

DINÁMICA Y CONTROL DE UNA BICICLETA AUTÓNOMA



TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO FÍSICO

JAMES FABÍAN DÍAZ ORDÓÑEZ

DIRECTOR:
D.Sc. DIEGO ALBERTO BRAVO MONTENEGRO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA
POPAYÁN, ABRIL DE 2019

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director, D.Sc. Diego Alberto Bravo Montenegro por ser mi maestro, amigo y compartirme su conocimiento y tiempo para la culminación exitosa de este trabajo.

LISTA DE CONTENIDOS

Agradecimientos	III
Introducción General	1
1. Modelo Matemático de la Bicicleta	7
1.1. Modelo de segundo orden de la bicicleta	7
1.1.1. Modelo CAD	12
1.2. Modelo Dinámico a partir de la Ecuación de <i>Lagrange</i>	13
1.2.1. Modelo considerando solo desplazamiento lineal	15
1.3. Linealización del Modelo	19
1.4. Resumen	22
2. Control PID	23
2.1. Controlador PID	23
2.1.1. Acción Proporcional	25
2.1.2. Acción Proporcional Integral	26
2.1.3. Acción Proporcional Derivativa	27
2.2. Implementación del controlador PID	28
2.2.1. Resultados	30

3. Control LQR	35
3.1. Controlador LQR	35
3.1.1. Controlabilidad	37
3.1.2. Observabilidad	38
3.2. Cálculo de la ganancia de realimentación del vector de estados	39
3.3. Implementación del Controlador LQR para el balance de la bicicleta	40
3.3.1. Resultados	41
4. Control No-Lineal	43
4.1. Controlador CTC	43
4.2. Implementación del Controlador CTC para el balance de la bicicleta	44
4.2.1. Resultados	45
5. Comparación del desempeño de los controladores	47
5.1. Comparación mediante los índices de desempeño	47
Conclusiones y Perspectivas	51
A. Arduino Kit Engineering	53
A.1. Bicicleta Robótica	53
A.2. Especificaciones Técnicas	56
A.3. MATLAB / Simulink	59
Bibliografía	61

LISTA DE FIGURAS

1-1. Parámetros geométricos de la bicicleta.	8
1-2. Sistemas de referencia.	9
1-3. Vista superior y trasera.	10
1-4. Dirección del par de accionamiento τ_m del disco de inercia.	11
1-5. Sistemas de referencia de los cuerpos que componen la bicicleta.	14
2-1. Controlador PID <i>serie</i> o <i>interactivo</i>	25
2-2. Controlador PID <i>paralelo</i>	25
2-3. Control Proporcional	26
2-4. Control Proporcional Integral.	27
2-5. Respuesta en frecuencia del derivador ideal $G_d(s) = T_d s$	27
2-6. Respuesta en frecuencia de la acción derivativa con filtro $G_d(s) = \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}$	28
2-7. Diagrama de bloques del control PID.	29
2-8. Respuesta temporal del controlador y el esfuerzo de control.	31
2-9. Respuesta temporal de los términos del controlador PID.	32
2-10. Convergencia hacia el equilibrio ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$) del controlador PID.	33
3-1. Diagrama de bloques del controlador LQR.	41

3-2. Respuesta temporal del controlador y el esfuerzo de control.	42
4-1. Diagrama en bloques del controlador dinámico.	44
4-2. Respuesta temporal del controlador y el esfuerzo de control.	46
5-1. Respuesta temporal de los controladores. (i) PID, (ii) LQR, (iii) CTC. . . .	49
5-2. Esfuerzo de control para los controladores implementados. (i) PID, (ii) LQR, (iii) CTC.	50
A-1. Control PID en Matlab / Simulink.	60

LISTA DE TABLAS

0-1. Resumen Estado del Arte	4
1-1. Parámetros dinámicos de la bicicleta robótica	13
1-2. Parámetros Dinámicos del Modelo	21
2-1. Valor promedio de las desviaciones estándar de los índices de desempeño para el controlador PID.	31
3-1. Valor promedio de las desviaciones estándar de los índices de desempeño para el controlador LQR.	42
4-1. Valor promedio de las desviaciones estándar de los índices de desempeño para el controlador CTC.	45
5-1. Comparación del promedio de las desviaciones estándar obtenidas a partir de los experimentos con cada controlador.	48
5-2. Comparación de los radios de las desviación estándar del esfuerzo de control para cada controlador.	48
A-1. Componentes de la bicicleta robótica	55
A-2. Especificaciones Motor c.c y Disco de Inercia	56

Introducción General

Actualmente las bicicletas son un medio de transporte muy popular, gracias a que no deterioran el medio ambiente, no dependen de ningún suministro de energía, tienen una alta eficiencia y son de fácil mantenimiento. Sin embargo, es un sistema inestable que requiere de la asistencia humana, como controlar la dirección y balancear el cuerpo del conductor para dirigir y estabilizar la bicicleta. Se han diseñado y fabricado muchas bicicletas con asistencia eléctrica que evitan a la persona pedalear para desplazarse, pero no ayudan en la estabilización de su postura mientras la conduce. Por lo tanto es de interés científico e ingenieril evaluar la posibilidad de que la bicicleta se estabilice automáticamente.

La bicicleta puede ser usada para ilustrar una gran variedad de conceptos en Ingeniería de control [Åström et al., 2005]. Dicho sistema es no lineal, inherentemente inestable, que presenta claramente la necesidad de un implementar un algoritmo de control que permita controlar su inclinación. Debido a esta naturaleza, el uso de la bicicleta para la enseñanza de sistemas dinámicos e Ingeniería de control, por ejemplo, Universidad de Lund, Universidad de California y la Universidad de Cornell, [Papadopoulos, 1987].

Un bicicleta robótica de dos ruedas comparte las mismas características de un péndulo invertido, [Åström et al., 2005]. Es no lineal, inestable, multivariable y está fuertemente acoplado [Akesson et al., 2006], tales particularidades han incrementado el interés de muchos investigadores en proporcionar herramientas de enseñanza e investigación que permitan afianzar los conocimientos relacionados con las diferentes estrategias de control, el procesamiento de señales y la obtención de modelos cinemáticos y dinámicos. Actualmente se cuentan con algunos modelos con propósitos de control como el de Astrom, [Åström et al., 2005]. El objetivo de control para la bicicleta es mantener el balance de la misma, este tipo de vehículo es afectado por disturbios externos, dinámicas no modeladas, errores en la estimación de los parámetros y el ruido adicional en las medidas obtenidas por los sensores, entre otros [Raffo et al., 2015], por lo tanto, en el diseño del sistema control se

debe garantizar una mayor exigencia de precisión y robustez.

Dentro de la literatura consultada se encuentra la aplicación de diferentes técnicas de control para estos sistemas, tanto lineales como no lineales. Ambas técnicas requieren de una buena comprensión del modelo matemático, [Edelmann et al., 2015] que puede ser obtenido mediante la ecuación de Lagrange [Consolini and Maggiore, 2013], el algoritmo de Newton-Euler, [Mauny et al., 2017] y leyes de Newton, [Hung et al., 2018]. Para la estrategia de control lineal, el modelo que se obtiene con cualquiera de las anteriores técnicas debe ser linealizado, caso contrario al control no lineal, donde se utiliza directamente el modelo matemático obtenido. A continuación se proponen dos ejes temáticos alrededor de los cuales se han clasificado las publicaciones consultadas sobre el control de la bicicleta robótica.

Control lineal

Los controladores lineales requieren un modelo matemático de la planta, que es definido por cualquiera de los métodos anteriormente mencionados. Una vez obtenido el modelo, se linealiza para posteriormente continuar con el diseño del controlador. Entre los controladores lineales comúnmente conocidos para hacer control de la bicicleta robótica se encuentran el PID [Hung et al., 2017], control por rechazo activo de perturbaciones [Suárez, 2017], entre otros. En [Hung et al., 2018] se realiza la comparación entre dos estrategias de control, un PID y un controlador difuso.

En [Jamil et al., 2014] se estudia el diseño de un controlador LQR con Filtro de Kalman, se demuestra un buen desempeño en la velocidad de respuesta y una alta precisión, como se comprueba en las simulaciones realizadas en Matlab. Así mismo en [Akesson et al., 2006], se describe el diseño y control de un robot tipo péndulo invertido, donde se implementa un control LQR con compensación de fricción para garantizar una mejor estabilidad del robot.

Control no lineal

Otra de las estrategias abordadas en la literatura para controlar una bicicleta robótica o péndulo invertido sobre ruedas son los controladores no lineales. Una estrategia de control no lineal es el control robusto H_∞ [Raffo et al., 2015], el cual aborda el problema de control

como una optimización matemática que permite encontrar los parámetros que minimizan el valor del costo funcional que describen la trayectoria óptima de un robot móvil tipo péndulo invertido. Este tipo de técnicas permite minimizar el impacto de perturbaciones añadiendo robustez al sistema y mejorando la velocidad de respuesta.

La Tabla 0-1 muestra una clasificación de las referencias bibliográficas consultadas según el tipo de modelado y control realizados en cada uno de ellos.

Referencia	Modelo	Control	Observación
<i>Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research</i> , [Åström et al., 2005]	Cinemático, Euler-Lagrange	Control por torque	Se presentan 4 modelos distintos de baja, mediana y alta complejidad.
<i>Bicycle steering dynamics and self-stability: A summary report on work in progress</i> , [Papadopoulos, 1987]	Euler-Lagrange	Ninguno	Análisis de Estabilidad Dinámica
<i>Design and control of yaip - an inverted pendulum on two wheels robot</i> , [Akersson et al., 2006]	Euler-Lagrange	LQR	Se implementa al control LQR una compensación del modelo de fricción de Coulumb.
<i>Two-wheeled self-balanced pendulum workspace improvement via underactuated robust nonlinear control</i> , [Raffo et al., 2015]	Euler-Lagrange	Control robusto H_∞ no-lineal	Se muestra una minimización del impacto de perturbaciones añadiendo robustez al sistema y mejorando la velocidad de respuesta.
<i>Bicycle rider control modelling for path tracking</i> , [Edelmann et al., 2015]	Euler-Lagrange	MPC	Análisis de la estabilidad del modelo de la bicicleta.
<i>Control of a bicycle using virtual holonomic constraints</i> , [Consolini and Maggiore, 2013]	Euler-Lagrange	Control no lineal	Análisis de estabilidad de trayectorias.

Referencia	Modelo	Control	Observación
<i>Symbolic dynamic modelling of locomotion systems with persistent contacts - application to the 3d bicycle,</i> [Mauny et al., 2017]	Newton-Euler	Control no lineal	Incluye el modelo de contacto para la bicicleta.
<i>A study of the effects of input parameters on the dynamics and required power of an electric bicycle,</i> [Hung et al., 2017]	Leyes de Newton	PID	Estudio de la potencia eléctrica necesaria para impulsar la bicicleta con un motor cc a diferentes velocidades e inclinación de la pendiente.
<i>Diseño e implementación de una estrategia avanzada de control, para resolver el problema de estabilidad de una bicicleta durante un recorrido libre, sin conductor y a velocidad constante,</i> [Suárez, 2017]	Euler-Lagrange	Control por rechazo activo de perturbaciones	Implementación en una bicicleta real.
<i>A simulation and experimental study of operating performance of an electric bicycle integrated with a semi-automatic transmission,</i> [Hung et al., 2018]	Leyes de Newton	PID y Control difuso	Comparación entre un PID y un controlador difuso a distintas velocidades de marcha.
<i>Modeling, control of a two-wheeled self balancing robot,</i> [Jamil et al., 2014]	Euler-Lagrange	LQR	Se realiza una comparación entre el controlador PID encargado de la estabilización y un controlador LQR para regular la velocidad de los motores.

Tabla 0-1: Resumen Estado del Arte

El objetivo principal de este trabajo, es comparar una estrategia de control no lineal con respecto a dos estrategias de control lineales PID y LQR de una bicicleta que se desplaza libremente a una velocidad constante mínima. Para lograr este objetivo se analizan previamente varios modelos matemáticos, seleccionando aquel que se ajuste mejor a la dinámica del prototipo “*Arduino Kit Engineering*”.

Mediante estas estrategias, se implementarán los controladores que permitan minimizar el error de seguimiento y rechazar perturbaciones ante las incertidumbres y dinámicas no modeladas. Además, los lazos de control que estabilizan el sistema deben tolerar cambios suaves de velocidad de avance en el recorrido. Los controladores propuestos permitirán girar a la derecha o hacia la izquierda la dirección para contrarrestar su inclinación de forma similar a un péndulo invertido tipo robot móvil. Para comparar las estrategias de control propuestas se utilizarán índices de desempeño tales como la desviación estándar del error y del esfuerzo de control y los rangos de valores angulares iniciales para el cual la bicicleta robótica tiene convergencia al punto de equilibrio deseado.

Objetivos

Objetivo General

Comparar el desempeño de una estrategia de control no lineal con respecto a dos estrategias de control lineales PID y LQR aplicadas a una bicicleta robótica.

Objetivos Específicos

- Obtener el modelo matemático de una bicicleta robótica con propósitos de control.
- Implementar tres estrategias de control: un controlador no lineal y dos estrategias de control lineales: un PID clásico y un control LQR para el control de inclinación cero para la bicicleta robótica del *Arduino Kit Engineering*.
- Evaluar y comparar el desempeño de los controladores implementados con base en el error cuadrático medio de orientación, el esfuerzo de control.

Organización del Trabajo

El presente documento está compuesto de cinco capítulos. El primero está dedicado al modelo matemático de la bicicleta robótica del *Arduino Kit Engineering* utilizada para la experimentación. El capítulo dos aborda la implementación del controlador PID para la estabilización de la bicicleta robótica. En el capítulo tres se presenta la estrategia de control LQR y la implementación en la planta. El capítulo cuatro describe la estrategia de control no-lineal implementada para garantizar el equilibrio dinámico de la bicicleta robótica. El capítulo cinco expone la comparación de las estrategias de control implementadas en la bicicleta. Finalmente, se escriben las conclusiones y perspectivas de este trabajo de grado.

LISTA DE PUBLICACIONES EN CONFERENCIAS

- [1] D. Bravo, C. Rengifo, J. Diaz. Comparative Analysis between Dynamic Control, LQR Control and PID Control for a Robotic Bicycle (2019). *IEEE 4th Colombian Conference on Automatic Control*. En revisión.
- [2] D. Bravo, C. Rengifo, J. Diaz. Control of a Robotic Bicycle (2018). *IEEE Colombian Conference on Robotics and Automation (CCRA 2018)*. 978-1-5386-8464-1/18/\$31.00 ©2018 IEEE <http://dx.doi.org/10.1109/CCRA.2018.8588132>.

Capítulo 1

Modelo Físico-Matemático de una Bicicleta Robótica

Es posible desarrollar un modelo matemático que describa la dinámica de un sistema a partir de las leyes físicas que lo gobiernan. Tal modelo puede incluir algunos parámetros desconocidos que solamente es posible cuantificarlos mediante experimentación. La importancia de obtener un modelo aproximado del sistema, ya sea mediante formulación matemática o métodos experimentales, es el de plantear alguna estrategia de control basada en modelos como el PID y el LQR con filtro de Kalman, para implementar estas técnicas el modelo debe obtenido debe ser linealizado alrededor de un punto de operación, a diferencia del controlador no-lineal en el que se utiliza el modelo no-lineal de la planta a controlar.

1.1. Modelo de segundo orden de la bicicleta

La geometría de una bicicleta puede ser aproximada por el sistema mecánico como el presentado en la Fig. 1-1. Toda la masa M de la bicicleta se concentra en su centro de masa (CoM) de coordenadas (a, h) , que se encuentra a una distancia h sobre el suelo y a la distancia entre el punto de contacto p_1 de la rueda trasera y la proyección del CoM sobre el suelo, b es la distancia entre los puntos de contacto de ambas ruedas, p_3 es la proyección del eje de la dirección de la bicicleta sobre el suelo, c es la distancia entre el punto de contacto p_2 de la rueda delantera y p_3 .

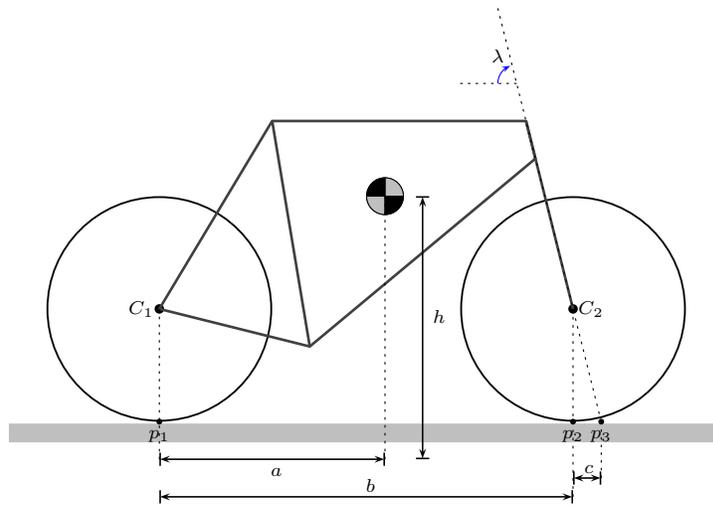


Figura 1-1: Parámetros geométricos de la bicicleta.

Consideraciones del modelo

- La bicicleta se desplaza en dirección del eje x a una velocidad constante v en una superficie plana.
- No existe ningún tipo de deslizamiento (ni derrape lateral ni deslizamiento rotacional) en las llantas.
- El eje de la dirección es vertical, por lo tanto $\lambda = 90^\circ$ y la distancia $c = 0$.
- El ángulo de inclinación θ es el único grado de libertad.
- La señal de control es el ángulo de giro ϕ .
- Los ángulos ϕ , θ , ψ se consideran pequeños, es decir: $\phi \ll 1 \text{ rad}$, $\theta \ll 1 \text{ rad}$, $\psi \ll 1 \text{ rad}$ y las siguientes aproximaciones son válidas.

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

- Cuando $\phi = 0$, la bicicleta puede considerarse como un único cuerpo rígido. En esa posición angular de la dirección, se define J como el momento de inercia de este cuerpo con respecto al eje x , y $D = -J_{xy}$, como el producto de inercia con respecto a las abscisas xy .

Con el objetivo de describir la cinemática del sistema se definen los sistemas de referencia de la Fig. 1-2, [Limebeer and Sharp, 2006]. El referente inercial es $\langle x_g, y_g, z_g \rangle$, mientras que $\langle x, y, z \rangle$ es el referente del punto de contacto p_3 entre la rueda trasera y el suelo. ψ es el ángulo de rotación alrededor del eje y_g necesario para hacer coincidir el eje x_g con el eje x , θ es el ángulo de rotación alrededor del eje x_g necesario para hacer coincidir el eje y_g con el eje y .

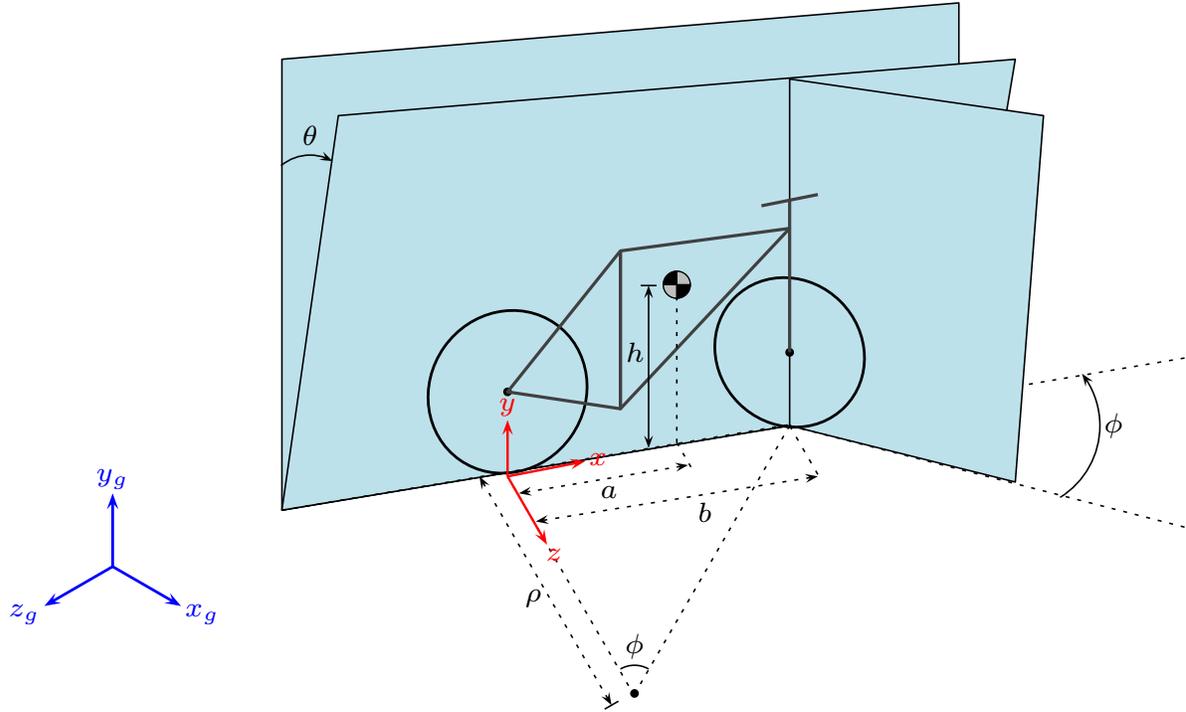
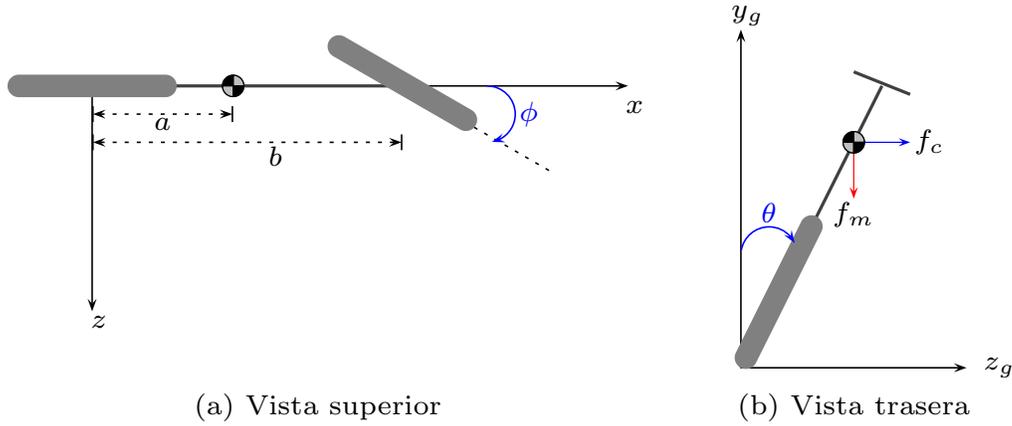


Figura 1-2: Sistemas de referencia.

A partir de la definición de los sistemas de referencia, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \psi \\ \dot{z} &= v \sin \psi \\ \dot{\psi} &= \frac{v}{\rho} = \frac{v \tan \phi}{b} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Donde $\rho = \frac{b}{\tan \phi}$ es el *radio de curvatura* de la trayectoria que sigue la bicicleta cuando el ángulo que forma la dirección con respecto al eje x es ϕ .



(a) Vista superior

(b) Vista trasera

Figura 1-3: Vista superior y trasera.

La aceleración gravitacional g genera una fuerza de magnitud $f_m = Mg$ sobre el CoM en dirección contraria al eje y_g del sistema coordenado $\langle x_g, y_g, z_g \rangle$, como se muestra en la Fig. **1-3**, esta fuerza a su vez propende un momento en sentido horario, dado por:

$$\begin{aligned}\tau_g &= h f_m \sin \theta \\ &= h M g \sin \theta\end{aligned}\tag{1.2}$$

Un observador fijo en el sistema de coordenadas $\langle x, y, z \rangle$ experimenta fuerzas debido a la aceleración del sistema de coordenadas relativo al sistema inercial $\langle x_g, y_g, z_g \rangle$, [Goldstein et al., 2013]. El par debido a las fuerzas inerciales es:

$$\begin{aligned}\tau_a &= -J_{xy} \ddot{\psi} \\ &= D \frac{d}{dt} \left(\frac{v \tan \phi}{b} \right) \\ &= \frac{D v}{b \cos^2 \phi} \frac{d\phi}{dt}\end{aligned}\tag{1.3}$$

La fuerza centrífuga de magnitud $f_c = M \frac{v^2}{\rho}$ genera un momento:

$$\begin{aligned}\tau_c &= h f_c \cos \theta \\ &= M h \frac{v^2}{b} \tan \theta \cos \theta \\ &= \frac{m h v^2}{b} \sin \theta\end{aligned}\tag{1.4}$$

La bicicleta robótica del *Arduino Kit Engineering* tiene un disco de inercia accionado por un motor de corriente continua, como se muestra en la Fig. **1-4**. El par del motor esta

dado por la expresión:

$$\tau_m = J_{disc} \ddot{\phi} \quad (1.5)$$

Siendo J_{disc} el momento de inercia del disco y $\ddot{\phi}$ la aceleración angular del disco. El par generado por el disco contrarresta los momentos restantes.

Aplicando la segunda ley de Newton rotacional, [Landau and Lifshitz, 1978] al sistema

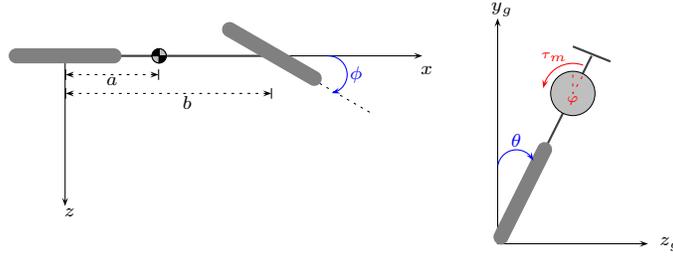


Figura 1-4: Dirección del par de accionamiento τ_m del disco de inercia.

de la Fig. 1-2 se tiene:

$$\begin{aligned} J \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \sum \tau \\ &= \tau_g + \tau_a + \tau_c + \tau_m \\ &= h M g \sin \theta + \frac{D v}{b \cos^2 \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{m h v^2}{b} + \tau_m \sin \theta \end{aligned} \quad (1.6)$$

La Ec. (1.6) es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal, para linealizarla se asume que los ángulos θ y ϕ son pequeños. Además los momentos de inercia se aproximan así: $J \approx M h^2$ y $D \approx M a h$, por lo tanto el modelo de segundo orden simplificado que representa la dinámica de la bicicleta, [Åström et al., 2005] se puede escribir.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{h} \theta = \frac{a v}{b h} \frac{d\phi}{dt} + \frac{v^2}{b h} \phi - \frac{1}{M h} \tau_m \quad (1.7)$$

La Ec. (1.7) que representa el modelo de la bicicleta es una ecuación diferencial de segundo orden lineal. Este modelo es llamado *modelo de péndulo invertido* debido a su similitud con la ecuación diferencial linealizada que representa la dinámica del péndulo invertido. El sistema tiene dos entradas: ϕ y τ_m y una salida θ , por lo tanto se aplica el principio de superposición y la transformada de Laplace, con condiciones iniciales iguales para calcular

la salida.

$$\Theta(s) = \frac{av}{bh} \frac{s + \frac{v}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}} \Phi(s) - \frac{1}{Mh} \frac{1}{s^2 - \frac{g}{h}} T_m(s) \quad (1.8)$$

La función de transferencia que relaciona la inclinación del centro de gravedad con el ángulo de la dirección:

$$\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} = \frac{av}{bh} \frac{s + \frac{v}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}} \quad (1.9)$$

La función de transferencia anterior tiene un cero en $z = -v/a$ y dos polos reales, $s_{1,2} = \pm\sqrt{g/h}$. Para relacionar la inclinación del centro de gravedad con el par del motor, la función de transferencia resultante es:

$$\frac{\Theta(s)}{T_m(s)} = -\frac{1}{Mh} \frac{1}{s^2 - \frac{g}{h}} \quad (1.10)$$

La Ec. (1.10) tiene un polo con parte real positiva, por lo tanto el sistema es inestable, indicando que para una entrada acotada del par $\tau_m(t)$, la salida resultante $\theta(t)$ diverge. Una forma de resolver el problema anterior es utilizando la técnica de control realimentado descrita en el capítulo 2.

1.1.1. Modelo CAD

Los parámetros del modelo dinámico de la sección 1.1 fueron derivados del modelo CAD de la bicicleta robótica. Las especificaciones del modelo CAD incluyen los momentos de inercia y el centro de masa de cada cuerpo. Sin embargo, estos no incluyen la masa de elementos como las tarjetas electrónicas, cableado y espacios huecos en las partes plásticas. El modelo obtenido no tiene en cuenta la consideración de fenómenos tales como la fricción en los engranajes, las no-linealidades en los motores eléctricos [Bravo and Rengifo, 2016]. Esto significa que la posición controlada en los motores en la simulación pueden tener un comportamiento diferente en el mundo real, aunque el controlador debe estar diseñado para compensar estas fuentes de error. La Tabla 1-1 muestra los parámetros dinámicos utilizados en esta sección.

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa	M	0.4764 kg
Centro de masa	(a, h)	$(0.11, 0.07)$ m
Base de la rueda	b	0.245 m
Momento de Inercia	J	0.0023 kg · m ²
Momento de Inercia	J_{xy}	0.0037 kg · m ²
Gravedad	g	9.81 m · s ⁻²

Tabla 1-1: Parámetros dinámicos de la bicicleta robótica

1.2. Modelo Dinámico a partir de la Ecuación de *Lagrange*

La ecuación de Lagrange permite obtener el modelo matemático de un sistema dinámico a partir de las expresiones que describen sus energías cinética y potencial, [Wells, 1967]:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial R(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = e(t) \quad (1.11)$$

El vector q contiene las coordenadas generalizadas del sistema. El vector \dot{q} representa la derivada con respecto al tiempo del vector q . La función $L(q, \dot{q})$, conocida como *Lagrangiano*, es la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema. La primera se denota como $T(q, \dot{q})$ y la segunda como $U(q, \dot{q})$. La función $R(q, \dot{q})$ contiene los términos de disipación de energía. e es el vector de esfuerzos generalizados aplicados al sistema. En el caso de sistemas mecánicos este término contiene las fuerzas y torques externos que actúan sobre el sistema.

Para modelar la bicicleta mediante la ecuación de *Lagrange* se siguieron las recomendaciones del algoritmo presentado en [Bravo and Rengifo, 2014]. Los sistemas de referencia de la Fig. 1-5 muestran los tres cuerpos que componen la bicicleta, estos son: la bicicleta sin tener en cuenta la rueda de inercia (giróscopo) y la dirección junto con la rueda delantera, giróscopo y volante.

La ubicación en el espacio de un sistema mecánico de n grados de libertad y compuesto de m cuerpos rígidos, exige utilizar $6 + n$ variables. Las seis primeras describen la posición y

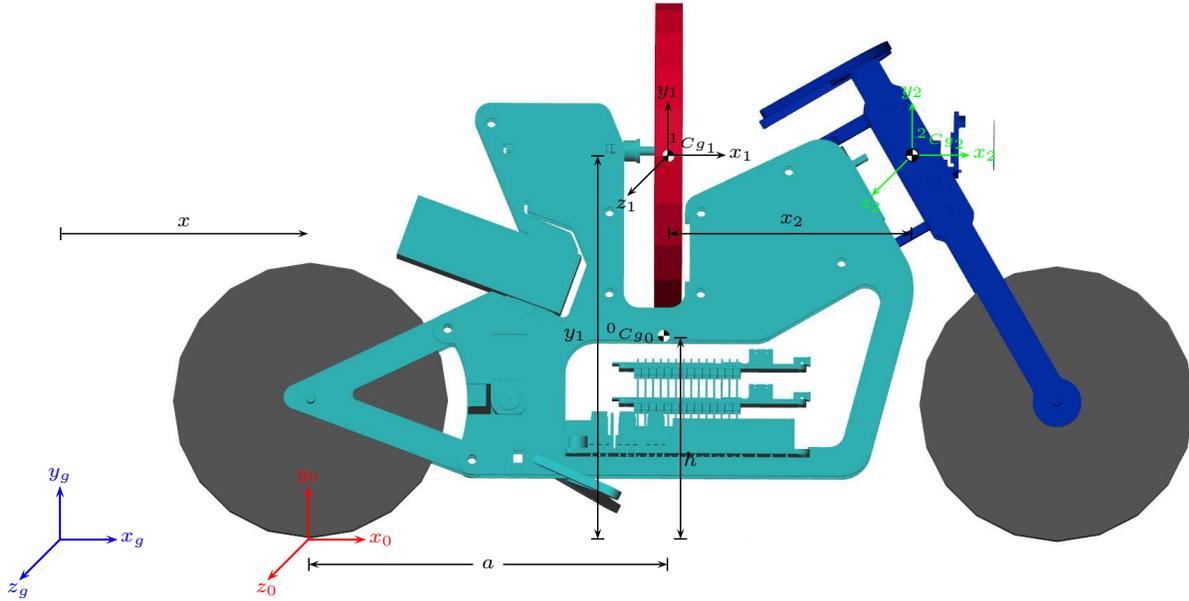


Figura 1-5: Sistemas de referencia de los cuerpos que componen la bicicleta.

la orientación del cuerpo de base de la cadena cinemática con respecto a un sistema de ejes coordenados llamado referente inercial. Los otras n variables describen la configuración de las articulaciones del sistema. Si el número de variables utilizadas en la descripción del sistema es mínimo, éstas son llamadas coordenadas generalizadas [Brian, 2009]. En el caso del presente trabajo el vector de coordenadas generalizadas está compuesto por tres tipos de variables: (i) el vector ${}^g p_0 \in \mathbb{R}^3$ que define la posición cartesiana del referente cero (torso) en el referente inercial $\langle x_g, y_g, z_g \rangle$ de la Figura, (ii) el conjunto $\sigma = \{\phi, \theta, \psi\}$ que contiene los ángulos de *Euler* que determinan la orientación de la bicicleta con respecto al referente inercial y (iii) el vector $q \in \mathbb{R}^3$ conformado por los ángulos de las variables motorizadas del robot.

$$q_p \triangleq \begin{bmatrix} {}^g p_0 \\ \sigma \\ q \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

El vector ${}^g p_0$ y el conjunto σ definen la matriz de transformación que permite expresar una coordenada Cartesiana dada en el referente 0 en el referente inercial

$${}^g \mathbf{T}_0(\sigma) = \begin{bmatrix} {}^g \mathbf{R}_0(\sigma) & {}^g p_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.1. Modelo considerando solo desplazamiento lineal

En este modelo se considerará que el ángulo de dirección ϕ de la bicicleta es constante e igual a cero. En consecuencia, el sistema solo podrá moverse a lo largo de una línea recta. En este caso se requieren solo tres coordenadas generalizadas para el modelo Lagrangiano que son el desplazamiento x , la inclinación lateral θ y el ángulo φ del estabilizador giroscópico. El referente 0 tiene una inclinación θ con respecto al referente inercial y está desplazado x unidades a lo largo del eje x , así la matriz de transformación que relaciona el referente 0 con el referente inercial es:

$${}^g\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la misma forma, para expresar las coordenadas cartesianas del referente 1 en el referente 0.

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & y_1 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calculan las posiciones de los centros de gravedad de cada uno de los cuerpos que componen la bicicleta en el referente local (referente 0 para la bicicleta, referente 1 para el giroscopio). La posición del centro de gravedad de la bicicleta en el referente 0 se denotará 0Cg_0 y la posición del centro de gravedad del giroscopio en el referente 1 se denotará 1Cg_1

$${}^0Cg_0 = \begin{bmatrix} a \\ h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1Cg_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Con base en las matrices de transformación ${}^g\mathbf{T}_0$ y ${}^0\mathbf{T}_1$, se expresan los centros de gravedad 0Cg_0 y 1Cg_1 en el referente inercial.

$${}^{\mathfrak{g}}Cg_0 = {}^{\mathfrak{g}}\mathbf{T}_0 \cdot \begin{bmatrix} {}^0Cg_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + x \\ h \cos(\theta) \\ h \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$${}^{\mathfrak{g}}Cg_1 = {}^{\mathfrak{g}}\mathbf{T}_0 \cdot {}^0\mathbf{T}_1 \cdot \begin{bmatrix} {}^1Cg_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x_1 \\ y_1 \cos(\theta) \\ y_1 \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Se derivan con respecto al tiempo ${}^{\mathfrak{g}}Cg_1$ y ${}^{\mathfrak{g}}Cg_0$ con el fin de obtener las velocidades lineales de los centros de gravedad con respecto al referente inercial.

$${}^{\mathfrak{g}}\dot{C}g_0 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -h \sin(\theta) \dot{\theta} \\ h \cos(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad {}^{\mathfrak{g}}\dot{C}g_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -y_1 \sin(\theta) \dot{\theta} \\ y_1 \cos(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Para calcular el Lagrangiano del sistema, primero se obtiene la energía cinética del sistema.

- *Cuerpo 0:* La energía cinética rotacional alrededor del eje z_0 es cero debido a que se supone que las dos ruedas motrices siempre están en contacto con el suelo. La energía cinética rotacional alrededor del eje y_0 es cero porque la bicicleta se desplaza sobre una línea recta y en consecuencia no se presentan rotaciones alrededor de este eje. La energía cinética rotacional total de este cuerpo existe alrededor del eje x_0 y depende de la derivada del ángulo de inclinación lateral de la bicicleta. Por lo tanto la energía cinética total (traslacional + rotacional) del cuerpo cero es:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \left| {}^{\mathfrak{g}}\dot{C}g_0 \right|^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

- *Cuerpo 1:* La energía cinética rotacional alrededor del eje z_1 es cero debido a que se supone que las dos ruedas motrices siempre están en contacto con el suelo. La energía cinética rotacional alrededor del eje y_1 es cero porque la bicicleta se desplaza sobre una línea recta y en consecuencia no se presentan rotaciones alrededor de este eje. La energía cinética rotacional total de este cuerpo existe alrededor del eje x_1 y depende de la suma de las derivada del ángulo de inclinación lateral de la bicicleta

y de la orientación de la rueda giroscópica. En consecuencia la energía cinética total (translacional + rotacional) del cuerpo uno es:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left| {}^g\dot{C}g_1 \right|^2 + \frac{1}{2} J_1 \left(\dot{\theta} + \dot{\varphi} \right)^2$$

La energía cinética total de la bicicleta es:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \left| {}^g\dot{C}g_0 \right|^2 + \frac{1}{2} m_1 \left| {}^g\dot{C}g_1 \right|^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\dot{\theta} + \dot{\varphi} \right)^2$$

La energía potencial del sistema es:

$$U = m_0 g \cdot {}^gCg_0(y) + m_1 g \cdot {}^gCg_1(y)$$

Siendo ${}^gCg_0(y)$ y ${}^gCg_1(y)$ los componentes en y de los vectores gCg_0 y gCg_1 . El Lagrangiano estado dado por la diferencia entre T y U

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m_0 \left| {}^g\dot{C}g_0 \right|^2 + \frac{1}{2} m_1 \left| {}^g\dot{C}g_1 \right|^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\dot{\theta} + \dot{\varphi} \right)^2 - m_0 g \cdot {}^gCg_0(y) - m_1 g \cdot {}^gCg_1(y)$$

A continuación se escriben las ecuaciones de *Lagrange*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} &= F \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \Gamma_1 \end{aligned}$$

Al reemplazar la expresión para L en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_0 + m_1) \dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + J_0 + J_1) \dot{\theta} + J_1 \dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= J_1 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\end{aligned}$$

Se derivan las expresiones anteriores con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] &= (m_0 + m_1) \ddot{x} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] &= (m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + J_0 + J_1) \ddot{\theta} + J_1 \ddot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right] &= J_1 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})\end{aligned}$$

Se deriva el Lagrangiano con respecto a las coordenadas generalizadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= g (h m_0 + y_1 m_1) \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento de la bicicleta pueden ser escritas de la forma:

$$\begin{bmatrix} m_0 + m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + J_0 + J_1 & J_1 \\ 0 & J_1 & J_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g (h m_0 + y_1 m_1) \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_m}{r} \\ 0 \\ \Gamma_g \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Γ_m es el torque de la rueda motora, r es el radio de dicha rueda y Γ_g es el torque aplicado a la rueda giroscópica.

1.3. Linealización del Modelo

La *linealización* de modelos no lineales juega un papel importante en el diseño de controladores. El principio de linealización de ecuaciones no lineales, se basa en la suposición de que las variables del proceso cambian muy poco y sus desviaciones a partir del estado estable (estado estacionario) son pequeñas. La aproximación lineal puede calcularse usando la expansión en series de Taylor y considerando únicamente los términos lineales.

Consideremos un sistema dinámico no lineal de orden n con r entradas y m salidas.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) && \text{Ecuación de estado} \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) && \text{Ecuación de salida} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Donde:

- $x(t) = [x_1, \dots, x_n]^T$ es el **vector de estados** del sistema. Las n componentes del vector de estado, se llaman *variables de estado*, $x(t)$ determina unívocamente el estado del sistema¹, especificada la entrada, para cualquier $t \geq t_0$.
- $u(t) = [u_1, \dots, u_r]^T$ es el **vector de entradas** del sistema.

Definiendo \bar{x} , \bar{u} tal que $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ (Valores de estado estable), el modelo linealizado en espacio de estados es de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= A \Delta x(t) + B \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C \Delta x(t) + D \Delta u(t) \end{aligned} \tag{1.15}$$

¹El estado de un sistema es un conjunto mínimo de variables, tal que la información de estas variables y de las funciones de entrada, junto con las ecuaciones que describen la dinámica, proporcionan la salida y el estado futuro del sistema.

Donde las *variables de desviación* son definidas como perturbaciones a partir de sus valores de estado estable (puntos de operación²).

$$\Delta x = x - \bar{x}$$

$$\Delta u = u - \bar{u}$$

$$\Delta y = y - \bar{y}$$

Los elementos de las matrices son definidos como:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & B_{ij} &= \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ C_{ij} &= \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & D_{ij} &= \left. \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Los subíndices ij se refieren a la i -ésima fila y j -ésima columna de la matriz correspondiente. Por ejemplo, el elemento B_{ij} relaciona el efecto de la j -ésima entrada sobre la i -ésima derivada del estado.

Nota: En los capítulos siguientes, el símbolo Δ se eliminará de la ecuación de estado y de salida y se asumirá que el modelo en espacio de estados esta siempre descrito en función de las variables de desviación.

El punto de equilibrio definido para realizar la linealización es:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{\theta} &= 0 \\ \bar{\varphi} &= 0 \\ \bar{\dot{x}} &= 0 \\ \bar{\dot{\theta}} &= 0 \\ \bar{\dot{\varphi}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Si el ángulo de inclinación θ es suficientemente pequeño, el modelo Lagrangiano (1.13) pasa a ser de dinámica lineal. En tal caso, la selección del vector de estados $\mathbf{x}(t) =$

²también llamados *puntos de equilibrio*.

$[x, \theta, \varphi, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}]^T$ conlleva al siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_a}{c_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_a}{c_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{m_0+m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_b} \\ 0 & \frac{c_b+J_1}{J_1 c_b} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Con las matrices A , B y C anteriores se obtiene una representación lineal en espacio de estados (Ec. (1.15)) de la bicicleta robótica alrededor del punto de equilibrio, Ec. (1.17). Siendo:

$$\begin{aligned}
 c_a &= g (h m_0 + y_1 m_1) \\
 c_b &= m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + J_0
 \end{aligned}$$

Los valores propios del modelo son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = +\sqrt{\frac{g c_a}{c_b}}$ y $\lambda_6 = -\sqrt{\frac{g c_a}{c_b}}$. Dado que c_a y c_b son ambos mayores que cero, el valor propio λ_5 se ubica en el semiplano derecho del Plano Complejo \mathcal{S} . En virtud de lo anterior el sistema descrito por la Ec. (1.15) es *inestable* en lazo abierto y se requiere de un algoritmo de control para la estabilización de la bicicleta.

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa de la Bicicleta	m_0	0.4 kg
Masa de la Rueda Inercia	m_1	0.0764 kg
Momento de Inercia	J_0	0.0023 kg · m ²
Momento de Inercia	J_1	0.0038 kg · m ²
Radio de la rueda	r	0.05 m
Distancia	y_1	0.13 m

Tabla 1-2: Parámetros Dinámicos del Modelo

1.4. Resumen

En este capítulo se presentó el modelo simplificado y lineal de la bicicleta, también se obtuvo el modelo dinámico no lineal de la bicicleta robótica mediante la ecuación de *Lagrange*, este modelo se linealizó alrededor de sus puntos de equilibrio para calcular el modelo en espacio de estado de la planta a controlar y que servirá de base para el control LQR. El modelo matemático del robot, permite sintonizar la ley de control para las estrategias de control lineal PID y LQR propuestas para el desarrollo de este trabajo. Estas temáticas se tratarán en los dos capítulos siguientes.

Capítulo 2

Control PID

En este capítulo se describirá el control PID implementado para mantener el ángulo de inclinación θ de la bicicleta robótica en $\theta_d = 0^\circ$. Primero se controlara la inclinación de la bicicleta en reposo, después se impondrá una velocidad constante de traslación, manteniendo el ángulo de giro ϕ en un valor constante. Se calcularán los índices de desempeño como son la desviación estándar del error y del esfuerzo de control para evaluar estadísticamente el controlador PID.

2.1. Controlador PID

La ley de control de un PID en su forma “académica”, [Åström and Hägglund, 2006] se escribe:

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + k_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.1)$$

Donde u es la señal de control, e es la señal de error, k_p es la ganancia proporcional, T_i es la constante de tiempo integral y T_d es la constante de tiempo derivativa. La señal de control es la suma de tres términos: la acción proporcional (**P**) que corresponde a un control proporcional, la acción integral (**I**) da una acción de control que es proporcional a la integral del error y la acción derivativa (**D**) es proporcional a la variación temporal de la señal de error.

Clasificación del Controlador PID

1. **PID estándar** (no interactivo): Esta representado por la Ec. (2.1), la función de transferencia del controlador PID estándar es:

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_p}{T_i s} + k_p T_d s = \frac{k_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s} \quad (2.2)$$

Las acciones proporcional, integral y derivativa no interactúan en el dominio del tiempo, el algoritmo permite el ajuste de ceros complejos y es muy útil para controlar sistemas dinámicos oscilatorios.

Los ceros de la función de transferencia de la Ec. (2.2) son:

$$z_{1,2} = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d} \quad (2.3)$$

2. **PID serie** (interactivo): Si $T_i \geq 4T_d$, los ceros de la Ec. (2.3) son reales y en tal caso el controlador PID se denomina *interactivo* o *serie*. La función de transferencia del PID interactivo es:

$$G_c(s) = k'_p \left(1 + \frac{1}{T'_i s}\right) (1 + T'_d s) \quad (2.4)$$

Con:

$$\begin{aligned} k'_p &= \frac{k_p}{2} \left(1 + \sqrt{T_i^2 - 4T_d/T_i}\right) \\ T'_i &= \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{T_i^2 - 4T_d/T_i}\right) \\ T'_d &= \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{T_i^2 - 4T_d/T_i}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

La función de transferencia Ec. (2.4) tiene dos ceros con valores reales, por lo tanto el controlador PID serie es una cascada del control PI y PD, como se muestra en la Fig. 2-1.

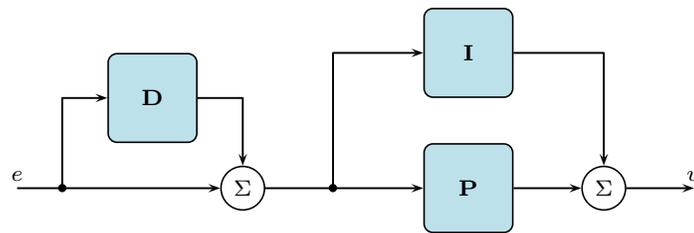


Figura 2-1: Controlador PID *serie* o *interactivo*

3. **PID paralelo:** La representación del controlador PID *paralelo* esta dada por la función:

$$G_c(s) = k + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (2.6)$$

Los parámetros de la Ec. (2.6) se relacionan con la forma estándar Eq. (2.2), así:

$$k = k_p \qquad k_i = \frac{k_p}{T_i} \qquad k_d = k_p T_d$$

Esta representación permite también el ajuste de ceros complejos y es la más flexible de todas, ver Fig. 2-2.

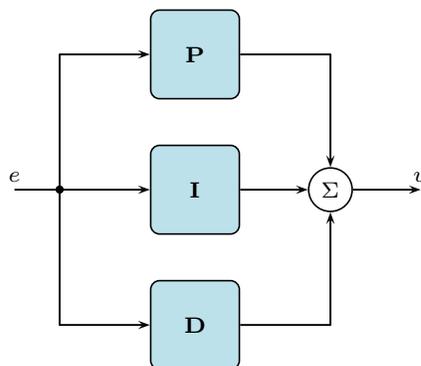


Figura 2-2: Controlador PID *paralelo*

2.1.1. Acción Proporcional

La ley de control de la Ec. (2.1) se reduce a:

$$u(t) = k_p (r(t) - y(t)) + u_0 \quad (2.7)$$

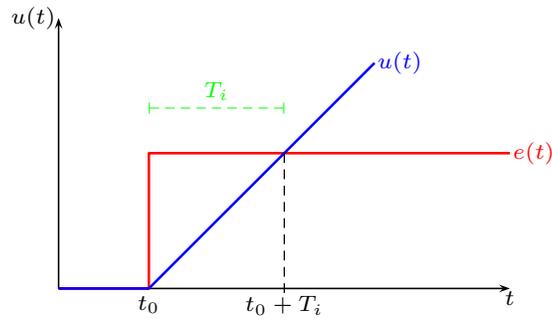


Figura 2-4: Control Proporcional Integral.

2.1.3. Acción Proporcional Derivativa

El propósito de la acción derivativa es de mejorar la estabilidad en lazo cerrado del sistema dinámico a controlar, la ley de control está dada por:

$$u = u_0 + k_p \left(e + T_d \frac{de}{dt} \right) \quad (2.9)$$

La Ec. (2.9) contiene un derivador ideal, la respuesta a altas frecuencias (ver Fig. **2-5**) de esta acción derivativa pura es la amplificación del ruido de la señal de error $e = r - y$.

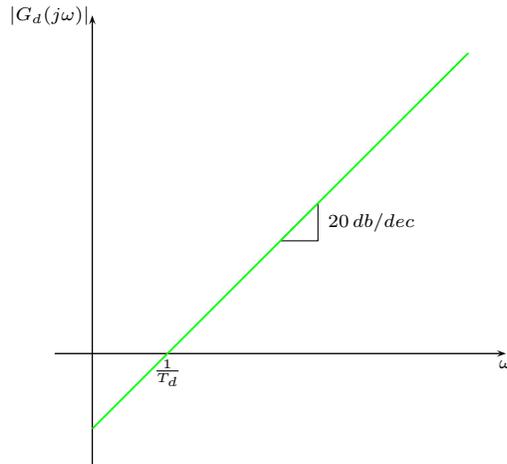


Figura 2-5: Respuesta en frecuencia del derivador ideal $G_d(s) = T_d s$.

Para limitar la amplificación de ganancia a altas frecuencias, se implementa en la acción derivativa un filtro pasa-bajas, así la función de transferencia para una acción de control proporcional derivativa se convierte en:

$$G_c(s) = \frac{k_p (1 + T_d s)}{\frac{T_d}{N} s + 1} \quad (2.10)$$

El polo en $s = -N/T_d$ limita la ganancia a altas frecuencias como se observa en la Fig. 2-6. Los valores típicos de N varían desde 2 hasta 20.

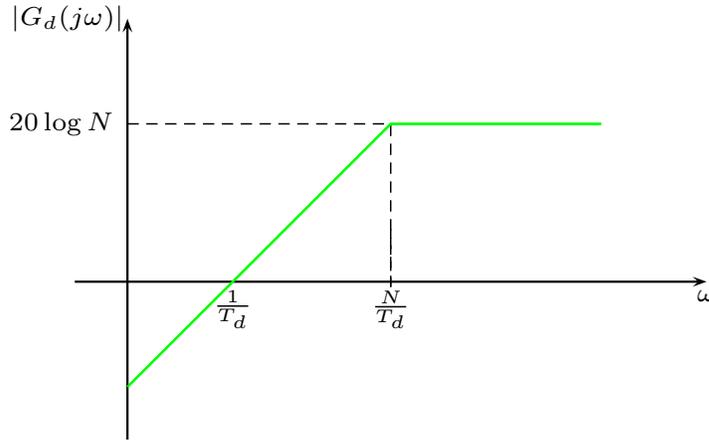


Figura 2-6: Respuesta en frecuencia de la acción derivativa con filtro $G_d(s) = \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}$.

2.2. Implementación del controlador PID para el balance la bicicleta robótica

En el capítulo 1, se obtuvo el modelo matemático de la bicicleta en reposo para controlar el ángulo de inclinación $\theta_d = 0^\circ$, Ec. (1.10) que representa la dinámica de la bicicleta robótica en reposo. La bicicleta puede estabilizarse con un controlador PID mediante la ley de control:

$$T_m(s) = -k_p \Theta(s) + \frac{k_p}{T_i} s (\Theta_d(s) - \Theta(s)) - \frac{k_p T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \Theta(s) \quad (2.11)$$

El algoritmo descrito por la Ec. (2.11) se llama *controlador PID en forma de velocidad*, [Åström and Häggglund, 2006]. Esta configuración es usada para evitar cambios muy fuertes a la salida del controlador ante cambios súbitos de la referencia, simplificar los cambios manual-automático y disminuir la posibilidad de saturar el actuador.

La ley de control Ec. (2.11) especifica que la aceleración angular $\ddot{\varphi}$ de la rueda de inercia de la bicicleta se mueve en dirección opuesta al ángulo de inclinación θ . Es decir, cuando la bicicleta se inclina hacia un lado, la rueda de inercia se acelerará en la dirección opuesta (ver, Fig. 1-4) para mover la bicicleta nuevamente hacia el equilibrio deseado $\theta_d = 0^\circ$. Este es un equilibrio estable, lo que significa que cuando el sistema se perturba desde la posición de equilibrio, retornará de nuevo al hacia el equilibrio. La Fig. 2-7 muestra el sistema de control implementado.

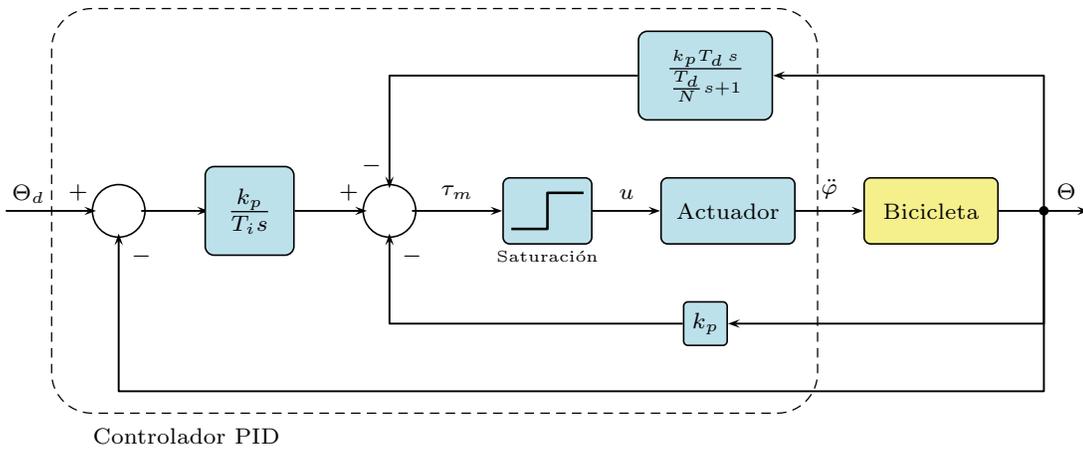


Figura 2-7: Diagrama de bloques del control PID.

La señal que se envía al motor de corriente continua debe ser normalizada entre -1 y 1, para hacer esto se divide la salida de la señal de control entre el valor del par motor, especificado en el apéndice A.

La función *saturación* es definida, [Åström and Wittenmark, 2011]:

$$\text{sat } u = \begin{cases} u_{low} & \text{si } u \leq u_{low} \\ u & \text{si } u_{low} < u < u_{high} \\ u_{high} & \text{si } u \geq u_{high} \end{cases} \quad (2.12)$$

Por lo tanto los valores de u_{low} y u_{high} son -1 y 1 , respectivamente. El esquema anti-windup para evitar la saturación del actuador (motor c.c) puede implementarse mediante la función de saturación, Ec. (2.12) como se ilustra en la Fig. 2-7.

2.2.1. Resultados

El *ángulo crítico de control* θ_c es el valor máximo de la posición angular de la bicicleta para la cual el controlador es capaz de alcanzar la convergencia para una señal de referencia. Para determinar este valor se llevó a cabo un experimento, el cual consistió en poner en funcionamiento el robot con una inclinación inicial entre $[-1^\circ, 1^\circ]$, la cual fue incrementada de manera gradual hasta que la bicicleta perdió el equilibrio. el *ángulo crítico de control* θ_c e $\pm 4^\circ$. Los siguientes *índices de desempeño* [Chate García et al., 2017], se usaron para validar estadísticamente el controlador propuesto en la sección 2.2.

Desviación estándar del error

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\theta_d(k) - \theta(k)]^2} \quad (2.13)$$

ϵ_e es la desviación estándar de la señal de error, N el numero de muestras, $\theta_d(k) \triangleq 0^\circ$ el ángulo de inclinación deseado y $\theta(k)$ el ángulo de inclinación medido.

Desviación estándar del esfuerzo de control

$$\epsilon_u = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k)} \quad (2.14)$$

ϵ_u es la desviación estándar del esfuerzo de control $u(k)$.

La Tabla **2-1** muestra el valor promedio de los índices de desempeño para 10 experimentos, el número de datos total para cada uno de los experimentos es de $N = 1000$ para una referencia de $\theta_d = 0^\circ$ Los resultados obtenidos de la implementación del controlador son ilustrados en la Fig. **2-8**, se muestra el angulo de inclinación de la bicicleta con respecto al tiempo, como también el comportamiento de la señal de control.

La Fig. **2-9** muestra los valores de cada uno de los terminos del controlador PID, se puede observar que el termino derivativo (**D**) es el más predominante debido a la naturaleza oscilatoria de la bicicleta. El controlador PID se sintonizo primero mediante la simulación

Experimento	ϵ_e	ϵ_u
1	0.0777	0.4796
2	0.0615	0.2253
3	0.5718	0.7214
4	0.2811	0.3611
5	0.2668	0.5049
6	0.0424	0.2470
7	0.0801	0.6468
8	0.0674	0.5571
9	0.1827	0.4361
10	0.0870	0.2175
Promedio	0.1719	0.4397

Tabla 2-1: Valor promedio de las desviaciones estándar de los índices de desempeño para el controlador PID.

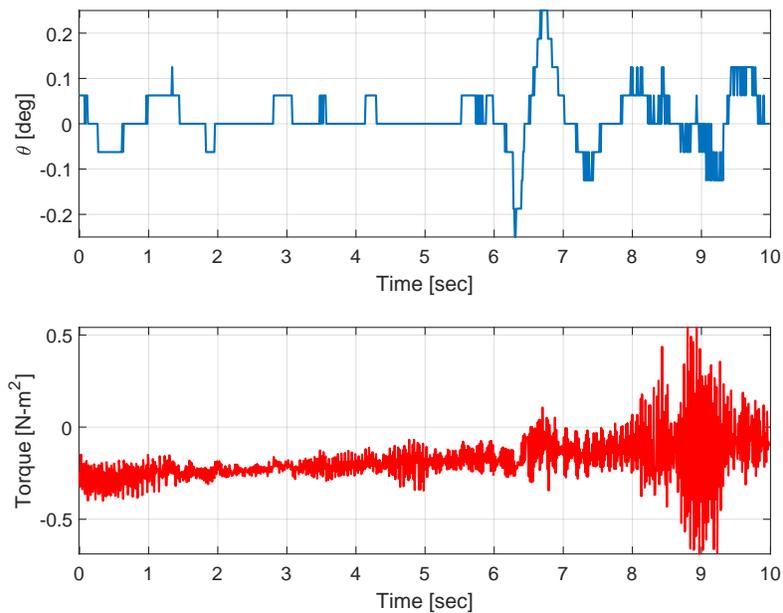


Figura 2-8: Respuesta temporal del controlador y el esfuerzo de control.

del modelo del sistema dinámico, Ec. (1.10) y después se ajustaron en la bicicleta robótica, sus valores fueron: $k_p = 100$, $T_i = 5$ y $T_d = 15$ para un periodo de muestreo $h = 0.01$ s.

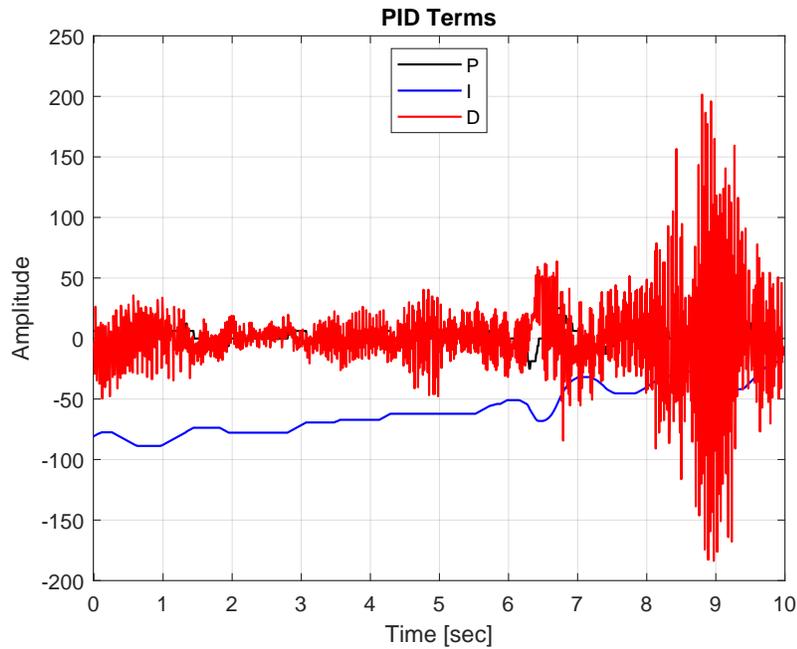


Figura 2-9: Respuesta temporal de los términos del controlador PID.

El plano de fase, Fig. 2-10 muestra la región de convergencia de la bicicleta hacia el valor deseado $\theta_d = 0^\circ$.

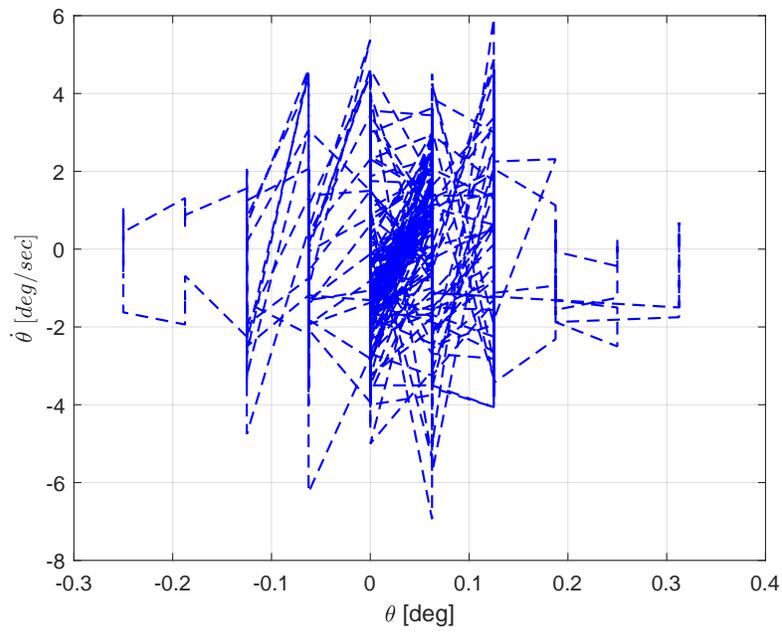


Figura 2-10: Convergencia hacia el equilibrio ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$) del controlador PID.

Capítulo 3

Control LQR

En este capítulo se muestra la implementación del controlador *Linear Quadratic Regulator* (**LQR**) usado para mantener el equilibrio de la bicicleta. En esta estrategia de control el proceso es lineal aunque puede ser variante en el tiempo, las medidas del ruido del proceso y de la realimentación (sensores) son introducidas en el modelo dinámico. El problema a resolver es la minimización de un criterio, que es una función cuadrática de los estados y las señales de control. La solución es una ley de control óptima y lineal. Si todos los estados no están disponibles para su medición, estos pueden ser estimados a partir de un observador óptimo (*filtro de Kalman*), que minimiza la varianza de la estimación de error.

3.1. Controlador LQR

Se busca encontrar la ley de control $u(t) = -Lx(t)$ que minimice el funcional (función que depende de otra función):

$$J(u) = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u dt$$

Sujeto a la restricción:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

En general se trabaja con $N = 0$:

$$J(u) = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u dt$$

¿ Que significan Q y R ?

Si $Q = I$ y $R = I$ son matrices identidad, el funcional se convierte en:

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^\infty x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + u_1^2 + \cdots + u_m^2 dt \\ &= \int_0^\infty x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 dt + \int_0^\infty u^2 dt \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_0^\infty x_i^2 dt}_{\text{energía } x_i} + \sum_{i=1}^m \underbrace{\int_0^\infty u_i^2 dt}_{\text{energía } u_i} \end{aligned}$$

Lo anterior significa que se busca encontrar una ley de control $u = -Lx$ que minimice la energía asociada a cada estado y a cada componente de la ley de control.

Selección de Q y R

Si Q y R son matrices diagonales: $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ y $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m)$, entonces $J(u)$ es una suma ponderada de energías:

$$J(u) = \sum_{i=1}^n q_i \underbrace{\int_0^\infty x_i^2 dt}_{\text{energía } x_i} + \sum_{i=1}^m r_i \underbrace{\int_0^\infty u_i^2 dt}_{\text{energía } u_i}$$

Si por ejemplo, $q_1 = 10q_2$, la minimización de $J(u)$ conducirá a que la trayectoria de x_1 sea mucho más cercana a cero que la de x_2 (las desviaciones de x_1 con respecto a cero son más costosas que las de x_2).

Ecuación algebraica de *Jacopo Francesco Riccati*

Como se minimiza $J(u)$:

$$J(u) = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt \quad (3.1)$$

Para minimizar $J(u)$ se encuentra la solución S de la ecuación algebraica de *Riccati*:

$$A^T S + S A - S B R^{-1} B^T S + Q = 0$$

Con S se encuentra la ganancia L :

$$L = R^{-1} B^T S$$

Para la solución de la ecuación algebraica de *Riccati* se deben tener en cuenta las siguientes condiciones:

- El par (A, B) debe ser estabilizable.
- $R > 0$ y $Q \geq 0$.
- El espacio observable del par (Q, A) debe incluir al eje imaginario.

3.1.1. Controlabilidad

Un sistema dinámico es controlable si para cualquier estado inicial $x(0) = x_0$ existe una señal de control $u(t)$ (continua a tramos) que lleve el sistema a un estado deseado x_d , en un intervalo de tiempo finito. La controlabilidad del sistema puede determinarse a través de la matriz:

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Si la matriz W_c es de rango completo, entonces el sistema será controlable.

Los valores propios de $A - LB$ pueden imponerse a partir de una adecuada selección de L siempre y cuando la matriz de controlabilidad W_c sea de rango completo. Para el modelo lineal de sexto orden calculado en la sección 1.3, dicha matriz corresponde a:

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{r}{m_0+m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_b} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_a}{c_b^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_a^2}{c_b^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_b+J_1}{J_1 c_b} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_a}{c_b^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_a^2}{c_b^3} \\ -\frac{r}{m_0+m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_b} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_a}{c_b^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_a^2}{c_b^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_b+J_1}{J_1 c_b} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_a}{c_b^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_a^2}{c_b^3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}c_a &= g (h m_0 + y_1 m_1) \\c_b &= m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + J_0\end{aligned}$$

Una inspección detallada de la matriz W_c , Ec. (3.3) muestra que sus doce columnas son linealmente independientes. Por lo tanto la bicicleta robótica es completamente controlable alrededor del punto de equilibrio, Ec. (1.17).

3.1.2. Observabilidad

Otro concepto de vital importancia en diseño de sistemas de control es el de observabilidad. Un sistema dinámico de orden n con r entradas y m salidas es observable si, para un t_1 arbitrario (con $t_1 > 0$), el estado inicial $x(0) = x_0$ puede ser determinado a partir de valores de $u(t)$ y $y(t)$ en el intervalo de tiempo $[0, t_1]$. La observabilidad del sistema puede determinarse por medio de la matriz Ec. (3.4).

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Si la matriz W_o es de rango completo, entonces el sistema será observable desde la k -ésima salida. Para el modelo lineal de sexto orden calculado en la sección 1.3, dicha matriz

3.2. CÁLCULO DE LA GANANCIA DE REALIMENTACIÓN DEL VECTOR DE ESTADOS 39

corresponde a:

$$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_a}{c_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_a}{c_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_a^2}{c_b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_a^2}{c_b^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} c_a &= g (h m_0 + y_1 m_1) \\ c_b &= m_0 h^2 + m_1 y_1^2 + J_0 \end{aligned}$$

Una inspección detallada de la matriz W_o , Ec. (3.5) muestra que no es de rango completo y hay dos estados no observables, a partir de las medidas de x y θ . Los estado no-observables son φ y $\dot{\varphi}$.

3.2. Cálculo de la ganancia de realimentación del vector de estados

Para el cálculo de la ganancia de realimentación L se parte del modelo en espacio de estados definido por la Ec. (1.18) y los valores de las constantes del modelo descritas en la tabla **1-2**. La función de costo (Ec. (3.1)) penaliza los estados y el esfuerzo de control, se procedió a establecer una penalización mayor para el estado relacionado con la posición angular debido a que es el estado de mayor interés para la estabilización de la bicicleta. De igual forma se penalizó el esfuerzo de control definiendo un valor pequeño para R . Para el control LQR de la bicicleta robótica se definieron los siguientes valores para $W \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ y

$R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Mediante la utilización de la función `lqr` de Matlab se procedió a calcular la ganancia L de realimentación:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 116.9223 & 3.1623 & 0 & 18.7315 & 4.1913 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Con este valor de ganancia los autovalores del sistema en lazo cerrado $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$ se ubican en:

$$10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -0.0004 + 0.0004i \\ -0.0004 - 0.0004i \\ -1.5091 + 0.0000i \\ -0.0060 + 0.0010i \\ -0.0060 - 0.0010i \\ -0.0010 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

Se comprueba que la parte real de todos los autovalores de la matriz que describe la dinámica de la planta se ubican en el semiplano izquierdo del plano \mathcal{S} , por lo tanto el sistema es estable en lazo cerrado.

3.3. Implementación del Controlador LQR para el balance de la bicicleta

Para implementar la ley de control por realimentación del vector de estados solo se tuvo en cuenta el balance de la bicicleta. Entonces, la ley de control correspondiente al controlador

3.3. IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR LQR PARA EL BALANCE DE LA BICICLETA41

LQR se escribe:

$$u_{LQR} = l_2 x_2 + l_4 x_4 \quad (3.8)$$

Siendo l_2 y l_4 las posiciones 2 y 4 del vector L calculado anteriormente. Es importante tener presente que la ley de control (Ec. (3.8)) es válida solo si la bicicleta se inicia con velocidad lineal igual a cero ($\dot{x} = 0$). Así, el sistema descrito anteriormente solo controla la orientación de la bicicleta pero no su posición lineal.

La Fig. **3-1** muestra el sistema de control implementado.

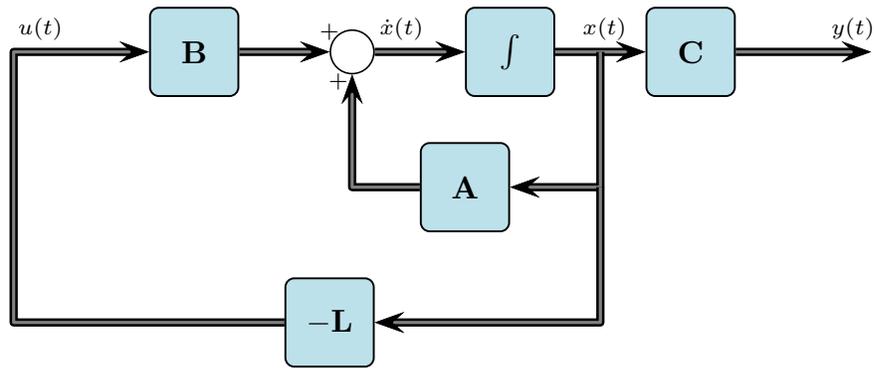


Figura 3-1: Diagrama de bloques del controlador LQR.

3.3.1. Resultados

La Tabla **3-1** muestra el valor promedio de los índices de desempeño para 10 experimentos, el número de datos total para cada uno de los experimentos es de $N = 500$ para una referencia de $\theta_d = 0^\circ$.

Los resultados obtenidos de la implementación del controlador son ilustrados en la Fig. **3-2**, se muestra el ángulo de inclinación de la bicicleta con respecto al tiempo, como también el comportamiento de la señal de control.

Experimento	ϵ_e	ϵ_u
1	0.1896	0.1117
2	0.1262	0.2215
3	0.0493	0.0867
4	0.0372	0.1570
5	0.4083	0.1698
6	0.1348	0.0778
7	0.1211	0.0853
8	0.1637	0.1253
9	0.0879	0.0967
10	0.1310	0.1740
Promedio	0.1449	0.1306

Tabla 3-1: Valor promedio de las desviaciones estándar de los índices de desempeño para el controlador LQR.

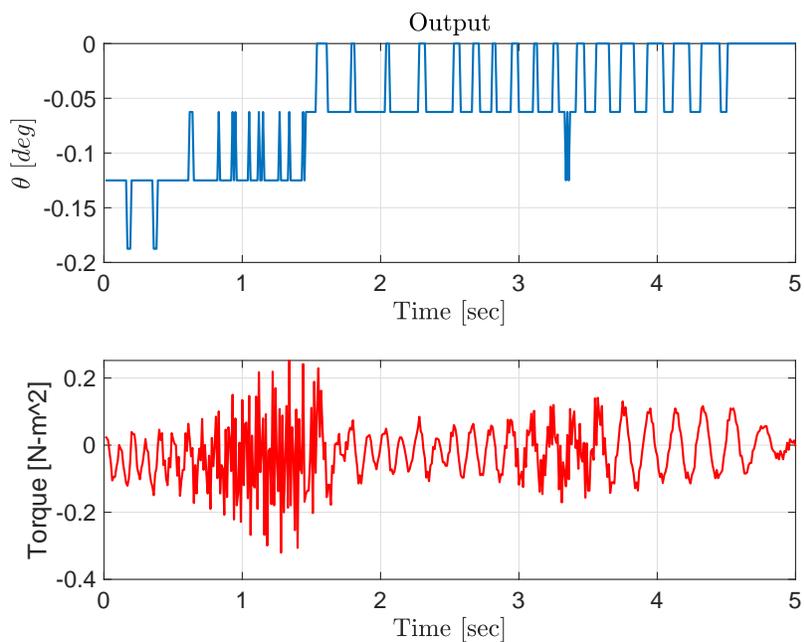


Figura 3-2: Respuesta temporal del controlador y el esfuerzo de control.

Capítulo 4

Control No-Lineal

En este capítulo se muestra la implementación del controlador *Computed Torque Control* (CTC) implementado para mantener el equilibrio de la bicicleta. En esta estrategia de control tiene en cuenta el modelo no-lineal de la bicicleta, Ec. (1.13), del capítulo 2. La técnica consiste en cancelar las no-linealidades del modelo con la ley de control y el modelo estimado de la bicicleta, de esta forma el controlador a implementar se reduce a un control lineal de un doble integrador, [Khalil and Dombre, 2002].

4.1. Controlador CTC

Linealización y control por desacoplamiento esta basado en cancelar las no-linealidades de la dinámica del robot, tal control es conocido como *computed torque control* (CTC) o *control dinámico inverso*, [Khalil and Dombre, 2002].

La idea básica de la linealización por realimentación es construir una transformación que linealice el sistema no lineal después de un determinado cambio de coordenadas en el espacio de estados. Esto se realiza en un primer lazo interno del controlador. Un segundo lazo (externo) contendrá un controlador lineal el cual se diseña con la nueva transformación.

Con los parámetros estimados del modelo, Ec. (1.13), se define la ley de control:

$$\tau_m(t) = -\hat{C}_b \omega(t) + \hat{C}_a \sin \theta(t) \quad (4.1)$$

Sustituyendo la Ec. (4.1) en Ec. (1.13) el problema de control es reducido a un control lineal del doble integrador para el control de balance de la bicicleta robótica:

$$\ddot{\theta} = \omega(t) \quad (4.2)$$

En este caso el objetivo es solamente alcanzar la posición deseada θ_d , una posible ley de control para $\omega(t)$ para obtener el balance de la bicicleta, es:

$$\omega(t) = k_p (\theta_d - \theta) + k_d \dot{\theta} \quad (4.3)$$

Si el modelo estimado es muy cercano al real, sustituyendo $\omega(t)$ por θ se obtiene la ecuación característica del sistema en lazo cerrado:

$$\ddot{\theta}(t) + k_d \dot{\theta}(t) + k_p \theta = k_p \theta_d \quad (4.4)$$

La Ec. (4.4) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden que representa un sistema lineal desacoplado. La solución de $\theta(t)$ es asintóticamente estable para algunos valores adecuados de las constantes del controlador dinámico k_p y k_d .

4.2. Implementación del Controlador CTC para el balance de la bicicleta

La Fig. 4-1 representa el sistema de control no-lineal implementado.

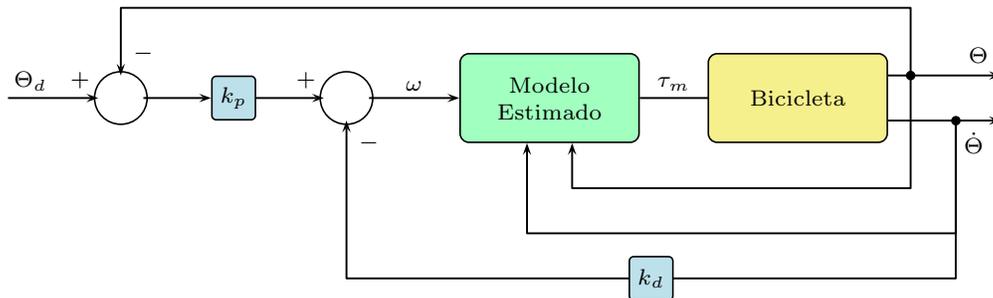


Figura 4-1: Diagrama en bloques del controlador dinámico.

4.2. IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR CTC PARA EL BALANCE DE LA BICICLETA45

Las constantes del controlador dinámico k_p y k_d se ajustan para una dinámica desada con un coeficiente de amortiguamiento ξ y un ancho de banda ajustado a una frecuencia ω_0 .

$$k_p = \omega_0^2$$
$$k_d = 2\xi\omega_0^2$$

En la implementación, escogimos $\xi = 1$ para obtener una respuesta rápida y son sobrepaso, con $k_p = 20$ y $k_d = 8.94$.

4.2.1. Resultados

La Tabla 4-1 muestra el valor promedio de los índices de desempeño para 10 experimentos, el número de datos total para cada uno de los experimentos es de $N = 500$ para una referencia de $\theta_d = 0^\circ$.

Experimento	ϵ_e	ϵ_u
1	0.0366	0.1623
2	0.0701	0.4260
3	0.0748	0.4161
4	0.1158	0.4830
5	0.0436	0.3569
6	0.0537	0.3865
7	0.0465	0.3192
8	0.0231	0.2097
9	0.0258	0.0750
10	0.0218	0.0718
Promedio	0.0512	0.2906

Tabla 4-1: Valor promedio de las desviaciones estándar de los índices de desempeño para el controlador CTC.

Los resultados obtenidos de la implementación del controlador son ilustrados en la Fig. 4-2, se muestra el ángulo de inclinación de la bicicleta con respecto al tiempo, como también el comportamiento de la señal de control.

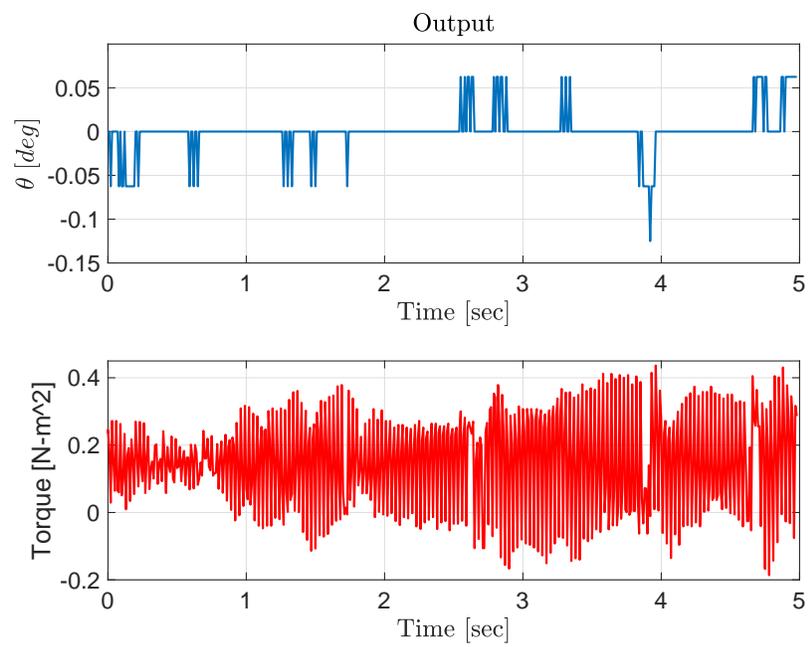


Figura 4-2: Respuesta temporal del controlador y el esfuerzo de control.

Capítulo 5

Comparación de desempeño de los controladores implementados

En este capítulo se realiza la comparación de los resultados obtenidos con la implementación de los controladores presentados en los capítulos 2,3 y 4. La comparación de los mismos se realizó teniendo en cuenta los índices de desempeño presentados en el capítulo 2.

5.1. Comparación mediante los índices de desempeño

Los resultados obtenidos de la implementación de cada uno de las estrategias de control implementadas se ilustran en figuras **5-1** y **5-2**.

Fig. **5-1** muestra el ángulo de inclinación θ y Fig. **5-2** el comportamiento temporal de la ley de control.

La tabla **5-1** presenta el valor promedio de los índices de desempeño 2.2.1 (ϵ_e and ϵ_u) obtenidos a partir de diez experimentos calculados para cada uno de los controladores.

La tabla **5-2** muestra los radios de los índices de desempeño de los controladores lineales y el control no-lineal para los índices de desempeño propuestos.

A partir de los resultados de la tabla **5-2**, el coeficiente entre la desviación estándar promedio del error para el control PID y CTC es 3.3574 y para el control LQR y CTC

Controlador	ϵ_e	ϵ_u
PID	0.1719	0.4397
LQR	0.1449	0.1306
CTC	0.0512	0.2906

Tabla 5-1: Comparación del promedio de las desviaciones estándar obtenidas a partir de los experimentos con cada controlador.

$\frac{\epsilon_e PID}{\epsilon_e CTC}$	$\frac{\epsilon_e LQR}{\epsilon_e CTC}$	Menor Error
3.3574	2.8301	CTC
$\frac{\epsilon_u PID}{\epsilon_u CTC}$	$\frac{\epsilon_u LQR}{\epsilon_u CTC}$	Menor Esfuerzo de Control
1.5131	0.4494	LQR

Tabla 5-2: Comparación de los radios de las desviación estándar del esfuerzo de control para cada controlador.

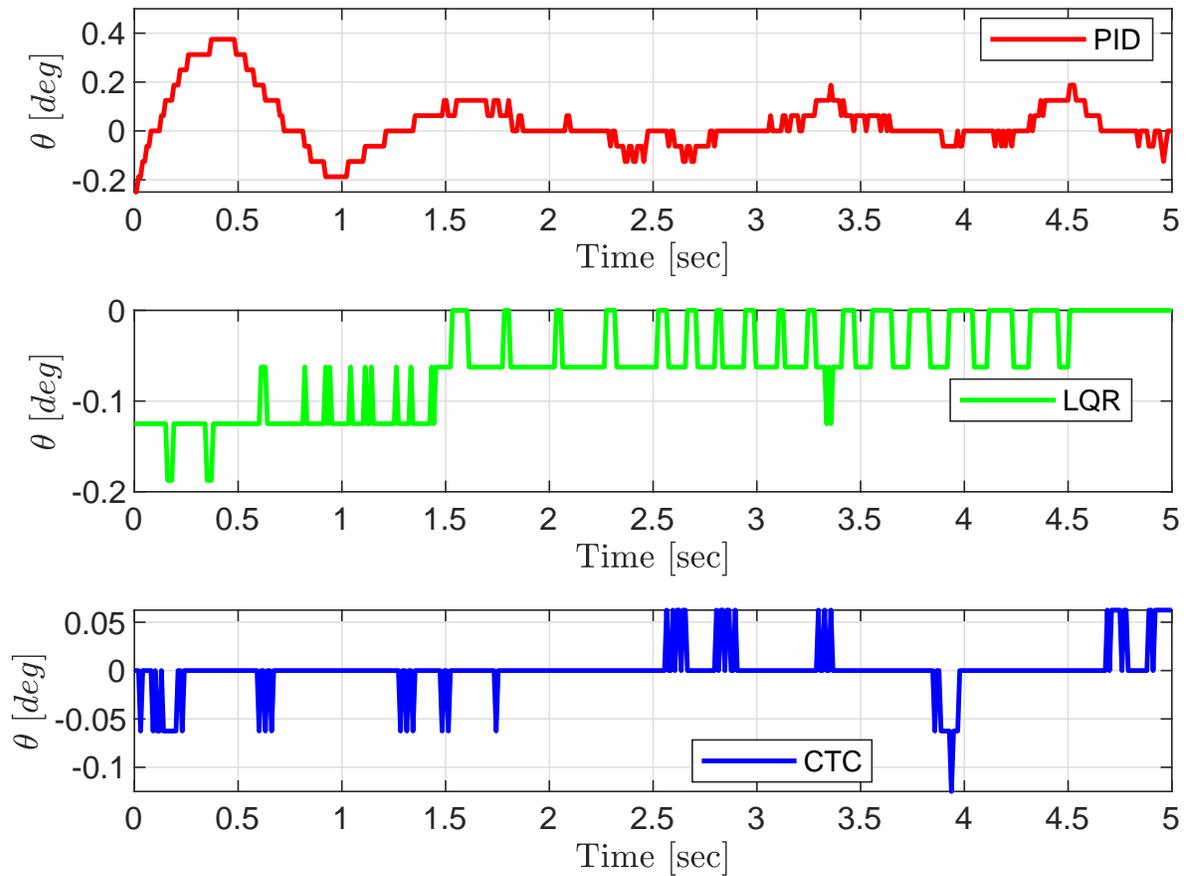


Figura 5-1: Respuesta temporal de los controladores. (i) PID, (ii) LQR, (iii) CTC.

es 2.8301, esto significa que el controlador LQR muestra un mejor comportamiento en la respuesta temporal para el error, frente al otro control lineal PID. Sin embargo el control no-lineal (CTC) es el de menor desviación estándar para la señal de error $e = \theta_d - \theta$.

También, con los resultados de la tabla 5-2, el coeficiente entre el la desviación estándar promedio del esfuerzo de control para el control PID y CTC es 1.5131 mientras que para el controlador LQR y CTC es is 0.4494, estos resultados demuestran que el controlador LQR muestra el menor esfuerzo de control en comparación con los otros controladores para mantener el equilibrio de la bicicleta robótica.

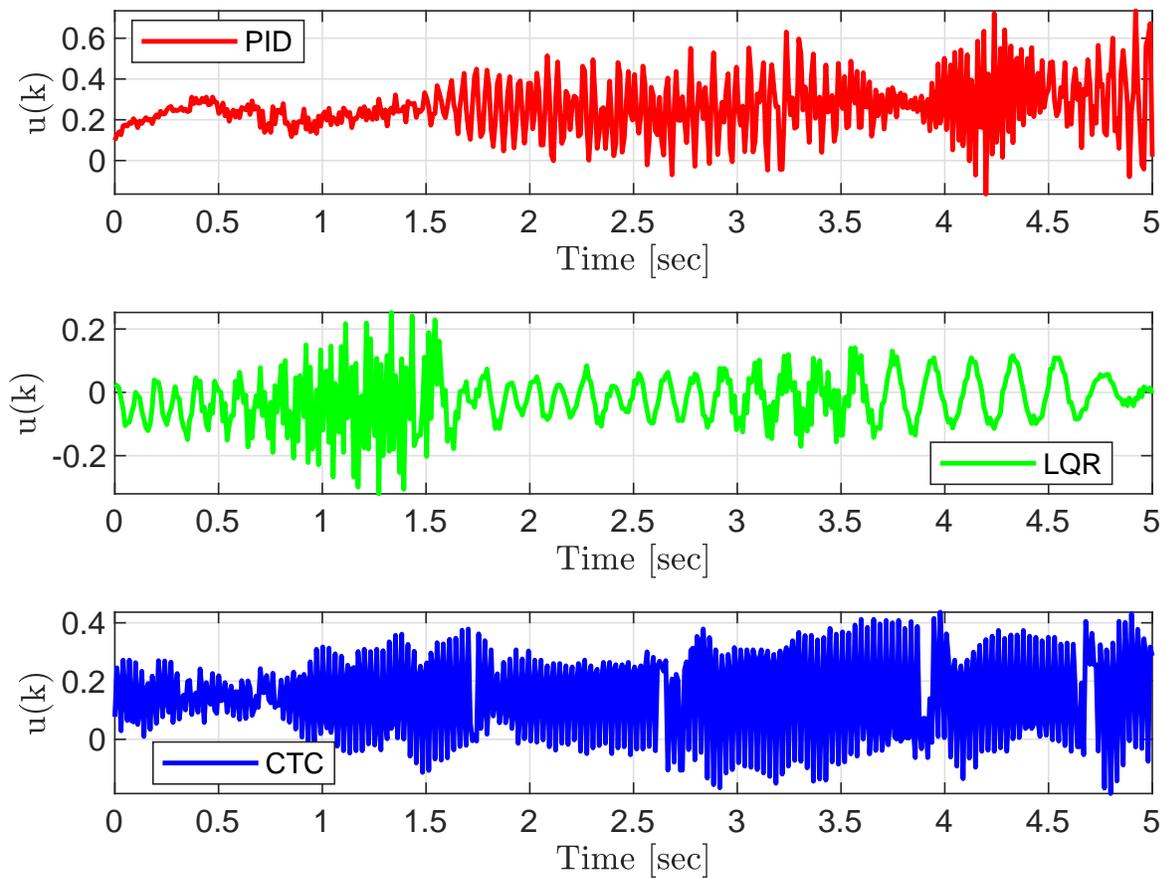


Figura 5-2: Esfuerzo de control para los controladores implementados. (i) PID, (ii) LQR, (iii) CTC.

Conclusiones y Perspectivas

Este trabajo presenta los resultados de investigación sobre la dinámica y control de la bicicleta robótica del *Arduino Kit Engineering*. Para cumplir con los objetivos propuestos primero se obtuvo el modelo matemático del robot mediante dos enfoques: el primero de ellos consiste en obtener un modelo simplificado de la bicicleta a partir de la segunda ley de Newton rotacional y aproximaciones de ángulos pequeños que permiten obtener ecuaciones diferenciales lineales, el modelo describe la dinámica de la bicicleta en reposo y trasladándose a velocidad constante sobre una superficie plana. El segundo enfoque utiliza el formalismo de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento de la bicicleta, estas se caracterizan por ser ecuaciones diferenciales no-lineales.

Una vez obtenido el modelo que representa la dinámica simplificada de la bicicleta se diseñó e implementó un control PID para la estabilización de la bicicleta en reposo y en movimiento. Para el modelo dinámico no-lineal obtenido mediante la ecuación de *Euler-Lagrange*, este se linealiza el modelo alrededor del punto de operación con el propósito de calcular un modelo de espacio de estados lineal para diseñar e implementar un control LQR para estabilizar la bicicleta en reposo y en movimiento. Con la dinámica no-lineal se diseñó e implementó un control dinámico (CTC) con el objetivo de comparar esta estrategia de control con el control lineal PID y LQR.

Todas las anteriores estrategias de control fueron validadas inicialmente mediante simulación. El modelo CAD de la bicicleta fue ensamblado en Simscape MultibodyTM de Matlab, este contiene todas las propiedades físicas de cada una de las piezas constitutivas de la bicicleta robótica. Sin embargo, incluso con un modelo perfecto, hay fenómenos del mundo real que nuestro modelo no tiene en cuenta o no se pueden identificar. Estos incluyen la fricción de los engranajes en los servomotores e incertidumbres paramétricas.

Estas fuentes de error, ocasionan que la simulación se pueda comportar en forma distinta al robot real, a menos que el controlador este diseñado para compensar estas dinámicas no modeladas.

Finalmente, se compararon las tres estrategias de control para la estabilización en reposo y movimiento de la bicicleta robótica mediante dos índices de desempeño, el primero de ellos utiliza la desviación estándar de la señal de error, y el segundo utiliza el valor cuadrático medio del esfuerzo de control, la relación entre los dos controladores permite concluir que el control CTC es el que presenta menor desviación con respecto a la señal de referencia, pero el controlador LQR es el que consume menor energía según los resultados obtenidos.

Perspectivas

Desde el punto de vista del control, se implementaron dos estrategias de control lineal: PID y LQR. Como el modelo no-lineal fue calculado mediante el formalismo de *Euler-Lagrange* es posible utilizar otras técnicas de control no lineal como son: sliding mode control para evaluar y comparar su desempeño frente a las estrategias PID y LQR.

Con el propósito de disminuir las incertidumbres paramétricas se pueden diseñar experimentos de identificación de sistemas dinámicos para obtener parámetros más precisos del modelo dinámico e incluirlas dentro del diseño de los controladores. También se busca generar trayectorias on-line para la bicicleta y diseñar e implementar algoritmos de control como es el *control predictivo basado en modelos*.

También se busca incluir este tipo de practicas dentro del curso de sistemas de control del programa de ingeniería física con el fin de acercar a los estudiantes dentro de un proyecto de control más realista que mejore sus competencias laborales en el contexto de los sistemas de instrumentación y control.

Apéndice A

Arduino Kit Engineering

El kit de Ingeniería de Arduino está dirigido a estudiantes de ingeniería que desean aprender sobre Arduino, MATLAB, Simulink y Stateflow. Ha sido desarrollado como una colaboración entre Mathworks y Arduino. Se pueden construir tres proyectos:

1. Robot Dibujante.
2. Robot móvil.
3. Motocicleta auto-balanceada.

En este proyecto de investigación se escogió la motocicleta auto-balanceada a la cual llamaremos *Bicicleta Robótica* ya que los modelos dinámicos para la motocicleta y la bicicleta son los mismos.

A.1. Bicicleta Robótica

Con una dinámica de péndulo invertido que usa un disco de inercia con un efecto giroscópico, la bicicleta con equilibrio automático puede moverse y equilibrarse por sí misma. La bicicleta usa Simulink para monitorear y controlar los movimientos, el sensado inercial y el filtrado para equilibrar la bicicleta robótica.

Los componentes usados en este proyecto y su descripción están contenidos en la Tabla **A-1**.

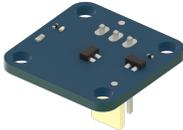
Imagen	Nombre	Descripción
	Arduino MKR1000	MKR1000 es una de las tarjetas Arduino, basada en el SoC Atmel AT-SAMW25, tiene características destacadas como conectividad Wi-Fi y un circuito de carga Li-Po.
	Arduino MKR Motor	El MKR Motor es una tarjeta que implementa una interfaz de potencia y permite a la tarjeta MKR1000 controlar servomotores, motores de c.c y paso a paso.
	Arduino MKR IMU	Es una tarjeta para medición inercial (IMU) contiene un giróscopo y acelerómetro de 3 ejes para medir la orientación y velocidad angular de la bicicleta.
	Motor c.c	El motor de c.c es el actuador usado para hacer girar la rueda de inercia en la bicicleta.
	Motor c.c con caja reductora y encoder	El Motor de c.c con encoder permite la traslación de la bicicleta a una velocidad controlada.
	Micro servomotor	Es usado para el control de la dirección de la bicicleta.
	Sensor de efecto Hall	El sensor de efecto Hall, se utiliza como un tacómetro con un imán unido a la rueda de inercia de la bicicleta.

Imagen	Nombre	Descripción
	Sensor de Ultrasonido	El sensor ultrasónico puede detectar la distancia a un objeto que se encuentra delante de él, útil para evitar obstáculos en la trayectoria de la bicicleta.
	Batería LiPo	La batería suministra potencia eléctrica a las tarjetas, actuadores y sensores que componen la bicicleta.
	Cables	Los cables son necesarios para conectar las tarjetas con los actuadores y sensores.
	Partes plásticas	Constituyen el armazón y el cuerpo de la bicicleta.
	Ruedas	Las ruedas son utilizadas para el movimiento traslacional de la bicicleta son accionadas mediante motores de c.c.
	Correa de transmisión	Se utiliza para transmitir el movimiento del motor a la rueda. Las correas dentadas tienen dientes coincidentes con poleas de sincronización para garantizar que no se pierdan pasos mientras se transmite el movimiento entre ellos.
	Tornillos y Tuercas	Tuercas y tornillos en varios tamaños, sirven para ensamblar las partes plásticas de la bicicleta.

Tabla A-1: Componentes de la bicicleta robótica

A.2. Especificaciones Técnicas

Disco de inercia accionado por un motor c.c

El motor de c.c. se utiliza para aplicar un par al disco de inercia, lo que hace que la bicicleta ejerza un par opuesto al ángulo de inclinación θ . Las especificaciones del motor y del disco de inercia se establecen en la Tabla **A-2**.

Motor c.c	
Parámetro	Valor
Voltaje de Operación	6 Volt
Velocidad sin carga	$7500 \pm 10\%$ rpm
Corriente sin carga	90 mA
Par nominal	$150 \text{ gm} \cdot \text{cm}$
Corriente nominal	2.6 A
Disco de Inercia	
Masa	76.38 gr
Radio	10 cm
Momento de inercia	$39.19 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

Tabla A-2: Especificaciones Motor c.c y Disco de Inercia

Tacómetro

El motor de c.c del disco de inercia puede girar demasiado rápido cuando se aplica un par durante un tiempo muy grande. Esta situación puede dañar permanentemente muchos componentes de la bicicleta, incluido el motor de c.c y la estructura en la que está soportado. Para evitar este riesgo, la bicicleta incluye un tacómetro dentro de la carcasa de plástico en frente al disco de inercia.

El sensor digital de efecto Hall es el SL353 (tacómetro) contiene un electro-imán que está conectado a un circuito digital que tiene un valor de 1 cuando se aplica un campo magnético externo y 0 en su ausencia. El circuito digital permite realizar un seguimiento del número de pulsos generados por el campo magnético con el fin de determinar la velocidad angular aproximada del disco de inercia durante un intervalo de tiempo.

Motor de c.c con encoder

El motor de c.c conectado a la rueda trasera de la bicicleta tiene acoplado a su eje una caja reductora de 1/100. Esto significa que para cada revolución hacia adelante de la rueda trasera, los pulsos del encoder se incrementa en $12 \times 100 = 1200$ pulsos.

Para expresar la velocidad en metros por segundo m/s , se sabe que hay 1200 pulsos por revolución de la rueda trasera, y el perímetro de la rueda trasera es $2\pi r = 2\pi(45\text{ mm}) = 0.2827\text{ m}$. Esto significa que para obtener la velocidad de la bicicleta en m/s , se tiene:

$$v = \frac{1}{h} \cdot \frac{0.2827}{1200}$$

Donde h es el periodo de muestreo.

Unidad de Medida Inercial (IMU)

Para medir el ángulo de inclinación θ y la velocidad angular $\dot{\theta}$, se dispone de una unidad de medida inercial (IMU). Para la bicicleta esta se implementa con un sensor de orientación absoluta BNO055 de 9 ejes. El BNO055 detecta el vector gravedad y el campo magnético, y a partir de esas cantidades puede determinar la orientación y la velocidad angular de la bicicleta sobre el eje de la rueda y el suelo

El BNO055 integra un acelerómetro de 14 bit de tres ejes, un giroscópo de 16 bits de tres ejes con un rango de $2000^\circ/s$, y un sensor geomagnético de tres ejes con un microcontrolador de 32 bits que permite hacer la fusión sensorial, dispone de comunicación I^2C para conectarlo con la tarjeta arduino MKR1000.

Tarjeta Arduino MKR1000

La tarjeta Arduino MKR1000 esta diseñada con el SoC ATSAMW25 de Atmel, tiene un módulo de Wi-Fi para cualquier proyecto relacionado con el Internet de las cosas. Permite la comunicación con servicios en línea que ofrecen API RESTful, como Twitter, GitHub, IFTTT o Telegram. La tarjeta también se puede utilizar como un punto de acceso Wi-Fi, creando una red local que puede ejecutar un pequeño servidor web que aloja sitios web e interfaces en línea.

La tarjeta MKR1000 tiene 28 pines, algunos de los cuales tienen funcionalidades fijas y algunos tienen funcionalidades configurables. Los pines de funcionalidad fija incluyen GND y 5V, que proporcionan acceso a las líneas de tierra de referencia de la tarjeta y de 5 voltios, respectivamente. Los pines etiquetados A0 a A6 son pines analógicos. Estos pines pueden transmitir o recibir valores de voltaje entre 0 y 3.3 voltios, relativos a GND. Finalmente, los pines etiquetados 0 a 14 son pines digitales. Cuando estos pines transmiten datos, solo pueden transmitir valores de voltaje de 0 o 3,3 voltios.. Cuando reciben datos, el voltaje se interpreta como ALTO o BAJO, relativo a un umbral entre 0 y 3,3 voltios.

Tarjeta Arduino MKR Motor Carrier

El MKR Motor Carrier es una tarjeta diseñada para controlar servos, motores c.c y motores paso a paso. La tarjeta también se puede usar para conectar otros actuadores y sensores a través de una serie de conectores macho de 3 pines. Las características principales:

- Compatible con todas las placas de la familia MKR.
- Cuatro salidas de servomotor simultáneas.
- Hasta cuatro motores c.c simultáneos (dos de alto rendimiento + dos de rendimiento estándar).
- Dos motores paso a paso simultáneos (alternativos a los motores de cc)
- Sensado de corriente de realimentación para los motores de alto rendimiento
- Dos entradas para encoders.
- Cuatro entradas para sensores analógicos (3 pines compatibles).
- Posibilidad de leer el estado de las baterías
- Interruptor ON-OFF con LED de Encendido
- Conector de batería LiPo y bloque de terminales de alimentación para fuente de alimentación alternativa
- LED para indicar visualmente la dirección de rotación de los motores de c.c.
- Procesador incorporado para control automatizado de algunas de las salidas.

- Conector I^2C macho de 4 pines.

La tarjeta tiene dos controladores de motor MC33926 para un control de motores c.c de alto rendimiento con conexión directa a la tarjeta MKR1000, realimentación de corriente y capacidad de hasta 5A. Además, hay dos controladores DRV8871 que se controlan desde un microcontrolador SAMD11 que se comunica con el MKR1000 a través de I^2C . El SAMD11 también se usa para controlar los servos, leer los encoders y leer el voltaje de la batería. Las características eléctricas son:

- Protección de corriente inversa en los pines de alimentación.
- Corriente máxima MC33926: 5 A, corriente RMS según el grado de disipación térmica.
- Corriente máxima DRV8871: 3 A, corriente limitada por resistencia de detección.
- Tensión nominal: 6.5 V a 20 V.

A.3. MATLAB / Simulink

MATLAB es un software que permite realizar cálculos complejos en grandes conjuntos de datos. MATLAB tiene su propio lenguaje de programación textual con instrucciones que pueden recopilarse en scripts. También puede comunicarse con las tarjetas Arduino como una forma de llevar la información del sensor a sus programas o controlar los actuadores conectados a la tarjeta.

MATLAB y Simulink permiten una forma diferente de programar las tarjetas Arduino usando un lenguaje de programación visual (VPL para abreviar), MATLAB le permite realizar una serie completa de operaciones en datos utilizando código como interfaz. Simulink ofrece un lenguaje de programación visual (VPL) basado en el uso de un paradigma de programación de flujo para enrutar datos, procesarlos, guardarlos y enviar los resultados a otros programas, a los scripts de MATLAB e incluso a las tarjetas Arduino. Una de las características de Simulink VPL es la posibilidad de diseñar programas que puedan cargarse en tarjetas Arduino directamente desde MATLAB IDE.

El diagrama de control PID en Simulink para el control de la inclinación en la bicicleta puede observarse en la Fig. **A-1**

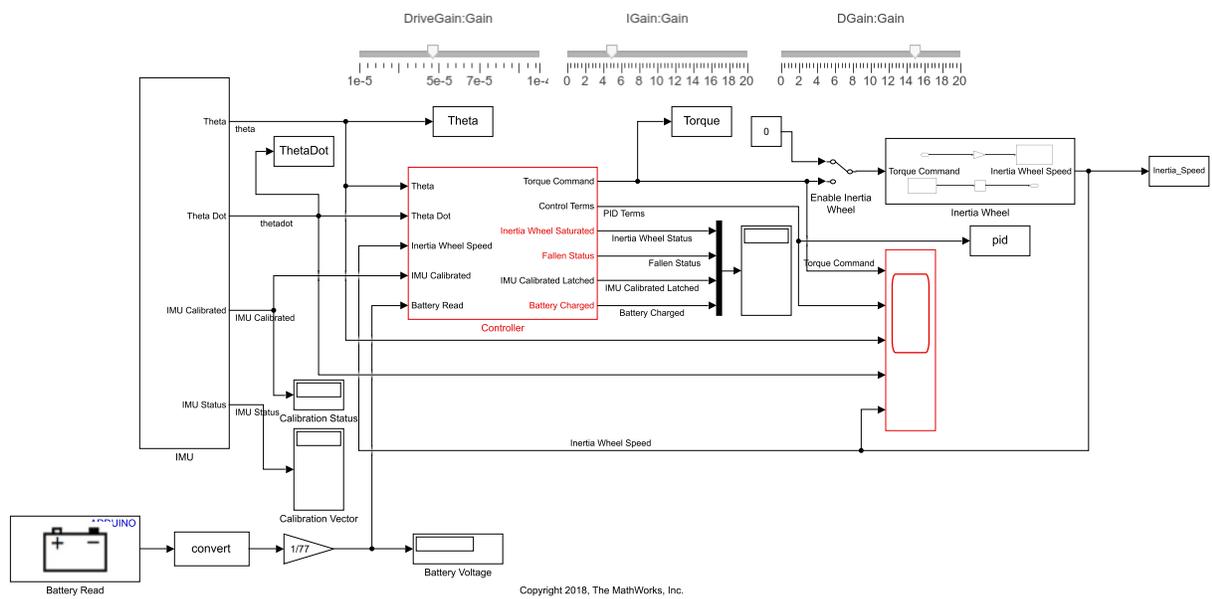


Figura A-1: Control PID en Matlab / Simulink.

Bibliografía

- [Akesson et al., 2006] Akesson, J., Blomdell, A., and Braun, R. (2006). Design and control of yaip - an inverted pendulum on two wheels robot. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 2178–2183.
- [Åström and Hägglund, 2006] Åström, K. and Hägglund, T. (2006). *Advanced PID Control*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society.
- [Åström and Wittenmark, 2011] Åström, K. and Wittenmark, B. (2011). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Third Edition*. Dover Books on Electrical Engineering. Dover Publications.
- [Åström et al., 2005] Åström, K. J., Klein, R. E., and Lennartsson, A. (2005). Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research. *IEEE Control Systems*, 25(4):26–47.
- [Bravo and Rengifo, 2014] Bravo, D. A. and Rengifo, C. F. (2014). Herramienta para la enseñanza de las ecuaciones de Lagrange basada en la simulacion de sistemas dinámicos. *Revista Mexicana de Física*, 60(2):111–115.
- [Bravo and Rengifo, 2016] Bravo, D. A. and Rengifo, C. F. (2016). Dynamics filter for walking trajectories from human motion capture. In *2016 IEEE Colombian Conference on Robotics and Automation (CCRA)*, pages 1–6.
- [Brian, 2009] Brian, F. (2009). *Analytical System Dynamics*, volume 1 of *Modeling and Simulation*. Springer US, 1 edition.
- [Chate García et al., 2017] Chate García, K. V., Prado Ramírez, O. E., and Rengifo Rodas, C. F. (2017). Comparative analysis between fuzzy logic control, lqr control with

- kalman filter and pid control for a two wheeled inverted pendulum. In Chang, I., Baca, J., Moreno, H. A., Carrera, I. G., and Cardona, M. N., editors, *Advances in Automation and Robotics Research in Latin America*, pages 144–156, Cham. Springer International Publishing.
- [Consolini and Maggiore, 2013] Consolini, L. and Maggiore, M. (2013). Control of a bicycle using virtual holonomic constraints. *Automatica*, 49(9):2831 – 2839.
- [Edelmann et al., 2015] Edelmann, J., Haudum, M., and Plochl, M. (2015). Bicycle rider control modelling for path tracking. *IFAC-PapersOnLine*, 48(1):55 – 60. 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling.
- [Goldstein et al., 2013] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2013). *Classical Mechanics*. Pearson.
- [Hung et al., 2017] Hung, N. B., Jaewon, S., and Lim, O. (2017). A study of the effects of input parameters on the dynamics and required power of an electric bicycle. *Applied Energy*, 204:1347 – 1362.
- [Hung et al., 2018] Hung, N. B., Sung, J., and Lim, O. (2018). A simulation and experimental study of operating performance of an electric bicycle integrated with a semi-automatic transmission. *Applied Energy*, 221:319 – 333.
- [Jamil et al., 2014] Jamil, O., Jamil, M., Ayaz, Y., and Ahmad, K. (2014). Modeling, control of a two-wheeled self-balancing robot. In *2014 International Conference on Robotics and Emerging Allied Technologies in Engineering (iCREATE)*, pages 191–199.
- [Khalil and Dombre, 2002] Khalil, W. and Dombre, E. (2002). *Modeling, Identification and Control of Robots*. Taylor & Francis, Inc., Bristol, PA, USA, 3rd edition.
- [Landau and Lifshitz, 1978] Landau, L. and Lifshitz, E. (1978). *Mecánica*. Number v. 1 in Curso de física teórica. Reverté.
- [Limebeer and Sharp, 2006] Limebeer, D. J. N. and Sharp, R. S. (2006). Bicycles, motorcycles, and models. *IEEE Control Systems*, 26(5):34–61.
- [Mauny et al., 2017] Mauny, J., Porez, M., and Boyer, F. (2017). Symbolic dynamic modelling of locomotion systems with persistent contacts - application to the 3d bicycle. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):7598 – 7605. 20th IFAC World Congress.

- [Papadopoulos, 1987] Papadopoulos, J. (1987). Bicycle steering dynamics and self-stability: A summary report on work in progress. Technical report, Cornell University.
- [Raffo et al., 2015] Raffo, G. V., Ortega, M. G., Madero, V., and Rubio, F. R. (2015). Two-wheeled self-balanced pendulum workspace improvement via underactuated robust nonlinear control. *Control Engineering Practice*, 44:231 – 242.
- [Suárez, 2017] Suárez, M. A. B. (2017). Diseño e implementación de una estrategia avanzada de control, para resolver el problema de estabilidad de una bicicleta durante un recorrido libre, sin conductor y a velocidad constante. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia.
- [Wells, 1967] Wells, D. (1967). *Schaum’s Outline of Lagrangian Dynamics*. Schaum’s Outline Series. McGraw-Hill Education.