ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA CON AYUDA DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ESTUDIANTES DE GRADO 9 Y 10 DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCIA PAREDES

BRENDA CATALINA LARA QUIÑONES.
SERGIO ALEJANDRO POQUIGÜEGÜE.
HEYER DUVAN RIVERA RUIZ.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYAN
2022

ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA CON AYUDA DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ESTUDIANTES DE GRADO 9 Y 10 DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES

Trabajo para optar al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

BRENDA CATALINAL LARA QUIÑONES.
SERGIO ALEJANDROPOQUIGÜEGÜE.
HEYER DUVAN RIVERA RUIZ.

Directora
Dra. GABRIELA INES ARBELAEZ ROJAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYAN
2022

Nota de aceptación

____

____

____

____

Director: ______________________________

Dra. Gabriela Arbeláez

Jurado: ______________________________

Mg.Yenny Rosero

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 18 Marzo de 2022

Tabla de contenido

Pág.

Lista de Anexos

Lista de ilustraciones

Introducción

En este documento se presenta la sistematización de la Práctica Pedagógica (PP), asignatura que se desarrolla durante cuatro semestres continuos en el Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, dividiéndose en cuatro prácticas, que se encuentran clasificadas a continuación:

En la Práctica Pedagógica I (PPI) se conocen las distintas alternativas y metodologías para desarrollar el futuro proyecto de aula en una determinada institución de la educación básica o media. En la PPII se hace una inmersión en la institución elegida y se elabora el proyecto que se llevará a cabo el siguiente semestre. En la PPIII se implementa dicho proyecto con los estudiantes de la institución y en la PPIV se elabora un documento de sistematización en el que se toma la evidencia del proceso desarrollado a lo largo de los tres semestres anteriores y que es el que estamos poniendo a consideración del público.

La Práctica se desarrolló en el marco del semillero de matemáticas de la Universidad del Cauca y se realizó en la Institución Educativa Antonio García Paredes de la ciudad de Popayán, con 14 estudiantes de grado noveno y 2 estudiantes de grado décimo.

El documento se encuentra organizado en cinco capítulos. En los primeros tres capítulos se presentan los antecedentes del proyecto de aula; es decir se expone una justificación del mismo y se presentan los elementos teóricos, metodológicos y las actividades que enmarcaron la propuesta para llevar a cabo en el aula de clase. En los dos últimos capítulos no solamente se describe el trabajo realizado con los estudiantes de noveno y décimo, sino que se hace una reflexión sobre las fortalezas, dificultades y limitaciones del material didáctico que se puso en juego en la clase y se pone en voz alta la experiencia adquirida en las sesiones desarrolladas a lo largo de 14 sábados en el horario de 8 a 12 M., en el que se desarrolló la práctica.

En el primer capítulo se elabora una reflexión acerca de la importancia de la geometría en la educación escolar y la importancia de recalcar su enseñanza y aplicaciones en la vida cotidiana. De igual manera se menciona la necesidad de ver la geometría como una asignatura prioritaria para las instituciones educativas; una parte del currículo en la que el estudiante se motive, disfrute y, sobre todo, sea concebida y entendida como una de las formas de leer y entender la realidad, con aplicación de sus expresiones y desarrollos a problemas de la cotidianidad, desde una perspectiva creativa, innovadora, con prácticas didácticas no tradicionales, en concordancia con las necesidades de las nuevas generaciones de estudiantes y las exigencias de una sociedad en constante cambio.

En el segundo capítulo se exponen algunos de los fundamentos teóricos que enmarcaron el proyecto de aula, iniciando con las matemáticas recreativas que permiten incentivar en el pensamiento del estudiante el carácter lúdico y placentero que puede propiciar el aprendizaje de las matemáticas. Nos detuvimos en dos autores que privilegian el gusto por las matemáticas a través de juegos, donde se refleja un orden y disciplina, en espacios y ambientes que diviertan. En el tema de resolución de problemas, que será otra de las herramientas teóricas privilegiadas, se utiliza un modelo, que privilegia el pensamiento analítico a través de problemas matemáticos que promueven el interés por el aprendizaje de las matemáticas. Igualmente mencionamos algunos antecedentes en el uso de estas metodologías en el aula de clase.

En el tercer capítulo se presenta la metodología de intervención en el aula que, como lo dijimos anteriormente será a través de las matemáticas recreativas y la resolución de problemas; se enfatiza en el fortalecimiento de valores, el diálogo, el incentivo a la participación activa y la creatividad; esto orientado a conectar los conocimientos nuevos con los previos. Además, se muestra un proceso de enseñanza personalizada, ya que no todos los estudiantes aprenden de la misma manera, cada uno tiene su propio ritmo de aprendizaje, por esto la importancia de estar atentos al desempeño grupal sin perder de vista a cada estudiante en particular, asociando el desempeño grupal en el ámbito del aprendizaje cooperativo.

En la cuarta parte del documento se realiza la presentación y descripción de la ejecución del proyecto de aula con los elementos ocurridos en la sala a través de una herramienta didáctica llamada bitácora, la cual consiste en una serie de documentos donde se va guardando la información de los sucesos más significativos de las sesiones, en la que se registran también las reflexiones generadas por los tutores al finalizar cada sesión a fin de realizar la identificación de fortalezas, debilidades y oportunidades presentadas en los estudiantes durante el desarrollo de la misma. Con esta herramienta se realiza la recolección de pruebas, la generación de trazabilidad de los resultados y análisis relacionados con las nueve sesiones desarrolladas, en la que se registran evidencias fotográficas y observaciones de cada uno de los puntos de las guías que fueron elaboradas para el proyecto.

Al finalizar este documento se encuentran las conclusiones generales surgidas en la ejecución del proyecto, donde se encuentra la percepción de los estudiantes con la metodología presentada y se proporciona el punto de vista de los autores del proyecto, y cómo este proceso fortalece en el ámbito profesional y personal.

1. La importancia de introducir en la enseñanza de la geometría, la matemática recreativa y la resolución de problemas

1.1. Importancia de la resolución de problemas y la recreación en la enseñanza de la geometría

En muchos casos, los métodos relacionados con la enseñanza de las matemáticas se han centrado principalmente en dar a los estudiantes una definición o fórmula, y luego resolver los ejercicios de acuerdo con patrones de imitación, sin que se facilite a los estudiantes la posibilidad de entender lo que están haciendo y por lo general en estos métodos no se tiene en cuenta la capacidad creadora e innovadora del estudiante.

Segura y Chacón (1996) (citados por D'Andrea et al. (2014) plantean que los sistemas tradicionales de enseñanza no fomentan en el estudiante las competencias que les permiten indagar, analizar y discernir la información, con miras a la toma de decisiones, debido a que los conocimientos se imparten de forma parcelada y memorística, con lo cual se ponen barreras al desarrollo de la iniciativa, la creatividad y la capacidad para comunicarse efectivamente por distintas vías. (p. 32)

En una sociedad en constante cambio, y a pesar de los intentos aislados por mejorar la enseñanza, la educación colombiana continúa a la zaga por factores tanto políticos como económicos, culturales, demográficos, familiares y ambientales, es ahí donde juega un papel importante el rol del docente, tanto de educación básica como de educación media e incluso de la educación superior, para incluir en las prácticas de enseñanza metodologías de aprendizaje que generen en los estudiantes una actitud favorable hacia las matemáticas.

El trabajo en equipo es importante puesto que la metodología de aprendizaje, (matemáticas recreativas y resolución de problemas), también tiene la intención de ser una herramienta útil para que los estudiantes puedan interactuar de una manera más amena con sus compañeros, ya que da lugar al debate, al contraste de ideas, las cuales son de utilidad para trabajar capacidades y habilidades que son necesarias para la resolución de problemas, reforzar la autoestima que a la vez genera autonomía en el aprendizaje. Por lo tanto, la enseñanza de la geometría desde problemas de la vida cotidiana, busca llevar a los estudiantes a reconocer que las matemáticas son útiles, y en consecuencia a que logren un pensamiento crítico y un conocimiento de matemáticas, de una manera entusiasta; así se fomenta el interés por esta área, tan rechazada por muchas de las personas del común.

De esta manera, se establece un objetivo principal centrado en generar gusto por la geometría desde la enseñanza de la misma con ayuda de la matemática recreativa y la resolución de problemas, en los estudiantes de grado 9 y 10 de la IE Antonio García Paredes del municipio de Popayán. El logro de este, se busca a través de unos elementos específicos que orientan el desarrollo paso a paso de cada fase y que permiten llegar al fin último planteado; de esta manera, se inicia el proceso con la formulación del proyecto de aula que da lugar a la práctica pedagógica ; su ejecución se va dando de manera paulatina a través del uso de la herramienta didáctica concebida como bitácora para finalmente, contrastar los resultados obtenidos con las teorías sobre las que se fundamenta el proyecto de aula.

1.2.Justificación

La práctica pedagógica está enmarcada dentro del proyecto semillero de matemáticas de la Universidad Cauca, cuyo propósito es acercar a los estudiantes de bachillerato del Departamento del Cauca a las matemáticas universitarias. Este proyecto de aula que llevamos a cabo en la Institución Educativa Antonio García Paredes, con estudiantes de grado noveno y décimo, está ligado a la geometría que se desarrolló mediante la metodología de resolución de problemas y matemáticas recreativas. *La propuesta consiste en llegar a los estudiantes con una geometría lúdica que les ayude a incentivar su creatividad, su interés y sus habilidades para* *resolver problemas con juegos matemáticos*. El interés de la práctica pedagógica se enfoca en que los estudiantes perciban las matemáticas como un área del conocimiento interesante, útil, divertida y que se puede practicar en otros escenarios distintos y no solo realizando ejercicios en el cuaderno y en el tablero.

Es importante reconocer que para muchos estudiantes encontrarse con la geometría y las matemáticas en el colegio es un gran problema debido a que la manera en que a veces se presenta, pues generalmente les produce aburrimiento, les parece difícil de entender, memorísticas y alejadas de la realidad.

Estas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas son objeto de estudio de la Investigación en Educación Matemática, disciplina que en el país toma fuerza a partir del año 1998 con la creación de la asociación colombiana de matemática educativa (Asocolme) promoviendo la transformación de las prácticas docentes y de la formación del profesorado en esta disciplina, apareciendo especializaciones y maestrías con énfasis en pedagogía de las matemáticas potenciando la investigación ya que " los problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática surgen en el aula de clases" (Gómez, 2018, p. 143).

En este orden de ideas, se deben mirar las experiencias realizadas en este campo en España, donde a partir de los años 90 en los diferentes simposios y encuentros se ha discutido sobre la didáctica de las matemáticas como soporte valioso para la formación de docentes de primaria y secundaria, así como el énfasis puesto en la resolución de problemas matemáticos, investigando acerca de conocimiento, concepciones y creencias de los profesores en formación y en servicio, particularmente cuando se requiere aplicar esta metodología en la práctica y en la enseñanza de la Geometría (Blanco, 2011).

Barrantes et al. (2014) abordan la enseñanza de la Geometría en secundaria desde una perspectiva distinta a la memorización de conceptos, a la resolución de problemas métricos, sin detenerse en el estudio de los aspectos y propiedades geométricas, generando dificultades de comprensión por parte de los estudiantes y desánimo en el docente.

Por ello, plantean que la recuperación de la Geometría como disciplina para conocer de mejor forma el espacio y crear modelos y situaciones problemáticas de utilidad en otros campos, empleando metodología de resolución de problemas o de laboratorios puesto que “la principal finalidad de la enseñanza- aprendizaje de la Geometría es conectar a los alumnos con el mundo en el que se mueven” (Barrantes et al., 2014, p.27).

En Colombia, el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (Icfes) realiza las pruebas Saber a fin de trabajar por el logro de los objetivos de calidad de la educación en el país; sin embargo, los resultados en el área de matemáticas y particularmente aquellos que refieren a los contenidos curriculares de geometría demuestran deficiencias y la mayoría de estudiantes no se destacan en estos contenidos ni tampoco en el área de matemáticas como tal.

As, si se examinan los resultados obtenidos por los estudiantes de 9° en las pruebas Saber, correspondientes al informe de 2017, en el área de matemáticas, en la Institución Educativa Antonio García Paredes. (Icfes, 2017) señala que 49% de los estudiantes no contestaron correctamente las preguntas de la competencia comunicación y de los aprendizajes evaluados solo 8% está en el nivel verde (79% o más estudiantes que contestan correctamente); 69% están en el nivel anaranjado (contestan correctamente entre 31 y 60% de los estudiantes). La mayor dificultad refiere a que los estudiantes no reconocen el lenguaje algebraico (74% no contesta correctamente las preguntas relacionadas con esta temática); 65% no contesta correctamente los tópicos sobre los efectos de transformaciones aplicadas a figuras planas.

De igual manera, el informe del Icfes establece que para la competencia resolución de problemas 56% de los estudiantes no contestó correctamente las preguntas dentro de esta categoría; 70% o más de los evaluados, no contestaron correctamente los contenidos evaluados (nivel rojo); 63% está en el nivel de rendimiento naranja (40-69% con las respuestas incorrectas); 43% de los estudiantes no fórmula ni resuelve problemas utilizando modelos geométricos; 74% no puede establecer y utilizar procedimientos de cálculo de superficies y volúmenes.

Además, el informe del Icfes indica para la competencia de razonamiento matemático de 52% de los estudiantes no contesta correctamente los ítems de esta categoría; 42% no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos; 58% no predice ni explica los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales. El 64%
no analiza la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas; 81%, no generaliza procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.

En consecuencia, se hacen evidentes las dificultades en razonamiento lógico-matemático y en la resolución de problemas, particularmente en los temas de geometría; se demuestra así la baja calidad de la educación media del país, la importancia relativamente modesta dada a la geometría y al álgebra; esto se refleja en los resultados de las pruebas Saber 11° de los años 2021 y 2022, donde el mejoramiento en el área de matemáticas de la Institución Educativa Antonio García Paredes, con referencia al año base de 2014, es modesta.

(Icfes, 2021) indica que el promedio de puntaje del colegio Antonio García Paredes, en 2020 fue de 250 y en 2021 de 244, muy semejante al del año base 2014, de 250; además, el nivel de desempeño en matemáticas, en el espectro alto o verde, se incrementó solo en 2% con respecto al año de referencia; los niveles rojo y amarillo, aumentaron, disminuyendo el nivel naranja, lo que indica deterioro del rendimiento en matemáticas.

Por lo tanto, se considera necesario que en los colegios se brinde un mayor espacio a la enseñanza de la geometría, con un método que los motive, les permita disfrutar de la clase y les muestre que es posible aplicarla en la vida cotidiana. Además, en razón a que si bien se cuenta con unos lineamientos por parte del MEN, unos estándares básicos de competencias y unos desempeños básicos de aprendizaje, donde se contempla el desarrollo y construcción de conocimiento alrededor de cinco pensamientos, aún existen espacios de aula donde se trabaja de manera lineal el desarrollo de un solo pensamiento: el numérico, desde el que se centra el mayor porcentaje del proceso de enseñanza, los sistemas numéricos, restando relevancia al desarrollo de otros pensamientos como el espacial y los sistemas geométricos. Nuestro propósito es intentar justamente trastocar estas actitudes y para ello se utilizaron distintas alternativas que involucran propuestas más llamativas de aprendizaje.

Lo anterior, es oportuno teniendo en cuenta que las experiencias en las primeras etapas de la vida escolar, desembocan inevitablemente en actitudes frente al conocimiento que definen, en gran medida, el futuro y el comportamiento de los estudiantes a lo largo de su vida; y estas actitudes positivas o negativas están mediadas por las metodologías de enseñanza utilizadas por los docentes. Por lo tanto, se concibe como un imperativo que esta nueva generación de estudiantes reciba otras formas de enseñanza acordes con la época y coherentes con las transformaciones sociales y las dinámicas cambiantes de la sociedad.

2. Referentes teóricos

En la actualidad existen variedad de trabajos que utilizan la resolución de problemas y las matemáticas recreativas como herramientas importantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este proyecto se enfoca fundamentalmente en dos aspectos: la matemática recreativa y la resolución de problemas.

2.1. Matemática recreativa

El término matemática recreativa es un término general que refiere a los juegos y acertijos matemáticos, de modo que, no todos los problemas en este campo requieren de conocimientos avanzados de matemáticas y por tanto, es frecuente que atraiga la curiosidad de aquellos que no son matemáticos e inspiren sus estudios en esta área del conocimiento; incluyen acertijos lógicos y de otro tipo que necesitan razonamientos deductivos, como pueden ser los cuadrados mágicos o fractales; los juegos matemáticos son aquellos para jugadores múltiples las reglas, estrategias y resultados pueden ser estudiados y explicados mediante las matemáticas, si bien para jugar los no se necesita ser un matemático; por otro lado, los acertijos matemáticos requieren que el jugador halle una solución factible que se pueda aplicar para resolver la situación (Lynch, 2012).

Desde el punto de vista histórico puede decirse que las matemáticas recreativas aparecen desde los inicios de las matemáticas como campo de estudio puesto que los matemáticos de Egipto y China ya investigaban los aspectos recreativos , utilitarios y teóricos de la recreación en matemáticas; ya dos mil años antes de la era común , en China se utilizaban los acertijos para propósitos de placer intelectual, al igual que las combinaciones, permutaciones y los cuadrados mágicos; los acertijos numéricos se pueden rastrear hasta los problemas algebraicos planteados por Ahmes en los antiguos manuscritos egipcios; los matemáticos en India resolvían problemas como medio de recreación social como lo atestigua el Lilivati de Bashkara (Thorndike, 2014).

Sin embargo, las matemáticas recreativas en occidente empiezan con las colecciones de problemas realizadas por los griegos o en el medioevo, con las colecciones de problemas seleccionados de diferentes tópicos, pero el termino *recreativas* es empleado por primera vez por Montucla en 1758, quien recopiló y amplio las recreaciones matemáticas de Ozanam, publicadas en 1698; sin embargo, la matemática recreativa no era un tópico de interés investigativo si bien se mencionaban juegos matemáticos ya en la Enciclopedia de Matemáticas publicada por Klein entre 1900 y 1935 (Chemla, 2014).

La matemática recreativa ha ganado importancia con el transcurrir del tiempo dado que sus retos requieren un razonamiento refinado y por ello pueden proporcionar más amena a temas profundo de las matemáticas y de la lógica, facilitando el aprendizaje de la lógica proposicional o de la teoría de las probabilidades, a través de la lógica de las apuestas, en los problemas de los puntos, de los juegos de azar, o de la teoría de grafos a través del problema de los puentes de Königsberg, planteado por Euler, entre otros (Beineke & Rosenhouse, 2016).

En el ámbito educativo, las matemáticas recreativas empiezan a utilizarse hacia 1920 en los libros de texto de geometría como los de Eugene Davis Smith, pero indudablemente quienes marcan un hito en su empleo y difusión son Yakov Perelman y Martin Gardner, y posteriormente Ian Smith.

El más famoso de ellos fue Martin Gardner (1914-2010) quien escribió desde 1958 una serie de artículos sobre lógica, acertijos, juegos matemáticos, en la revista *Scientific American*, aportes que fueron recopilados en seis libros por la Universidad de Chicago; este autor escribió muchos libros sobre matemática recreativa en las que enfatiza en el desarrollo de la creatividad a través de acertijos y juegos matemáticos que propicien el interés por aprender las matemáticas; se pueden mencionar: Acertijos de Sam Loyd, Circo matemático, los acertijos de Moscú, hexaflexágonos y otras diversiones matemáticas, nuevas diversiones matemáticas, matemáticas recreativas, mis mejores acertijos lógicos y matemáticos, entre otros(Gardner, 2013, 1995 , 1986, 1979; Kordemsky, 1972).

(Gardner, 1986) al referirse a los acertijos que involucra en su libro *Matemáticas para Divertirse*, comenta que los ha seleccionado para que cubran diferentes áreas de la matemática y proporciona un breve comentario sobre su naturaleza, así como una resolución detallada de los mismos, con la intención que las matemáticas sean algo diferente y divertido, sosteniendo que:

> He hecho todo lo posible por encontrar acertijos que fueran inusuales y divertidos, que sólo requirieran el más elemental conocimiento de matemática, pero que al mismo tiempo proporcionaran una mirada estimulante a los niveles más altos del pensamiento matemático. […] Tal vez al jugar con estos acertijos descubras que la matemática es más divertida de lo que creías. Tal vez te hagan desear estudiar la asignatura en serio, o sientas menos vacilaciones para abocarte al estudio de una ciencia para la que se requiera cierto conocimiento de matemática avanzada. (p.5)

Otro de los autores reconocidos en matemáticas recreativas es el ruso Yakov Isidorovich Perelman (1882-1945), autor de una serie de obras como Aritmética Divertida, Algebra Divertida, Matemática Recreativa, entre otras; sus libros están orientados al aprendizaje de las matemáticas, la física, desde la perspectiva de situaciones que involucran historias y acertijos relacionados con la vida diaria como maquinas, locomotoras, problemas de reparto, aplicaciones de la geometría. En el prólogo de su obra Matemáticas Recreativas (Y. Perelman, 2003) afirma que:

> Para leer este libro, se requiere de un entrenamiento matemático muy modesto: el conocimiento de las reglas de aritmética e información elemental de geometría. Solo una

> pequeña parte de las tareas requieren la habilidad de componer y resolver ecuaciones simples. Sin embargo, el contenido es diverso: desde la selección de acertijos llenos de color e intrincados trucos de gimnasia matemática hasta ejemplos prácticos y útiles de conteo y medición. (Perelman, 2002, p. 8)

Así, la intencionalidad del autor es que el lector se divierta mientras aprende matemáticas, e igualmente que se motive a despertar su imaginación, a conectar las matemáticas con las situaciones del mundo real, a buscar los fundamentos lógicos y científicos del mundo.

Desde el punto de vista creativo sus libros contienen material para el desarrollo y realización de trucos, adivinanzas y charadas matemáticas que son útiles para intensificar el intelecto y apreciación de la juventud colegial y los lectores en general.

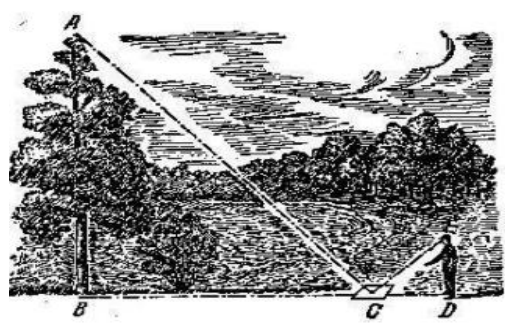
Las matemáticas recreativas son una metodología que se enfoca en incentivar el pensamiento matemático y lógico con actividades lúdicas que despierten el interés de los estudiantes de la educación básica y media, por aprender matemáticas. El sentido de las matemáticas como una actividad lúdica es tan antigua como el cálculo o la lógica. Un ejemplo de este hecho se encuentra en el siglo XVII en Francia, donde la sociedad más acomodada se distraía con juegos de azar: Uno de sus miembros llamado Antoine Gombaud, un escritor y jugador experto, le causaban incertidumbre algunos juegos que estaban relacionados con el tirado de dados, uno de ellos era: si convenía apostar a que saldría al menos un seis en cuatro tiradas de un dado. Por esto, determinó proponérselos a Blaise Pascal (1623-1662), el cual tenía comunicación con Pierre Fermat (1601-1665) por medio de cartas. Estos dos personajes dieron solución a estos problemas y a muchos más relacionados con juegos de mesa de la época, por eso se dice que son los pioneros en el estudio de la probabilidad. (Morales, 2017)

Las matemáticas recreativas ayudan a ver con otra cara las matemáticas donde se muestran de una manera más factible, esto lo podemos observar en los aportes de Yakov

Perelman (1882-1942) con sus libros “Matemáticas Recreativas”, “Geometría Recreativa”, donde utiliza el entorno de la naturaleza para formular problemas matemáticos o geométricos y de igual manera resolverlos. Por ejemplo, el problema número ocho (con ayuda del espejo) del libro “Geometría Recreativa”, el cual dice:

> Otro método más para determinar la altura de un árbol emplea un espejo. A cualquier distancia (imagen 1) del árbol, colocamos horizontalmente, en el punto C, un espejo sobre un suelo plano y nos alejamos hacia atrás hasta un punto D, en el cual el observador ve la copa A del árbol en el espejo. Por lo tanto, la relación entre la altura del árbol AB y la estatura del observador ED, es igual a la relación entre la distancia BC desde el espejo hasta el árbol y la distancia CD desde el espejo hasta el observador
> AB: ED = BC: CD. (Perelman, 2003, p. 21).

Ilustración 1. Medición de altura con ayuda de un espejo.



Fuente. Geometría Recreativa, Perelman, 2003, p. 22.

2.2.Resolución de problemas.

Otra opción que se considera importante para la enseñanza de la geometría es la metodología basada en la resolución de problemas, en este caso se menciona a George Polya (1887-1985) quien afirma que:

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento para resolver un problema. (Polya, 1989, p. 5)

La resolución de problemas se enfoca en incentivar el pensamiento analítico con problemas matemáticos que despierten el interés de los estudiantes de la educación básica y media, por aprender matemáticas, esto los llevará a descubrir y afianzar el camino correcto, que los sacará de la dificultad y los conducirá a la solución correcta. Además, el primer capítulo del libro "cómo plantear y resolver un problema" de George Polya (1989) modela las 4 pautas que se necesitan para resolver un problema, las cuales consisten en: (Polya, 1965): comprender el problema, en este primer paso se tienen en cuenta las siguientes preguntas ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? El segundo movimiento es: concebir un plan, donde se determina la relación entre los datos y la incógnita, aquí es obtiene un bosquejo de la solución. El tercer paso es: ejecución del plan, en el cual se efectúa el plan, se comprueba cada uno de los procedimientos anteriores y por último se examina la solución, aquí se proponen las siguientes cuestiones ¿se puede obtener el resultado de forma diferente? ¿Se puede verificar el resultado? Este método de enseñanza con una buena organización es una herramienta útil, incluso fuera del área educativo, ya que su utilización no está condicionada a un designado tema, es decir, pueden ser problemas geométricos, matemáticos o no, teóricos o prácticos, de la vida diaria o una simple charada.

2.3. Algunos antecedentes en el uso de las matemáticas recreativas y resolución de problemas en el aula de clase.

2.3.1. Antecedentes matemática recreativa.

Para este proyecto de aula se utiliza una metodología que combina la resolución de problemas y matemáticas recreativas buscando incentivar en el estudiante su interés por la geometría. Para tal fin se hizo una búsqueda bibliográfica de resultados e investigaciones que hubiesen involucrado este tipo de metodologías en el aula de clase.

Bilbao-Torres (2021) expone la importancia de la matemática recreativa en la motivación de los estudiantes para que estudien matemáticas y vayan mucho más allá, hacia temáticas más profundas, que les permitan desarrollar competencias que les servirán para el futuro; explica que las matemáticas recreativas tienen su origen en tiempos remotos, desde el cuadrado mágico de Lo Shu, el papiro de Rhind, los tres problemas clásicos de la matemática griega, entre otros.

Asimismo, destaca el impacto de la matemática recreativa en el desarrollo de nuevas teorías como las probabilidades, los grafos, la criptografía o los números binarios; cita autores como Bachet de Meziriac, con su problema de las pesas; Samuel Loyd quien aporta acertijos para niños utilizando figuras de animales y objetos cotidianos, o basados en situaciones del ajedrez o en situaciones matemáticas como el problema del molino; Édouard Lucas, famoso por su serie de Recreaciones matemáticas y particularmente introducir las denominadas torres de Hanoi en 1883

Destaca también los aportes de Martín Gardner, quien ha contribuido como pocos al desarrollo de las matemáticas como lúdica, mediante sus acertijos, juegos y diagramas lógicos; Ian Stewart, con sus aportes a la teoría de los números y la lógica, enfatizando las matemáticas en el cosmos, la vida, el caos, la simetría, las ecuaciones que cambiaron el mundo.

Bilbao-Torres propone el empleo de acertijos y juegos, núcleo de la matemática recreativa para fomentar, en estudiantes de bachillerato, el aprendizaje de las matemáticas de una forma amena, a través de las actividades del currículo que incluyen contenidos comunes, números y álgebra, el teorema de Pitágoras, justificaciones geométricas, temáticas de geometría. Concluye de su experiencia que las matemáticas recreativas son un buen recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la secundaria, particularmente en contenidos del álgebra y la geometría, así como de la resolución de problemas que impliquen funciones, abordándose las temáticas desde una perspectiva de la historia de las matemáticas y con énfasis en la lúdica.

Franco & Fonseca (2021) sostienen en su trabajo de investigación que es posible utilizar la matemática recreativa para fortalecer el pensamiento numérico y espacial a través del juego dirigido, en una propuesta de aula que se enfoca en el aprendizaje informativo de las matemáticas estudiantes del grado quinto de una institución educativa pública en Urabá, Antioquia; así, se realizó un diagnóstico utilizando como instrumento la encuesta; con base en esta se definió la ruta para establecer una propuesta pedagógica que comprende seis sesiones de trabajo.

El contenido de cada sesión se definió a través de una ruta cualitativa con enfoque socio crítico y con un diseño de investigación acción educativa, involucrando las categorías de pensamiento numérico y de pensamiento espacial; las actividades realizadas por 16 años y tres niñas del grado quinto de básica primaria de la institución educativa de referencia; los talleres versaron sobre pensamiento numérico, polinomios, pensamiento espacial y sistemas geométricos (ovoides, poliedros), sudokus.

Franco & Fonseca concluyen que el mejoramiento de las competencias en pensamiento numérico y espacial de los estudiantes se logra a través de estrategias como la matemática recreativa enmarcada en el juego, potenciando la consolidación de conceptos, procesos y procedimientos involucrados en la resolución de problemas matemáticos, de la vida diaria y en relación con otras disciplinas, mejorando las destrezas para este tipo de actividades ya que se motiva a los estudiantes a que descubran por sí mismos los conceptos a través de los materiales proporcionados.

González et al. (2014) abordan, en su artículo de investigación sobre el efecto de los juegos sobre la enseñanza de las matemáticas, los aportes que produce la matemática recreativa en la enseñanza matemática, los diferentes frutos que se le pueden sacar a esta metodología, ya que contiene más ventajas que desventajas en su utilización; exponen las actitudes positivas que tienen los estudiantes frente a estas actividades, y cómo los profesores evidencian un mejoramiento en la motivación en el aula de clase.

Así, la revisión bibliográfica realizada por estos autores se basa en encontrar investigaciones empíricas que avalen las ventajas de la matemática recreativa a la enseñanza de la matemática, teniendo en cuenta que el juego refiere “a actividades físicas o mentales que, para quien las lleva a cabo, no tienen otro objetivo que el placer que proveen” (González et al., 2014, p. 113).

Los tópicos a buscar mediante las palabras claves a introducir en los buscadores abarcan: definiciones y clasificaciones de juego, utilizadas en trabajos que refieren a la enseñanza y el aprendizaje; investigaciones en las que se ha empleado el juego en enseñanza de las matemáticas; los efectos de la utilización de juegos en la clase de matemáticas; por tanto, dan prioridad al buscador Google académico y utilizan las palabras claves juego y matemáticas.

De igual forma, conceptualizan juego instruccional, como aquel que tiene unos objetivos cognitivos, instructivos o afectivos, a diferencia del juego matemático, que abarca juegos individuales, que tienen las siguientes características:

1. La actividad involucra: a) un desafío contra una tarea o uno o más oponentes. b) O una tarea común que debe abordarse ya sea solo o, más comúnmente, en conjunción con otros.
2. La actividad se rige por un conjunto de reglas y tiene una estructura clara subyacente a las mismas.
3. La Actividad normalmente tiene un final distinto.
4. La actividad tiene objetivos matemáticos y cognitivos específicos. (González et al., 2014, p.114)

Entonces, teniendo en cuenta que Bright, Harvey y Wheeler (1985), basados en la escala de Bloom (1956), clasificaron los juegos en seis niveles (conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación), examinaron sus efectos, encontrando que en el nivel conocimiento no son efectivos; en el de comprensión, las actividades lúdicas fueron efectivas , fundamentalmente porque son más idóneas para lograr la motivación de los estudiantes, permitiendo salir de la monotonía, involucrarse en las actividades, participar de forma positiva en ellas; se deriva de esto que la lúdica es una estrategia que mejora la resolución de problemas en matemáticas, refuerza la motivación, las habilidades y la construcción de conocimiento.(González et al., 2014).

Sin embargo, los autores de la revisión bibliográfica en discusión advierten que se requiere de una planeación adecuada en el empleo de la lúdica, para evitar una desconexión entre el juego y la matemática, con los objetivos del plan de estudios, y el impacto de factores como las habilidades previas del estudiante, sus conocimientos, sobre la solidez de los conocimientos adquiridos y la motivación alcanzada; se requiere m{as investigación de los efectos negativos de la lúdica , pero la revisión indica que existen más efectos positivos de los juegos en la enseñanza de las matemáticas, potenciando el aprendizaje significativo.

2.3.2. Antecedentes de resolución de problemas.

La resolución de problemas matemáticos siempre ha sido el núcleo de las actividades matemáticas. Su evolución histórica revela la plena relación entre esta actividad con la enseñanza-aprendizaje de la propia matemática. Los siguientes antecedentes sobre resolución de problemas son importantes para la investigación y revelan la manera en que esta metodología ha ganado terreno en la enseñanza de las matemáticas.

Oliveros et al.(2021) exponen su experiencia derivada de la aplicación de la metodología de George Polya para el mejoramiento del desempeño académico de los estudiantes de grado noveno en una institución educativa de Barranquilla, desarrollando de forma concomitante la comprensión y la metacognición, al realizar problemas relacionados con el pensamiento lógico-matemático, con la utilización de procesos meta cognitivos, que obligan a estudiantes hay más allá de los niveles literales de la comprensión lectora.

Así, enfatizan en las cuatro fases o etapas del método recomendado por Polya: comprender el problema; concebir un plan para resolverlo; ejecutar el plan; comprobar los resultados, lo que lleva una visión retrospectiva de la forma en la forma en que se realizó el proceso y su efectividad; se utilizó un diseño cuasi experimental con grupo de control; el grupo al que se aplicó la metodología, constaba de 36 estudiar; el de control, de 36.

A partir de la comparación de los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas de diagnóstico y las aplicar después, como evaluación de la metodología, se encontró que en los estudiantes que seguían la metodología de resolución de problemas de George Polya, se obtuvo mejoría significativa en las competencias para la comprensión, planteamiento de un plan, su ejecución y análisis de los resultados de problemas de pensamiento lógico matemático.

Calvo-Ballesteros (2008) en su artículo de investigación expone la problemática que se presenta en el sistema educativo costarricense consistente en altos niveles de deserción y rezago escolar a la poca motivación de los estudiantes y de la falta de contenidos educativos atractivos; esta problemática afecta particularmente al área de matemáticas donde ha existido un enfoque academicista centrado en docente quien posee conocimiento que va a transmitir a sus estudiantes.

En este orden de ideas, una de las actividades que más dificultades causará los estudiantes es la resolución de problemas, evidenciando que, si bien los estudiantes pueden resolver las operaciones básicas fundamentales de forma mecánica, no pueden aplicarlas en la resolución de una situación problemática concreta; por ello, " La metodología empleada en la enseñanza de la resolución de problemas en matemáticas, es un elemento clave para el logro satisfactorio de los contenidos en esta área"(Calvo-Ballesteros, 2008, p.124).

Calvo-Ballesteros explica que es importante que la resolución de problemas vaya unida al aprendizaje de las operaciones matemáticas básicas, mediante actividades agradables que motiven a los estudiantes a aprender y a ir más allá de los contenidos dados, utilizando situaciones concretas y evitando abstracciones que los desmotiven; se promueve así el desarrollo de la inteligencia lógico matemática de los estudiantes.

Entonces, Calvo-Ballesteros explica que, en la resolución de problemas matemáticos, se debe promover la habilidad de los estudiantes para que relacione en la matemática con la vida, que aprendan a combinar los conocimientos previos con los conocimientos, reglas, técnicas y destrezas recién adquiridos, para resolver el problema planteado, cuya dificultad debe tener un nivel adecuado al nivel de formación del estudiante y sin embargo plantearle un reto, un esfuerzo, que les permita desplegar su creatividad.

Por otra parte, es necesario que los estudiantes puedan participar en las diversas actividades realizadas, que se diviertan, que sean capaces de justificar explicar oralmente el proceso seguido en la resolución de problemas, de aprender de sus errores y que el docente respete sus ritmos de aprendizaje; para ello, se puede emplear la metodología de George Polya, que el docente puede complementar con acciones como:

> Selección de problemas, que el docente debe realizar tomando en cuenta las características generales del grupo con el fin de contextualizar la situación problemática y ajustar el nivel cognitivo de esta en concordancia con las características; servir de guía en la resolución de los problemas dejando que el estudiante proponga las soluciones y se dé cuenta de sus errores, pero sugiriendo de acción; motivar a los estudiantes a salir adelante antes dificultades; debe ser modelo ante la resolución de problemas, mostrando optimismo y gusto ante los problemas que está resolviendo.(Calvo-Ballesteros, 2008, p.134)

Finalmente, la práctica matemática a la que se ha expuesto al estudiante en la escuela, es un factor que afecta su capacidad para resolver problemas. El anterior estudio muestra cómo cuando el profesor diseña ambientes donde se privilegia la interacción de los estudiantes y se promueve el pensamiento matemático, el alumno adquiere una visión favorable a la actividad de resolver problemas.

2.3.3. Documentos referentes emitidos por el MEN

2.3.3.1. Estándares básicos de competencias en Matemáticas

Los estándares del área de Matemáticas publicados por el Ministerio de Educación Nacional señalan algunos factores que tienen una gran incidencia en el desarrollo de las actividades de enseñanza de esta disciplina; en primer término, enfatizan que la educación debe ser abierta y para todos, lo que implica pensar en unos grupos de estudiantes heterogéneos y en consecuencia, diseñar estrategias y prácticas de aula coherentes con esa realidad, con tener en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje, y las mismas condiciones cognitivas y socioemocionales de los estudiantes (MEN, 2006).

Otro factor, centra su atención en la necesidad de ampliar la finalidad de la enseñanza de las matemáticas y llevarla al desarrollo de capacidades para afrontar el mundo laboral, tecnológico, social y político, para procurar en el estudiante una formación integral como ciudadano competente frente a los retos del siglo XXI, conllevando a pensar la matemática como herramienta para el desarrollo y puesta en marcha de la práctica de valores democráticos, donde desde la diversidad de pensamiento lógico y matemático, se pueda incursionar en la participación colectiva para la toma de decisiones que orienten la transformación de la sociedad (MEN, 2006**,** p. 48).

2.3.3.2. Competencias en Matemáticas

El desarrollo de las competencias adecuadas en matemáticas, en el marco de la sociedad del conocimiento, requiere de entornos de aprendizaje que permitan el aprendizaje significativo, basado en problemas, en entornos colaborativos, que hagan posible avanzar hacia destrezas, habilidades, más complejas (MEN, 2006**,** p. 49).

Ahora bien, es importante tener en cuenta que en el conocimiento matemático se distinguen dos tipos: el conceptual y el procedimental; esto conlleva a considerar también que la enseñanza de las matemáticas, contempla cinco procesos: Formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Además, se contempla también el desarrollo de cinco pensamientos: numérico y sistemas numéricos; espacial y sistemas geométricos; métrico y sistemas de medidas; aleatorio y sistemas de datos; variacional y sistemas aleatorios y analíticos.

de acuerdo con los lineamientos establecidos por el MEN (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Estos contienen elementos conceptuales comunes que permiten integrarlos para posibilitar su enseñanza y lograr que el aprendizaje de las matemáticas se dé a través de la articulación de los mismos. (p 50 – 57)

De acuerdo con lo anterior, en las pruebas *Saber*, se evalúa constantemente el desarrollo de las competencias conforme al componente de cada pensamiento, de tal manera que según el nivel en el que se encuentre el estudiante debe estar en capacidad de desenvolverse en los cinco procesos mencionados en el párrafo anterior.

Tabla 1. Estándares básicos de competencias grados 9 y 10

GRADO	**COMPETENCIA**
NOVENO	1. Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. 2. Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. 3. Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. 4. Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. 5. Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. 6. Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). 7. Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. 8. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. 9. Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. 10. Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. 11. Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). 12. Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. 13. Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.). 14. Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas. 15. Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. 16. Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en

	situaciones tomadas de distintas ciencias.
DÉCIMO	1. Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación. 2. Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. 3. Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. 4. Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono. 5. Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. 6. Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. 7. Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. 8. Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono. 9. Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. 10. Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta. 11. Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. 12. Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. 13. Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. 14. Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. 15. Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media. 16. Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. 17. Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos). 18. Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas. 19. Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. 20. Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición. 21. Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.

Fuente: Elaboración propia, basada en la malla de estándares curriculares del MEN

Con estos elementos de base, se precisa el desarrollo del proyecto de aula, enmarcado en los referentes teóricos que anteceden, desde el que se consolida la enseñanza de la geometría como el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, con ayuda de la matemática recreativa y la resolución de problemas, en el entendido de buscar generar en los estudiantes el gusto por la matemática y la geometría y potenciar en ellos la práctica de valores, como fundamento para la participación e interacción social como mejores ciudadanos.

3. Metodología

La metodología con la que se desarrolla el proyecto de aula contempla las modalidades de resolución de problemas y matemáticas recreativas. Las actividades se proponen mediante unas guías de trabajo en las que se consignan tanto los problemas como las actividades lúdicas. Cada sesión contempla los siguientes momentos: en primer lugar, una presentación general del tema a trabajar; un segundo momento en el que los estudiantes divididos en grupos resuelven los problemas propuestos y un tercer momento donde se discuten las soluciones y las dificultades planteadas en la guía. Las guías se diseñaron de tal forma que se relacionen unas con otras para no perder el sentido de enlace entre una actividad y otra, siguiendo una secuencia didáctica que asegure que el aprendizaje de los estudiantes sea progresivo.

El interés se centra en motivar a los estudiantes por aprender geometría, fortaleciendo además valores como el respeto, la colaboración, el diálogo y la participación activa; incentivando su creatividad, el planteamiento de hipótesis y la búsqueda de soluciones mediante el debate con sus compañeros. De esta manera se acompaña el proceso de construcción de conocimiento al facilitarles las herramientas teóricas para comprender los temas y resolver satisfactoriamente cada una de las actividades propuestas.

En las guías se contemplan tanto procedimientos heurísticos como experimentales. Respecto al procedimiento experimental, (Valiente, 2000) argumenta que el objetivo del programa de enseñanza es, desde la perspectiva constructivista, enfatizar en la manipulación de elementos y u objetos del conocimiento matemático que, además de satisfacer una necesidad específica, permitan al estudiante resolver problemas prácticos.

Este procedimiento, para el caso, se ilustra con varias actividades como por ejemplo con el geo plano, instrumento didáctico que permite construir conceptos geométricos a partir de su manipulación experimental. Estas guías estimulan a los estudiantes, con un contenido donde experimenta y conecta conocimientos nuevos con los conocimientos previos. Se utiliza un lenguaje adecuado para la edad y unas ilustraciones que puedan ayudar a su comprensión.

Un elemento importante que se considera en la metodología, es el hecho de que no todos los estudiantes aprenden de la misma forma, y cada alumno tiene su propio ritmo de aprendizaje, nivel de habilidad, diferentes intereses, motivaciones etc. Esta realidad lleva a la necesidad de personalizar la enseñanza, implicó estar atentos al desempeño grupal sin descuidar a cada estudiante particular.

En cuanto a la organización del trabajo, se hace con actividades individuales y grupales, con énfasis en el aprendizaje cooperativo; por aprendizaje cooperativo se refiere a "un amplio y heterogéneo conjunto de métodos de instrucción estructurados, en los que los estudiantes trabajan juntos, en grupos o equipos, ayudándose mutuamente en tareas generalmente académicas" (Melero & Fernández, 1995; citado por (Pliego, 2011, p.63)).

En otras palabras, esta metodología de trabajo está enfocada en una estrategia de enseñanza y aprendizaje en la que los estudiantes se familiaricen con la resolución de problemas geométricos y que mediante las actividades lúdicas comprendan la riqueza del conocimiento matemático y el placer que pueden generar en ellos, las actividades lúdicas. Es importante que el grupo comparta sus fortalezas y superen las dificultades que se presentan, puesto que el aprendizaje en estas guías promueve la autonomía y asigna gran importancia al desarrollo de ideas, así el alumno crea sus propias conjeturas, saca sus conclusiones y es capaz de analizar un argumento geométrico.

La evaluación no es cuantitativa, se utiliza la observación para identificar los obstáculos que se presentan a los estudiantes en el desarrollo de las guías y que mediante el acompañamiento se superan y entienden los conceptos involucrados. También se tiene presente la colaboración entre ellos y los aportes que dan en las presentaciones grupales. Se analizan los resultados escritos por cada estudiante, para conocer el desempeño individual y reflexionar en lo que se puede mejorar.

Las guías de trabajo se dividen en nueve, las cuales abordan diferentes temáticas de la geometría; además, algunas giran en torno a una misma temática por su contenido extenso: El concepto de semejanza en la vida cotidiana; medida de figuras geométricas rectilíneas cerradas en geometría plana (primera parte); medida de figuras geométricas rectilíneas cerradas en geometría plana (segunda parte); cubos y perspectivas; construcción de tangrams; ángulos; rectas y postulados; razón y proporción y áreas.

4. Lectura de los resultados

A continuación, se presenta el proyecto de aula realizado en la Institución anteriormente mencionada, que contiene el desarrollo de bitácoras como herramienta didáctica. Las bitácoras juegan un papel importante en esta parte del documento ya que en ellas están plasmadas las evidencias, imágenes y reflexiones de toda la intervención en el aula, las cuales se elaboraban al término de cada clase, para así tener las ideas frescas y claras.

4.1. Bitácoras y Aula

(Palomero-Pescador et al., 2010) exponen que toda practica educativa tiene su soporte teórico y su concepción del hombre y la sociedad, buscando transformar las condiciones de desigualdad e injusticia social, para lograr mejores condiciones de vida de los seres humanos; así, proponen que en la educación se integren las competencias socioafectivas y considera de capital importancia incorporar a la experiencia pedagógica el *cuaderno de bitácora* como recurso formativo; este recurso es concebido como:

> El resultado de una búsqueda, el testimonio escrito, la expresión personal y vital de una aventura de navegación por el mundo del conocimiento y de la vida, y también por la conciencia profunda, por el mundo interior, cuyos resultados se transcriben en unos textos redactados al estilo de un diario personal. Se trata de una herramienta que favorece la reflexión significativa y vivencial, que recoge informaciones, observaciones, hipótesis, pensamientos, explicaciones, sentimientos, reacciones e interpretaciones, que proporciona información sobre la vida mental y emocional y que contribuye al desarrollo profesional y sociopersonal de los estudiantes. Con él pretendemos, finalmente, que los estudiantes descubran también, y de forma vivenciada, las huellas de la investigación en la acción. (Palomero-Pescador et al., 2010, p.337)

Por otra parte, el aula suele ser una sala de tamaño variable, y debe haber suficiente espacio para albergar a los sujetos involucrados en el proceso de enseñanza: profesores y alumnos. Este espacio generalmente incluye un área para que trabajen los educadores y un área más grande donde los estudiantes pueden trabajar de la manera más cómoda para obtener los mejores resultados.

El aula es el entorno en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y es un buen espacio de transformación. Si bien el formato de enseñanza ha experimentado grandes cambios, es posible determinar que el espacio áulico ha transitado de ser un lugar en el que simplemente se transmitían conocimientos de docente a estudiantes a un verdadero espacio de aprendizaje y construcción de conocimiento donde los estudiantes se han convertido en el centro de la clase y el docente resulta ser clave para el buen desarrollo de la misma.

4.1.1. El primer encuentro: conociendo los objetos geométricos

Se comienza la actividad explicando los conceptos de punto, segmento, recta y plano; aclarando que estos conceptos son abstractos, intuitivos y por lo tanto no se definen, por ser axiomáticos. Se consideran "conceptos primitivos" y son la base sobre la que se empieza a trabajar en geometría. Se considera el espacio como un conjunto de puntos.

A partir de ahí, se da una idea de lo que son punto, recta y plano. Por medio de estas ideas primitivas se llega a las nociones de congruencia, igualdad y semejanza (proporcionalidad) en objetos geométricos rectilíneos.

Luego, tomando como punto de partida unos objetos físicos, se ilustran los conceptos de punto y de segmento, además se forman distintos tipos de triángulos de tal manera que los estudiantes aprecian sus diferencias. Es decir, con base en esa serie diversa de triángulos se ilustran las nociones de semejanza, congruencia e igualdad, como se evidencia en Ilustración 2.

Ilustración 2. Nociones de semejanza, congruencia e igualdad

Estudiantes construyen un triángulo con elementos del entorno

Fuente. Propia de la investigación

En la ilustración 2 se observa a tres estudiantes formando un triángulo con las herramientas en cuestión (metro y palos de escoba). A partir de la premisa que las nociones de congruencia e igualdad se definen de la siguiente manera: dos figuras son congruentes si al trasladarlas una sobre la otra encajan exactamente; es decir, las dos figuras tienen la misma cantidad y el mismo tamaño. La igualdad se refiere únicamente a la cantidad (medida) y la semejanza se refiere a idénticas figuras en diferente escala (tamaño) (Barnett, 1997).

4.1.1.1.Algunos referentes históricos de la geometría.

La geometría es fundamental, a través de la historia, para el desarrollo de las matemáticas que hoy se conocen. Un claro ejemplo se encuentra en el antiguo Egipto. Según los historiadores griegos Heródoto (484 a.C – 425 a.C), Estrabón (64 a.C – 24 d.C), el Faraón distribuía sus tierras en forma equitativa entre sus fieles y cobraba un tributo por el manejo de dicha parcela, este impuesto dependía del tamaño de la tierra otorgada, pero las inundaciones frecuentes del río Nilo hacían que parte de estas tierras se anegaran. Para resolver este problema había unos agrimensores que los griegos, luego llamarían “arpédonaptes” los cuales tiraban “cuerda” para poder medir de nuevo la parcela y así cobrar el tributo con el nuevo tamaño de dicha tierra.

Conforme a Heródoto y Estrabón, este proceso operacional empírico cotidiano de la cultura egipcia es de donde brotan los objetos geométricos de la geometría euclidiana (punto, segmento y recta); la geometría tiene, por tanto, sus raíces en la mención de la tierra, en la agrimensura y los griegos son los primeros en intentar encontrar razones lógicas y relaciones entre sus elementos, trabajo que culminó con el libro de *Los Elementos* atribuido a Euclides (Barnett, 1997).

La geometría griega nace como una rama de las matemáticas que no está ligada a lo empírico como lo estaba en la cultura egipcia y en otras culturas. El nacimiento de la geometría como una ciencia abstracta, se le debe a Euclides con su libro *Elementos* del siglo III A.C, el cual es uno de los libros de texto más divulgado en la historia y el segundo en número de ediciones publicadas, después de la biblia.

En el primer libro, Euclides desarrolla 48 proposiciones a partir de 23 definiciones (como punto, línea y superficie), 5 postulados y 5 nociones comunes (axiomas).

Las nociones comunes de Los *Elementos* son:

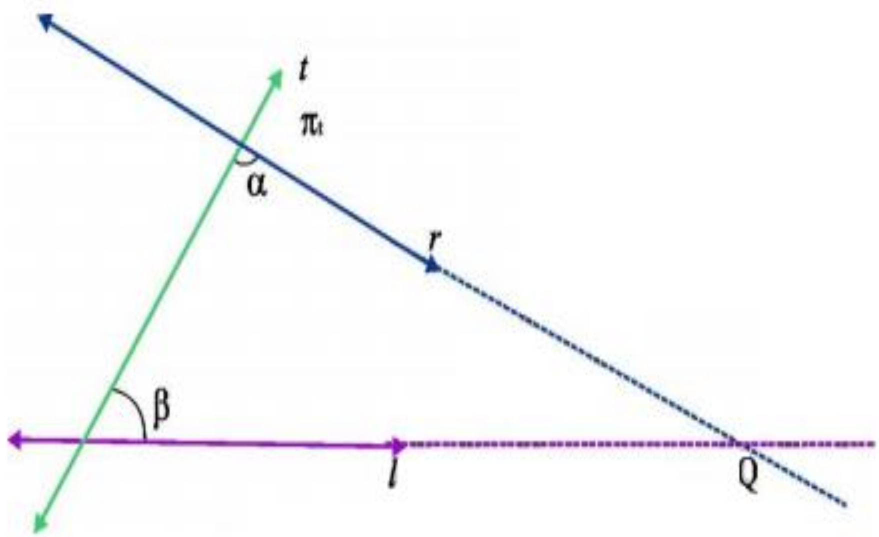
1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si se añaden iguales a iguales, los todos son iguales.
3. Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Los postulados de Los *Elementos* son:

1. Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.
2. Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Postulado de las paralelas. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos. (Euclides, 2009)

Ilustración 3. Postulados de Los Elementos

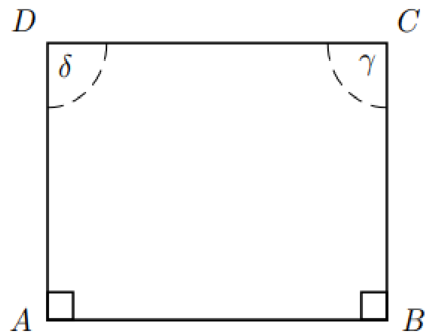


Fuente. Propia de la investigación.

El quinto postulado de Euclides tiene muchas proposiciones equivalentes, una de fundamental importancia es conocida como El postulado de la paralela de Playfair “Por un punto exterior una recta pasa una paralela a la recta y sólo una.” John Playfair (1748, 1819) (Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 2017).

El quinto postulado ha causado grandes conmociones desde la época de los griegos. Muchos geómetras pensaron que quizás podría deducirse como teorema a partir de los restantes axiomas o postulados. Después de centenares de años de intentos de “demostrar” el postulado a partir de los otros cuatro postulados, se concluyó que cada uno se basaba en una suposición equivalente al mismo.

Ilustración 4. Cuadrilátero birrectángulo isósceles.



Fuente. Propia de la investigación

Según los historiadores de las matemáticas como Wallis, Lambert, Playfair, el quinto postulado presentaba en su versión original algunos problemas; la forma como estaba escrito, donde aparentaba ser más un teorema que un postulado; con una estructura de antecedente y consecuente. Su recíproco, la proposición 17 (*En todo triángulo, la suma de dos ángulos cualesquiera es menor que dos rectos*) era verdadera y demostrable, por lo cual se decía que la proposición misma debía ser verdadera. Los intentos de demostración fueron de dos formas, demostración directa y reducción al absurdo, este último es negando el postulado, en donde se destacó el matemático Saccheri (1667 -1733) utilizando el cuadrilátero birrectángulo isósceles (ilustración 4) para crear 3 hipótesis: ángulo recto, ángulo agudo y ángulo obtuso; con el fin de encontrar una contradicción en dos de sus tres suposiciones y así concluir que la única hipótesis posible era la Euclidiana (ángulo recto). Dado que con las dos hipótesis no llegaba a una contradicción, sino que encontraba más problemas, esto conllevó a desarrollar otras teorías, un siglo después se llamarían geometrías no euclidianas. Posteriormente, gracias a los aportes de otros matemáticos como Riemann (1826-1866) y Klein (1849-1925) se estructuraron y se dividieron en:

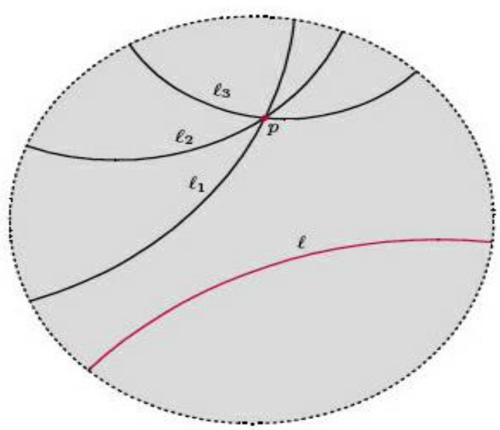
- Geometría esférica: Por un punto P exterior a una recta L no pasa ninguna paralela.

- Geometría hiperbólica: Dado una recta L y un punto P, existe al menos dos rectas A, B distintas que pasan por un punto P y son paralelas a la recta L.
- Geometría elíptica: (Ruiz, 1999) Dada una recta L y un punto P externo a L, todas las rectas que pasan por P intersecan a L. (Recalde, 2017)

Por lo anterior resulta que el quinto postulado de Euclides, no es del todo cierto; un ejemplo claro se muestra en el modelo de la geometría hiperbólica ideado por Poincaré, el cual representa al plano como el interior de un círculo, pero las rectas están representadas por arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia borde, en otras palabras, siempre hay al menos dos rectas distintas que pasan por ***p*** y las cuales no intersecan a ***l***, visualizar *Ilustración 5.*

En la geometría hiperbólica se define como "líneas paralelas" aquellas rectas infinitas trazadas dentro de un plano hiperbólico que no se cruzan jamás. Esto se puede ver en la siguiente imagen.

Ilustración 5. Plano hiperbólico, en una geometría hiperbólica.



A través de un punto p externo a una recta dada se puede trazar no sólo una sino una cantidad infinita de rectas paralelas a la recta dada.
Fuente. Propia de la investigación

Después de este breve recuento histórico se abordan las actividades realizadas en esta primera sesión.

4.1.1.2.Desarrollando la noción de semejanza.

4.1.1.2.1. Actividad A: semejanza y proporcionalidad.

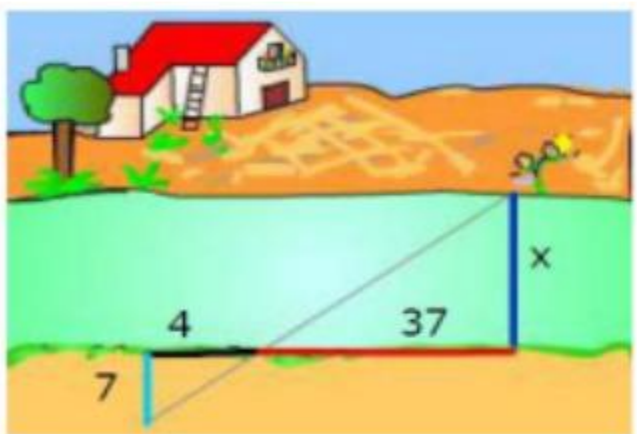
El objetivo de esta actividad es introducir la noción de semejanza, la cual, está ligada a la noción proporcionalidad (dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados correspondientes proporcionales).

Para tal propósito se planteó el siguiente problema para que lo discutieran en grupos de 4 estudiantes.

- Juan quiere construir un puente sobre un río (imagen 6).

  ¿Cuál sería la distancia desde donde está Juan hasta el otro lado del río? (la distancia corresponde exactamente a encontrar el valor de x).

Ilustración 6. Semejanza y proporcionalidad

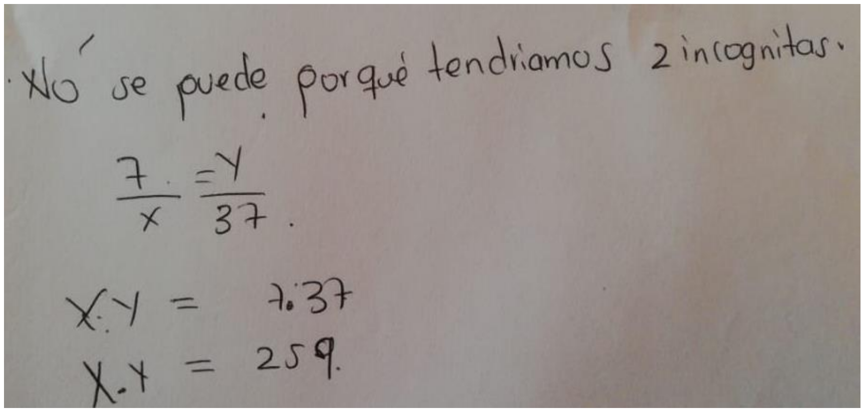


Construcción de puente sobre río (triángulos semejantes)

La regla tres, simple, es una forma de resolver problemas de proporcionalidad entre tres valores conocidos y una incógnita, estableciendo una relación de proporcionalidad entre todos ellos; en esta actividad se observó que la mayoría de los estudiantes relacionaron estos dos conceptos (proporcionalidad y regla de tres simple). Esto es posible que se haya dado así, en razón a que en la imagen se observa claramente tres valores establecidos y uno desconocido.

- ¿Si suprimo cualquier otro valor que se encuentra en la imagen, se podrá encontrar el valor de x?

Ilustración 7. Ecuación con dos incógnitas



Respuesta de la mayoría de estudiantes

Es correcta la afirmación de todos los estudiantes, puesto que, dada la ecuación establecida por ellos, si se suprime cualquier valor queda una ecuación con dos incógnitas, y entonces con infinitas soluciones.

4.1.1.3. La noción de semejanza desde lo empírico.

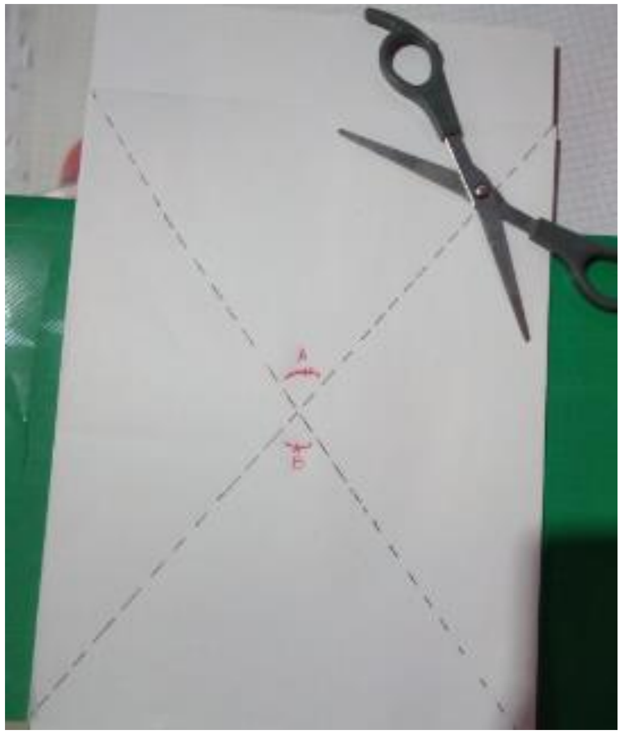
4.1.1.3.1. Actividad B: semejanza, igualdad y congruencia.

El objetivo de esta actividad es introducir la noción de semejanza de una manera empírica.

Para este propósito se planteó la siguiente actividad:

En una hoja dibuje dos líneas de tal forma que se crucen en un punto y los bordes de la hoja sean los lados de los dos triángulos que se van a formar, (utilice una regla para esto). Dele un nombre a cada triángulo (por ejemplo, el primer triángulo llámelo A y al segundo llámelo Z) recorte estos triángulos y responda: ¿Son semejantes estos triángulos?, ¿Existe una relación con respecto a sus ángulos?, ¿Existe una relación con respecto a sus lados?

Ilustración 8. Noción de semejanza de manera empírica



Triángulos A y B

En esta actividad se explicó a los estudiantes cómo deberían realizar los trazos de las rectas que se cruzaban en la hoja, de tal manera que se formaran dos triángulos, luego los debían recortar para sobreponerse y así darse cuenta que los triángulos en algunos casos son semejantes y en otros congruentes.

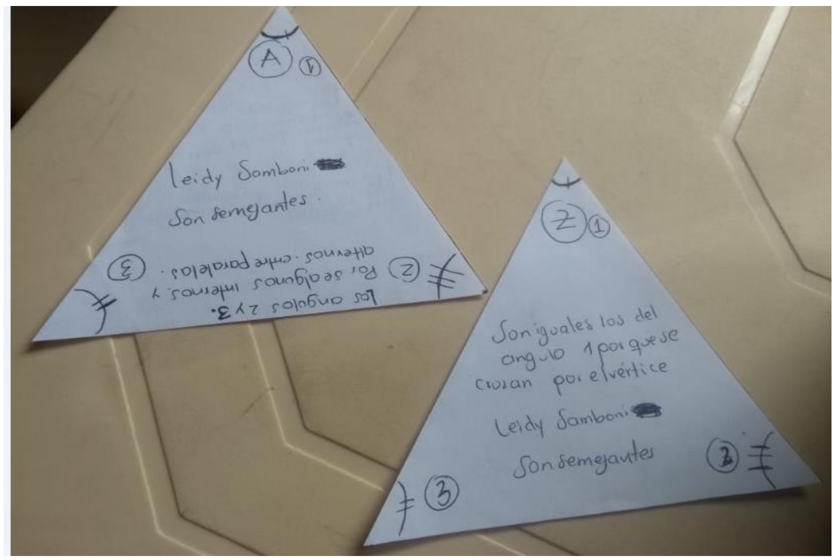
Posteriormente, teniendo los dos triángulos, y al compararlos pudieron responder las tres preguntas de esta actividad: ¿Son semejantes estos triángulos?

La mayoría de los estudiantes sobrepusieron los triángulos para inferir que, si eran semejantes, debido a que tenían la misma forma, diferente tamaño y sus ángulos son iguales; de esta manera respondieron al interrogante. Además, en algunos casos los cortes generaron triángulos congruentes (encajaban perfectamente) y por consiguiente respondieron que eran semejantes.

1. ¿Existe una relación con respecto a sus ángulos?

Algunos utilizaron la respuesta anterior para guiarse en esta pregunta y encontrar la relación de sus ángulos. Así mismo se dieron algunos casos donde ellos tomaron las nociones de ángulos internos y externos, ya que al hacer el corte se dieron cuenta que los triángulos A y Z eran iguales. Como se ilustra en la ilustración 9.

Ilustración 9. Triángulos iguales.

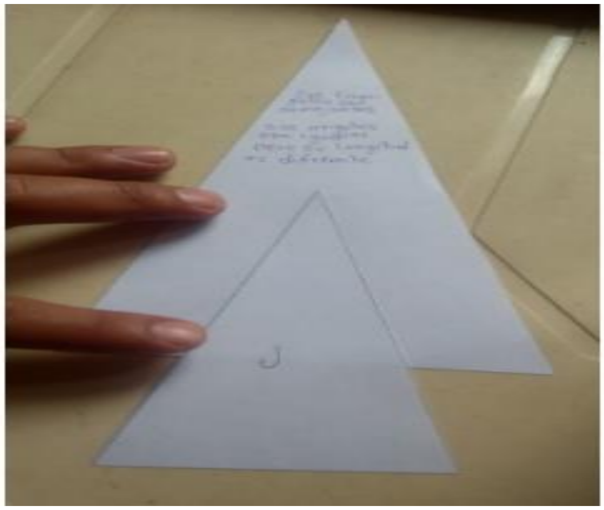


¿Existe una relación con respecto a sus lados?

De igual manera a las preguntas 1 y 2 los estudiantes superpusieron los triángulos y utilizaron la noción de congruencia e igualdad para responder acertadamente con respecto a los lados del triángulo.

Finalmente, los estudiantes llegaron a la conclusión que los triángulos eran semejantes porque sus ángulos son iguales, aunque sus longitudes no. Por otra parte, algunos estudiantes, por la forma de recortar los triángulos se dieron cuenta que estos son congruentes, es decir, sus ángulos y longitudes iguales.

Ilustración 10. Triángulos semejantes



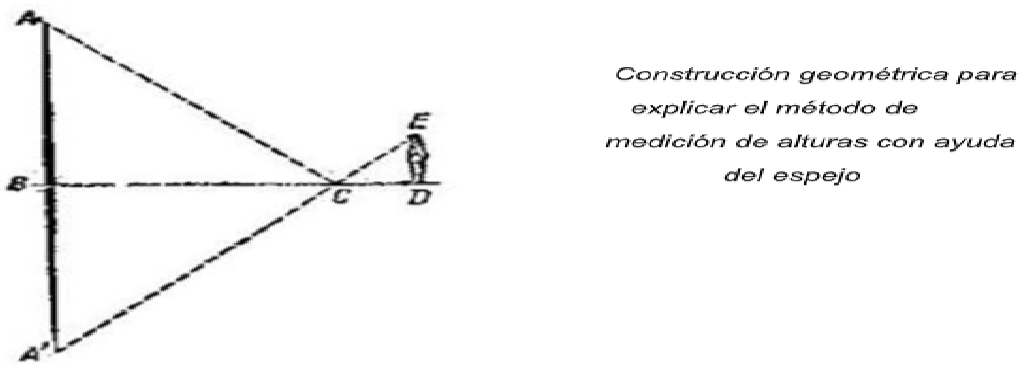
4.1.1.4. Introduciendo la noción de semejanza a través de un problema práctico.

4.1.1.4.1. Actividad C: reflexión con ayuda de espejos.

El objetivo de la actividad es usar la noción de semejanza para resolver un problema práctico. Para este propósito se planteó la siguiente actividad:

- Se utiliza un espejo para hacer una medición, en este caso la altura de un estudiante o cualquier otro objeto que elijan. Este método se basa en el concepto de semejanza entre triángulos y en el fenómeno de la reflexión de la luz. Escoja un compañero o compañera que tenga una altura diferente a la suya y utilizando el espejo y un metro trate de encontrar, sin hacer la medición directa, la estatura de su compañero o compañera. ¿Cómo creen ustedes que se pueden utilizar estos objetos para este objetivo? Discutan entre ustedes y analicen los objetos geométricos que permiten encontrar este número desconocido. ¿En este caso, qué tipo de triángulos creen ustedes que aparecen en escena? Luego realice directamente la medición de su compañero o compañera y saquen conclusiones. ¿Qué tan cercano es el número que encontraron a la estatura real de su compañero o compañera? ¿Qué limitaciones y problemas le encuentran al método? ¿Este método se puede utilizar para hacer mediciones que no es posible realizar haciendo la medición directa? (piense por ejemplo en las pirámides mayas o egipcias) Piense en la utilidad que tiene la geometría en el mundo real

Ilustración 11. Medición con ayuda de espejos.

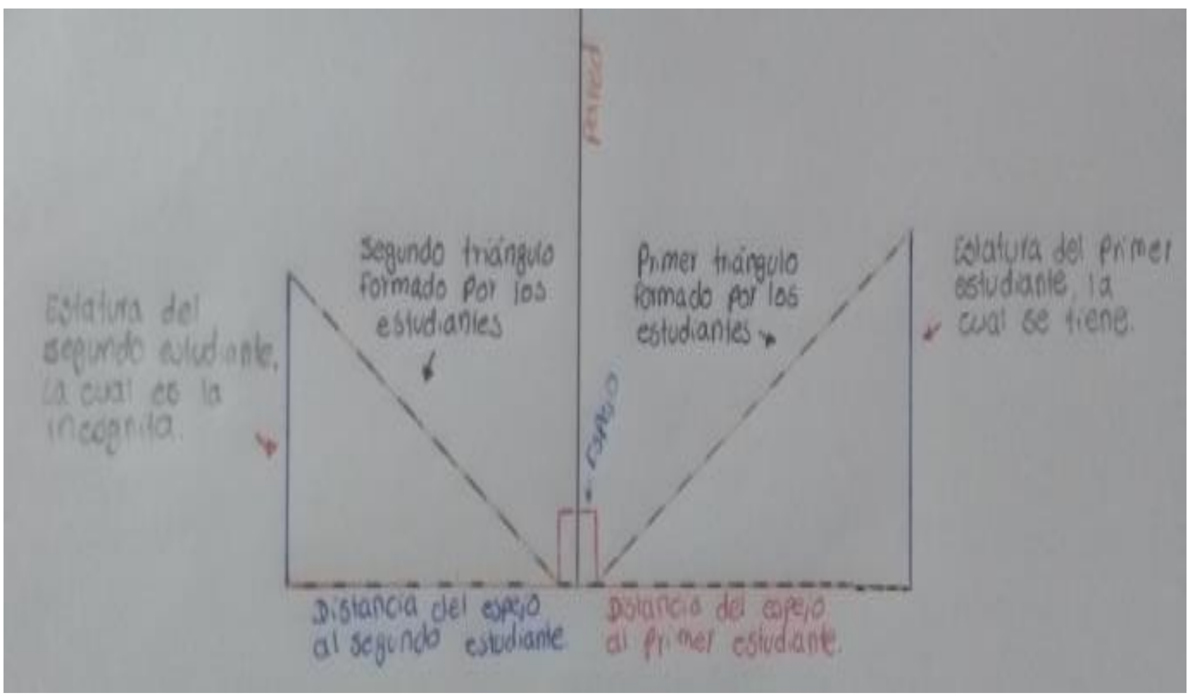


Para esta actividad se utilizaron espejos y metros. Se dio un tiempo para que pudieran conjeturar ¿cómo podrían utilizar estos elementos para medir la estatura de algún compañero, sin hacer la medición de manera directa? Algunos grupos (en su mayoría conformados por 4 estudiantes) establecieron la siguiente estrategia: un estudiante que tenía la información de su estatura se visualizó de cuerpo completo en el espejo, el cual había sido acomodado sobre una pared y su base el piso (teniendo en cuenta la altura del espejo), luego midieron la distancia del estudiante al espejo. Este proceso se hizo de igual manera con un estudiante que no sabía su estatura. Con los datos obtenidos respondieron el interrogante percatándose del hecho de que se podía formar un triángulo.

Otro grupo de estudiantes trató de hallarlo con los datos del primer estudiante quien conocía su estatura, la distancia del espejo al estudiante y aplicando el teorema de Pitágoras encontrar la hipotenusa, este procedimiento se concluyó, pero no podían hacer lo mismo con el segundo estudiante ya que contaban con dos incógnitas (la estatura del estudiante y la hipotenusa del triángulo realizado). Aunque el método utilizado por los estudiantes es válido, se afianzaron en encontrar la hipotenusa de los dos triángulos formados, es por eso que después de un largo tiempo de observación se vio la necesidad de encaminarlos por otra idea, la cual se basa en la proporcionalidad. Es decir, se insiste en el hecho de que los estudiantes reconocieran que esta actividad no estaba alejada de las anteriores; sino que era una aplicación de ellas. Finalmente lograron armar su estrategia, la cual estaba basada en formar dos triángulos semejantes con la utilización del espejo utilizando la proporcionalidad con los datos obtenidos.

La distancia del espejo al primer alumno es proporcional a la distancia del espejo al segundo estudiante, así como la altura del primer estudiante es proporcional a la estatura del segundo estudiante, como se observa en la imagen:

Ilustración 12. Solución de la actividad de medición con ayuda de espejos.



A continuación, una imagen donde dos alumnas están haciendo la actividad:

Ilustración 13. Estudiantes en desarrollo de la actividad de medición con espejos.

4.1.1.5.Reflexión sobre las actividades.

La etapa escolar es una de las más prolongadas en la vida de niños y niñas, más aún, la etapa de la adolescencia, donde sufren muchos cambios, están distraídos y posiblemente pensando en otras cosas. Esto puede conllevar a la dificultad de ellos para aprender matemáticas o las áreas relacionadas con ella. El método tradicional para enseñar esta asignatura es un método de cálculo frío y abstracto, lo que provoca que los menores trabajen de una manera individual con mucho desinterés y esto conlleva a resultados negativos.

Con respecto a estas actividades se pudo observar: en algunas ocasiones los estudiantes no les gustaba trabajar de forma grupal, esto se debió posiblemente a que no se conocían pues podían ser de diferentes grados y les daba pena interactuar. De igual manera, no hubo esa interacción por parte de ellos con el grupo de estudiantes en práctica, quizás, afirmando el hecho que vienen de una enseñanza tradicional, donde el profesor es el emisor y el estudiante el receptor.

En las actividades, la mayoría de los estudiantes relacionaron la noción de proporcionalidad y la regla de tres, debido a que lo recordaron de sus clases de matemáticas y por ende fue más satisfactorio este tema.

Por otra parte, algunos grupos no resolvieron en su totalidad las preguntas debido a que se centraron en hacer cálculos sin entender la situación. Se observó que una minoría, aún no tiene las tablas de multiplicar muy claras. Además, hay errores en las operaciones algebraicas que conducen a obtener malos resultados, también, es importante resaltar que los estudiantes carecen de un buen nivel de lectura.

La metodología de matemática recreativa, fue aceptada por los estudiantes, la cual busca despertar destrezas y el gusto por esta asignatura, donde el mayor interés es desarrollar las capacidades y habilidades de los estudiantes, siempre con un acompañamiento del profesor, donde el papel de este sea como el de un dinamizador. (ver anexo 1: el concepto de semejanza en la vida cotidiana, pág.143).

4.1.2. Midiendo figuras geométricas con el Geo-plano.

El tema a desarrollar en la sesión fue la medida de segmentos y figuras geométricas planas, por lo cual fue necesario retomar los conceptos de semejanza, congruencia e igualdad; de igual manera distinguir las diferencias entre los conceptos de perímetro y área., finalmente, mostrar cómo surgen las fórmulas de área de distintas figuras geométricas y cómo se relacionan. Para llevar a cabo estas actividades recurrimos a la herramienta didáctica el Geo-plano.

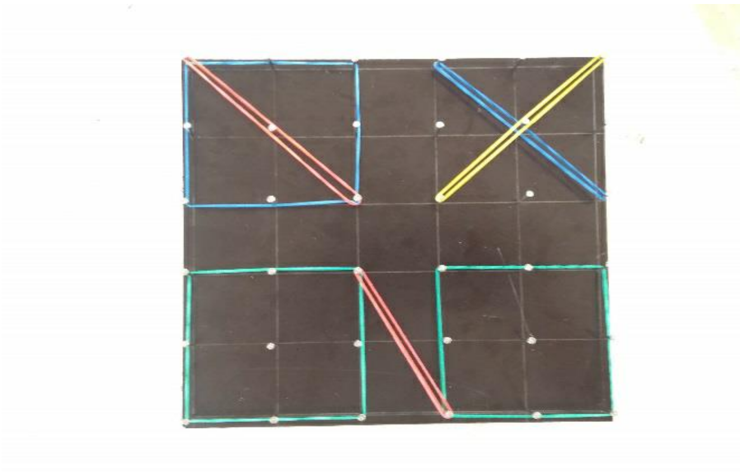
4.1.2.1.Herramienta didáctica[1]: Geo-Plano.

El Geo-plano fue un instrumento creado por el matemático egipcio Caleb Gategno en 1960 para enseñar geometría de una manera más práctica y manipulativa. Aunque hoy en día la mayoría de Geo-Planos son de plástico, el original consistía en un tablero cuadrado de madera con clavos formando una trama, de tal manera que estos sobresalen y se podían enganchar gomas elásticas entre ellos para representar diferentes figuras geométricas. (Lagunilla, 2013)

[1] Tipo de material del que hace uso el docente, con el único objetivo de hacer proceso de enseñanza más dinámico y pedagógico.

Para la actividad que se propuso, se construyó un Geo-Planos con cuadros de madera de 20 cm por 20 cm, en los cuales se hizo una cuadrícula de cuatro cm y en cada intersección se colocó un clavo. Ver ilustración 14.

Ilustración 14. Construcción de Geo plano



4.1.2.2.Geo-Plano: Función.

En la primera parte de la sesión, el geo-plano sirvió para explicar a los estudiantes, los conceptos de igualdad y desigualdad de segmentos[2] ; así como la medida de figuras geométricas rectilíneas. Este instrumento permitió no sólo reafirmar las nociones de congruencia e igualdad en figuras geométricas de una y dos dimensiones, sino la de semejanza. Por ejemplo, en la imagen 15, se ilustran dos rectángulos, los cuales se representan con distintos colores de gomas elásticas, permitiendo a los alumnos observar la noción de semejanza entre ellos, y en la imagen 16 se observan cuatro segmentos no congruentes.

Ilustración 15. Construcción de rectángulos

[2] recta que está comprendida entre dos puntos o dos clavos.

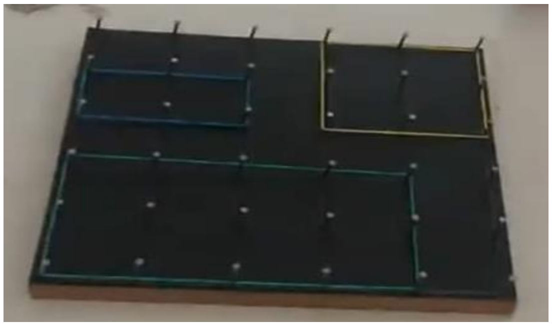
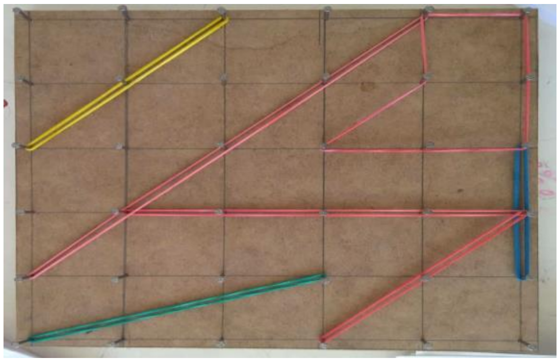
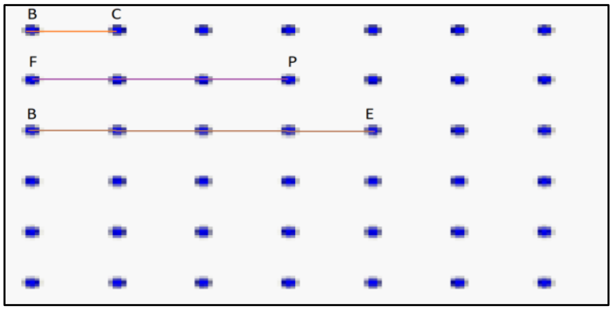


Ilustración 16. segmentos no congruentes



Con este dispositivo también se pueden medir, sumar y restar segmentos, calcular áreas y perímetros de figuras rectilíneas (dando un valor numérico de distancia entre clavo y clavo). En la imagen 17 se ilustra cómo se pueden sumar segmentos utilizando el Geo-Plano. Por ejemplo, el segmento BE corresponde a la suma del segmento BC con FP.

Ilustración 17. Suma de segmentos



El dispositivo es muy ilustrativo en tanto que permite comparar figuras geométricas y mostrar las diferencias entre los conceptos de igualdad y congruencia que resultan coincidentes en el caso de la medición de segmentos. Es interesante también manipular estos objetos para evidenciar, en el caso de la igualdad, propiedades como las que se mencionan a continuación:

Identidad: todo segmento es igual así mismo $AB = BA$

Recíproca: $AB = CD$, entonces $CD = AB$

Transitiva: Si $AB = CD$ y $CD = EF$ entonces $AB = EF$

Para llevar a cabo las actividades se opta porque los estudiantes trabajen en grupos, de tal manera que en cada sesión los grupos conformados tengan diferentes integrantes, buscando así una mejor socialización y debate dentro de ellos para complementar adecuadamente las actividades.

4.1.2.3.Relacionando conceptos geométricos en el Geo-Plano.

4.1.2.3.1. Actividad 1.

Para la primera actividad con el geo-plano se propuso una serie de cuestiones que pudieran ilustrar las ideas de los estudiantes alrededor de las nociones primitivas de la geometría, la manera de comparar segmentos y la diversidad de figuras geométricas que podrían construir con este instrumento.

1. ¿Qué representa geométricamente los clavos del geo-plano?
2. ¿Qué representan dos clavos unidos por una goma elástica?
3. Después de formar un cuadrado y un rectángulo en el Geo-plano, se abordó la pregunta:
   - ¿La distancia diagonal entre dos clavos es mayor o menor que las componentes horizontales y verticales de la figura?
   - ¿podría dar una medida numérica a tales distancias?

4. ¿Qué figuras geométricas se formarán si se unen tres o cuatro puntos con las gomas elásticas?

5. ¿Qué otras figuras se formarán si se unen 5,6 y 7 hasta n puntos?

En los dos primeros ítems no hubo alguna dificultad en las respuestas, porque al ser conceptos ya mencionados anteriormente y explicados de una forma que se relacionaban con objetos cotidianos, los estudiantes pudieron fácilmente identificar y relacionar los conceptos de punto y segmento con los componentes del geo-plano, clavos y unión de clavos por gomas elásticas; Así, llegaron a la conclusión que la herramienta utilizada estaba ligada a la noción de plano en geometría , y por ende tenía el nombre Geo-plano.

En el tercer punto, Antes de comenzar se les pregunta el concepto de diagonal, a lo cual responden (trazar una línea de una esquina a otra esquina en figuras como cuadrados o triángulos), ya que estas figuras eran las más conocidas y utilizadas por ellos, teniendo en cuenta sus ideas accedimos a ampliar el concepto de diagonal[3] para que así pudieran desarrollar mejor el ejercicio. De este modo los estudiantes construyeron figuras a su conveniencia como cuadrados o rectángulos en tamaños grandes, donde concluyeron, a partir de la simple observación, que la diagonal es mayor que cada uno de los catetos. Sin embargo, los que construyeron cuadrados o rectángulos más pequeños notaron que la simple observación no les permitía sacar conclusiones.

Se sabe que en geometría la simple observación no funciona, pues esta disciplina parte de axiomas y postulados, entonces para verificar una proposición es menester partir de ellos y después de una serie de pasos lógicos llegar a ella. Por ejemplo, con el geo-plano se puede verificar visualmente que la diagonal del lado del cuadrado es mayor que un lado, pero ello no es correcto por lo que se acaba de decir. Una manera de hacer la comprobación geométrica es a través del teorema de Pitágoras que permite despejar la diagonal y ver que siempre va a ser mayor que el lado del cuadrado o rectángulo. En las ilustraciones 18, 19 y 20 se muestra la forma

[3] Es una recta o segmento que une dos ángulos que no están en la misma cara en una figura geométrica.

que los estudiantes utilizaron el teorema de Pitágoras para demostrar que la diagonal de un cuadrado o rectángulo es mayor que sus lados verticales y horizontales.

Ilustración 18. Diagonales

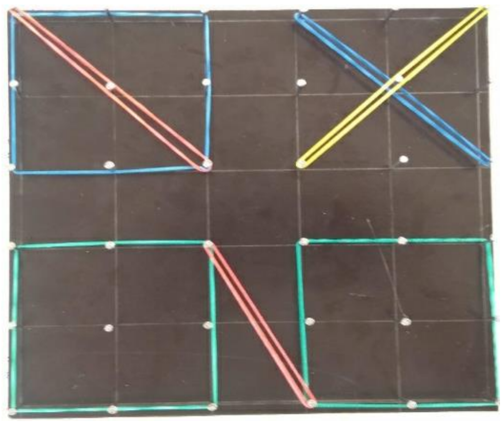


Ilustración 19. Respuesta ítem 3

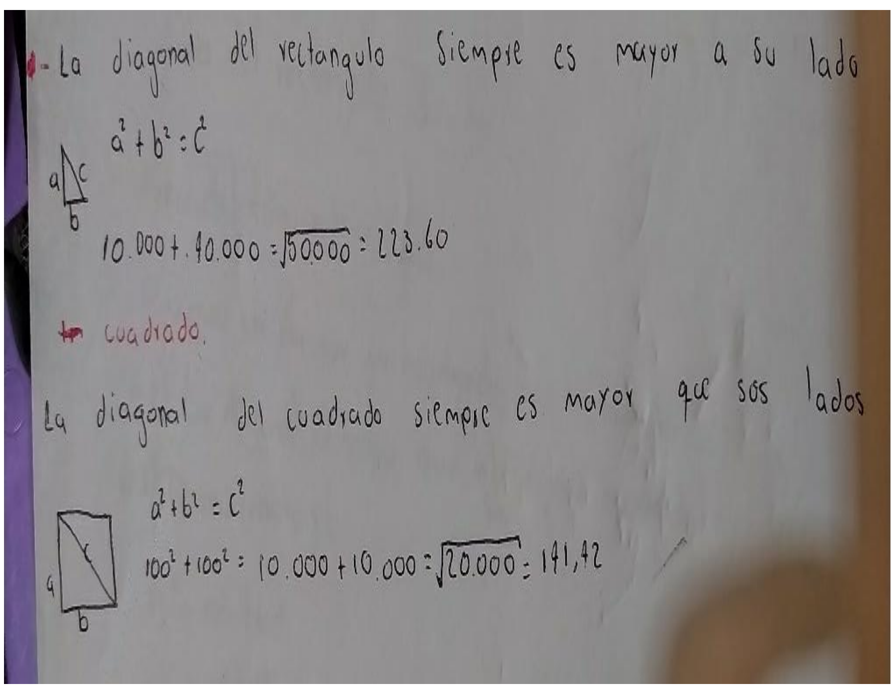
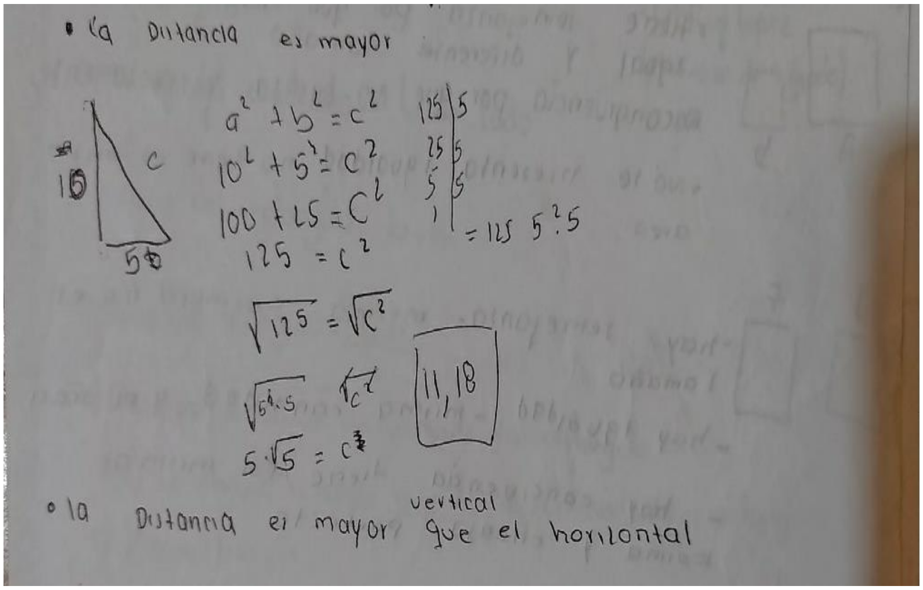
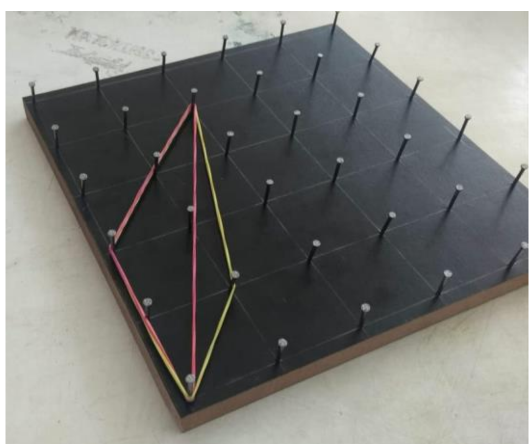


Ilustración 20. Respuesta ítem 3



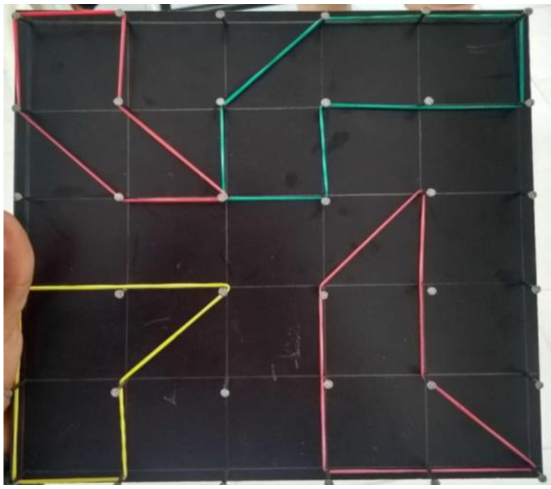
En la cuarta pregunta, todos los estudiantes formaban figuras geométricas cerradas como triángulos y cuadrados de diferentes tamaños y formas; pero en el punto donde se les pedía que unieran más puntos, sólo formaron figuras geométricas regulares como pentágonos, hexágonos y heptágonos, ver ilustración 21.

Ilustración 21. Figuras Armónicas



En este aspecto, es interesante conocer por qué los estudiantes sólo ven lo regular y armónico. ¿Será que los seres humanos tenemos la mente acostumbrada a lo simétrico y convexo? O ¿será que esto es parte de la educación que recibimos? Debemos decir que sólo un pequeño grupo escapó a lo usual y construyó figuras geométricas irregulares, es decir, que no son convexas, teniendo en cuenta que: Una figura cerrada en el plano es convexa, si para cualquier par de puntos en ella, el segmento que los une queda contenido en la figura. o simplemente figuras anteriores (triángulos, cuadrados) las cuales se formaban uniendo los segmentos prolongadamente por algún lado. (Morena, 2014)

Ilustración 22. Figuras no convexas



4.1.2.4. Construir e identificar los segmentos en el Geo-Plano.

4.1.2.4.1. *Actividad 2.*

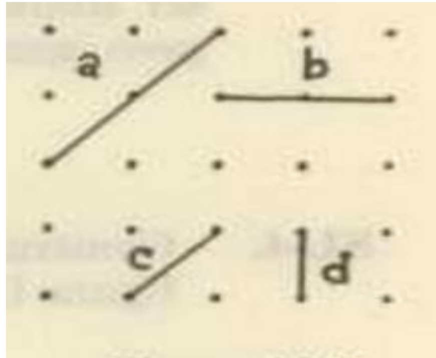
En esta actividad fueron propuestos algunos ejercicios, los cuales ilustraban las nociones de semejanza, congruencia e igualdad y algunos conceptos generales de las figuras geométricas, así como también proporcionarán las características que deben poseer los segmentos y las figuras rectilíneas que construyen en el Geo-Plano:

1. Construir algunos segmentos[4] en diferente posición en el geo-plano, asignarle un nombre a cada uno de ellos (a, b, c, d…etc.) y compararlos (por parejas) usando la noción de distancia que recuerdan de sus cursos de geometría.

[4] recta que está comprendida entre dos puntos o clavos.

Ejemplo:

Ilustración 23. Construcción con segmentos

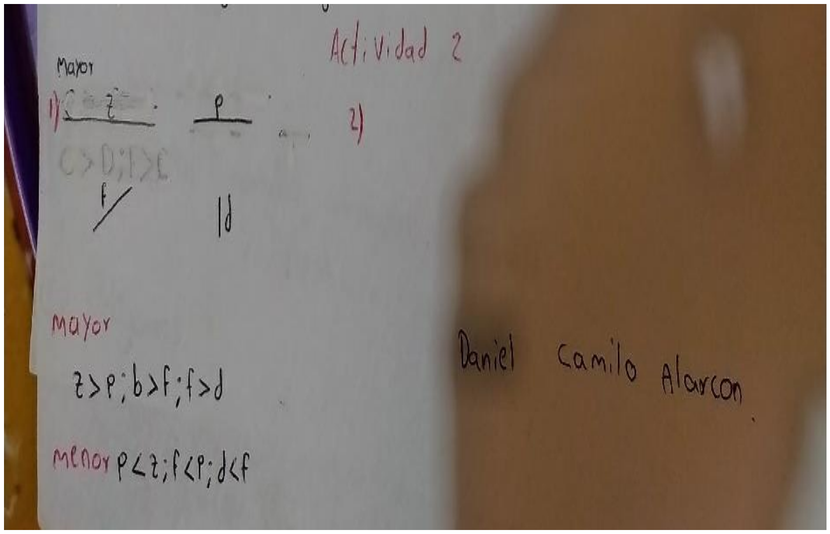


Mayor: $a > b;\ b > c;\ c > d$ menor: $b < a;\ c < b;\ d < c.$

2. Construir, en el Geo-Plano, figuras geométricas rectilíneas cerradas, que ilustran las nociones de igualdad, congruencia y semejanza.
3. Construir un cuadrilátero, de tal forma que al liberar un extremo del vértice de la banda elástica se forme un triángulo isósceles.
4. Construir un cuadrilátero, de tal forma que al liberar un extremo del vértice de la banda elástica se forme un triángulo escaleno.

En esta segunda actividad, un grupo de estudiantes al no saber las medidas de los segmentos, corroboraron cual era mayor o menor trasladando cada segmento encima del otro por medio de una cuerda, así identificaron experimentalmente cuál segmento era mayor que el otro. No obstante, la otra parte de los grupos fueron más ingeniosos, ya que le asignaron valores a la distancia que había de clavo a otro clavo, y así resolvieron qué segmento era mayor utilizando el Teorema de Pitágoras, que anteriormente había ayudado a identificar que toda diagonal de un rectángulo o cuadrado siempre es mayor que alguno de sus lados; Sin embargo, aun teniendo claro el procedimiento, la mayoría se confundía en la simbología utilizada para comparar segmentos (mayor>; menor<). En la siguiente imagen se muestra una corrección de un grupo de estudiantes.

Ilustración 24. Corrección



Para ilustrar las nociones de semejanza, congruencia e igualdad los estudiantes no tuvieron problemas y los representaron con variados ejemplos.

Ilustración 25. Solución actividad 2

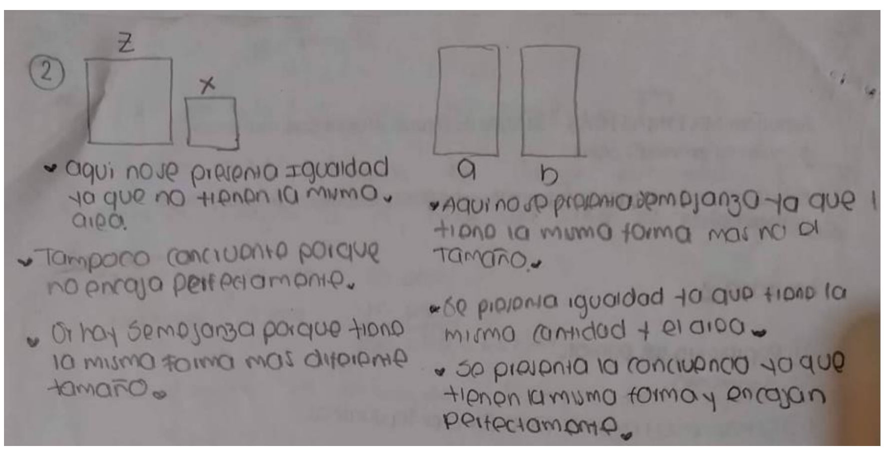
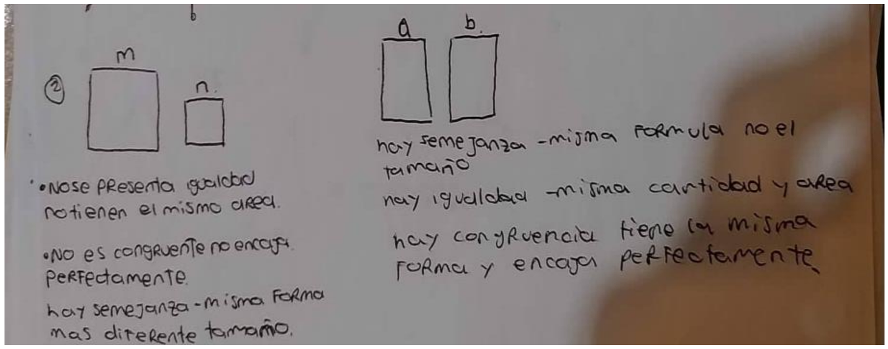
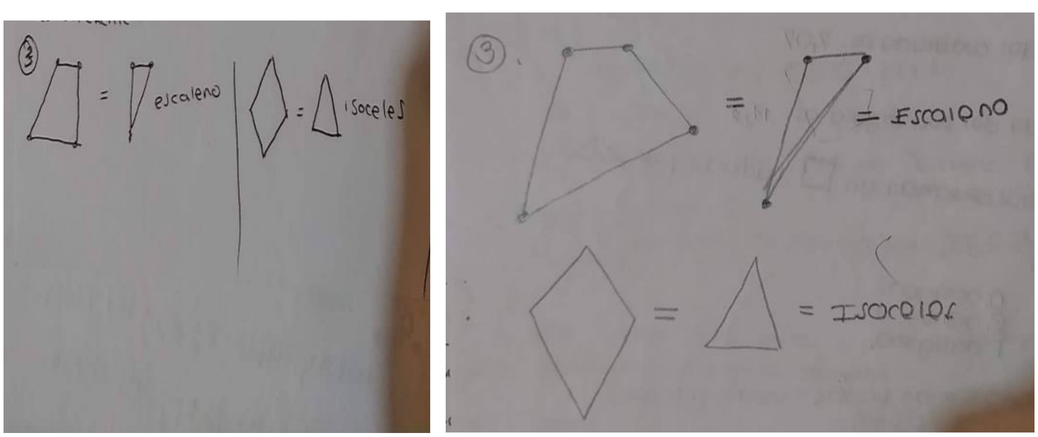


Ilustración 25. Solución actividad 2



Cabe resaltar que en el segundo y tercer ejercicio mencionados anteriormente los estudiantes no los resolvieron a cabalidad, debido a que no tenían claridad sobre el significado de la palabra cuadrilátero, aunque los que sí lo hicieron tomaron como cuadriláteros a figuras geométricas como cuadrados y rectángulos, de esta manera al soltar un extremo de estas figuras siempre se formaran triángulos escalenos o isósceles, dejando de lado formar el tipo de triángulo equilátero; de esta manera, se puede afirmar que los estudiantes siempre construyen figuras representativas que cotidianamente observan en sus clases como lo son cuadrados y rectángulos que cumplen con el significado de cuadrilátero. Las ilustraciones siguientes recogen la respuesta de los estudiantes que estaban familiarizados con los triángulos isósceles y escalenos.

Ilustración 26. Solución actividad 2

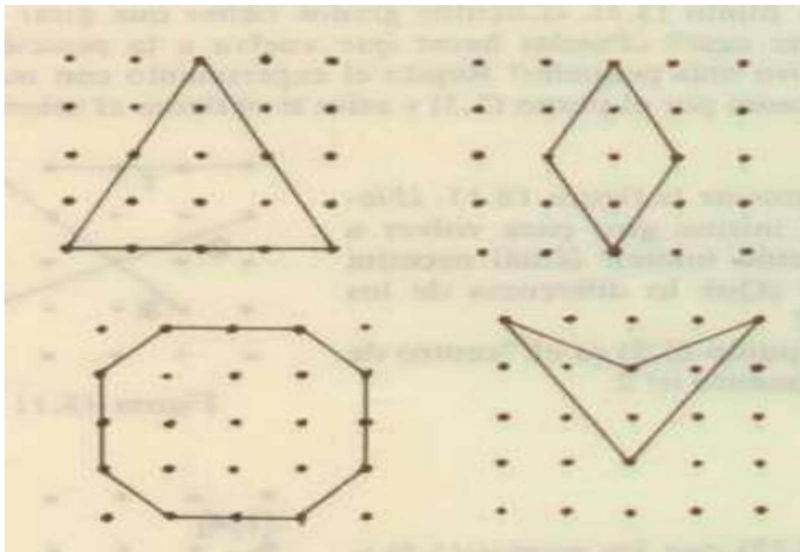


4.1.2.5.Medida de figuras geométricas rectilíneas cerradas en geometría plana.

4.1.2.5.1. *Actividad 3.*

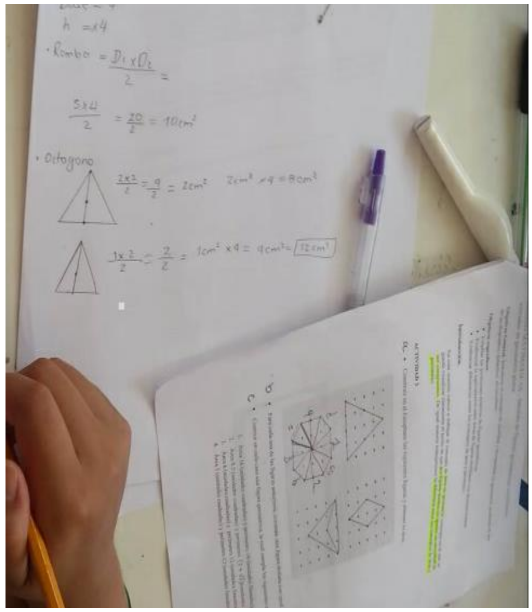
Construir en el Geo-plano las siguientes figuras y obtener su área; asignando una unidad de medida arbitraria a la distancia entre los clavos

Ilustración 27. Figuras en el Geo plano



Como era de esperarse cada grupo asignó un valor distinto a la distancia entre clavos, pero no se les ocurrió usar medidas distintas a las usuales, para la escogencia de la unidad de medida, sino que optaron por las mismas del sistema métrico decimal: en algunos casos 2 cm, en otros 5 cm, etc. Para el caso de la primera figura la mayoría de grupos tuvieron la idea de dividir el triángulo en dos triángulos congruentes y rectángulos, ya que podían aplicar directamente la fórmula del área a un solo triángulo y a su vez encontrar la de los dos, luego de encontradas sus respectivas áreas las sumaban para encontrar el área total de la figura.

Ilustración 28. Respuesta de estudiantes



Para la figura siguiente algunos grupos optaron por utilizar la misma estrategia de dividir las figuras en otras, las cuales fuesen congruentes, para que de esa manera quedara más fácil encontrar el área; algunos las dividieron en 2 o 4 triángulos rectángulos que luego sumarian respectivamente sus áreas para obtener el área total de la figura pedida

Ilustración 29. Geo plano 1.

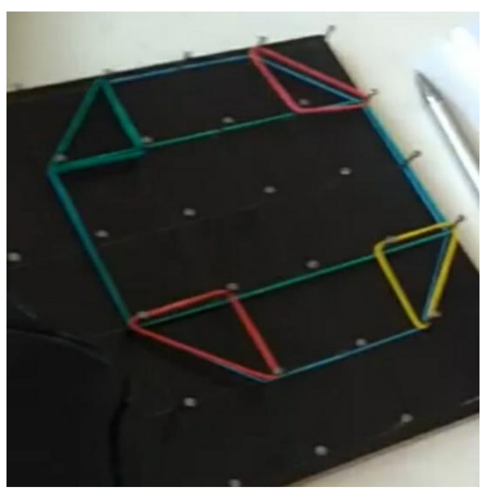
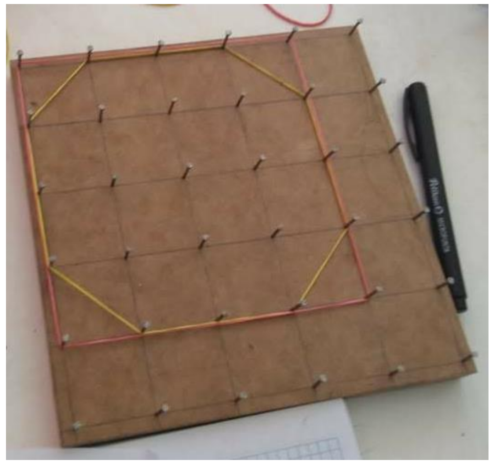


Ilustración 30. Geo plano 2



Para encontrar el área del octógono irregular algunos grupos tuvieron dificultades por no saber cómo dividir la figura para encontrar áreas conocidas; pero finalmente con nuestra guía lograron llegar al resultado. La otra estrategia que utilizaron fue la de circunscribir un cuadrado al octógono, así los triángulos que sobraban en los extremos del octágono se le restaban al área del cuadrado y encontraban el área del octágono.

En la última figura los estudiantes no sabían cómo aplicar la estrategia anterior porque, aunque al dividir la figura les quedaban figuras congruentes, su área no era fácil de encontrar. Con la guía y acompañamiento finalmente pudieron resolver el problema porque se les recordó la manera de hallar el área de un triángulo sin necesidad de que este fuese rectángulo. En esta actividad llamó la atención que cada grupo utilizó un método diferente para resolver la actividad.

Al concluir con las actividades y observar que los estudiantes tenían significados incompletos sobre el concepto de área, procedimos a formalizar el concepto según la geometría euclidiana, de este modo ellos adquirieron un conocimiento amplio que tuviera fruto a la hora de resolver ejercicios que tuvieran este concepto; además se les demostró cómo encontrar las fórmulas del área de las figuras geométricas rectilíneas cerradas, y como estas se relacionaban.

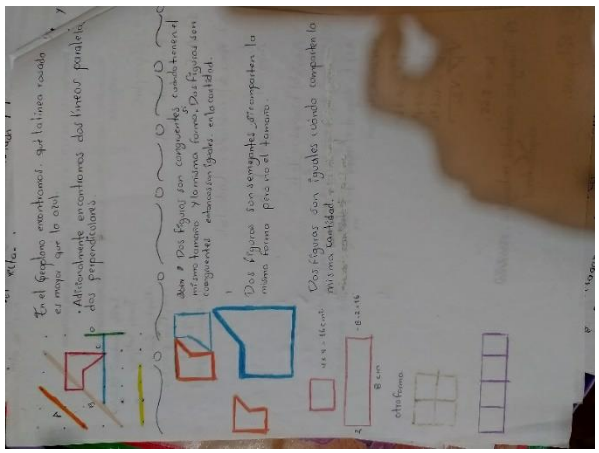
4.1.2.6.La igualdad como área en figuras geométricas rectilíneas cerradas.

4.1.2.6.1. *Actividad 4.*

En esta actividad el propósito era identificar visualmente con el Geo-Plano el concepto de igualdad reflejado en distintas figuras.

Para cada una de las figuras anteriores, construir otra figura distinta con igual área.

Ilustración 31. Igualdad



En esta parte los estudiantes se limitaron a construir rectángulos y cuadrados, a los cuales era más fácil encontrarles el área y hacer que coincidieran con las áreas de las figuras presentadas en imagen 23. En la figura 3 les faltaban unidades para representarla en geo-plano, por lo cual a los estudiantes se les ocurrió la idea de unir dos geo-planos para poder construir la figura y llevar a cabo con éxito la actividad.

4.1.2.7.Diferenciando el área del perímetro.

4.1.2.7.1. *Actividad 5.*

En esta actividad el propósito era formar figuras geométricas según las peticiones que exigían los enunciados propuestos, dado que ya tenían un vago conocimiento sobre los conceptos perímetro y área**.**

Construir en cada caso una figura geométrica, la cual cumpla las siguientes condiciones:

a) Área 16 (unidades cuadradas) y perímetro 16 (unidades lineales)

b) Área 0.5 (unidades cuadradas) y perímetro $(2+\sqrt{2})$(unidades lineales)

c) Área 6 (unidades cuadradas) y perímetro 12 (unidades lineales).

d) Área 5 (unidades cuadradas) y perímetro 12 (unidades lineales)

En esta actividad el propósito era analizar las distintas formas en que se pueden representar figuras con un área y perímetro determinado, para que se pudiera entender la diferencia entre ambos conceptos. A la mayoría de estudiantes se les dificulta la actividad, tanto en su versión gráfica como en la algebraica, excepto a un grupo de estudiantes de décimo grado.

En los ítems se presentaron diferentes características que debían cumplir las figuras que construyeran los estudiantes; primero las nociones de área y perímetro tenían valores similares para ese caso, segundo los valores no estaban expresados en números enteros. Es así como los estudiantes presentan dificultades a la hora de trabajar con números diferentes a los enteros pues no están acostumbrados a trabajar con ellos, y elaborar actividades donde intervengan números fraccionarios o raíces se presentan dificultades a la hora de resolver los ejercicios. Y en las últimas preguntas c) y d) los valores de área y perímetro variaban, de modo que hubiese figuras con mismo perímetro y distinta área, lo cual no era lógico para ellos y se convierte en una dificultad para poder avanzar, de ahí, la importancia de reforzar los conceptos de área y perímetro, para que aquello no se convierta en un obstáculo en el futuro.

Al terminar las actividades se recopilan las conclusiones obtenidas por ellos mismos sobre los conceptos que se trata en la guía, en tal caso el concepto de perímetro, el cual se expone visualmente en el geoplano y luego se formaliza respecto a la Geometría euclidiana.

4.1.2.8.Palillos geométricos.

Finalmente se desarrolló la actividad lúdica denominada "palillos geométricos" la cual tenía como propósito desarrollar el razonamiento lógico y espacial en los estudiantes frente a algunos problemas.

4.1.2.8.1. ***Actividad lúdica.***

La actividad consiste en obtener figuras distintas a las dadas, moviendo, eliminando o añadiendo un número determinado de palillos, sin colocar unos encima de otros y sin que sobren ni falten palillos. En este juego la idea es fomentar el uso del razonamiento geométrico y ver las estrategias que tomaban frente al problema.

Para dar continuidad al proceso, se optó por realizar la actividad lúdica implementando la metodología que se venía utilizando en las anteriores actividades, la cual consistía en otorgar aleatoriamente una cantidad de acertijos a los grupos para que los resolvieran en el menor tiempo, donde cada monitor inspeccionaba si estaban correctos para que siguieran con otro; una vez resueltos todos los acertijos se tenían en cuenta los dos grupos que lo hubieran hecho en el menor tiempo posible y entre ellos se decide el ganador;

Sin embargo, dado que dicha actividad consistía en la resolución de acertijos matemáticos en el menor tiempo posible, la observación realizada y los resultados, permitieron concluir que problemas matemáticos que involucren razonamiento lógico, deben ser trabajados de manera individual o en parejas, porque la mayoría de las veces todos los estudiantes no trabajan y algunos no tienen la posibilidad de dar sus ideas, donde lo ideal es que todos se enfrenten al acertijo y lancen sus propias respuestas.

4.1.2.9.Conclusiones

En la geometría como en otras ramas de las matemáticas, es posible utilizar representaciones gráficas para aproximarse o acercarse a la solución de los problemas que se tengan; Sin embargo, las representaciones no son suficientes, pues en las matemáticas son necesarias las pruebas lógicas caracterizadas por una o varias operaciones que brinden exactitud y veracidad en los resultados obtenidos. De esta manera, se puede afirmar que la geometría posee un rigor que garantiza que sus resultados no den lugar a ambigüedades[5].

Se sabe que una forma práctica para aprender geometría es por medio del dibujo, lo cual El geoplano facilita el diseño de la figura que posteriormente se representa gráficamente., con el cual los estudiantes pudieron construir una variedad de figuras rectilíneas que cumplieran determinadas propiedades geométricas; así como compararlas con respecto a su magnitud. Es así que visualmente los estudiantes pueden comprender algunos conceptos geométricos que teóricamente no pueden entender. El Geo-Plano se convierte en una herramienta que sustituye en parte los dibujos pues en este se pueden hacer múltiples figuras y borrarlas tan solo con poner o quitar unas cuantas gomas.

Usualmente los estudiantes tienden a confundir conceptos geométricos y las fórmulas que se han establecido sobre ellos, las cuales les ayuda a calcular, medir y resolver problemas, tal como es el caso del área y el perímetro de una figura geométrica; así la herramienta didáctica geo-plano al facilitar la observación de las figuras y sus características permitió mostrar las diferencias entre los conceptos de área y el perímetro. Parece elemental entender que el perímetro de una figura geométrica cerrada se refiere a la medida del borde y el área a la Medida de la superficie; pero la cuestión para un estudiante de bachillerato tiene su complejidad pues no hay

[5] La ambigüedad es un término que expresa la cualidad de aquello que es susceptible a varias interpretaciones, todas ellas coherentes.

claridad sobre las diferencias del tipo de magnitud que en cada caso se contempla, obteniendo así una idea intuitiva que ayuda a asimilar definiciones formales sobre estos conceptos que a su vez facilita una mejor comprensión por parte de los estudiantes, (ver anexo 2 y anexo3: medida de figuras geométricas rectilíneas cerradas en geometría plana, pág.149, pág. 152).

4.1.3. *Cubos y perspectiva*

En esta sesión se trabaja alrededor de algunas figuras tridimensionales como el cubo. Se analiza cómo un arreglo de cubos, desde la concepción que un arreglo de tres dimensiones o cubo (si las tres dimensiones son iguales) es un arreglo de arreglos de dos dimensiones, o un arreglo de matrices, genera imágenes diferentes en un plano bidimensional dependiendo de la posición en que se observa al objeto en el espacio. Con esta actividad se introduce a los estudiantes en el tema de la perspectiva; rama de la geometría que se ocupa de reproducir una imagen tridimensional en un plano bidimensional.

El objetivo de esta sesión se enfoca en que los estudiantes desarrollen habilidades matemáticas tales como, imaginación y visualización espacial a partir de cuerpos geométricos en tres dimensiones (largo, ancho y alto), los cuales ocupan un lugar en el espacio y en consecuencia tienen un volumen, considerando también que existen dos clases de cuerpos geométricos: los poliedros y los cuerpos redondos. Para el caso, se trabaja con el enfoque de los poliedros.

4.1.3.1. Breve historia de la perspectiva geométrica.

Como se dijo anteriormente la perspectiva, geométricamente hablando, es una técnica específicamente utilizada para representar un objeto tridimensional en un plano bidimensional, el propósito es reconstruir la posición relativa y la profundidad del objeto.

La perspectiva geométrica, se debe a Filippo de Brunelleschi, (1377-1447). Arquitecto, ingeniero, orfebre, escultor e inventor italiano, figura clave del Renacimiento. Fue el primer ingeniero moderno y un innovador solucionador de problemas, nacido en Florencia, Italia (Brunelleschi, 2020). Él fue quien sentó las bases del método que permitiría a los artistas reproducir figuras y objetos tal y como los percibe el ojo humano.

Hasta ese momento no se habían formulado las leyes matemáticas por las que los objetos disminuyen de tamaño a medida que se mueven hacia atrás y entonces proporcionó a los artistas los medios matemáticos de resolver este problema. “La Trinidad de Masaccio, imagen 33, pintada para Santa Maria Novella en Florencia alrededor de 1427, generalmente se considera la pintura en perspectiva más antigua que se conserva” (College, 1998). Es considerado su trabajo más maduro realizado por Tommaso di ser di Giovanni di Mone Cassai (San Giovanni Valdarno, actual Italia, 1401 - Roma, 1428).

Ilustración 32. La trinidad de Masaccio (1426-1428), ubicada en la iglesia Florencia de Santa María Novella

Para lograr esta profundidad que hace que parezca real ante los ojos, Masaccio usa cálculos matemáticos precisos para reproducir todos los personajes en función de su posición en el espacio, es decir, el lugar donde esté situado. Del mismo modo, utiliza una compleja red de líneas auxiliares. Todas estas líneas provienen de un punto de fuga central ((n.d.) Punto de fuga - Wikipedia, la enciclopedia libre.) que el artista italiano colocó hábilmente en el nivel ideal de visión para el observador.

Después de esta breve introducción histórica acerca de los inicios de la perspectiva, se muestran algunos conceptos de la geometría que son necesarios para el inicio de las actividades.

4.1.3.2.El cubo.

Un *hexaedro* es un poliedro[6] de 6 caras. Si las seis caras de un hexaedro son cuadrados, entonces estamos hablando de un hexaedro regular o generalmente llamado cubo.

El hexaedro es uno de los denominados sólidos platónicos. Estos también reciben el nombre de sólidos regulares o perfectos, poliedros platónicos y de cuerpos cósmicos entre otros, de igual forma son poliedros convexos tal que todas sus caras son polígonos regulares iguales entre sí, y en que todos los ángulos sólidos son iguales (Molina, Fernández, & Barragán, 2009).

Un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectangular, pues todas sus caras son cuadrados y paralelos dos a dos. Adentrándonos un poco más con los sólidos platónicos se puede decir que son: el **tetraedro**, el **cubo** (o hexaedro), el **octaedro**, el **dodecaedro** y el **icosaedro**.

Tal vez en algún momento nos hemos preguntado ¿Por qué hay sólo 5 sólidos platónicos? La respuesta a este interrogante lo da Leonhard Euler en 1750, demuestra que es imposible

[6] Cuerpo geométrico cuyas caras son planas y albergan un volumen no infinito.

construir otro sólido diferente de los anteriores que cumpla todas las propiedades exigidas, es decir, convexidad y regularidad.

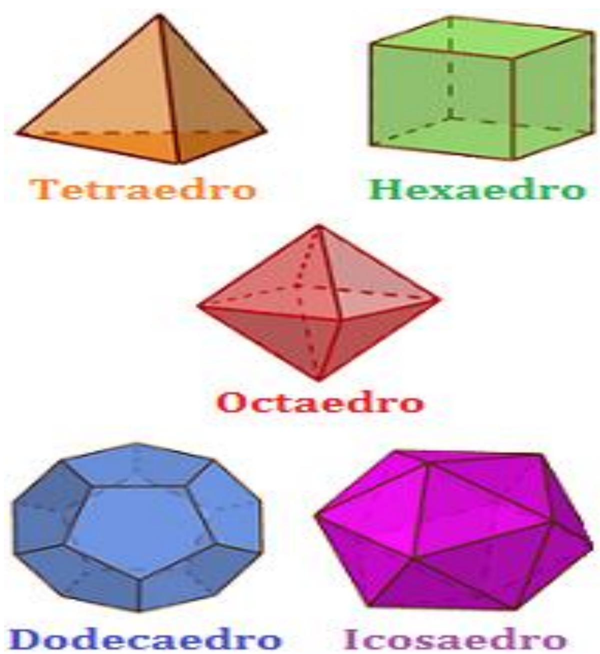
El Teorema de poliedros de Euler fija que el número de "caras" de un poliedro platónico más su número de "vértices" es siempre igual a su número de "aristas" más dos, es decir: $c + v = a + 2$, Con este resultado Euler demuestra que no existe otro poliedro que cumpla estas (propiedades, características) y pueda entrar a ser parte de los llamados "sólidos platónicos".

En su obra "*Timaeus*", Platón asocia cada uno de los cuatro elementos que forman el universo según los griegos; el fuego, aire, agua y tierra a un poliedro: fuego al tetraedro, aire al octaedro, agua al icosaedro y tierra al hexaedro o cubo.

Finalmente asoció el último poliedro regular, el dodecaedro, al Universo. Por este motivo estos poliedros reciben el nombre de *sólidos platónicos*, pues se atribuye a Platón el haberlos clasificado por primera vez de esta manera.

Ilustración 33. Los sólidos plantónicos.

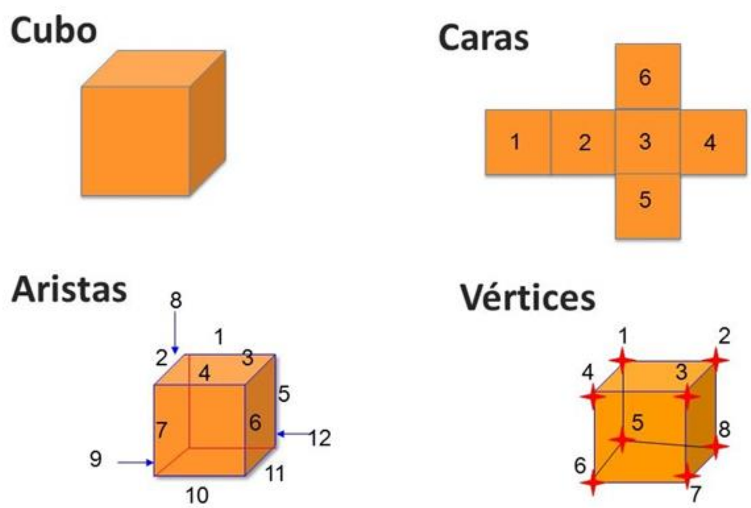
Los prefijos Tetra, Hexo, Octa, Dodeca e Icosa que dan nombre a los cinco poliedros regulares indican el número de polígonos (caras) que forman el cuerpo.



4.1.3.3.Características del cubo.

Algunas de las características del cubo están inmersas en la etimología de la palabra griega hexaedro. "Hexa" significa seis, "hedra" significa una cara (Hexahedro es un cuerpo con seis caras).

Ilustración 34. Elementos del hexaedro



A continuación, se muestran unas definiciones fundamentales de los elementos que componen el cubo:

La cara viene a ser cada una de las regiones cuadradas que limitan el cubo. En total son seis. Cada par de caras tienen un lado común. Cada cara tiene otras cuatro caras adyacentes, con lados comunes, excepto con una que se llama cara opuesta.

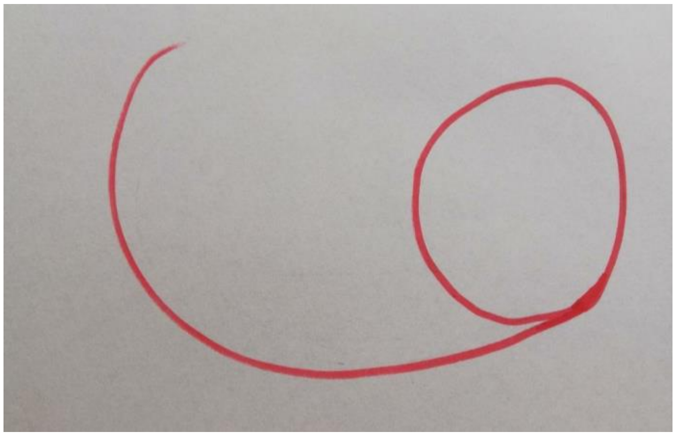
Arista es un lado común a dos caras. En total hay doce aristas del cubo. Para cada arista hay otras aristas que son concurrentes, paralelas o que se cruzan.

Vértice. El punto donde convergen tres caras del cubo se denomina vértice. El cubo tiene 8 vértices. Como se puede comprobar en la ilustración 35.

4.1.3.4.El concepto de cubo y perspectiva a un nivel práctico.

La idea simple para introducir la definición de "la perspectiva" a los estudiantes, es a través de una imagen. Para ello, se invita a los estudiantes a que dijeran, cuál número veían en la imagen 36. Es interesante constatar que todos ellos afirmaron que la lectura del número dependía de la posición.

Ilustración 35. ¿Nueve o seis?



Posteriormente, terminada esta introducción de la perspectiva, se da paso a las actividades, las cuales tienen como objetivo desarrollar la capacidad de imaginación espacial de los estudiantes, para ello se formularon las siguientes actividades.

4.1.3.5.Desarrollo de las actividades.

4.1.3.5.1. Actividad 1.

La actividad se inicia haciendo un breve reconocimiento de las habilidades que tienen los estudiantes respecto al pensamiento espacial, para ello se propone:

El siguiente arreglo fue hecho con tres cubos, a partir de esta vista determine:

¿Cuántas caras son visibles? _______________

¿Cuántas caras no pueden ser vistas desde esta perspectiva? _____

¿Cuántos vértices no pueden ser vistos desde esta perspectiva? _______

A continuación, se hace una breve reflexión sobre las respuestas de los estudiantes al ejercicio anterior.

Con respecto a la primera pregunta, se puede decir que no tuvieron muchas dificultades; los estudiantes pudieron identificar cuántas caras se podían observar sin ningún problema y sus respuestas fueron correctas.

Con respecto a la segunda pregunta, se empiezan a identificar las dificultades de los estudiantes para percibir los objetos tridimensionales desde ciertas perspectivas. El error común fue afirmar que al contar las caras de los cubos que no se observan cuando estas comparten lados, es decir cuando un cubo está en contigüidad con otro sus respuestas siempre fallaban, dado que afirmaban que había solamente una cara que no se observa, por consiguiente, estaban contando menos caras de las que había en realidad.

De otro lado, los que acertaron en la respuesta lo hicieron por dos métodos distintos: el primer método consistió en contar de manera directa las caras, el segundo caso lo establecieron de una manera indirecta, es decir, teniendo la cantidad total de caras de un cubo menos la cantidad de caras visibles de este, como resultado da la cantidad de caras no visibles, y esto se establece en la siguiente ecuación.

$$número\ total\ de\ caras = número\ de\ caras\ visibles + número\ de\ caras\ no\ visibles$$

En la última pregunta, se nota que los estudiantes tuvieron dificultades a la hora de contar los vértices pues no tenían claro este concepto, y algunos dudaban sobre las respuestas que dieron, por ende, pocos dieron con la respuesta correcta.

Para los siguientes puntos de la primera actividad, se propusieron los siguientes problemas

Observe los siguientes arreglos de cubos:

A. ¿Cuántos cubos faltan para completar tres pisos? _____

B. ¿Cuántos cubos faltan para completar tres pisos? _____

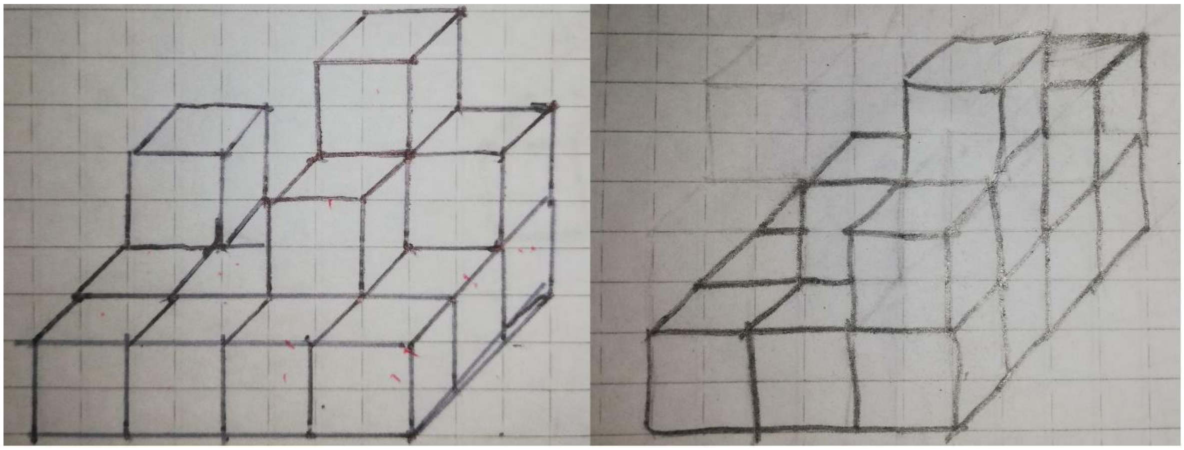
Para los arreglos A y B dibuje las caras vistas de manera:

a) Frontal
b) Lateral derecha
c) Superior

En la parte A y B de la actividad 1 se formuló la pregunta sobre los cubos faltantes para completar tres pisos y, en ambas los estudiantes dieron la respuesta correcta. Observamos aquí que hubo diversas formas de resolver el problema. Hubo en primer lugar, una forma de contar directamente los cubos faltantes; es decir mentalmente ubicaban el número de cubos que completaba cada piso. El otro método fue contar la totalidad de cubos que conformaban el arreglo de tres pisos y restar de éste el número de cubos visibles. Finalmente, el tercer método, similar al primero, fue sumar los cubos de cada fila y ver cuántos faltaban para completar este número.

Ilustración 36. Estudiantes trabajando con cubos hechos en plastilina

Ilustración 37. Dibujo del arreglo de cubos de forma frontal y lateral derecha



4.1.3.5.2. Actividad 2.

Se presentan algunos arreglos con cubos, el objetivo de esta actividad es que el estudiante visualice estos arreglos y los rote mentalmente, de tal forma que fortalezca la “habilidad” de la imaginación espacial.

Al pintar los cubos sin ser separados

¿Cuántos cubos quedarán pintados de…?

a) Una cara ________

b) Dos caras ________

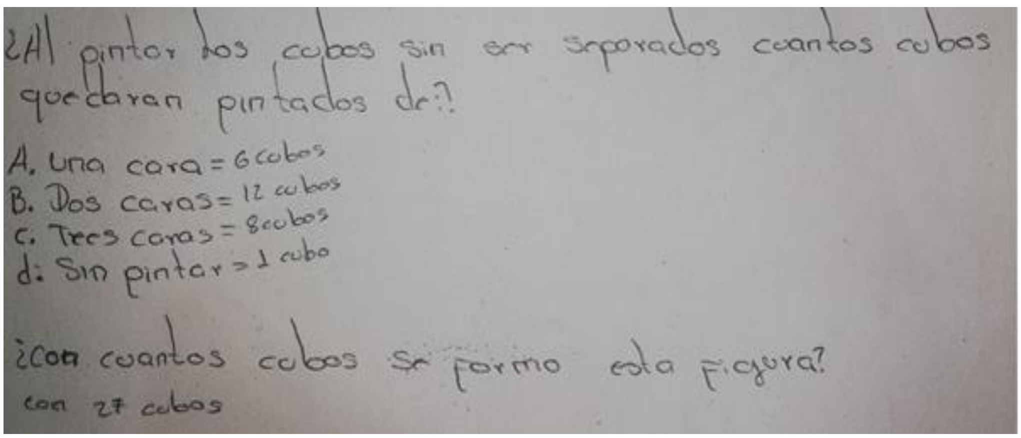
c) Tres caras ________

d) Sin pintar ________

e) ¿Con cuántos cubos se formó esta figura? ______

El primer problema que se evidenció aquí, fue que no veían el arreglo de cubos, es decir, un cubo formado por cubos pequeños, sino que visualizaban un solo cubo. Debido a esto se hizo necesario ejemplificar que la imagen mostrada era la ilustración de un cubo Rubik, entendiendo que es un rompecabezas mecánico tridimensional creado por el escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernő Rubik en 1974, o cubo 3x3, el cual está formado por varios cubos. En algunos casos se tuvo que recurrir al uso de la plastilina, es decir, formar el arreglo de cubos que se presentó con plastilina, para mejorar la visualización del mismo, y así, responder las preguntas, además, se vio un inconveniente que fue preguntar cuántos cubos están sin pintar, pero luego de algunas intervenciones, pudieron resolverlo.

Ilustración 38. Respuesta, que acoge las respuestas de todos los estudiantes

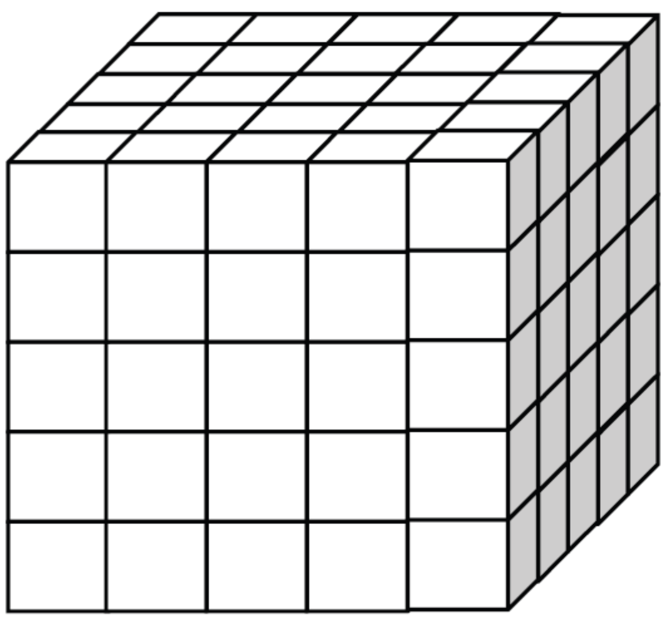


¿Al pintar los cubos sin ser separados cuantos cubos quedaran pintados de:?

A. Una cara = 6 cubos
B. Dos caras = 12 cubos
C. Tres caras = 8 cubos
d: Sin pintar = 1 cubo

¿Con cuantos cubos se formo esta figura?
con 27 cubos

Repita el proceso anterior con el siguiente arreglo.

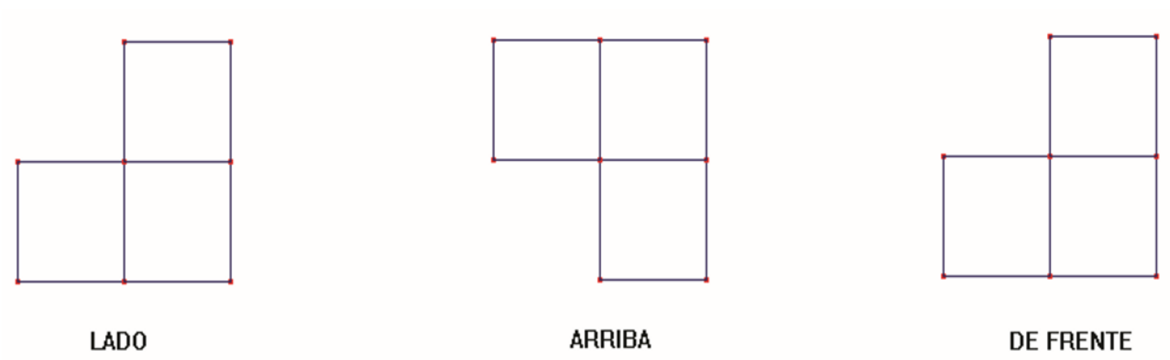


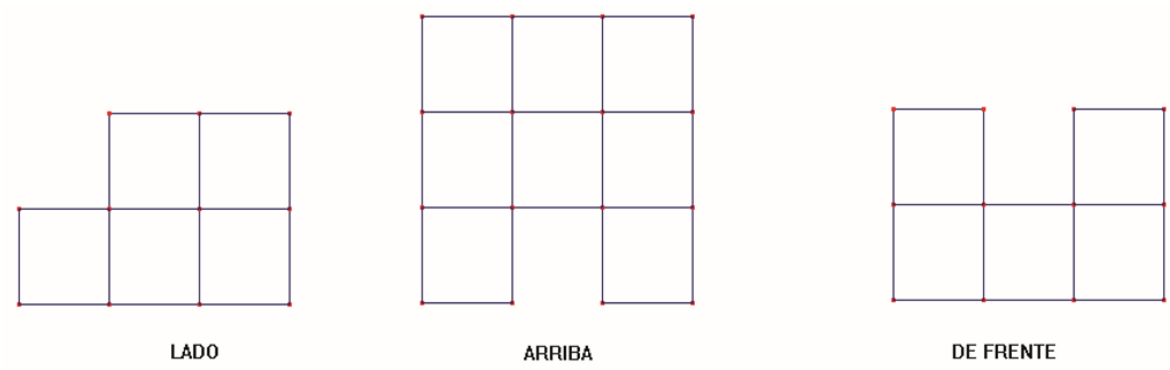
Resuelto la parte del cubo Rubik, se pasa al siguiente arreglo de cubos, es decir el cubo 5x5, como se muestra en la imagen anterior. En esta actividad hubo algunos problemas, esto se evidenció al preguntar por la cantidad de cubos que quedaban sin pintar; la mayoría de las respuestas dijeron que había 9 cubos. La razón por la que se dio este análisis puede ser, porque se dejaron llevar por el mismo patrón del ejercicio anterior.

Es interesante ver cómo los estudiantes dedujeron que este nuevo arreglo de cubos estaba conformado por $5^3(125\ cubos)$, con esta información a algunos grupos se les facilitó encontrar la cantidad de cubos sin pintar, gracias al problema anterior se dieron cuenta que si sumaban la cantidad de cubos que tenían *una cara pintada, dos caras pintadas, tres caras pintadas y aquellos que estaban sin pintar* este resultado les arrojaría la cantidad de cubos que tenía el arreglo *(125 cubos).* Fue así que algunos grupos, teniendo tres de estos datos, pudieron obtener el cuarto, y finalizar correctamente la actividad.

4.1.3.5.3. Actividad 3.

En equipos utilicen las siguientes figuras planas con sus respectivas perspectivas para formar un arreglo de cubos. Antes de hacerlas traten de predecir cuántos cubos serán necesarios para la construcción. Al final dibújalas en la retícula para observarlas mejor.





En esta última actividad una vez más se reflejó el problema que tienen al tratar de dibujar figuras en tres dimensiones, se puede ver que estos cambios son demasiado difíciles para ellos. Para superar esto, se ejemplifica en el tablero como debe ser el procedimiento, y así pudieran observar el paso de una figura en 2D a 3D. Para ello, se dibujó una figura en 2D de forma que se evidenciara claramente su parte frontal, lateral derecho e izquierdo, este ejemplo sirvió, pues en la mayoría de los casos fue satisfactoria la solución que le dieron.

4.1.3.6.Reflexión sobre las actividades.

Lo primero que se percibe en toda la actividad, es la dificultad que tienen los estudiantes para cambiar de dimensión en su cabeza; bien sea pasar de 2D a 3D o al revés. Estos temas parecían nuevos para ellos y esto resulta entendible ya que la geometría que se ve en la escuela generalmente es bidimensional.

Es importante incorporar en la enseñanza de la geometría prácticas pedagógicas, con diversos tipos de innovación, inicialmente de tipo incremental, que promuevan el aprendizaje significativo partiendo del hecho que unas bases sólidas en la geometría bidimensional repercuten de forma positiva en el aprendizaje de la tercera dimensión, a través de estrategias didácticas como el cubo de Bafi o cubo flexible, ya que “ante un dibujo geométrico complejo, la mayoría de las personas distinguen primero figuras de dos dimensiones”(Teixidor-Cadenas, 2019,p.54).

Otro problema estrechamente relacionado con lo anterior, es la dificultad de dibujar objetos tridimensionales en un plano bidimensional. En esta actividad, muchos estudiantes estaban enojados porque no lograron capturar su intuición espacial en papel o el tablero, y esta sensación de impotencia los llevó, en algunos casos, a abandonar y dejar el trabajo a medias.

Además, otra característica importante que no se puede pasar por alto, es que un grupo de estudiantes encontraron dificultades al momento de hacer el conteo de caras que no pueden observar, dada su perspectiva. Es relevante que este tipo de habilidades se muestren en las aulas de clase, dado que la mayoría de las personas no poseen un desarrollo satisfactorio de la imaginación y visualización espacial a partir de cuerpos geométricos en tres dimensiones. Y esto es algo que se puede trabajar si se pone más en práctica. Por otra parte, es interesante como un grupo de estudiantes establecieron una ecuación indirectamente, se notó que llevaron este problema geométrico a un problema aritmético.

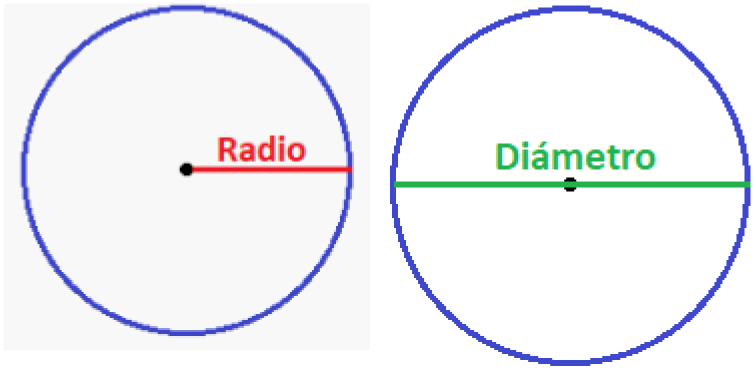
Y finalmente, se ve la necesidad de aprendizaje de estudiantes, mediante procedimientos específicos, a dibujar y leer algunas de las representaciones planas usuales de cuerpos geométricos de tres dimensiones, como medio para mejorar su capacidad para comprender la geometría y facilitarles el aprendizaje de ésta, (ver anexo 4: cubos y perspectivas, pág.155).

4.1.4. Construcción del tangram circular.

4.1.4.1. Despertando en los estudiantes su parte artística.

Se comienza la sesión explicando los conceptos de radio y diámetro, es decir el radio de una circunferencia es cualquier segmento que une el centro con cualquier punto de dicha circunferencia y el diámetro es el segmento de recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de una circunferencia. Como se puede ver en la siguiente imagen:

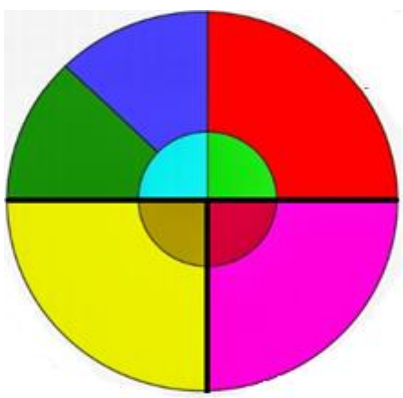
Ilustración 39. El diámetro es el doble del radio.



4.1.4.2.Tangram circular.

Es una herramienta didáctica de forma circular, que tiene unos cortes en lugares específicos como se ve en la siguiente imagen.

Ilustración 40. Tangram circular



Con el tangrama circular se tiene la facilidad de realizar representaciones de peces, caballos, dragones, a diferencia del tangram común (cuadrado) donde solo se pueden representar figuras rectilíneas.

4.1.4.3.Actividad: ejercitando la creatividad.

El propósito fue desarrollar habilidades de pensamiento creativo y geométrico e ir consolidando los conceptos de diámetro y radio de una circunferencia.

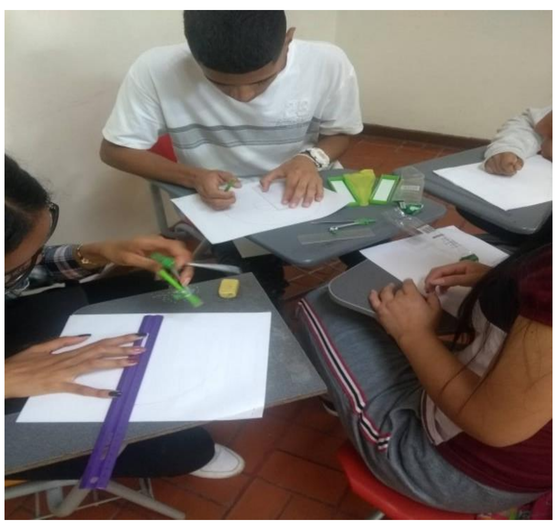
Para tal fin se les pidió construir un tangrama circular, utilizando algunas herramientas como compás, cartón paja, colores, regla y tijeras.

Los pasos para hacer tal construcción se fueron analizando y detallando individualmente, pues el mayor problema que se encontró con esta actividad fue la deficiente comprensión lectora por parte de los estudiantes. En detalle, estas son las dificultades percibidas en cada uno de ellos:

1. Con el compás en el medio del octavo de papel paja hacer un círculo de 3 cm de radio y otro círculo mayor, tal que su radio tenga el mismo origen del radio del círculo pequeño y su radio sea el triple del pequeño.

En este paso se evidenció que los estudiantes confundieron los conceptos de radio y diámetro. En cada uno de los grupos hubo que volver a recordar la diferencia entre estos dos conceptos. La otra dificultad tuvo que ver con el hecho de que la mayoría de estudiantes no hicieron el círculo en el centro del cartón

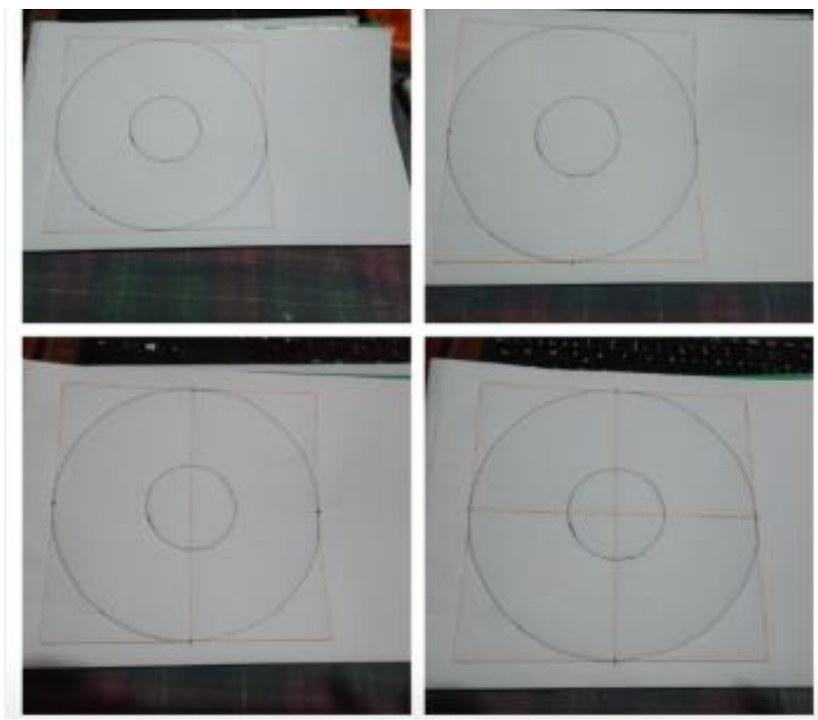
Ilustración 41. Estudiantes construyendo los círculos para el tangrama.



2. Dividir en cuatro porciones iguales los dos círculos construidos anteriormente.

En el segundo paso se les dificultó proporcionar los 4 lados iguales. Se considera que esto ocurrió porque no hicieron los círculos en la mitad del cartón. Unos grupos lo resolvieron circunscribiendo un cuadrado al círculo mayor. A este cuadrado le midieron todos sus lados y por la mitad de ellos le hicieron unos puntos los cuales servirían para efectuar dos segmentos y así dividir los cuatro lados pedidos de los círculos, como se evidencia en la siguiente imagen:

Ilustración 42. Primera estrategia de los estudiantes



El cuadrado es un polígono circunscrito, porque todos lados son tangentes los círculos. Los círculos a su vez están inscritos en el polígono, porque está dentro de él. Aquí los estudiantes utilizaron seguramente sin saberlo las nociones de cuadrado inscrito y circunscrito a una circunferencia (inscrito y circunscrito).

Otros ejecutaron esta división con ayuda del compás y la regla, donde dibujaron el diámetro de la circunferencia y por este segmento con apoyo del compás realizaron una semicircunferencia. Luego cambiaron la posición del compás e hicieron otra semicircunferencia, con estos dos procesos encontraron el punto medio realizado por la intersección de estas semicircunferencias. Por este nuevo punto y el punto del centro de la circunferencia dibujaron un segmento que dividía las circunferencias por la mitad. Este mismo método lo hicieron del otro lado y así dividieron la circunferencia en 4 porciones iguales. Como se ve posteriormente:

Ilustración 43. Segunda estrategia de los estudiantes

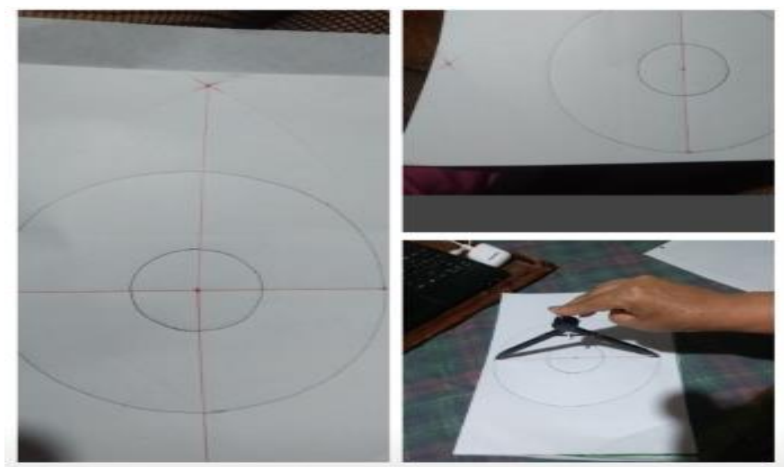
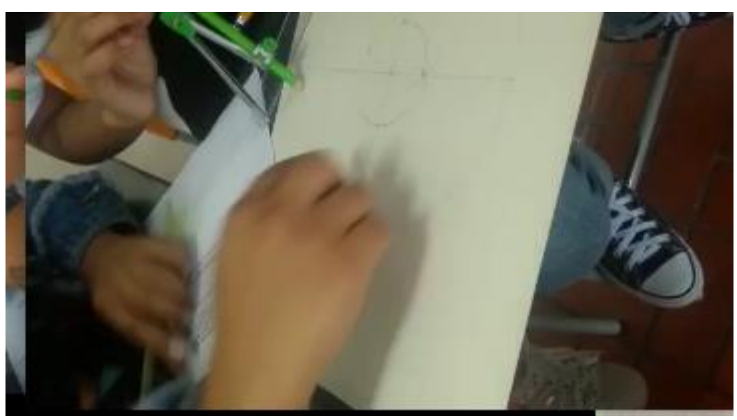


Ilustración 44. Estudiantes ejecutando la segunda estrategia.

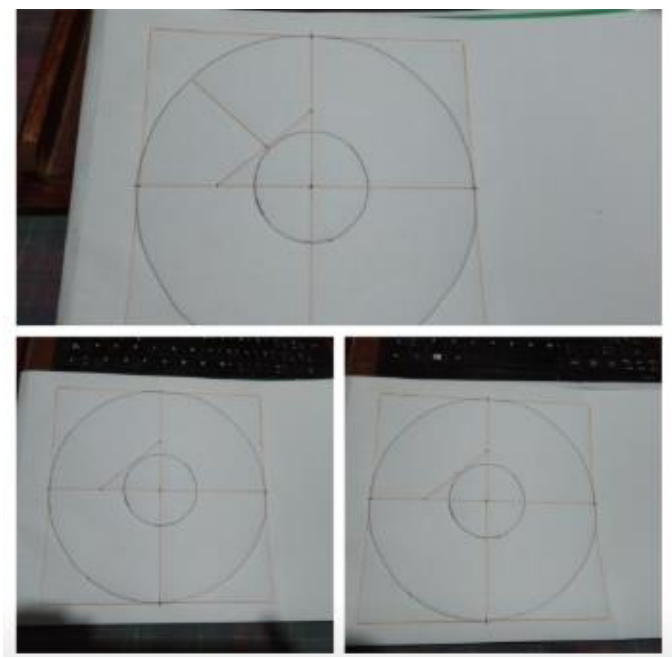


Con este método los estudiantes utilizaron el compás para hallar la mediatriz de los segmentos dibujados. La mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.

3. Escoger un cuarto del círculo mayor quitándole el círculo pequeño y dividirlo en la mitad.

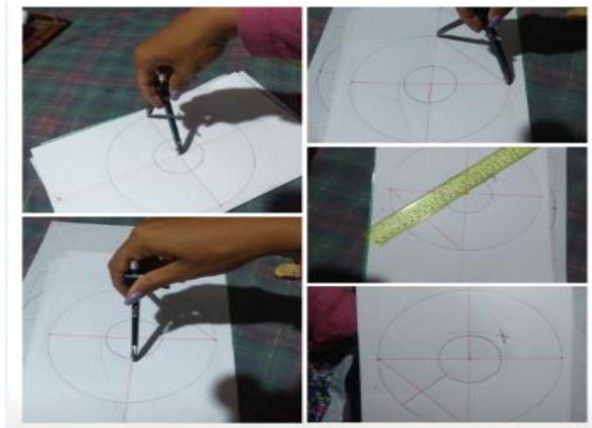
En el tercer paso también se ejecutaron dos estrategias. La primera consistía en escoger uno de los 4 lados proporcionados y hacer un segmento desde unos de los lados de este cuarto del círculo al otro, luego este segmento lo dividieron en la mitad y desde este punto al centro de la circunferencia realizaron el segmento pedido. Como se observa posteriormente:

Ilustración 45. Primera estrategia



En la segunda estrategia dibujaron un segmento en una de las partes divididas con el cual y con ayuda del compás encontraron su punto medio y con este y el centro de la circunferencia realizaron el segmento pedido. Se puede ver en la ilustración siguiente como se realizó este ítem:

Ilustración 46. Segunda estrategia



4. Cortar las 9 secciones del tangram ya terminado.

Los estudiantes se animaron, ya que salieron de su espacio habitual pues la sesión se llevó a cabo en la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación de la Universidad del Cauca. Además de lo anterior, se entusiasmaron mucho con la construcción del tangrama circular que desconocían por completo. Se detalló que, si se les entrega de una manera donde ellos puedan jugar y al mismo tiempo asimilen conceptos, ellos se interesan más y quieren seguir investigando y preguntando al respecto.

Los estudiantes utilizaron los conceptos previos de figuras inscritas y circunscritas para este trabajo. Es claro que muchos conceptos quedan guardados en el subconsciente para usarlos cuando se requiere, (ver anexo 5: arte geométrico, pág.160).

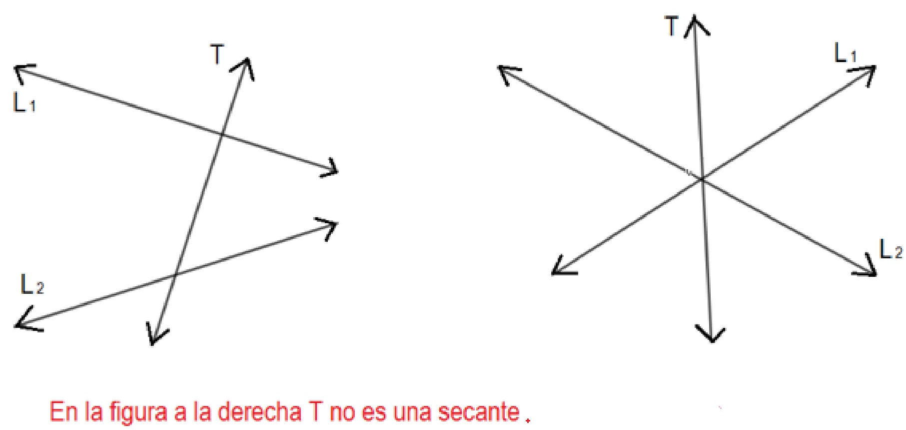
Ilustración 47. Tangram circular elaborado

4.1.5. Construyendo la noción de paralelismo.

4.1.5.1.Rectas: secante y paralelas.

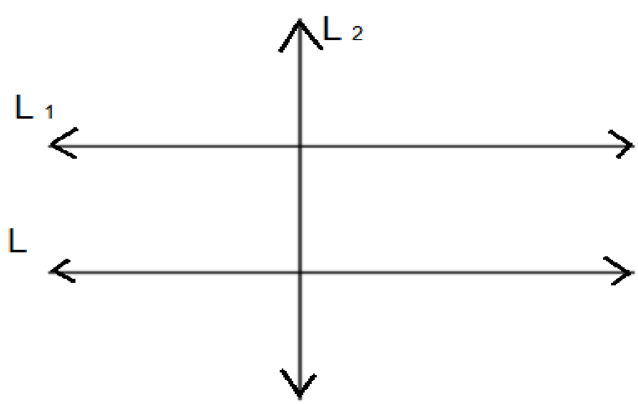
Esta actividad se comienza recordando las definiciones de recta secante a dos rectas y rectas paralelas. Si se tienen dos rectas en el plano y se atraviesan con otra recta de tal suerte que las intercepte en dos puntos diferentes, la última recta se llama secante de las otras dos.

Ilustración 48. Secante



Rectas paralelas: dos rectas son paralelas si por más que se prolonguen ellas no se encuentran. ¿Y qué sucede cuando son coincidentes?

Ilustración 49. Rectas paralelas



Durante unos dos mil años, el texto por excelencia de geometría fue “Elementos” de Euclides escrito alrededor de 300 a. de C. En este libro existe un postulado que dice: “si una línea recta que cae sobre dos rectas hace los ángulos adentro y contra la misma parte menores a dos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran sobre el lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos” (Recalde, 2017, p.312).

(Moise & Downs, 1986)) dice:

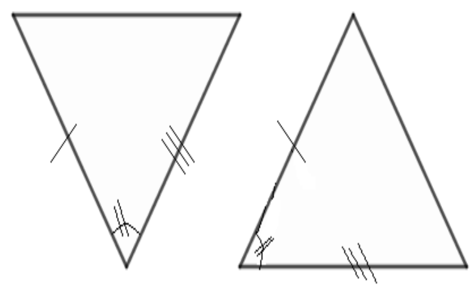
> Los matemáticos frecuentemente les gusta suponer lo menos posible y demostrar lo más posible. Por tanto, la mayoría de ellos trataron de convertir este postulado en un teorema. Ninguno tuvo éxito. Finalmente, en el siglo XIX, se descubrió que el postulado de las paralelas no puede demostrarse con base en los otros postulados y que hay otros tipos de geometrías (ahora llamadas geometrías hiperbólicas, elípticas y esféricas) en el cual el postulado de Euclides no es válido. Un ejemplo de esto lo podemos mencionar en la geometría hiperbólica donde el siguiente teorema: Para todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos es 180, no puede demostrarse y, de hecho, es falso, porque esta suma es mayor que dos rectos. (p.289)

4.1.5.2.Postulados de congruencia para triángulos: (ALA, LLL, LAL)

Los postulados mencionados a continuación sirven para concluir qué tipo de correspondencias entre los lados y ángulos de dos triángulos generan una congruencia entre ellos. Entiéndase como congruencia: dos figuras son congruentes si al trasladarlas una sobre la otra encajan exactamente. En lo sucesivo, nos referimos a los tres postulados de congruencia para triángulos mediante las abreviaturas (ALA, LLL, LAL). Los postulados de congruencia para triángulos son:

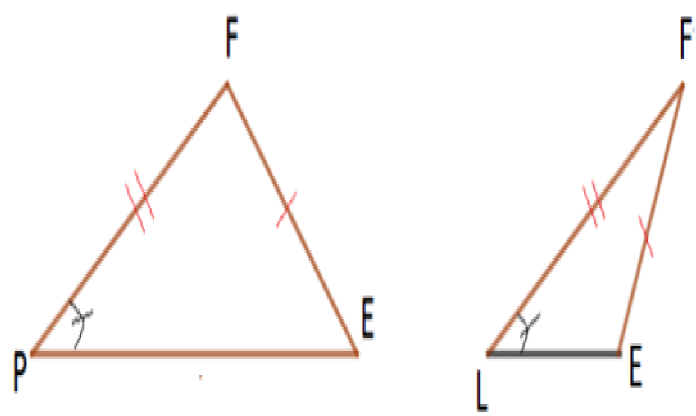
Postulado LAL: Toda correspondencia LAL, Es una congruencia. (Moise & Downs, 1986)

Ilustración 50. LAL



Se aclara que postulado LLA, no siempre se cumple.

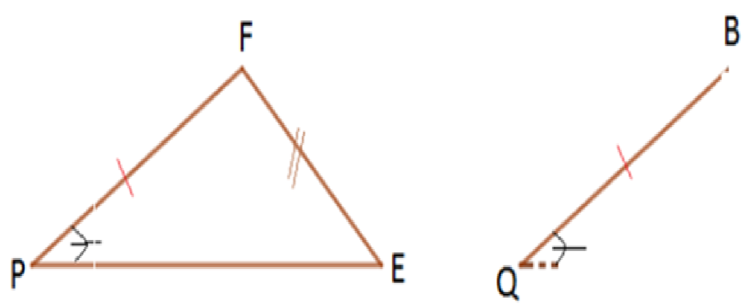
Ilustración 51. LLA



En la imagen anterior ∆FEP si y solo si ∆FEL es una ‘‘correspondencia LLA’’: dos lados y un ángulo no comprendido del ∆FEL son congruentes con las partes correspondiente del ∆FEP. Pero la correspondencia, no necesariamente es una congruencia.

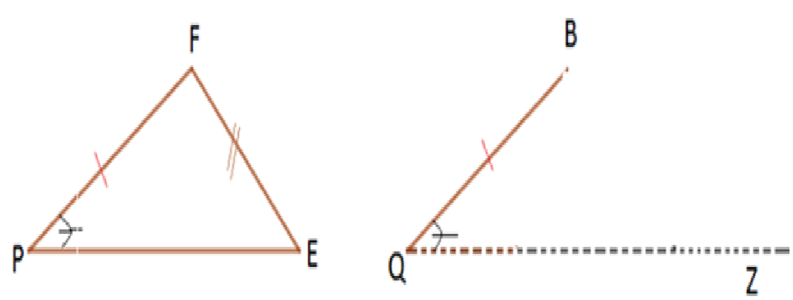
Este criterio causa cierta ambigüedad. Es decir, tenemos un ∆FEP y supongamos que encontramos otro triángulo que tienen algunas magnitudes en común, supongamos que los dos triángulos tienen un ángulo y un lado adyacente al ángulo en común.

Ilustración 52. Angulo y lados en común



Ahora se dibuja segmento QZ y se extiende a la derecha, no se conoce cuanto mide este segmento, pero se tiene el ángulo y se sabe en qué dirección va.

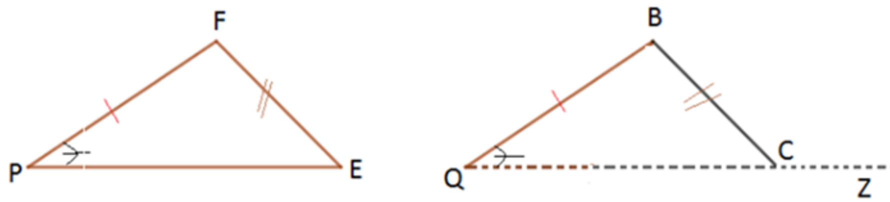
Ilustración 53. Segmentos y extremos de un triángulo.



Luego se grafica el tercer segmento, este se puede pivotear del vértice superior, pero tiene que bajar hasta la base, teniendo en cuenta que segmento BC es congruente con el segmento

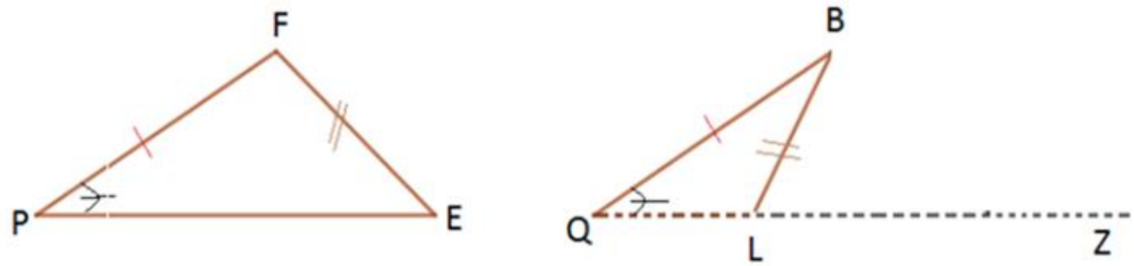
FE, como el ángulo no se encuentra determinado puede ser cualquier valor. Si el segmento BC baja de la manera como se ve en la gráfica, se puede decir que la correspondencia de los triángulos es una congruencia.

Ilustración 54. Primera forma



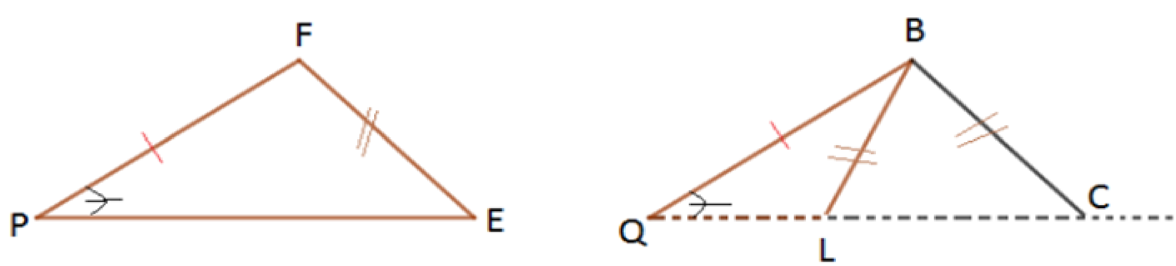
Pero aquí se ve que surge una ambigüedad ya que hay otra forma de completar el triángulo, del lado izquierdo, también se puede bajar la longitud que se quiere.

Ilustración 55. Segunda forma



Así se obtienen dos formas de realizar en triángulo, las cuales dan dos triángulos diferentes que cumplen el criterio “LLA”. Por tanto, el criterio no da suficiente información para determinar si los triángulos comparados son congruentes.

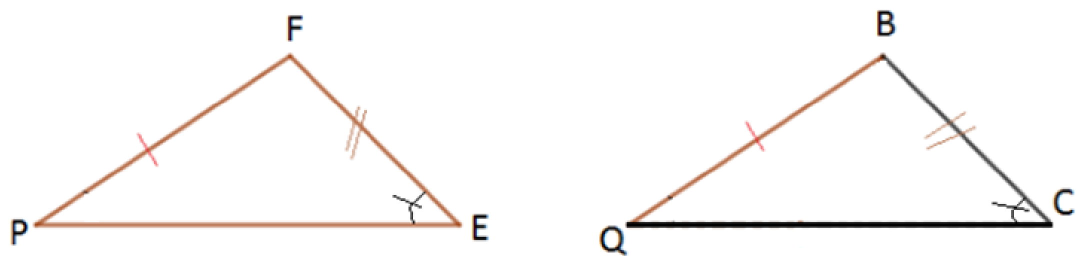
Ilustración 56. ΔBLQ y ΔBCL



Hay un caso especial, si se toma en cuenta los ángulos donde se cumple el criterio.

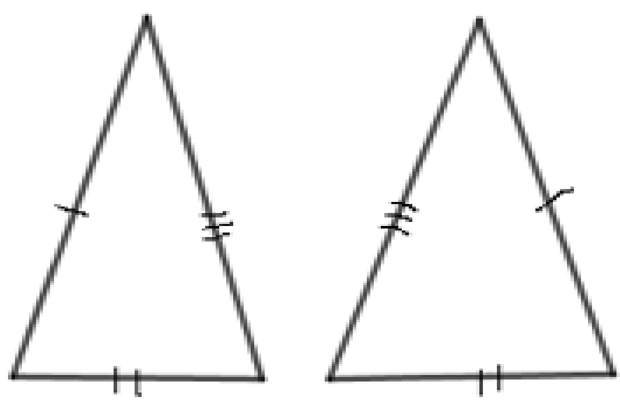
Criterio “LLA”: Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo opuesto al lado mayor de estos lados respectivamente congruentes, entonces la correspondencia es una congruencia.

Ilustración 57. Criterio “LLA”.



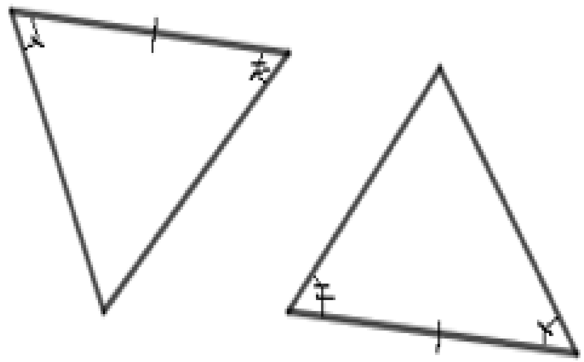
Postulado LLL: Toda correspondencia LLL, Es una congruencia. ((Moise & Downs, 1986, p. 120)

Ilustración 58. LLL



Postulado ALA: Toda correspondencia ALA, Es una congruencia. (Moise & Downs, 1986, pág. 120)

Ilustración 59. ALA



El postulado 5 en los *Elementos de Euclides* dice: si una línea recta que cae sobre dos rectas hace los ángulos adentro y contra la misma parte menores a dos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran sobre el lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

J. Playfair (1748-1818) fue un matemático inglés que formuló una proposición equivalente al quinto postulado de Euclides y posiblemente la causante de que se le llame Postulado de las paralelas. Esta última versión es hoy más conocida que la que aparece originalmente en los Elementos de Euclides.

4.1.5.2.1. Postulado de las paralelas.

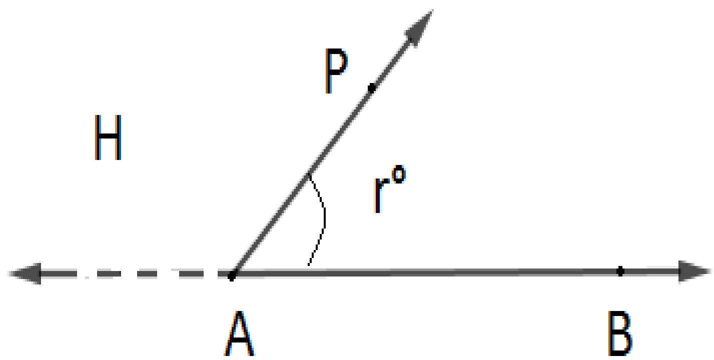
Por un punto externo dado hay solamente una recta paralela a una recta dada. (Moise & Downs, 1986, p. 238)

Antes de proponer las actividades correspondientes a la noción de paralelismo, se revisan algunos resultados previos.

4.1.5.2.2. Postulado de la construcción de ángulos.

Sea AB un rayo (se toma una recta y se marca un punto cualquiera sobre ella. Al hacer esto se divide la recta en dos partes infinitas, a cada una de estas partes se le conoce como semirrecta o rayo) de la arista del semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un rayo AP, con P en H, tal que la medida del ángulo PAB es igual al número r . (Moise & Downs, 1986, p. 82).

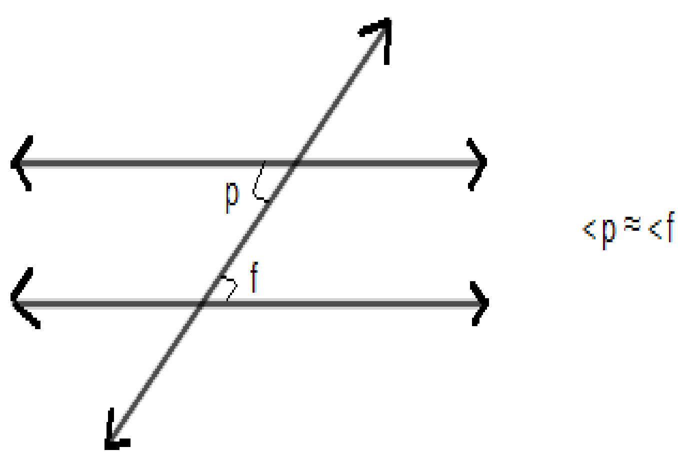
Ilustración 60. Construcción de ángulos



4.1.5.2.3. Teorema: PAI

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes. (el propósito de abordar esta temática era para tener claridad de los términos utilizados en las sesiones con los estudiantes).

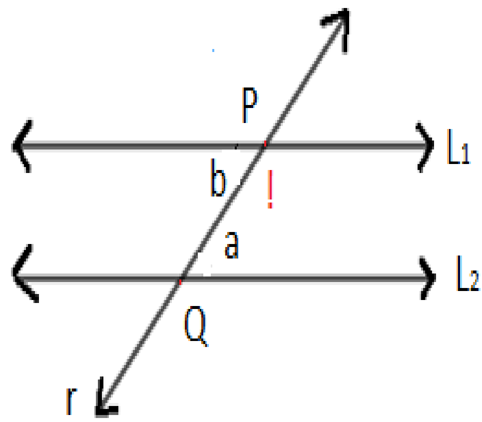
Ilustración 61. PAL



Demostración.

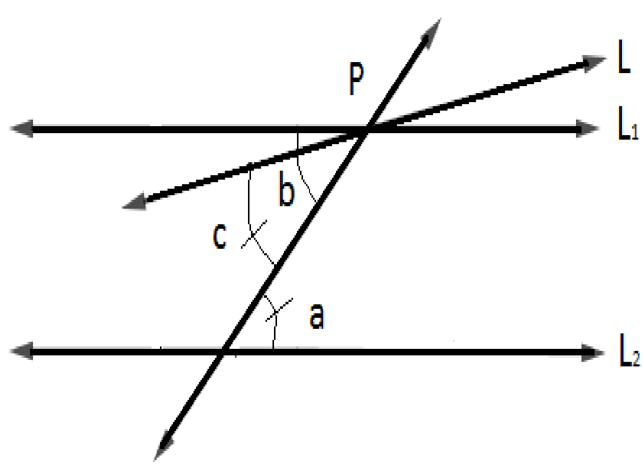
Se dan las rectas paralelas L_1, L_2 y una secante r, que las corta en P y Q, respectivamente.

Ilustración 62. Secante de dos rectas paralelas.



En el supuesto que el ángulo a y el ángulo b no son congruentes. Sea L una recta que pasa por P, tal que los ángulos alternos internos son congruentes. Esto es, en la figura siguiente ángulo a es congruente con el ángulo c. Por el postulado de la construcción de ángulos; existe exactamente una recta tal L: Y esto quiere decir también que L es diferente de L_1.

Ilustración 63. Demostración de teorema PAI.



Entonces L es paralela con L_2, por el teorema AIP “alternos internos paralelas”. Como L es diferente de L_1, se deduce que hay dos rectas que pasa por P, paralelas a L_2. Esto contradice el postulado de las paralelas. Por tanto, el ángulo a es congruente con el ángulo b.

4.1.5.2.4. Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos es 180.

Para todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos es 180. (Moise & Downs, 1986, p. 242)

Demostración.

Se da el △ABC. Sea l la recta que pasa por punto B, paralela a AC. Sean los ángulos x, x’, y, y’ y z como se ve en la ilustración 64.

Ilustración 64. Suma 180

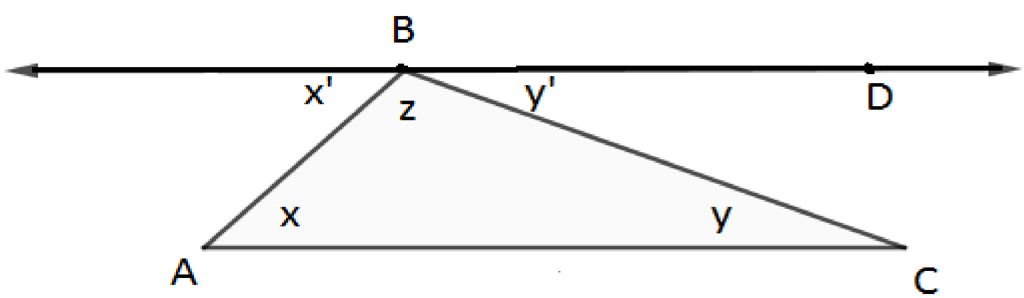


Tabla 2. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180

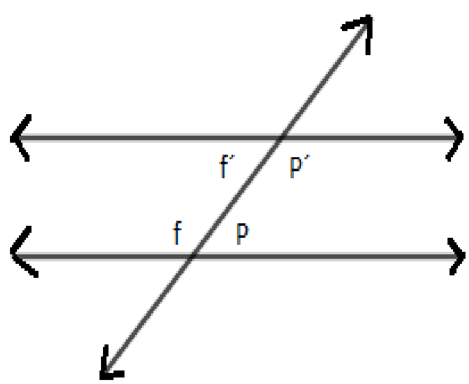
AFIRMACIÓN.	RAZONES.
1. Medida del ángulo x es igual a la medida del ángulo x'	Son ángulos alternos internos.
2. Medida del ángulo y es igual a la medida del ángulo y'	Son ángulos alternos internos.
3. La medida del ángulo ABD es igual a la medida de ángulo z más la medida del ángulo y'	Postulado de la adición de ángulos.
4. La medida de ángulo X' más la medida del ángulo ABD es igual a 180.	Postulado del suplemento.

5. La medida de ángulo X' más la medida del ángulo Z, más la medida del ángulo y' es igual a 180.	Pasos 3 y 4.
6. La medida de ángulo X más la medida del ángulo Z, más la medida del ángulo y es igual a 180	Pasos 1, 2 y 5

4.1.5.2.5. Teorema de congruencia entre ángulos alternos internos.

Si dos rectas son cortadas por una secante, y si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces los otros dos ángulos alternos internos son también congruentes.

Ilustración 65. Teorema de congruencia entre ángulos alternos internos.



Esto es, si el ángulo f es congruente con el ángulo f ´, entonces el ángulo p es congruente con el ángulo p’. Y si el ángulo p es congruente con el ángulo p’ entonces el ángulo f es congruente con el ángulo f ´.

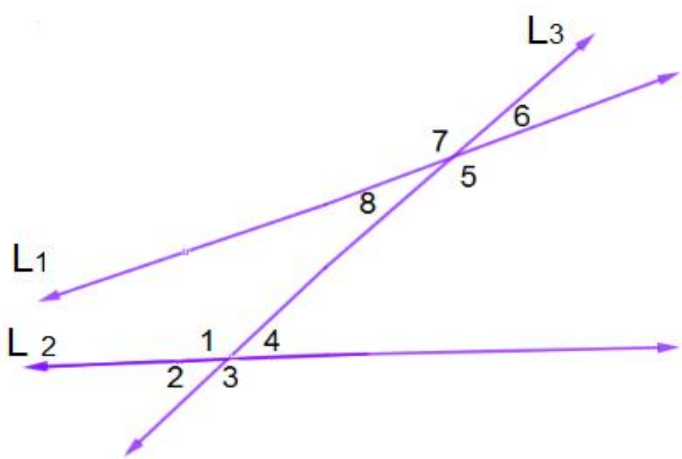
Demostración.

Supongamos que el ángulo f es congruente con el ángulo f ´. Recordemos que la medida de los ángulos suplementarios es 180. Luego ángulo f más ángulo p es igual a 180 y el ángulo f ´ más ángulo p´ es igual a 180. Igualando tenemos que el ángulo f más ángulo p es igual a el ángulo f ´ más ángulo p´. Por hipótesis tenemos que el ángulo f es congruente con el ángulo f ´. Por tanto, el ángulo p es igual con el ángulo p ´. concluye que el ángulo p es congruente con el ángulo p ´.

4.1.5.3.Nombres de ángulos.

Cuando dos rectas l_1 y 2 son atravesadas por la secante 3, se forman 8 ángulos, como se puede ver en la figura siguiente:

Ilustración 66. Rectas L_1, L_2 y L_3.



Estos ochos ángulos se clasifican de acuerdo a su ubicación de la siguiente forma:

1. Ángulos a un mismo lado: Son los que se encuentran del mismo lado respecto de la secante. De acuerdo a la figura estarían en el mismo lado: 1, 2, 7 y 8.

2. Ángulos externos respecto de las paralelas: Se localizan por fuera de las paralelas, como los ángulos 7 y 6.

3. Ángulos Internos respecto de las paralelas: Se localizan por dentro de las paralelas, como los ángulos 8 y 5.

4. Ángulos par lineal: son aquellos ángulos consecutivos y su suma es un ángulo llano, como 2 y 3.

5. Ángulos opuestos por el vértice: ya definidos antes, como los ángulos: 2 y 4.

6. Conjugados internos: Son los colaterales internos, como 1 y 8.

7. Conjugados externos: Son los colaterales externos, como 2 y 7.

8. Alternos internos: Son dos ángulos que no son colaterales, ambos internos no adyacentes, como 1 y 5.

9. Alternos externos: Son dos ángulos que no son colaterales, ambos externos no adyacentes, como 7 y 3.

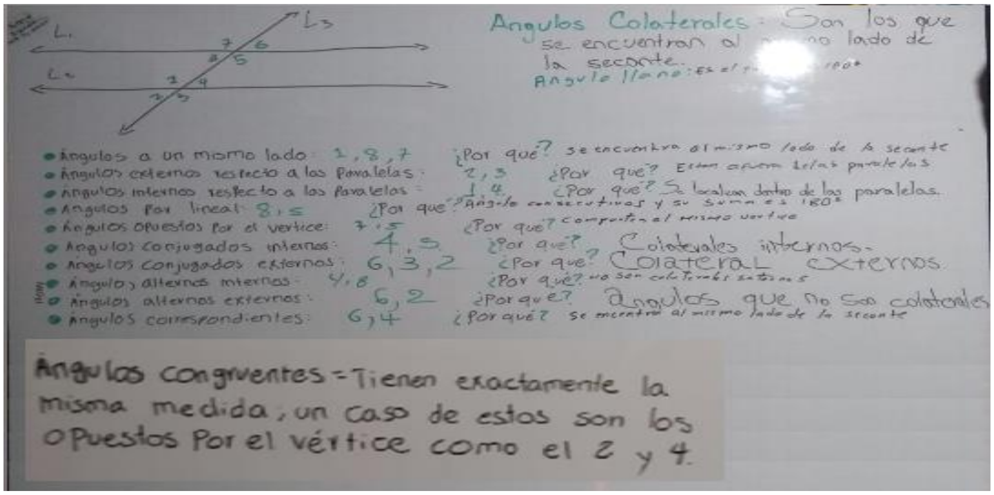
10. Correspondientes: Son los que se encuentran a un mismo lado de la secante, pero no son colaterales, como 1 y 7.

A continuación de este breve repaso, enunciamos las actividades que se propusieron a los estudiantes alrededor de este tema:

4.1.5.4.Actividad 1: encuentra los ángulos.

Con base en las definiciones y teoremas anteriores se planteó una actividad la cual consistió en dibujar dos rectas paralelas cortadas por una secante y se enumeraron los 8 ángulos formados, al lado de esta figura se colocó el nombre de los 10 ángulos. Se pidió a 10 voluntarios para que cada uno de ellos colocara los números de los ángulos al lado de los cuales ellos creían que eran sus nombres y por cada uno que pasara se explicaba el ¿por qué? Como se ve en la ilustración 67:

Ilustración 67. Ángulos

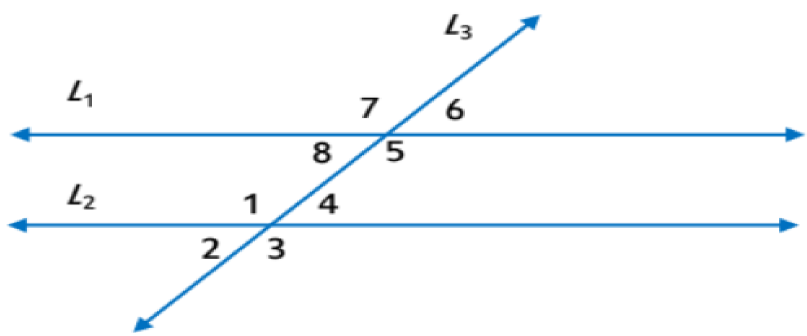


4.1.5.5.Actividad 2: reconociendo pares de ángulos.

El objetivo de esta actividad es precisar los nombres de los pares de ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas por una secante.

Para este propósito se planteó la siguiente actividad:

Ilustración 68. Paralelas



1. Completa la tabla siguiente, de los ángulos de la figura anterior, donde se representa:

P: par lineal, **AI**: alternos internos, **AE**: alternos externos, **C**: correspondientes, **CI**: conjugados internos, **NC**: no clasificado, **CE**: Conjugados externos, ≈: congruentes. (Luis C. R., 2013)

Tabla 3. Cuadro donde se completa la información pedida anteriormente de comparación de ángulos.

ángulos	1	2	3	4	5	6	7	8
1							C	
2			P					
3								
4	P							
5								
6								
7								
8								

En esta actividad se observó que la mayoría de los estudiantes no se percataron que algunos ángulos podían ser congruentes y que esta característica es primordial ya que garantiza que dos ángulos son iguales. Los ángulos correspondientes, los ángulos alternos internos y los ángulos alternos externos son iguales. Se analiza que tenían claro cada uno de los nombres de los ángulos, pero no se percataron de la congruencia que había en unos pares de ángulos. Como se puede ver en la imagen siguiente que cobija a la totalidad de las respuestas de los estudiantes:

Ilustración 69. Respuestas de las estudiantes del punto uno.

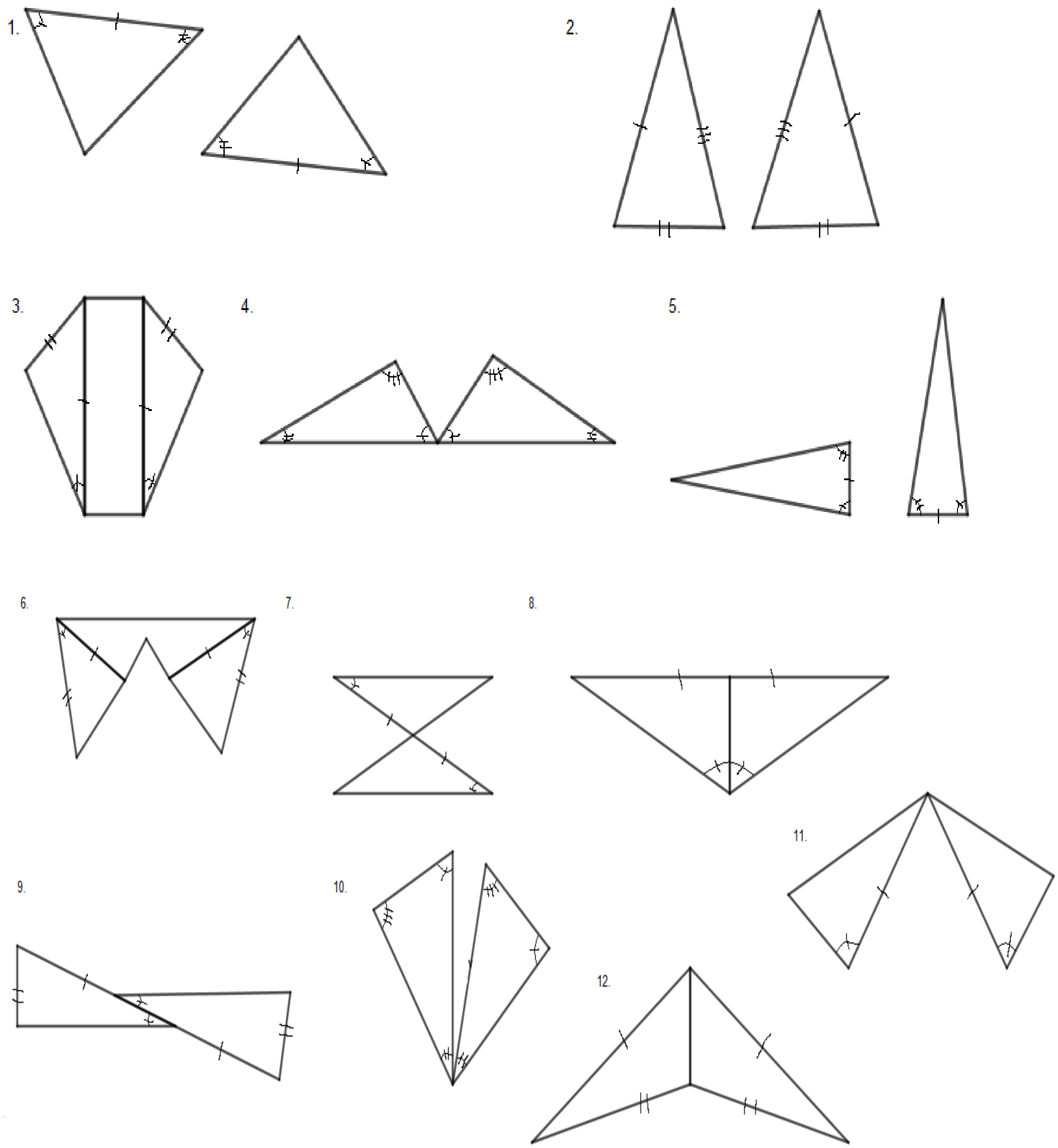
ángulos	1	2	3	4	5	6	7	8
1	NC	P	NC	P	AI	NC	C	CI
2	P	NC	P	NC	NC	AE	CE	NC
3	NC	P	NC	P	NC	CE	AE	NC
4	P	NC	P	NC	CI	C	NC	AI
5	AI	NC	NC	CI	NC	P	NC	P
6	NC	AE	CE	NC	P	NC	P	NC
7	NC	CE	AE	NC	NC	P	NC	P
8	CI	NC	NC	AI	P	NC	P	NC

4.1.5.6.Actividad 2: asimilando la congruencia para triángulos.

El objetivo de esta actividad es precisar los criterios de congruencias de triángulos basados en LAL, LLL, ALA.

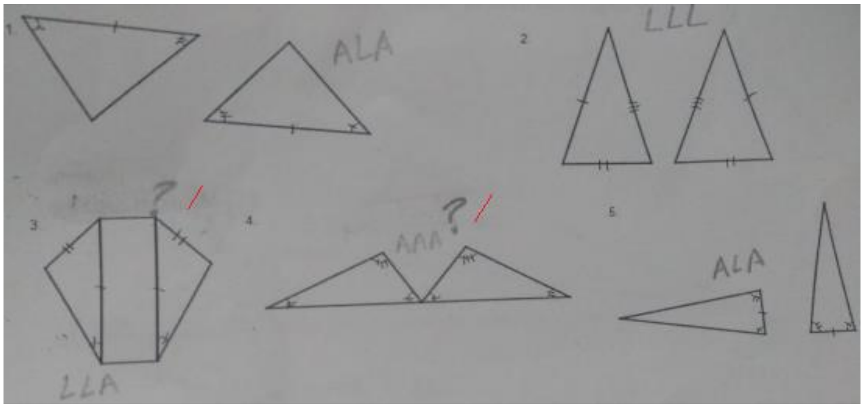
Para este propósito se planteó la siguiente actividad:

1. Citar el postulado de congruencia (LAL, ALA, LLL) que demostraría la congruencia de los triángulos, si lo hay (Edwin, 1986, pág. 122)



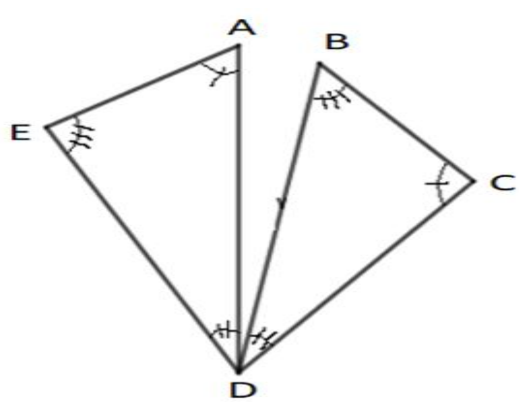
En esta actividad los estudiantes no tuvieron problemas con las figuras en donde se veían directamente las congruencias LLL, LAL, ALA; sin embargo, hubo dificultad en los casos en que no es posible establecer la congruencia con los criterios que tenían. En la siguiente imagen se puede evidenciar lo anteriormente mencionada:

Ilustración 70. Respuestas de las estudiantes del punto dos



En la figura siguiente el ∆DEA y el ∆DCB tienen una ‘’correspondencia AAA’’: los tres ángulos del ∆DEA son congruentes con las partes correspondiente del ∆DCB. Pero la correspondencia, no es una congruencia. Es decir, si los ángulos correspondientes son congruentes, simplemente se deduce que los dos triángulos tienen la misma silueta; pero no obligatoriamente el mismo tamaño.

Ilustración 71. Silueta del ∆DEA y el ∆DCB.



Los triángulos relacionados en esta forma se llaman semejantes.

4.1.5.7. Actividad 3: hallar el valor de un ángulo usando los criterios de congruencia para triángulos.

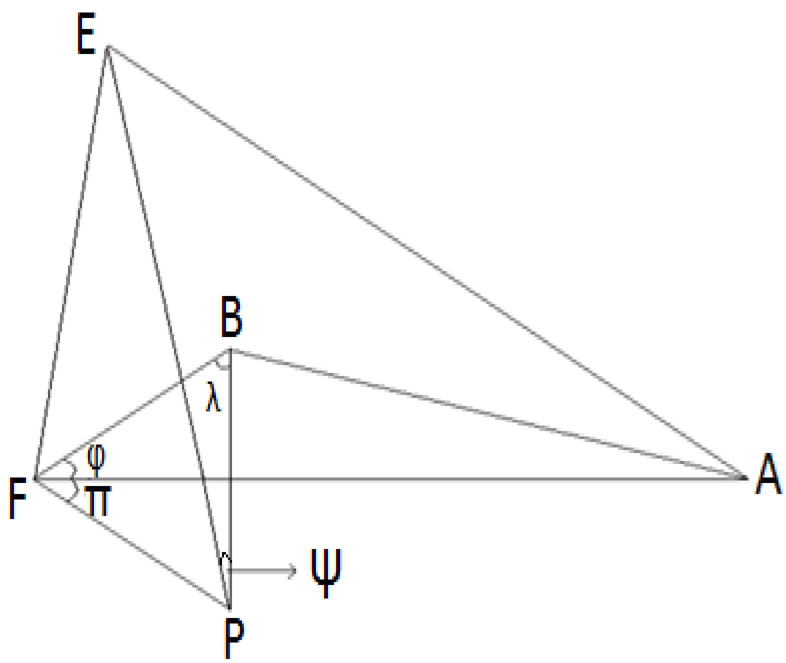
El objetivo de esta actividad estuvo enfocado en resolver problemas geométricos que involucraran los postulados de congruencia para triángulos.

Para este propósito se planteó la siguiente actividad:

1. Se da la figura con la siguiente información:

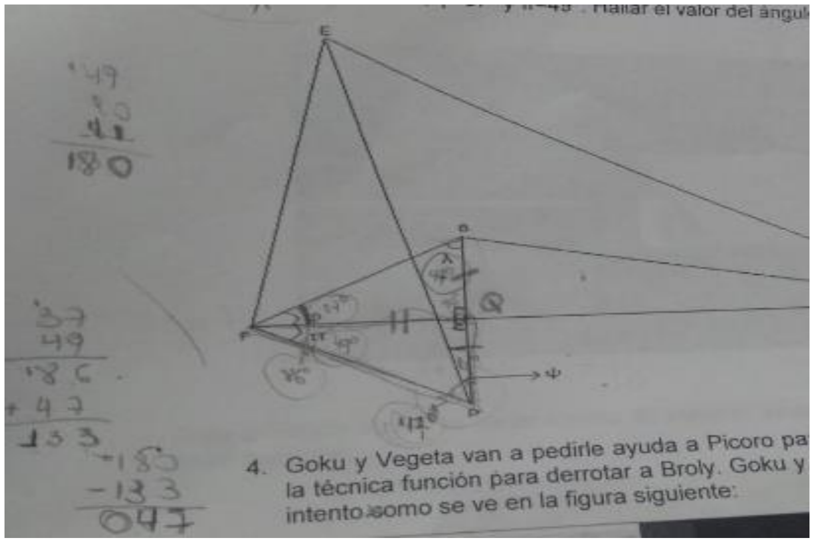
$\Delta EFP \approx \Delta FBA$ y $\lambda = 47°, \varphi = 37°$ y $\pi = 49°$. Hallar el valor del ángulo ψ.

Ilustración 72. Problema.



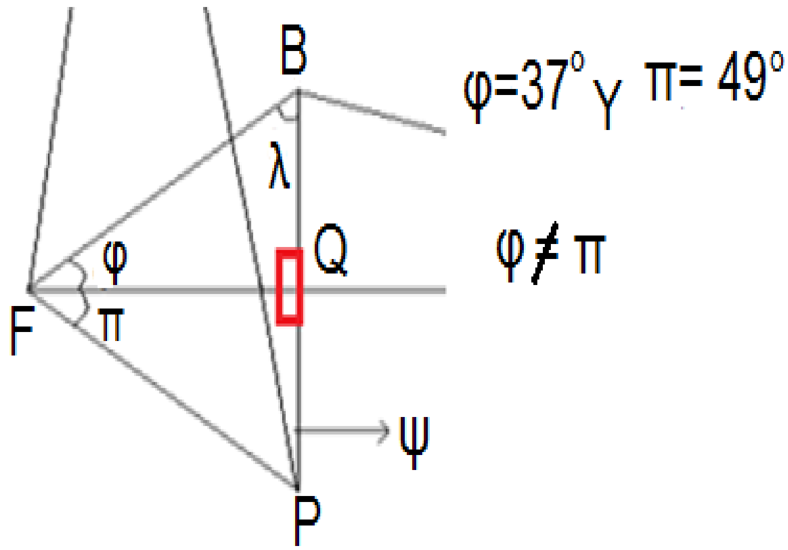
Los estudiantes comenzaron a hacer cálculos para hallar lo pedido, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos internos es 180, así encontraron el valor de los ángulos del ΔFBA, a este triángulo lo trataron de dividir por la mitad, es decir hacer dos triángulos congruentes ($\Delta FPQ \approx \Delta FBQ$), utilizando el postulado ALA y asumiendo que en el punto Q eran ángulos de 90 grados. Como se puede ver en la imagen siguiente que cobija las respuestas de algunos estudiantes:

Ilustración 73. Respuestas de las estudiantes del punto tres, primer método



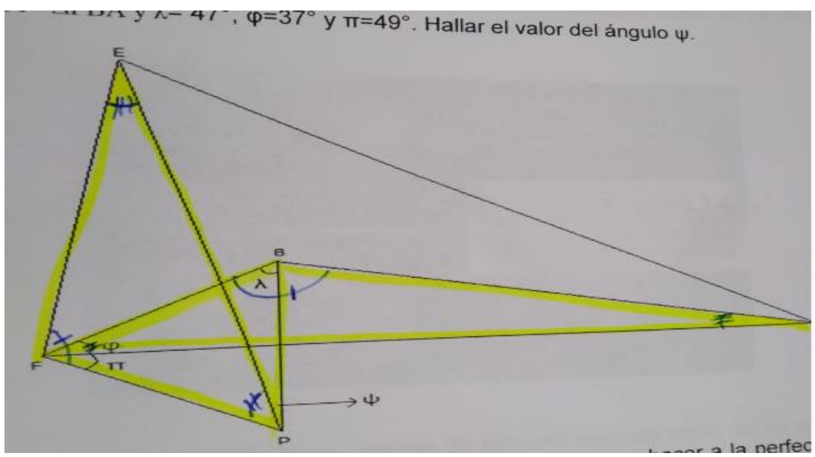
Este método para encontrar lo pedido no tuvo éxito debido a que los triángulos realizados (ΔFPQ y ΔFBQ), no cumplen con ningún postulado de congruencia para triángulos, además no había ninguna información para decir que el ángulo en Q era 90 grados y φ es diferente de π.

Ilustración 74. ∆FPQ y ∆FBQ.



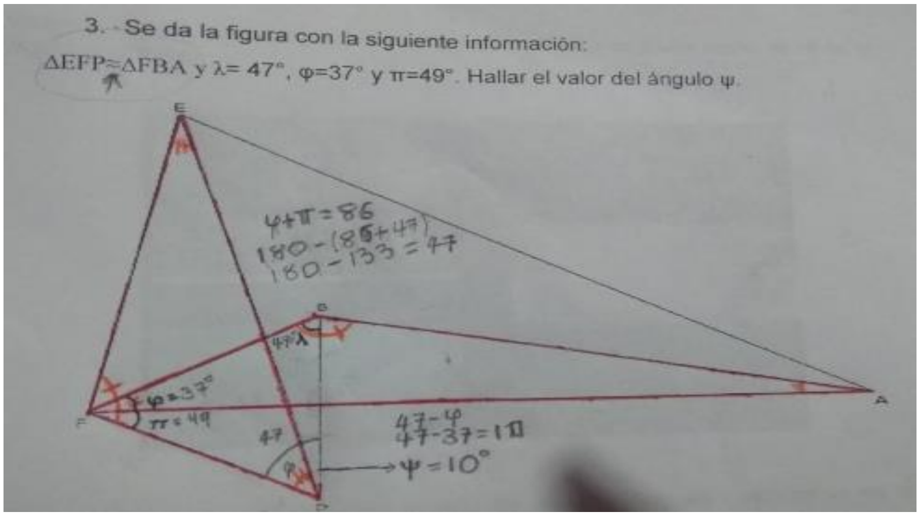
Los alumnos después de apreciar que esta opción los llevó por un camino erróneo, analizaron mejor los dados suministrados y se percataron que $\Delta EFP \approx \Delta FBA$. Por tanto, sus ángulos internos son iguales, como se observa en la ilustración siguiente:

Ilustración 75. Respuestas de las estudiantes del punto tres, segundo método.



Ellos observaron que uniendo algunos procesos que hicieron en el primer método como encontrar todos los valores de los ángulos internos del ∆FBA con el segundo método, donde encontraron que el ángulo φ del ∆ FBA es correspondiente con el ángulo del ∆EFP. Así llegaron a la solución. Como se puede ver en la imagen siguiente que cobija las respuestas de la mayoría de los estudiantes:

Ilustración 76. Respuestas de las estudiantes del punto tres, uniendo los dos métodos.



4.1.5.8.Actividad 4: la fusión, la técnica de los criterios de congruencia para triángulos.

El objetivo de esta actividad fue la solución de problemas geométricos referida a los postulados de congruencia para triángulos.

Para este propósito se planteó la siguiente actividad:

1. Gokú y Vegetta van a pedirle ayuda a Pícoro para hacer a la perfección la técnica fusión para derrotar a Broly. Gokú y Vegetta hacen su primer intento como se ve en la figura siguiente:

Ilustración 77. Dedos no alineados correctamente para hacer la técnica la fusión.

Gokú y Vegetta hacen su segundo intento 30 minutos después como se ve en la figura siguiente:

Ilustración 78. Angulo de inclinación incorrectos para hacer la técnica la fusión.

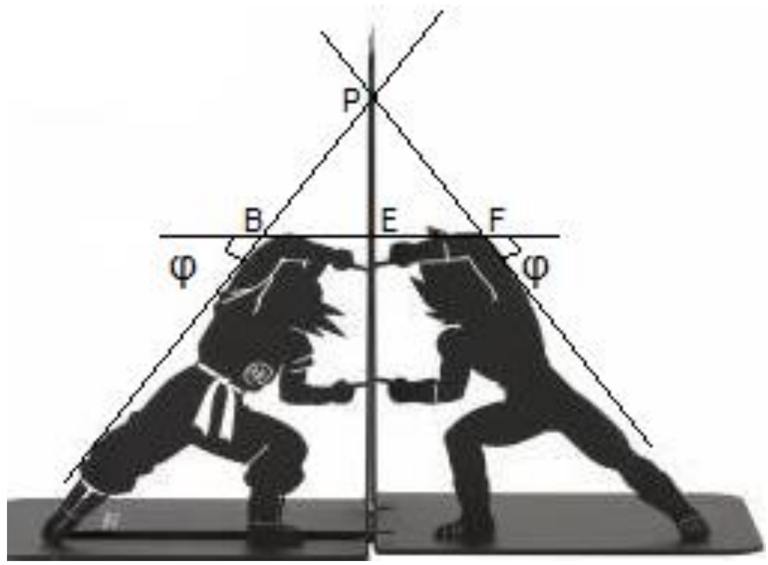
Gokú y Vegetta hacen su tercer intento 30 minutos después como se ve en la figura

siguiente:

Ilustración 79. Técnica la fusión.

En el tercer intento su posición final es la siguiente figura, con la información anterior que puedes conjeturar al respecto del $\Delta BEP\ y\ \Delta EFP$.

Ilustración 80. Técnica la fusión con sus ángulos de inclinación correctamente y sus dedos alineados.



El propósito de este problema fue entusiasmarlos a trabajar con un anime como el de dragón Ball Z, muy conocido y visto por grandes y chicos. Aquí se puede evidenciar cómo acogieron los postulados de congruencia para triángulos para poder dar su opinión al respecto de los ∆BEP Y ∆EFP. Con la información anterior se dieron cuenta que los ángulos opuestos por el vértice eran iguales y que la perpendicular corta al ∆PBF por la mitad, así se podían utilizar dos de los tres postulados de congruencia para triángulos para decir que los ∆BEP Y ∆EFP eran congruentes, y uno de los postulados se descarta ya que la las referencias no eran suficientes para decir que él también se cumplía. Como se puede ver en las imágenes siguientes que cobija las respuestas de la mayoría de los estudiantes:

Ilustración 81. Congruencia entre los triángulos PBE y el triángulo PFE.

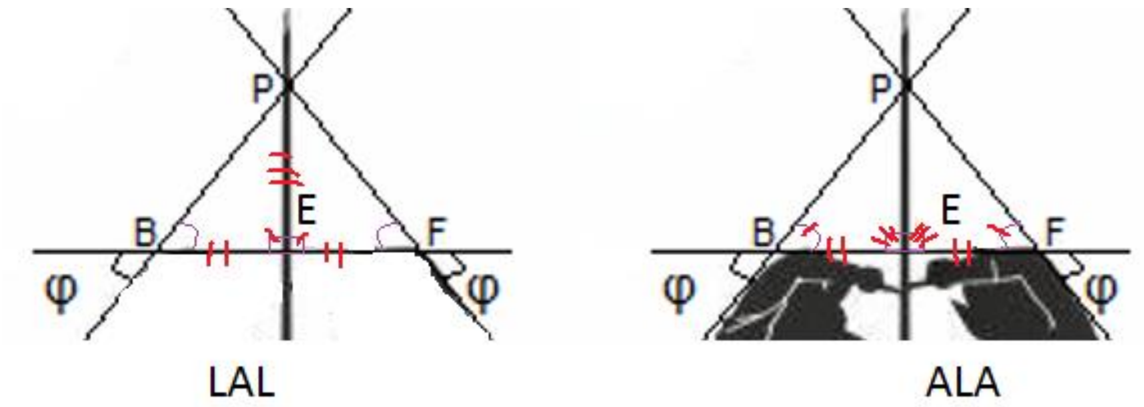
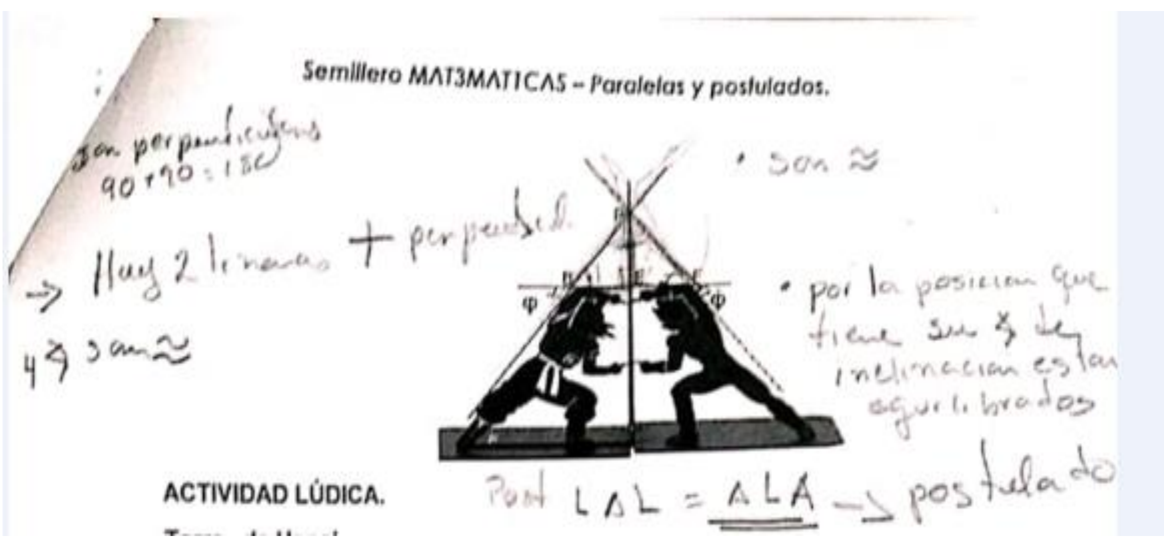


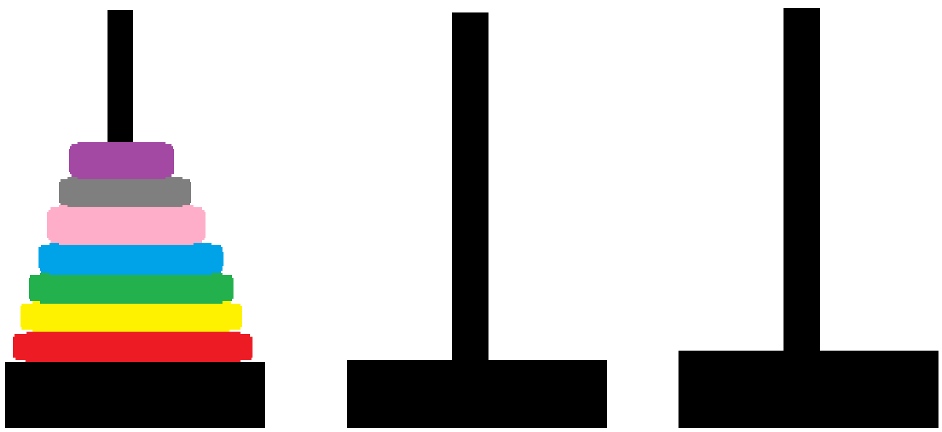
Ilustración 82. Respuestas de las estudiantes del punto cuatro, utilizando los criterios de congruencia entre triángulos



4.1.5.9.Torre de Hanói: un reto para divertirse.

La torre de Hanói es un rompecabezas inventado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas.

Ilustración 83. Torre de Hanói.



Este juego de mesa consiste en un número de discos perforados de radio decreciente que se insertan en uno de los tres postes fijados a un tablero. El juego consiste en trasladar los discos de la primera a la tercera estaca, para realizar este objetivo, es necesario seguir tres simples reglas:

1. Solo se puede mover un disco cada vez y para mover otro, los demás tienen que estar en postes.
2. Un disco de mayor tamaño no puede estar sobre uno más pequeño.
3. Solo se puede desplazar el disco que se encuentre arriba en cualquiera de los postes.

En las siguientes imágenes se ilustra la secuencia de este juego para dos discos y tres discos con el mínimo número de pasos, teniendo en cuenta las instrucciones.

Ilustración 84. Solución en tres pasos.

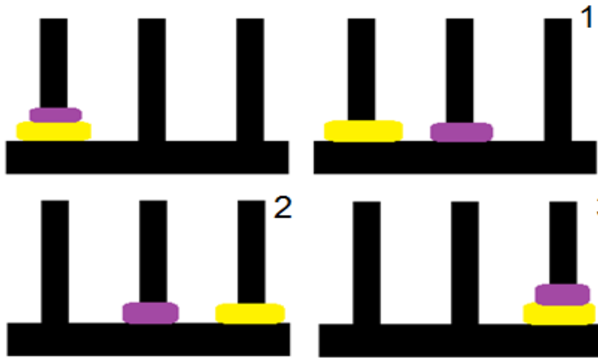
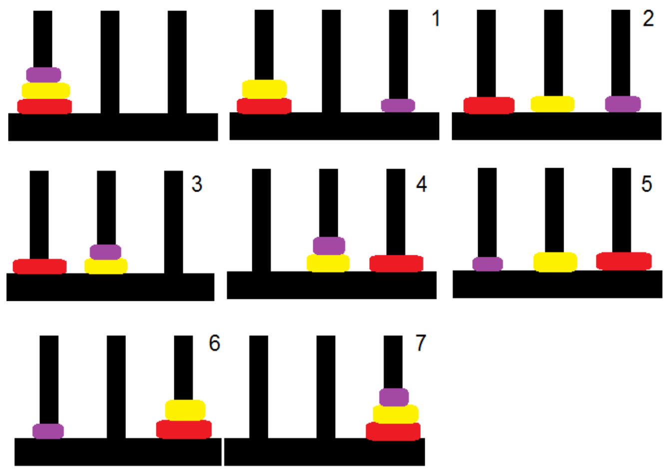


Ilustración 85. Solución en siete pasos



Ahora observemos una fórmula general para realizar este pasa-tiempo con 4 discos y 7 discos con el mínimo número de movimiento:

Número de Discos	Cantidad de Movimientos
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 3$
3	$a_3 = 7$
4	$a_4 = 15$
5	$a_5 = 31$
⋮	⋮
N	$a_n = 2^n - 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = 3 \quad = a_1 + 1 \quad = (2*1) + 1$

$a_3 = 7 \quad = a_2 + 1 \quad = 2(2*1 + 1) + 1 \quad = 2^2*1 + 2 + 1$

$a_4 = 15 \quad = a_3 + 1 \quad = 2\,(2^2*1 + 2 + 1) + 1 \quad = 2^3*1 + 2^2 + 2 + 1$

$a_5 = 31 \quad = a_4 + 1 \quad = 2\,(2^3*1 + 2^2 + 2 + 1) + 1 \quad = 2^4*1 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$

$a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 1$

Utilizando la fórmula: $1+2+2^2+...+2^n = 2^n-1$ podemos obtener $a_n = 2^n - 1$, para conocer el total de movimientos mínimos para n discos.

El número mínimo de movimientos que se necesita para cuatro discos seria:

$a_4 = 2^4 - 1$

$a_4 = 16 - 1$

$a_4 = 15$

Por tanto, los pasos mínimos para 4 discos son: 15.

El número mínimo de movimientos que se necesita para siete discos seria:

$a_7 = 2^7 - 1$

$a_7 = 128 - 1$

$a_7 = 127$

Por tanto, los pasos mínimos para 4 discos son: 127.

4.1.5.9.1. Actividad 5: Torre de Hanói.

El objetivo de esta actividad fue incentivar el pensamiento lógico a través del juego al que acabamos de referirnos.

Para este propósito se planteó la siguiente actividad:

Realizar la torre de Hanói con 7 discos, con las reglas descritas anteriormente.

Ilustración 86. Siete discos

Como todo juego nuevo, se necesita de practica para comprender su dinámica, así comenzaron todos los grupos; después de un tiempo se fueron familiarizando y lograron pasar de un lado a otro de una manera correcta los discos teniendo en cuenta las reglas anteriormente mencionadas. Luego se les pidió que lo hicieran en 127 pasos ya que con 7 discos ese es el mínimo número de pasos. Después comenzaron a competir entre los grupos, al que lo hiciera más rápido y en el menor tiempo posible. En la siguiente imagen se ve como unos alumnos realizan lo pedido.

Ilustración 87. Estudiantes realizando el 5 punto

4.1.5.10. Reflexión.

No debe olvidarse que los estudiantes traen un conocimiento previo y en el caso de la primera actividad esto fue muy diciente. En este caso no hubo dificultades, se notaba que era un tema ampliamente conocido por ellos y lo trabajaron con ánimo y seguridad.

En la actividad alusiva a la congruencia de triángulos, los alumnos se percataron de que algunos de los puntos no cumplían ninguno de los tres postulados (LLL, ALA, LAL). Esto causó algo de temor a la hora de responder, es decir, sabían que en algunos casos no satisfacían ninguno de los criterios, pero ellos esperaban que, para todos los puntos expuestos, funcionaran los criterios de congruencia de triángulos.

En la actividad referida a hallar el ángulo pedido teniendo en cuenta los postulados de congruencia para triángulos, los estudiantes escogieron dos estrategias que no tuvieron éxito, pero esto no los desanimó, ni se dieron por vencidos. Por el contrario, siguieron con más ánimo y entusiasmo, con lo cual al final encontraron una estrategia que los condujo por la respuesta correcta. Se considera que los alumnos entendieron la noción de congruencia y la importancia de saber que la suma de los ángulos internos es 180. Se resalta que la constancia, el trabajo en equipo y el esfuerzo dan frutos y ayuda a afianzar los conocimientos.

En la actividad de la Torre de Hanói, se evidenció que a los estudiantes les gustan las actividades que les enseñan a hacer estrategias ganadoras, debido a que pueden fomentar su pensamiento crítico y tener una mejor interacción con sus compañeros, (ver anexo 6: paralelas y postulados, pág.162).

4.1.6. Razón y Proporción

Antes de iniciar las actividades propuestas de esta guía se recordaron las nociones de área, semejanza, congruencia y se dieron a conocer los conceptos de ***razón y proporción.*** Para recordemos estos conceptos: dados **a** y ***b*** dos cantidades, con $b \neq 0$, el cociente **a** sobre **b** se le llama razón, y a la igualdad de dos razones se le llama proporción. La diferencia entre razón y fracción es problemática pues son dos conceptos que se tienden a confundir, entre otras cosas por su escritura matemática similar. Debido a esto fue necesario aclarar que una fracción representa la cantidad de una magnitud y la razón es la relación entre dos magnitudes. Después de este preámbulo se propone el juego del tangrama con el propósito de que los estudiantes accedan a estos conceptos de una manera lúdica.

4.1.6.1.Tangram

El tangrama cuadrado, a diferencia del tangrama circular del cual se escribió anteriormente, es un juego chino muy antiguo llamado “chi chiao pan” que significa juego de los siete elementos o tabla de la sabiduría. El **tangram** es un rompecabezas que está compuesto por 7 piezas: un paralelogramo (romboide), un cuadrado y 5 triángulos de diferentes tamaños. El objetivo de este juego es crear figuras utilizando las 7 piezas, sin superposición de ellas.

En la enseñanza de las matemáticas el tangram se emplea para introducir conceptos de geometría plana, y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los niños o jóvenes, pues permite ligar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas.

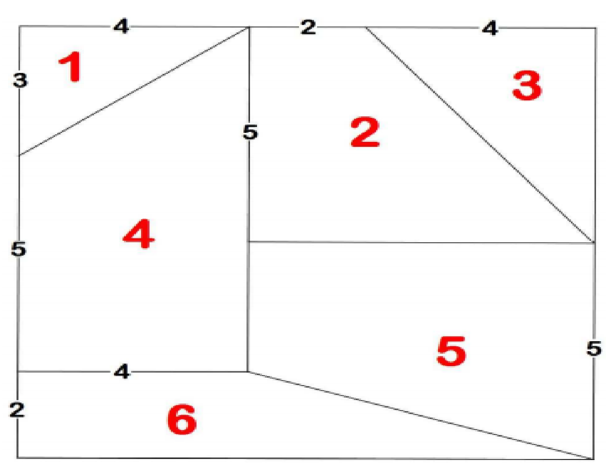
4.1.6.2.Rompecabezas semejantes

4.1.6.2.1. Actividad 1.

La actividad consistía en elaborar un tangrama ampliado a partir de un cuadrado formado por seis figuras con unas determinadas medidas *(ilustración 85*) y teniendo en cuenta las siguientes indicaciones:

El cuadrado está dividido en 6 piezas (rompecabezas) con sus respectivas medidas.

Ilustración 88. Rompecabezas



1. Recortar cada pieza y calcularle su respectiva área.

2. Se reparte al azar una carta de proporcionalidad. Respecto a esta carta, construir el rompecabezas ampliado.

3. Encontrar el área del nuevo rompecabezas ampliado que formó.

4. ¿Cuál es la diferencia entre el área de los dos rompecabezas? Trate de justificar su respuesta

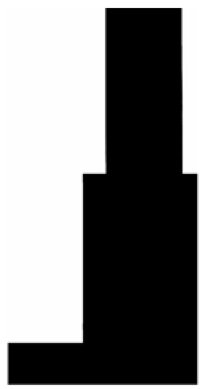
5. Formar la siguiente figura con el rompecabezas.

Con la primera indicación se buscaba que los estudiantes hallaran el área de las diferentes piezas del rompecabezas. Aquí, se nota que no hubo dificultades, puesto que era un tema que ya se había trabajado en las anteriores sesiones; así se pudo constatar que el trabajo arduo que se había hecho con respecto al área llevó a un aprendizaje significativo, ya que conocían como implementar las fórmulas a cada una de las figuras y a su vez como se podían relacionar.

Con la segunda indicación se presentaron dificultades debido a que los estudiantes tenían que utilizar el tema que se les había presentado al inicio de la sesión, donde se pudo observar que los estudiantes no comprendieron el tema expuesto, ya que al momento de implementarlos en un problema práctico se les presentaron dificultades. Pero los errores pueden utilizarse de manera significativa en la enseñanza porque permitieron visualizar las dudas y falencias de los estudiantes y buscar los caminos para ayudar a superarlas. Cabe resaltar que los estudiantes buscan poner en juego sus conocimientos previos y de lo cual ellos tienen un buen manejo, lo cual se evidenció en el caso de resolver la igualdad de dos razones y encontrar la incógnita por medio de la regla de tres, ya que es un procedimiento conocido y lo sabían manejar perfectamente.

Finalmente, para el último ítem se utilizó el rompecabezas para formar la figura de la ilustración 86. Es de resaltar las destrezas espaciales de los estudiantes para armar figuras y formas geométricas.

Ilustración 89. Sombra

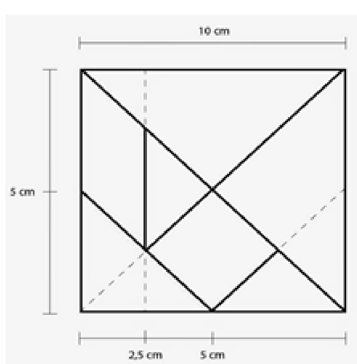


4.1.6.3.El reconocimiento

4.1.6.3.1. Actividad 2.

En la segunda actividad se trataba de familiarizarlos con el tangrama para que aprendieran a utilizar sus piezas de una manera adecuada.

Ilustración 90. Rompecabezas con medidas



1. Identificar si hay figuras que son semejantes; justificar.
2. Identificar si hay figuras que son congruentes; justificar.
3. Identificar si hay figuras que son iguales; justificar.
4. Con los triángulos pequeños, ¿qué otras figuras se pueden formar? Dibujarlas.
5. ¿Con cuantas piezas se puede formar el triángulo grande? Mostrar.
6. Con todas las fichas formar un triángulo.

En los tres primeros ítems se trataba de identificar las fichas del tangram y analizar qué relación tenían entre ellas, es decir, si eran semejantes, congruentes o iguales. A la hora de justificar cada una de estas relaciones los estudiantes utilizaron distintos procedimientos. Para la igualdad utilizaron un procedimiento aritmético para verificar los números que representaban el área encontrada de cada pieza, pues de esta manera se encontraban las figuras iguales. Para la semejanza de las figuras se dejaron guiar por la intuición; es decir aquellas que pareciesen de la misma forma y diferente tamaño.

Así mismo fue para la congruencia, donde lo comprobaban superponiendo las piezas, es decir, que tuvieran la misma forma y tamaño. Aun así, con estos dos últimos procedimientos no se garantizaba que las piezas cumplieran lo que se les pedía. En la mayoría de justificaciones que fueron brindadas por los estudiantes se observó que la intuición se privilegiaba sobre la comprobación teórica.

No obstante, se les advirtió de la dificultad que conlleva en matemáticas el uso exclusivo de la intuición sin la posterior constatación teórica. Esta última provee de un procedimiento lógico para garantizar la validez de sus respuestas; tal como se observó en la justificación de la igualdad de dos figuras, donde se utilizó el Teorema de Pitágoras, un procedimiento inmerso en la geometría para encontrar el área de las figuras.

4.1.6.4.Conclusiones

La observación y la experimentación son un recurso valioso en el aula de clase, sin embargo, no es suficiente pues se requiere de resultados matemáticos que respalden las respuestas obtenidas a los problemas propuestos, y así afirmar que son correctas. De esta manera, la geometría al ser una ciencia formalizada permite verificar mediante el uso de sus resultados teóricos cuando dos figuras son semejantes o congruentes, de esta manera, se le exige al estudiante un procedimiento lógico para dar respuestas correctas a sus problemas en geometría.

Los estudiantes siempre tienden a relacionar un concepto nuevo con otro que sea familiar para ellos. Es el caso de los problemas de proporcionalidad, utilizaron la regla de tres simple porque era un procedimiento conocido por ellos donde se especifican tres valores conocidos y se debe encontrar el valor de la incógnita. Sin embargo, cuando la proporcionalidad se daba entre tres figuras, no sabían cómo utilizar la regla de tres. Es ahí donde se identifica que los estudiantes se rigen en seguir la secuencia de solución que les da el profesor y no analizan los conceptos de qué otra forma puede implementarlos en un problema si le cambian el orden.

Cuando en las clases se retomaban ciertos conceptos que habían sido difíciles de comprender para los estudiantes, y se notaba como en el trascurso de las clases ya no eran tan problemáticos y mostraban cierta apropiación de estos, se pensó en la necesidad de incluir actividades lúdicas para enseñar estos conceptos para generar en los estudiantes motivación, disposición, fomento del trabajo grupal, su participación activa, el debate y llevarlos a un aprendizaje significativo que pueda ser aplicado en el aula, (ver anexo 7:razón y proporcionalidad, pág.169).

4.1.7. Cultivando el concepto de área con los estudiantes.

En esta sesión se empezó por recordar a los estudiantes la noción de área de una superficie acotada y cerrada en el plano, de igual manera la implementación y demostración de algunas fórmulas de área, tales como la fórmula del área del rectángulo, trapecio, cuadrado y triángulo.

4.1.7.1.Recordando definiciones de figuras geométricas.

Se recuerdan las definiciones sobre polígonos, de la geometría plana euclidiana, siguientes:

- Polígono: es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.
  Cuadrilátero: es un polígono de cuatro lados.
- Cuadrado: es un polígono de cuatro lados iguales que forman cuatro ángulos rectos.
  Paralelogramo: cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
- Rectángulo: son los paralelogramos que tienen todos sus ángulos rectos.
- Triángulo: es un polígono de tres lados.

4.1.7.2.Postulado del área.

A toda región poligonal le corresponde un número positivo único. (Edwin, 1986, pág. 293)

Aunque esta definición es demasiado formal para un estudiante de bachillerato, es central el concepto anterior ya que permite reconocer que toda región cerrada y acotada, por rara e intrincada que sea, tiene asignado un número real que representa la medida de su superficie.

4.1.7.3.Definición de área:

El área es la medida de la superficie de una figura geométrica, es decir, la medida de su región interior.

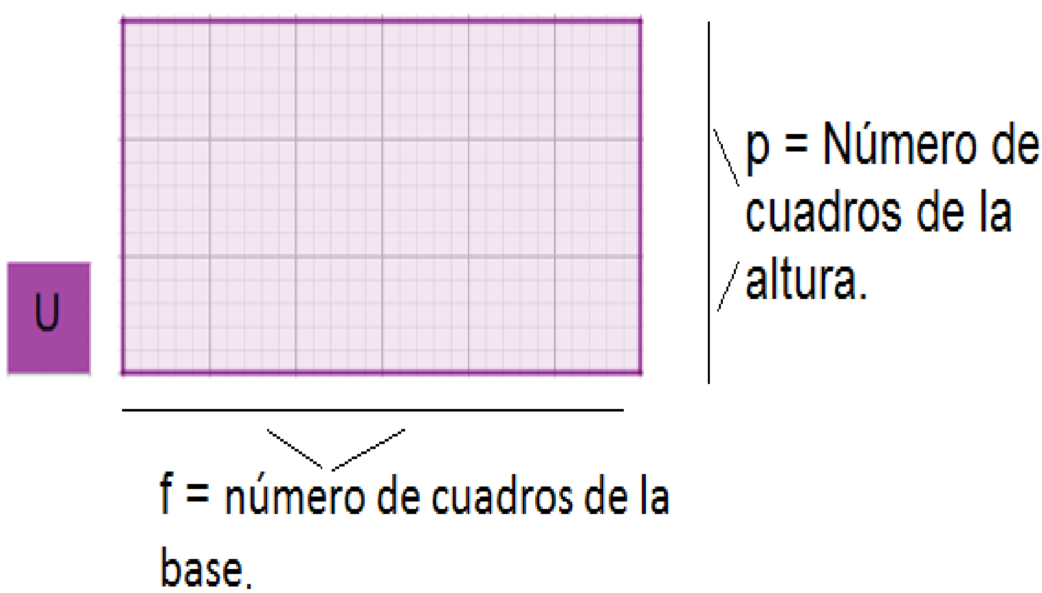
Ilustración 91. Área.

4.1.7.4. Áreas: demostración de las fórmulas más comunes de área de figuras rectilíneas.

4.1.7.4.1. Área del rectángulo.

Tomemos una unidad de medida cualquiera U y la comparamos con los rectángulos de la siguiente manera:

Ilustración 92. Unidad.



Hacemos el producto con el número de cuadros de la base con el número de cuadros de la altura que están dentro del rectángulo.

$f_U \text{ x } p_U = (f \text{ x } p)_U{}^{2}$, con f y p números reales.

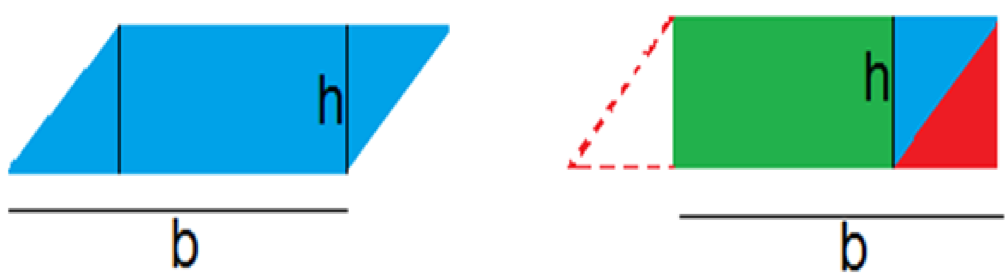
Base (b) x altura (h) = área del rectángulo.

Por tanto, la fórmula del área del rectángulo es b X h. Esta fórmula se interpreta con la con la definición de área ya que abarca toda la región interior de la figura rectangular.

4.1.7.4.2. Área del paralelogramo.

El área del paralelogramo es igual al área del rectángulo. Ya que el rectángulo es un tipo especial de paralelogramo y todo paralelogramo se puede transformar en un rectángulo con la misma área.

Ilustración 93. Área del paralelogramo.

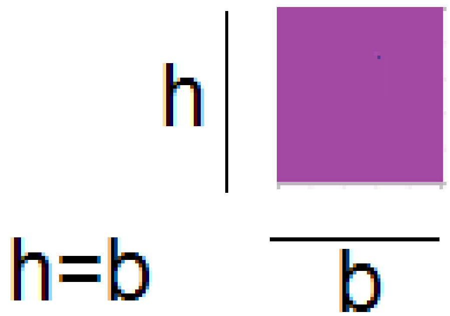


Por tanto, la fórmula del área del paralelogramo es bxh.

4.1.7.4.3. Área del cuadrado.

El área del cuadrado es un caso peculiar del área del rectángulo, donde la base y la altura son iguales, es decir sus lados son iguales.

Ilustración 94. Área del cuadrado.

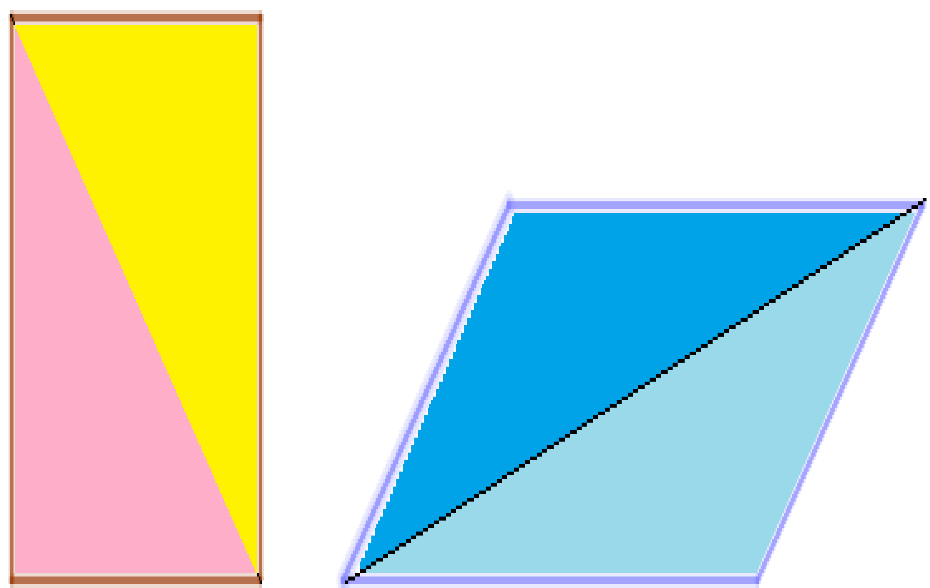


Por tanto, la fórmula del área del cuadrado es l X l = l^2

4.1.7.4.4. Área del triángulo:

El área del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo ya que cualquier triángulo se puede observar como la mitad del paralelogramo.

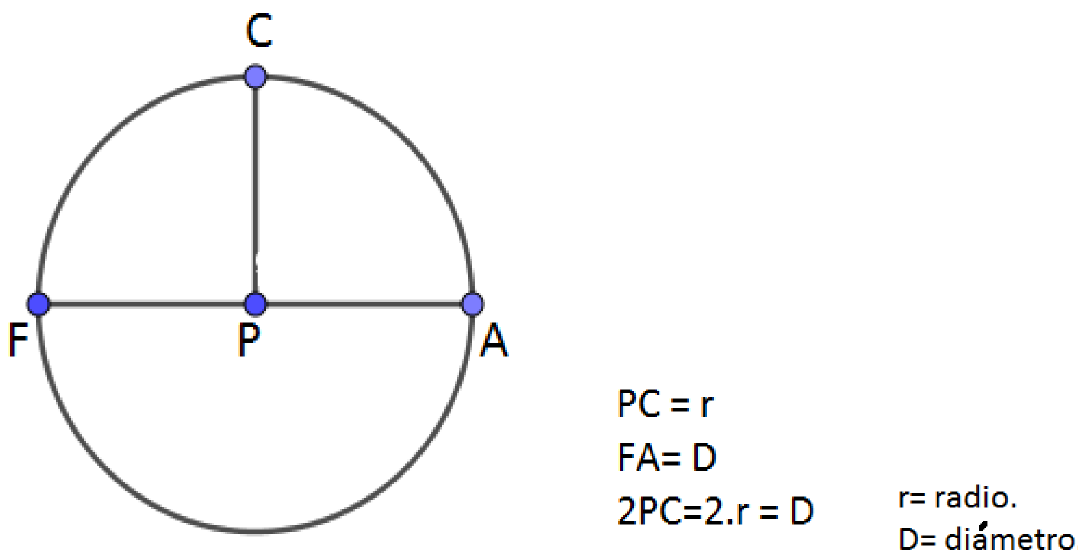
Ilustración 95. Área del triángulo, foto.



Por tanto, la fórmula del área del triángulo es b x h/ 2.

4.1.7.4.5. Perímetro y área de círculo.

Ilustración 96. Círculo, realizado en Geogebra.



Primero hablaremos de la procedencia del número π (PI) en el perímetro del círculo.

Recordemos que el perímetro de un círculo es:

P= 2.π. r; P= perímetro, r= radio.

Utilizando la ley conmutativa de la multiplicación tenemos:

P= π. 2.r

Recordemos que el diámetro es dos veces al radio, es decir:

P= π. D; D=2.r, D= diámetro.

Despejando π (PI) se tiene:

$\frac{p}{D} = \pi = 3.1415$; aproximando el número PI a cuatro cifras decimales.

Si tomamos la circunferencia de cualquier círculo y medimos su perímetro y esto lo dividimos por la medida de su diámetro, vamos a obtener como resultado a π. Esta es la procedencia del número π (PI).

Ahora, para encontrar el área del círculo se utiliza la siguiente fórmula:

Área del círculo = $\pi. r^2$

Como el diámetro es dos veces el radio, podemos despejar el radio:

D =2. r

$\frac{D}{2} = r$

Reemplazando en la fórmula del área del cuadrado, tenemos:

Área del circulo= $\pi . \left(\frac{D}{2}\right)^2$

Utilizando una ley de la potenciación se tiene:

Área del circulo= $\pi . \frac{D^2}{2^2}$

Por tanto:

Área del circulo= $\pi . \frac{D^2}{4}$

Por tanto, se tienen dos formas de ver el área del cuadrado:

Área del circulo= $\pi . \frac{D^2}{4} = 2. r^2$

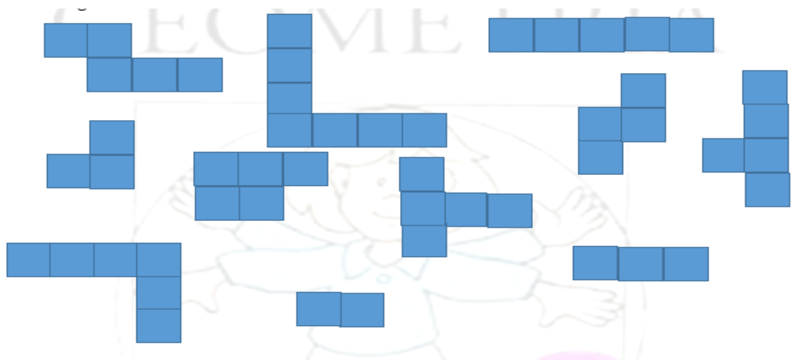
Después de este recorrido teórico, se anuncian las actividades que se propusieron a los estudiantes alrededor de este tema:

4.1.7.5.Actividad 1: construcción de dos cuadrados idénticos.

El objetivo de esta actividad es construir figuras midiendo directamente la superficie.

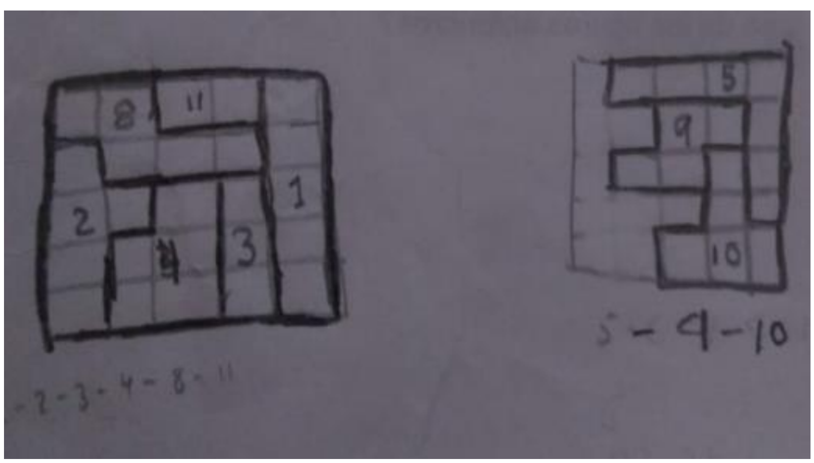
Con las figuras dadas formar dos cuadrados de idéntico tamaño.

Ilustración 97. Cuadrados idénticos.



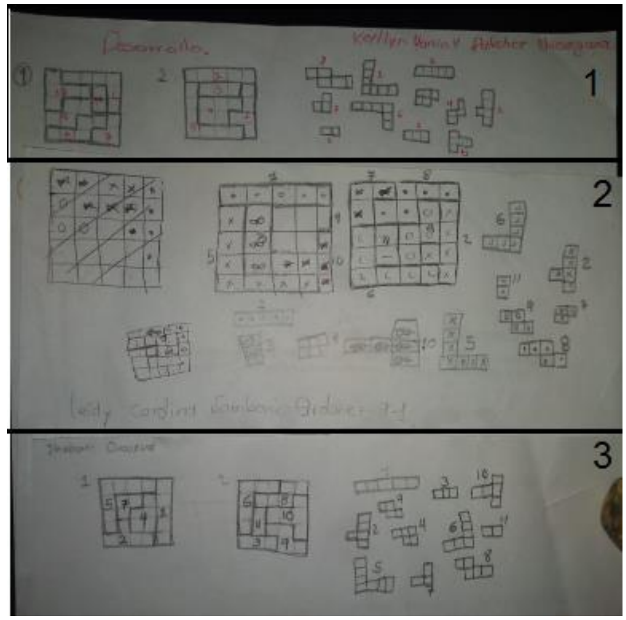
En esta actividad se explicó que las figuras se podían rotar para poder hacer los dos cuadros idénticos. Los estudiantes contaron el número de cuadros pequeños que conformaban cada ficha, se percataron de que el total de estos cuadritos, daba para formar dos cuadrados formados por 25 cuadros pequeños; concluyeron que los lados eran de 5 cuadrados pequeños, así formaron los cuadrados idénticos. Como se explica en la siguiente imagen.

Ilustración 98. Figura construida.



En la imagen siguiente se puede observar las tres formas diferentes de respuesta que encontraron los alumnos:

Ilustración 99. 3 respuestas diferentes

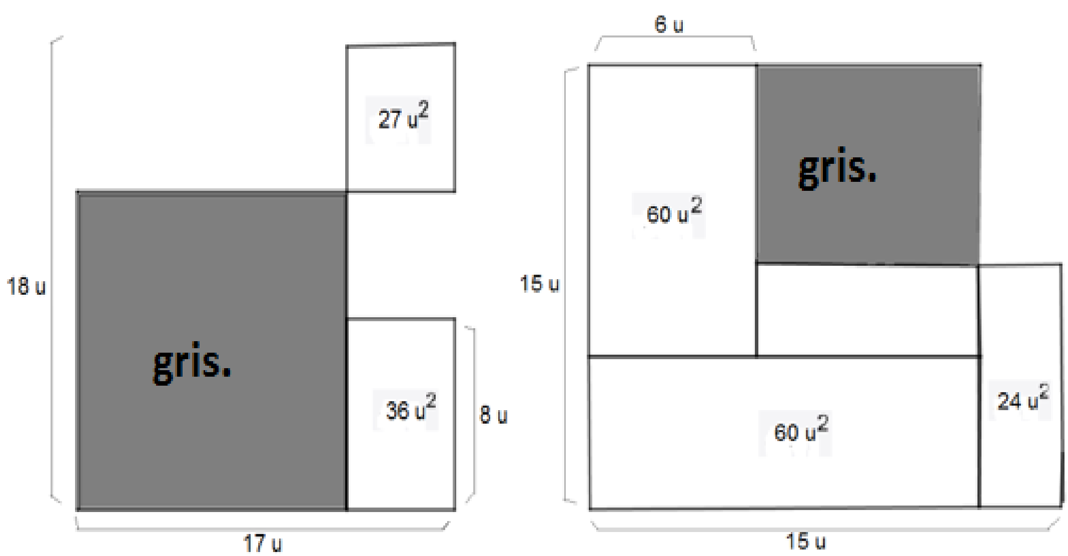


4.1.7.6.Actividad 2: despejando y calculando.

El objetivo de esta actividad es recordar las fórmulas de área de algunas figuras típicas.

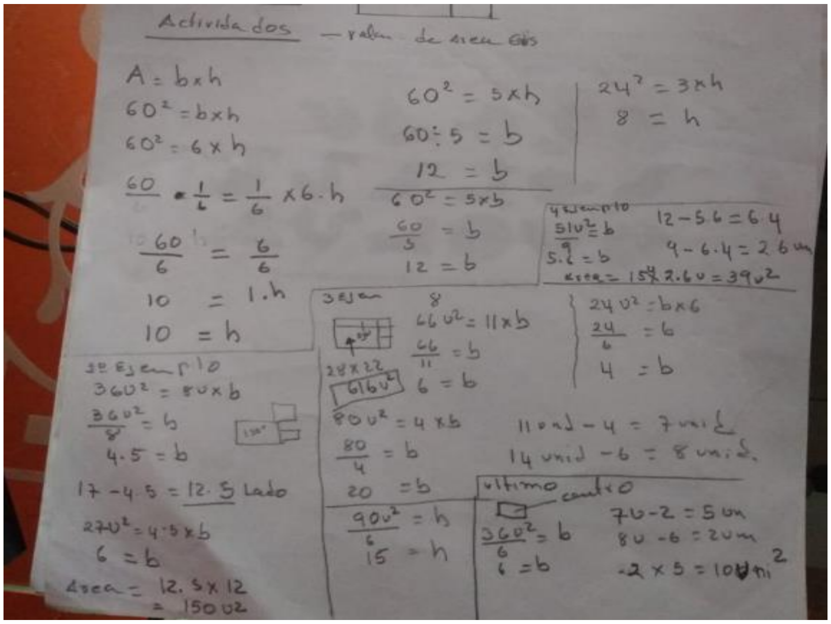
Encontrar el valor del área sombreada con color gris de las siguientes figuras:

Ilustración 100. Área gris.



En esta actividad se recordó a los estudiantes cómo encontrar cada una de las incógnitas con la fórmula del área del rectángulo. Los estudiantes asimilaron con rapidez los dos despejes y así realizaron esta actividad satisfactoriamente. Como se puede ver en la ilustración, que abarca la respuesta de la totalidad de los alumnos:

Ilustración 101. Resultados

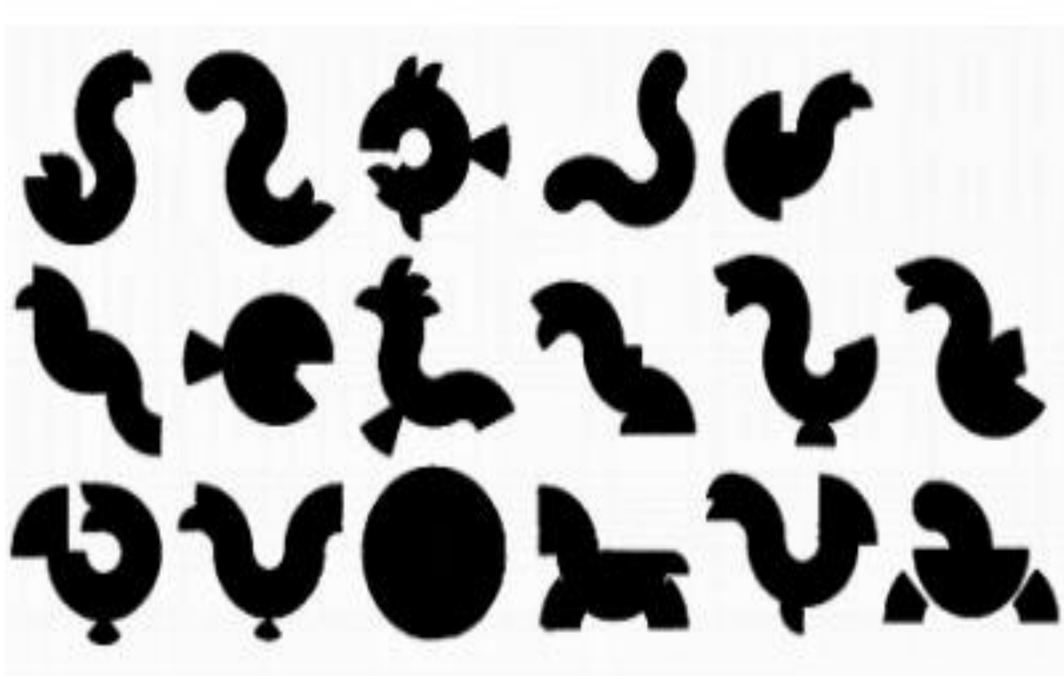


4.1.7.7.Actividad 3: uso del tangrama circular

El objetivo de esta actividad fue entender las bases teóricas del proceso de medir figuras planas.

En una sesión pasada se menciona el tangrama circular el cual es un artefacto que nos ayuda a realizar figuras distintas al tangram cuadrado convencional. Con la utilización de este tangram circular se les pidió a las estudiantes reproducir las figuras que se encuentran a continuación, recordando que no se pueden superponer las piezas y al mismo tiempo deben ser utilizadas todas.

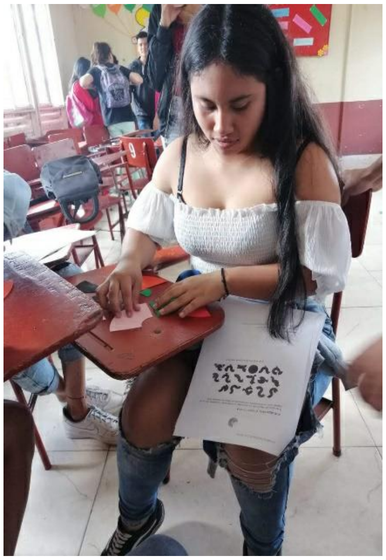
Ilustración 102. Figuras realizadas con el tangrama circular



¿Cuál es el área de las figuras anteriores?

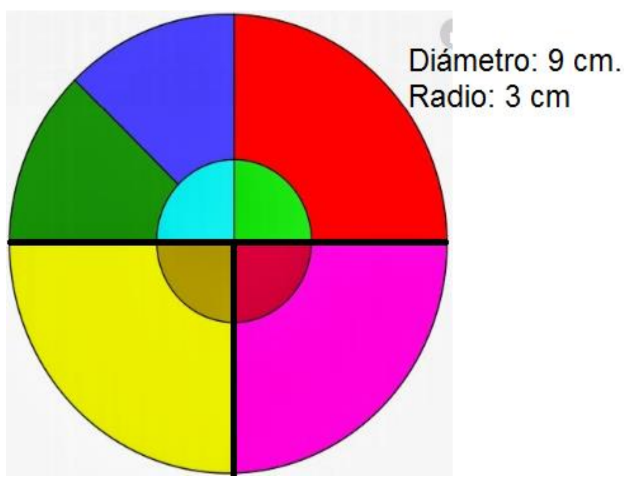
En las siguientes fotografías se pueden ver a los estudiantes armando las figuras pedidas.

Ilustración 103. Estudiantes realizando figuras.



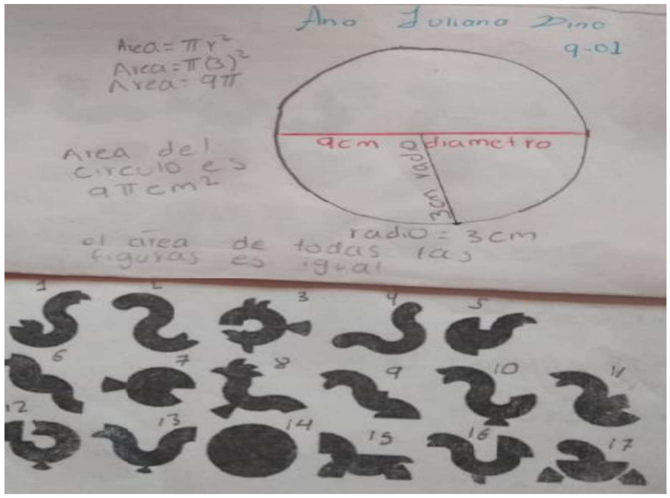
Para responder la pregunta, los estudiantes volvieron a retomar las medidas del tangrama que habían construido en una sesión pasada. Como se ve en la siguiente imagen:

Ilustración 104. Medidas los tangramas circulares utilizados.



Con esta información y con la fórmula del área del círculo los estudiantes respondieron la pregunta anterior. Lo cual ellos concluyeron que en todas las figuras se utilizan todas las fichas, por tanto, el área sería igual en todos los casos. Como se puede ver la imagen 102, que abarca la respuesta de la totalidad de los alumnos:

Ilustración 105. Área y figuras



4.1.7.8.Reflexión.

En la primera actividad, en donde se les pidió construir dos cuadrados idénticos, se pudo evidenciar que para los estudiantes el reconocimiento de esta figura no fue problemático ya que tenían una idea clara del concepto del cuadrado. Con lo anteriormente dicho dedujeron el valor que tenía cada lado y así llegaron a los dos cuadrados idénticos, con estas características.

En la actividad alusiva a encontrar el área gris, los estudiantes al principio se les dificultó el despeje ya sea de la base o la altura de la fórmula del área del rectángulo. Por tanto, en cada uno de los grupos se hizo necesario recordarles cómo se despeja correctamente la ecuación en cada caso. De esta forma obtuvieron los datos faltantes de las figuras pedidas de este punto.

En la actividad referida al tangrama circular, los estudiantes se percataron que esta herramienta de juego, ellos la habían elaborado en una sesión pasada llamada “arte geométrico”. Les agradó armar las figuras pedidas, ya que eran diferentes, es decir, ellos solo conocían el tangrama tradicional, el cuadrado. Aunque se les dificultó un poco familiarizarse con las fichas y así no confundirlas a la hora de armas cualquier figura de las pedidas, (ver anexo 8: áreas, pág.174).

5. Conclusiones generales

La experiencia en la práctica pedagógica III (PPIII) realizada con apoyo del Semillero de Matemáticas a cargo de las profesoras Gabriela Inés Arbeláez Rojas y Martha Lucia Bobadilla del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, en el módulo de Geometría, se llevó a cabo en el colegio Antonio García Paredes, con profesores y estudiantes de grados noveno y décimo, que quisieran asistir. El semillero se hizo a través de la metodología de las matemáticas recreativas y resolución de problemas, donde el profesor se relaciona más estrechamente con el estudiante y su enseñanza es lúdica por medio de talleres, problemas y juegos matemáticos; dejando de lado la enseñanza tradicional donde el profesor es el emisor y el estudiante el receptor.

Como bien se sabe la geometría es una disciplina compleja y se le dificulta a la mayoría de estudiantes, por lo que el tener que enseñarla era algo difícil para nosotros, y al ser la primera vez que manejábamos un grupo tan grande de estudiante, fue algo que nos causó temor, pero con el paso de las sesiones y con el apoyo continuo del grupo de trabajo este sentimiento se fue apaciguando. Nos fue estimulante esta experiencia ya que cada vez que iban pasando las sesiones se observaba una gran acogida por parte del estudiantado. Lo anterior nos daba más ánimo de seguir llevando cada sábado actividades que mantuviesen esta motivación; es decir nos exigimos más en cada “clase” para que los chicos y chicas siguieran a gusto y con entusiasmo.

Debe decirse que las guías tenían un enfoque didáctico, donde se daba a los estudiantes la posibilidad de experimentar la diversidad, creatividad, opinión y habilidades en el área de geometría. Es menester recordar que ellos tenían unos conocimientos previos, los cuales aprovecharon para resolver cada una de las unidades y así vivieron las matemáticas de una manera más lúdica y entendieron que esta área se puede ver en todo lo que nos rodea.

Cabe destacar que se aprendió mucho de los estudiantes. Como, por ejemplo; que no se debe subestimar las capacidades de ellos, porque a pesar de que algunas actividades eran complejas ellos lograban resolverlas sin ningún inconveniente. Por medio de las prácticas se fortalecieron unas temáticas que pensábamos tener claras en el oficio como estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

La metodología utilizada en las aulas de clase fue fructífera en todo este proceso ya que se les daba las matemáticas enfocadas hacia el juego y la diversión, siempre con la mira puesta en el aprendizaje de conceptos de la geometría, en la cual los estudiantes descubrieron que esta área es entretenida y con esfuerzo y esmero una asignatura accesible a todos. Los alumnos mostraban gran interés por aprender las temáticas por medio de estos talleres y juegos. La participación fue más frecuente en ello, donde se nota que fue importante la confianza que se les brindó.

En el ámbito social esta disciplina tiene una connotación negativa y se visualiza como una asignatura difícil e inalcanzable, un conjunto de símbolos y letras que no se entienden, sin ninguna utilidad en el mundo que nos rodea.

En estas prácticas se construyeron y planificaron actividades lúdicas donde se trató de dar unas matemáticas divertidas con juegos matemáticos y de razonamiento, en lo cual se dio vía libre a los estudiantes para que opinaran y dieran sus diferentes soluciones. Los estudiantes en estas actividades pudieron interactuar con sus compañeros y ser críticos con cada dificultad que se les planteó. En algunas actividades al utilizar la competencia tuvo un valor dentro del aula de clase, ya que los estudiantes se ponían más activos frente a las actividades. Y al no ganar siempre los mismos, había una activa participación.

6. Referencias

Barnett, R. (1997). *Geometría* (2nd ed.). McGraw Hill.

Barrantes, M., Fernandez, I., & Fernandez, M. (2014). Enseñar geometría en Secundaria. *Revista de Ciencias de La Educación Academicus, 1*(3), 9.

Beineke, J., & Rosenhouse, J. (2016). *The Mathematics of Various Entertainment Subjects*. Princeton University Press.

Bilbao-Torres, A. (2021). *La matemática recreativa como recurso motivador en el aula de matemáticas*. Universidad de Valladolid.

Blanco, L. J. (2011). La Investigación en Educación Matemática. *Educatio Siglo XXI, 29*(1), 109–128.

Calvo-Ballesteros, M. M. (2008). Enseñanza Eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Educacion*, *32*(1), 123–138. https://doi.org/10.1080/00207217008900136

Chemla, K. (2014). Explorations in the history of mathematical recreations: An introduction. *Historia Mathematica*, *41*(4), 367–376. https://doi.org/10.1016/j.hm.2014.07.002

D'Andrea, R.., Delorenzo, O., & Sastre-Vasquez, P. (2014). La justificación en estudiantes universitarios de Ingeniería. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación,* 22.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Editora Unesp.

Franco, E., & Fonseca, H. (2021). *Matemática recreativa, una estrategia para fortalecer el pensamiento numérico y espacial*. Universidad libre.

Gardner, M. (1979). *Circo matemático*. Epub Libre.

Gardner, M. (1986). *Matemáticas para divertirse*. Epub Libre.

Gardner, M. (1995). *New Mathematical Diversions* (Issue Spectrum Series). Mathematical Association of America.

Gardner, M. (2013). *My Best Mathematical and Logic Puzzles* (p. 91). Dover Publications.

Gómez, A. S. (2018). La educación matemática en Colombia: origen, avance y despegue. *Fides et Ratio - Revista de Difusión Cultural y Científica de La Universidad La Salle En Bolivia*, *16*(septiembre), 123–145. http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2071-081X2018000200008&lng=es&nrm=iso

González, A. G., Molina, J. G., & Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos de los juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, *26*(3), 109–133. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n3/1665-5826-ed-26-03-00109.pdf%0Ahttp://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262014000300109&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Icfes. (2017). *Informe Pruebas Saber 3°,5° y 9° Institución Educativa Antonio García Paredes*.

Icfes. (2021). *Reporte de Resultados saber 11°: Establecimientos Educativos*. https://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/agregadoHistoricoEstablecimiento.jsf#

Kordemsky, B. (1972). *The Moscow Puzzles* (M. Gardner (ed.)). Charles Scribner's Sons.

Lynch, T. (2012). *Recreational Mathematics*. White Word Publications.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias el lenguaje, matematicas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educacion Nacional.

Ministerio de Educacion Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares del área de matematicas*. Ministerio de Educacion Nacional. http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-

339975_recurso_6.pdf

Moise, E., & Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Addison Wesley Iberoamericana.

Morales, M. A. (2017, abril 20). *Fermat, Pascal y los inicios de la probabilidad moderna*. 16. https://elpais.com/elpais/2017/04/26/el_aleph/1493220185_791291.html

Oliveros, D., Martínez, L., & Barrios, A. F. (2021). Método de Polya: Una Alternativas en la Resolución de Problemas Matemáticos. *Ciencia e Ingeniería*, *8*(2), 1–13. https://doi.org/: https://www.doi.org/10.5281/zenodo.5716273 MÉTODO

Palomero-Pescador, J., Fernández-Domínguez, M., & Palomero-Fernández, P. (2010). El cuaderno de bitácora y la formación de los psicomotricistas. Sobre cómo fomentar el encuentro entre la cultura académica y la cultura experiencial. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, *13*(4), 335–346.

Perelman, Y. (2003). *Geometría Recreativa* (N. Abramenko (ed.); 1st ed.). epubLibre.

Perelman, Y. I. (2002). *Matemática recreativa*. Martínez Roca S A Ediciones.

Pliego, N. (2011). El Aprendizaje Cooperativo y sus ventajas en la educación intercultural. *Hekademos: Revista Educativa Digital*, *4*(8), 63–76. http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3746890&info=resumen&idioma=ENG

Polya, G. (1989). *Como plantear y resolver problemas* (15th ed.). Editorial Trillas.

Recalde, L. C. (2017). *Lecturas de Historia de las Matematicas*. Universidad del Valle.

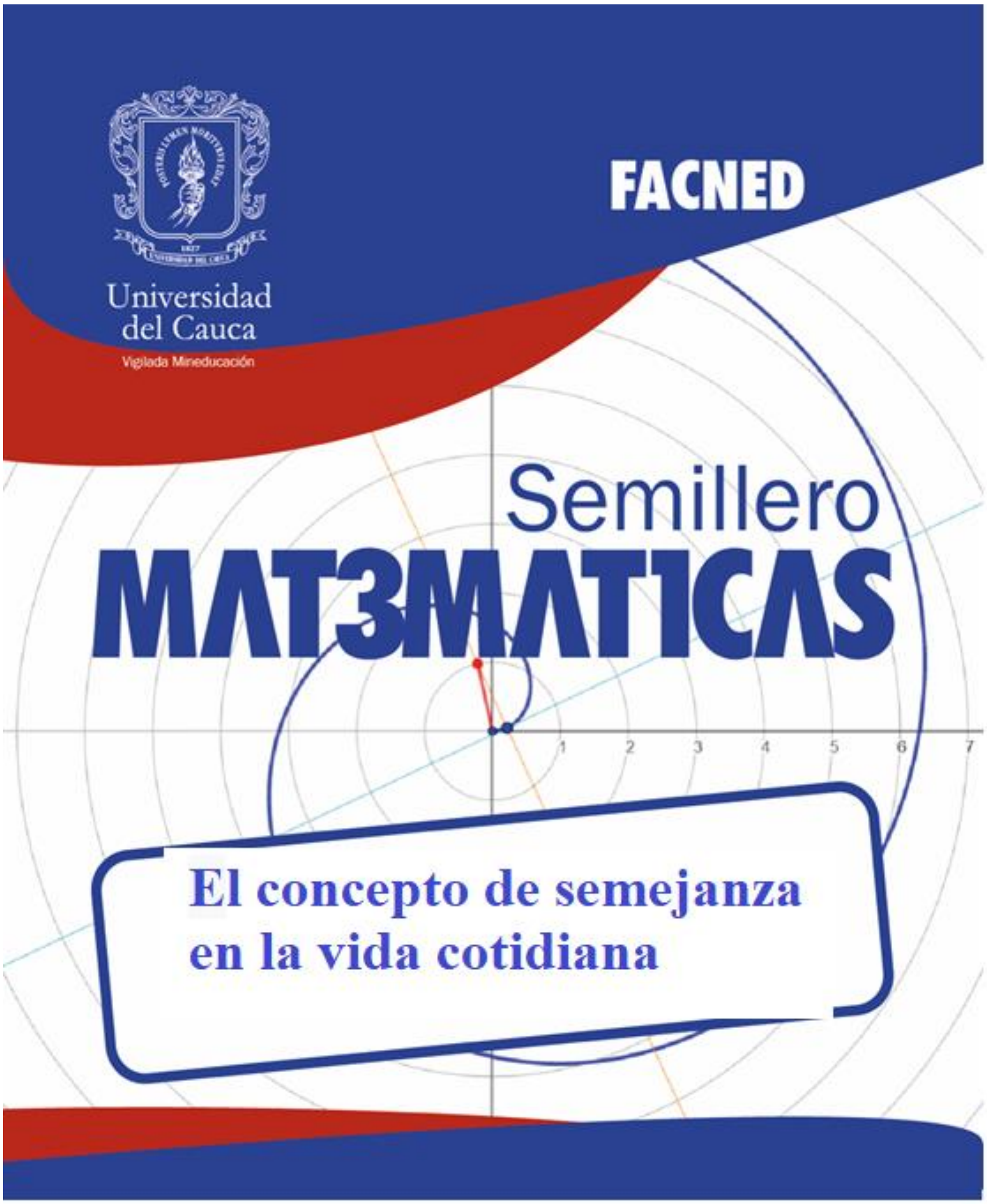
Ruiz, A. (1999). *Geometrías no Euclidianas* (1st ed.). Universidad de Costa Rica.

Thorndike, C. (2014). *A study of recreational activities in secondary school mathematics*. University of Southern California.

7. Anexos

Anexo 1. el concepto de semejanza en la vida cotidiana

MODULO GEOMETRÍA



TALLER 1.

PROPÓSITOS

Con este taller se pretende introducir al estudiante en la noción de semejanza y diferenciarla de las nociones de igualdad y congruencia.

ACTIVIDAD A.

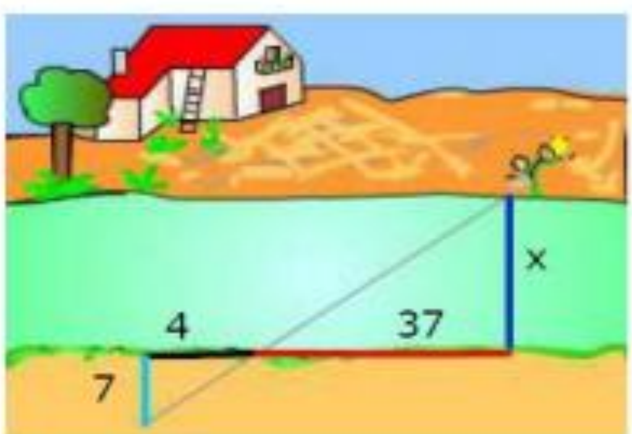
Se deben formar grupos de cuatro estudiantes y resolver el problema que se plantea a continuación.

Juan quiere construir un puente sobre un rio (como se muestra en la imagen). ¿Cuál sería la distancia desde donde está Juan hasta el otro lado del rio? (la distancia corresponde exactamente a encontrar el valor de x)

Responde las siguientes preguntas.

¿Si suprimo cualquier valor que se encuentra en la imagen, se podrá encontrar el valor de x?

Ingéniate otro método para encontrar el valor de x.



ACTIVIDAD B.

En una hoja dibuje dos líneas de tal forma que se crucen en un punto y los bordes de la hoja sean los lados de los dos triángulos que se van a formar, (utilice una regla para esto). Dele un nombre a cada triángulo (por ejemplo, el primer triangulo llámelo A y al segundo llámelo Z) recorte estos triángulos y responda.

¿Son semejantes estos triángulos?

¿Existe una relación con respecto a sus ángulos?

¿Existe una relación con respecto a sus lados?

ACTIVIDAD C

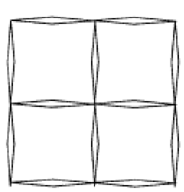
Construcción geométrica para explicar el método de medición de alturas con ayuda del espejo

INTEGRANTES: Cuatro estudiantes.

DESCRIPCIÓN: Vamos a utilizar un espejo para hacer una medición, en este caso la altura de un estudiante o cualquier otro objeto que elijan. Este método se basa en el concepto de semejanza entre triángulos y en el fenómeno de la reflexión de la luz. Escoja un compañero o compañera que tenga una altura diferente a la suya y utilizando el espejo y un metro trate de encontrar, sin hacer la medición directa, la estatura de su compañero o compañera ¿Cómo creería usted que se pueden utilizar estos objetos para este objetivo? Discutan entre ustedes y analicen los objetos geométricos que permitirían encontrar este número desconocido. ¿En este caso, qué tipo de triángulos creen ustedes que aparecen en escena? Luego realice directamente la medición de su compañero o compañera y saquen conclusiones. ¿Qué tan cercano es el número que encontraron a la estatura real de su compañero o compañera? ¿Qué limitaciones y problemas le encuentran al método? ¿Este método se podría utilizar para hacer mediciones que no es posible realizarlas haciendo la medición directa? (piense por ejemplo en las pirámides mayas o egipcias) ¿Piense en la utilidad que tiene la geometría en el mundo real?

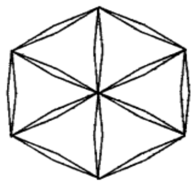
ACTIVIDAD LUDICA

Sitúa sobre la mesa 12 palillos formando la figura del dibujo.



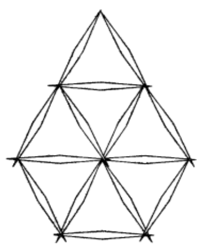
1. Quita cuatro palillos y quedará un cuadrado sólo
2. Forma dos cuadrados iguales quitando cuatro palillos

Sitúa sobre la mesa 12 palillos como muestra el dibujo



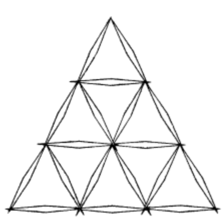
1. Quita 3 palillos y dejarás formados 3 rombos
2. Mueve 6 palillos y quedarán formados 3 rombos

Sitúa sobre la mesa 14 palillos formando 7 triángulos equiláteros tal como te muestra la figura



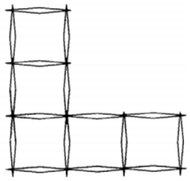
1. Elimina 3 palillos y deja 4 triángulos
2. Elimina 4 palillos y deja 3 rombos
3. Elimina 4 palillos y deja 4 triángulos
4. Elimina 5 palillos y deja 3 triángulos

Con 18 palillos forma la figura inferior.



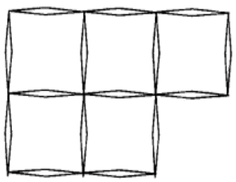
1. Elimina 6 palillos y deja 3 triángulos y un hexágono
2. Elimina 3 palillos y deja 3 rombos y 3 triángulos
3. Elimina 6 palillos y deja 3 rombos

Con 16 palillos forma la figura.



1. Mueve 2 palillos y deja 2 rectángulos y 2 cuadrados.
2. Mueve 3 palillos y forma 3 rectángulos.
3. Mueve 4 palillos y deja formados 2 rectángulos y un cuadrado.
4. Mueve 3 palillos y deja formados 2 rectángulos iguales y un cuadrado.

Sitúa sobre la mesa 15 palillos tal como te muestra la figura.



1. Elimina tres palillos y desaparecen 2 cuadrados.
2. Mueve 3 palillos y haz desaparecer un cuadrado

BIBLIOGRAFÍA

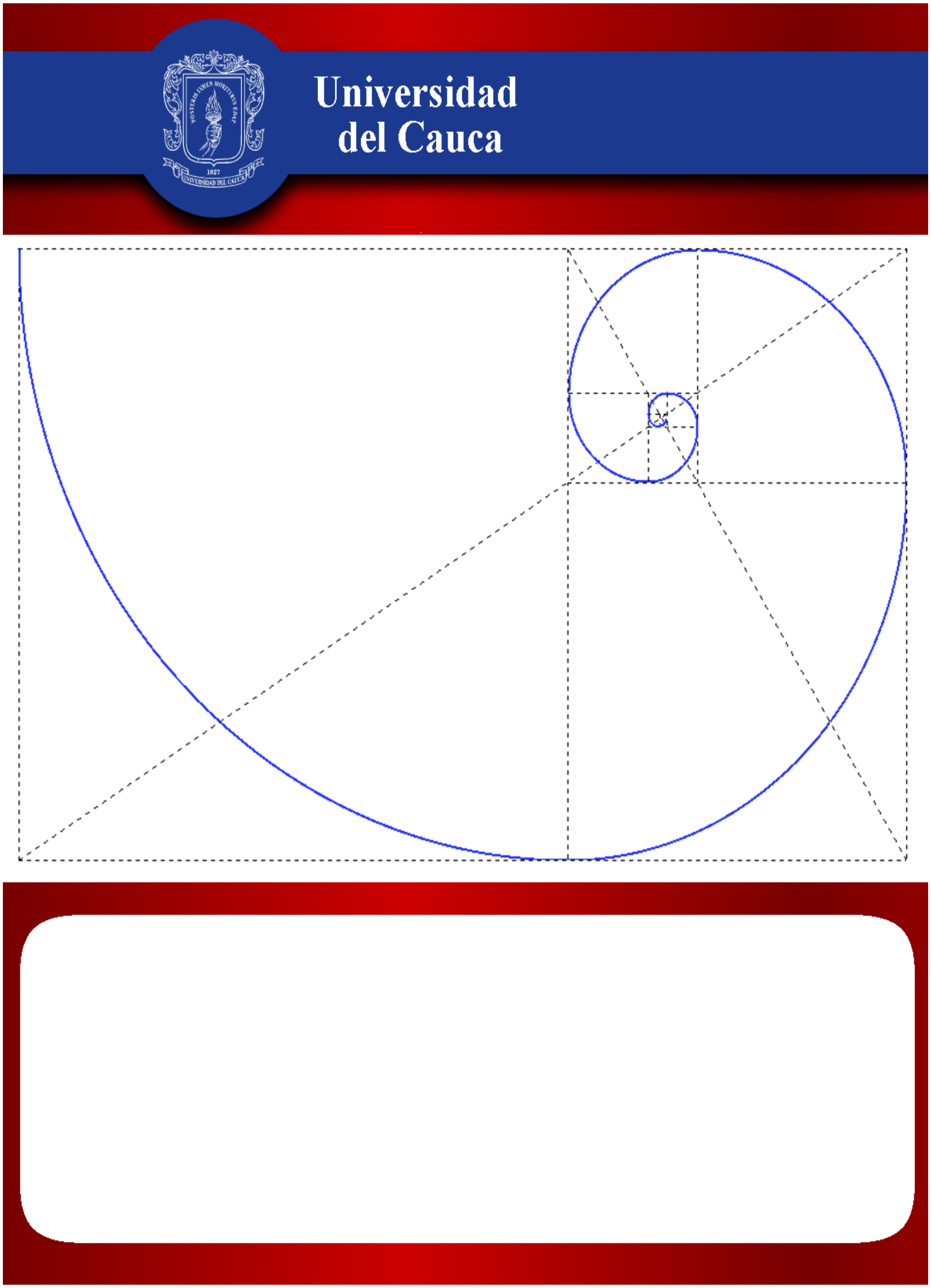
Libro de texto de Matemática 9no grado. (1991). Editorial Pueblo y Educación.

Semejanza y homotecia. Disponible en: descartes.cnice.mec.es.

Artículo: **Geometría** (Libro de texto de matemáticas 9no grado, 1991) **Interactiva**.

Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr.

Anexo 2. Medida de figuras geométricas rectilíneas cerradas en geometría plana.



GEOPLANO

Introducción

El geo-plano fue creado por el matemático egipcio Caled Gattegno en los años 60 del pasado siglo. El propósito de este matemático era buscar un método para enseñar el área de figuras planas de una forma más didáctica. Es importante resaltar que este tema, es de suma importancia en geometría; Euclides (SIII A.C) el geómetra más importante de todas las épocas resuelve este asunto en su primer libro Elementos. En la primera sesión de esta práctica, introducimos tres nociones claves en geometría: semejanza, igualdad, desigualdad, (mayor, menor, igual) y congruencia. Hoy vamos a acercarnos a estas últimas nociones y ver algunas de sus diferencias.

Objetivo general: introducir el concepto de igualdad en geometría, mediante el uso de un dispositivo didáctico: el geo-plano.

Objetivos específicos:

- Construir segmentos y ángulos
- Estudiar las posiciones relativas de figuras geométricas
- Evidenciar la equivalencia entre áreas de figuras rectilíneas con distintas formas
- Construir triángulos semejantes

ACTIVIDAD 1

Para esta actividad formaremos grupos de 4 estudiantes.

Respondan las siguientes preguntas respecto a los conceptos que ustedes recuerden de la geometría.

- ¿los clavos del geo-plano qué representarían geométricamente?
- ¿la unión de dos clavos por una goma elástica qué representa?
- Después de formar un cuadrado y un rectángulo en el geo-plano, aborde la pregunta:

    - ¿La distancia diagonal entre clavos es mayor o menor que las componentes horizontales y verticales de la figura?
    - ¿Podría dar una medida numérica de tales distancias?
- ¿Qué figuras geométricas se formarán si unimos tres o cuatro puntos con las gomas elásticas?
- ¿Qué otras figuras se forman si unimos 5,6, 7 hasta n puntos?

ACTIVIDAD 2

➢ construir algunos segmentos en diferente posición en el geo-plano, asignarle un nombre a cada uno de ellos (a, b, c, d, etc.) y compararlos (por parejas), usando la noción de distancia que ustedes recuerdan en sus cursos de geometría.

Ejemplo:

$$mayor: \; a > b \, ; b > c \, ; c > d menor : \; b < a \, ; c < b \, ; d < c$$

➢ Construyan, en el geo-plano, figuras geométricas rectilíneas cerradas, (tal como se ha enseñado) de tal suerte que ilustren las nociones de igualdad, congruencia y semejanza.

➢ Construir un cuadrilátero, de tal forma que al liberar un extremo del vértice de la banda elástica se forme un triángulo rectángulo.

➢ Construir un cuadrilátero, de tal forma que al liberar un extremo del vértice de la banda elástica se forme un triángulo isósceles.

➢ Construir un cuadrilátero, de tal forma que al liberar un extremo del vértice de la banda elástica se forme un triángulo escaleno.

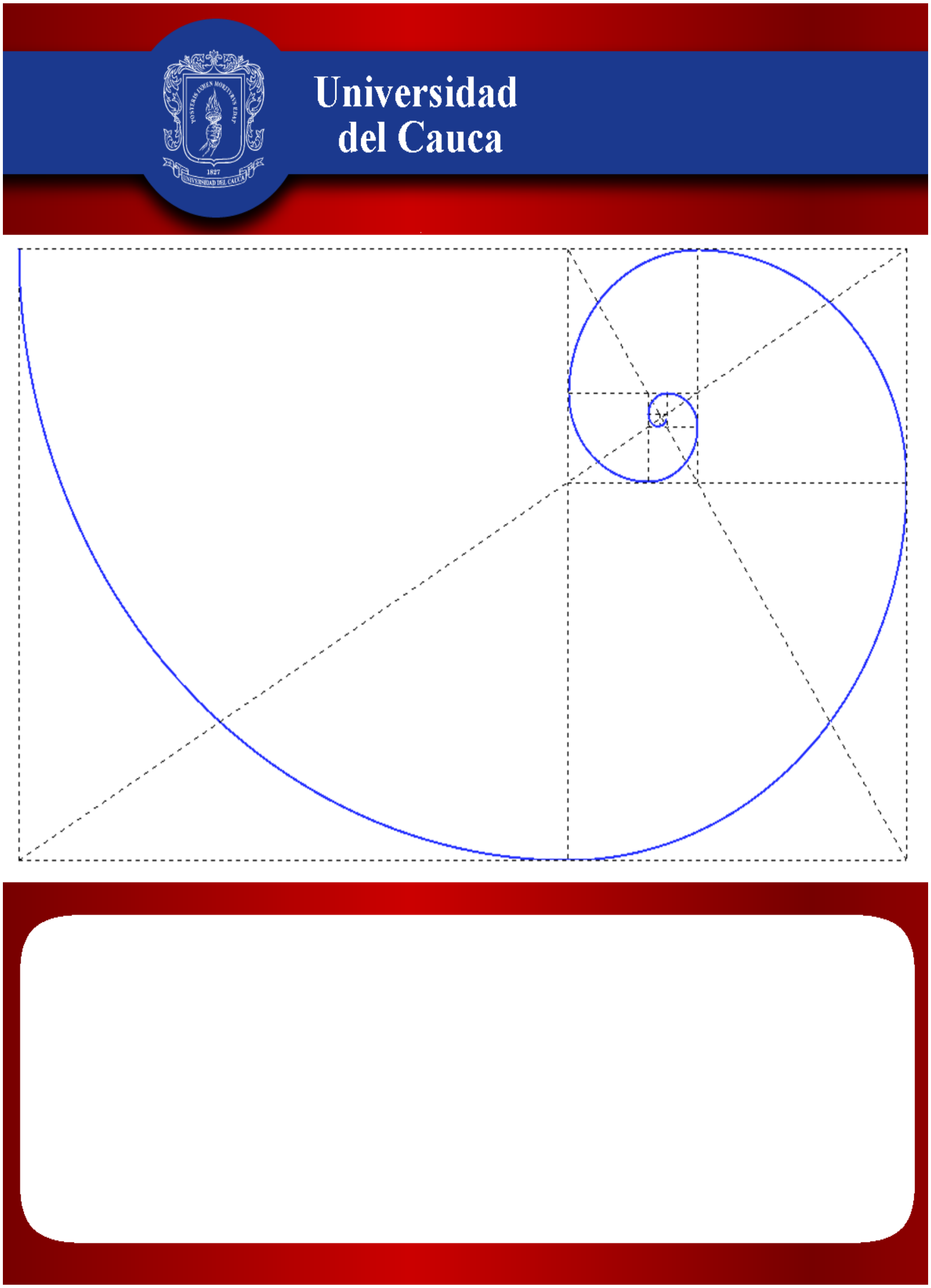
¿Qué dificultades obtuvo para la construcción de los cuadriláteros?

Referencias

https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutFer85a.pdf

http://roble.pntic.mec.es/~jcamara/Jugando%20y%20pensando%20con%20palillos.pdf

Anexo 3. Medida de figuras geométricas rectilíneas cerradas en geometría plana.



Objetivos General: Introducir el concepto de igualdad y desigualdad en geometría, mediante el uso de un dispositivo didáctico: el Geo-plano.

Objetivos específicos:

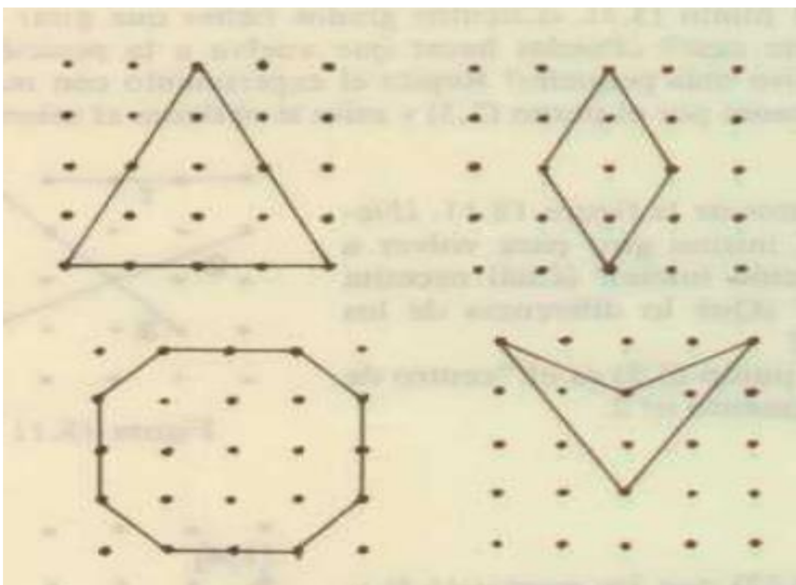
- Estudiar las posiciones relativas de figuras geométricas
- Evidenciar la equivalencia entre áreas de figuras rectilíneas con distintas formas
- Evidenciar diferencias entre los conceptos de área y perímetro.

Introducción.

En esta ocasión vamos a trabajar el concepto de área en geometría; concepto en el que se puede visualizar claramente el hecho de que dos figuras pueden ser iguales sin necesidad de ser congruentes. De igual manera trabajaremos la diferencia entre los conceptos de área y perímetro.

ACTIVIDAD 3

- Construir en el Geo-plano las siguientes figuras y obtener su área:



- Para cada una de las figuras anteriores, construir otra figura distinta con igual área.

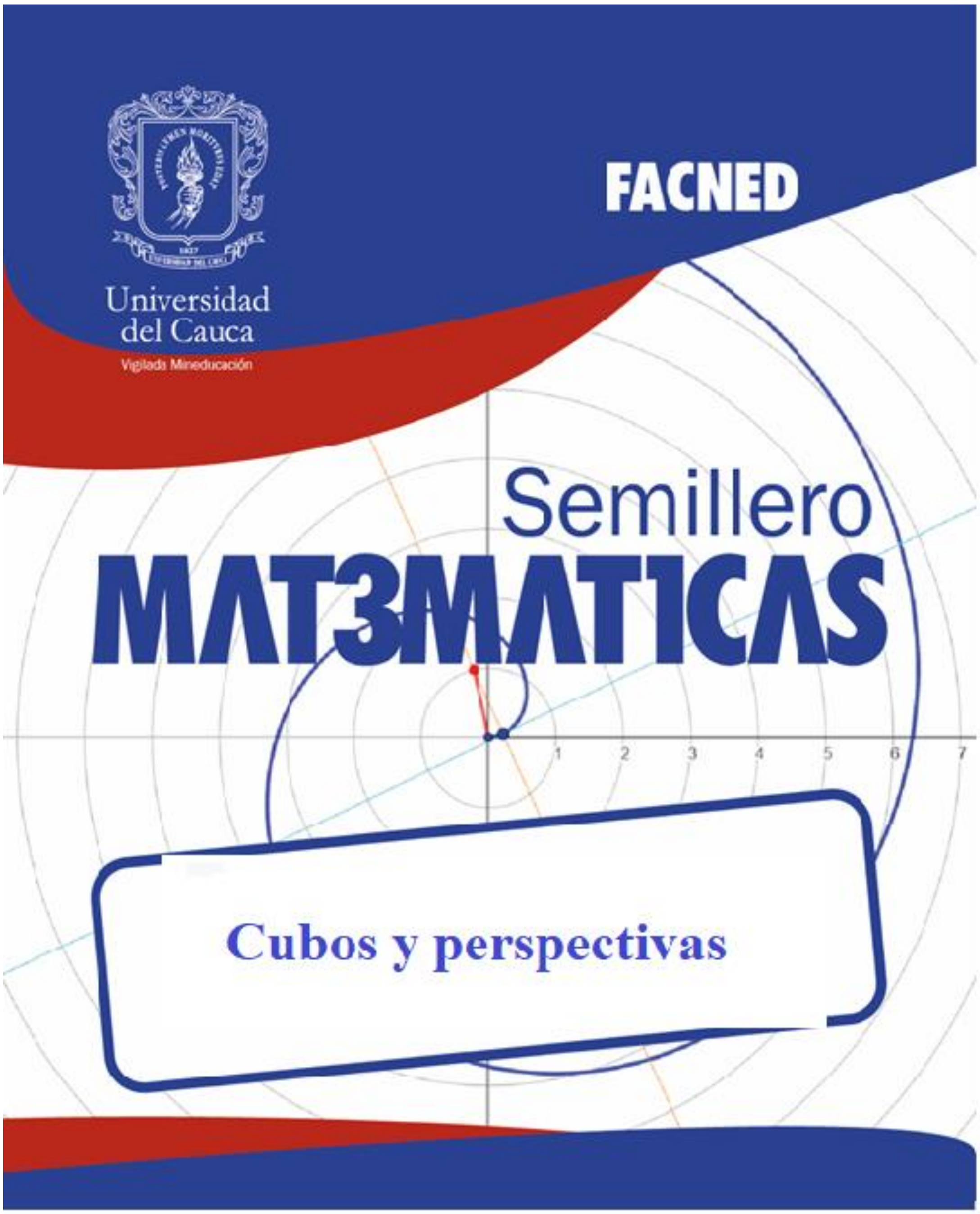
- Construir en cada caso una figura geométrica, la cual cumpla las siguientes condiciones:

1. Área 16 (unidades cuadradas) y perímetro 16 (unidades lineales)

2. Área 0.5 (unidades cuadradas) y perímetro $\left(2+\sqrt{2}\right)$(unidades lineales)
3. Área 6 (unidades cuadradas) y perímetro 12 (unidades lineales).
4. Área 5 (unidades cuadradas) y perímetro 12 (unidades lineales)

Anexo 4. Cubos y perspectivas.

MODULO DE GEOMETRIA



INTRODUCCIÓN

En este módulo se trabajará alrededor de algunas figuras tridimensionales como el cubo, y se analizará como una figura de tal tipo puede cambiar de perspectiva según se visualice desde los planos que la componen.

OBJETIVOS

- Desarrollar las habilidades matemáticas de imaginación y visualización espacial para determinar las partes de cuerpos geométricos en tres dimensiones.
- Desarrollar habilidades matemáticas para reconocer en una figura tridimensional, todas sus partes, incluyendo aquellas no visibles
- Imaginar desde figuras dos-dimensionales, la conformación de figuras tridimensionales.

ACTIVIDAD

Esta actividad se inicia haciendo un breve reconocimiento de las habilidades que tienen los estudiantes respecto a la imaginación espacial, para ello se recomienda realizar la siguiente actividad.

1. El siguiente arreglo fue hecho con tres cubos, a partir de esta vista determine:

¿Cuántas caras son visibles? _______________

¿Cuántas caras no pueden ser vistas desde esta perspectiva? ______________________

¿Cuántos vértices no pueden ser vistos desde esta perspectiva? ______________________

2. Observe los siguientes arreglos de cubos:

A.

¿Cuántos cubos faltan para completar tres
¿Pisos? ______

B. ¿Cuántos cubos faltan para completar tres
¿Pisos? ______

Para los arreglos A y B dibuje las caras vistas de manera:

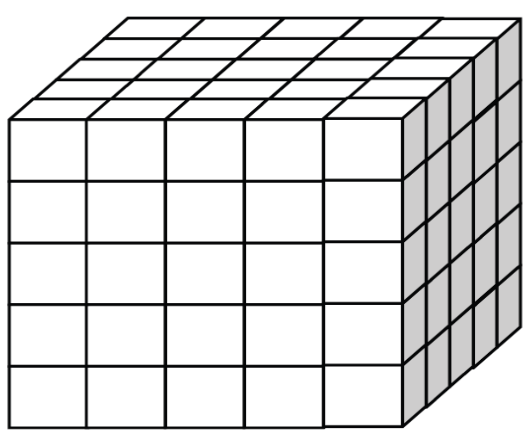
a) Frontal
b) Lateral derecha
c) Lateral izquierdo

3. A continuación, se presentan algunos arreglos con cubos, obsérvelos con atención y responda las siguientes preguntas.

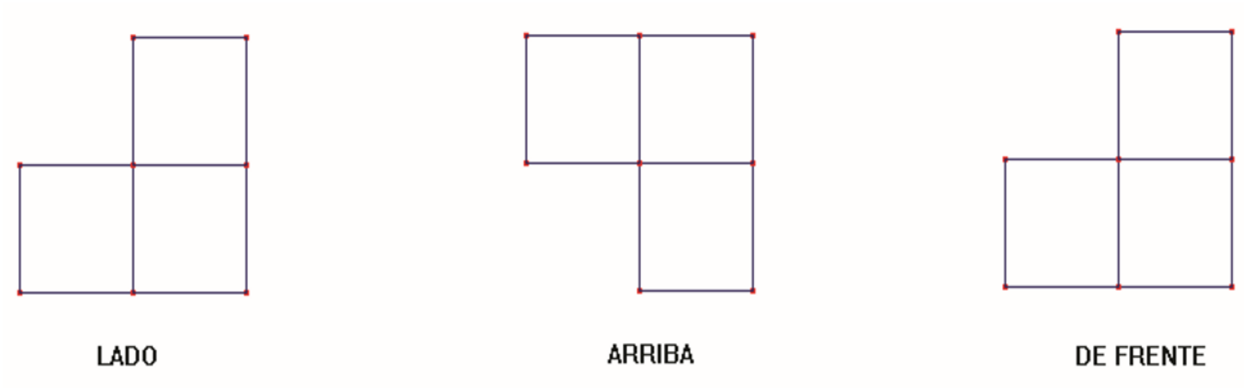
Al pintar los cubos sin ser separados
¿Cuántos cubos quedarán pintados de…?

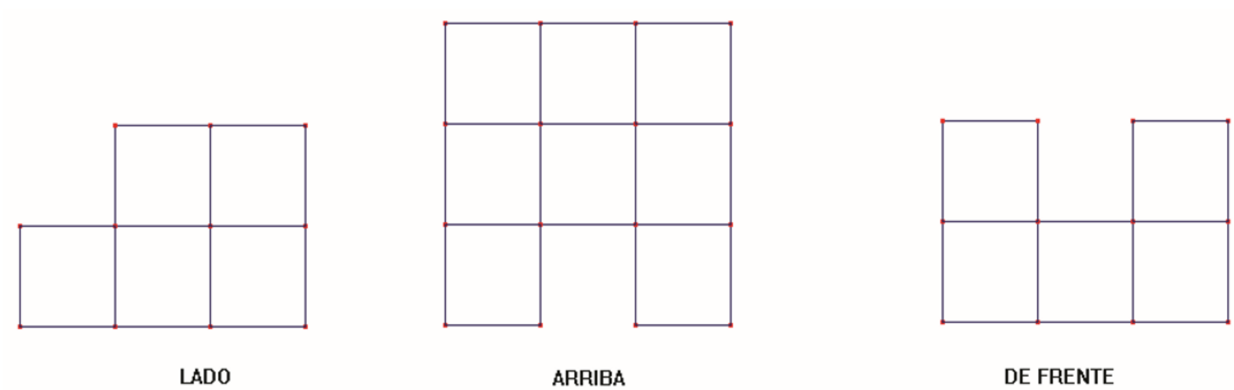
a) Una cara ________
b) Dos caras ________
c) Tres caras ________
d) Sin pintar ________
¿Con cuántos cubos se formó ésta figura? ______

4. Repita el proceso anterior con el siguiente arreglo.

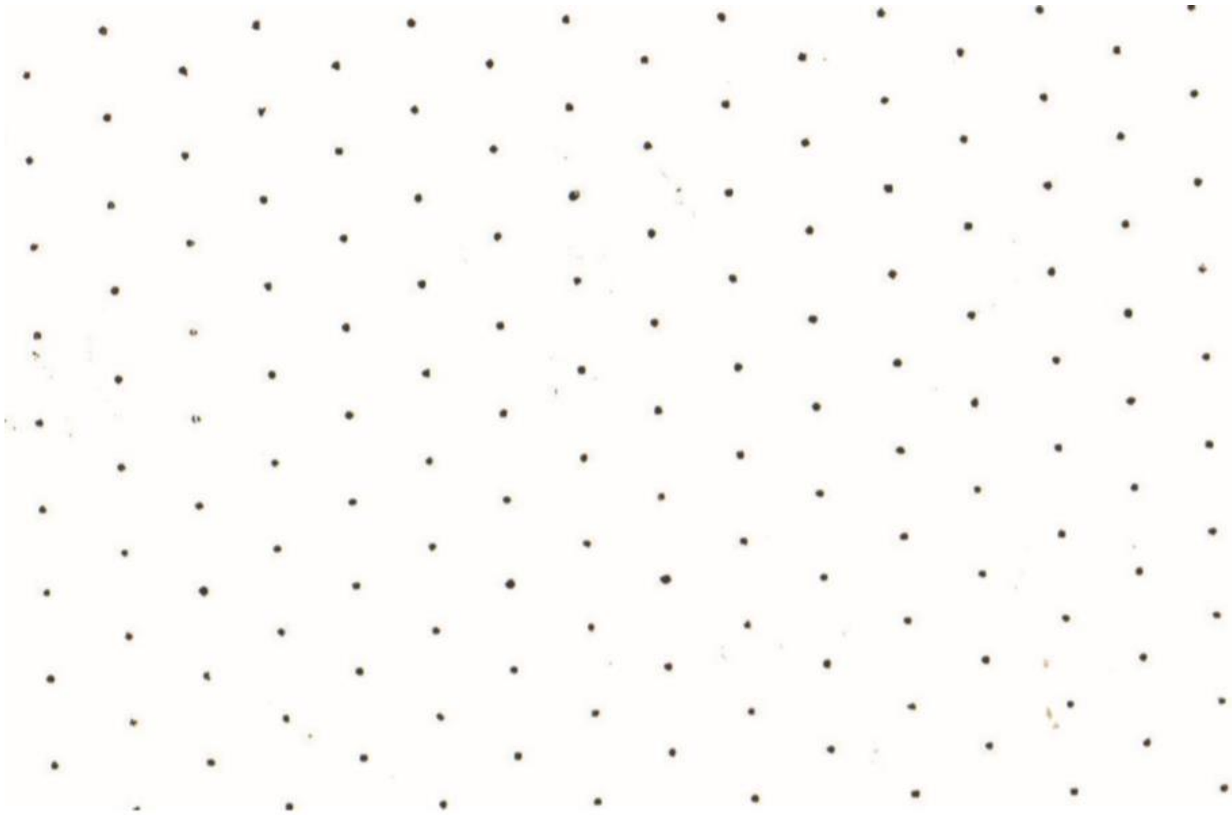


5. En equipos utilicen las siguientes figuras planas con sus respectivas perspectivas para formar un arreglo de cubos. Antes de hacerlas traten de predecir cuántos cubos serán necesarios para la construcción. Al final dibújenlas en la retícula para observarlas mejor.





Retícula



BIBLIOGRAFÍA

SNTE. (2010). *ESCUELA SIEMPRE ABIERTA.* MEXICO 2010.

Anexo 5. Arte geométrico.

MODULO DE GEOMETRIA

INTRODUCCIÓN

El tangrama o juego de formas, tiene su origen en la antigua china y consiste en el arte de formar siluetas de distintas figuras con las mismas piezas. Se trata de un rompecabezas que los chinos llamaron ‘tabla de sabiduría’. Nosotros elaboraremos en esta sesión un tangram circular que nos permitirá representar figuras armónicas que serán objeto de otra sesión.

OBJETIVOS

- Desarrollar habilidades de pensamiento creativo y geométrico.
- Consolidar los conceptos de diámetro y radio de una circunferencia.

ACTIVIDAD

Elaboración de un tangrama circular.

Pasos:

1. Con el compás en el medio del octavo de papel paja hacer un círculo de 3 cm de radio y otro círculo mayor, tal que su radio tenga el mismo origen del radio del círculo pequeño, y su radio sea el triple del pequeño.
2. Dividir en cuatro porciones iguales los dos círculos realizados en el ítem anterior.
3. Escoger un cuarto del círculo mayor quitándole el círculo pequeño y dividirlo en la mitad.
4. Pintar por ambos lados las 9 secciones con diferente color.

BIBLIOGRAFÍA

https://sabrinamatematica.blogspot.com/2014/03/tangram-circular.html

Ángel Alsina (2006). Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdicos manipulativos. Editorial: Narcea, S.A. Ediciones. Madrid.

Anexo 6. Paralelas y postulados.

MÓDULO DE GEOMETRÍA

Paralelas y postulados.

INTRODUCCIÓN

En este módulo trabajaremos la noción de paralelismo y haremos una clasificación de los triángulos que nos permita decidir cuando dos de ellos son idénticos, salvo que están en distintos lugares del espacio geométrico.

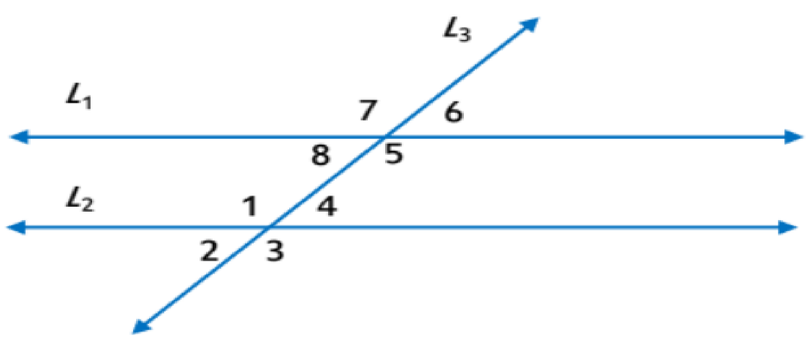
En la parte lúdica, nos enfrentaremos a la “torre de Hanoi”; juego lógico matemático inventado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas, el cual explicaremos más adelante.

OBJETIVOS.

- Precisar la noción de paralelismo en geometría a partir de los postulados básicos y precisar las nociones de los ángulos correspondientes, internos respecto a las paralelas, externos respecto a las paralelas, alternos internos, alternos externos, par lineal y opuesto por el vértice.
- Estudiar la noción de triángulo, los diversos tipos de triángulos y los postulados de congruencia entre triángulos.
- Desarrollar habilidades de pensamiento lógico y la intuición espacial, así como el desarrollo de habilidades y estrategias para la solución de problemas.

ACTIVIDADES.

1. Cuando dos rectas paralelas L1 y L2 son atravesadas por otra recta L3, la cual se denomina secante, se forman ocho ángulos, como lo muestra la figura siguiente:



Estos ochos ángulos se clasifican de acuerdo a su ubicación de la siguiente forma:

1. Ángulos a un mismo lado: Son los que se encuentran del mismo lado respecto de la secante. De acuerdo a la figura estarían en el mismo lado: 1, 2, 7 y 8.

2. Ángulos externos respecto de las paralelas: Se localizan por fuera de las paralelas, como los ángulos 7 y 6.

3. Ángulos Internos respecto de las paralelas: Se localizan por dentro de las paralelas, como los ángulos 8 y 5.

4. Ángulos par lineal: son aquellos ángulos consecutivos y su suma es un ángulo llano, como 2 y 3.

5. Ángulos opuestos por el vértice: ya definidos antes, como los ángulos: 2 y 4.

6. Conjugados internos: Son los colaterales internos, como 1 y 8.

7. Conjugados externos: Son los colaterales externos, como 2 y 7.

8. Alternos internos: Son dos ángulos que no son colaterales, ambos internos no adyacentes, como 1 y 5.

9. Alternos externos: Son dos ángulos que no son colaterales, ambos externos no adyacentes, como 7 y 3.

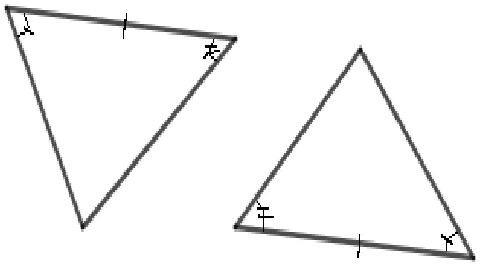
10. Correspondientes: Son los que se encuentran a un mismo lado de la secante, pero no son colaterales, como 1 y 7.

1. Completa la tabla siguiente, de los ángulos de la figura anterior, donde representamos: **P**: par lineal, **AI**: alternos internos, **AE**: alternos externos, **C**: correspondientes, **CI**: conjugados internos, **NC**: no clasificado, **CE**: Conjugados externos, ≈: congruentes.

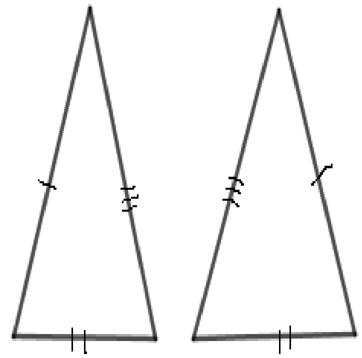
ángulos	1	2	3	4	5	6	7	8
1							C	
2			P					
3								
4	P							
5								
6								
7								
8								

2. Citar el postulado de congruencia (LAL, ALA, LLL) que demostraría la congruencia de los triángulos, si lo hay:

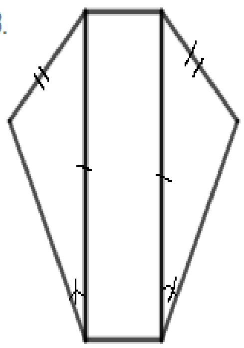
1.



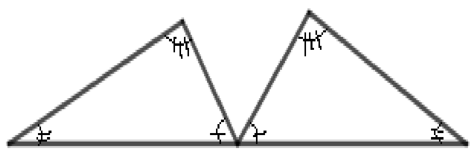
2.



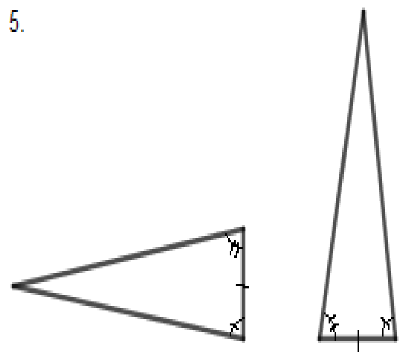
3.



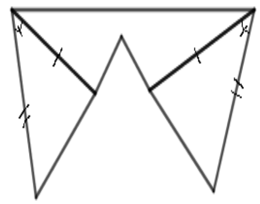
4.



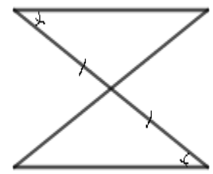
5.



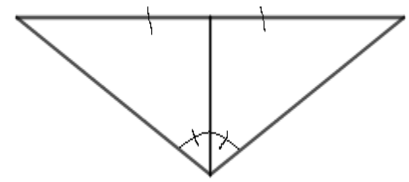
6.



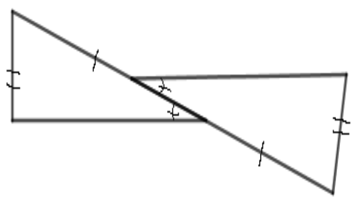
7.



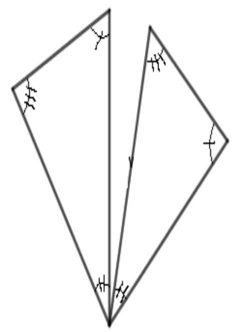
8.



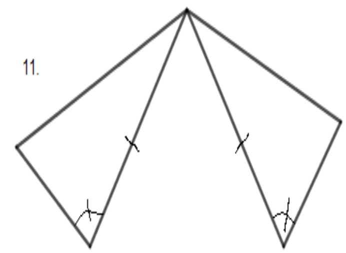
9.



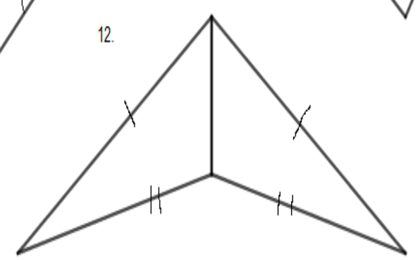
10.



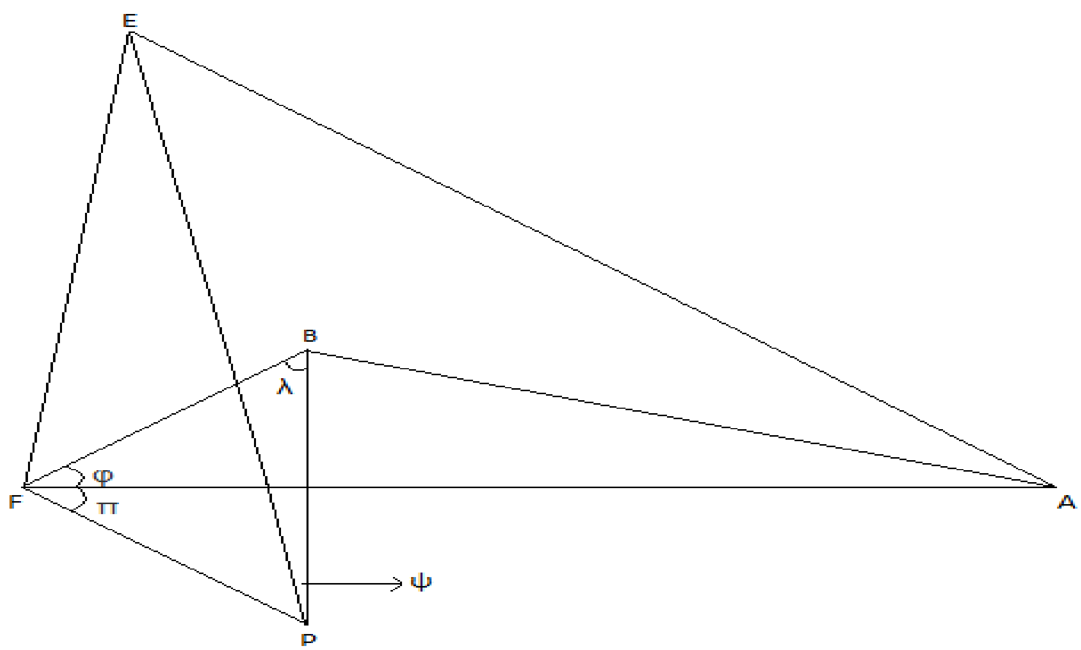
11.



12.



3. Se da la figura con la siguiente información:
   $\Delta EFP \approx \Delta FBA$ y $\lambda = 47°$, $\varphi = 37°$ y $\pi = 49°$. Hallar el valor del ángulo ψ.

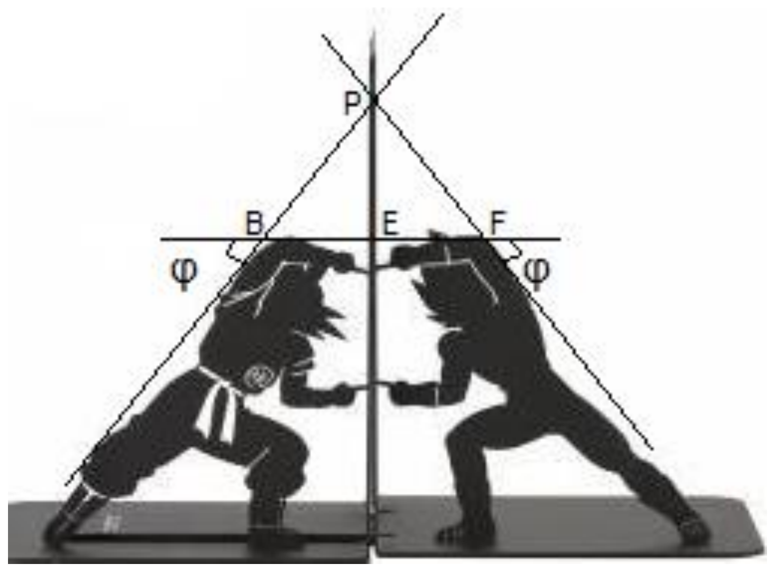


4. Goku y Vegeta van a pedirle ayuda a Picoro para hacer a la perfección la técnica fusión para derrotar a Broly. Goku y Vegeta hacen su primer intento como se ve en la figura siguiente:

Goku y Vegeta hacen su segundo intento 30 minutos después como se ve en la figura siguiente:

Goku y Vegeta hacen su tercer intento 30 minutos después como se ve en la figura siguiente:

En el tercer intento su posición final es la siguiente figura, con la información anterior que puedes conjeturar al respecto del $\triangle BEP$ Y $\triangle EFP$.

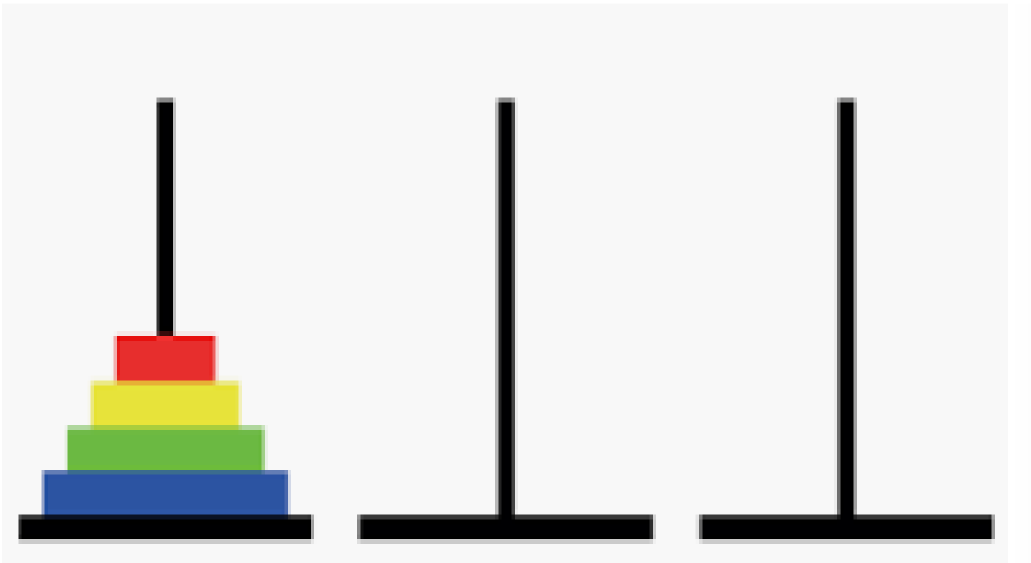


ACTIVIDAD LÚDICA.
Torre de Hanoi.

Instrucciones.

Trasladar los discos de la primera a la tercera estaca, para realizar este objetivo, es necesario seguir tres simples reglas:

1. Solo se puede mover un disco cada vez y para mover otro, los demás tienen que estar en postes.
2. Un disco de mayor tamaño no puede estar sobre uno más pequeño.
3. Solo se puede desplazar el disco que se encuentre arriba en cualquiera de los postes.



Bibliografía:

Ejercicio uno extraído de Geometría plana y Del Espacio. Luis Cornelio Recalde. Pág. 91-92

Ejercicio dos, ítem A extraído de Geometría moderna. Edwin E. Moise. Pág. 122.

https://es.wikipedia.org/wiki/Torres_de_Han%C3%B3i

Anexo 7. Razón y proporcionalidad.

RAZÒN Y PROPORCIONALIDAD

SEMEJANZA, CONGRUENCIA DE FIGURAS PLANAS
Razones y proporciones

ACTIVIDAD 1

ROMPECABEZAS DE SEMEJANZA Y PROPORCIONALIDAD

INTRODUCCIÓN

En esta actividad se va a trabajar con unas cartas, llamadas ***cartas de proporcionalidad***, las cuales contienen datos, que deben aplicarlos al cuadrado que está dividido en 6 piezas (rompecabezas). Las cartas serán repartidas al azar a cada grupo.

Objetivos

- Trabajar la proporcionalidad.
- Relacionar la proporcionalidad con la semejanza.
- Comparar áreas de figuras semejantes.

Al final de la guía se encuentra el cuadrado dividido en 6 piezas (rompecabezas) con sus respectivas medidas.

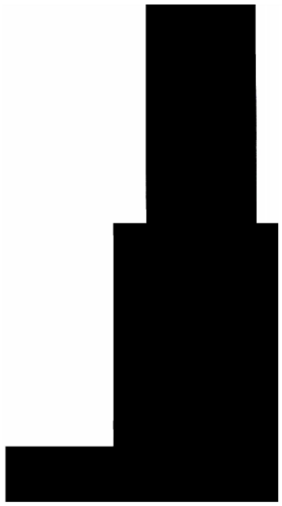
1. Recortar cada pieza y calcularle su respectiva área.

2. Se reparte al azar una carta de proporcionalidad, Respecto a esta, construir el rompecabezas ampliado.

3. Encontrar el área del nuevo rompecabezas ampliado que formó.

4. ¿Cuál es la diferencia entre el área de los dos rompecabezas? Trate de justificar su respuesta

5. Formar la siguiente figura con el rompecabezas.



ACTIVIDAD 2: TANGRAMA TRIANGULAR

INTRODUCION

Esta actividad es efectuada por medio de un rompecabezas llamado *Tangram,* que está dividido en 7 fichas distintas, en donde se trata de descomponer tal cuadrado y formar distintas figuras, usando todas las fichas. El Tangram es un antiguo juego chino llamado "Chi Chiao Pan" que significa tabla de sabiduría o denominado juego de siete elementos.

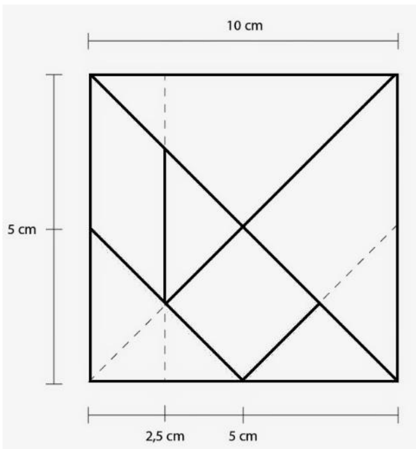
Objetivos

- Reconocer figuras geométricas y otras formas.
- Desarrollar las destrezas espaciales para armar figuras geométricas y formas.
- Estimular la imaginación a través de la búsqueda de posibles soluciones a figuras propuestas de construcción.

Según las piezas del tangrama

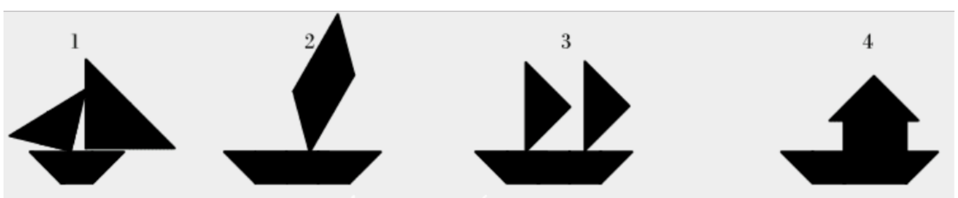
1. Identificar si hay figuras que son semejantes; justificar.
2. Identificar si hay figuras que son congruentes; justificar.

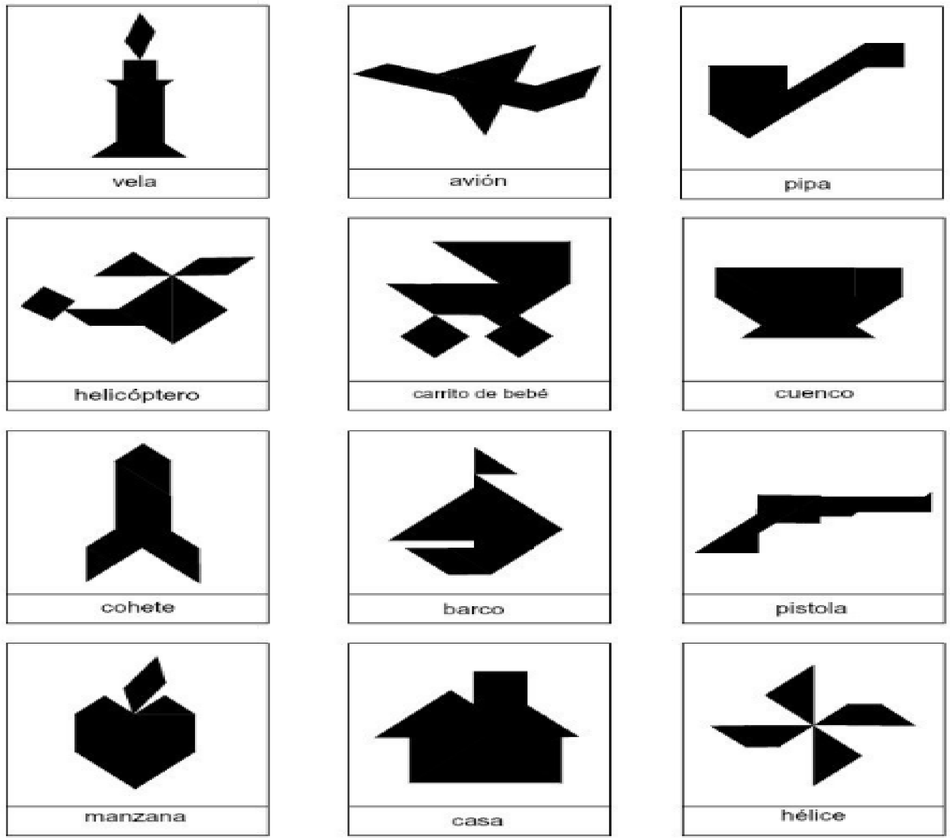
3. Identificar si hay figuras que son iguales; justificar.
4. Con los triángulos pequeños, ¿qué otras figuras se pueden formar? Dibujarlas.
5. ¿Con cuantas piezas se puede formar el triángulo grande? Mostrar.
6. Con todas las fichas formar un triángulo.



ACTIVIDAD 3

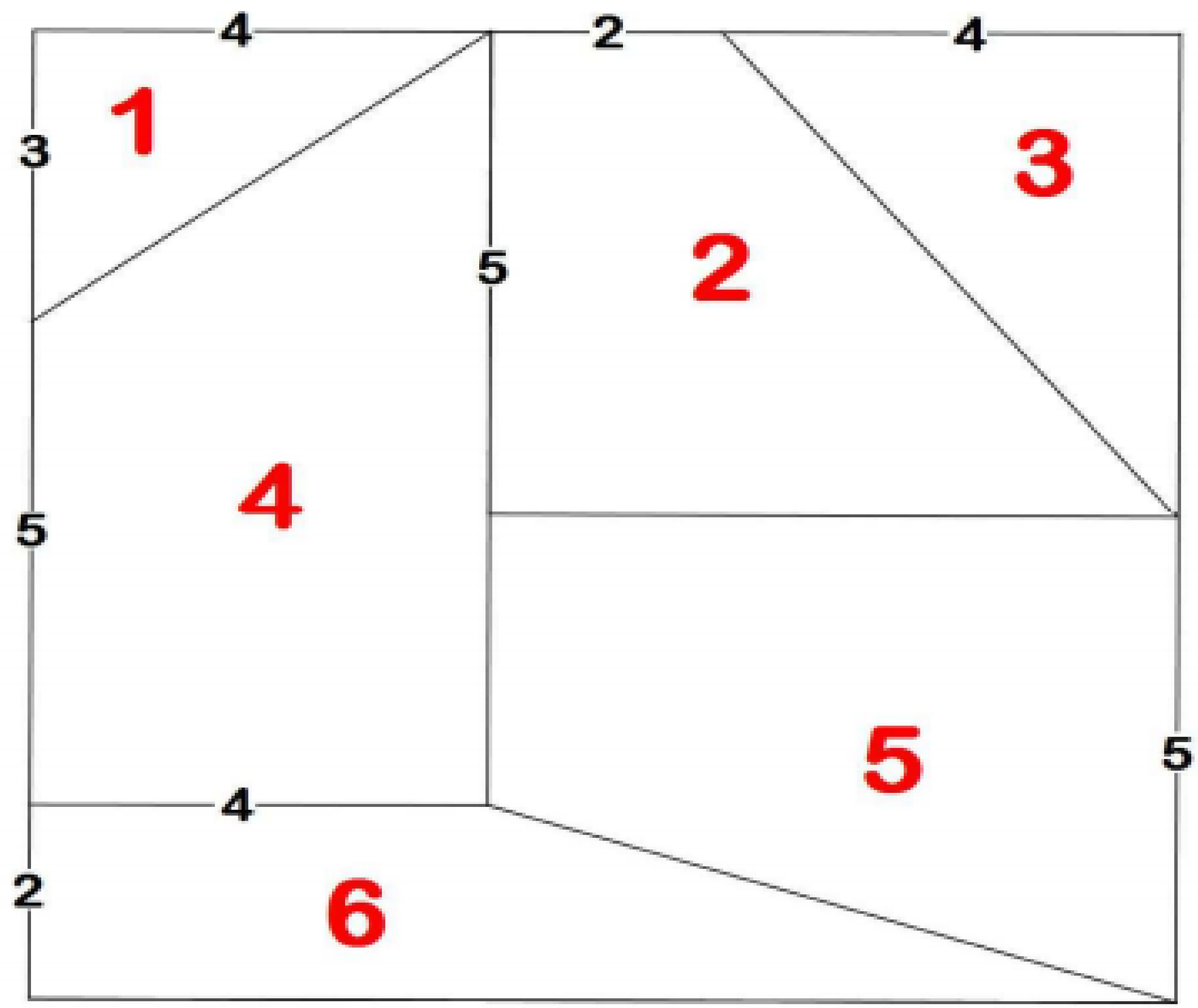
- Construir con el tangram las siguientes figuras.





REFERENCIAS

- https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2017/05/16/puzzle-de-semejanza-y-proporcionalidad/
- https://sites.google.com/site/materialdidacticoparampcl/home/tangram


4
2
4
3
1
3
5
2
5
4
5
4
2
6
5

Anexo 8. Áreas.

MÓDULO DE GEOMETRÍA.

INTRODUCCIÓN.

En este módulo se realizarán medidas de superficies rectilíneas y circulares midiendo las superficies directamente y se analizará el origen de algunas fórmulas de área. Representaremos también, con la ayuda del tangram circular, figuras armónicas y conoceremos un desafío mental llamado “Menseki meiro”- “Laberinto de áreas” el cual es una creación de Naoki Inaba, uno de los inventores más creativos de desafíos mentales a nivel mundial para lo cual solo se necesita saber que el área de un rectángulo es el producto de su largo y su ancho.

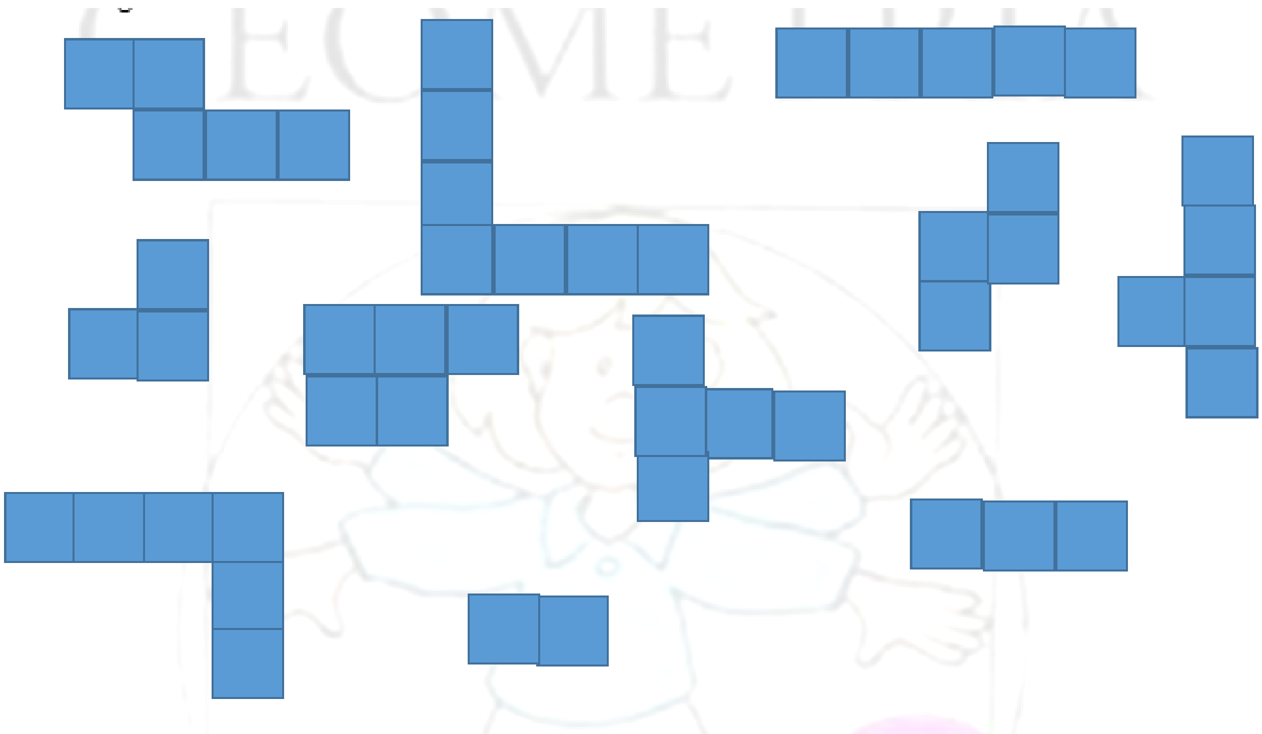
OBJETIVOS

- Entender las bases teóricas del proceso de medir figuras planas.
- Aprender a calcular el área de algunas figuras midiendo directamente la superficie.
- Comprender las fórmulas de área de algunas figuras típicas.

.

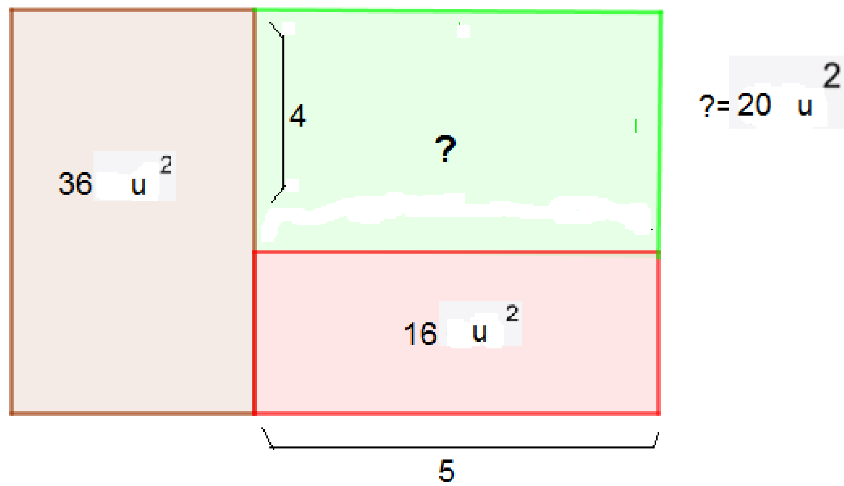
ACTIVIDAD UNO.

Con las figuras dadas formar dos cuadrados de idéntico tamaño.

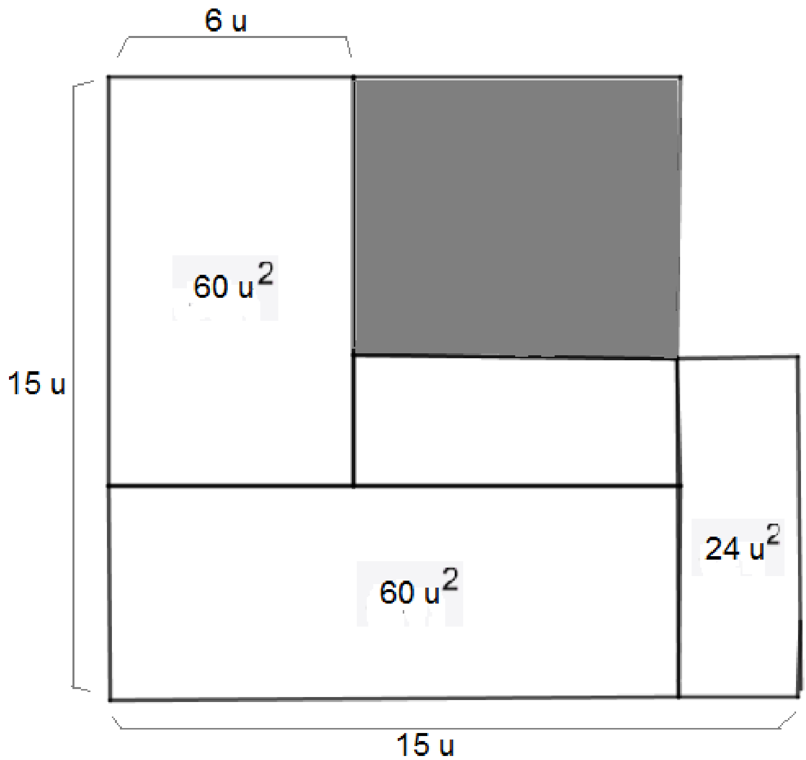


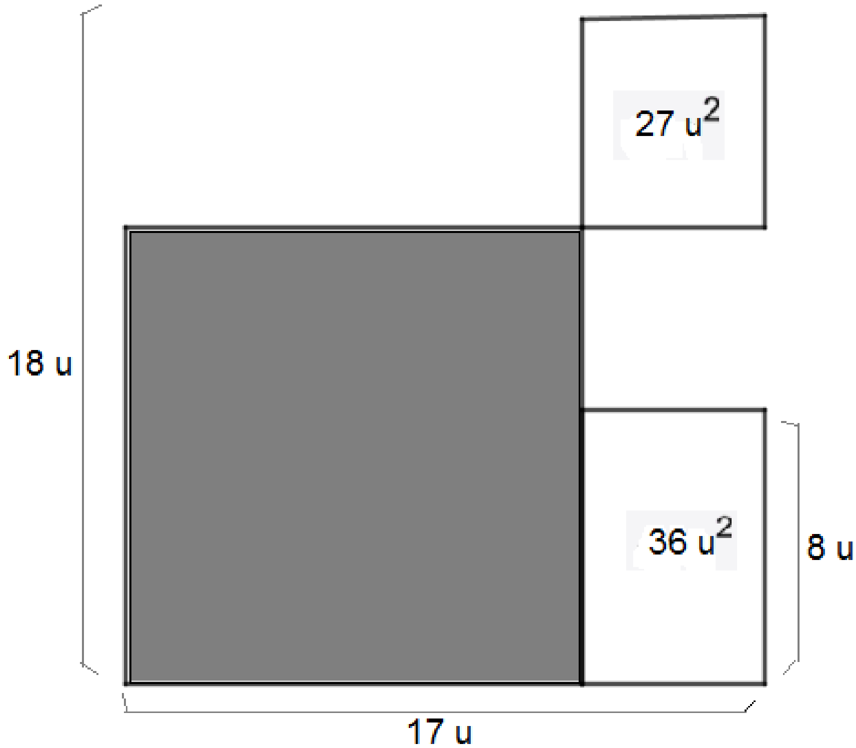
ACTIVIDAD DOS. (Menseki meiro).

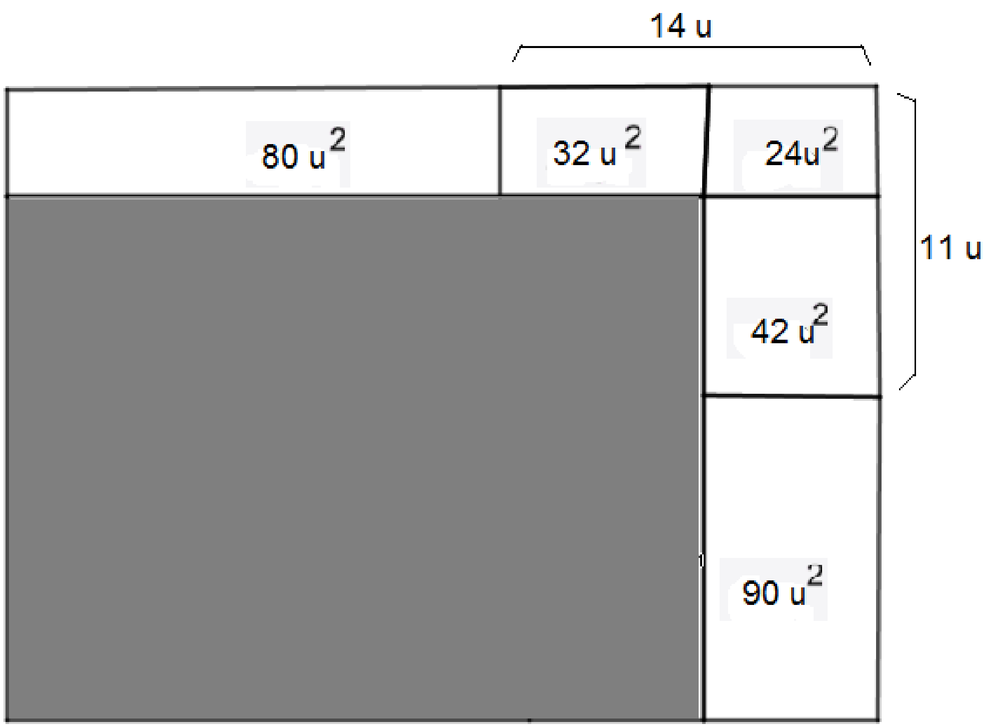
Ejemplo:

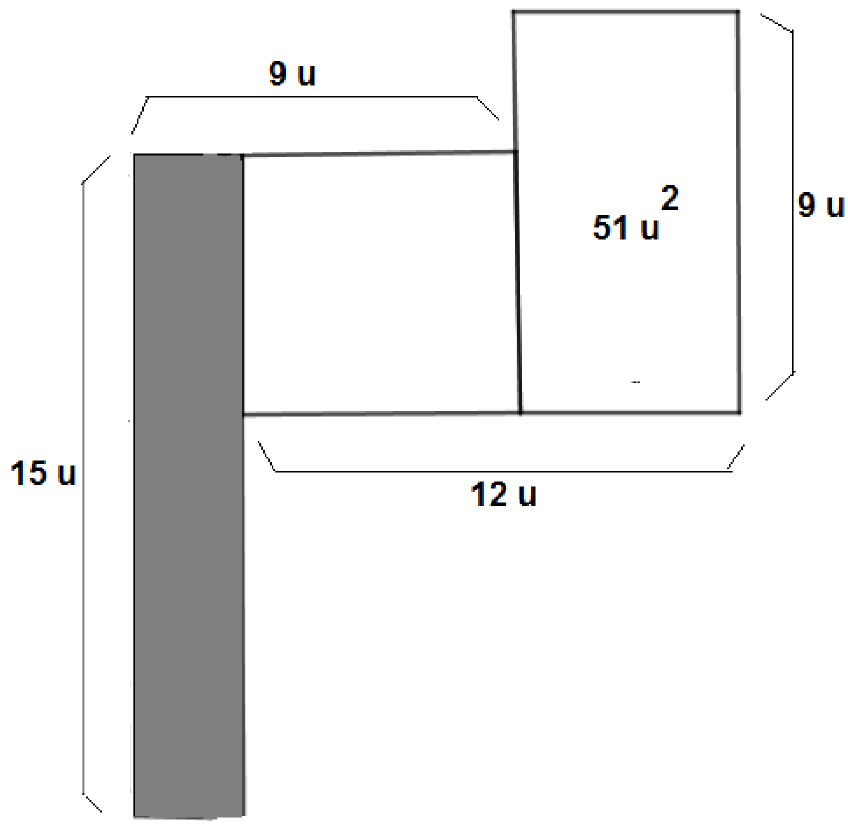


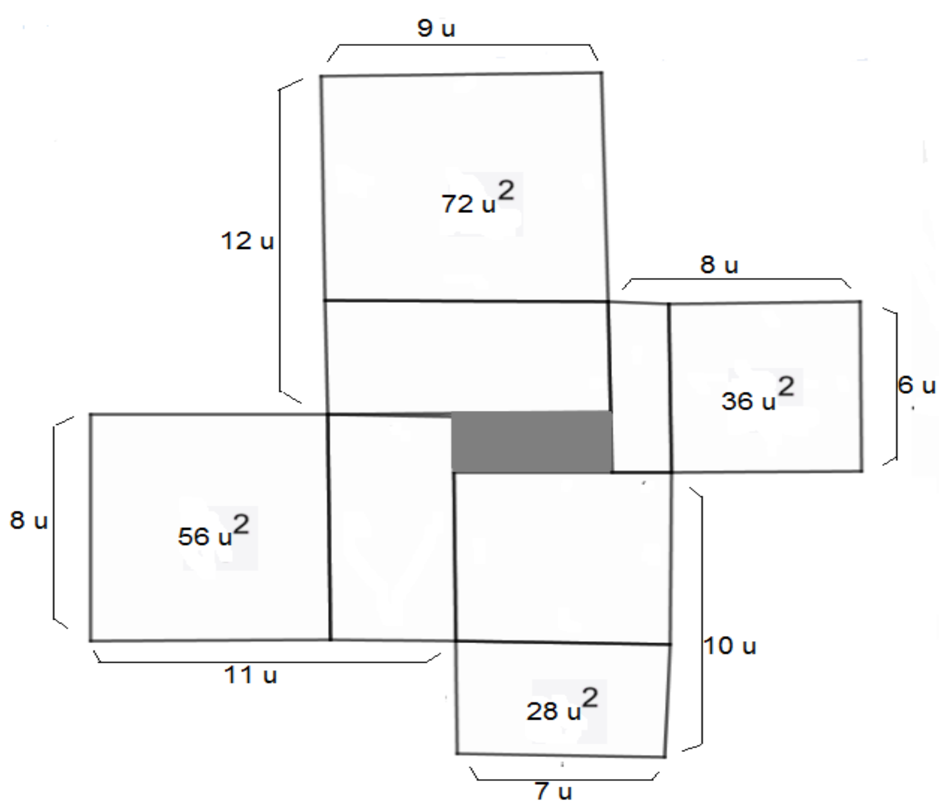
Encontrar el valor del área denotado con color gris.

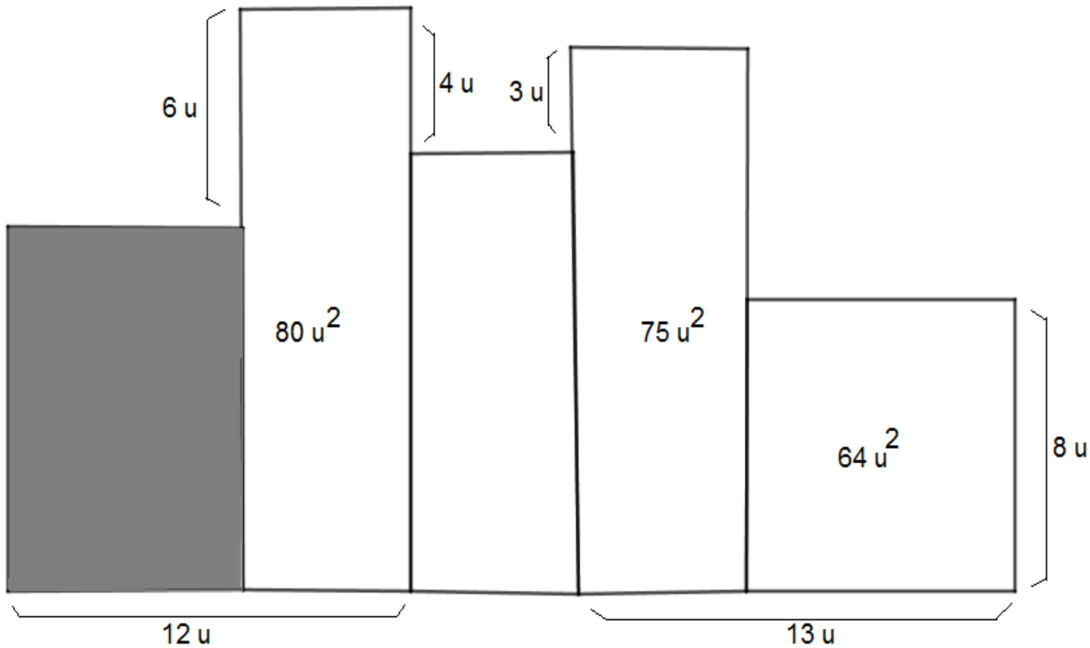


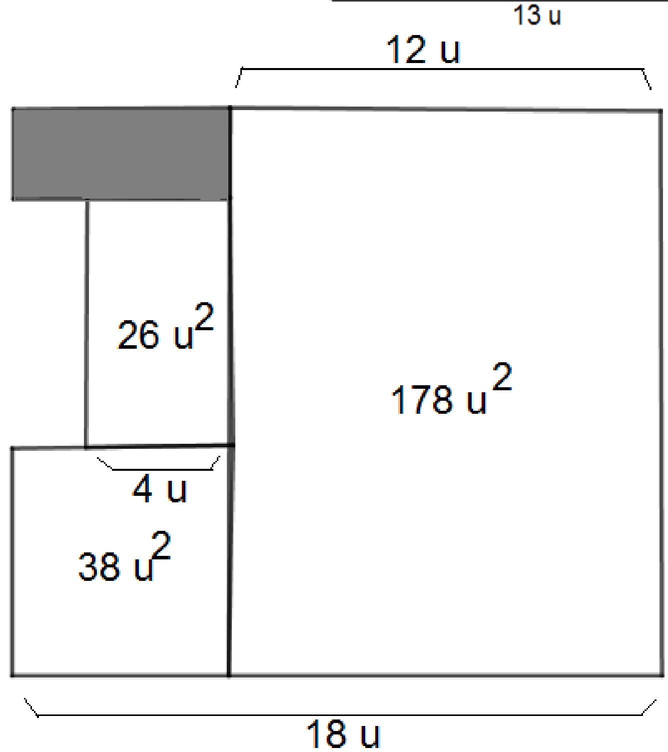

27 u^2
18 u
36 u^2
8 u
17 u


14 u
80 u^2
32 u^2
24u^2
11 u
42 u^2
90 u^2


9 u
51 u2
9 u
15 u
12 u

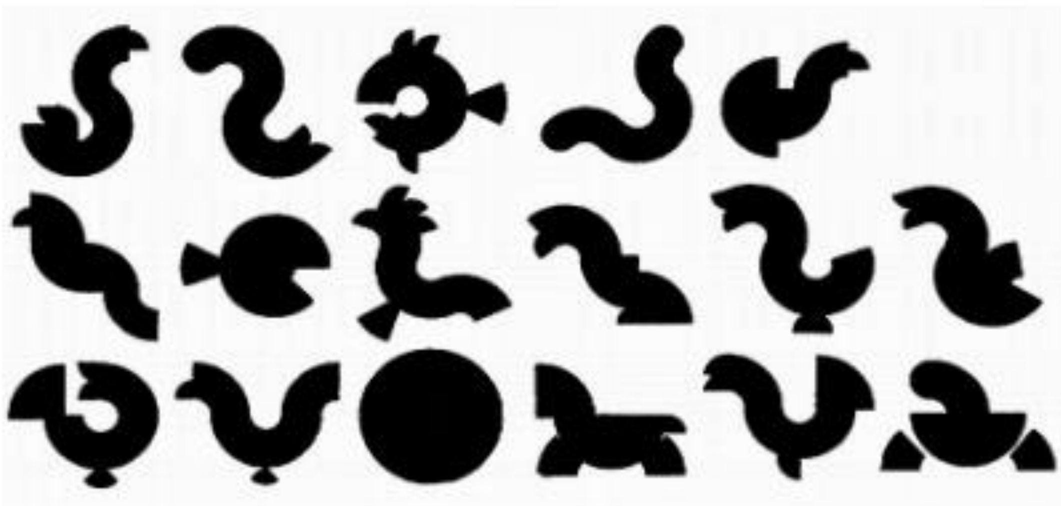

9 u
72 u2
12 u
8 u
36 u2
6 u
8 u
56 u2
10 u
11 u
28 u2
7 u


6 u
4 u
3 u
80 u2
75 u2
64 u2
8 u
12 u
13 u


12 u
26 u2
178 u2
4 u
38 u2
18 u

ACTIVIDAD TRES. (Tangram Circular**)**

Reproducir las figuras que se encuentran a continuación, recordando que no se pueden superponer las piezas y al mismo tiempo deben ser utilizadas todas.



¿Cuál es el área de las figuras anteriores?

BIBLIOGRAFÍA

Naoki Inaba. (2015). Rompecabezas lógicos de áreas.
http://sabrinamatematica.blogspot.com/2014/03/tangram-circular.html
(Inaba, 2015)

Raquel Lagunilla. (2013). El geoplano, un recurso genial.
https://aprendiendomatematicas.com/el-geoplano
Maria Angelina Moreno. (2014). Figuras convexas.
https://matematicasmodernas.com/figuras-convexas/