DINÁMICA COMPLEJA INDUCIDA POR EL EFECTO ALLEE EN UN MODELO PRESA-DEPREDADOR

Ángela Carolina Tunubalá Sánchez

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Programa de Matemáticas
Popayán
2019

DINÁMICA COMPLEJA INDUCIDA POR EL EFECTO ALLEE EN UN MODELO PRESA-DEPREDADOR

Ángela Carolina Tunubalá Sánchez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático, otorgado por la Universidad del Cauca

Dra. *Aida Patricia González Nieva*

Directora

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Programa de Matemáticas

Popayán

2019

Nota de aceptación

____

Aida Patricia González Nieva

Directora

____

Wilmer Molina Yepez

Evaluador

____

Jaime Tobar

Evaluador

Popayán 22 de Octubre de 2019

Dedicado a Dios

y a mis padres

Agradecimientos

Le doy gracias a Dios primeramente por mantenerme de pie ante la vida, a mis padres por su amor y apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida. A mis amigos, que con su amistad me han ayudado a crecer como persona. Agradezco también infinitamente a la profesora Aida Patricia González Nieva, por su apoyo, comprensión y dedicación que tuvo para conmigo, no solo en la dirección de este trabajo sino en los diferentes cursos orientados por ella. A los profesores, Wilmer Molina y Jaime Tobar, por sus consejos y sugerencias para mejorar en cada etapa del proyecto muchas gracias. En fin, a todos los que de una u otra manera han contribuido a la culminación de esta meta trazada en mi vida, Dios les bendiga.

Ángela Carolina Tunubalá Sánchez
Universidad del Cauca
Octubre de 2019

Indice general

Introducción

Investigar acerca de cómo crece o disminuye una población ha sido, históricamente, según Pielou, uno de los estudios más antiguos de la Ecología Matemática. El principal objetivo de ésta es establecer modelos para la dinámica de poblaciones[1].
Thomas Robert Malthus (1766-1834) fue uno de los primeros investigadores en estudiar la dinámica de poblaciones. Alrededor de 1798 propuso un modelo matemático de crecimiento de poblaciones en el cual la tasa per cápita de crecimiento de una población es directamente proporcional a su tamaño[2], mientras los recursos tales como espacio, alimentos, agua, entre otros, sean ilimitados. Pero en un ecosistema, tales recursos se ven disminuidos al aumentar la población, es decir, son limitados ¿Qué ocurre entonces? Transcurridos 40 años, en 1838, los recursos limitados que pueden detener el crecimiento de la población fueron introducidos empíricamente por el matemático belga Pierre Francois Verhulst (1804-1849) en lo que hoy se llama crecimiento logístico[3].

Además, en la naturaleza existen diferentes relaciones o interacciones entre especies, entre ellas se encuentra la interacción entre un depredador y su presa. De acuerdo con [4], este tipo de interacción entre especies es una relación básica para los modelos ecológicos y sociales, además de ser el bloque base para la cadena alimentaria. El primer modelo de ecuación diferencial que describía esta interacción, presa-depredador, fue formulado de manera independiente por Lotka (1925) y Volterra (1926) cuando se hicieron los primeros intentos para encontrar las leyes ecológicas de la naturaleza[4].

Se debe agregar que, en los últimos años, tanto los ecólogos como los matemáticos han logrado avances considerables en la dinámica espaciotemporal de los modelos presa-depredador relevantes para el impacto del efecto Allee [5]. El efecto Allee, llamado así en honor al ecologista Warder Clyde Allee, es un fenómeno en biología caracterizado por una correlación positiva entre el tamaño o densidad de población y el estado físico o medio de una población o especie y puede ocurrir bajo varios mecanismos, tales como la dificultad para encontrar pareja cuando la densidad de población es baja, disfunción social en pequeños tamaños de población y el riesgo de depredación debido a fallas en la agrupación o en comportamientos aprendidos. Desde el punto de vista ecológico, el efecto Allee ha sido dividido en casos, fuerte y débil. El efecto Allee fuerte introduce un umbral en la población y ésta debe superarlo para crecer. Por el contrario, una población con efecto Allee débil no tiene un umbral[6].

El trabajo se centrará en el estudio un modelo presa depredador, sobre la estabilidad e inestabilidad los estados de equilibrio constantes, es decir, estados de coexistencia del sistema ecológico. Analizaremos dos modelos, el que tiene en cuenta procesos de difusión, éste se denomina modelo espacial, pero antes de eso, revisaremos el modelo no espacial. Los modelos no espacial y espacial estan dados respectivamente por los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales[6]:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u\left(\alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b}\right) - \dfrac{cuv}{mv+1} \triangleq f(u,v), \\ \dfrac{dv}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) \triangleq g(u,v), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} = u\left(\alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b}\right) - \dfrac{cuv}{mv+1} + d_1 \Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) + d_2 \Delta v, \end{cases} \tag{2}$$

El sistema (1) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras (2) es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Es necesasrio resaltar que, la expresión

$$\frac{qu}{u+b}$$

es el término de efecto Allee aditivo sobre la presa, el cual nos permitirá hablar de un modelo con y sin efecto Allee. Estos modelos se presentan en el artículo *Dynamical complexity induced by Allee effect in a predator-prey model* por Weiming Wang, Ya-nuo Zhu,Yongli

Cai, Wenjuan Wang , el cual exhibe la dinámica compleja de un modelo presa-depredador con efecto Allee.

Conviene subrayar que para los modelos (1) y (2) se estudiaran solo los resultados que tengan sentido ecológico, es decir nos preocupamos por soluciones no negativas, asi como estados de equilibrio constantes no negativos. Este trabajo se divide en cinco capítulos; el primer capítulo contiene algunos aspectos sobre los modelos a estudiar, y sobre la teoria de ecuaciones diferenciales que permitirán el desarrollo de este trabajo. El segundo capítulo tratará sobre la existencia de los equilibrios positivos del modelo (1) con y sin efecto Allee; en el tercer capítulo se abordará el tipo de estabilidad para los equilibrios obtenidos en el capítulo anterior y para los equilibrios en la frontera. Por su parte, el cuarto capítulo tratará sobre la estabilidad e inestabilidad de los estados de equilibrio positivos del modelo espacial (2). Se determinará el efecto de la difusión para el modelo (2) en el caso sin efecto Allee, y finalmente se determinarán las condiciones para la ocurrencia de la inestabilidad impulsada por Allee-difusión. Se concluye con el quinto capítulo el cual contiene las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo se propone estudiar la dinámica compleja del modelo presa-depredador no espacial y espacial con y sin efecto Allee, para ello es necesario comprender los modelos a estudiar asi como conocer los aspectos teóricos que permitirán el desarrollo de dicho estudio.

1.1. Modelo presa-depredador

De acuerdo con Pielau investigar acerca de cómo crece o disminuye una población ha sido, uno de los estudios más antiguos de la Ecología Matemática. Una de las suposiciones ecológicas más aceptada es asumir que el crecimiento de una determinada población se ve afectado por recursos limitados presentes en el medio ambiente, es así que se tiene el modelo propuesto por Verhulst (1838) conocido como modelo de crecimiento logístico dado por[1]

$$\frac{du}{dt} = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

donde α denota la tasa intrínseca de crecimiento de la población u y $K > 0$ es la capacidad de carga del medio ambiente. Además

- La tasa de crecimiento de la población, $\frac{du}{dt}$, es proporcional al producto de la densidad de población u y la diferencia con la capacidad de carga $(K - u)$.

- El término $\dfrac{-\alpha u^2}{K}$ modela la competencia intraespecífica por los recursos disponibles, lo cual limita el crecimiento.

- El modelo implica una disminución lineal de la tasa de crecimiento per cápita respecto a la densidad de población, esto es, se tiene una dependencia negativa de la densidad, esto significa que el aporte de cada individuo al crecimiento de la población disminuye a medida que la densidad de población se incrementa.

De otro lado, las interacciones entre especies, así como su coexistencia en los ecosistemas es un tema de gran interés en la ecología. Cuando dos poblaciones de especies interactúan existen tres tipos de interacción, entre ellas, la interacción presa-depredador, esta ocurre cuando la tasa de crecimiento de una población es decreciente y la otra es creciente [3]. En [6] se plantea el siguiente modelo presa-depredador dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \alpha u\left(1 - \dfrac{u}{K}\right) - \dfrac{cuv}{mv+1}, \\ \dfrac{dv}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{c\sigma u}{mv+1}\right), \end{cases}$$

donde α es la tasa de crecimiento intrinseca de la presa, K la capacidad de carga del medio, cu es una respuesta funcional sin saturación, con $c > 0$ que denota la tasa de captura de la presa; el término $\frac{cuv}{mv+1}$ da la tasa en la cual la presa es consumida, γ es la tasa de muerte natural de los depredadores; la constante de proporcionalidad $\sigma > 0$ es la tasa de consumo de presas. Luego, tomando $\beta = \frac{\alpha}{K}$, $s = c\sigma$, el modelo anterior es dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(\alpha - \beta u) - \dfrac{cuv}{mv+1}, \\ \dfrac{dv}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right), \end{cases} \tag{1.1}$$

donde s denota la tasa de conversión.

1.1.1. Efecto Allee

De acuerdo con [20] el efecto Allee puede ser definido como una relación positiva entre un componente de la adaptación individual y el número o densidad de conespecíficos. Donde la adaptación individual se refiere en términos generales según [1] a la contribución genética de un individuo a la siguiente generación, donde los principales componentes de la adaptación son sobrevivencia y reproducción, de los cuales se derivan otros como desarrollo, primera reproducción, éxito de apareamiento, fecundidad, probabilidad de muerte o reproducción, etc. Ademas en [1] la definición de efecto Allee es interpretada como: la adaptación de un individuo en una población pequeña decrece a medida que el tamaño de la población también disminuye. Ecologicamente el efecto Allee se clasifica en efecto Allee fuerte y débil [1][6]

- *Efecto Allee débil.* El efecto Allee se considera débil si la tasa de crecimiento de población per cápita es positiva para densidades de población pequeñas, donde un incremento en esta densidad produce un incremento en la tasa; y para densidades altas un incremento en la densidad produce un decrecimiento en dicha tasa.

- *Efecto Allee fuerte.* Se presenta cuando por debajo de un cierto valor de densidad, llamado umbral de Allee, la tasa de crecimiento per cápita se vuelve negativa. Si una población presenta un efecto Allee fuerte ésta debe superar el umbral de Allee para crecer de lo contrario puede llegar a extinguirse.

1.1.2. Modelo presa-depredador con efecto Allee

En [6] se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{du}{dt} = u\left(\alpha - \beta u - \frac{q}{u+b}\right) \tag{1.2}$$

donde

$$\frac{qu}{u+b}$$

se denomina el término de efecto Allee aditivo, $b, q > 0$ son constantes de efecto Allee. Si $q < b\alpha$ es llamado efecto Allee débil, mientras que $q > b\alpha$, efecto Allee fuerte. Por lo tanto de (1.1) y (1.2) se tiene el modelo presa-depredador con efecto Allee aditivo sobre la presa

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u\left(\alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b}\right) - \dfrac{cuv}{mv+1} \triangleq f(u,v), \\ \dfrac{dv}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) \triangleq g(u,v), \end{cases} \tag{1.3}$$

En el modelo (1.3) se asume que las presas u y depredadores v viven en un ambiente homogéneo, pero esto no ocurre siempre dado que poblaciones interactúan con el medio que los rodea, además que existen factores en el espacio que pueden afectar la dinámica de las poblaciones [5]. Por lo tanto, asumiendo que la presa u y el depredador v se mueven aleatoriamente con movimiento Browniano se tiene un modelo simple de reacción-difusión correspondiente al modelo (1.3) dado por [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} = u\left(\alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b}\right) - \dfrac{cuv}{mv+1} + d_1\Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) + d_2\Delta v, \end{cases} \tag{1.4}$$

con condiciones iniciales positivas

$$u(x,y,0) > 0, v(x,y,0) > 0, (x,y) \in \Omega = (0,l\pi) \times (0,l\pi)$$

y flujo cero en las condiciones de frontera

$$\frac{\partial u}{d\nu} = \frac{\partial v}{d\nu} = 0, (x,y) \in \partial\Omega$$

donde Ω es un dominio abierto y acotado en $\mathbb{R}^2$ con frontera $\partial\Omega$ y $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es el operador laplaciano en el espacio bi-dimensional, $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$ son los coeficientes de difusión de la presa u y el depredador v, respectivamente. ν es el vector unitario normal exterior sobre $\partial\Omega$, el flujo cero en las condiciones reflejan la situación donde la población no puede moverse a través de la frontera del dominio.

Los modelos (1.1), (1.3) y (1.4) se denominan, modelo no espacial sin efecto Allee, modelo no espacial con efecto Allee y modelo espacial con efecto Allee, respectivamente.

Además para demostrar algunos resultados de nuestros modelos es necesario establecer los siguientes resultados.

1.2. Cotas de las soluciones positivas

Se enuncia un lema de comparación clásico presentado en [7] cuya demostración se tomó de [15].

Lema 1. Sea ϕ una función absolutamente continua que satisface la desigualdad diferencial

$$\frac{d\phi(t)}{dt} + \alpha_1\phi(t) \leq \alpha_2, \quad t \geq 0 \quad donde \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1 \neq 0 \tag{1.5}$$

Entonces,

$$\forall t \geq \bar{T} \geq 0 \qquad \phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\bar{T})\right) e^{-\alpha_1(t-\bar{T})}$$

Demostración: Multiplicamos ambos lados de (1.5) por $e^{\alpha_1 t}$

$$\left(\frac{d\phi(t)}{dt} + \alpha_1\phi(t)\right) e^{\alpha_1 t} \leq \alpha_2 e^{\alpha_1 t}$$

Entonces

$$\left(\frac{d\phi(t)}{dt} + \alpha_1\phi(t) - \alpha_2\right) e^{\alpha_1 t} \leq 0$$

lo cual es equivalente a la derivada del producto

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) e^{\alpha_1 t}\right) \leq 0.$$

Así, la función

$$\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) e^{\alpha_1 t},$$

tiene una derivada no positiva y es no creciente para $t \geq 0$. Por lo tanto, para todo $t \geq \bar{T} \geq 0$,

$$\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) e^{\alpha_1 t} \leq \left(\phi(\bar{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) e^{\alpha_1 \bar{T}}.$$

Por lo tanto,

$$\phi(t)e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}e^{\alpha_1 t} \leq \left(\phi(\bar{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) e^{\alpha_1 \bar{T}}$$

$$\phi(t)e^{\alpha_1 t} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}e^{\alpha_1 t} + \left(\phi(\bar{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) e^{\alpha_1 \bar{T}}$$

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{e^{\alpha_1 t}}{e^{\alpha_1 t}} + \left(\phi(\bar{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{e^{\alpha_1 \bar{T}}}{e^{\alpha_1 t}}$$

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \left(\phi(\bar{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) e^{\alpha_1 \bar{T} - \alpha_1 t}$$

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\bar{T})\right) e^{-\alpha_1 (t - T_1)}$$

lo cual es equivalente a

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(1 - e^{-\alpha_1 (t-\bar{T})}\right) + \phi(\bar{T}) e^{-\alpha_1 (t-\bar{T})}$$

Finalmente, para $\bar{T} = 0$ se tiene

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(1 - e^{-\alpha_1 t}\right) + \phi(0) e^{-\alpha_1 t}, \qquad t \geq 0$$

$\square$

1.3. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Consideremos el siguiente conjunto de n ecuaciones diferenciales[8]:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

donde a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$ son los n^2 números reales constantes, mientras que x_i, denota un función de valor real desconocida de una variable real t. Las ecuaciones anteriores se pueden escribir de una forma abreviada:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y para cada $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ definimos un vector $\mathbf{A}\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya i-ésima coordenada es $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$ y esta es la i-ésima fila en el lado derecho de las ecuaciones anteriores. De esta forma la matriz $\mathbf{A}$ es interpretada como un mapeo

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$$

la cual a x le asigna $\mathbf{A}\mathrm{x}$. Por tanto, el conjunto de ecuaciones se puede reescribir como

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathbf{A}\mathrm{x} \tag{1.6}$$

a (1.6) se le llama sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneo con coeficientes constantes.

1.4. Sistemas no lineales autónomos

Al sistema dinámico modelado por

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2 \ldots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2 \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2 \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

o también,

$$\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x}) \tag{1.7}$$

se le conoce como sistema no lineal autónomo, con $\mathrm{x} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, una función de valor vectorial y f una función de variable y valor vectorial, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y además f una función no lineal. El sistema dinámico modelado por (1.7) se dice que es autónomo porque la función f no depende explícitamente del tiempo.

El sistema (1.6) es un sistema lineal autónomo con $f(\mathrm{x}) = \mathbf{A}\mathrm{x}$.

Definición 1.4.1. Dados los sistemas dinámicos con ley

I) $\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x})$ (sistema no lineal)

II) $\dot{x} = \mathbf{A}x$ (sistema lineal)

Se dice que (I) y (II) son topológicamente equivalentes cerca al origen si existe un homeomorfismo H que aplica un conjunto abierto V_1 que contiene al origen, en otro conjunto abierto V_2 que también contiene al origen, y además, H aplica trayectorias de (I) que estan en V_1 en trayectorias de (II) que estan en V_2, y se preserva la orientación en el tiempo, es decir, si una trayectoria de (I) va de $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ en V_1, entonces la trayectoria correspondiente en (II) va de $H(\mathbf{x}_1)$ a $H(x_2)$ en V_2.

Definición 1.4.2. Los puntos estacionarios o de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ son estados invariantes en el tiempo, de ahí que, x_0 es un punto de equilibrio si $f(x_0) = 0$.

Definición 1.4.3. Un punto de equilibrio x_0 es llamado punto de equilibrio hiperbólico de (1.7) si ninguno de los autovalores de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real igual a cero. El sistema lineal (1.6) con la matriz $\mathbf{A} = Df(x_0)$ es llamado la linealización de (1.7) en x_0.

Definición 1.4.4. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $\dot{x} = f(x)$, x_0 un punto de equilibrio del sistema, y $\mathbf{A} = Df(x_0)$ se dice que:

- x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico tipo fuente si la parte real de todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son números positivos.
- x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico tipo sumidero si la parte real de todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son números negativos.
- x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico tipo silla si existen autovalores de $\mathbf{A}$, λ_1 y λ_2 tal que la parte real de λ_1 es negativa y la parte real de λ_2 es positiva.

Teorema 1.4.1 (*Teorema de Hartman-Grobman*)**.** Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen, $f \in C^1(E)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Suponga que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y que la matriz $\mathbf{A} = Df(\mathbf{0})$ no tiene autovalores con parte real nula. Entonces existe un homeomorfismo H de un abierto U que contiene al origen a un conjunto abierto V que contiene al origen tal que para cada $\mathrm{x}_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que para todo $\mathrm{x}_0 \in U$ y $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(\mathrm{x}_0) = e^{At} H(\mathrm{x}_0)$$

esto es, H lleva trayectorias de $\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x})$ cerca al origen a trayectorias de $\dot{\mathrm{x}} = \mathbf{A}\mathrm{x}$ cerca al origen y preserva la parametrización en el tiempo.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [9].

Definición 1.4.5 (*Flujo del sistema*)**.** Si $\phi(t, \mathrm{x}_0)$ es la solución del problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x}), \\ \mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0, \end{cases}$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto de funciones $\phi_t(\mathrm{x}_0) = \phi(t, \mathrm{x}_0)$ es llamado el flujo del sistema $\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x})$.

1.4.1. Tipos de puntos de equilibrio y Estabilidad

La estabilidad de cualquier punto de equilibrio hiperbólico x_0 de (1.7) es determinado por los signos de las partes reales de los autovalores λ_j de la matriz $Df(x_0)$. Un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es asintóticamente estable si y sólo si $Re(\lambda_j) < 0$ para $j = 1, \ldots, n$, es decir, si y sólo si x_0 es un sumidero. Y un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es inestable si y sólo si es tipo fuente o tipo silla [9].

Definición 1.4.6. Sea ϕ_t que denota el flujo de (1.7) definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x_0 de (1.7) es estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $||\tilde{x} - x_0|| < \delta$ y $t > 0$ entonces $||\phi_t(\tilde{x}) - x_0|| < \epsilon$. x_0 es inestable cuando no es estable. Y x_0 es asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que si $||\tilde{x} - x_0|| < \delta$ entonces

$$\lim_{t \to \infty} \phi_t(\tilde{x}) = x_0.$$

Definición 1.4.7. *Silla, Nodos, Focos y Centros para sistemas lineales en* $\mathbb{R}^2$. Considere el sistema (1.6) en $\mathbb{R}^2$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $x_0 = (0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema, entonces

(1) *El punto de equilibrio es un nodo.* Este caso se presenta cuando los autovalores λ_1 y λ_2 de $\mathbf{A}$ son reales y del mismo signo.

(2) *El punto de equilibrio es un punto silla.* Este caso se presenta cuando los autovalores λ_1 y λ_2 de $\mathbf{A}$ son reales y de distinto signo.

(3) *El punto de equilibrio es una espiral o foco.* Este caso se presenta cuando los autovalores de $\mathbf{A}$ son complejos conjugados y tienen parte real no nula.

(4) *El punto de equilibrio es un centro.* Este caso se presenta cuando los autovalores de $\mathbf{A}$ son imaginarios puros.

Teorema 1.4.2. El punto crítico $x_0 = (0, 0)$ del sistema lineal (1.6) es estable si y sólo si los autovalores tienen parte real no positiva; si existe un autovalor con parte real positiva, entonces el punto crítico $x_0 = (0, 0)$ del sistema lineal (1.6) es inestable; el punto crítico $x_0 = (0, 0)$ del sistema lineal (1.6) es asintóticamente estable si y sólo si los autovalores tienen parte real negativa [11].

Demostración: Una prueba de este teorema puede encontrarse en [12] □

La estabilidad también se puede determinar en términos de la traza y el determinante de la matriz $\mathbf{A}$.

Teorema 1.4.3. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\delta = \det \mathbf{A}$ y $\tau = tr(\mathbf{A})$ y considere el sistema

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathbf{A}\mathrm{x}. \tag{1.8}$$

(a) Si $\delta < 0$ entonces (1.8) tiene un punto silla en el origen.

(b) Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ entonces (1.8) tiene un nodo en el origen; es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.

(c) Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$ entonces (1.8) tiene un foco en el origen; es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.

(d) Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$ entonces (1.8) tiene un centro en el origen.

Demostración: Los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ están dados por

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$$

(a) Supongamos que $\delta < 0$ entonces, $\tau^2 - 4\delta > 0$ luego existen dos autovalores reales de signos opuesto, así, por (2) en la definición (1.4.7) el origen es un punto de equilibrio tipo silla.

(b) si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ entonces los autovalores son reales y tienen el mismo signo que τ.

Si $\tau < 0$ y

(b1) $\tau^2 - 4\delta = 0$ entonces los autovalores son iguales y negativos, por tanto, por (1) en la definición (1.4.7) se tiene el origen es un nodo del sistema (1.8).

(b2) $\tau^2 - 4\delta > 0$ entonces los autovalores son reales, distintos y negativos, es decir tienen el mismo signo. De nuevo por (1) en la definición (1.4.7) se tiene que el origen es un nodo del sistema (1.8).

Por tanto, si $\tau < 0$ por el teorema (1.4.2), ya que estos autovalores al ser negativos son no positivos el origen es un nodo estable.

Si $\tau > 0$ y

(b3) $\tau^2 - 4\delta = 0$ entonces los autovalores son iguales y positivos, entonces por la definición (1.4.7) inciso (1) tenemos que el origen es un nodo del sistema (1.8).

(b4) $\tau^2 - 4\delta > 0$ entonces los autovalores son reales, distintos y positivos. Luego por el inciso (1) en la definición (1.4.7) se tiene que el origen es un nodo del sistema (1.8).

Por lo tanto, si $\tau > 0$ por el teorema (1.4.2) el origen es un nodo inestable.

(c) Supongamos que, $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$. Cuando $\tau^2 - 4\delta < 0$ los autovalores λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, y tienen parte real igual a $\frac{\tau}{2} \neq 0$, ya que $\tau \neq 0$. Luego, por (3) en la definición (1.4.7) se tiene que el origen es un foco del sistema (1.8).

Además, se tienen los siguientes casos:

(c1) Si $\tau < 0$ entonces λ_1 y λ_2 tienen parte real negativa, es decir no positiva por lo tanto, por el teorema (1.4.2), el origen es un foco estable.

(c2) Si $\tau > 0$ entonces λ_1 y λ_2 tienen parte real positva, luego, por el teorema (1.4.2), el origen es un foco inestable.

(d) Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces, λ_1 y λ_2 son imaginarios puros, de modo que por la definición (1.4.7) inciso (4) se tiene que el origen es un centro del sistema (1.8).

$\square$

Definición 1.4.8. Un nodo o foco estable de (1.8) se denomina sumidero del sistema lineal y un nodo o foco inestable de (1.8) se denomina fuente del sistema lineal.

Observación 1.4.1. El teorema de Hartman-Grobman (1.4.1), el teorema (1.4.2) y el teorema (1.4.3) se pueden aplicar a los puntos de equilibrio distintos del origen, haciendo una traslación.

Sea $\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix}$ con $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y supongamos que $x_0 = (u^*, v^*) \neq (0,0)$ un punto de equilibrio de F. Esto es $\mathrm{F}(x_0) = (0,0)$. Ahora, haciendo un cambio de variable

$$\mathrm{Y} = \mathrm{x} - x_0 \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{Y} + x_0$$

Luego,

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = \frac{d\mathrm{x}}{dt} - \frac{dx_0}{dt}$$
$$\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = \frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{F}(\mathrm{x})$$

como $\mathrm{x} = \mathrm{Y} + x_0$, luego

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = \dot{\mathrm{Y}} = \mathrm{F}(\mathrm{Y} + x_0)$$

de modo que, este sistema va a cumplir que, cuando $\mathrm{Y} = 0$ el lado derecho de la ecuación anterior se anula, esto es,

$$\dot{\mathrm{Y}} = \mathrm{F}(0 + x_0) = \mathrm{F}(x_0) = 0$$

Por lo anterior, $\mathrm{Y} = 0$ es un punto de equilibrio del sistema $\dot{\mathrm{Y}}$. Con $\mathbf{A} = D\mathrm{F}(x_0)$.

1.4.2. Método directo de Lyapunov

Sin pérdida de generalidad supondremos que los puntos de equilibrio son $x_0 = 0$.

Definición 1.4.9. Sea $\mathrm{E} : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, entonces se dice que:

(a) $\mathrm{E}(x)$ es definida positiva cuando $\mathrm{E}(0) = 0$ y $\mathrm{E}(x) > 0$, $\forall x \neq 0$

(b) $\mathrm{E}(x)$ es semidefinida positiva cuando $\mathrm{E}(0) = 0$ y $\mathrm{E}(x) \geq 0$, $\forall x \neq 0$.

(c) $\mathrm{E}(x)$ es definida negativa cuando $\mathrm{E}(0) = 0$ y $\mathrm{E}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$.

(d) $\mathrm{E}(x)$ es semidefinida negativa cuando $\mathrm{E}(0) = 0$ y $\mathrm{E}(x) \leq 0$, $\forall x \neq 0$.

Definición 1.4.10. Se dice que $\mathrm{E} : D \to \mathbb{R}$, un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen , es una función de Lyapunov para el sistema (1.7) cuando verifica las dos condiciones siguientes:

(a) $\mathrm{E}(x)$ es definida positiva.

(b) $\dot{\mathrm{E}}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \left[\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{x}_1}, \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{x}_2}, \ldots, \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{x}_n}\right] \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ es semidefinida negativa.

(c) Si $\dot{\mathrm{E}}(x) < 0$ decimos que $\mathrm{E}(x)$ es una función de Lyapunov estricta.

Teorema 1.4.4. Sea $x_0 = 0$ un punto de equilibrio para el sistema (1.7) se verifican las siguientes propiedades [11]:

(a) Si existe una función de Lyapunov E(x) para el sistema autónomo (1.7), entonces x_0 es estable.

(b) Si existe una función de Lyapunov estricta para el sistema (1.7) entonces el punto x_0 es asintóticamente estable.

Demostración: Una prueba de este teorema puede encontrarse en [12]. □

1.5. Solución general a la ecuación cúbica.

En este trabajo es necesario conocer la solución de las ecuaciones cúbicas, por ello se va a encontrar la solución exacta de una ecuación cúbica general

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1.9}$$

De [13] se tiene que para encontrar las raíces de la ecuación (1.9), primero nos deshacemos del término cuadrático (x^2) haciendo la sustitución:

$$x = y - \frac{b}{3a} \tag{1.10}$$

Para obtener

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0 \tag{1.11}$$

Expandiendo la ecuación (1.11) y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación:

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0 \tag{1.12}$$

La ecuación (1.12) se denomina cúbica reducida ya que el término cuadrático está ausente. De acuerdo con [13] tener la ecuación en esta forma facilita la resolución de la ecuación cúbica. Primero, se convierte la ecuación cúbica reducida (1.12) en la forma

$$y^3 + \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \frac{1}{a}\left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0$$

$$y^3 + ey + f = 0 \tag{1.13}$$

donde

$$e = \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right) \text{ y } f = \frac{1}{a}\left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right)$$

La ecuación (1.13) en la forma

$$y^3 + ey = -f \tag{1.14}$$

y teniendo en cuenta que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

implica

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3. \tag{1.15}$$

Dado (1.14), según [14] sea $y = a + b$ y

$$ab = \frac{-e}{3} \quad \text{y} \quad a^3 + b^3 = -f$$

Se reemplaza a por $\frac{-e}{3b}$ (despejando a de la primera ecuación) en la segunda ecuación, para obtener

$$\left(\frac{-e}{3b}\right)^3 + b^3 = -f$$

y multiplicando por b^3 tenemos

$$(b^3)^2 + fb^3 - \left(\frac{e}{3}\right)^3 = 0 \tag{1.16}$$

La cual es una ecuación cuadrática en b^3 que puede ser resuelta con la fórmula cuadrática. Así

$$b^3 = \frac{-f}{2} \pm \frac{\sqrt{f^2 + 4\left(\frac{e}{3}\right)^3}}{2}$$

$$b^3 = \frac{-f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{3}\right)^3} \tag{1.17}$$

donde el discriminante de esta ecuación es $\Delta := \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{3}\right)^3$.

Nota 1. Se obtendrán dos raíces para b^3 ya que la ecuación (1.16) es una ecuación cuadrática. Luego, se tienen tres raíces para cada una de las dos raíces de b^3, por lo tanto, se tienen seis valores para b. Pero los seis valores de b darán seis valores para y; y de estos, tres valores serán idénticos a los otros tres. Entonces, solo se obtienen tres valores para y y por lo tanto tres valores para x.

Los siguientes pasos a veces involucran números complejos, por lo tanto se usará la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{1.18}$$

Sea $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Note que $\omega^3 = 1$ y $(\omega^2)^3 = 1$ así que 1, ω y ω^2 son todas las raíces cúbicas de 1. Usando ω, vemos que cualquier número real tiene tres raíces cúbicas. Dada una raíz cubica, μ, las otras serán $\omega\mu$ y $\omega^2\mu$.

Se usará esto para finalizar la ecuación (1.17) seleccionando una raíz cúbica b de ésta. Llamaremos a esa solución particular μ, es decir, $b = \mu$. Las otras soluciones para la ecuación (1.17) son $b = \omega\mu$ y $b = \omega^2\mu$.

Cada solución para (1.17) da un valor para a, donde $a = \frac{-e}{3b}$. En efecto, cuando $b = \mu$ entonces $a = \frac{-e}{3\mu}$, y llamemos a este valor ρ, luego $\rho := \frac{-e}{3\mu}$. Ahora, si $b = \omega\mu$ entonces

$$a = \frac{-e}{3\omega\mu} = \frac{-e}{3\mu\omega} \tag{1.19}$$

pero $\frac{-e}{3\mu} = \rho$, luego la ecuación (1.19) se convierte en

$$a = \frac{\rho}{\omega} \tag{1.20}$$

y dado que $\omega^3 = 1$ entonces $\omega\omega^2 = 1$, de donde $\omega = \frac{1}{\omega^2}$, luego $\frac{1}{\omega} = \omega^2$, así, reemplazando en (1.20) se llega a

$$a = \rho\omega^2 \tag{1.21}$$

De igual manera, cuando $b = \omega^2\mu$

$$a = \frac{-e}{3\mu\omega^2} \tag{1.22}$$

pero de nuevo, $\frac{-e}{3\mu} = \rho$ y $\frac{1}{\omega^2} = \omega$ de ahí que

$$a = \rho\omega \tag{1.23}$$

y finalmente, como $y = a + b$, entonces,

$$y_1 = \rho + \mu, \quad y_2 = \rho\omega^2 + \mu\omega, \quad y \quad y_3 = \rho\omega + \mu\omega^2 \tag{1.24}$$

son todas las soluciones de la ecuación cúbica en y. Además, dado que $x = y - \dfrac{b}{3a}$ entonces sustituyendo y por y_1, y_2 y y_3 se tienen las tres raíces de la ecuacion cúbica en x.

De acuerdo con [16] la clasificación de las raíces de la ecuación de tercer grado se resumen en

Discriminante	**Raíces de la ecuación**
$\Delta < 0$	Tres raíces reales distintas
$\Delta = 0$	Tres raíces reales, siendo dos o tres iguales
$\Delta > 0$	Una raíz real y dos complejas

Si las tres raíces en el segundo caso son las tres iguales, entonces ellas son nulas.

Capítulo 2

Análisis Matemático del modelo no espacial

En este capítulo se busca establecer la existencia de los equilibrios positivos del modelo no espacial con y sin efecto Allee. Del capítulo anterior sabemos que el modelo no espacial con efecto Allee viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u\left(\alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b}\right) - \dfrac{cuv}{mv+1} \triangleq f(u,v), \\ \dfrac{dv}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) \triangleq g(u,v), \end{cases} \tag{2.1}$$

mientras que el modelo no espacial sin efecto Allee es dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(\alpha - \beta u) - \dfrac{cuv}{mv+1}, \\ \dfrac{dv}{dt} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right), \end{cases} \tag{2.2}$$

Recordemos que $u(t)$ y $v(t)$ son las densidades de la presa y el depredador en el tiempo $t > 0$, el parámetro $\alpha > 0$ representa la tasa de crecimiento específica de la presa u, $K > 0$ es la capacidad de carga de la presa u, $c > 0$ denota la tasa de captura, $m > 0$ representa una reducción en la tasa de depredación en altas densidades de depredadores debido a la interferencia mutua entre estos en busca de alimentos, $\gamma > 0$ denota la tasa de muerte natural del depredador, la constante de proporcionalidad $\sigma > 0$ es la tasa de consumo de presas, $s = c\sigma > 0$ denota la tasa de conversión y $\beta = \frac{\alpha}{K} > 0$. Además,

$$\frac{qu}{u+b}$$

es el término de efecto Allee aditivo, $b, q > 0$ son constantes de efecto Allee.
Aunque no hace parte de lo que se quiere lograr en esta etapa se mostrará que las soluciones del modelo (2.1) son acotadas.

2.1. Cotas de soluciones positivas

Las soluciones del modelo (2.1) siempre existen y permanecen positivas. Además probemos que

$$\lim_{t\to\infty} \sup u(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} \quad y \quad \lim_{t\to\infty} \sup v(t) \leq \frac{s\alpha - \beta\gamma}{m\beta\gamma}$$

Supongamos que $0 \leq u(0) \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$, donde $\dfrac{\alpha}{\beta} = K$. Como $u > 0$ y $v > 0$ en $Int(\mathbb{R}^2_+)$ donde $Int(\mathbb{R}^2_+)$ denota el interior del cuadrante positivo de $\mathbb{R}^2_+$, cada solución $\phi(t) = (u(t), v(t))$ de (2.1), las cuales comienzan en $Int(\mathbb{R}^2_+)$, satisfacen la desigualdad

$$\frac{du}{dt} \leq u(\alpha - \beta u) \tag{2.3}$$

la cual se obtuvo de la primera ecuación de (2.1). Así, $u(t)$ puede ser comparada con las soluciones de

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta x)$$

con $x(0) = u(0) > 0$. Hallemos $x(t)$ mediante el método de separación de variables. Entonces

$$\int \frac{dx}{x(\alpha - \beta x)} = \int dt = t + C_0$$

Luego, utilizando fracciones parciales tenemos

$$\frac{1}{x(\alpha - \beta x)} = \frac{A}{x} + \frac{D}{\alpha - \beta x}$$

de dónde $A = \frac{1}{\alpha}$ y $D = \frac{\beta}{\alpha}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(\alpha-\beta x)} &= \int \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-\beta x}\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{\beta}{\alpha-\beta x}dx\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{\beta}{\beta x-\alpha}dx\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}(\ln|x| - \ln|\beta x-\alpha| + C_1) \\
&= -\frac{1}{\alpha}(\ln|\beta x-\alpha| - \ln|x| + C_1)
\end{aligned}$$

así,

$$-\frac{1}{\alpha}(\ln|\beta x-\alpha| - \ln|x| + C_1) = t + C_0$$

$$\ln|\beta x-\alpha| - \ln|x| = -\alpha t + C_2$$

Luego por propiedad del ln, se tiene

$$\ln\left|\frac{\beta x-\alpha}{x}\right| = -\alpha t + C_2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|\beta - \frac{\alpha}{x}\right| &= e^{-\alpha t + C_2} \\
&= e^{-\alpha t}e^{C_2}
\end{aligned}$$

y asi se tiene

$$\beta - \frac{\alpha}{x} = C_3 e^{-\alpha t}$$

y despejando x tenemos que $x(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}+ce^{-\alpha t}}$ con $c = \frac{1}{x(0)} - \frac{\beta}{\alpha}$. Por tanto, se tiene que que $u(t) \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$ para todo $t \geq 0$. En consecuencia

$$\lim_{t\to\infty}\sup u(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}$$

Como un resultado, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $T > 0$, tal que $u(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} + \epsilon$ para

$t > T$. Entonces reemplazando u por $\frac{\alpha}{\beta} + \epsilon$ en la segunda ecuación de (2.1), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &\leq v\left(-\gamma + \frac{s\left(\frac{\alpha}{\beta}+\epsilon\right)}{mv+1}\right) \\
&= v\left(\frac{-\gamma(mv+1) + s\left(\frac{\alpha}{\beta}+\epsilon\right)}{mv+1}\right) \\
&\leq v\left(-\gamma(mv+1) + s\left(\frac{\alpha}{\beta}+\epsilon\right)\right) \\
&= v\left(-\gamma(mv) - \gamma + s\left(\frac{\alpha}{\beta}+\epsilon\right)\right) \\
&= v\left(\left(\frac{s\alpha + s\beta\epsilon - \beta\gamma}{\beta}\right) - (\gamma m)v\right)
\end{aligned}$$

y procediendo de manera análoga como se hizo para (2.3) se obtiene, que para todo $\epsilon > 0$

$$v \leq \frac{s\alpha - \beta\gamma + s\beta\epsilon}{m\beta\gamma}$$

y como ϵ es arbitrario y si $s\alpha \geq \beta\gamma$ se tiene

$$\lim_{t\to\infty}\sup v(t) \leq \lim_{t\to\infty}\sup\left(\frac{s\alpha - \beta\gamma + s\beta\epsilon}{m\beta\gamma}\right) = \frac{s\alpha - \beta\gamma}{m\beta\gamma}$$

Por tanto

$$\lim_{t\to\infty}\sup v(t) \leq \frac{s\alpha - \beta\gamma}{m\beta\gamma}$$

Además, se puede obtener el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1. Todas las soluciones no negativas del modelo (2.1) que empiezan en $\mathbb{R}^2_+$ son uniformemente acotadas.

Demostración: Definamos la siguiente función

$$W(t) = u(t) + v(t)$$

y la derivada temporal de W con respecto a las soluciones del modelo (2.1) es:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = u\left(\alpha - \beta u - \frac{q}{u+b}\right) - \frac{cuv}{mv+1} + v\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right)$$

de (2.3) se tiene que

$$\frac{dW}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \leq u\left(\alpha - \beta u\right) + v\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right)$$

y para cada $\eta > 0$ se tiene

$$\frac{dW}{dt} \leq u\left(\alpha - \beta u\right) + v\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right) - \eta W + \eta W$$

como $0 \leq u(t) \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} + \eta W &\leq u\left(\alpha - \beta u\right) + v\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right) + \eta(u+v) \\
&= u\left(\alpha - \beta u\right) + v\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right) + \eta u + \eta v \\
&= u\left(\alpha + \eta - \beta u\right) + v\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right) + \eta v \\
&\leq u\left(\alpha + \eta - \beta u\right) + v\left(-\gamma + \frac{su}{mv}\right) + \eta v \\
&= u\left(\alpha + \eta - \beta u\right) - v\gamma + v\frac{su}{mv} + \eta v \\
&= u\left(\alpha + \eta - \beta u\right) + (\eta - \gamma)v + \frac{su}{m} \\
&\leq u\left(\alpha + \eta - \beta u\right) + \frac{s\alpha}{m\beta} + (\eta - \gamma)v
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ahora, hallemos el $\text{máx}_{\mathbb{R}_+}\left(u\left(\alpha + \eta - \beta u\right) + \dfrac{s\alpha}{m\beta}\right)$.

Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(u) = u\left(\alpha + \eta - \beta u\right) + \dfrac{s\alpha}{m\beta} = -\beta u^2 + u(\alpha + \eta) + \dfrac{s\alpha}{m\beta}$. Luego

$$f'(u) = -2\beta u + \alpha + \eta$$

e igualando a cero obtenemos $u = \dfrac{\alpha + \eta}{2\beta}$. Ahora, calculando la segunda derivada de f y evaluando en u se tiene que

$$f''\left(\frac{\alpha + \eta}{2\beta}\right) = -2\beta < 0$$

de modo que f tiene un máximo en $u = \dfrac{\alpha + \eta}{2\beta}$. Ahora, evaluamos u en f y obtenemos:

$$f\left(\frac{\alpha + \eta}{2\beta}\right) = \frac{(\alpha + \eta)^2}{4\beta} + \frac{s\alpha}{m\beta}$$

es así que, $\text{máx}_{\mathbb{R}_+}\left(u\left(\alpha+\eta-\beta u\right)+\dfrac{s\alpha}{m\beta}\right)=\dfrac{(\alpha+\eta)^2}{4\beta}+\dfrac{s\alpha}{m\beta}$. De lo anterior y de la última ecuación de (2.4) se tiene

$$\frac{dW}{dt}+\eta W\leq\frac{(\alpha+\eta)^2}{4\beta}+\frac{s\alpha}{m\beta}+(\eta-\gamma)v$$

luego de hacer algunos cálculos, se obtiene que

$$\frac{dW}{dt}+\eta W\leq\frac{4s\beta+m(\alpha+\eta)^2}{4m\beta}+(\eta-\gamma)v$$

y sea $0<\eta<\gamma$, entonces

$$\frac{dW}{dt}+\eta W\leq\frac{4s\beta+m(\alpha+\eta)^2}{4m\beta}\triangleq\psi$$

De manera que por el lema (1), $\forall t\geq T\geq 0$ tenemos

$$0\leq W(t)\leq\frac{\psi}{\eta}-\left(\frac{\psi}{\eta}-W(T)\right)e^{-(t-T)} \tag{2.5}$$

Entonces, si $\psi-\eta W(T)\geq 0$, se tiene que $0\leq W(t)\leq\dfrac{\psi}{\eta}-\left(\dfrac{\psi}{\eta}-W(T)\right)e^{-(t-T)}\leq\dfrac{\psi}{\eta}$ para todo $t\geq 0$. Esto, es

$$W(t)=u(t)+v(t)\leq\frac{\psi}{\eta}$$

Por tanto

$$\lim_{t\to+\infty}\sup(u(t)+v(t))\leq\frac{\psi}{\eta}$$

$\square$

Nota 2. Esta demostración difiere de la demostración del artículo [6].

Pasamos ahora a determinar la existencia del equilibriio positvo.

2.2. Existencia de los equilibrios positivos

Sabemos por la definición (1.4.2) que los puntos de equilibrio o estacionarios son estados invariantes en el tiempo tal que si (u_0,v_0) es un punto de equilibrio se tiene $f_1(u_0,v_0)=0=f_2(u_0,v_0)$, es decir, $u(t)$ y $v(t)$ son constantes en el tiempo, con $f=(f_1,f_2)$.

Nos enfocaremos en esta sección en la existencia de los equilibrios positivos del modelo (2.1). Cualquier equilibrio positivo $E(u,v)$ del modelo (2.1) satisface

$$\begin{cases} \alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b} - \dfrac{cv}{mv+1} = 0, \\ -\gamma + \dfrac{su}{mv+1} = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

Despejando v de la primera ecuación de (2.6) y reemplazando en la segunda ecuación se tiene

$$ms\beta u^3 + (cs + bms\beta - ms\alpha)u^2 + (bcs + msq - bms\alpha - c\gamma)u - bc\gamma = 0. \tag{2.7}$$

Ahora, sea u una raíz real positiva de la siguiente ecuación cúbica:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x - a_3 = 0. \tag{2.8}$$

donde $a_0 = ms\beta$, $\quad 3a_1 = cs + bms\beta - ms\alpha$, $\quad 3a_2 = bcs + msq - bms\alpha - c\gamma$, $\quad a_3 = bc\gamma$. Por la teoría vista en la sección (1.5), hagamos $x = \dfrac{z - a_1}{a_0}$ y reemplacemos en la ecuación (2.8) para obtener:

$$h(z) = z^3 + 3b_1z + b_2 = 0. \tag{2.9}$$

con $b_1 = a_0a_2 - a_1^2$, $\quad b_2 = a_0^2a_3 - a_0a_1a_2 + 2a_1^3$.

A continuación vamos a encontar la raíces de $h(z)$ y estudiaremos la existencia de las raíces positivas.

La ecuación (2.9) tiene la forma de la ecuación (1.13). Por lo tanto, con $e = 3b_1$ y $f = b_2$ por la ecuación (1.15), se tiene que

$$ab = \frac{-3b_1}{3} = -b_1$$

$$a^3 + b^3 = -b_2$$

Luego, despejando a de la primera ecuación se tiene $a = \dfrac{-b_1}{b}$ y se reemplaza en la segunda ecuación, para obtener

$$\left(\frac{-b_1}{b}\right)^3 + b^3 = -b_2$$

y multiplicando por b^3 tenemos

$$(b^3)^2 + b_2b^3 - (b_1)^3 = 0 \tag{2.10}$$

y por la ecuación (1.17) se tiene

$$b^3 = \frac{-b_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + (b_1)^3} \tag{2.11}$$

con $\Delta := \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + (b_1)^3$.

De otro lado, escogamos

$$b^3 = \frac{-b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + (b_1)^3}$$

y sea

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{-b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + (b_1)^3}}$$

una solución particular para b^3. Luego como cada solución de (2.10) da un valor para a y $a = \frac{-b_1}{b}$ entonces, $\rho = \frac{-b_1}{\mu}$, esto es,

$$\rho = \frac{-b_1}{\sqrt[3]{\frac{-b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + (b_1)^3}}}$$

como $z = a + b$ entonces las soluciones de $h(z)$ vienen dadas por $z_1 = \rho + \mu$, es decir,

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{-b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + (b_1)^3}} - \frac{b_1}{\sqrt[3]{\frac{-b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + (b_1)^3}}}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt[3]{(-4b_2 + 4\sqrt{4b_1^3 + b_2^2})^2} - 4b_1}{2\sqrt[3]{-4b_2 + 4\sqrt{4b_1^3 + b_2^2}}}$$

y por $z_2 = \rho\omega + \mu\omega^2$

$$z_2 = \rho\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{de2}\right) + \mu\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{de2}\right)$$

de modo que

$$z_2 = \frac{-(\rho + \mu)}{2} + \frac{(\rho - \mu)\sqrt{3}i}{2}$$

y como $z_1 = \rho + \mu$ entonces

$$z_2 = \frac{-z_1}{2} + \frac{(\rho - \mu)\sqrt{3}i}{2}$$

Además, dado que

$$\begin{aligned}
\frac{(\rho-\mu)\sqrt{3}i}{2} &= \frac{(\rho-\mu)\sqrt{3}i}{2}\frac{\sqrt{\rho+\mu}}{\sqrt{\rho+\mu}} \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho-\mu)^2(\rho+\mu)} \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho+\mu)(\rho^2-2\rho\mu+\mu^2)} \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho+\mu)(\rho^2+2\rho\mu+\mu^2-4\rho\mu)} \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho+\mu)((\rho+\mu)^2-4\rho\mu)} \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho+\mu)^3-4\rho\mu(\rho+\mu)} \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho+\mu)^3-3\rho\mu(\rho+\mu)-\rho\mu(\rho+\mu)} \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho^3+\mu^3)-\rho\mu(\rho+\mu)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{-3\rho^3-3\mu^3+3\rho\mu(\rho+\mu)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{-4\rho^3+\rho^3-4\mu^3+\mu^3+3\rho\mu(\rho+\mu)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(\rho+\mu)^3-4(\rho^3+\mu^3)}
\end{aligned}$$

finalmente, como $b_2 = -(a^3 + b^3)$ pero $a = \rho$ y $b = \mu$ entonces,

$$\frac{(\rho-\mu)\sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2\sqrt{z_1}}\sqrt{(z_1)^3 + 4b_2}$$

Así,

$$z_2 = \frac{-z_1}{2} + \frac{\sqrt{z_1^3 + 4b_2}}{2\sqrt{z_1}}$$

De otra parte, dado que $z_3 = \rho\omega^2 + \mu\omega$ entonces

$$z_3 = \frac{-(\rho+\mu)}{2} + \frac{(\mu-\rho)\sqrt{3}i}{2}$$

y $(\mu - \rho) = -(\rho - \mu)$ se tiene

$$z_3 = \frac{-z_1}{2} - \frac{(\rho - \mu)\sqrt{3}i}{2}$$

y por el resultado anterior se concluye que

$$z_3 = \frac{-z_1}{2} - \frac{\sqrt{z_1^3 + 4b_2}}{2\sqrt{z_1}}$$

Tenemos, ahora el siguiente lema que nos permitirá demostrar los teoremas referentes a la existencia de los equilibrios positivos del modelo (2.1).

Lema 2. (a) Si $b_2 < 0$, la ecuación (2.9) tiene una única raíz positiva.

(b) Suponga que $b_2 > 0$ y $b_1 < 0$ se cumplen.

(b1) Si $b_2^2 + 4b_1^3 < 0$ la la ecuación (2.9) tiene dos raíces positivas.

(b2) Si $b_2^2 + 4b_1^3 = 0$ tiene una raíz positiva de multiplicidad dos;

(c) Si $b_2 = 0$ y $b_1 < 0$, la ecuación (2.9) tiene una única raíz positiva.

Demostración. (a) Supongamos que $b_2 < 0$.

Si $b_1 \geq 0$ entonces tenemos: $h'(z) = 3z^2 + 3b_1 > 0$ asi, $h(z)$ es estrictamente creciente y continua en $(0, \infty)$, luego $h(z) > h(0) = b_2$ para $z \neq 0$ y como $b_2 < 0$ se concluye que $h(z)$ tiene una única raíz positiva.

Ahora, si $b_1 \leq 0$, sea $n^2 = -b_1 > 0$ entonces $n = \sqrt{-b_1}$. Así,

$$h'(z) = 3(z^2 - n^2) = 3(z - n)(z + n)$$

Luego $h'(n) = 0 = h'(-n)$, por tanto n y $-n$ son puntos críticos de h. Además, $h''(z) = 6z$ y evaluando n y $-n$ en $h''(z)$ tenemos

$$h''(n) = 6n > 0, \quad \text{y} \quad h''(n) = -6n < 0$$

Por tanto $h(z)$ alcanza un mínimo en $z = n > 0$ y un máximo en $z = -n < 0$, además $h(n) < h(0) = b_2 < 0$ y como $h'(z) > 0$ cuando $z > n$ entonces existe un $z_0 > n > 0$ tal que $h(z_0) = 0$. Por lo tanto $h(z)$ tiene una única raíz positiva.

(b) Si $b_2 > 0$ entonces $b_1 < 0$, de lo contrario se tendría que $h'(z) > 0$ de donde $h(z)$ al igual que en (a) sería estrictamente creciente, pero $h(z) > h(0) = b_2 > 0$ por lo cual $h(z) = z^3 + 3b_1 z + b_2$ podría no ser igual a cero en $(0, \infty)$.

De (a) sabemos que $h(z)$ alcanza un mínimo y un máximo en $z = n$ y $z = -n$ respectivamente. Ahora, siguiendo a Lima (1987, p. 22) tenemos que

$$\begin{aligned} h(n)h(-n) &= b_2^2 - 4(n^3)^2 \\ &= b_2^2 - 4(n^2)^3 \\ &= b_2^2 - 4(-b_1)^3 \\ &= b_2^2 + 4b_1^3 \end{aligned}$$

Por tanto el signo de $h(n)h(-n)$ es el mismo que el del discriminante Δ.

(b1) Si $b_2^2 + 4b_1^3 < 0$, entonces $h(z)$ y $h(-n)$ tienen signos contrarios y además, como $h(-n)$ es un máximo y $h(n)$ un mínimo y dado que $h(0) = b_2 > 0$ y que $h'(z) < 0$ cuando $-n < z < n$, esto es, $h(z)$ es decreciente para $-n < z < n$, la ecuación (2.9) tiene una raíz positiva. Además, de igual manera que en (a), $h(z)$ es creciente cuando $z > n$, por lo tanto existe un $z_0 > n > 0$ tal que $h(z_0) = 0$. Por lo tanto $h(z)$ tiene dos raíces positivas.

$$z_1 = \frac{\sqrt[3]{(-4b_2 + 4\sqrt{4b_1^3 + b_2^2})^2} - 4b_1}{2\sqrt[3]{-4b_2 + 4\sqrt{4b_1^3 + b_2^2}}} \quad y \quad z_2 = \frac{-z_1}{2} + \frac{\sqrt{z_1^3 + 4b_2}}{2\sqrt{z_1}}$$

(b2) Si $b_2^2 + 4b_1^3 = 0$, entonces $h(n)h(-n) = 0$, es decir, $h(n) = 0$ o $h(-n) = 0$. Dado que $h(-n) = 2(-b_1)\sqrt{-b_1} + b_2 > 0$ se tiene $h(n) = 0$, de donde $b_2 = 2n^3$. Ahora, reemplazando en la ecuación (2.9) tenemos:

$$h(z) = z^3 - 3n^2 z + 2n^3 \tag{2.12}$$

Además, por el método de división sintética tenemos que $z = n$ es una raíz positiva de (2.12). Así,

$$h(z) = (z - n)(z^2 + nz - 2n^2)$$

De ahí que

$$h(z) = (z-n)(z-n)(z+2n)$$

$$h(z) = (z-n)^2(z+2n)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.9) tiene una raíz positiva de multiplicidad dos

$$z_2 = \frac{-z_1}{2} + \frac{\sqrt{z_1^3 + 4b_2}}{2\sqrt{z_1}} = \sqrt{|b1|}$$

donde $z_1 = \dfrac{\sqrt[3]{(-4b_2 + 4\sqrt{4b^3 + b_2^2})^2} - 4b_1}{2\sqrt[3]{-4b_2 + 4\sqrt{4b_1^3 + b_2^2}}}$.

(c) Cuando $b_2 = 0$ entonces $b_1 < 0$. De lo contrario, del mismo modo que en (b) se tendría que $h(z) = z^3 + 3b_1 z + b_2$ podría no ser igual a cero en $(0, \infty)$. Así tenemos $h(z) = z^3 + 3b_1 z = 0$ implica que $z = \pm\sqrt{-3b_1}$. Por tanto la ecuación (2.9) tiene una única raíz positiva $z = +\sqrt{-3b_1}$.

$\square$

Así mismo tenemos:

$$b_1 = a_0 a_2 - a_0^2 = \frac{1}{3}m^2 s^2 \beta q + \frac{1}{3} ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) - \frac{s^2}{9}(m\alpha - bm\beta - c)^2$$

$$\begin{aligned} b_2 &= a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3 \\ &= \frac{1}{3}m^2 s^3 q\beta(m\alpha - bm\beta - c) + \frac{1}{3}ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ &\quad - \frac{2s^3}{27}(m\alpha - bm\beta - c)^3 - bcm^2 s^2 \beta^2 \gamma \end{aligned}$$

Luego, con $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$ podemos determinar que $q = f_1(b)$ y $q = f_2(b)$ al despejar q de las ecuaciones anteriores. Donde

$$f_1(b) \triangleq \frac{-3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) + s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2}{3s^2 m^2 \beta}$$

$$f_2(b) \triangleq \frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2 s^2 \beta^2 \gamma}{9m^2 s^3 \beta(m\alpha - bm\beta - c)}$$

Teorema 2.2.1 (*Existencia de los equilibrios positivos del modelo no espacial* (2.1) *con efecto Allee débil*).

(a) Si cualquiera de las siguientes desigualdades se cumplen:

$m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $0 < q < \text{mín}\{b\alpha, f_2(b)\}$;

$m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $\text{máx}\{0, f_2(b)\} < q < b\alpha$;

El modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo

$$E_w = (u_w, v_w) = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

(b) Si cualquiera de las siguientes desigualdades se cumplen:

$m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $\text{máx}\{0, f_2(b)\} < q < \text{mín}\{b\alpha, f_1(b)\}$;

$m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $0 < q < \text{mín}\{b\alpha, f_1(b), f_2(b)\}$,

entonces:

(b1) Si $b_2^2 + 4b_1^3 < 0$, el modelo (2.1) tiene dos equilibrios positivos

$$E_{w3} = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right) \text{ y } E_{w4} = \left(\frac{z_2 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_2 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right);$$

(b2) $b_2^2 + 4b_1^3 = 0$, el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo

$$\hat{E}_w = (\hat{u}_w, \hat{v}_w) = \left(\frac{\sqrt{|b_1|} - a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{|b_1|} - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

(c) Si $0 < q < \text{mín}\{b\alpha, f_2(b)\}$ y $b_2 = 0$ se cumple, el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo

$$\tilde{E}_w = (\tilde{u}_w, \tilde{v}_w) = \left(\frac{\sqrt{-3b_1} - a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{-3b_1} - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right)$$

Demostración. (a).Supongamos que se cumple

$$m\alpha - bm\beta - c > 0 \text{ y } 0 < q < \text{mín}\{b\alpha, f_2(b)\}.$$

Entonces, cuando $q < f_2(b)$ se tiene

$$q < \frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)}$$

como $f_2(b) > 0$ y $m\alpha - bm\beta - c > 0$, el denominador y numerador de $f_2(b)$ son mayores que cero, así

$$9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) < -9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma$$

de modo que

$$9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ -2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma < 0$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{27}$ obtenemos

$$\frac{1}{3}m^2s^3q\beta(m\alpha - bm\beta - c) + \frac{1}{3}ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ -\frac{2s^3}{27}(m\alpha - bm\beta - c)^3 - bcm^2s^2\beta^2\gamma < 0$$

esto es, $b_2 < 0$. Luego por el lema (2).(a) se concluye que el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo. Asimismo, sabemos que $x = \dfrac{z - a_1}{a_0}$. Pero $x = u$, así, $u = \dfrac{z - a_1}{a_0}$. Además, ya que z_1 es la raíz positiva de $h(z)$ por lema (2).(a) se tiene que $u_w = \dfrac{z_1 - a_1}{a_0}$. De otro lado, de la segunda ecuación de (2.6) se tiene

$$\gamma = \frac{su}{mv + 1}$$

y despejando v se tiene

$$v = \frac{su - \gamma}{\gamma m} = \frac{su}{\gamma m} - \frac{1}{m}$$

Ahora, reemplazando u_w en la ecuación anterior se llega a

$$v_w = \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}$$

Como consecuencia $E_w = (u_w, v_w) = \left(\dfrac{z_1 - a_1}{a_0}, \dfrac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \dfrac{1}{m}\right)$.

En el caso en que $0 < q < b\alpha$ la demostración se hace de manera similar.

De otro lado, supongamos que se cumple $m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $\max\{0, f_2(b)\} < q < b\alpha$.

Por su parte, cuando $f_2(b) < q < b\alpha$ se tiene

$$\frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)} < q$$

Sabiendo que $f_2(b) > 0$ y que $m\alpha - bm\beta - c < 0$ se tiene que el numerador de $f_2(b)$ es menor que cero, por tanto,

$$\begin{aligned}-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma \\ > 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}0 > {} & 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ & - 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma\end{aligned}$$

y finalmente multiplicando por $\dfrac{1}{27}$ se llega a que $b_2 < 0$.

Así, $b_2 < 0$. Luego por el lema (2).(a) se concluye que el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo $E_w = (u_w, v_w) = \left(\dfrac{z_1 - a_1}{a_0}, \dfrac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \dfrac{1}{m}\right)$.
Cuando $0 < q < b\alpha$ la demostración se hace de manera similar.

(b).Supongamos ahora que $m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $\max\{0, f_2(b)\} < q < \min\{b\alpha, f_1(b)\}$, y además que se tiene el caso en que $f_2(b) < q < f_1(b)$. Luego, cuando $f_2(b) < q$, se tiene que $b_2 > 0$. En efecto

$$\frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)} < q$$

Como $m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $f_2(b) > 0$ ya que $\max\{0, f_2(b)\} = f_2(b)$ se obtiene

$$\begin{aligned}-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 \\ +27bcm^2s^2\beta^2\gamma < 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}0 &< 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma)\\ &\quad - 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma\end{aligned}$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{27}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}0 &< \frac{1}{3}m^2s^3q\beta(m\alpha - bm\beta - c) + \frac{1}{3}ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma)\\ &\quad - \frac{2s^3}{27}(m\alpha - bm\beta - c)^3 - bcm^2s^2\beta^2\gamma\end{aligned}$$

esto es, $b_2 > 0$.

Ahora, si $q < f_1(b)$,entonces

$$q < \frac{-3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) + s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2}{3s^2m^2\beta}$$

Como $f_1(b) > 0$ ya que $f_2(b) > 0$, se tiene

$$3s^2m^2\beta q + 3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) - s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2 < 0$$

y dividiendo por 9 se obtiene que $b_1 < 0$. Por tanto se ha obtenido $b_2 > 0$ y $b_1 < 0$. En los otros casos la demostración de esta parte se hace de manera similar.

De otro lado, supongamos que se cumple $(m\alpha - bm\beta - c) < 0$ y que $0 < q < b\alpha$, esto es, $\text{mín}\{b\alpha, f_1(b), f_2(b)\} = b\alpha$. Dado que $\text{mín}\{b\alpha, f_1(b), f_2(b)\} = b\alpha$ entonces, $b\alpha < f_1(b)$ y $b\alpha < f_2(b)$, por tanto si $0 < q < b\alpha$ se tiene que

$$\begin{aligned}0 < q < f_1(b)\\ 0 < q < f_2(b)\end{aligned}$$

de donde, si $0 < q < f_1(b)$ entonces

$$q < \frac{-3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) + s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2}{3s^2m^2\beta}$$

y como $f_1(b) > 0$ se tiene

$$q3s^2m^2\beta + 3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) - s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2 < 0$$

luego $b_1 < 0$. Ahora si $0 < q < f_2(b)$, entonces

$$q < \frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)}$$

Como $m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $f_2(b) > 0$, entonces el denominador y numerador de $f_2(b)$ son menores que cero. Luego

$$\begin{aligned} 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) > &-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ &+ 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ -2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma > 0 \end{aligned}$$

y multiplicando por $\frac{1}{27}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}m^2s^3q\beta(m\alpha - bm\beta - c) + \frac{1}{3}ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ -\frac{2s^3}{27}(m\alpha - bm\beta - c)^3 - bcm^2s^2\beta^2\gamma > 0 \end{aligned}$$

esto es, $b_2 > 0$. Por tanto $b_2 > 0$ y $b_1 < 0$. En el caso en que $\min\{b\alpha, f_1(b), f_2(b)\} \neq b\alpha$ la prueba es similar.

Finalmente, para las dos desigualdades se ha obtenido $b_2 > 0$ y $b_1 < 0$ y ahora, suponiendo que se cumplen:

(b1) $b_2^2 + 4b_1^3 < 0$. Entonces, por el lema (2) inciso (b) y (b1) se tiene que el modelo (2.1) tiene dos equilibrios positivos:

$$E_{w3} = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right) \text{ y } E_{w4} = \left(\frac{z_2 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_2 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

Los cuales se obtienen de la misma manera que (a).

(b2) $b_2^2 + 4b_1^3 = 0$. Se tiene por el lema (2) inciso (b) y (b2) que el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo dado por $\hat{E_w} = \left(\frac{\sqrt{|b_1|} - a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{|b_1|} - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right)$.

(c). Supongamos que $0 < q < f_1$ y $b_2 = 0$, entonces

$$q3s^2m^2\beta + 3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) - s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2 < 0$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{9}$ se tiene como resultado, $b_1 < 0$ y nuevamente por el lema (2) inciso (c) se concluye que el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo dado por $\tilde{E}_w = \left(\frac{\sqrt{-3b_1}-a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{-3b_1}-a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right)$. □

Teorema 2.2.2 (*Existencia de los equilibrios positivos del modelo no espacial* (2.1) *con efecto Allee fuerte*)**.**

(a) si cualquiera de las siguientes desigualdades se cumple:

$m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $b\alpha < q < f_2(b)$;

$m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $\max\{f_2(b), b\alpha\} < q$,

el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo

$$E_s = (u_s, v_s) = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

(b) si cualquiera de las siguientes desigualdades se cumplen:

$m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $b\alpha < q < \min\{f_1(b), f_2(b)\}$;

$m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $\max\{f_2(b), b\alpha\} < q < f_1(b)$,

(b1) Si $b_2^2 + 4b_1^3 < 0$, el modelo (2.1) tiene dos equilibrios positivos

$$E_{s3} = (u_{s3}, v_{s3}) = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right),$$
$$E_{s4} = (u_{s4}, v_{s4})\left(\frac{z_2 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_2 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

(b2) $b_2^2 + 4b_1^3 = 0$, el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo

$$\hat{E}_s = (\hat{u}_s, \hat{v}_s) = \left(\frac{\sqrt{|b_1|} - a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{|b_1|} - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

(c) Si $b\alpha < q < f_1(b)$ y $b_2 = 0$ se cumple, el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo

$$\tilde{E}_s = (\tilde{u}_s, \tilde{v}_s) = \left(\frac{\sqrt{-3b_1} - a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{-3b_1} - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

Demostración. (a) Supongamos que se cumple la primera desigualdad, esto es, $(m\alpha - bm\beta - c) > 0$ y que $b\alpha < q < f_2(b)$. Entonces, cuando $q < f_2(b)$ se tiene

$$q < \frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)}$$

como $f_2(b) > 0$ ya que $q > 0$ y $(m\alpha - bm\beta - c) > 0$, el denominador y numerador de $f_2(b)$ son mayores que cero, así

$$\begin{aligned} 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) < &-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ &+ 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ -2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma < 0 \end{aligned}$$

y multiplicando por $\frac{1}{27}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}m^2s^3q\beta(m\alpha - bm\beta - c) + \frac{1}{3}ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ -\frac{2s^3}{27}(m\alpha - bm\beta - c)^3 - bcm^2s^2\beta^2\gamma < 0 \end{aligned}$$

esto es, $b_2 < 0$. En consecuencia, por el lema (2) inciso (a) se tiene que el modelo (2.1) tiene un único punto de equilibrio positivo dado por

$$E_s = (u_s, v_s) = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

Supongamos ahora que se cumple $m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $f_2(b) < q$, con $\max\{f_2(b), b\alpha\} = f_2(b)$; en el caso en el que $\max\{f_2(b), b\alpha\} = b\alpha$ se procede de manera similar. Ahora, Como $\max\{f_2(b), b\alpha\} = f_2(b)$ y $b\alpha > 0$ entonces $f_2(b) > 0$. Luego, cuando $f_2(b) < q$ se tiene

$$\frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)} < q$$

como $f_2(b) > 0$ y $m\alpha - bm\beta - c < 0$ entonces el numerador y denominador de $f_2(b)$ son menores que cero, en consecuencia

$$\begin{aligned}-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma \\ > 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c)\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}0 &> 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ &\quad - 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma\end{aligned}$$

y finalmente multiplicando por $\frac{1}{27}$ se llega a que $b_2 < 0$. Luego por el lema (2) inciso (a) se tiene que el modelo (2.1) tiene un único punto de equilibrio positivo dado por

$$E_s = (u_s, v_s) = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right).$$

(b) Supongamos ahora que $m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $b\alpha < q < f_1(b)$, esto es, $\text{mín}\{f_1(b), f_2(b)\} = f_1(b)$. Entonces $q < f_1(b)$ implica que $b_1 < 0$. En efecto:

$$q < \frac{-3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) + s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2}{3s^2m^2\beta}$$

Como $f_1(b) > 0$ ya que $b\alpha > 0$, se tiene

$$3s^2m^2\beta q + 3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) - s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2 < 0$$

y dividiendo por 9 se obtiene que $b_1 < 0$.

Además, como $\text{mín}\{f_1(b), f_2(b)\} = f_1(b) > 0$ entonces $f_1(b) < f_2(b)$, es decir, se cumple también que $b\alpha < q < f_2(b)$ y $f_2(b) > 0$, luego

$$q < \frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)}$$

Como $m\alpha - bm\beta - c < 0$ y $f_2(b) > 0$, entonces el denominador y numerador de $f_2(b)$ son menores que cero. Luego

$$\begin{aligned}9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) &> -9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) \\ &\quad + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma\end{aligned}$$

por lo cual

$$9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma)$$
$$-2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma > 0$$

y multiplicando por $\frac{1}{27}$ obtenemos que

$$\frac{1}{3}m^2s^3q\beta(m\alpha - bm\beta - c) + \frac{1}{3}ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma)$$
$$-\frac{2s^3}{27}(m\alpha - bm\beta - c)^3 - bcm^2s^2\beta^2\gamma > 0$$

esto es, $b_2 > 0$. Por ende, hemos demostrado si se cumple la primera desigualdad se tiene que $b_1 < 0$ y $b_2 > 0$. Cuando $0 < q < f_2(b)$ se procede de manera similar.

Ahora, supongamos que $m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $\max\{f_2(b), b\alpha\} < q < f_1(b)$, y supongamos $b\alpha < q < f_1(b)$. Esto es, $\max\{f_2(b), b\alpha\} = b\alpha$ lo cual implica $f_2(b) < b\alpha$,esto es, $f_2(b) < q$, de donde $b_2 > 0$. En efecto, $f_2(b) < q$ implica

$$\frac{-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 + 27bcm^2s^2\beta^2\gamma}{9m^2s^3\beta(m\alpha - bm\beta - c)} < q$$

Como $m\alpha - bm\beta - c > 0$ y $f_2(b) > 0$ ya que $\max\{f_2(b), b\alpha\} = b\alpha > 0$ se obtiene

$$-9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma) + 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3$$
$$+27bcm^2s^2\beta^2\gamma < 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c)$$

luego

$$0 < 9m^2s^3\beta q(m\alpha - bm\beta - c) + 9ms^2\beta(m\alpha - bm\beta - c)(bcs - bms\alpha - c\gamma)$$
$$- 2s^3(m\alpha - bm\beta - c)^3 - 27bcm^2s^2\beta^2\gamma$$

y multiplicando por $\frac{1}{27}$ obtenemos que $b_2 > 0$.
Por otro lado, si $q < f_1(b)$, entonces

$$q < \frac{-3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) + s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2}{3s^2m^2\beta}$$

Como $f_1(b) > 0$

$$3s^2m^2\beta q + 3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) - s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2 < 0$$

y dividiendo por 9 se obtiene que $b_1 < 0$. Así, hemos obtenido nuevamente $b_2 < 0$ y $b_1 < 0$. Cabe señalar que si se tiene $b\alpha < q < f_1(b)$ se procede de manera similar.

De lo anterior, para ambas desigualdades $b_2 > 0$ y $b_1 < 0$ por tanto, suponiendo que

(b1) $b_2^2 + 4b_1^3 < 0$. Entonces, por el lema (2) inciso (b) y (b1) se tiene que el modelo (2.1) tiene dos equilibrios positivos

$$E_{s3} = \left(\frac{z_1 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_1 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right) \quad \text{y} \quad E_{s4} = \left(\frac{z_2 - a_1}{a_0}, \frac{s(z_2 - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right)$$

Los cuales se obtienen de la misma manera que en (a) del teorema anterior.

(b2) $b_2^2 + 4b_1^3 = 0$. Se tiene por los incisos (b) y (b2) del lema (2) que el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo dado por $\hat{E}_s = \left(\frac{\sqrt{|b_1|} - a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{|b_1|} - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right)$.

(c) $b\alpha < q < f_1(b)$ implica que $f_1(b) > 0$ porque $b\alpha > 0$ de ahí que, cuando $q < f_1(b)$ se tenga

$$q3s^2m^2\beta + 3ms\beta(bcs - bms\alpha - c\gamma) - s^2(m\alpha - bm\beta - c)^2 < 0$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{9}$ se tiene como resultado, $b_1 < 0$ y como $b_2 = 0$, entonces, nuevamente por el lema (2) inciso (c) se concluye que el modelo (2.1) tiene un único equilibrio positivo dado por $\tilde{E}_s = (\tilde{u}_s, \tilde{v}_s) = \left(\frac{\sqrt{-3b_1} - a_1}{a_0}, \frac{s(\sqrt{-3b_1} - a_1)}{a_0 m\gamma} - \frac{1}{m}\right)$.

□

En el caso del modelo (2.1) sin efecto Allee ($q = 0$) o modelo (2.2) existen dos equilibrios en la frontera:$E_0 = (0, 0)$ cuando $u = 0$ y $v = 0$, $E_1 = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ cuando $u = \dfrac{\alpha}{\beta}$ y un único equilibrio positivo $E^* = (u^*, v^*)$ con $s\alpha > \beta\gamma$, donde

$$u^* = \frac{ms\alpha - cs + \sqrt{s^2(m\alpha - c)^2 + 4cms\beta\gamma}}{2ms\beta} \qquad y \qquad v^* = \frac{su^* - \gamma}{m\gamma}.$$

Este último equilibrio se halla igualando el modelo (2.2) a cero, de lo cual se obtiene

$$\begin{cases} \alpha - \beta u - \dfrac{cv}{mv+1} = 0, \\ -\gamma + \dfrac{su}{mv+1} = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

Ahora, despejando v de la segunda ecuación de (2.13) se obtiene $v = \dfrac{su-\gamma}{\gamma m}$ y reemplazando en la primera ecuación de (2.13) tenemos

$$\alpha - \beta u - \frac{c\left(\dfrac{su-\gamma}{\gamma m}\right)}{m\left(\dfrac{su-\gamma}{\gamma m}\right)+1} = 0$$

De aqui que,

$$\alpha - \beta u - \frac{c(su-\gamma)}{msu} = 0$$

luego,

$$\frac{(\alpha-\beta u)msu - c(su-\gamma)}{msu} = 0$$

$$(\alpha-\beta u)msu - c(su-\gamma) = 0$$

$$\alpha msu - \beta u^2 ms - csu + c\gamma = 0$$

Por tanto

$$\beta msu^2 + (cs - ms\alpha)u + c\gamma = 0$$

La cual es una ecuación de grado dos en u. Así

$$u = \frac{ms\alpha - cs \pm \sqrt{s^2(m\alpha - c)^2 + 4cms\beta\gamma}}{2m\beta s}$$

de donde

$$u = \frac{ms\alpha - cs + \sqrt{s^2(m\alpha - c)^2 + 4cms\beta\gamma}}{2m\beta s}$$

Luego, haciendo $u = u^*$ y reemplazando u^* en v siendo éste positivo cuando $s\alpha > \beta\gamma$ y haciendo $v = v^*$ se tiene $E^* = (u^*, v^*)$. Note que si $s\alpha = \beta\gamma$ entonces

$$u^* = \frac{\alpha}{\beta} = K \quad \text{y} \quad v^* = 0.$$

Capítulo 3

Estabilidad de los equilibrios

3.1. El caso sin efecto Allee

De la sección 2.2 sabemos que el modelo (2.1) sin efecto Allee o modelo (2.2) tiene dos equilibrios en la frontera $E_0 = (0,0)$, $E_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ y un único equilibrio positivo $E^* = (u^*, v^*)$ con $s\alpha > \beta\gamma$. La matriz jacobiana del modelo (2.2) esta dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta u - \dfrac{cv}{mv+1} & \dfrac{-(mv+1)cu + cumv}{(mv+1)^2} \\ \dfrac{sv}{mv+1} & -\gamma + \dfrac{(mv+1)su - suvm}{(mv+1)^2} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Las matrices jacobianas alrededor de E_0, E_1 y E^* son respectivamente:

$$\mathbf{A}_{E_0} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_{E_1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \dfrac{-c\alpha}{\beta} \\ 0 & -\gamma + \dfrac{s\alpha}{\beta} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_{E^*} = \begin{pmatrix} -\beta u^* & -\dfrac{cu^*}{(mv^*+1)^2} \\ \dfrac{sv^*}{mv^*+1} & -\dfrac{msu^*v^*}{(mv^*+1)^2} \end{pmatrix}$$

Para obtener la primera entrada dela matriz $\mathbf{A}_{E^*}$ se tuvo en cuenta que E^* satisface

$$\begin{cases} \alpha - \beta u^* - \dfrac{cv^*}{mv^*+1} = 0, \\ -\gamma + \dfrac{su^*}{mv^*+1} = 0, \end{cases}$$

Además, la traza y el determinante de $\mathbf{A}_{E^*}$ son respectivamente

$$tr(\mathbf{A}_{E^*}) = -\beta u^* - \frac{msu^*v^*}{(mv^*+1)^2}$$
$$det(\mathbf{A}_{E^*}) = \frac{sm\beta(u^*)^2v^*}{(mv^*+1)^2} + \frac{scu^*v^*}{(mv^*+1)^3}.$$

Teorema 3.1.1. Para el modelo (2.2)

(a) E_0 es un punto silla.

(b) Si $s\alpha > \beta\gamma$, E_1 es un punto silla, mientras, si $s\alpha < \beta\gamma$, es un nodo estable.

(c) Si $s\alpha > \beta\gamma$, E^* es localmente asintóticamente estable.

Demostración: (a) De la matriz jacobiana A_{E_0} tenemos que los autovalores son $\lambda_1 = \alpha > 0$ y $\lambda_2 = -\gamma < 0$. Luego por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1), el sistema (2.2) y el sistema lineal

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (\alpha)u, \\ \dfrac{dv}{dt} = (-\gamma)v, \end{cases} \tag{3.2}$$

tienen la misma estructura cualitativa cerca de E_0. Además, ya que $det(E_0) = -\alpha\gamma < 0$, por el teorema (1.4.3) inciso (a) se tiene que $E_0 = (0,0)$ es un punto silla del sistema lineal (3.2) y en consecuencia es un punto silla del modelo (2.2).

(b) De A_{E_1} se tienen los siguientes autovalores $\lambda_1 = -\alpha < 0$ y $\lambda_2 = \left(-\gamma + \dfrac{s\alpha}{\beta}\right) = \dfrac{s\alpha - \beta\gamma}{\beta}$.

Nuevamente por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y la observación (1.4.1) el sistema (2.2) y el sistema lineal

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (-\alpha)u - \dfrac{c\alpha}{\beta}v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \left(\dfrac{s\alpha - \beta\gamma}{\beta}\right)v, \end{cases} \tag{3.3}$$

tienen la misma estructura cualitativa cerca de $(0,0)$.

(b1) Supongamos primero, que $s\alpha > \beta\gamma$. Entonces $\lambda_2 = \dfrac{s\alpha - \beta\gamma}{\beta} > 0$.

Como resultado $det(A_{E_0}) = -\alpha\left(\dfrac{s\alpha - \beta\gamma}{\beta}\right) < 0$, entonces por el teorema (1.4.3) y nuevamente por la observación (1.4.1) se tiene que E_1 es un punto silla para el sistema (3.3) y por lo tanto un punto silla para el modelo (2.2).

(b2) Seguidamente, supongamos $s\alpha < \beta\gamma$, luego $\lambda_2 = \dfrac{s\alpha - \beta\gamma}{\beta} < 0$. Por consiguiente, $det(A_{E_1}) = -\alpha\left(\dfrac{s\alpha - \beta\gamma}{\beta}\right) > 0$.

Al mismo tiempo, la $tr(A_{E_1}) = -\alpha + \left(\dfrac{s\alpha - \beta\gamma}{\beta}\right) < 0$ ya que $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_1 < 0$.

Ahora, probemos que $tr(A_{E_1})^2 - 4det(A_{E_1}) > 0$. Sabemos que

$$(\alpha\beta + (s\alpha - \beta\gamma))^2 > 0$$

Entonces,

$$\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta(s\alpha - \beta\gamma) + (s\alpha - \beta\gamma)^2 > 0$$

lo cual es igual a

$$\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta(s\alpha - \beta\gamma) + 4\alpha\beta(s\alpha - \beta\gamma) + (s\alpha - \beta\gamma)^2 > 0$$

$$(-\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(s\alpha - \beta\gamma) + (s\alpha - \beta\gamma)^2 - 4(-\alpha\beta(s\alpha - \beta\gamma)) > 0$$

$$(-\alpha\beta + (s\alpha - \beta\gamma))^2 - 4(-\alpha\beta(s\alpha - \beta\gamma)) > 0$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{\beta^2}$ tenemos

$$\left(\frac{-\alpha\beta + (s\alpha - \beta\gamma)}{\beta}\right)^2 - 4\left(\frac{-\alpha(s\alpha - \beta\gamma)}{\beta}\right) > 0$$

esto es, la $tr(A_{E_1})^2 - 4det(A_{E_1}) > 0$ por lo cual, procediendo como antes se concluye por el teorema (1.4.3) parte (b) y la observación (1.4.1) que E_1 es un nodo estable para el modelo (2.2).

(c) Supongamos que $s\alpha > \beta\gamma$ entoces el punto de equilibrio (E^*) es positivo, por lo tanto, se verifica que $tr(A_{E^*}) < 0$ ya que β, m, s, m son positivos, y también el $det(A_{E^*}) > 0$.

Luego por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.2) se tiene que E^* es localmente asintóticamente estable, ya que su traza, es decir, su parte real es negativa.

□

Teorema 3.1.2. Si $s\alpha > \beta\gamma$, el equilibrio positivo E^* del modelo (2.2) es globalmente asintóticamente estable.

Demostración: Supongamos que $s\alpha > \beta\gamma$ entonces esto garantiza que E^* es un equilibrio positivo. Se toma la siguiente función, definida para $u > 0$ y $v > 0$, dado que estamos trabajando con resultados que tengan sentido ecológico.

$$V(u,v) = \int_{u^*}^{u} \frac{\xi - u^*}{\xi} d\xi + \frac{c}{s(1+mv^*)} \int_{v^*}^{v} \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta. \tag{3.4}$$

Para mostrar que el punto de equilibrio (u^*, v^*) es globalmente asintóticamente estable se debe cumplir por la defınción (1.4.10) y por el teorema (1.4.4) lo siguiente:

(a) $\mathrm{V}(u,v)$ es definida positiva.

(b) $\dfrac{d\mathrm{V}}{dt}(u,v) = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\dfrac{dv}{dt}$ es definida negativa.

En efecto. Por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial u} = 1 - \dfrac{u^*}{u} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial v} = \dfrac{c}{s(1+mv^*)}\left(1 - \dfrac{v^*}{v}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Se ha igualado a cero para obtener los puntos de equilibrio de V.

De la primera ecuación de (3.5) se tiene que $u^* = u$ y de la segunda ecuación $v^* = v$. Asi, $(u,v) = (u^*, v^*)$, es el único punto de equilibrio de V.

Además,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial u^2}(u^*, v^*) = \dfrac{1}{u^*}, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial u \partial v}(u^*, v^*) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial v \partial u}(u^*, v^*) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial v^2}(u^*, v^*) = \dfrac{c}{s(1+mv^*)}\left(\dfrac{1}{v^*}\right). \end{cases}$$

de donde, la matriz Hessina es dada por

$$H(E)_{|(u^*,v^*)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u^*} & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{sv^*(1+mv^*)} \end{pmatrix}$$

Ahora hallamos los autovalores de $H(E)_{|(u^*,v^*)}$. Estos son

$$\lambda_1 = \frac{1}{u^*} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{c}{sv^*(1+mv^*)}.$$

$\lambda_1 = \dfrac{1}{u^*} > 0$ porque u^* es el equilibrio positivo y $\lambda_2 = \dfrac{c}{sv^*(1+mv^*)} > 0$ ya que tanto s, v^*, m, c son positivos.

En consecuencia, por el criterio de la matriz Hessina, se tiene que en (u^*, v^*) la función $V(u,v)$ tiene un mínimo y su valor es $V(u^*, v^*) = 0$. Por lo tanto $V(u,v) > 0$ para todo $(u,v) \neq (u^*, v^*)$. Asi, por la definición (1.4.9) inciso (a) V es definida positiva. En consecuencia se cumple (a).

Por su parte,

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt}(u,v) = u\left(1 - \frac{u^*}{u}\right)\left(\alpha - \beta u - \frac{cv}{mv+1}\right) + v\frac{c}{s(1+mv^*)}\left(1 - \frac{v^*}{v}\right)\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right)$$

Luego de algunos cálculos

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = (u - u^*)\left(\alpha - \beta u - \frac{cv}{mv+1}\right) + \frac{(v - v^*)c}{s(1+mv^*)}\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right) \tag{3.6}$$

Usando el hecho de que

$$\begin{cases} \alpha - \beta u^* - \dfrac{cv^*}{mv^*+1} = 0, \\ -\gamma + \dfrac{su^*}{mv^*+1} = 0, \end{cases}$$

Se despeja del sistema anterior α y $-\gamma$ de la primera y segunda ecuación respectivamente, para obtener

$$\begin{cases} \alpha = \beta u^* + \dfrac{cv^*}{mv^*+1} \\ -\gamma = -\dfrac{su^*}{mv^*+1} \end{cases}$$

y al reemplazar en (3.6) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (u-u^*)\left(\beta u^* + \frac{cv^*}{mv^*+1} - \beta u - \frac{cv}{mv+1}\right) + \frac{(v-v^*)c}{s(1+mv^*)}\left(-\frac{su^*}{mv^*+1} + \frac{su}{mv+1}\right)\\
&= -(u-u^*)^2\beta - \frac{c(u-u^*)(v-v^*)}{(mv^*+1)(mv+1)} + c(v-v^*)\left(\frac{-u^*(mv+1)+u(mv^*+1)}{(mv^*+1)^2(mv+1)}\right)\\
&= \underbrace{(u-u^*)^2\beta}_{1} - \underbrace{\frac{c(u-u^*)(v-v^*)}{(mv^*+1)(mv+1)}}_{2} + \underbrace{\frac{c(v-v^*)(u-u^*)}{(mv^*+1)^2(mv+1)}}_{3} + \underbrace{\frac{mc(v-v^*)(uv^*-u^*v)}{(mv^*+1)^2(mv+1)}}_{4}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ahora, se suman el término 2 y 3

$$-\frac{c(u-u^*)(v-v^*)}{(mv^*+1)(mv+1)} + \frac{c(v-v^*)(u-u^*)}{(mv^*+1)^2(mv+1)} = \frac{-mc(v-v^*)uv^*}{(mv^*+1)^2(mv+1)} + \frac{mc(v-v^*)u^*v^*}{(mv^*+1)^2(mv+1)}$$

y este resultado se suma con el término 4 para después de algunas manipulaciones algebraicas, obtener

$$\frac{mc(v-v^*)u^*v^*}{(mv^*+1)^2(mv+1)} - \frac{mc(v-v^*)u^*v}{(mv^*+1)^2(mv+1)}$$

de donde, resulta

$$\begin{aligned}\frac{mc(v-v^*)u^*v^* - mc(v-v^*)u^*v}{(mv^*+1)^2(mv+1)} &= \frac{mc(v-v^*)u^*(v^*-v)}{(mv^*+1)^2(mv+1)}\\
&= \frac{-mcu^*(v-v^*)^2}{(mv^*+1)^2(mv+1)}\end{aligned}$$

Sumamos este último resultado con el término 1 para finalmente obtener

$$\frac{dV}{dt} = -(u-u^*)^2\beta - \frac{mcu^*(v-v^*)^2}{(mv^*+1)^2(mv+1)} \tag{3.8}$$

Ambos términos de (3.8) son menores que cero, ya que β, m, v^*, u^*, c son mayores que cero. Por lo tanto $\frac{dV}{dt} < 0$. Esto es, $\frac{dV}{dt}$ es definida negativa. En consecuencia, se tiene que V es una funcion de Lyapunov estricta, por lo tanto el punto E^* es globalmente asintóticamnte estable. □

3.2. El caso con efecto Allee débil

En esta sección se establecerá la estabilidad de los equilibrios del modelo (2.1) con efecto Allee débil, esto es, $0 < q < b\alpha$. En este caso el modelo (2.1) tiene dos equilibrios en la frontera:

(1) Cuando $u = 0$ y $v = 0$ se tiene $E_{w0} = (0, 0)$.

(2) Cuando $u \neq 0$ y $v = 0$, y $\alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b} - \dfrac{cv}{mv+1} = 0$, entonces

$$E_{w1} = \left(\frac{\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha - b\beta)^2 + 4\beta(b\alpha - q)}}{2\beta}, 0 \right).$$

La matriz jacobiana del modelo (2.1) es dado por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta u - \dfrac{q}{u+b} + \dfrac{qu}{(u+b)^2} - \dfrac{cv}{mv+1} & -\dfrac{cu}{(mv+1)^2} \\ \dfrac{sv}{mv+1} & -\gamma + \dfrac{su}{(mv+1)^2} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Entonces para los dos equilibrios en la frontera E_{w0}, E_{w1} tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. Suponga que $0 < q < b\alpha$ entonces

(a) E_{w0} es un punto silla;

(b) E_{w1} es un nodo estable si $\alpha > b\beta$ y $\gamma > \bar{\gamma}$ o un punto silla si $\alpha > b\beta$ y $\gamma < \bar{\gamma}$, donde

$$\bar{\gamma} = \frac{s\left(\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha + b\beta)^2 - 4q\beta}\right)}{2\beta} \tag{3.10}$$

Demostración: La matriz jacobiana del modelo (2.1) evaluadas en E_{w0} y E_{w1} son respectivamente

$$\mathbf{A}(E_{w0}) = \begin{pmatrix} \alpha - \dfrac{q}{b} & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(E_{w1}) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta u_{w1} - \dfrac{q}{u_{w1}+b} + \dfrac{qu_{w1}}{(u_{w1}+b)^2} & -cu_{w1} \\ 0 & -\gamma + su_{w1} \end{pmatrix}$$

(a) Los autovalores de la matriz $A(E_{w0})$ son $\alpha - \dfrac{q}{b} > 0$ y $-\gamma < 0$. Por lo tanto, ya que $det(A_{E_{w0}}) < 0$ entonces por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.3) inciso (a) $E_{w0} = (0,0)$ es un punto silla del modelo (2.1) y dado que los autovalores tienen signos contrarios, el modelo es siempre inestable alrededor de E_{w0}.

(b) Supongamos primero que $\alpha > b\beta$ y $\gamma > \bar{\gamma}$.

Los autovalores de la matriz $A(E_{w1})$ son: $\lambda_1 = -\gamma + su_{w1}$. Ya que

$$u_{w1} = \frac{\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha - b\beta)^2 + 4\beta(b\alpha - q)}}{2\beta}, \tag{3.11}$$

entonces

$$\lambda_1 = -\gamma + \frac{s(\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha - b\beta)^2 + 4\beta(b\alpha - q)})}{2\beta}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \frac{s(\alpha - b\beta + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha b\beta + b^2\beta^2 + 4\beta b\alpha - 4\beta q})}{2\beta}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \frac{s(\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha + b\beta)^2 - 4\beta q})}{2\beta}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\lambda_2 = \alpha - 2\beta u_{w1} - \frac{q}{u_{w1}+b} + \frac{qu_{w1}}{(u_{w1}+b)^2}$$

y en teniendo en cuenta que E_{w1} satisface

$$\begin{cases} \alpha - \beta u_{w1} - \dfrac{q}{u_{w1}+b} = 0, \\ -\gamma + su_{w1} = 0, \end{cases}$$

llegamos a

$$\lambda_2 = \frac{q}{(u_{w1}+b)^2} - \beta u_{w1}.$$

Luego, por (3.11) y mediante algunos cálculos

$$\lambda_2 = \frac{2\beta q(\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha+b\beta)^2 - 4\beta q})}{(\alpha + b\beta + \sqrt{(\alpha+b\beta)^2 - 4\beta q})^2} - \frac{(\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha+b\beta)^2 - 4\beta q})}{2}$$

y de nuevo mediante algunas operaciones algebraicas finalmente tenemos que

$$\lambda_2 = \frac{-2\sqrt{(\alpha+b\beta)^2 - 4q\beta}\left(\alpha\sqrt{(\alpha+b\beta)^2 - 4q\beta} + \alpha^2 + \beta(b\alpha - 2q)\right)}{(\alpha + b\beta + \sqrt{(\alpha+b\beta)^2 - 4q\beta})^2}$$

Como $\alpha > b\beta$ entonces $\alpha(\alpha - b\beta) > 0$. Además, ya que $0 < q < b\alpha$ entonces

$$b\alpha - q > 0$$

y como $\beta > 0$ entonces

$$2\beta(b\alpha - q) = 2\beta b\alpha - 2\beta q > 0$$

y también, como $0 < 2\beta b\alpha - 2\beta q = \alpha^2 - \alpha^2 + \beta b\alpha + \beta b\alpha - 2\beta q$, entonces

$$\alpha^2 + \alpha\beta b - 2q\beta > \alpha^2 + \alpha\beta b$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta b - 2q\beta > \alpha^2 - \beta b\alpha$$

$$\alpha^2 + \beta(b\alpha - 2q) > \alpha(\alpha - b\beta) > 0$$

Por lo tanto, si $\alpha > b\beta$ entonces $\lambda_2 < 0$ y como $\gamma > \bar{\gamma}$ entonces $-\gamma + \bar{\gamma} < 0$. Esto es, $\lambda_1 < 0$. Así E_{w1} es un nodo estable por el teorema de Hartman-Grobman, inciso (1) en la definición (1.4.7) y por el teorema (1.4.2).

Seguidamente, supongamos nuevamente que $\alpha > b\beta$ y también que $\gamma < \bar{\gamma}$. Con ello, $\lambda_2 < 0$ y $-\gamma + \bar{\gamma} > 0$, esto es $\lambda_1 > 0$. En consecuencia, $det(\mathbf{A}_{E_{w1}}) < 0$, y por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.3) se tiene que E_{w1} es un punto silla del modelo (2.1)

□

A continuación se determinará la estabilidad del equilibrio positivo en dos situaciones. Una es el caso del único equilibrio positivo $E_w = (u_w, v_w)$, la otra es el caso de dos

equilibrios positivos $E_{w3} = (u_{w3}, v_{w3})$ y $E_{w4} = (u_{w4}, v_{w4})$.
Sea $\tilde{E} = \left(\tilde{u}, \frac{s\tilde{u}-\gamma}{m\gamma}\right)$ el punto de equilibrio positivo arbitrário para el modelo (2.1) en las dos situaciones.
La matriz jacobiana en $\tilde{E}$ es dada por

$$\mathbf{A}_{\tilde{E}} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta\tilde{u} - \dfrac{q}{\tilde{u}+b} + \dfrac{q\tilde{u}}{(\tilde{u}+b)^2} - \dfrac{c\tilde{v}}{m\tilde{v}+1} & \dfrac{-c\tilde{u}}{(m\tilde{v}+1)^2} \\ \dfrac{s\tilde{v}}{m\tilde{v}+1} & -\gamma + \dfrac{s\tilde{u}}{(m\tilde{v}+1)^2} \end{pmatrix}$$

Ahora, se reemplaza el valor correspondiente de $\tilde{v}$ para para simplificar cada una de las entradas de la matriz dada y obtener

$$\mathbf{A}_{\tilde{E}} = \begin{pmatrix} -\beta\tilde{u} + \dfrac{q\tilde{u}}{(\tilde{u}+b)^2} & -\dfrac{c\gamma^2}{s^2\tilde{u}} \\ \dfrac{s\tilde{u}-\gamma}{m\tilde{u}} & \dfrac{(\gamma - s\tilde{u})\gamma}{s\tilde{u}} \end{pmatrix}$$

Al reemplazar $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ en la expresión de la primera entrada de la matriz se ha obtenido

$$\alpha - 2\beta\tilde{u} - \frac{q}{\tilde{u}+b} + \frac{q\tilde{u}}{(\tilde{u}+b)^2} - \frac{c(s\tilde{u}-\gamma)}{ms\tilde{u}} \tag{3.12}$$

pero para obtener la primera entrada de esta matriz adicionalmente se ha tenido en cuenta que $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ satisfacen

$$\alpha - \beta\tilde{u} - \frac{q}{\tilde{u}+b} - \frac{c\tilde{v}}{m\tilde{v}+1} = 0$$

de donde

$$\alpha - \beta\tilde{u} - \frac{q}{\tilde{u}+b} = \frac{c\tilde{v}}{m\tilde{v}+1}$$

y como $\tilde{v} = \dfrac{s\tilde{u}-\gamma}{m\gamma}$ se tiene

$$\alpha - \beta\tilde{u} - \frac{q}{\tilde{u}+b} = \frac{c(s\tilde{u}-\gamma)}{ms\tilde{u}}$$

reemplazando lo anterior en (3.12) se obtiene finalmente

$$\alpha - 2\beta\tilde{u} - \frac{q}{\tilde{u}+b} + \frac{q\tilde{u}}{(\tilde{u}+b)^2} - \alpha + \beta\tilde{u} + \frac{q}{\tilde{u}+b} = -\beta\tilde{u} + \frac{q\tilde{u}}{(\tilde{u}+b)^2}.$$

La traza y el determinante de $\mathbf{A}_{\tilde{E}}$ estan dadas respectivamente por

$$tr(\mathbf{A}_{\tilde{E}}) = \frac{qs\tilde{u}^2 + (\tilde{u}+b)^2(\gamma^2 - s\gamma\tilde{u} - s\beta\tilde{u}^2)}{s\tilde{u}(\tilde{u}+b)^2}$$

$$det(\mathbf{A}_{\tilde{E}}) = \frac{\gamma(s\tilde{u}-\gamma)((\tilde{u}+b)^2(c\gamma + ms\beta\tilde{u}^2) - mqs\tilde{u}^2)}{ms^2\tilde{u}^2(\tilde{u}+b)^2}$$

Ya que $\gamma(s\tilde{u}-\gamma) = \gamma^2 m\tilde{v} > 0$ el signo del $det(\mathbf{A}_{\tilde{E}})$ es dado por

$$\psi(\tilde{u}) = (\tilde{u}+b)^2(c\gamma + ms\beta\tilde{u}^2) - mqs\tilde{u}^2$$

Ahora se presentan los siguientes resultados sobre la estabilidad de los equilibrios positivos del modelo no espacial (2.1) con efecto Allee débil.

Teorema 3.2.2. Suponga que $(u_w+b)^2(c\gamma + ms\beta u_w^2) - mqsu_w^2 > 0$ y defina

$$q^{[u_w]} = \left(\beta u_w - \frac{(\gamma - su_w)\gamma}{su_w}\right)\frac{(u_w+b)^2}{u_w}$$

(a) $q < \text{mín}\{q^{[u_w]}, b\alpha\}$, el equilibrio positivo E_w es localmente asintóticamente estable. Además

  (a1) Si $(tr(\mathbf{A}_{E_w}))^2 < 4det(\mathbf{A}_{E_w})$, E_w es un foco estable.

  (a2) si $(tr(\mathbf{A}_{E_w}))^2 > 4det(\mathbf{A}_{E_w})$, E_w es un nodo estable.

(b) $q^{[u_w]} < q < b\alpha$ el equilibrio E_w es inestable. Además,

  (b1) $(tr(\mathbf{A}_{E_w}))^2 < 4det(\mathbf{A}_{E_w})$, E_w es un foco inestable.

  (b2) $(tr(\mathbf{A}_{E_w}))^2 > 4det(\mathbf{A}_{E_w})$, E_w es un nodo inestable.

Demostración: Note que cuando $tr(\mathbf{A}_{E_w}) = 0$ podemos despejar q y se obtiene $q^{[u_w]}$,

(a) Supongamos que $q < b\alpha$, esto es $\text{mín}\{q^{[u_w]}, b\alpha\} = b\alpha$, en el caso en que $\text{mín}\{q^{[u_w]}, b\alpha\} = q^{[u_w]}$ la demostración es similar. Ahora, dado que $b\alpha < q^{[u_w]}$ entonces $q < q^{[u_w]}$. Luego, cuando $q < q^{[u_w]}$, se tiene

$$q < \left(\beta u_w - \frac{(\gamma - su_w)\gamma}{su_w}\right)\frac{(u_w+b)^2}{u_w}$$

como $su_w^2 > 0$ entonces

$$qsu_w^2 < (\beta su_w^2 - (\gamma - su_w)\gamma)(u_w + b)^2$$

$$qsu_w^2 < \beta su_w^2(u_w + b)^2 - (\gamma - su_w)\gamma(u_w + b)^2$$

$$qsu_w^2 + (u_w + b)^2(\gamma - su_w)\gamma - \beta su_w^2(u_w + b)^2 < 0$$

Dado que $su_w(u_w + b)^2 > 0$, multiplicamos la expresión anterior por $\dfrac{1}{su_w(u_w + b)^2}$ y sacamos factor común $(u_w + b)^2$ para obtener

$$\frac{qsu_w^2 + (u_w + b)^2[(\gamma - su_w)\gamma - \beta su_w^2]}{su_w(u_w + b)^2} < 0$$

$$\frac{qsu_w^2 + (u_w + b)^2[\gamma^2 - s\gamma u_w - s\beta u_w^2]}{su_w(u_w + b)^2} < 0$$

esto es $tr(\mathbf{A}_{Ew}) < 0$.

Además, como $(u_w + b)^2(c\gamma + ms\beta u_w^2) - mqsu_w^2 > 0$ entonces $det(\mathbf{A}_{Ew}) > 0$, así, tenemos que la parte real de los autovalores de $\mathbf{A}_{Ew}$, es decir la $tr(\mathbf{A}_{Ew})$, son menores que cero, luego por el teorema y Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.2) tenemos que E_w es localmente asintóticamente estable.

(a1) Si

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 < 4det(\mathbf{A}_{E_w})$$

entonces

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 - 4det(\mathbf{A}_{E_w}) < 0$$

Luego, por el teorema (1.4.3) inciso (c) se tiene que E_w es un foco estable, dado que por (a) $tr(\mathbf{A}_{Ew}) < 0$ y por hipótesis $det(\mathbf{A}_{Ew}) > 0$.

(a2) Si

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 > 4det(\mathbf{A}_{E_w})$$

entonces

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 - 4det(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$$

Luego, por el teorema (1.4.3) inciso (b) se tiene que E_w es un nodo estable, dado que por (a) $tr(\mathbf{A}_{Ew}) < 0$ y por hipótesis $det(\mathbf{A}_{Ew}) > 0$.

(b) Cuando $q^{u_w} < q < b\alpha$ entonces la $tr(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$. En efecto, cuando $q^{u_w} < q$ se tiene

$$q - q^{u_w} > 0$$

esto es,

$$q - \left(\beta u_w - \frac{(\gamma - su_w)\gamma}{su_w}\right)\frac{(u_w + b)^2}{u_w} > 0$$

luego

$$qsu_w^2 - (\beta u_w^2 s - \gamma(\gamma - su_w))(u_w + b)^2 > 0$$

y se divide por $su_w(u_w + b)^2$ para obtener

$$\frac{qsu_w^2 - (u_w + b)^2(\gamma^2 - s\gamma u_w - s\beta u_w^2)}{su_w(u_w + b)^2} > 0$$

y esto es lo mismo que tener $tr(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$.

Como resultado los autovalores de la matriz $\mathbf{A}_{E_w}$ tienen parte real positiva y de nuevo por el teorema (1.4.2) y por teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) se concluye que el equilibrio positivo E_w es es inestable para el modelo (2.1).

(b1) Procediendo como en (a1) se tiene

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 - 4det(\mathbf{A}_{E_w}) < 0 \tag{3.13}$$

además como $det(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$ por hipótesis y $tr(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$ por (b), entonces por el teorema (1.4.3) inciso (c) se tiene que E_w es un foco inestable.

(b2) Ahora, si

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 > 4det(\mathbf{A}_{E_w})$$

entonces

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 - 4det(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$$

Luego, por el teorema (1.4.3) inciso (b) se tiene que E_w es un nodo inestable, dado que por (b) $tr(\mathbf{A}_{Ew}) > 0$ y por hipótesis $det(\mathbf{A}_{Ew}) > 0$.

Observación 3.2.1. Note que

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 = \frac{u_w^2}{(u_w+b)^4}[q-q^{[u_w]}]^2$$

luego, la expresión

$$[q-q^{[u_w]}]^2 < 4det(\mathbf{A}_{E_w}).$$

se puede cambiar por

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 < 4det(\mathbf{A}_{E_w})$$

si

$$\frac{u_w^2}{(u_w+b)^4} < 1.$$

para los casos (a1) y (b1) de (a) y (b). De otro lado, si

$$\frac{u_w^2}{(u_w+b)^4} > 1$$

la expresión

$$[q-q^{[u_w]}]^2 > 4det(\mathbf{A}_{E_w}).$$

se puede cambiar por

$$[tr(\mathbf{A}_{E_w})]^2 > 4det(\mathbf{A}_{E_w})$$

en los casos (a2) y (b2) en (a) y (b) respectivamente.

□

Teorema 3.2.3. Suponga que $q < \text{mín}\{\alpha, b\beta(u_w+b)\}$, entonces el equilibrio positivo E_w del modelo (2.1) es globalmente asintóticamente estable.

Demostración: Se tomará la misma función del teorema (3.1.2), donde se probó que esta función es definida positiva. Veamos entonces que $\dfrac{dV}{dt}$ sea definida negativa. Se tiene que

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = u\left(1-\frac{u_w}{u}\right)\left(\alpha-\beta u-\frac{q}{u+b}-\frac{cv}{mv+1}\right)+\frac{vc}{s(1+mv_w)}\left(1-\frac{u_w}{v}\right)\left(-\gamma+\frac{su}{mv+1}\right)$$

de donde

$$\frac{dV}{dt} = (u - u_w)\left(\alpha - \beta u - \frac{q}{u+b} - \frac{cv}{mv+1}\right) + \frac{(v - v_w)c}{s(1+mv_w)}\left(-\gamma + \frac{su}{mv+1}\right) \tag{3.14}$$

Usando el hecho de que

$$\begin{cases} \alpha - \beta u_w - \dfrac{q}{u_w+b} - \dfrac{cv_w}{mv_w+1} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad -\gamma + \dfrac{su_w}{mv_w+1} = 0, \end{cases}$$

Se despeja del sistema anterior α y $-\gamma$ de la primera y segunda ecuación respectivamente, para obtener

$$\begin{cases} \quad \alpha = \beta u_w + \dfrac{q}{u+b} + \dfrac{cv_w}{mv_w+1} \\ -\gamma = -\dfrac{su_w}{mv_w+1} \end{cases}$$

y al reemplazar en (3.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (u - u_w)\left(\beta u_w + \frac{q}{u_w+b} + \frac{cv_w}{mv_w+1} - \beta u - \frac{q}{u+b} - \frac{cv}{mv+1}\right) \\ &\quad + \frac{(v-v_w)c}{s(1+mv_w)}\left(-\frac{su_w}{mv_w+1} + \frac{su}{mv+1}\right) \\ &= -(u-u_w)^2\left(\beta - \frac{q}{(u_w+b)(u+b)}\right) - \frac{c(u-u_w)(v-v_w)}{(mv_w+1)(mv+1)} \\ &\quad + c(v-v_w)\left(\frac{-u_w(mv+1) + u(mv_w+1)}{(mv_w+1)^2(mv+1)}\right) \\ &= \underbrace{-(u-u_w)^2\left(\beta - \frac{q}{(u_w+b)(u+b)}\right)}_{1} - \underbrace{\frac{c(u-u_w)(v-v_w)}{(mv_w+1)(mv+1)}}_{2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{c(v-v_w)(u-u_w)}{(mv_w+1)^2(mv+1)}}_{3} + \underbrace{\frac{mc(v-v_w)(uv_w - u_wv)}{(mv_w+1)^2(mv+1)}}_{4} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ahora, se suman el término 2 y 3

$$-\frac{c(u-u_w)(v-v_w)}{(mv_w+1)(mv+1)} + \frac{c(v-v_w)(u-u_w)}{(mv_w+1)^2(mv+1)} = \frac{-mc(v-v_w)uv_w}{(mv_w+1)^2(mv+1)} + \frac{mc(v-v_w)u_wv_w}{(mv_w+1)^2(mv+1)}$$

y este resultado se suma con el término 4 para después de algunas manipulaciones algebraicas, obtener

$$\frac{mc(v-v_w)u_wv_w}{(mv_w+1)^2(mv+1)} - \frac{mc(v-v_w)u_wv}{(mv_w+1)^2(mv+1)}$$

de donde, resulta

$$\begin{aligned}\frac{mc(v-v_w)u_wv_w - mc(v-v_w)u_wv}{(mv_w+1)^2(mv+1)} &= \frac{mc(v-v_w)u_w(v_w-v)}{(mv_w+1)^2(mv+1)}\\ &= \frac{-mcu_w(v-v_w)^2}{(mv_w+1)^2(mv+1)}\end{aligned}$$

Sumamos este último resultado con el término 1 para finalmente obtener lo siguiente

$$\frac{dV}{dt} = -(u-u_w)^2\left(\beta - \frac{q}{(u_w+b)(u+b)}\right) - \frac{mcu_w(v-v_w)^2}{(mv_w+1)^2(mv+1)}$$

Como $u > 0$ y $b > 0$, $u+b > b$ entonces $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{u+b}$ lo cual implica $-\dfrac{1}{b} < -\dfrac{1}{u+b}$. Ádemás, dado que $\dfrac{q}{u_w+b} > 0$ ya que tanto q como u_w+b lo son y también como $\beta > 0$ se tiene

$$\beta - \frac{q}{(u_w+b)b} < \beta - \frac{q}{(u_w+b)(u+b)}$$

esto es,

$$\beta - \frac{q}{(u_w+b)(u+b)} > \beta - \frac{q}{(u_w+b)b}$$

Ya que por hipótesis se tiene que $q < b\beta(u_w+b)$ entonces

$$\beta - \frac{q}{(u_w+b)b} > 0$$

luego,

$$\beta - \frac{q}{(u_w+b)(u+b)} > \beta - \frac{q}{(u_w+b)b} > 0$$

como resultado se tiene que $\dfrac{dV}{dt} < 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio (u_w, v_w) es globalmente asintóticamente estable por el teorema (1.4.4) inciso (b). $\square$

Teorema 3.2.4. Suponga que $(u_{w3}+b)^2(c\gamma + ms\beta u_{w3}^2) - mqsu_{w3}^2 > 0$ y $(u_{w4}+b)^2(c\gamma + ms\beta u_{w4}^2) - mqsu_{w4}^2 < 0$. Y defina

$$q^{[u_{w3}]} = \left(\beta u_{w3} - \frac{(\gamma - su_{w3})\gamma}{su_{w3}}\right)\frac{(u_{w3}+b)^2}{u_{w3}}$$

(a) si $q < \text{mín}\{q^{[u_{w3}]}, b\alpha\}$, entonces $E_{uw3} = \left(u_{w3}, \dfrac{su_{w3}-\gamma}{m\gamma}\right)$ es localmente asintóticamente estable;

(b) $E_{uw4}=\left(u_{w4}, \dfrac{su_{w4}-\gamma}{m\gamma}\right)$ es un punto silla.

Demostración: (a) La demostración se hace de manera similar a la del teorema (3.2.2) inciso (a).

(b) Como $(u_{w4}+b)^2(c\gamma+ms\beta u_{w4}^2)-mqsu_{w4}^2<0$ entonces $det(\mathbf{A}_{Ew4})<0$, así, por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.3) inciso (a) tenemos que E_{uw4} es un punto silla del modelo no espacial (2.1).

□

3.3. El caso con efecto Allee fuerte

En esta sección se determinará la estabilidad de los equilibrios del modelo (2.1) con efecto Allee fuerte, es decir, $q>b\alpha$. El modelo (2.1) con efecto Allee fuerte tiene tres equilibrios en la frontera:

(1) Cuando $u=0$ y $v=0$ se tiene $E_{s0}=(0,0)$.

(2) Cuando $u\neq 0$ y $v=0$, y $\alpha-\beta u-\dfrac{q}{u+b}-\dfrac{cv}{mv+1}=0$, entonces

$$E_{s1}=(u_{s1},v_{s1})=\left(\frac{\alpha-b\beta-\sqrt{(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)}}{2\beta},0\right)$$

$$E_{s2}=(u_{s2},v_{s2})=\left(\frac{\alpha-b\beta+\sqrt{(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)}}{2\beta},0\right)$$

con $\alpha>b\beta$ y $b\alpha<q<\dfrac{(\alpha+b\beta)^2}{4\beta}$. Estas condiciones garantizan que $u_{s1}>0$ y $u_{s2}>0$. En efecto, sea $\alpha>b\beta$. Ya que $q<\dfrac{(\alpha+b\beta)^2}{4\beta}$ se tiene $(\alpha+b\beta)^2-4q\beta>0$; pero $(\alpha+b\beta)^2-4q\beta=(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)$. Por lo tanto, $(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)>0$. Ahora, como $b\alpha<q$ y $4\beta>0$, entonces $4\beta(b\alpha-q)<0$. Por ende $(\alpha-b\beta)^2>(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)$. Por tal razón $\alpha-b\beta>\sqrt{(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)}$. Asi,

$$\alpha-b\beta-\sqrt{(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)}>0 \quad \text{y} \quad \alpha-b\beta+\sqrt{(\alpha-b\beta)^2+4\beta(b\alpha-q)}>0.$$

Por lo tanto $u_{s1} > 0$ y $u_{s2} > 0$.

Observación 3.3.1. Es importante notar las relaciones que se observan de las expresiones de u_{s1} y u_2 ; estas son:

- $\alpha > b\beta \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > b$, esto es, $K > b$.
- $u_{s1} + b = \dfrac{\alpha}{\beta} - u_{s2}$
- $u_{s2} + b = \dfrac{\alpha}{\beta} - u_{s1}$
- Dado que $\alpha > b\beta$ y $(\alpha - b\beta)^2 + 4\beta(b\alpha - q) > 0$ entonces $u_{s1} < u_{s2}$.

Para el caso con efecto Allee fuerte se tienen los siguientes teoremas.

Teorema 3.3.1. (a) E_{s0} es un nodo estable.

(b) Suponga que E_{s1} y E_{s2} existen, entonces

(b1) E_{s1} es un punto de equilibrio inestable.

(b2) E_{s2} es un nodo estable si $\gamma > \bar{\gamma}$, o un punto silla si $\gamma < \bar{\gamma}$, donde γ es definida como en (3.10).

Demostración: (a) La matriz jacobiana del modelo (2.1) viene dada por (3.9). Esta matriz alrededor de $E_{s0} = (0, 0)$ es

$$\mathbf{A}(E_{s0}) = \begin{pmatrix} \alpha - \dfrac{q}{b} & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Con autovalores $\lambda_1 = \alpha - \dfrac{q}{b} = \dfrac{b\alpha - q}{b}$ y $\lambda_2 = -\gamma$. Dado que $q > b\alpha$ por hipótesis del efecto Allee fuerte, se tiene $b\alpha - q < 0$. En consecuencia $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$. Por lo tanto, $det(\mathbf{A}(E_{s0})) = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

Asimismo, $tr(\mathbf{A}(E_{s0}))^2 - 4det(\mathbf{A}(E_{s0})) > 0$. En efecto, ya que

$$[(b\alpha - q) + b]^2 > 0$$

entonces, por medio de operaciones algebraicas se consigue $[(b\alpha - q) + b]^2 = tr(\mathbf{A}(E_{s0}))^2 - 4det(\mathbf{A}(E_{s0}))$. Además $tr(\mathbf{A}(E_{s0})) < 0$. En consecuencia, por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.3) parte (b) se tiene que Es_0 es un nodo estable.

(b) Supongamos que E_{s1} y E_{s2} existen. La matriz jacobiana alrededor de E_{s1} y E_{s2} son respectivamete:

$$\mathbf{A}(E_{s1}) = \begin{pmatrix} -\beta u_{s1} + \dfrac{q u_{s1}}{(u_{s1}+b)^2} & -c u_{s1} \\ 0 & -\gamma + s u_{s1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(E_{s2}) = \begin{pmatrix} -\beta u_{s2} + \dfrac{q u_{s2}}{(u_{s2}+b)^2} & -c u_{s2} \\ 0 & -\gamma + s u_{s2} \end{pmatrix}$$

(b1) $\mathbf{A}(E_{s1})$ tiene autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{q u_{s1}}{(u_{s1}+b)^2} - \beta u_{s1} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\gamma + s u_{s1}$$

Ahora para la inestabilidad es suficiente probar que por lo menos uno de los autovalores es positivo.

Dado que u_{s1} satisface

$$\alpha - \beta u_{s1} - \frac{q}{(u_{s1}+b)} = 0$$

entonces

$$\alpha - \beta u_{s1} = \frac{q}{(u_{s1}+b)}$$

por lo cual

$$\frac{\alpha - \beta u_{s1}}{(u_{s1}+b)} = \frac{q}{(u_{s1}+b)^2},$$

pero de la observación anterior $u_{s2} + b = \dfrac{\alpha}{\beta} - u_{s1}$ entonces $(u_{s2}+b)\beta = \alpha - \beta u_{s1}$ y $u_{s1} < u_{s2}$. Luego

$$\frac{q}{(u_{s1}+b)^2} = \frac{(u_{s2}+b)\beta}{(u_{s1}+b)} > \beta$$

por lo tanto

$$\lambda_1 = \frac{q u_{s1}}{(u_{s1}+b)^2} - \beta u_{s1} > 0$$

Por lo tanto, por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.2) se tiene que el punto E_{s1} es inestable.

(b2) De $\mathbf{A}(E_{s2})$ se tienen los siguientes autovalores

$$\lambda_1 = \frac{qu_{s2}}{(u_{s2}+b)^2} - \beta u_{s2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\gamma + \frac{s(\alpha - b\beta + \sqrt{(\alpha+b\beta)^2 - 4\beta q})}{2\beta}$$

Luego, dado que u_{s2} satisface

$$\alpha - \beta u_{s2} - \frac{q}{(u_{s2}+b)} = 0$$

entonces

$$\alpha - \beta u_{s2} = \frac{q}{(u_{s2}+b)}$$

por lo cual

$$\frac{\alpha - \beta u_{s2}}{(u_{s2}+b)} = \frac{q}{(u_{s2}+b)^2},$$

pero de la observación anterior $u_{s1} + b = \dfrac{\alpha}{\beta} - u_{s2}$ entonces $(u_{s1}+b)\beta = \alpha - \beta u_{s2}$ y como $u_{s1} < u_{s2}$, entonces

$$\frac{q}{(u_{s2}+b)^2} = \frac{(u_{s1}+b)\beta}{(u_{s2}+b)} < \beta$$

por lo tanto

$$\lambda_1 = \frac{qu_{s2}}{(u_{s2}+b)^2} - \beta u_{s2} < 0.$$

Ahora

- si $\gamma > \bar{\gamma}$, $\lambda_2 < 0$ y dado que $\lambda_1 < 0$, se tiene $det(\mathbf{A}(E_{s2})) > 0$ y como son autovalores reales, $tr(\mathbf{A}(E_{s2}))^2 - 4det(\mathbf{A}(E_{s2}) > 0$ y y$tr(\mathbf{A}(E_{s2})) < 0$ entonces por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.3) E_{s2} es un nodo estable del modelo (2.1).
- Ahora, si $\gamma < \bar{\gamma}$, $\lambda_2 > 0$ y como $\lambda_1 < 0$ entonces $det(\mathbf{A}(E_{s2})) < 0$, por lo tanto, E_{s2} es un punto silla del modelo (2.1) por los teoremas (1.4.1) y (1.4.3).

□

Teorema 3.3.2. Suponga que $(u_s+b)^2(c\gamma + ms\beta u_s^2) - mqsu_s^2 > 0$ y defina

$$q^{[u_s]} = \left(\beta u_s - \frac{(\gamma - su_s)\gamma}{su_s}\right)\frac{(u_s+b)^2}{u_s}$$

(a) Si $< b\alpha < q < q^{[u_s]}$, $E_s = \left(u_s, \dfrac{su_s - \gamma}{m\gamma}\right)$ es localmente asintóticamente estable; además,

(a1) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 < 4det(\mathbf{A}(E_s))$, E_s es un foco estable.

(a2) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 > 4det(\mathbf{A}(E_s))$, E_s es un nodo estable.

(b) Si $q > \text{máx}\{q^{[u_s]}, b\alpha\}$, $E_s = \left(u_s, \dfrac{su_s - \gamma}{m\gamma}\right)$ es inestable.

(b1) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 < 4det(\mathbf{A}(E_s))$, E_s es un foco inestable.

(b2) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 > 4det(\mathbf{A}(E_s))$, E_s es un nodo inestable.

Demostración: La matriz jacobiana del modelo (2.1) en E_s

$$\mathbf{A}_{E_s} = \begin{pmatrix} -\beta u_s + \dfrac{qu_s}{(u_s+b)^2} & -\dfrac{c\gamma^2}{s^2 u_s} \\ \dfrac{su_s - \gamma}{mu_s} & \dfrac{(\gamma - su_s)\gamma}{su_s} \end{pmatrix}$$

con

$$tr(\mathbf{A}_{E_s}) = \frac{qsu_s^2 + (u_s+b)^2(\gamma^2 - s\gamma u_s - s\beta u_s^2)}{su_s(u_s+b)^2}$$

$$det(\mathbf{A}_{E_s}) = \frac{\gamma(su_s - \gamma)((u_s+b)^2(c\gamma + ms\beta u_s^2) - mqsu_s^2)}{ms^2u_s^2(u_s+b)^2}$$

(a). Cuando $b\alpha < q < q^{[u_s]}$ entonces

$$q < \left(\beta u_s - \frac{(\gamma - su_s)\gamma}{su_s}\right)\frac{(u_s+b)^2}{u_s}$$

como $su_s^2 > 0$ entonces

$$qsu_s^2 < (\beta su_s^2 - (\gamma - su_s)\gamma)(u_s+b)^2$$

$$qsu_s^2 < \beta su_s^2(u_s+b)^2 - (\gamma - su_s)\gamma(u_s+b)^2$$

$$qsu_s^2 + (u_s+b)^2(\gamma - su_s)\gamma - \beta su_s^2(u_s+b)^2 < 0$$

Dado que $su_s(u_s+b)^2 > 0$, multiplicamos la expresión anterior por $\dfrac{1}{su_s(u_s+b)^2}$ y sacamos factor común $(u_s+b)^2$ para obtener

$$\frac{qsu_s^2 + (u_s+b)^2[(\gamma - su_s)\gamma - \beta su_s^2]}{su_s(u_s+b)^2} < 0$$

esto es $tr(\mathbf{A}_{Es}) < 0$.

Así, tenemos que la parte real de los autovalores de $\mathbf{A}_{Es}$, es decir, la $tr(\mathbf{A}_{Es})$, son menores que cero y $det(\mathbf{A}_{Es}) > 0$, luego por el teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) y el teorema (1.4.2) tenemos que E_s es localmente asintóticamente estable.

(a1) Si

$$[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 < 4det(\mathbf{A}_{E_s})$$

entonces

$$[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 - 4det(\mathbf{A}_{E_s}) < 0$$

Luego, por el teorema (1.4.3) inciso (c) se tiene que E_s es un foco estable, dado que por (a) $tr(\mathbf{A}_{Es}) < 0$ y por hipótesis $det(\mathbf{A}_{Es}) > 0$.

(a2) Si

$$[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 > 4det(\mathbf{A}_{E_s})$$

entonces

$$[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2 - 4det(\mathbf{A}_{E_s}) > 0$$

Luego, por el teorema (1.4.3) inciso (b) se tiene que E_s es un nodo estable, dado que por (a) $tr(\mathbf{A}_{Es}) < 0$ y por hipótesis $det(\mathbf{A}_{Es}) > 0$.

(b). En el caso en que $\text{máx}\{q^{[u_s]}, b\alpha\} = q^{[u_s]}$ se tiene la siguiente demostración. Dado $q > q^{[u_s]}$ entonces

$$q > \left(\beta u_s - \frac{(\gamma - su_s)\gamma}{su_s}\right)\frac{(u_s+b)^2}{u_s}$$

como $su_s^2 > 0$ entonces

$$qsu_s^2 > (\beta su_s^2 - (\gamma - su_s)\gamma)(u_s+b)^2$$

$$qsu_s^2 > \beta su_s^2(u_s+b)^2 - (\gamma - su_s)\gamma(u_s+b)^2$$

$$qsu_s^2 + (u_s+b)^2(\gamma - su_s)\gamma - \beta su_s^2(u_s+b)^2 > 0$$

y se divide por $su_s(u_s+b)^2$ para obtener

$$\frac{qsu_s^2-(u_s+b)^2(\gamma^2-s\gamma u_s-s\beta u_s^2)}{su_s(u_s+b)^2}>0$$

y esto es lo mismo que tener $tr(\mathbf{A}_{E_s})>0$. En el caso en que $\max\{q^{[u_s]},b\alpha\}=b\alpha$ la demostración es similar.

Como resultado los autovalores de la matriz $\mathbf{A}_{E_s}$ tienen parte real positiva y de nuevo por el teorema (1.4.2) y por teorema de Hartman-Grobman (1.4.1) se concluye que el equilibrio positivo E_s es es inestable para el modelo (2.1).

(b1) Procediendo como en (a1) se tiene

$$[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2-4det(\mathbf{A}_{E_s})<0 \tag{3.16}$$

Además, como $(u_s+b)^2(c\gamma+ms\beta u_s^2)-mqsu_s^2>0$ entonces $det(\mathbf{A}_{Es})>0$. Así por el teorema (1.4.3) inciso (c) se tiene que E_s es un foco inestable.

(b2) Ahora, si

$$[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2>4det(\mathbf{A}_{E_s})$$

entonces

$$[tr(\mathbf{A}_{E_s})]^2-4det(\mathbf{A}_{E_s})>0$$

Luego, por el teorema (1.4.3) inciso (b) se tiene que E_s es un nodo inestable, dado que por (b) $tr(\mathbf{A}_{Es})>0$ y por hipótesis $det(\mathbf{A}_{Es})>0$.

Observación 3.3.2. Para este teorema se tiene los mismos resultados de la observación (3.2.1).

□

Teorema 3.3.3. (I) Suponga que $(u_{s3}+b)^2(c\gamma+ms\beta u_{s3}^2)-mqsu_{s3}^2>0$ y defina

$$q^{[u_{s3}]}=\left(\beta u_{s3}-\frac{(\gamma-su_{s3})\gamma}{su_{s3}}\right)\frac{(u_{s3}+b)^2}{u_{s3}}$$

(a) Si $<b\alpha<q<q^{[u_{s3}]}$, $E_{s3}=\left(u_{s3},\frac{su_{s3}-\gamma}{m\gamma}\right)$ es localmente asintóticamente estable; además,

(a1) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_{s3}})]^2 < 4det(\mathbf{A}(E_{s3}))$, E_{s3} es un foco estable.

(a2) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_{s3}})]^2 > 4det(\mathbf{A}(E_{s3}))$, E_{s3} es un nodo estable.

(b) Si $q > \text{máx}\{q^{[u_{s3}]}, b\alpha\}$, $E_{s3} = \left(u_{s3}, \dfrac{su_{s3} - \gamma}{m\gamma}\right)$ es inestable.

(b1) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_{s3}})]^2 < 4det(\mathbf{A}(E_{s3}))$, E_{s3} es un foco inestable.

(b2) Si $[tr(\mathbf{A}_{E_{s3}})]^2 > 4det(\mathbf{A}(E_{s3}))$, E_{s3} es un nodo inestable.

(II) $(u_{s4} + b)^2(c\gamma + ms\beta u_{s4}^2) - mqsu_{s4}^2 < 0$, entonces $E_{s4} = \left(u_{s4}, \dfrac{su_{s4} - \gamma}{m\gamma}\right)$ es un punto silla.

Demostración: (i) Los casos (a) y (b) se demuestran de manera análoga a los casos (a) y (b) del teorema (3.3.2).

(ii) Cuando $(u_{s4} + b)^2(c\gamma + ms\beta u_{s4}^2) - mqsu_{s4}^2 < 0$, entonces $det(\mathbf{A}_{Es4}) < 0$, por lo tanto, por el teorema de Hartman-Grobman y el teorema (1.4.3) concluimos que $E_{s4} = \left(u_{s4}, \dfrac{su_{s4} - \gamma}{m\gamma}\right)$ es un punto silla del modelo (2.1).

$\square$

Capítulo 4

Análisis de estabilidad e inestabilidad del modelo espacial

En este capítulo se estudiará el efecto de la difusión solamente y la difusión y el efecto Allee juntamente en el modelo espacial. El modelo se presenta en el capítulo (1) y tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u\left(\alpha - \beta u - \dfrac{q}{u+b}\right) - \dfrac{cuv}{mv+1} + d_1 \Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) + d_2 \Delta v \end{cases} \tag{4.1}$$

Con

- Condiciones iniciales $u(x,y,0) > 0, v(x,y,0) > 0, (x,y) \in \Omega = (0,l\pi) \times (0,l\pi)$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad en \quad \partial\Omega.$

- $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$ son los coeficientes de difusión de la presa y el depredador respectivamente.

- $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ es el operador laplaciano en dos dimensiones.

- Los demás parámetros se definen como en el capítulo (1).

4.1. El caso sin efecto Allee

Se considera en esta sección la estabilidad del equilibrio positivo del modelo (4.1) sin efecto Allee, es decir $q = 0$. Aquí se pretende mostrar que la difusión no tiene efecto sobre la estabilidad del equilibrio positivo E^*. En este caso el modelo es de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u(\alpha - \beta u) - \dfrac{cuv}{mv+1} + d_1 \Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) + d_2 \Delta v. \end{cases} \tag{4.2}$$

Del teorema (3.1.1) sabemos que el modelo no espacial sin efecto Allee tiene un único equilibrio positivo $E^* = (u^*, v^*)$ cuando $s\alpha > \beta\gamma$, el cual es localmente asintóticamente estable. A continuación se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. Si el equilibrio positivo E^* de el modelo (4.2) existe, entonces es uniformemente asintóticamente estable.

Demostración: Dado que $d_1\Delta u$ y $d_2 \Delta v$ son lineales debemos linealizar a

$$F(u,v) = \begin{cases} f_1(u,v) = u(\alpha - \beta u) - \dfrac{cuv}{mv+1}, \\ g_1(u,v) = v\left(-\gamma + \dfrac{su}{mv+1}\right) \end{cases} \tag{4.3}$$

Ahora, como

$$F(u,v) \cong DF(u^*,v^*) \begin{pmatrix} u-u^* \\ v-v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta u^* & -\dfrac{cu^*}{(mv^*+1)^2} \\ \dfrac{sv^*}{mv^*+1} & -\dfrac{msu^*v^*}{(mv^*+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-u^* \\ v-v^* \end{pmatrix}$$

entonces el sistema linealizado alrededor de E^* con $U_1 = u - u^*$ y $U_2 = v - v^*$ es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} = d_1 \Delta U_1 - \beta u^* U_1 - \dfrac{cu^*}{(mv+1)^2} U_2, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} = d_2 \Delta U_2 + \dfrac{su^*}{mv+1} U_1 - \dfrac{msu^*v^*}{(mv^*+1)^2} U_2 \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial \nu} = \dfrac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0 \quad en \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Supongamos que $u(\mathbf{r},t) = \alpha(t)\varphi(\mathbf{r})$ es solución de la primera ecuacion de (4.4), donde $\mathbf{r} = (x,y)$. Ahora resolvamos $-\Delta\varphi = \mu\varphi$, en $\Omega = (0,l\pi) \times (0,l\pi)$, con $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \Delta\varphi \cdot \nu = 0$ en $\partial\Omega$. Por el método de separación de variables supongamos que $\varphi(x,y) = F(x)G(y)$, entonces se tiene:

$$\Delta\varphi(x,y) = F''(x)G(y) + F(x)G''(y) \tag{4.5}$$

donde, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = F''(x)G(y)$ y $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = F(x)G''(y)$. De (4.5) y dado que $-\Delta\varphi = \mu\varphi$ tenemos:

$$-\left(F''(x)G(y) + F(x)G''(y)\right) = \mu F(x)G(y) \tag{4.6}$$

Luego, de (4.6) tenemos:

$$\frac{-(F''(x)G(y) + F(x)G''(y))}{F(x)G(y)} = \mu$$

y mediante operaciones algebraicas tenemos

$$\frac{-F''(x)}{F(x)} = \mu + \frac{G''(y)}{G(y)}$$

con λ una constante, luego

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda \qquad \text{y} \qquad -\left(\mu + \frac{G''(y)}{G(y)}\right) = -\lambda \tag{4.7}$$

Ahora, hallemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \Delta\varphi \cdot \nu = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \cdot \nu = 0$$

Tenemos que $\nu = (0,-1)$, $\nu = (1,0)$, $\nu = (0,1)$ y $\nu = (-1,0)$. Por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \Delta\varphi \cdot \nu = \begin{cases} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) = 0 & \text{si } 0 \leq x \leq l\pi \text{ , } y = 0 \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = 0 & \text{si } 0 \leq y \leq l\pi, \ x = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(l\pi,y) = 0 & \text{si } 0 \leq y \leq l\pi, \ x = l\pi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,l\pi) = 0 & \text{si } 0 \leq x \leq l\pi, \ y = l\pi \end{cases} \tag{4.8}$$

Ahora resolvamos (4.7) para $\lambda > 0, \lambda = w^2$ con $w \in \mathbb{R} - \{0\}$. De la primera ecuación de (4.7) tenemos

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0 \tag{4.9}$$

Como $\lambda = w^2$ reemplazando en (4.9) se tiene

$$F''(x) + w^2 F(x) = 0$$

de donde

$$F(x) = C_1 \cos(wx) + C_2 \sin(wx) \tag{4.10}$$

Ahora derivamos (4.10) y evaluamos la segunda y tercera condición inicial dadas en (4.8).

$$F'(x) = -wC_1 \sin(wx) + wC_2 \cos(wx)$$

$$-F'(0) = wC_1 \sin(0) - wC_2 \cos(0) = 0$$

como $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$ entonces $-wC_2 = 0$, pero $w \neq 0$, luego $C_2 = 0$. Ademas

$$\begin{aligned} F'(l\pi) &= -wC_1 \sin(l\pi w) + 0w \cos(l\pi w) \\ &= -wC_1 \sin(l\pi w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $w \neq 0$ y $C_1 \neq 0$, entonces $\sin(l\pi w) = 0$, esto ocurre si y sólo si $l\pi w = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$l\pi w = j\pi \Rightarrow w = \frac{j\pi}{l\pi} = \frac{j}{l} \tag{4.11}$$

Así, $w^2 = \lambda = \frac{j^2}{l^2}$. Reemplazando (4.11) en (4.10), y dado que $C_2 = 0$ tenemos

$$F(x) = C_1 \cos\left(\frac{jx}{l}\right)$$

Finalmente con $w_j = \frac{j}{l}$. se tiene

$$F_j(x) = \cos(xw_j) \tag{4.12}$$

De otro lado, de la segunda ecuación de (4.7) se tiene

$$G''(y) + (\mu - \lambda)G(y) = 0 \tag{4.13}$$

Sea $\gamma > 0$ $\gamma = \mu - \lambda = t^2$ y $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces (4.13) es igual a

$$G''(y) + t^2 G(y) = 0$$

de ahí que,

$$G(y) = A_1 \cos(ty) + A_2 \sin(ty) \tag{4.14}$$

Derivando (4.14) y evaluando la primera y cuarta condición inicial dada en (4.8) se tiene

$$G'(y) = -tA_1 \sin(ty) + tA_2 \cos(ty)$$

$$-G'(0) = tA_1 \sin(0) - tA_2 \cos(0) = 0$$

como $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$ entonces $-tA_2 = 0$, pero $t \neq 0$, luego $A_2 = 0$. Ademas, por la cuarta condición inicial

$$\begin{aligned} G'(l\pi) &= -tA_1 \sin(l\pi t) + 0t \cos(l\pi t) \\ &= -tA_1 \sin(l\pi t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $t \neq 0$ y $A_1 \neq 0$, entonces $\sin(l\pi t) = 0$, esto ocurre si y sólo si $l\pi t = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$l\pi t = n\pi \Rightarrow t = \frac{n\pi}{l\pi} = \frac{n}{l} \tag{4.15}$$

y sea $t_n = \frac{n}{l}$.Por lo tanto, reemplazando (4.15) en (4.14) se obtiene

$$G(y) = A_1 \cos(yt_n)$$

luego

$$G_n(y) = \cos(yt_n) \tag{4.16}$$

Cabe señalar que, $\gamma = t^2 = \frac{n^2}{l^2}$ y como $\lambda = \frac{j^2}{l^2}$ y $\gamma = \mu - \lambda$ entonces, $\mu - \frac{j^2}{l^2} = \frac{n^2}{l^2}$, esto es,

$$\mu = \frac{j^2}{l^2} + \frac{n^2}{l^2}$$

y llamando a μ como k^2 con $t_n = \frac{n}{l}$ y $w_j = \frac{m}{l}$ tenemos

$$k^2 = w_j^2 + t_n^2. \tag{4.17}$$

Finalmente de (4.12) y (4.16) se tiene

$$\varphi_{jn}(x, y) = \cos(xw_j) \cos(yt_n) \tag{4.18}$$

Por lo tanto, para cada j, n se tiene

$$u_{jn} = \alpha_{jn}(t)\varphi_{jn}$$

De manera similar se obtiene

$$v_{jn} = \beta_{jn}(t)\varphi_{jn}$$

Ahora, siguiendo a [18] para el caso cuando se tienen condiciones de frontera tipo Neumann, se obtienen por las series de Fourier que

$$\begin{cases} U_1(\mathbf{r}, t) = \displaystyle\sum_{j,n=0}^{\infty} u_{jn}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j,n=0}^{\infty} \alpha_{jn}(t)\varphi_{jn}(\mathbf{r}) \\ U_2(\mathbf{r}, t) = \displaystyle\sum_{j,n=0}^{\infty} v_{jn}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j,n=0}^{\infty} \beta_{jn}(t)\varphi_{jn}(\mathbf{r}) \end{cases} \tag{4.19}$$

donde $\mathbf{r} = (x, y)$, $0 < x < l\pi$, $0 < y < l\pi$. Luego

$$\begin{cases} U_1(\mathbf{r}, t) = \alpha_{jn}(t)\varphi_{jn}(\mathbf{r}) = \alpha_{jn}(t)\cos(w_j x)\cos(t_n y) \\ U_2(\mathbf{r}, t) = \beta_{jn}(t)\varphi_{jn}(\mathbf{r}) = \beta_{jn}(t)\cos(w_j x)\cos(t_n y) \end{cases} \tag{4.20}$$

Ahora calculemos el laplaciano de U_1 y U_2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_{jn}(t)\cos(w_j x)\cos(t_n y)\right) \\ \qquad = -\alpha_{jn}(t)w_j\sin(w_j x)\cos(t_n y) \\ \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\alpha_{jn}(t)w_j\sin(w_j x)\cos(t_n y)\right) \\ \qquad = -\alpha_{jn}(t)w_j^2\cos(w_j x)\cos(t_n y) \\ \qquad = -\alpha_{jn}(t)w_j^2\varphi_{jn}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_{jn}(t)\cos(w_j x)\cos(t_n y)\right) \\ \qquad = -\alpha_{jn}(t)t_n\cos(w_j x)\sin(t_n y) \\ \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\alpha_{jn}(t)t_n\sin(w_j x)\cos(t_n y)\right) \\ \qquad = -\alpha_{jn}(t)t_n^2\cos(w_j x)\cos(t_n y) \\ \qquad = -\alpha_{jn}(t)t_n^2\varphi_{jn}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

De donde

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \\ \Delta U_1 &= -\alpha_{jn}(t) k^2 \varphi_{jn}(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{4.21}$$

de igual manera obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \\ \Delta U_2 &= -\beta_{jn}(t) k^2 \varphi_{jn}(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{4.22}$$

Además

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \alpha'_{jn}(t)\varphi_{jn}(\mathbf{r}) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U_2}{\partial t} = \beta'_{jn}(t)\varphi_{jn}(\mathbf{r}) \tag{4.23}$$

De manera que reemplazando (4.21), (4.22) y (4.23) en (4.4) tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_{jn}}{dt} = (-\beta u^* - d_1 k^2)\alpha_{jn} + \dfrac{-cu^*}{(mv^*+1)^2}\beta_{jn} \\ \dfrac{d\beta_{jn}}{dt} = \dfrac{sv^*}{(mv^*+1)}\alpha_{jn} + \left(\dfrac{-msu^*v^*}{(mv^*+1)^2} - d_2k^2\right)\beta_{jn} \end{cases} \tag{4.24}$$

Luego, la matriz jacobiana del modelo (4.24) esta dada por

$$\tilde{\mathbf{A}}_{E^*} = \begin{pmatrix} -\beta u^* - d_1 k^2 & -\dfrac{cu^*}{(mv^*+1)^2} \\ \dfrac{sv^*}{mv^*+1} & -\dfrac{msu^*v^*}{(mv^*+1)^2} - d_2 k^2 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

con autovalores λ_i $(i = 1, 2)$ dados por

$$\lambda_i = \frac{tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E^*}) \pm \sqrt{(tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E^*}))^2 - 4det(\tilde{\mathbf{A}}_{E^*})}}{2}$$

donde la traza y el determinante de $\tilde{\mathbf{A}}_{E^*}$ son respectivamente

$$tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E^*}) = -(d_1 + d_2)k^2 - \beta u^* - \frac{msu^*v^*}{(mv^*+1)^2} < 0,$$

$$det(\tilde{\mathbf{A}}_{E^*}) = d_1 d_2 k^4 + \left(d_2 \beta u^* + \frac{d_1 msu^*v^*}{(mv^*+1)^2}\right)k^2 + \frac{ms\beta u^{*2}v^*}{(mv^*+1)^2} + \frac{csu^*v^*}{(mv^*+1)^3} > 0$$

Dado que para cualquier valor de j y n, $tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E^*}) < 0$ y $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E^*}) > 0$ independientemente del valor de k, tenemos que el punto E^* por los teoremas de Hartman-Grobman y (1.4.2) es asintóticamente estable para cada una de las ecuaciones α_{jn} y β_{jn}. Luego por (4.20), las funciones U_1 y U_2 como funciones de $\mathbf{r}$ si comienzan cerca al punto E^* ellas se mantienen cerca y ademas convergen a ese punto sin importar cual sea el $\mathbf{r}$ que se tome, por lo tanto, el equilibrio positivo E^* del modelo (4.2) es uniformemente asintóticamente estable.

□

4.2. El caso con efecto Allee débil

En cuanto a la estabilidad del único equilibrio positivo $E_w = (u_w, v_w)$ del modelo (4.1), se tiene la siguiente definición,

Definición 4.2.1. Si un equilibrio positivo es uniformemente asintóticamente estable en el modelo modelo (4.2), pero inestable con respecto a las soluciones del modelo (4.1), entonces esta inestabilidad es llamada inestabilidad impulsada por difusión-Allee.

Procediendo como en la sección anterior se tiene que el sistema (4.1) linealizado alrededor de E_w es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} = d_1 \Delta U_1 + \left(-\beta u_w + \dfrac{q u_w}{(u_w+b)^2}\right) U_1 - \dfrac{c\gamma^2}{s^2 u_w} U_2, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} = d_2 \Delta U_2 + \dfrac{(s u_w - \gamma)}{m u_w} U_1 - \dfrac{(\gamma - s u_w)\gamma}{s u_w} U_2 \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial \nu} = \dfrac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0 \quad en \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.26}$$

De ahí que

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_{jn}}{dt} = \left(-\beta u_w + \dfrac{q u_w}{(u_w+b)^2} - d_1 k^2\right) \alpha_{jn} + \dfrac{-c\gamma^2}{s^2 u_w} \beta_{jn} \\ \dfrac{d\beta_{jn}}{dt} = \dfrac{(s u_w - \gamma)}{m u_w} \alpha_{jn} + \left(\dfrac{(\gamma - s u_w)\gamma}{s u_w} - d_2 k^2\right) \beta_{jn} \end{cases} \tag{4.27}$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana del modelo (4.1) en $E_w = (u_w, v_w)$ es dada por:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{E_w} = \begin{pmatrix} \left(-\beta + \dfrac{q}{(u_w+b)^2}\right) u_w - d_1 k^2 & -\dfrac{c\gamma^2}{s^2 u_w} \\ \dfrac{s u_w - \gamma}{m u_w} & -\dfrac{\gamma(s u_w - \gamma)}{s u_w} - d_2 k^2 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

donde

$$
\begin{aligned}
tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) &= \left(-\beta + \frac{q}{(u_w+b)^2}\right)u_w - d_1k^2 + \frac{-\gamma(su_w-\gamma)}{su_w} - d_2k^2 \\
&= -(d_1+d_2)k^2 + \left(-\beta + \frac{q}{(u_w+b)^2}\right)u_w - \frac{\gamma(su_w-\gamma)}{su_w} \\
&= -(d_1+d_2)k^2 + \frac{qsu_w^2 + (u^w+b)^2(\gamma^2 - s\gamma u_w - s\beta u_w^2)}{su_w(u_w+b)^2} \\
&= -(d_1+d_2)k^2 + tr(\mathbf{A}_{E_w})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) &= \left[\left(-\beta + \frac{q}{(u_w+b)^2}\right)u_w - d_1k^2\right]\left[\frac{-\gamma(su_w-\gamma)}{su_w} - d_2k^2\right] + \frac{(su_w-\gamma)c\gamma^2}{ms^2u_w^2} \\
&= (d_1d_2)k^4 + \left[d_1\frac{\gamma(su_w-\gamma)}{su_w} + \left(\beta - \frac{q}{(u_w+b)^2}\right)d_2u_w\right]k^2 + det(\mathbf{A}_{E_w}).
\end{aligned}
$$

con autovalores λ_i, $i = 1, 2$ dados por

$$
\lambda_i = \frac{tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) \pm \sqrt{(tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}))^2 - 4det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w})}}{2}
$$

4.2.1. Condiciones para la inestabilidad

Las condiciones para la inestabilidad son que por lo menos una de las condiciones siguientes no se cumpla

$$(1)\ \ tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) < 0,$$

$$(2)\ \ det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) > 0$$

Pero del teorema (3.2.2) inciso (a) sabemos que $tr(\mathbf{A}_{E_w}) < 0$, así que

$$
tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) = tr(\mathbf{A}_{E_w}) - (d_1+d_2)k^2 < 0,
$$

Por lo tanto (1) se cumple. En consecuencia, si (2) no se cumple se produce la inestabilidad impulsada por la difusión-Allee.

Una condición necesaria para la inestabilidad del modelo (4.1) es

$$
d_1\frac{\gamma(su_w-\gamma)}{su_w} + \left(\beta - \frac{q}{(u_w+b)^2}\right)d_2u_w \triangleq \Theta < 0
$$

de lo contrario el $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) > 0$ para todo k debido a que el $det(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$. Entonces se debe tener que $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) < 0$ para algun k. Veamos ahora que

(I) La función $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w})$ tiene un mínimo cuando $\Theta < 0$ dado por

$$\min_k\{det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w})\} = \frac{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w}) - \Theta^2}{4d_1d_2}$$

En efecto. Sea $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(k^2) = d_1d_2k^4 + \Theta k^2 + det(\mathbf{A}_{E_w})$$

de donde

$$h'(k^2) = 4d_1d_2k^3 + 2\Theta k = 0$$

implica

$$4d_1d_2k^2 + 2\Theta = 0 \quad \text{o} \quad k = 0$$

pero, $k \neq 0$ entonces

$$4d_1d_2k^2 + 2\Theta = 0$$

de ahí que

$$k^2 = \frac{-\Theta}{2d_1d_2}$$

sea un punto critico de $h(k^2)$. Llamemos a este punto critico k^{*2} con $k^{*2} > 0$, dado que $\Theta < 0$. Además,

$$h''(k^2) = 12d_1d_2k^2 + 2\Theta$$

y

$$\begin{aligned} h''(k^{*2}) &= 12d_1d_2\left(\frac{-\Theta}{2d_1d_2}\right) + 2\Theta \\ &= -6\Theta + 2\Theta \\ &= -4\Theta > 0 \end{aligned}$$

De modo que $h(k^2)$ tiene un mínimo en k^{*2}. Finalmente evaluando k^{*2} en $h(k^2)$ obtenemos

$$h(k^{*2}) = \frac{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w}) - \Theta^2}{4d_1d_2}$$

esto es,

$$\min_k\{det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w})\} = \frac{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w}) - \Theta^2}{4d_1d_2}.$$

(II) $\Theta < 0$ es equivalente a

$$\left(\frac{d_1\gamma(su_w-\gamma)}{d_2su_w^2}+\beta\right)(u_w+b)^2 < q < b\alpha.$$

Tenemos que $\Theta < 0$ implica

$$\frac{d_1\gamma(su_w-\gamma)}{su_w}+\left(\beta-\frac{q}{(u_w+b)^2}\right)d_2u_w < 0$$

por lo cual

$$\frac{d_1\gamma(su_w-\gamma)}{su_w}+\frac{\beta u_w d_2(u_w+b)^2-qd_2u_w}{(u_w+b)^2} < 0$$

y después de algunas operaciones algebraicas se observa que

$$d_1\gamma(su_w-\gamma)(u_w+b)^2+s\beta d_2u_w^2(u_w+b)^2-qd_2su_w^2 < 0$$

de donde

$$(u_w+b)^2\left(\frac{d_1\gamma(su_w-\gamma)}{d_2su_w^2}+\beta\right) < q < b\alpha. \tag{4.29}$$

(III) El $\min_k\{det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w})\} < 0$ es equivalente a $4d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w})-\Theta^2 < 0$ lo cual es equivalente a

$$q > (u_w+b)^2\left(\beta+\frac{d_1\gamma(su_w-\gamma)}{d_2su_w^2}+\frac{\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w})}}{d_2u_w}\right) \tag{4.30}$$

En efecto, $4d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w})-\Theta^2 < 0$ implica $2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w})} < -\Theta$, ya que $\Theta < 0$ entonces $|\Theta| = -\Theta$. Luego

$$\begin{aligned}2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w})} &< -d_1\frac{\gamma(su_w-\gamma)}{su_w}-\left(\beta-\frac{q}{(u_w+b)^2}\right)d_2u_w\\ &< \frac{qd_2u_w}{(u_w+b)^2}-d_1\frac{\gamma(su_w-\gamma)}{su_w}-\beta d_2u_w\end{aligned}$$

de donde

$$d_1\frac{\gamma(su_w-\gamma)}{su_w}+\beta d_2u_w+2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w})}d_2u_w < \frac{qd_2u_w}{(u_w+b)^2}$$

esto, es

$$q > (u_w+b)^2\left(\beta+d_1\frac{\gamma(su_w-\gamma)}{d_2su_w^2}+\frac{2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_w})}}{d_2u_w}\right)$$

(IV) Con $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) = 0$ tenemos

$$d_1 d_2 k^4 + \Theta k^2 + det(\mathbf{A}_{E_w}) = 0$$

$$d_1 d_2 (k^2)^2 + \Theta k^2 + det(\mathbf{A}_{E_w}) = 0$$

entonces

$$k_1^2 = \frac{-\Theta - \sqrt{\Theta^2 - 4d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_w})}}{2d_1 d_2}$$

$$k_2^2 = \frac{-\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 4d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_w})}}{2d_1 d_2}$$

con $0 < k_1^2 < k^{*2} < k_2^2$.

En conclusión, cuando $0 < k_1^2 < k^2 < k_2^2$, el $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) < 0$ y por lo tanto E_w es inestable para el modelo (4.1).

De lo anterior se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. Asuma que las siguientes condiciones se cumplen:

(a) $q < \left(\dfrac{\gamma(su_w - \gamma)}{su_w^2} + \beta \right) (u_w + b)^2$;

(b) $(u_w + b)^2 (c\gamma + ms\beta u_w^2) - msqsu_w^2 > 0$;

(c) $(u_w + b)^2 \left(\dfrac{d_1 \gamma(su_w - \gamma)}{d_2 su_w^2} + \beta \right) < q < b\alpha$;

(d) $q > (u_w + b)^2 \left(\beta + d_1 \dfrac{\gamma(su_w - \gamma)}{d_2 su_w^2} + \dfrac{2\sqrt{d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_w})}}{d_2 u_w} \right)$.

entonces el equilibrio positivo E_w del modelo (4.1) es inestable impulsado por difusión-Allee cuando con $0 < k_1^2 < k^2 < k_2^2$.

Demostración. Supongamos que se cumplen (a), (b), (c) y (d).

(1) Que se cumpla (a) es equivalente a $tr(\mathbf{A}_{E_w}) < 0$. En efecto,

$$q < \left(\frac{\gamma(su_w - \gamma)}{su_w^2} + \beta \right) (u_w + b)^2$$

implica

$$qsu_w^2 < (u_w + b)^2 (s\beta u_w^2 + s\gamma u_w - \gamma^2)$$

$$qsu_w^2 + (u_w + b)^2(\gamma^2 - s\gamma u_w - s\beta u_w^2) < 0$$

de donde

$$\frac{qsu_w^2 + (u_w + b)^2(\gamma^2 - s\gamma u_w - s\beta u_w^2)}{su_w(u_w + b)^2} < 0$$

esto es, $tr(\mathbf{A}_{E_w}) < 0$ (ver teorema (3.2.2)) y por lo tanto $tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) < 0$.

(2) Que se cumpla (b) es equivalente a que $det(\mathbf{A}_{E_w}) > 0$ (ver teorema (3.2.2)).

(3) Como (c) se cumple entonces esto es equivalente a que $\Theta < 0$ por (ii) y esto a su vez implica que la función $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w})$ tenga un mínimo, ver (i).

(4) Como (d) se cumple, entonces por (iii) se tiene que el mínimo dado por

$$\min_k\{det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w})\} = \frac{d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_w}) - \Theta^2}{4d_1 d_2}$$

es negativo.

Finalmente cuando $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) = 0$ determinamos a k_1^2 y k_2^2, con $0 < k_1^2 < k^{*2} < k_2^2$ y por lo tanto, concluimos que $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_w}) < 0$ cuando $0 < k_1^2 < k^2 < k_2^2$, esto quiere decir que E_w es inestable impulsado por difusión-Allee por la definición (4.2.1).

□

4.3. El caso con efecto Allee fuerte

En esta sección se darán las condiciones bajo las cuales el único estado de equilibrio positivo E_s puede ser inestable.

Procediendo como antes, se tiene que el modelo linealizado alrededor de E_s es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} = d_1\Delta U_1 + \left(-\beta u_s + \dfrac{qu_s}{(u_s+b)^2}\right)U_1 - \dfrac{c\gamma^2}{s^2 u_s}U_2, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} = d_2\Delta U_2 + \dfrac{(su_s - \gamma)}{mu_s}U_1 - \dfrac{(\gamma - su_s)\gamma}{su_s}U_2 \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial \nu} = \dfrac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0 \quad en \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.31}$$

de donde

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_{jn}}{dt} = \left(-\beta u_s + \dfrac{qu_s}{(u_s+b)^2} - d_1k^2\right)\alpha_{jn} + \dfrac{-c\gamma^2}{s^2u_s}\beta_{jn} \\ \dfrac{d\beta_{jn}}{dt} = \dfrac{(su_s-\gamma)}{mu_s}\alpha_{jn} + \left(\dfrac{(\gamma - su_s)\gamma}{su_s} - d_2k^2\right)\beta_{jn} \end{cases} \tag{4.32}$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana del modelo (4.1) en $E_s = (u_s, v_s)$ es dada por:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{E_s} = \begin{pmatrix} \left(-\beta + \dfrac{q}{(u_s+b)^2}\right)u_s - d_1k^2 & -\dfrac{c\gamma^2}{s^2u_s} \\ \dfrac{su_s-\gamma}{mu_s} & -\dfrac{\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} - d_2k^2 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

donde

$$\begin{aligned} tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) &= \left(-\beta + \frac{q}{(u_s+b)^2}\right)u_s - d_1k^2 + \frac{-\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} - d_2k^2 \\ &= -(d_1+d_2)k^2 + \left(-\beta + \frac{q}{(u_s+b)^2}\right)u_s - \frac{\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} \\ &= -(d_1+d_2)k^2 + \frac{qsu_s^2 + (u^s+b)^2(\gamma^2 - s\gamma u_s - s\beta u_s^2)}{su_s(u_s+b)^2} \\ &= -(d_1+d_2)k^2 + tr(\mathbf{A}_{E_s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) &= \left[\left(-\beta + \frac{q}{(u_s+b)^2}\right)u_s - d_1k^2\right]\left[\frac{-\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} - d_2k^2\right] + \frac{(su_s-\gamma)c\gamma^2}{ms^2u_s^2} \\ &= (d_1d_2)k^4 + \left[d_1\frac{\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} + \left(\beta - \frac{q}{(u_s+b)^2}\right)d_2u_s\right]k^2 + det(\mathbf{A}_{E_s}). \end{aligned}$$

4.3.1. Condiciones para la inestabilidad del modelo espacial

Al igual que en la sección anterior, las condiciones para la inestabilidad son que por lo menos una de las condiciones siguientes no se cumpla

$$(1)\ \ tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) < 0,$$

$$(2)\ \ det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) > 0$$

Pero del teorema (3.3.2) inciso (a) sabemos que $tr(\mathbf{A}_{E_s}) < 0$, así que

$$tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) = tr(\mathbf{A}_{E_s}) - (d_1+d_2)k^2 < 0,$$

Por lo tanto (1) se cumple. En consecuencia, si (2) no se cumple se produce la inestabilidad impulsada por la difusión-Allee. Luego, una condición necesaria para la inestabilidad del modelo (4.1) es

$$d_1 \frac{\gamma(su_s - \gamma)}{su_s} + \left(\beta - \frac{q}{(u_s + b)^2}\right) d_2 u_s \triangleq \Theta < 0$$

de lo contrario el $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) > 0$ para todo k debido a que el $det(\mathbf{A}_{E_s}) > 0$. Entonces se debe tener que $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) < 0$ para algún k. Procediendo como en el caso con efecto Allee débil, se tiene lo siguiente:

(I) La función $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s})$ tiene un mínimo cuando $\Theta < 0$ dado por

$$\min_k \{det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s})\} = \frac{d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_s}) - \Theta^2}{4 d_1 d_2}$$

(II) $\Theta < 0$ es equivalente a

$$\max\left\{\left(\frac{d_1 \gamma(su_s - \gamma)}{d_2 s u_s^2} + \beta\right)(u_s + b)^2, b\alpha\right\} < q \tag{4.34}$$

Efectivamente $\Theta < 0$ implica

$$\frac{d_1 \gamma(su_s - \gamma)}{su_s} + \left(\beta - \frac{q}{(u_s + b)^2}\right) d_2 u_s < 0$$

por lo cual

$$\frac{d_1 \gamma(su_s - \gamma)}{su_s} + \frac{\beta u_s d_2 (u_s + b)^2 - q d_2 u_s}{(u_s + b)^2} < 0$$

y después de algunas operaciones algebraicas se observa que

$$d_1 \gamma(su_s - \gamma)(u_s + b)^2 + s\beta d_2 u_s^2 (u_s + b)^2 - q d_2 s u_s^2 < 0$$

de donde

$$(u_s + b)^2 \left(\frac{d_1 \gamma(su_s - \gamma)}{d_2 s u_s^2} + \beta\right) < q.$$

y por la condición del efecto Allee fuerte, entonces se cumple (4.34).

(III) El $\min_k \{det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s})\} < 0$ es equivalente a $4 d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_s}) - \Theta^2 < 0$ lo cual es equivalente a

$$q > \max\left\{(u_s + b)^2 \left(\beta + \frac{d_1 \gamma(su_s - \gamma)}{d_2 s u_s^2} + \frac{\sqrt{d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_s})}}{d_2 u_s}\right), b\alpha\right\} \tag{4.35}$$

En efecto, $4d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s}) - \Theta^2 < 0$ implica $2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s})} < -\Theta$, ya que $\Theta < 0$ entonces $|\Theta| = -\Theta$. Luego

$$\begin{aligned} 2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s})} &< -d_1\frac{\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} - \left(\beta - \frac{q}{(u_s+b)^2}\right)d_2u_s \\ &< \frac{qd_2u_s}{(u_s+b)^2} - d_1\frac{\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} - \beta d_2u_s \end{aligned}$$

de donde

$$d_1\frac{\gamma(su_s-\gamma)}{su_s} + \beta d_2u_s + 2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s})}d_2u_s < \frac{qd_2u_s}{(u_s+b)^2}$$

esto, es

$$q > (u_s+b)^2\left(\beta + d_1\frac{\gamma(su_s-\gamma)}{d_2su_s^2} + \frac{2\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s})}}{d_2u_s}\right)$$

y como $q > b\alpha$ entonces se tiene (4.35).

(IV) De igual manera que en el caso con efecto Allee débil $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) = 0$ implica

$$k_1^2 = \frac{-\Theta - \sqrt{\Theta^2 - 4d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s})}}{2d_1d_2}$$

$$k_2^2 = \frac{-\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 4d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s})}}{2d_1d_2}$$

con $0 < k_1^2 < k^{*2} < k_2^2$.

Se concluye por lo tanto que, cuando $0 < k_1^2 < k^2 < k_2^2$, el $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) < 0$ y por lo tanto E_s es inestable para el modelo (4.1).

Lo anterior se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. Asuma que las siguientes condiciones se cumplen:

(a) $q < \left(\dfrac{\gamma(su_s-\gamma)}{su_s^2} + \beta\right)(u_s+b)^2$;

(b) $(u_s+b)^2(c\gamma + ms\beta u_s^2) - msqsu_s^2 > 0$;

(c) $\max\left\{\left(\dfrac{d_1\gamma(su_s-\gamma)}{d_2su_s^2} + \beta\right)(u_s+b)^2, b\alpha\right\} < q$

(d) $q > \max\left\{(u_s+b)^2\left(\beta + \dfrac{d_1\gamma(su_s-\gamma)}{d_2su_s^2} + \dfrac{\sqrt{d_1d_2det(\mathbf{A}_{E_s})}}{d_2u_s}\right), b\alpha\right\}$.

Entonces el equilibrio positivo E_s del modelo (4.1) es inestable impulsado por difusión-Allee cuando con $0 < k_1^2 < k^2 < k_2^2$.

Demostración. Supongamos que se cumplen (a), (b), (c) y (d).

(1) Que se cumpla (a) es equivalente a $tr(\mathbf{A}_{E_s}) < 0$. En efecto,

$$q < \left(\frac{\gamma(su_s - \gamma)}{su_s^2} + \beta \right) (u_s + b)^2$$

implica

$$qsu_s^2 < (u_s + b)^2 (s\beta u_s^2 + s\gamma u_s - \gamma^2)$$

$$qsu_s^2 + (u_s + b)^2 (\gamma^2 - s\gamma u_s - s\beta u_s^2) < 0$$

de donde

$$\frac{qsu_s^2 + (u_s + b)^2 (\gamma^2 - s\gamma u_s - s\beta u_s^2)}{su_s(u_s + b)^2} < 0$$

esto es, $tr(\mathbf{A}_{E_s}) < 0$ (ver teorema (3.3.2)) y por lo tanto $tr(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) < 0$.

(2) Que se cumpla (b) es equivalente a que $det(\mathbf{A}_{E_s}) > 0$ (ver teorema (3.3.2)).

(3) Como (c) se cumple entonces esto es equivalente a que $\Theta < 0$ por (II) y esto a su vez implica que la función $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s})$ tenga un mínimo, ver (I).

(4) Como (d) se cumple, entonces por (III) se tiene que el mínimo dado por

$$\min_k \{det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s})\} = \frac{d_1 d_2 det(\mathbf{A}_{E_s}) - \Theta^2}{4 d_1 d_2}$$

es negativo.

Finalmente cuando $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) = 0$ determinamos a k_1^2 y k_2^2, con $0 < k_1^2 < k^{*2} < k_2^2$ y por lo tanto, concluimos que $det(\tilde{\mathbf{A}}_{E_s}) < 0$ cuando $0 < k_1^2 < k^2 < k_2^2$, esto quiere decir que E_s es inestable impulsado por difusión-Allee cuando $0 < k_1^2 < k^2 < k_2^2$ por la definición (4.2.1).

□

Capítulo 5

Conclusiones

En relación con el artículo *Dynamical complexity induced by Allee effect in a predador-prey model* para el modelo no espacial (2.1) se mostró que las soluciones no negativas de este modelo que comienzan en $\mathbb{R}_+^2$ son uniformemente acotadas, difiriendo esta prueba un poco a la del artículo. Seguidamente se completaron detalles de la demostración para el lema auxiliar (2) y con la ayuda de éste se hizo la demostración de los teoremas (2.2.1) y (2.2.2) sobre la existencia de los equilibrios positivos. Estos teoremas mostraron que en el modelo pueden existir o un único equilibrio positivo o dos equilibrios positivos, mientras que para el caso sin efecto Allee se mostró que existe un único equilibrio positivo.
De otra parte, para demostrar los teoremas referentes al tipo de estabilidad de los equilibrios positivos y de frontera para el caso local se usaron principalmente los teoremas de Hartman-Grobman (1.4.1) para la linealización del modelo (2.1) y los teoremas (1.4.2) y (1.4.3) para identificar si los estados estacionarios del modelo linealizado eran sillas o nodos o bien focos; y para mostrar los resultados concercientes a la estabilidad asintótica global se usó el método directo de Lyapunov. Al mismo tiempo se verificaron las cuentas para la obtención de las matrices jacobianas de cada uno de los puntos y de sus respectivos autovalores. Para el caso sin efecto Allee se hizo la demostración de los teoremas (3.1.1) y (3.1.2), donde se obtuvo que el único equilibrio positivo es globalmente asintóticamente estable. Para el caso con efecto Allee débil, se completaron los detalles en la demostración del teorema (3.2.1). Conviene subrayar que, en el teorema (3.2.2) se hizo una modificación

en el enunciado de los items (a1), (a2), (b1) y (b2), sujeta a los resultados obtenidos en la observación (3.2.1) y se completó su demostración. También se completaron los detalles de la demostración del teorema (3.2.3) y se hizo la prueba del teorema (3.2.4) . Ahora bien, para el caso con efecto Allee fuerte se se hizo la prueba el teorema (3.3.1); y se hicieron las demostraciones para los teoremas (3.3.2) y (3.3.3).

Hay que mencionar además que, para el caso sin efecto Allee el modelo tiene tres equilibrios, dos en la frontera E_0 y E_1 y un único equilibrio positivo E^*, mientras que en el caso con efecto Allee débil se presentan dos situaciones: en la primera, en el modelo existen tres equilibrios, dos en la frontera, E_{w0} y E_{w1} y un único equilibrio positivo E_w, el cual por el teorema (3.2.2) puede ser localmente asintóticamente estable o bien inestable; y en la segunda situación, se tienen cuatro equilibrios: dos en la frontera, E_{w0} , E_{w1} y dos equilibrios positivos: E_{w3} y E_{w4}, siendo E_{w3} localmente asintóticamente estable y E_{w4} inestable. Se observa también que el punto de equilibrio $E_0 = E_{w0} = (0, 0)$ en ambos casos, con efecto Allee débil y sin efecto Allee es un punto de silla del modelo, mientras que este punto en el modelo con efecto Allee fuerte es un nodo estable.

En cuanto al modelo con efecto Allee fuerte se tiene también dos situaciones: existen cuatro puntos de equilibrio o cinco puntos de equilibrio, en ambos situaciones tres equilibrios en la frontera: E_{s0}, E_{s1} y E_{s2} y un único punto de equilibrio positivo, E_s o dos puntos de equilibrio positivos, E_{s3} y E_{s4}. A su vez cuando los teoreamas (3.3.1)(a) y (3.3.2)(a) o (3.3.3)(a) se cumplen, entonces, E_{s0} y E_s o E_{s0} y E_{s3} son localmente asintóticamente estables simultáneamente, por lo tanto, el modelo es biestable.

Por otra parte, para determinar la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio positivo del modelo espacial para los casos con y sin efecto Allee débil, se completaron detalles de la demostración del teorema (4.1.1), se establecieron las condiciones bajo las cuales se puede presentar inestabilidad impulsada por la difusión y el efecto Allee juntamente y se probó el teorema (4.2.1). Para ello, primero se linealizó el modelo alrededor del punto de equilibrio positivo, para el caso sin efecto Allee alrededor del punto E^* y en el otro caso alrededor de E_w. Seguidamente se expresaron las soluciones de este sistemas en series de Fourier para posteriormente pasar del problema de ecuaciones en derivadas parciales al problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema (4.1.1) mostró que la difusión no tiene efecto sobre la estabilidad asintótica del punto de equilibrio positivo E^*. Por lo tanto para el caso sin efecto Allee no existe la inestabilidad impulsada por la difusión. En cambio el teorema (4.2.1) mostró que cuando el modelo espacial tiene difusion y efecto Allee débil juntamente se presenta la inestabilidad impulsada por la difusión-Allee. Finalmente se establecieron las condiciones de inestabilidad para el modelo en el caso con efecto Allee fuerte y se enuncio el teorema (4.3.1), donde se formalizaron los resultados obtenidos y se hizo su demostración, procediendo de la misma manera que en el caso con efecto Allee débil.

De lo anterior se evidencia que la dinámica del modelo presa-depredador es compleja debido a que el efecto Allee hace que garantizar la existencia de los equilibrios positivos se vuelva difícil debido a que los parámetros deben cumplir más condiciones. Además el efecto Allee induce condiciones bajo las cuales los estados de equilibrio tanto positivos como de frontera aumentan y a su vez cambian de estabilidad. Es decir, el modelo puede ser biestable en el caso del modelo no espacial con efecto Allee fuerte y en el caso del modelo espacial no tener inestabilidad impulsada por la difusión cuando no se tiene efecto Allee o tener inestabilidad impulsada por la difusión-Allee, en el caso con efecto Allee.

Finalmente, hay resultados aún por estudiar que pueden tratarse en estudios posteriores como el caso de los item (a), (b), (c) y (d) de los teoremas (3.2.2), (3.3.2) y (3.3.3) y también la parte (c) de los teoremas (3.2.2), (3.3.2) que tratan sobre los ciclos limites y la bifurcación de Hopf. Ádemas de analizar la estabilidad de los estados de equilibrio E_{w3}, E_{w4}, E_{s3}, E_{s4} para el caso del modelo espacial con efecto Allee y hacer simulaciones númericas para observar los distintos patrones de formación que presenta el modelo.

Bibliografía

[1] Muñoz, E., Gomez, S., & Álvarez, J. (2017). Efecto Alle: descripción y modelos básicos en la dinámica de poblaciones. En López, M., & Macias, F. (Eds.). Matematicas y sus aplicaciones 8. (41-56). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[2] Samanta, G., & Gomez, R. (2014). Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa. *Miscelánea Matemática, 58*, 77-110. Recuperado de http://www.miscelaneamatematica.org/Misc58/5806.pdf.

[3] Jost, C. (1998). *Comparing predator-prey models qualitatively and quantitatively with ecological timel-series-data* (tesis doctoral). Institut National Agronomique, Paris-Gringnon.

[4] Wang, J., Shi, J., & Wei, J. (2011). Predator-prey system with strong Allee effect in prey. *Journal of Mathematical biology*, *62*(3), 291-331.

[5] Cai, Y., Wang, J., & Wang, J. (2012). Dinamics of a diffusive predator-prey model with additive Allee effect. *International Journal of Biomathematics*, *5*(2), 1-11.

[6] Wang, W., Zhu, Y. N., Cai, Y., & Wang, W. (2014). Dynamical complexity induced by Allee effect in a predator-prey model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, *16*(1), 103-119.

[7] Aziz-Alaoui, M. A., & Daher Okiye, M. (2003). Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Applied Mathematics Letters*, *16*(7), 1069-1075.

[8] Hirsh, M. W., & Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical System, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science.

[9] Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems*. Text in Applied Mathematics. Springer New York.

[10] Lomelí, H.E. (2005). Sistemas Dinámicas. Notas. Instituto Tecnológico Autónomo de México.

[11] Jiménez, M.N. Estabilidad En Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Notas. Universidad de Sevilla, España. (2013-2014).

[12] Escobar, Jaime. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en Maple. Recuperado de http://matematicas.udea.edu.co/ jescobar/docs/libroED.pdf

[13] Kaw, A. (2009). Chapter 03.02 Solution of Cubic Equations. University of South Florida. (5), 1-10.

[14] Solving Cubic Polynomials 1.1. (n.d.), 1-8.

[15] Aziz-Alaoui, M. A. (2002). Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model. *Chaos, Solitons and Fractals*, *14*(8), 1275–1293.

[16] Dos Santos, C.R. (2015). *MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU*. (Tesis de maestría). Universidade Federal do Tocantins, Palmas, Brasil.

[17] Lima, E. (1987). Equação do Terceiro Grau. *Matemática Universitária* , 9-23.

[18] H. Malchow, S. Petrovskii, E. Venturino.(2008).*Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology–Theory, Models, and Simulation*. Mathematical and Computational Biology Series, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

[19] Trujillo, J.E. (2016). *Dinamica de un sistema presa-depredador cuyo modelo considera el efecto Allee* (tesis de pregrado). Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.

[20] Stephens, P., Sutherland, W. and Freckleton, R. What is the Allee Effect? Oikos, Vol 87, Num 1, 1999, 185-190.