $X$  junto con los del problema de valores propios generalizado  $(B + AX)\mathbf{z} = -\lambda A\mathbf{z}$ . Esta idea puede aprovecharse para resolver el problema (1.2) [14] [20].

A partir de (1.3) es necesario, en la solución numérica del problema (1.2), hacer referencia a la solución numérica de la ecuación cuadrática matricial. En este sentido, se destacan algoritmos basados en la *descomposición de Schur* [7] [13], algoritmos basados en sus propiedades teóricas [7] [17] [25], algoritmos tipo Newton [9] [14] y recientemente algoritmos secantes [19] [20] [23].

Casos particulares de la ecuación (1.1) han dado lugar al desarrollo de algoritmos tipo *Newton* y de su respectiva teoría de convergencia [5] [13] [15] [18] [28]. Un ejemplo de ello es el estudio y análisis de convergencia de la ecuación  $X^2 - A = \mathbf{O}$  realizados en [12] y [15].

En general, el método de *Newton* para resolver problemas matriciales no lineales y en particular para resolver la ecuación matricial (1.1) ha tenido un papel central, en cuanto a métodos numéricos se refiere, pero hay que destacar que la mayoría de los algoritmos tipo *Newton* propuestos para resolver la ecuación cuadrática están ligados a problemas cuadráticos particulares que surgen en aplicaciones específicas [4] [5] [9].

Una iteración del método de *Newton* para resolver (1.1) puede expresarse en la siguiente forma

$$\begin{aligned} L_{X_k}(S_k) &= -Q(X_k) \\ X_{k+1} &= X_k + S_k, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $L_{X_k}(S_k)$  denota la derivada *Fréchet* de  $Q$  en  $X_k$  en la dirección de  $S_k$  [12]. La derivada *Fréchet* de  $Q$  en  $X$  en la dirección de  $S$  satisface que, para toda  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,

[19]

$$Q(X + S) = Q(X) + L_X(S) + R(S), \quad (1.5)$$

con

$$\lim_{\|S\| \rightarrow 0} \frac{\|R(S)\|}{\|S\|} = 0.$$

Evaluando  $Q$  en  $X + S$ , tenemos que

$$\begin{aligned} Q(X + S) &= A(X + S)^2 + B(X + S) + C \\ &= Q(X) + (ASX + (AX + B)S) + AS^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

por lo tanto,  $L_X(S) = ASX + (AX + B)S$ . Así, dada una matriz inicial  $X_0$ , una iteración del método de *Newton* para resolver la ecuación cuadrática matricial (1.1) está dada por

$$\begin{aligned} AS_k X_k + (AX_k + B)S_k &= -Q(X_k) \\ X_{k+1} &= X_k + S_k. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Observemos que en cada iteración se debe resolver un caso particular de la ecuación  $ASB + CSD = E$ , (conocida como la *ecuación de Sylvester generalizada* [11] [14]) para encontrar la matriz  $S_k$ . La forma usual de resolver este tipo de ecuación es a través de la descomposición generalizada de *Schur* [10] de las matrices  $A$  y  $AX + B$ , la cual es muy costosa computacionalmente [14]. Esta versión del método de *Newton* para resolver (1.1) se conoce como el método de *Newton-Schur*, ya que utiliza el *algoritmo de Schur* para calcular la solución  $S_k$  de la ecuación (1.7), lo que hace que el método de *Newton-Schur* sea excesivamente costoso.

Históricamente, siempre que el *método de Newton* se ha propuesto para resolver un problema específico, también un *método secante* se ha podido desarrollar para el mismo problema, lo que sirvió como motivación a los autores en [22] a proponer uno de tales métodos para el caso matricial. Una iteración de este algoritmo secante es de la forma:

$$A_k S_k = -F(X_k) \quad (1.8)$$

$$X_{k+1} = X_k + S_k \quad (1.9)$$

$$Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k)$$

$$A_{k+1} S_k = Y_k.$$

El algoritmo calcula la matriz  $S_k$  resolviendo el sistema de ecuaciones lineales dado por la ecuación (1.8), donde  $A_k S_k$  aproxima a  $L(X_k, S_k)$ . La actualización de la matriz

$A_k$ , denotada  $A_{k+1}$ , debe satisfacer la ecuación secante matricial en cuyo caso la matriz  $S_k$  debe ser no singular.

Una vez calculado el solvente mediante un algoritmo tipo *Newton* o *Secante*, se debe resolver el problema del valor propio generalizado  $(B + AX)\mathbf{x} = -\lambda A\mathbf{x}$ . mediante alguna rutina apropiada para tal fin.

Teniendo en cuenta la importancia del problema de los valores propios cuadrático, en este trabajo de grado se presenta un estudio teórico del problema y un desarrollo numérico comparativo de los métodos de *Newton-Schur* y *Secante* para resolver el problema.

El contenido del trabajo está distribuido en cinco capítulos. En el primero, se presenta la introducción al problema de los valores propios cuadrático. En el segundo, algunos preliminares para una mejor comprensión del desarrollo teórico posterior; en el tercero, se presenta el problema de los valores propios cuadrático como una extensión natural de los problemas de valores propios estándar y generalizado; el cuarto contiene los algoritmos híbridos de *Newton-Schur* y *Secante* para la solución del problema y algunas pruebas numéricas del desempeño de estos algoritmos. Finalmente, en el Capítulo 5, presentamos algunos comentarios finales.



# Capítulo 2

## Preliminares

A continuación se definen algunas clases de matrices que serán de utilidad en el desarrollo teórico posterior.

**Definición 2.1.** Una matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es llamada:

- **Simétrica**, si  $a_{ij} = a_{ji}$ , para todo  $0 \leq i, j \leq n$ .
- **Hermitiana**, si  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ , para todo  $0 \leq i, j \leq n$ .
- **Definida positiva**, si para todo vector no nulo  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z} > 0$ . Si para todo  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ , se tiene que  $\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z} \geq 0$ , se dice que  $A$  es semidefinida positiva.

Una generalización del problema de los valores y vectores propios estándar estudiado en un curso básico de álgebra lineal, es el llamado *problema de los valores propios generalizado*, que se define a continuación.

**Definición 2.2.** Dadas las matrices  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , el problema de los valores propios generalizado consiste en encontrar un vector no nulo  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  y un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que,

$$A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}, \tag{2.1}$$

donde  $\mathbf{v}$  y  $\lambda$  se denominan vector propio y valor propio, respectivamente, del par ordenado  $(A, B)$ .

Algunas observaciones sobre el problema generalizado que se deducen de la definición anterior, son las siguientes. Si  $B = I$ , el problema generalizado se reduce al problema de los valores propios estándar; A partir de (2.1), se tiene que  $(A - \lambda B)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , con  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Equivalentemente,  $\lambda$  es un valor propio de  $(A, B)$  si, y solo si

$$\det(A - \lambda B) = 0. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) se conoce como la *ecuación característica* del par  $(A, B)$ ; El lado derecho de esta ecuación,  $p(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ , se denomina el *polinomio característico* de  $(A, B)$ , su grado es, a lo más,  $n$ . La expresión  $A - \lambda B$  es frecuentemente llamada una *matriz lápiz*, con lo cual, es común escuchar las expresiones, valores propios, vectores propios, ecuación característica, y así sucesivamente, de la matriz lápiz.

**Definición 2.3.** *Sea  $\lambda$  un valor propio de la matriz lápiz  $A - \lambda B$ . La multiplicidad algebraica de  $\lambda$  es el número de veces que este valor se repite como raíz del polinomio característico  $p(\lambda)$ .*

**Definición 2.4.** *Sean  $\lambda$  un valor propio de  $A - \lambda B$  y  $S_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda Bv\}$  el conjunto de los vectores propios del par  $(A, B)$  junto con el vector cero de  $\mathbb{C}^n$ . La dimensión de  $S_\lambda$  es llamada la multiplicidad geométrica de  $\lambda$ .*

El siguiente ejemplo ilustra los conceptos definidos previamente.

**Ejemplo 2.1.** *Calcular los valores y vectores propios del par  $(A, B)$  donde*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Solución:** *La ecuación característica del par ordenado  $(A, B)$  está por*

$$\det(A - \lambda B) = \det\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

*equivalentemente*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0,$$

*con lo cual, los valores propios de la matriz lápiz  $A - \lambda B$  son  $\lambda_1 = -3$  y  $\lambda_2 = -2$ , con multiplicidades algebraicas iguales a uno, respectivamente.*

*Para encontrar los vectores propios reemplazamos cada uno de los valores propios en la ecuación  $(A - \lambda B)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Después de algunos cálculos sencillos, se obtienen los siguientes*

*espacios propios,*

$$S_{\lambda_1} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad S_{\lambda_2} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

*cada uno de los cuales tiene dimensión uno. Así, la multiplicidad geométrica de  $\lambda_1$  y de  $\lambda_2$  es igual a uno.*

# Capítulo 3

## El problema de los Valores Propios Cuadrático

Este problema consiste en encontrar escalares  $\lambda \in \mathbb{C}$  y vectores no nulos  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ , tales que

$$Q(\lambda)\mathbf{z} = (\lambda^2 A + \lambda B + C)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

en este caso,  $\mathbf{z}$  es un vector propio de la matriz  $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$  correspondiente al valor propio  $\lambda$ . En este contexto, la matriz  $Q(\lambda)$  cuyas componentes son polinomios en  $\lambda$  de grado menor o igual a 2, es conocida como una *matriz*  $\lambda$ .

El siguiente ejemplo (un caso particular de la familia de ejemplos presentada en [6]) ilustra una matriz  $Q(\lambda)$  de tamaño  $3 \times 3$ .

**Ejemplo 3.1.** *Para las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

se obtiene,

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 2 & -\lambda^2 + \lambda & -\lambda^2 + 9 \\ 0 & \lambda^2 - 1.5\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

A partir de (3.1) se tiene que, para un valor propio  $\lambda$  de la matriz  $Q(\lambda)$  se satisface el sistema

$$Q(\lambda)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

lo cual, es equivalente a

$$\det(Q(\lambda)) = 0, \quad (3.3)$$

llamada *ecuación característica*; su deducción es análoga a la correspondiente en los problemas de los valores propios estándar y generalizado, respectivamente. Continuando con la analogía, el lado derecho de (3.3), un polinomio en la variable  $\lambda$ , es llamado polinomio característico de  $Q(\lambda)$  y sus raíces corresponden a valores propios de esta matriz; al igual que en el caso estándar y generalizado, la multiplicidad algebraica de un valor propio es el número de veces que se repite como raíz de dicho polinomio.

**Ejemplo 3.2.** *La matriz  $Q(\lambda)$  dada por (3.2) es una matriz triangular superior para cada valor de  $\lambda$ , lo cual hace inmediato el cálculo de su ecuación característica y por tanto, de su polinomio característico. En efecto, su ecuación característica es dada por,*

$$\det(Q(\lambda)) = 0 \iff (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(\lambda^2 - 1.5\lambda)(\lambda - 3) = 0,$$

*y su polinomio característico, como producto de factores lineales es,*

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1.5)(\lambda - 2)(\lambda - 3). \quad (3.4)$$

Volviendo a la ecuación característica,  $\det(Q(\lambda)) = 0$ , es importante notar que esta ecuación puede ser satisfecha para todo valor de  $\lambda$ , lo cual motiva la siguiente definición.

**Definición 3.1.** *La matriz  $Q(\lambda)$  es llamada **regular** si su determinante no es idénticamente cero para todos los valores de  $\lambda$ . En otro caso se dice **no regular**.*

A partir de los **Ejemplos 3.1 y 3.2**, se infiere que la matriz  $Q(\lambda)$  es una matriz **regular**.

**Ejemplo 3.3.** *Si en el **Ejemplo 3.2**, a las componentes  $b_{33}$  y  $c_{33}$  se les asigna el valor de cero, la nueva matriz*

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 2 & -\lambda^2 + \lambda & -\lambda^2 + 9 \\ 0 & \lambda^2 - 1.5\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

es **no regular**, pues  $\det(Q(\lambda)) = 0$ , para todo valor de  $\lambda$ .

Otra situación interesante que ilustran las matrices  $Q(\lambda)$  dadas en (3.2) y (3.5) es que sus polinomios característicos tienen grado 5 y 4, respectivamente, y se esperaría que fuese 6. La pregunta natural que surge es la siguiente ¿de qué depende que el grado del polinomio característico sea menor que  $2n$ ? Un ejemplo sencillo que permite dar respuesta a este interrogante, en una situación particular, para posteriormente extenderlo al caso general, es el siguiente.

**Ejemplo 3.4.** *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$  está dada por

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 a_1 + \lambda b_1 + c_1 & \lambda^2 a_2 + \lambda b_2 + c_2 \\ \lambda^2 a_3 + \lambda b_3 + c_3 & \lambda^2 a_4 + \lambda b_4 + c_4 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual, su polinomio característico está dado por

$$\begin{aligned} \det(Q(\lambda)) &= (a_1 a_4 - a_2 a_3) \lambda^4 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2) \lambda^3 \\ &\quad + (a_1 c_4 + b_1 b_4 + c_1 a_4 - a_2 c_3 - b_2 b_3 - a_3 c_2) \lambda^2 \\ &\quad + (b_1 c_4 + c_1 b_4 - b_2 c_3 - b_3 c_2) \lambda + (c_1 c_4 - c_2 c_3). \end{aligned}$$

El coeficiente de  $\lambda^4$  es el determinante de  $A$ , el cual puede ser cero o diferente de cero, según  $A$  sea *singular* o *no singular*. Así, el grado del polinomio característico de la matriz  $Q(\lambda)$  es a lo más cuatro. Será de grado cuatro, si  $\det(A) = a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$ , Es decir, si  $A$  es no singular; en otro caso, el grado será estrictamente menor que cuatro.

La situación del ejemplo anterior se generaliza a matrices  $Q(\lambda)$  de tamaño  $n \times n$ , para las cuales su polinomio característico se puede expresar como

$$\det(Q(\lambda)) = \det(A) \lambda^{2n} + q(\lambda),$$

donde  $q(\lambda)$  es un polinomio de grado menor que  $2n$ . Luego, el grado del polinomio característico será a lo más  $2n$ , lo que a su vez implica que la matriz  $Q(\lambda)$  tendrá  $r \leq 2n$  valores propios. Estas  $r$  raíces se denominan valores propios *finitos* de la matriz  $Q(\lambda)$ . El término finito se introduce para distinguirlos de los  $2n - r$  valores propios

*infinitos* que se introducen cuando  $r < 2n$ , con el fin de completar un total de  $2n$  valores propios. El porqué introducir valores propios infinitos se justifica a continuación.

Suponga que la matriz  $Q(\lambda)$  tiene un valor propio  $\lambda \neq 0$ . A partir de (3.1), dividiendo entre  $\lambda^2$ , sustituyendo  $\beta = \lambda^{-1}$  y reorganizando los sumandos, se tiene la ecuación

$$(\beta^2 C + \beta B + A) \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \quad (3.6)$$

que corresponde a la ecuación del problema de valores propios cuadrático para la matriz  $\lambda^2 C + \lambda B + A$ , conocida como el polinomio *recíproco* de  $Q(\lambda)$ . De (3.6), se concluye que los valores propios no nulos de la matriz polinomio recíproco son los recíprocos de los valores propios no nulos de  $Q(\lambda)$ .

Ahora, si  $A$  es singular entonces cero es un valor propio del polinomio recíproco ya que,  $\lambda = 0$  satisface su ecuación característica, en efecto

$$\det(0^2 C + 0 B + A) = \det(A) = 0.$$

Teniendo en cuenta la relación entre los recíprocos de los valores propios de  $Q(\lambda)$  y los valores propios de su polinomio recíproco, mencionada en el párrafo anterior, parece natural pensar en  $\lambda = \infty$  como un valor propio de  $Q(\lambda)$  cuando  $\lambda = 0$  es un valor propio de su polinomio recíproco, equivalentemente, cuando  $A$  es singular. En este caso, un vector propio  $\mathbf{z}$  del polinomio recíproco, asociado al valor propio  $\lambda = 0$  será un vector propio de  $Q(\lambda)$  asociado a  $\lambda = \infty$ . Esto lo formalizamos en la siguiente definición.

**Definición 3.2.** Si  $\lambda = 0$  es un valor propio del polinomio recíproco de  $Q(\lambda)$  entonces  $\lambda = \infty$  es un valor propio de  $Q(\lambda)$  y su espacio propio es el conjunto

$$\Omega_\infty = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{z} = \mathbf{0}\}.$$

la dimensión de este espacio es llamada la multiplicidad geométrica de  $\lambda = \infty$ .

**Ejemplo 3.5.** De acuerdo con la información del **Ejemplo 3.1** se tiene que la matriz  $Q(\lambda)$  dada por (3.2) tiene 5 valores propios finitos, a saber:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 1.5 \quad \lambda_4 = 2 \quad \lambda_5 = 3.$$

Con el fin de completar seis valores propios ( $2n = 6$ ), se adiciona un valor propio infinito,  $\lambda_6 = \infty$ .

Continuando con la analogía entre el problema de los valores propios cuadrático y los

problemas estándar y generalizado, definimos a continuación los espacios propios correspondientes a los valores propios finitos de  $Q(\lambda)$ .

**Definición 3.3.** Sean  $\bar{\lambda}$  un valor propio finito de la matriz  $Q(\lambda)$ . El conjunto

$$\Omega_{\bar{\lambda}} = \{z \in \mathbb{C}^n : Q(\bar{\lambda})z = \mathbf{0}\}$$

es llamado el espacio propio de  $Q(\lambda)$  asociado a  $\bar{\lambda}$ . La dimensión de este espacio es llamada la multiplicidad geométrica de  $\bar{\lambda}$

Vale la pena observar que los conjuntos  $\Omega_{\infty}$  y  $\Omega_{\bar{\lambda}}$  de las **Definiciones 3.2 y 3.3**, además de vectores propios contienen al vector cero de  $\mathbb{C}^n$  y coinciden con el núcleo de las matrices  $A$  y  $Q(\bar{\lambda})$ , respectivamente.

**Ejemplo 3.6.** Considere la matriz  $Q(\lambda)$  dada en (3.2). La siguiente tabla muestra los pares  $(\lambda_k, z_k)$ ,  $k = 1, \dots, 6$ .

$k$	1	2	3	4	5	6
$\lambda_k$	0	1	1.5	2	3	$\infty$
$z_k$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La tabla anterior permite observar que *valores propios distintos tienen asociado el mismo vector propio*; en efecto,  $\lambda_2 \neq \lambda_4$  y  $z_2 = z_4$ .

El siguiente ejemplo ilustra el caso de una matriz regular con  $2n$  valores propios distintos para la cual existe un conjunto de  $n$  vectores propios linealmente independientes.

**Ejemplo 3.7.** Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$



La matriz  $Q(\lambda)$  está dada por

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda - 2 & 0 \\ \lambda^2 + \lambda - 3 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix},$$

que es regular porque  $\det(Q(\lambda)) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda \neq 0$ . La siguiente tabla muestra los vectores propios asociados a cada valor propio.

$k$	1	2	3	4
$\lambda_k$	-1	2	1	0
$x_k$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Capítulo 4

## Algoritmo y pruebas numéricas

En este capítulo se presentan dos algoritmos híbridos, uno involucra el método *Secante* [20] y el otro, el algoritmo del método de *Newton-Schur* [14], los cuales permiten encontrar los valores propios de la matriz  $Q(\lambda)$ .

Teniendo en cuenta que el objetivo del *problema de los valores propios cuadrático* es encontrar los valores propios de la matriz  $Q(\lambda)$  y de acuerdo con lo estudiado en el capítulo anterior, este problema se puede subdividir en *dos subproblemas*:

1. Encontrar una solución  $X$  de problema  $Q(X) = \mathbf{O}$  y de este, obtener sus valores propios.
2. Encontrar los valores propios de las matrices  $(B + AX)$  y  $-A$ , donde  $X$ , es el solvente del subproblema anterior.

Para abordar *el problema de los valores propios cuadrático* implementaron dos algoritmos híbridos: *el del método secante de cambio mínimo* y *el del método de Newton-Schur*. Los cuales permiten obtener un solvente de  $Q(X) = \mathbf{O}$  y a partir de este, encontrar los valores propios de dicho solvente y los valores propios generalizados de las matrices  $(B + AX)$  y  $-A$ .

**Algoritmo híbrido del método secante de cambio mínimo**

**Entrada:**  $X_{-1}$ ,  $X_0$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$

**P.1** Calcular:  $Q(X_0) = AX_0^2 + BX_0 + C$

**P.2** Calcular:

$$Res(X_0) = \frac{\|Q(X_0)\|_F}{\|A\|_F \|X_0\|_F^2 + \|B\|_F \|X_0\|_F + \|C\|_F}$$

**P.3** Calcular:  $S_{-1} = X_0 - X_{-1}$

**P.4** Solucionar:  $W_0 S_{-1} = A(X_0^2 - X_{-1}^2)$  para  $W_0$

**P.5** Calcular:  $A_0 = W_0 + B$

Mientras  $(Res X_k) \geq 10^{-10}$  y  $k < N$

**P.6** Solucionar:  $A_k S_k = -Q(X_k)$  para  $S_k$

**P.7** Actualizar:  $X_{k+1} \leftarrow X_k + S_k$

**P.8** Solucionar:  $W_{k+1} S_k = A(X_{k+1}^2 - X_k^2)$  para  $W_{k+1}$

**P.9** Actualizar:  $A_{k+1} \leftarrow W_{k+1} + B$

**P.10** Actualizar:  $k \leftarrow k + 1$

Fin del mientras

**P.11** Salida:  $X_*$

**P.12** Encontrar los valores propios de  $X_*$

$$v_1 = eig(X_*)$$

**P.13** Resolver el problema de valores propios generalizados

$$D = AX_* + B$$

$$v_2 = eig(D, -A)$$

**Salida:**  $v = [v_1, v_2]$

Es importante mencionar porqué se incluyen algunas variables en el algoritmo *Secante*. Para una mejor comprensión en el paso **P.4**, hay una matriz  $W_0$  que resulta de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} A_0 S_{-1} &= Q(X_0) - Q(X_{-1}) \\ &= A(X_0^2 - X_{-1}^2) + B(X_0 - X_{-1}). \end{aligned}$$

Pero  $S_{-1} = X_0 - X_{-1}$  entonces  $A_0 = A(X_0^2 - X_{-1}^2)(S_{-1})^{-1} + B$ . Así, si se define la matriz  $W_0 = A(X_0^2 - X_{-1}^2)(S_{-1})^{-1}$  se tiene

$$W_0 S_{-1} = A(X_0^2 - X_{-1}^2)$$

de lo anterior y del paso **P.5** se hace  $A = W_0 + B$ . Análogamente se calculan las variables  $W_{k+1}$  y  $A_{k+1}$ , respectivamente, en los pasos **P.8** y **P.9**.

A continuación se presenta el algoritmo híbrido del método de *Newton* para resolver el problema de los valores propios cuadrático.

### Algoritmo híbrido del método de *Newton-Schur*.

**Entrada:**  $X_0$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$

**P.1** Calcular:

$$Res(X_0) = \frac{\|Q(X_0)\|_F}{\|A\|_F \|X_0\|_F^2 + \|B\|_F \|X_0\|_F + \|C\|_F}$$

Mientras  $Res(X_k) \geq 10^{-10}$  y  $k < N$

**P.2** Calcular: Calcular la descomposición de Schur de  $A$  y  $AX_k + B$  para obtener  $S_k$

**P.3** Calcular: Encontrar la matriz  $S_k$  talque

$$AS_k X_k + (AX_k + B)S_k = -Q(X_0)$$

**P.4** Actualizar:  $X_{k+1} \leftarrow X_k + S_k$

**P.5** Actualizar:  $k \leftarrow k + 1$

Fin del mientras

**P.6** Salida  $X_* \leftarrow X_{k+1}$

**P.7** Encontrar los valores propios de  $X_*$

$$v_1 = \text{eig}(X_*)$$

**P.8** Resolver el problema de valores propios generalizados

$$D = AX_* + B$$

$$v_2 = \text{eig}(D, -A)$$

**Salida:**  $v = [v_1, v_2]$

Es conveniente mencionar que en el paso **P.3** para encontrar la matriz  $S_k$  se requiere resolver una ecuación de *Silvester* generalizada [14] para lo cual se necesita calcular la descomposición de *Schur* generalizada de  $A$  y  $AX + B$ ,

$$W^*AZ = T_1, \quad W^*(AX + B)Z = T_2,$$

donde  $W$  y  $Z$  son unitarios y  $T_1$  y  $T_2$  son matrices triangulares superiores, y la descomposición de *Schur* de  $X$ ,  $U^*XU = R$ , donde  $U$  es unitaria y  $R$  es triangular superior. Entonces pre y pos multiplicando  $ASX + (AX + B)S = -Q(X)$  por  $W^*$  y  $U$ , respectivamente, se transforma el sistema a

$$T_1YR + T_2Y = F, \quad F = -W^*Q(X)U, \quad Y = Z^*SU.$$

Igualando las  $k$ -ésima columnas y reorganizando, se tiene que

$$(T_2 + r_{kk}T_1)y_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}T_1y_i, \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_n].$$

Solucionado este sistema triangular superior en los ordenes  $k = 1 : n$ ,  $Y$  puede ser calculada una columna a la vez.

Las pruebas numéricas fueron realizadas implementando los códigos de los algoritmos y de las funciones en Matlab® bajo un computador Dual-Core Intel® Core™ i5-6200U CPU @ 2.30GHz.

Para estas pruebas se fijaron como datos iniciales, las matrices  $X_{-1} = 0.1I_n$ ,  $X_0 = \beta I_n$ , con  $\beta$  constante dada en [7]

$$\beta = \frac{\|B\|_F + \sqrt{\|B\|_F^2 + 4\|A\|_F\|C\|_F}}{2\|A\|_F}$$

y  $X_0 = 10^m I_n$ , para algunos enteros  $m$ . Donde  $X_{-1}$  es usada únicamente como dato inicial para el algoritmo *Secante*, de acuerdo a la estructura de este algoritmo.

El criterio de parada esta dado por

$$Res(X_k) = \frac{\|Q(X_k)\|_F}{\|A\|_F \|X_k\|_F^2 + \|B\|_F \|X_k\|_F + \|C\|_F},$$

se declara convergencia cuando  $Res(X_k) \leq 10^{-10}$  y divergencia si los algoritmos toman mas de 200 iteraciones.

Para las pruebas numéricas se consideraron cuatro problemas. Los dos primeros son ecuaciones cuadráticas y los otros dos, son problemas de aplicación: un sistema masa resorte amortiguador conectado y el problema de estabilidad de la bicicleta.

Estos problemas permitirán hacer comparaciones entre los dos algoritmos que se han expuesto anteriormente, para cada problema se realizo una tabla compuesta de siete columnas, en la primera de ellas se encuentran las matrices iniciales usadas en ambos algoritmos, la subtabla que empieza desde la segunda columna y termina en la cuarta columna corresponde a los datos obtenidos respecto al método de *Newton-Schur* y la siguiente y última subtabla compuesta de las tres últimas columnas por descontado conciernen al método *Secante*. Ambas subtablas comparten tres variables; la cantidad de iteraciones gastadas, el criterio de parada y el tiempo de costo, denotados en el mismo orden por “*N*”, “*Res*” y “*Tiempo*”.

Adicionalmente para cada problema se realizaron algunas gráficas, cuyo objetivo es el de mostrar el comportamiento de las iteraciones  $N$  y los tiempos  $t$  de ejecución de los algoritmos con respecto a las matrices iniciales  $X_0 = 10^m I_2$ .

**Problema 1.** Calcular los valores propios de  $Q(\lambda)$  [21], donde

$$Q(X) = X^2 + X + C = \mathbf{O} \tag{4.1}$$

con

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación cuadrática matricial (4.1) tiene dos solventes

$$X^1_* = \begin{pmatrix} -2 & -1/3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } X^2_* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

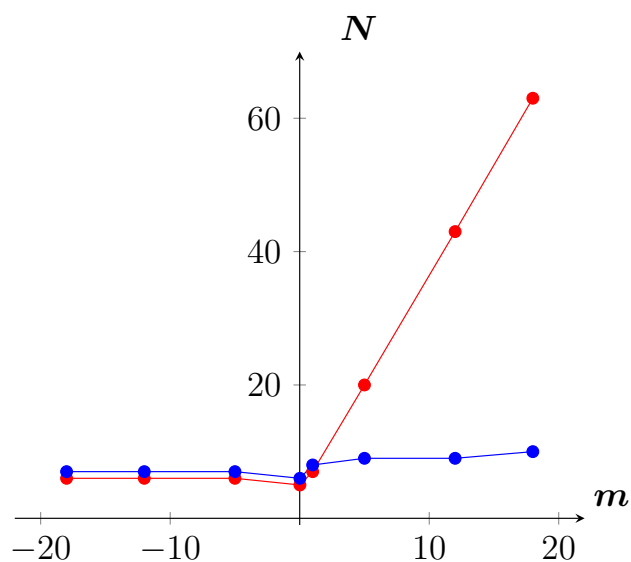
y los valores propios de  $Q(\lambda)$  son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$ .

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos al aplicar los algoritmos de *Newton-Schur* y *Secante* al **Problema 1**. Se observa para este problema un buen desempeño del método *Secante* frente al método de *Newton-Schur*, ya que converge más rápidamente a la solución en cuanto a número de iteraciones se refiere; por otra parte, este método utiliza en promedio el 47% del tiempo de ejecución que utiliza el de *Newton-Schur*. Es importante observar que en algunos casos el método *Secante* llega a emplear el 70% del tiempo de ejecución del método de *Newton-Schur* y en otros el 11%.

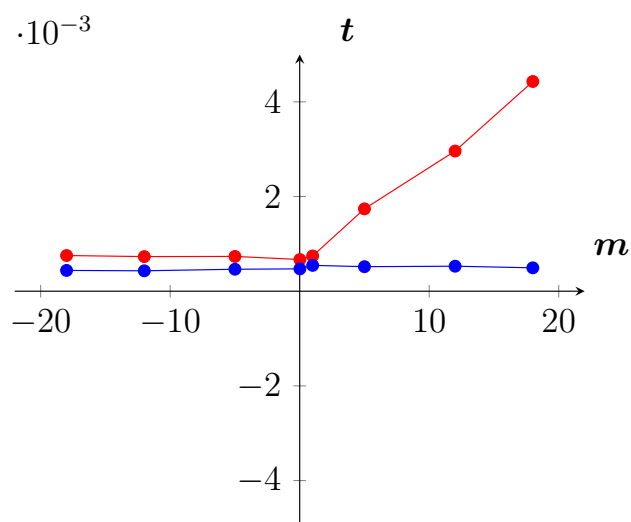
$X_0$	Método de <i>Newton-Schur</i>			Método <i>Secante</i>		
	$N$	$Res$	$Tiempo$	$N$	$Res$	$Tiempo$
$\beta I_2$	5	0.0	0.000669	6	$9.460648e - 11$	0.000472
$10I_2$	7	$9.246282e - 16$	0.000745	8	$3.594771e - 12$	0.000546
$10^5 I_2$	20	$1.633668e - 13$	0.001740	9	$2.675735e - 12$	0.000518
$10^{-5} I_2$	6	0.0	0.000735	7	$6.008756e - 11$	0.000464
$10^{12} I_2$	43	$2.172479e - 11$	0.002961	9	$2.683676e - 12$	0.000528
$10^{-12} I_2$	6	0.0	0.000731	7	$6.010569e - 11$	0.000431
$10^{18} I_2$	63	$6.326398e - 12$	0.004430	10	$3.136600e - 16$	0.000494
$10^{-18} I_2$	6	0.0	0.000754	7	$6.010569e - 11$	0.000439

Tabla 4.1: Resultados para el **Problema 1**.

Las siguientes gráficas muestran el comportamiento de algunas variables mencionadas en la tabla anterior. La Gráfica 4.1 muestra el número de iteraciones  $N$  versus la potencia  $m$  del múltiplo de la matriz inicial  $X_0 = 10^m I$ . El color rojo se usa para el método de *Newton-Schur* y el azul para el de la *Secante*. La Gráfica 4.2 muestra el comportamiento entre el tiempo de ejecución  $t$  y la potencia  $m$ .



Gráfica 4.1: Número de iteraciones versus  $m$  (*Problema 1*).



Gráfica 4.2: Tiempo de ejecución (*Problema 1*).

Las gráficas reflejan comportamientos muy similares para ambos métodos en el caso de valores  $m$  negativos. Por el contrario, a medida que esta variable crece para valores positivos, tanto el número de iteraciones como el tiempo de ejecución se disparan en el caso del método de *Newton-Schur*, mostrando un mejor desempeño del método *Secante*.



**Problema 2.** Calcular los valores propios de  $Q(\lambda)$  [20], donde

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O} \tag{4.2}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

En este caso los solventes de (4.2) son

$$X^1_* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X^2_* = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

además la matriz  $Q(\lambda)$  tiene cuatro valores propios  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$ .

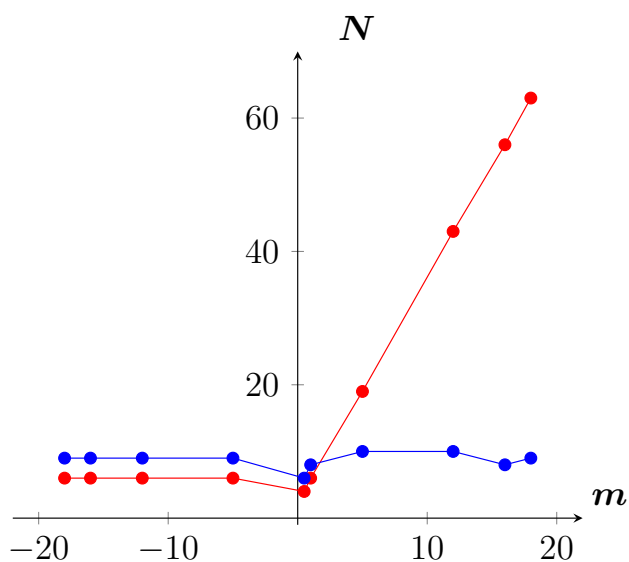
La única diferencia entre el anterior problema y este problema, es la matriz  $C$ , por lo tanto se esperaría una similitud en los resultados. Esto se muestra en la Tabla 4.2; tanto el número de iteraciones como los tiempos de ejecución en el problema anterior son comparablemente análogos al **Problema 2**.

Por otra parte, el método *Secante* utiliza aproximadamente en promedio el 55% del tiempo de ejecución que utiliza el método de *Newton-Schur*.

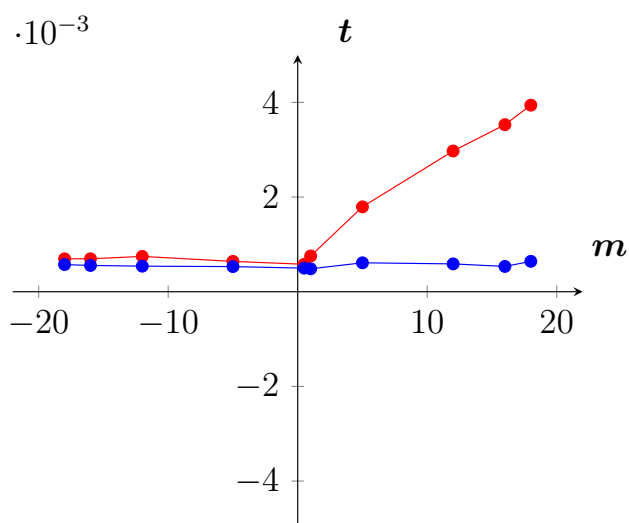
$X_0$	<i>Método de Newton-Schur</i>			<i>Método Secante</i>		
	$N$	$Res$	$Tiempo$	$N$	$Res$	$Tiempo$
$\beta I_2$	4	$4.762715e - 11$	0.000580	6	$9.410145e - 11$	0.000498
$10I_2$	6	$3.642610e - 13$	0.000755	8	$4.936571e - 12$	0.000484
$10^5 I_2$	19	$3.762621e - 11$	0.001793	10	$2.272058e - 11$	0.000611
$10^{-5} I_2$	6	$5.782856e - 11$	0.000641	9	$2.041468e - 16$	0.000531
$10^{12} I_2$	43	0.0	0.002973	10	$2.285036e - 11$	0.000588
$10^{-12} I_2$	6	$5.785820e - 11$	0.000746	9	$1.9870190e - 16$	0.000540
$10^{16} I_2$	56	$2.872600e - 15$	0.003529	8	$1.755916e - 14$	0.000534
$10^{-16} I_2$	6	$5.785832e - 11$	0.000696	9	$1.987019e - 16$	0.000555
$10^{18} I_2$	63	0.0	0.003941	11	$3.125654e - 15$	0.000642
$10^{-18} I_2$	6	$5.785832e - 11$	0.000695	9	$1.987019e - 16$	0.000574

Tabla 4.2: Resultados para el **Problema 2**.

De igual manera las Gráficas 4.3 y 4.4 muestran un comportamiento semejante al comportamiento de los algoritmos en el *problema 1*. En general para estos dos primeros problemas se ve claramente un mejor rendimiento del método *Secante*.



Gráfica 4.3: Número de iteraciones (*Problema 2*).



Gráfica 4.4: Tiempo de ejecución (*Problema 2*).

**Problema 3. Sistema masa-resorte amortiguador conectado** [19] [20] [26].

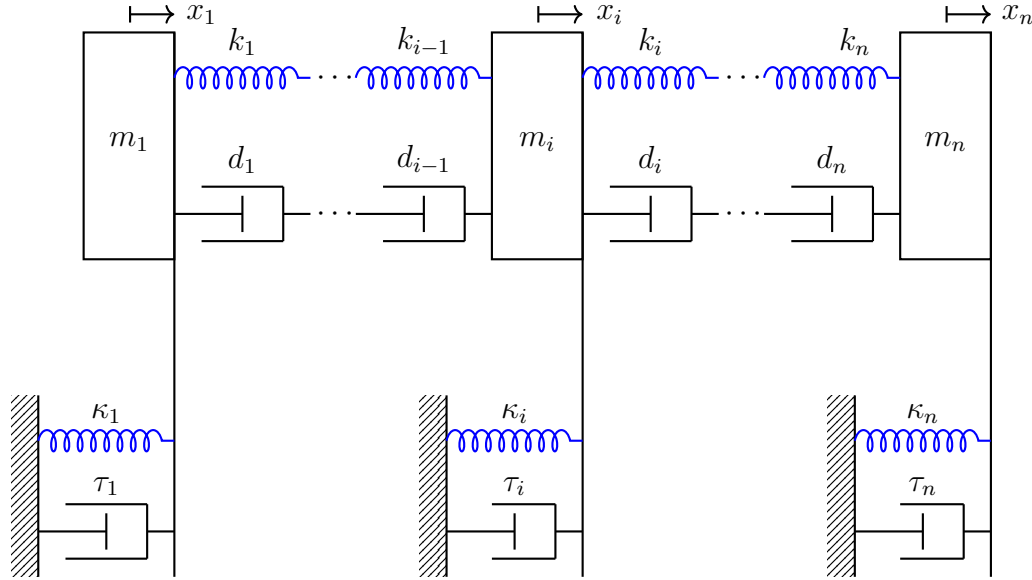


Figura 4.5: Sistema masa-resorte amortiguador conectado.

En este problema, se considera un *sistema masa-resorte amortiguador* [24], donde la masa  $i$ -ésima de peso  $m_i$  está conectada a su  $(i + 1)$  vecino por un resorte y un amortiguador con constantes  $k_i$  y  $d_i$ , respectivamente. La masa  $i$ -ésima también está conectada a tierra por un resorte y un amortiguador con constantes  $\kappa_i$  y  $\tau_i$ , respectivamente (ver figura). La vibración de este sistema está descrita por una ecuación diferencial de segundo orden

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = 0,$$

donde  $A = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$  es la matriz de masas,  $B = \text{tridiag}(-\tau_i, 3\tau_i, -\tau_i)$  es la matriz de amortiguación y  $C = \text{tridiag}(-\kappa_i, 3\kappa_i, -\kappa_i)$  es la matriz de rigidez, respectivamente.

Para la realización de las pruebas numéricas, se tomo  $n = 100$ ,  $m_i = 1$ , para todo  $i$  los resorte y los amortiguadores con un mismo valor constante; es decir  $\kappa_i = \kappa = 5$  y  $\tau_i = \tau = 10$ , para todo  $i$ , excepto  $B(1, 1) = B(n, n) = 2\tau = 20$ .

En este caso la matriz  $Q(\lambda)$  tiene  $2n$  valores propios negativos que pertenecen al intervalo  $[-49.4850266, -0.5051036]$ , pero ninguno de estos valores propios pertenecen al subintervalo  $(-9.4419359, -0.8640012)$ ; o mejor aún, en el intervalo  $[-49.4850266, -9.441936]$

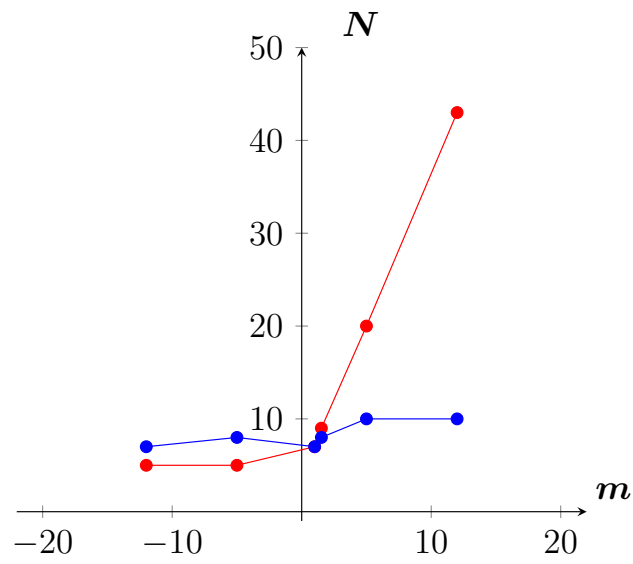
$Q(\lambda)$  tiene  $n$  valores propios y en el intervalo  $[-0.8640012, -0.5051036]$   $Q(\lambda)$  tiene los restantes  $n$  valores propios, mostrando un vacío en el intervalo  $(-9.4419359, -0.8640012)$ .

En la Tabla 4.3 se presentan los resultados obtenidos al aplicar los métodos *Newton-Schur* y *Secante* al **Problema 3**. Hay una considerable diferencia en los tiempos de ejecución, en el mejor escenario el método *Secante* utiliza aproximadamente el 0.57% del tiempo del método de *Newton-Schur*, esto se presenta cuando  $m = 12$ , y en el peor caso, utiliza el 3.5% del tiempo del método de *Newton-Schur*. Respecto al número de iteraciones, en los casos  $m = 5$  y  $m = 12$  se puede ver una diferencia importante: el método *Secante* tiene un mejor desempeño.

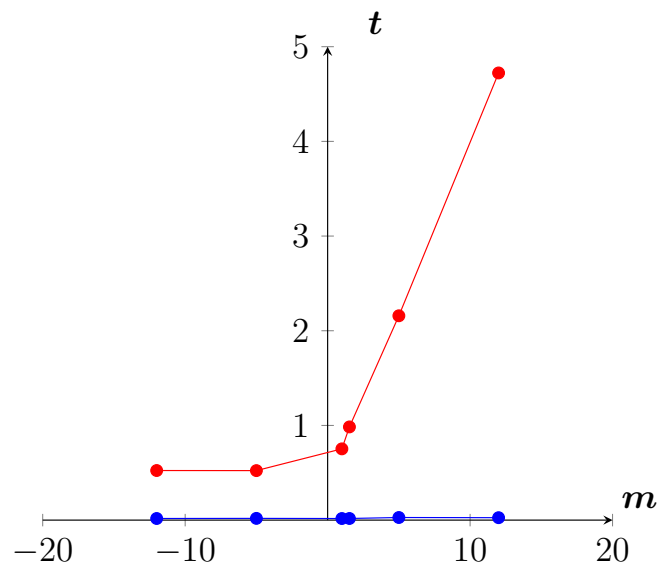
$X_0$	Método de Newton-Schur			Método Secante		
	$N$	$Res$	$Tiempo$	$N$	$Res$	$Tiempo$
$\beta I_{100}$	9	$3.130837e - 12$	0.984307	8	$5.872807e - 11$	0.017179
$10I_{100}$	7	$2.085207e - 11$	0.752578	7	$3.295534e - 11$	0.016777
$10^5 I_{100}$	20	$1.036995e - 11$	2.158098	10	$2.763536e - 12$	0.027475
$10^{-5} I_{100}$	5	$6.165293e - 11$	0.522804	8	$4.748919e - 11$	0.018311
$10^{12} I_{100}$	43	$1.206405e - 11$	4.477235	10	$3.347561e - 12$	0.025625
$10^{-12} I_{100}$	5	$3.035391e - 11$	0.523743	7	$9.690865e - 11$	0.017037

Tabla 4.3: Resultados para el **Problema 3**.

Lo mencionado anteriormente se ve reflejado en las Gráficas 4.6 y 4.7, respectivamente. El método de *Newton-Schur* toma demasiado tiempo para resolver el **problema 3** y sobresale ligeramente en el número de iteraciones para valores de  $m$  negativos. En contraparte, el método *Secante* mantiene sus tiempos de ejecución por debajo del tiempo de *Newton-Schur*.



Gráfica 4.6: Número de iteraciones (*Problema 3*).



Gráfica 4.7: Tiempo de ejecución (*Problema 3*).

**Problema 4. Estabilidad de una bicicleta.**

En [2], los autores presentan un estudio de auto estabilidad de una bicicleta y para ello, toman como referencia un modelo de bicicleta que consta de cuatro partes rígidas, lateralmente simétricas e idealmente articuladas: dos ruedas, un marco y un ensamblaje frontal para el cual, muestran que el modelo de ecuaciones linealizadas que describe el movimiento de esta clase de bicicleta puede escribirse como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$M\ddot{\mathbf{q}} + vC_1\dot{\mathbf{q}} + [gK_0 + v^2K_2]\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (4.3)$$

donde las componentes constantes de las matrices  $M, C_1, K_0$  y  $K_1$  son definidas en términos de 25 parámetros de diseño [2].  $M$  es una matriz de masa, simétrica, la cual da la energía cinética del sistema de la bicicleta, la matriz  $C = vC_1$  es lineal en la velocidad de avance  $v$  y almacena los pares de torsión debido a las velocidades de dirección y de inclinación; la matriz de  $K = [gK_0 + v^2K_2]$  es la suma de dos partes: una parte simétrica,  $gK_0$ , independiente de la velocidad, proporcional a la aceleración gravitacional, y una parte no simétrica  $v^2K_2$ , cuadrática en la velocidad de avance.

La ecuación diferencial homogénea asociada a (4.3) conduce a la correspondiente ecuación característica  $Q(\lambda) = \lambda^2M + \lambda C + K = \mathbf{O}$ , cuyas soluciones  $\lambda$ , los valores propios de  $Q(\lambda)$ , dan información sobre el tipo de movimiento. En efecto, valores propios con parte real positiva corresponden a movimientos inestables; con parte real negativa, a movimientos estables asintóticamente y valores propios imaginarios corresponden a movimientos oscilatorios.

Se deben encontrar los valores propios de  $Q(\lambda) = \lambda^2M + \lambda vC_1 + [gK_0 + v^2K_2]$  donde  $v$  representa la velocidad,  $g$  es la aceleración gravitacional y las matrices  $M, C_1, K_0$  y  $K_2$  son matrices de orden 2 definidas así:

$$M = \begin{pmatrix} 80.81722 & 2.31941332208709 \\ 2.31941332208709 & 0.29784188199686 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0.0 & 33.86641391492472 \\ -0.85035641456978 & 1.68540397397560 \end{pmatrix}$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -80.95 & -2.59951685249872 \\ -2.59951685249872 & -0.80329488458618 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0.0 & 76.59734589573222 \\ 0.0 & 2.65431523794604 \end{pmatrix}.$$

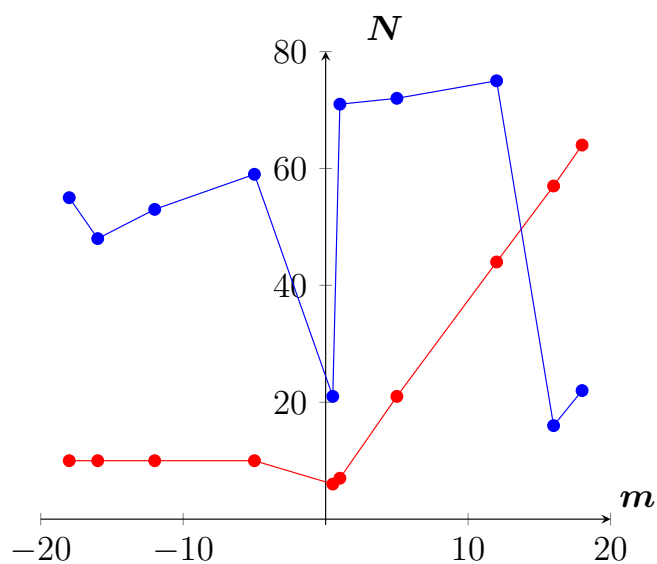
Este problema tiene cuatro valores propios, dos valores propios complejos conjugados y dos reales;  $\lambda_1 = 3.526961 + 0.8077402i$ ,  $\lambda_2 = 3.526961 - 0.8077402i$ ,  $\lambda_3 = -3.134231$  y  $\lambda_4 = -7.110080$ .

En la Tabla 4 se observan los resultados obtenidos al aplicar los algoritmos de *Newton-Schur* y *Secante* para solucionar el **Problema 4**. El método de *Newton-Schur* presenta un mejor desempeño en cuanto a número de iteraciones se refiere, para las distintas matrices iniciales consideradas. Sin embargo, respecto al tiempo de ejecución, las diferencias no son considerables, a excepción de lo que ocurre para  $X = 10I_2$ , donde se ve un incremento “atípico” en el tiempo empleado por el método *Secante*, esto se debe a una matriz mal condicionada que se genera en el proceso de ejecución de este algoritmo para dicha matriz inicial.

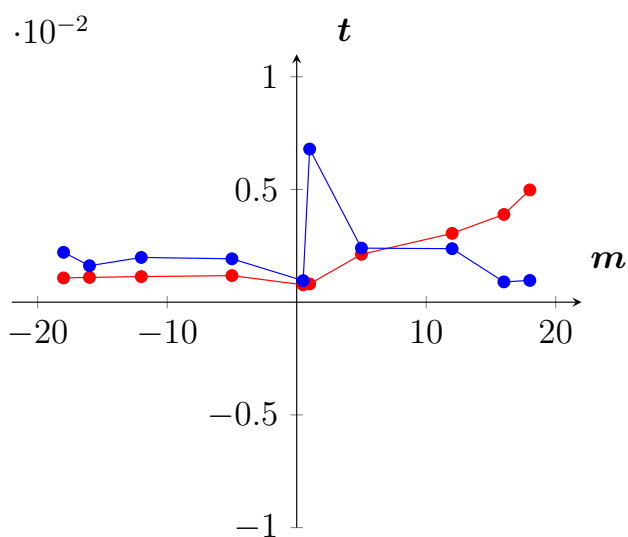
$X_0$	Método de Newton-Schur			Método Secante		
	$N$	$Res$	$Tiempo$	$N$	$Res$	$Tiempo$
$\beta I_2$	6	$2.847843e - 11$	0.000770	21	$1.465106e - 11$	0.000955
$10I_2$	7	$6.864356e - 11$	0.000810	71	$5.130587e - 11$	0.006793*
$10^5 I_2$	21	$1.012731e - 11$	0.002124	72	$9.621072e - 11$	0.002398
$10^{-5} I_2$	10	$7.493023e - 12$	0.001178	59	$5.515168e - 11$	0.001925
$10^{12} I_2$	44	$1.652807e - 11$	0.003053	75	$8.032269e - 11$	0.002373
$10^{-12} I_2$	10	$7.495213e - 12$	0.001136	53	$5.070286e - 11$	0.001985
$10^{16} I_2$	57	$2.814650e - 11$	0.003892	16	$7.302373e - 11$	0.000900
$10^{-16} I_2$	10	$7.495209e - 12$	0.001099	48	$9.473287e - 11$	0.001617
$10^{18} I_2$	64	$1.593409e - 11$	0.004979	22	$8.016418e - 12$	0.000965
$10^{-18} I_2$	10	$7.495303e - 12$	0.001076	55	$6.383160e - 11$	0.002212

Tabla 4.4: Resultados para el **problema 4**.

La Gráfica 4.8 muestra que en el método de Newton las iteraciones usadas por este método son reducidas en comparación con el método *Secante*, pero a medida que  $m$  crece para valores positivos, el número de iteraciones tiene una tendencia creciente.



Gráfica 4.8: Número de iteraciones (*Problema 4*).



Gráfica 4.9: Tiempo de ejecución (*Problema 4*).

Por otra parte en la Gráfica 4.9 se observan comportamientos muy similares para ambos métodos respecto al tiempo de ejecución en el caso de valores  $m$  negativos. Adicionalmente vale la pena mencionar que a pesar de la gran cantidad de iteraciones usadas por el método *Secante*, sus tiempos de ejecución son muy cercanos a los del método de *Newton-Schur*.



# Capítulo 5

## Comentarios finales

En este trabajo se consideró el problema de los valores propios cuadrático, el cual tiene numerosas aplicaciones en Ciencias e Ingeniería, razón que sirve de motivación para su estudio y análisis no solo de la teoría que lo sustenta, sino de algoritmos eficientes para su solución.

Siguiendo esta dinámica se hizo un análisis teórico del problema como una extensión natural del problemas de valores propios estándar y generalizado que permitió definir conceptos de polinomio y ecuación característica, valores propios finitos e infinitos, entre otros.

Complementando el desarrollo teórico se hizo un análisis comparativo del desempeño de dos métodos clásicos para la solución del problema, propiamente los métodos considerados fueron el tradicional método de *Newton-Schur* y el método *Secante* para resolver ecuaciones matriciales.

Los resultados numéricos muestran, en general, un mejor desempeño del método *Secante*, quizá esto se deba al gran número de operaciones que debe realizar el método de *Newton Schur* debido a que internamente usa la descomposición de *Schur* en el proceso, lo que involucra un alto costo computacional.

# Bibliografía

- [1] Berhanu, M. “The polynomial eigenvalue problem”, Thesis (Ph.D.), The University of Manchester. 2005, 219 p.
- [2] Betcke, T. Higham, N., Mehrmann, V., Schorodel, C., and Risseur, F. “A collection of Nonlinear Eigenvalue” Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics. Manchester 2011.
- [3] Bittani, S. Laub, A. J. and Willems, C. *The Riccati equation*. Springer-Verlag, Berlin. 1991.
- [4] Butler G.J., Jhonson C.R. and Wolkowicz H. “Nonnegative solutions of a quadratic matrix equation arising from comparaison thorem in ordinary differential equations”, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 6 (1985), No. 1, 47-53.
- [5] Chun-Hua G. “On a quadratic matrix equation associated whit an M-matrix”, *IMA J. Numer. Anal.* 23 (2001), 11-27.
- [6] Dedieu, J.-P. and Tisseur, F. “Perturbation theory for homogeneous polynomial eigenvalue problems”. *Linear Algebra Appl.* 358, 71–94.
- [7] Davis, J.G., “Numerical solution of a quadratic matrix equation”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 2 (1981), No. 2, 164-175.
- [8] Dennis, J.E. Jr. Traub, J.F. and Weber, R.P. *The algebraic theory of matrix polynomials*. SIAM. 1976, **15**, 832-845.
- [9] Gao, Y-H. “Newton’s method for the matrix equation”, *Appl. Math. Comput.* 182 (2006), No. 2, 1772-1779.
- [10] Golub, H. G. and Van Loan, C.F., “Matrix Computations. The Jonhs Hopkins University Press”, Third ed. Jonhs Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.

- [11] Golub, H. G., Nash and Van Loan, “Hessenberg-Shurt method for the problem  $AX+XB=C$ ”. *IEEE Trans. Automat. Control.* 24 (1979), 909-913.
- [12] Higham, N. J. *Functions of matrices theory and computations*. SIAM, Philadelphia, PA, 2008.
- [13] Higham, N. J. and Kim, H., “Numerical analysis of a quadratic matrix equation”, *IMA J. Numer. Anal.* 20 (2000), No. 4, 499-519.
- [14] Higham, N. J. and Kim, H., “Solving a quadratic matrix equation by Newton’s methods with exact line searches”, *SIAM J. Anal. Appl.* 23 (2001) No. 2, 303-316.
- [15] Higham, N. J. “Stable iterations for the matrix square root”, *Numer. Algorithms* 15 (1997), No. 2 227-242.
- [16] Lancaster, P. *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*. Pergamon Press, Oxford-New York-Paris, 1966.
- [17] Liu, L.D., “Perturbation analysis of a quadratic matrix equation associated with an M-matrix”, *J. Comput App. Math.* 260 (2014), 410-419.
- [18] Liu L.D. and Lu X. “Two kinds of condition numbers for the quadratic matrix”, *Appl. Math. Comput.* 219 (2013), 8759-8769.
- [19] Macías, E. M., H.J. and Perez, R., “Un algoritmo cuasi-Newton para resolver la ecuación cuadrática matricial”, *Rev. Integr. Temas Mat.* 34 (2016), No. 2, 187-206.
- [20] Macías, E. M., H.J. and Perez, R., “Sobre la convergencia de un método secante para ecuaciones matriciales no lineales”, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), N0. 2, 181-197.
- [21] Macías, E. M., *Métodos secantes de cambio mínimo para el cálculo de ceros de funciones de matrices*. Master thesis. Universidad del Cauca 2013.
- [22] Monsalve, M. and Raydan, M., “Newton’s method and secant methods: A long-standing relationship from vectors to matrices”, *Port. Math.* 68 (2011), No. 4, 431-475.
- [23] Monsalve, M. and Raydan, M., “A secant method for nonlinear matrix problems”, *in Numerical linear algebrains signals, systems and control*, Springer (2011), 387-402.
- [24] Nocedal, J. and Wright, J. G., *Numerical Optimizations*. Springer-Verlag. New York 1999.
- [25] Sang-Hyup, S. Jong Hyun, S. and Hyun-Min K. *Newton’s method for solving a quadratic matrix equation with special coefficient matrices*. Honan Mattheatical Journal. 2013, **35 n 3**, 417-433.
- [26] Tisseur, F. and Meerbergen, K. *The quadratic eigenvalue problem*. SIAM. 2001, **43 n 2**, 235-286.

- [27] Watkins, D. S. *Fundamentals of matrix computations*. Wiley-Interscience, 2002.
- [28] Zhong-Zhi B. Xiao-Xia G. and Jun-Feng, Y. "On two iteration methods for the quadratic matrix equations", *Int. J. Numer. Anal Model.* 2 (2005), 114-122.