

**ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA DE COMUNICACIÓN QUE  
EMPLEA LA MODULACIÓN MULTI-TONO FILTRADO (FMT) SOBRE UN CANAL  
DISPERSIVO GAUSSIANO, UTILIZANDO SECUENCIAS PILOTO PARA LA  
ESTIMACIÓN DEL CANAL**



**Jorge Ivan Medina Alarcón**

Tesis de pregrado en Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

**Universidad del Cauca  
Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones  
Departamento de Telecomunicaciones  
Línea de Investigación de ecualización y estimación de canal**

**Popayán 2021.**



Jorge Ivan Medina Alarcon

**ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA DE COMUNICACIÓN QUE  
EMPLEA LA MODULACIÓN MULTI-TONO FILTRADO (FMT) SOBRE UN CANAL  
DISPERSIVO GAUSSIANO, UTILIZANDO SECUENCIAS PILOTO PARA LA  
ESTIMACIÓN DEL CANAL**

Tesis presentada a la Facultad de Ingeniería  
Electrónica y Telecomunicaciones de la  
Universidad del Cauca para la obtención del  
Título de:

**Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones**

Director:  
Jesús Mauricio Ramírez Viafara  
MSc. en Electrónica y Telecomunicaciones

**Popayán 2021**



# Contenido

	Pág.
<b>Introducción .....</b>	<b>xv</b>
<b>1. Estimación de Canal .....</b>	<b>17</b>
1.1. Estimación.....	17
1.1.1. Estimación paramétrica .....	18
1.1.2. Criterios para distinguir entre estimadores .....	18
1.2. Tipos de estimadores .....	21
1.2.1. Estimación por Bayes.....	21
1.2.2. Estimadores puntuales .....	25
1.3. Técnicas de estimación de canal .....	29
1.3.1. Estimación de canal asistida por piloto en modulación multiportadora .....	31
<b>2. Esquema de modulación FMT sobre canales dispersivos Gaussianos .....</b>	<b>35</b>
2.1. Modulación multiportadora .....	35
2.1.1. Clasificación de las MCM .....	39
2.2. Canal dispersivo AWGN.....	40
2.3. Modulación multitono filtrada (FMT) .....	42
2.3.1. Proceso de transmisión FMT.....	43
2.4. Estimación de canal en FMT .....	48
2.4.1. Técnica de estimación por secuencias de entrenamiento o asistidas por pilotos en bloque FMT. ....	50
<b>3. Diseño e implementación .....</b>	<b>57</b>
3.1. Sistema FMT sobre un canal dispersivo Gaussiano .....	58
3.1.1. Bloque generador de símbolos M-QAM: .....	59
3.1.2. Bloque transmisor FMT .....	61

3.1.3. Canal dispersivo AWGN.....	65
3.1.4. Bloque receptor FMT.....	68
3.1.5. Pruebas de validación del sistema.....	70
3.2. Estimación de canal.....	76
3.2.1. Pruebas de validación de la etapa de estimación de canal:.....	78
<b>4. Resultados, análisis y conclusiones.....</b>	<b>81</b>
4.1. Resultados y análisis del desempeño.....	81
4.1.1. Variando la longitud de la secuencia piloto.....	81
4.1.2. Variando el factor de sobremuestreo.....	84
4.1.3. Variando la frecuencia nominal.....	85
4.1.4. Variando el factor de roll-off.....	87
4.1.5. Variando el número de subcanales.....	89
4.1.6. Sistema FMT vs canal de portadora única.....	92
4.2. Conclusiones.....	95
4.3. Trabajos futuros.....	96

## Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1.1. Comparación de varianzas para dos estimadores .....	20
Figura 1.2. Casos de distribución a) simétrica y b) asimétrica de la función de densidad condicional de X dado $\theta$ (adaptado de [6, p. 363]). .....	25
Figura 1.3. Gráfico de dispersión de las observaciones y la media.....	28
Figura 1.4. Proceso de estimación de canal.....	30
Figura 1.5. Disposición de símbolos piloto tipo BCE. ....	32
Figura 1.6. Disposición de símbolos piloto tipo CCE.....	32
Figura 1.7. Disposición de símbolos piloto en inclinación. ....	32
Figura 2.1. Canal con subdivisión del espectro en MCM. ....	37
Figura 2.2. Diagrama de bloques general de un transmisor MCM. ....	37
Figura 2.3. Flujo de símbolos de menor velocidad después del proceso de conversión S/P. ....	38
Figura 2.4. Canal lineal AWGN. ....	40
Figura 2.5. Distribución de subcanales en FMT. ....	44
Figura 2.6. Representación gráfica del muestreo en FMT. ....	46
Figura 2.7. Dispersión del ruido complejo en el plano complejo.....	49
Figura 3.1. Diagrama de estados de las actividades en el modelado concurrente....	58
Figura 3.2. Diagrama general en bloques del Sistema FMT. ....	59
Figura 3.3. Diagramas de constelación para 4-QAM y 16-QAM.....	60
Figura 3.4. Esquema transmisor FMT. ....	61
Figura 3.5. Secuencia de símbolos demultiplexados en el conversor S/P. ....	61
Figura 3.6. Secuencia de símbolos sobremuestreada en un factor de NL=8. ....	62
Figura 3.7. Filtro prototipo implementado en MATLAB.....	63
Figura 3.8. Señal a la salida del filtro (señal conformada).....	63
Figura 3.9. Señal modulada mediante una exponencial compleja. ....	64

Figura 3.10. Señal modulada a la salida del transmisor. ....	64
Figura 3.11. Espectro de la señal $x_n$ a la salida del transmisor.....	64
Figura 3.12. Canal multitrayecto con 1 solo rayo indirecto. ....	65
Figura 3.13. Función de transferencia. ....	67
Figura 3.14. Canal multitrayecto en tiempo discreto.....	67
Figura 3.15. Espectro de la señal después del canal $Yf$ . ....	68
Figura 3.16. Esquema receptor FMT sin estimación de canal y ecualización. ....	69
Figura 3.17. Proceso de decisión. ....	69
Figura 3.18. Curvas de desempeño sobre un canal AWGN. ....	71
Figura 3.19. Espectro de la señal a la salida del canal AWGN (superior $N=1$ , inferior $N=32$ ). ....	72
Figura 3.20. Efecto del canal dispersivo AWGN en las curvas de desempeño de la BER. ....	73
Figura 3.21. Curvas de desempeño para validar la transmisión FMT sobre canal dispersivo AWGN con modulación 4QAM. ....	74
Figura 3.22. Curvas de desempeño para validar la transmisión FMT sobre canal dispersivo AWGN con modulación 16QAM. ....	74
Figura 3.23. Curvas de desempeño del sistema FMT sobre canal dispersivo AWGN y orden de modulación 4-QAM, variando el número de canales. ....	75
Figura 3.24. Efecto de rotación en FMT, $N=16$ . ....	75
Figura 3.25. Etapa de estimación de canal. ....	77
<i>Figura 3.26. Ecualización de los símbolos.</i> ....	78
Figura 3.27. a) Espectro de la señal y función de transferencia, b) coeficientes estimados. ....	79
Figura 3.28. Antes (rojo) y después de ecualizar (azul), para los canales 1,4,8,12. ....	79
Figura 3.29. Curvas de desempeño para validar la estimación del canal.....	80
Figura 4.1. Coeficientes del canal estimados para $Lp = 1, 4, 40$ . ....	82
Figura 4.2. Curvas de desempeño 4QAM, variando $Lp$ para $N=32$ . ....	83
Figura 4.3. Curvas de desempeño 4QAM, variando $Lp$ para $N = 4$ . ....	83
Figura 4.4. Curvas de desempeño 16QAM, variando $Lp$ para $N=32$ y $N=4$ . ....	84
Figura 4.5.. Espectro y función de transferencia para el caso de $L=4$ . ....	85
Figura 4.6. Curvas de desempeño del sistema al variar $L$ . ....	85
Figura 4.7. Espectro al variar $fc$ . ....	86
Figura 4.8. Curvas de desempeño, $fc = 0 \text{ Hz}$ (izquierda) y $fc = 1/2\tau_s$ (derecha)....	87
Figura 4.9. Ancho espectral para el valor máximo de $\rho$ . ....	87



---

Figura 4.10. Ancho espectral para el valor mínimo de $\rho$ . .....	88
Figura 4.11. Curvas de desempeño cuando se varía $\rho$ .....	88
Figura 4.12. Canal 1 (izquierda), canal 2 (derecha). .....	89
Figura 4.13. Curvas de desempeño al variar N, canal 1. ....	90
Figura 4.14. Curvas de desempeño al variar N, canal 2. ....	90
Figura 4.15 Curvas de desempeño distintos N y orden de modulación 16-QAM. ....	92
Figura 4.16. Espectro del canal.....	93
Figura 4.17. Curvas de desempeño para la simulación con 4QAM.....	94
Figura 4.18. Curvas de desempeño para la simulación con 16QAM.....	94

## Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. Parámetros generales de simulación para validar el sistema FMT. ....	70
Tabla 2. Parámetros generales del sistema, al variar $L_p$ .....	82
Tabla 3 Parámetros generales del sistema, variando $f_c$ .....	86
Tabla 4. Parámetros del canal, variando N.....	89
Tabla 5 Tabla comparativa de N vs $E_b/N_0$ para una BER objetivo de $10^{-4}$ . ....	91
Tabla 6. Parámetros generales del sistema. ....	93

## Acrónimos

<b>AWGN</b>	<i>Additive White Gaussian Noise</i> , Ruido Blanco Aditivo Gaussiano.
<b>BCE</b>	<i>Block-type Channel Estimation</i> , Estimación de Canal tipo Bloque.
<b>BCET</b>	<i>Blind Channel Estimation Technique</i> , Técnica de Estimación de Canal Ciega.
<b>BER</b>	<i>Bit Error Rate</i> , Tasa de Error de Bit.
<b>CCE</b>	<i>Comb Channel Estimation</i> , Estimación de Canal por disposición de símbolos piloto tipo Peine.
<b>CFO</b>	<i>Carrier Frequency Offset</i> , desplazamiento en Frecuencia de las Portadoras.
<b>CMT</b>	<i>Cosine Modulated Multitone</i> , modulación Multitono Modulada en Coseno.
<b>CSI</b>	<i>Channel State Information</i> , Información del Estado del Canal.
<b>DDCE</b>	<i>Decision-Directed Channel Estimation</i> , Estimación de Canal Dirigida por Decisión.
<b>DMT</b>	<i>Discrete Multitone</i> , Modulación Multitono Discreta.
<b>DWMT</b>	<i>Discrete Wavelet Multitone</i> , modulación Multitono Discreta por Ondículas.
<b>FMT</b>	<i>Filtered Multi-tone/Filtered bank Multi-tone</i> , modulación Multitono filtrada.
<b>ICI</b>	<i>Inter-Channel Interference</i> , Interferencia entre Canales.
<b>ISI</b>	<i>Inter-Symbol Interference</i> , Interferencia entre Símbolos.
<b>jpdf</b>	<i>Joint Probability Density Function</i> , Función de Densidad de Probabilidad Conjunta.
<b>jpmf</b>	<i>Joint Probability Mass Function</i> , Función de Probabilidad Conjunta.
<b>LS</b>	<i>Least-Square</i> , Mínimos Cuadrados.
<b>MCM</b>	<i>Multicarrier Modulation</i> , Modulación Multiportadora.
<b>MMSE</b>	<i>Minimum Mean-Square Error</i> , Mínimo Error Medio Cuadrático.

<b>MAVE</b>	<i>Minimum Mean Absolute Value of Error</i> , Mínimo Error Medio Absoluto.
<b>MAP</b>	<i>Maximum a Posteriori Probability</i> , Máxima Probabilidad a Posteriori.
<b>ML</b>	<i>Maximum Likelihood</i> , Máxima Verosimilitud.
<b>MAP</b>	<i>Maximum A Posteriori Probability</i> , Máxima Probabilidad a Posteriori.
<b>OFDM</b>	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i> , Multiplexación por División de Frecuencias Ortogonales.
<b>PSACE</b>	<i>Pilot-Symbol Assisted Channel Estimation</i> , Estimación de Canal Asistida por Símbolos Pilotos.
<b>QAM</b>	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i> , Modulación por Amplitud en Cuadratura.
<b>pdf</b>	<i>Probability Density Function</i> , Función de Densidad de Probabilidad.
<b>SBCET</b>	<i>Semi-Blind Channel Estimation Technique</i> , Técnica de Estimación de Canal Semi-Ciega.
<b>SRRC</b>	<i>Square Root Raised Cosine</i> , Filtro en Raíz Cuadrada de Coseno Alzado.
<b>SMT</b>	<i>Staggered Multitone</i> , modulación Multitono Escalonada.
<b>CP</b>	<i>Circular Prefixes</i> , Prefijo Cíclico.
<b>VDSL</b>	<i>Very-high-bit-rate Digital Subscriber Lines</i> , Línea de Abonado Digital de muy alta tasa de transferencia.
<b>FBMC</b>	<i>Filter Bank-based MultiCarrier</i> , Modulación Multitportadora por Banco de Filtros.
v.a.	Variable aleatoria.

## Variables y símbolos

$a^{(i)}$	Parámetro complejo que representa a $ H(f_i) $ .
$\hat{a}^{(i)}$	Estimación de $a^{(i)}$ .
$\hat{A}^{(i)}$	Estimador de $a^{(i)}$ .
$b$	Sesgo de un estimador.
$B$	Ancho de banda.
$B_c$	Ancho de banda de coherencia.
$B_N$	Ancho espectral de cada subcanal.
$B_{srrc}$	Ancho espectral del filtro SRRC.
$E[\cdot]$	Operador para el valor esperado.
$E_b$	Energía de bit.
$E_s$	Energía de símbolo.
$f_c$	Frecuencia nominal.
$f_i$	Frecuencia portadora del $i$ -ésimo subcanal.
$f_s$	Frecuencia de muestreo.
$H(f)$	Función de transferencia.
$h(t)$	Respuesta al impulso del canal.
$L$	Factor de sobremuestreo.
$L_p$	Longitud de símbolos piloto.
$M$	Orden de modulación QAM.
$n$	Variable del tiempo en el dominio discreto.
$N$	Número de subcanales FMT.
$N_0$	Densidad espectral de potencia.
$p(t)$	Filtro transmisor / Pulso conformador.
$R$	Tasa de símbolo.
$S_k$	Símbolo $k$ -ésimo de entrada.
$\hat{S}_k$	Símbolo $k$ -ésimo estimado.
$srrc(n)$	Filtro prototipo en raíz cuadrada de coseno alzado.

$\vec{s}$	Vector que representa los símbolos transmitidos de longitud $L_p$ .
$t$	Variable del tiempo en el dominio continuo.
$T$	Periodo de símbolo.
$T(\cdot)$	Estadística, función de una variable aleatorio.
$T_N$	Periodo de símbolo de un subcanal FMT, ensanchado $N$ veces.
$T_s$	Periodo de muestreo.
$\vec{u}$	Vector que representa una muestra aleatoria de observaciones.
$u_k^{(i)}$	v.a que representa las observaciones del instante $k$ -ésimo del subcanal $i$ -ésimo.
$Var[\cdot]$	Operador para la varianza.
$v_k^{(i)}$	Realización de $u_k^{(i)}$ / Observación de un símbolo.
$w_k^{(i)}$	v.a que representa el ruido AWGN en el instante $k$ -ésimo del subcanal $i$ -ésimo.
$x_n$	Señal modulada en tiempo discreto.
$x(t)$	Señal modulada en tiempo continuo.
$y_n$	Señal a la salida del canal en tiempo discreto.
$y(t)$	Señal a la salida del canal en tiempo continuo.
$\alpha$	Atenuación del rayo reflejado.
$\Delta f$	Espaciamiento uniforme entre frecuencias portadoras ( $f_i$ ).
$\rho$	Factor de roll-off. Indica el exceso de ancho de banda.
$\sigma^2$	Varianza del ruido.
$\hat{\theta}$	Símbolo que representa a un estimador.
$\tau$	Retardo del rayo reflejado.
$\tau_{rms}$	Dispersión de retardo rms.
$\tau_s$	Retardo del rayo reflejado en segundos.
$\tau_n$	Retardo del rayo reflejado en muestras.

# Introducción

Los sistemas de comunicación tienen como objetivo principal transmitir información con la menor probabilidad de error en la detección, de tal forma que se garantice una comunicación exitosa entre el transmisor y el receptor. La mayoría de técnicas de modulación y codificación existentes han sido diseñadas para lograr ese cometido en canales que sólo introducen ruido blanco aditivo Gaussiano (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*). Sin embargo, cuando se transmite información digital a través de un canal dispersivo Gaussiano<sup>1</sup>, éste introduce variaciones en el espectro de la señal transmitida, las cuales generan un fenómeno conocido como desvanecimiento, el cual puede ser de tipo plano o selectivo en frecuencia. El desvanecimiento selectivo genera Interferencia Inter-Símbolo (ISI, *Inter-Symbol Interference*). La ISI es un problema para las comunicaciones ya que aumenta considerablemente la probabilidad de error en la detección, lo que al final produce pérdida de información.

Existen diferentes técnicas para mitigar la ISI, una de ellas es la ecualización de canal, que consiste en compensar directamente las distorsiones del canal mediante un filtro (analógico o digital) conectado en cascada con los demás filtros del receptor, sin embargo, esto requiere de un perfecto conocimiento del canal y aumenta la complejidad del receptor. Otra alternativa es la Modulación Multi-portadora (MCM, *Multi-Carrier Modulation*), que consiste en dividir el espectro de la señal transmitida en sub-espectros paralelos más angostos [1], [2] de tal forma que cada sub-espectro perciba un canal aproximadamente plano<sup>2</sup>, de esa forma, se elimina virtualmente el desvanecimiento selectivo, y por ende la ISI. Dentro de los esquemas de modulación multi-portadora más comunes se encuentran OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) y FMT (*Filtered Multitone*). Particularmente, FMT se caracteriza por garantizar que los sub-espectros alrededor de cada subportadora (o tono) sean limitados en banda. De esa forma, el canal introduce un factor complejo sobre cada

---

<sup>1</sup> Canal Lineal con ruido blanco aditivo Gaussiano (Linear AWGN Channel).

<sup>2</sup> Esta condición se cumple cuando el número de tonos es suficientemente grande.

tono, el cual está constituido por una ganancia y una fase que generan un efecto de rotación en las constelaciones de símbolos transmitidos sobre dichos tonos, lo cual, también aumenta considerablemente la BER (*Bit Error Rate*, Tasa de Error de Bit).

Para solucionar el inconveniente que presenta la modulación FMT, surge la necesidad de conocer el factor complejo correspondiente a cada tono, de tal forma que su efecto pueda ser compensado. A ese procedimiento se le conoce como estimación de canal, y tiene como propósito principal diseñar receptores óptimos, que garanticen la recuperación de los símbolos transmitidos, a partir de dicha estimación. Hipotéticamente, el uso conjunto de un estimador de canal y un receptor óptimo debería mejorar sustancialmente el desempeño del sistema de comunicación, es por ello que el presente trabajo de grado tiene como objetivo analizar el desempeño, en cuanto a la BER, de un sistema de comunicación que emplea la modulación FMT sobre un canal dispersivo Gaussiano, usando secuencias piloto para estimar el canal.

La estructura del documento es la siguiente: el capítulo 1 aborda lo relacionado con la estimación de canal, empezando con la revisión de algunos conceptos de la inferencia estadística, seguido de las técnicas de estimación de canal existentes. El capítulo 2 abarca la estimación de canal sobre canales dispersivos gaussianos usando la modulación FMT, para ello, se analiza la modulación FMT y su implementación en tiempo discreto, y se describe la técnica de estimación por secuencias piloto en bloque de máxima verosimilitud. El capítulo 3 cubre la fase de diseño e implementación del sistema propuesto, siguiendo un modelo de desarrollo concurrente el cual se aplica a las acciones, tareas, o actividades de la fase en cuestión. Seguido, en el capítulo 4 se presentan los resultados de simulación, donde se varían los parámetros del sistema y se hace una comparación de la modulación multiportadora versus la modulación de portadora única. Por último, se muestran las conclusiones y trabajos futuros, además de referencias y anexos.



# Capítulo 1

## 1. Estimación de Canal

En un sistema de comunicación digital, el objetivo principal del receptor es minimizar la probabilidad de errores en detección para mejorar así el desempeño del sistema, es por ello que surge la necesidad de diseñar receptores óptimos, capaces de adaptarse a las características del canal. Dichas características son estimadas mediante el uso de *secuencias de símbolos piloto*, también llamadas *secuencias de entrenamiento*, o directamente mediante el análisis de la señal en el receptor. A este proceso se le conoce como *estimación de canal*. De esta forma el receptor puede compensar los efectos del canal [3].

En el presente capítulo se hace un estudio de la Estimación de Canal tipo Bloque (BCE, *Block-type Channel Estimation*), la cual se basa en la transmisión de secuencias piloto. Para ello, en la sección 1.1 se explica el concepto de estimación paramétrica y los criterios para definir un “buen estimador”, luego, en la sección 1.2 se muestran los tipos de estimadores de acuerdo a su clasificación. En la sección 1.3, se describen las técnicas de estimación asistidas por secuencias piloto encontradas en la literatura, y se aborda la estimación de canal mediante secuencias piloto por transmisión en bloque, ya que hace parte del desarrollo del presente trabajo de grado.

---

### 1.1. Estimación

La presente sección tiene como objetivo explicar el concepto de estimación paramétrica, para luego definir los conceptos de *estimación*, *estimador* y *valor*

*estimado*. También, se explican los criterios para distinguir entre diferentes tipos de estimadores. Posterior a ello, se clasifican los estimadores de acuerdo al tipo de información obtenida en: puntual (referida a un valor único estimado), por intervalo (dentro del cual probablemente se encuentra el valor a estimar) o por la forma de distribución de probabilidad. Además, se clasifican respecto a la aleatoriedad o no del parámetro desconocido.

### 1.1.1. Estimación paramétrica

Sea  $X$  la característica medible y observable de una población, la cual se comporta de acuerdo a la función de densidad de probabilidad (pdf, *probability density function*),  $f_X(x; \theta)$ , donde  $\theta$  es un parámetro desconocido de dicha población.

Una muestra aleatoria es un conjunto de variables aleatorias  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$  (llamadas observaciones) independientes e idénticamente distribuidas (iid) con pdf común  $f_X(x; \theta)$ . Se define la estimación paramétrica como el proceso que permite encontrar el parámetro desconocido  $\theta$  a partir de la muestra aleatoria. Se tienen los siguientes tipos de estimación:

- *Estimación puntual*: consiste en definir una estadística que conduzca a un valor único, el cual se considera como la estimación del parámetro  $\theta$ .
- *Estimación por intervalos*: consiste en hallar un intervalo dentro del cual se espera que se encuentre el valor verdadero de  $\theta$  con cierta probabilidad.

A continuación, se definen 3 conceptos importantes:

**Estadística**: es cualquier función de la muestra aleatoria  $X$ . Se simboliza con  $T(X)$  y constituye como tal una variable aleatoria [4].

**Estimador**: un estimador  $\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$  es una estadística  $T(X)$  que se escoge de acuerdo a ciertas propiedades deseadas [4]. Se define como:

$$\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad (1.1)$$

$\hat{\theta}$  es a su vez es una variable aleatoria [5, p. 291].

**Valor estimado de  $\theta$ , o estimación**: este es el valor que toma la estadística  $\hat{\theta}$  en función de los valores particulares  $x_1, x_2, \dots, x_k$  que tomó la muestra aleatoria [5, p. 291], dicho de otro modo es una realización del estimador.

### 1.1.2. Criterios para distinguir entre estimadores

Es importante definir una serie de juicios para distinguir entre diferentes estimadores. A continuación, se muestran los criterios de insesgabilidad y convergencia:

**Estimador insesgado:** se dice que un estimador  $\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$  es insesgado si se cumple que  $E[\hat{\theta}] = \theta$ . Esto quiere decir que si se realiza la estimación en repetidas ocasiones, el valor promedio de las estimaciones estará muy cercano al valor verdadero del parámetro  $\theta$  [5], [6].

**Sesgo de un estimador ( $b$ ):** es la diferencia entre el valor esperado del estimador y el valor verdadero del parámetro, esto es:

$$b(\theta) = E[\hat{\theta}] - \theta. \quad (1.2)$$

Se tienen dos tipos de sesgo:

- Sesgo conocido: cuando el sesgo no depende del parámetro desconocido. De esa forma, el estimador  $\hat{\theta} - b$  será insesgado.
- Sesgo desconocido: se da cuando  $b$  depende de  $\theta$ . En este caso no se puede obtener un estimador insesgado.

Que un estimador sea insesgado, no garantiza que sea el mejor estimador. A continuación, se introduce el término de varianza mínima.

**Varianza mínima:** suponiendo que se dispone de dos estimadores insesgados  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  lo ideal es escoger aquel cuya varianza sea menor, esto garantiza que el valor estimado esté más cerca al valor verdadero (con mayor probabilidad). Matemáticamente, si  $\hat{\theta}$  es un estimador insesgado de  $\theta$ , se considera que éste es de *varianza mínima* si para todos los posibles estimadores insesgados  $\theta^*$ , tal que  $E[\theta^*] = \theta$ , se cumple que  $Var[\hat{\theta}] \leq Var[\theta^*]$  [5, p. 292]. En la Figura 1.1 se ilustra el concepto de varianza mínima, donde se preferiría a  $\hat{\theta}_1$  sobre  $\hat{\theta}_2$ , ya que su varianza es menor.

En resumen, se puede decir que  $\hat{\theta}$  es el mejor estimador insesgado de  $\theta$  si:

- $E[\hat{\theta}] = \theta$
- $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k a_i X_i$ , es decir  $\hat{\theta}$  es una combinación lineal de las observaciones.
- $Var[\hat{\theta}] \leq Var[\theta^*]$ , donde  $\theta^*$  es cualquier otro estimador de  $\theta$  que satisface las relaciones i) y ii).

**Criterio de convergencia o consistencia de un estimador:**

Sea  $\hat{\theta}$  un estimador del parámetro  $\theta$ . Se dice que  $\hat{\theta}$  converge al valor  $\theta$  si se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr[|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon] = 0, \quad \forall \epsilon > 0 \quad (1.3)$$

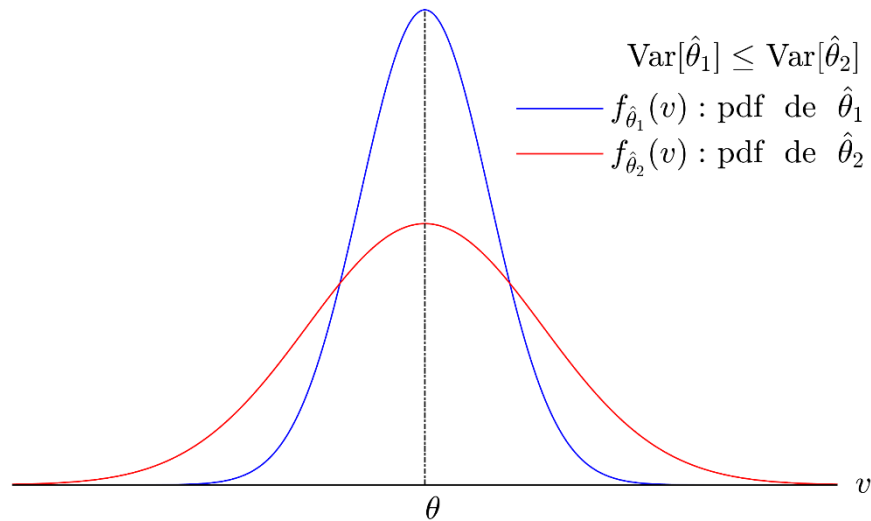


Figura 1.1. Comparación de varianzas para dos estimadores

donde  $k$  es el tamaño de la muestra aleatoria.

Aplicar la definición anterior para verificar la convergencia puede no ser muy sencillo, por lo cual surge el siguiente Teorema<sup>3</sup>:

**Teorema:** Sea  $\hat{\theta}$  un estimador de  $\theta$  basado en una muestra aleatoria de tamaño  $k$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta$  y si  $\lim_{k \rightarrow \infty} Var[\hat{\theta}] = 0$ , entonces  $\hat{\theta}$  es un estimador convergente de  $\theta$ .

### Cota de cramer-rao:

Es un criterio que permite determinar si un estimador es bueno o no. Este criterio se aplica cuando se usa el método de máxima verosimilitud, y consiste en estudiar el límite o cota inferior de la varianza de error. Dicha cota se le conoce como cota de *Cramer-Rao*.

La cota de Cramer Rao [6, p. 265] está dada por:

$$Var[\hat{\theta} - \theta] \geq \frac{1}{E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_X(x; \theta) \right)^2 \right]}, \quad (1.4)$$

donde  $f_X(x; \theta)$  es la pdf conjunta de la muestra aleatoria.

<sup>3</sup> La demostración del Teorema se puede verificar en [5].

Una vez se tiene claro el concepto de estadística, estimador, estimación y los criterios para elegir de manera más conveniente un estimador, a continuación, se explican los distintos tipos de estimadores, haciendo énfasis en los estimadores puntuales.

## 1.2. Tipos de estimadores

Un estimador se puede clasificar de acuerdo al tipo de estimación, es decir, si es puntual o por intervalos. También se puede clasificar de acuerdo al tipo de enfoque que se le da al parámetro, es decir, si se considera como una variable aleatoria o no. Cuando se trata de un parámetro aleatorio se usa la técnica de estimación por Bayes, y se clasifican en: estimación del Mínimo Error Medio Cuadrático (MMSE, *Minimum Mean-Square Error*), estimación del Mínimo Error Medio Absoluto (MAVE, *Minimum Mean Absolute Value of Error*) y la estimación de Máxima Probabilidad a Posteriori (MAP, *Maximum A Posteriori Probability*). Cuando el enfoque del parámetro no es aleatorio, los procedimientos más comúnmente usados son: el criterio de Máxima Verosimilitud (ML, *Maximum Likelihood*) [6, p. 346] o el método de los Mínimos Cuadrados (LS, *Least-Square*), y se elige de acuerdo al contexto del problema.

### 1.2.1. Estimación por Bayes

El enfoque Bayesiano asume al parámetro desconocido  $\theta$  como una variable aleatoria continua<sup>4</sup>, con función de densidad  $f_{\theta}(u)$ . La estimación por Bayes consiste en minimizar la función costo promedio  $\mathcal{R}$ , también llamada función de riesgo, la cual depende del error o diferencia entre  $\theta$  y  $\hat{\theta}$ , esto es:

$$\mathcal{R} = E[C(\theta, \hat{\theta})] = E[C(\theta, X_1, X_2, \dots, X_k)] = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{-\infty}^{\infty} C(u, \mathbf{x}) f_{\theta, \mathbf{X}}(u, \mathbf{x}) du d\mathbf{x}, \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{X}$  representa el conjunto de observaciones con valores muestrales  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_k$ , y  $f_{\theta, \mathbf{X}}(u, \mathbf{x})$  es la función de densidad de probabilidad conjunta (jpdf, *joint probability density function*) del vector aleatorio  $(\theta, \mathbf{X})$ . Aplicando la regla de la cadena sobre la jpdf del vector  $(\theta, \mathbf{X})$ , se tiene que:

$$f_{\theta, \mathbf{X}}(u, \mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}). \quad (1.6)$$

Así, la función de riesgo se puede reescribir de la siguiente manera:

<sup>4</sup> El parámetro  $\theta$  no se asume aleatorio por su comportamiento, sino por la naturaleza del observador, pues tiene total desconocimiento del mismo y no hay evidencia de su valor, este es el enfoque Bayesiano.

$$\mathcal{R} = \int_{\mathbb{R}^k} f_X(\mathbf{x}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} C(u, \mathbf{x}) f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x}) du \right] d\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

donde  $f_X(\mathbf{x})$  representa la pdf conjunta del vector aleatorio  $\mathbf{X}$ . Las funciones de costo más comunes son:

- Error cuadrático:

$$C(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2. \quad (1.8)$$

- Valor absoluto del error:

$$C(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|. \quad (1.9)$$

- Función de costo uniforme:

$$C(\theta, \hat{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta - \hat{\theta}| \geq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & |\theta - \hat{\theta}| < \frac{\Delta}{2} \end{cases}, \quad (1.10)$$

donde  $\Delta$  indica el ancho del rango de admisibilidad.

Minimizar  $\mathcal{R}$  garantiza un estimador óptimo, ya que equivale a minimizar el error entre  $\theta$  y  $\hat{\theta}$ . A continuación, se muestran 3 tipos de estimadores de acuerdo a la función de costo elegida:

- **Estimador del Mínimo Error Medio Cuadrático (MMSE):** El estimador óptimo nombrado como  $\hat{\theta}_{ms}$  es el valor que minimiza la función de riesgo cuando la función de costo corresponde al error cuadrático:

$$\mathcal{R} = \int_{\mathbb{R}^k} f_X(\mathbf{x}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (u - \hat{\theta})^2 f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x}) du \right] d\mathbf{x}. \quad (1.11)$$

Puesto que  $f_X(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+$  minimizar  $\mathcal{R}$  equivale a minimizar la parte que está entre corchetes, y se logra derivando respecto a  $\hat{\theta}$  e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (u - \hat{\theta})^2 f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x}) du \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} [(u - \hat{\theta})^2 f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x})] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -2(u - \hat{\theta}) f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x}) du = 0, \end{aligned}$$

resolviendo queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} u f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du = \hat{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du, \quad (1.12)$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du = 1,$$

por tanto

$$\hat{\theta}_{ms} = \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du = E[\theta|\mathbf{X}]. \quad (1.13)$$

De esa forma, el estimador  $\hat{\theta}_{ms}$  es la **media** condicional de  $\theta$  dado  $\mathbf{X}$ .

- **Estimador del Mínimo Error Medio Absoluto (MAVE):** De manera similar al anterior tipo de estimador, se reemplaza el valor absoluto del error  $|\theta - \hat{\theta}|$  en  $\mathcal{R}$ . Luego se deriva respecto a  $\hat{\theta}$  e iguala a cero la parte entre corchetes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |u - \hat{\theta}| f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du \right] &= \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left[ - \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (u - \hat{\theta}) f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (u - \hat{\theta}) f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du \right], \\ &= - \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} [(u - \hat{\theta}) f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x})] du + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} [(u - \hat{\theta}) f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x})] du = 0, \\ &\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du = \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Lo anterior indica que  $\hat{\theta}_{abs}$  es la **mediana** condicional de  $\theta$  dado  $\mathbf{X}$ .

- **Estimador de Máxima Probabilidad a Posteriori (MAP):** Se reemplaza la función de costo uniforme en  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_{\mathbb{R}^k} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \left[ \int_{-\infty}^{\hat{\theta} - \frac{\Delta}{2}} f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du + \int_{\hat{\theta} + \frac{\Delta}{2}}^{\infty} f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \left[ 1 - \int_{\hat{\theta} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta} + \frac{\Delta}{2}} f_{\theta|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du \right] d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Donde:

$$\int_{\hat{\theta} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta} + \frac{\Delta}{2}} f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x}) du = \Pr \left[ \hat{\theta} - \frac{\Delta}{2} \leq \theta \leq \hat{\theta} + \frac{\Delta}{2} | \mathbf{x} \right]. \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) indica que para minimizar  $\mathcal{R}$  se debe buscar un valor de  $\hat{\theta}$ , tal que maximice la probabilidad, esto es:

$$\left. \frac{\partial f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x})}{\partial u} \right|_{u=\hat{\theta}_{map}} = 0. \quad (1.17)$$

Luego, se aplica logaritmo natural a la ecuación(1.17), ya que este corresponde a una función monótona creciente:

$$\frac{\partial \ln f_{\theta|\mathbf{x}}(u|\mathbf{x})}{\partial u} = 0. \quad (1.18)$$

La ecuación (1.18) es conocida como ecuación de MAP. Luego, aplicando la regla de Bayes, se obtiene:

$$\frac{\partial \ln f_{\mathbf{x}|\theta}(\mathbf{x}|u)}{\partial u} + \frac{\partial \ln f_{\theta}(u)}{\partial u} = 0. \quad (1.19)$$

El  $\hat{\theta}_{map}$  es aquel  $\theta$  que satisface la ecuación (1.19), asumiendo un  $\Delta$  suficientemente pequeño. Además, se destaca que si el parámetro  $\theta$  se asume aleatorio con distribución normal y varianza muy grande, tal que tienda a ser uniforme, es decir,  $f_{\theta}(u)$  constante para todo valor de  $u$ , entonces, la estimación por Máxima Verosimilitud (ML, *Máxima Likelihood*) (abordada en la siguiente sección) se considera un caso especial de la estimación por MAP.

En general, para una distribución  $f_{\mathbf{x}|\theta}(\mathbf{x}|u)$  simétrica, si la distribución del parámetro es uniforme, entonces el valor estimado por los criterios MAP, MMSE, MAVe, y ML, son equivalentes. En la Figura 1.2 se ilustra lo anterior.



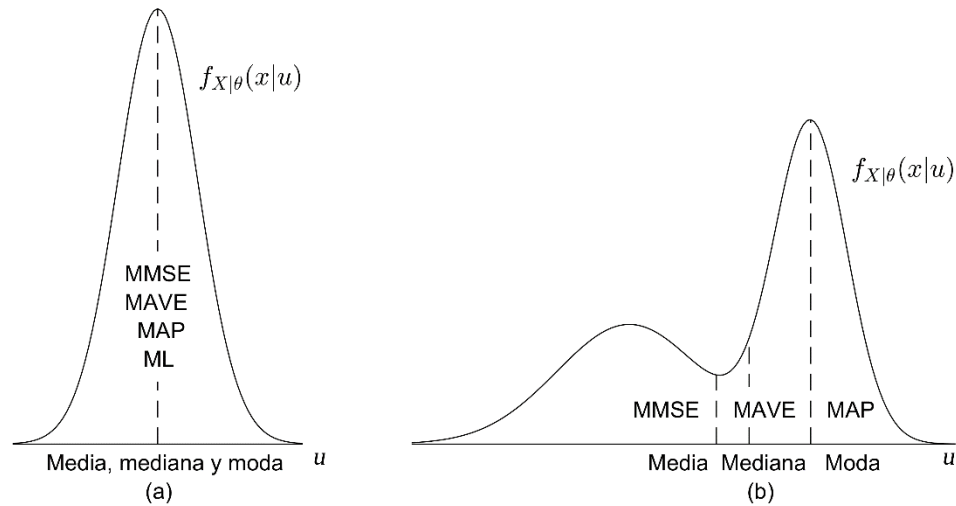


Figura 1.2. Casos de distribución a) simétrica y b) asimétrica de la función de densidad condicional de  $X$  dado  $\theta$  (adaptado de [6, p. 363]).

### 1.2.2. Estimadores puntuales

**Criterio de máxima verosimilitud:** dada una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_k$  con pdf común  $f_X(x; \theta)$ , cuyos valores muestrales son  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Se define la función de verosimilitud como:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_k; \theta) &= f_X(x_1, x_2, \dots, x_k; \theta) \\ &= f_{X_1}(x_1; \theta) f_{X_2}(x_2; \theta) \dots f_{X_k}(x_k; \theta). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Donde  $L(x_1, x_2, \dots, x_k; \theta)$  representa la jpdf de la muestra aleatoria. El criterio ML determina el valor del parámetro  $\theta$  que maximiza la función de verosimilitud según el valor particular que toma la muestra aleatoria. El criterio ML responde la siguiente pregunta ¿Para qué valor de  $\theta$  se maximiza la probabilidad de obtener la muestra  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ?, o, dicho de otro modo: ¿Con qué valor de  $\theta$  es más probable que haya ocurrido la muestra  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ?

- **Estimador de máxima verosimilitud ML:** El estimador de máxima verosimilitud de un parámetro  $\theta$ , denotado con  $\hat{\theta}$ , es aquel valor que maximiza la función de verosimilitud  $L(X_1, X_2, \dots, X_k; \theta)$ , dada una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . El valor estimado puede estar constituido por uno o varios valores, dependiendo del número de parámetros de la distribución. A partir de lo anterior surge la siguiente pregunta, ¿Cómo encontrar el valor que maximiza la función de verosimilitud?, una solución es derivar el logaritmo natural de  $L(X_1, \dots, X_k; \theta)$  e igualar a cero, pues la función  $\ln(\cdot)$  es monótona creciente, por lo que no altera las posiciones de los máximos de  $L(X_1, \dots, X_k; \theta)$ , esto es:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_k; \theta) = 0. \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) se conoce como *ecuación de verosimilitud* y el estimador ML de  $\theta$  se obtiene resolviendo esta ecuación. En caso de que haya varios parámetros desconocidos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , es necesario derivar parcialmente respecto a cada parámetro, con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_k; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_k; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_n} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_k; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

El sistema es válido si se cumple que:

- a)  $\theta$  es un número real.
- b)  $L(X_1, X_2, \dots, X_k; \theta)$  es una función diferenciable de  $\theta$ .

*Propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud:*

- Por lo general, el estimador ML es sesgado, dicho sesgo a menudo se puede eliminar multiplicando por una constante apropiada.
- Si el tamaño de la muestra,  $k$ , es grande, el estimador ML es convergente, es decir, el valor estimado estará próximo al valor verdadero del parámetro.
- Propiedad de la invarianza: supóngase que el estimador de  $\theta$  es  $\hat{\theta}$ , entonces el estimador de la función  $q(\theta)$  es  $q(\hat{\theta})$ .
- Propiedad asintótica de los estimadores ML: establece que si  $\hat{\theta}$  es un estimador ML para el parámetro  $\theta$ , definido sobre una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_k$ , entonces para  $k$  suficientemente grande, la variable aleatoria  $\hat{\theta}$  tiene aproximadamente distribución normal con media  $\theta$  y varianza  $1/B$ , esto es:

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{B}\right), \text{ donde } B = kE\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_X(x; \theta)\right)^2\right]. \quad (1.23)$$

Esta propiedad permite determinar el comportamiento probabilístico de  $\hat{\theta}$  para un  $k$  muy grande.

- **El método de los mínimos cuadrados LS:** A diferencia del método ML, en este no se tiene conocimiento del modelo probabilístico de la población sobre la cual se

quieren encontrar los parámetros desconocidos. El modelo que soporta este método de estimación es el siguiente:

$$X = \alpha H + \beta + \epsilon, \quad (1.24)$$

donde  $X$  es una v.a,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes desconocidas y  $H$  es una variable conocida (determinista).  $\epsilon$  es la variable aleatoria que le da el componente aleatorio a  $X$ . Su valor esperado se asume cero y su varianza  $\sigma^2$ , por tanto,  $X$  es una variable aleatoria que guarda una relación lineal con  $H$  y cuyos parámetros desconocidos son  $\alpha, \beta$  y  $\sigma$ .

De la variable aleatoria  $X$  se puede conocer su valor esperado  $E[X] = \alpha H + \beta$ , y su varianza  $Var[X] = \sigma^2$ . Para  $k$  valores  $h_1, h_2, \dots, h_k$  de  $H$  se tienen las parejas ordenadas  $(h_1, X_1), (h_2, X_2), \dots, (h_k, X_k)$ . Se define a  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  como los estimadores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que minimizan la función  $g(\alpha, \beta)$  dada por:

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k [X_i - (\alpha h_i + \beta)]^2. \quad (1.25)$$

La función  $g(\alpha, \beta)$  corresponde al total de diferencias respecto a la media. Dicho de otro modo, la estimación consiste en buscar la recta  $E[X] = \alpha H + \beta$  de tal forma que la anterior suma sea mínima. En la Figura 1.3 se observa que las parejas  $(h_i, X_i)$  son aquellas que están lo más cerca posible de la media de  $X$ .

Ahora que se conoce en qué consisten los estimadores de mínimos cuadrados, a continuación, se muestra cómo encontrar los estimadores para  $\alpha$  y  $\beta$  usando este método. Derivando  $g(\alpha, \beta)$  respecto a  $\alpha$  y  $\beta$  e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Lo que conduce a:

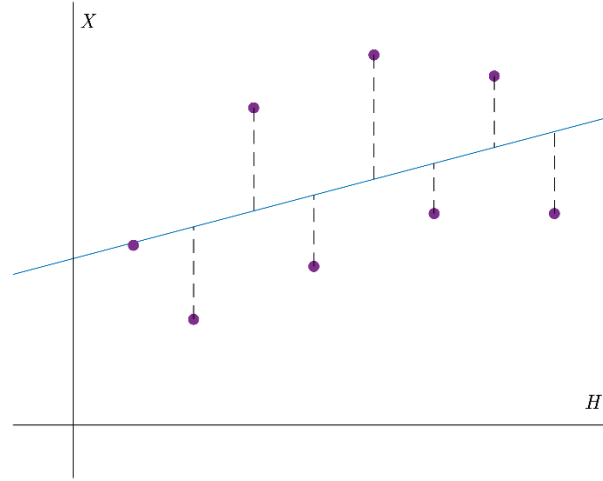


Figura 1.3. Gráfico de dispersión de las observaciones y la media.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^k [X_i - (\alpha h_i + \beta)](-h_i) = 2 \sum_{i=1}^k [-h_i X_i + \alpha h_i^2 + \beta h_i] \\ &= 2 \left( - \sum_{i=1}^k h_i X_i + \alpha \sum_{i=1}^k h_i^2 + \beta \sum_{i=1}^k h_i \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \beta} &= 2 \sum_{i=1}^k [X_i - (\alpha h_i + \beta)](-1) = 2 \sum_{i=1}^k [-X_i + \alpha h_i + \beta] \\ &= 2 \left( - \sum_{i=1}^k X_i + \alpha \sum_{i=1}^k h_i + k\beta \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Luego, igualando a cero se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\alpha \sum_{i=1}^k h_i^2 + \beta \sum_{i=1}^k h_i = \sum_{i=1}^k h_i X_i. \quad (1.29)$$

$$\alpha \sum_{i=1}^k h_i + k\beta = \sum_{i=1}^k X_i. \quad (1.30)$$

Para encontrar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  del sistema de ecuaciones anterior se puede usar sustitución o eliminación directa. La solución son los estimadores  $\alpha$  y  $\beta$  dados por:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i (h_i - \bar{h})}{\sum_{i=1}^k (h_i - \bar{h})^2}, \quad \bar{h} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k h_i. \quad (1.31)$$

$$\hat{\beta} = \bar{X} - \hat{\alpha}\bar{h}, \quad \bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i. \quad (1.32)$$

El estimador del parámetro  $\sigma^2$ , se puede encontrar de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = \frac{1}{k-2} \sum_{i=1}^k [X_i - (\hat{\alpha}h_i + \hat{\beta})]^2. \quad (1.33)$$

### 1.3. Técnicas de estimación de canal

La estimación de canal es un proceso que tiene como objetivo inferir los parámetros del canal a partir de la señal que llega al receptor, de forma que se adquiera un conocimiento a priori, de sus características [3], [7], [8]. Dicho conocimiento permite al receptor anticipar el comportamiento del canal y de esta forma compensar efectos no deseados, los cuales aumentan considerablemente la BER. Visto de otro modo, la estimación de canal es una técnica que permite evaluar el comportamiento del canal y el efecto de éste sobre la señal, de tal forma que se pueda mejorar el rendimiento del sistema [9, p. 2], al realizar una demodulación más precisa de la señal, así como la ecualización, decodificación y otros procesos en banda base [10, p. 286]. En la Figura 1.4, se observa el diagrama de bloques general del proceso de estimación.

Existen diferentes métodos y técnicas que permiten estimar el canal en un sistema de comunicaciones, los cuales se pueden clasificar de la siguiente forma:

- **Estimación del Canal Asistida por Símbolos Piloto (PSACE, *Pilot-Symbol Assisted Channel Estimation*):** esta técnica también se conoce como estimación de canal asistida por secuencias de entrenamiento. La estimación de canal por secuencias piloto consiste en transmitir una secuencia previamente conocida por el receptor, denominada secuencia piloto (o de entrenamiento), la cual permite obtener información del comportamiento del canal [3]. Cabe mencionar que dicha secuencia no hace parte del mensaje, por lo que la eficiencia espectral de la comunicación se reduce al enviar tal secuencia, y por ende, también su eficiencia en energía.

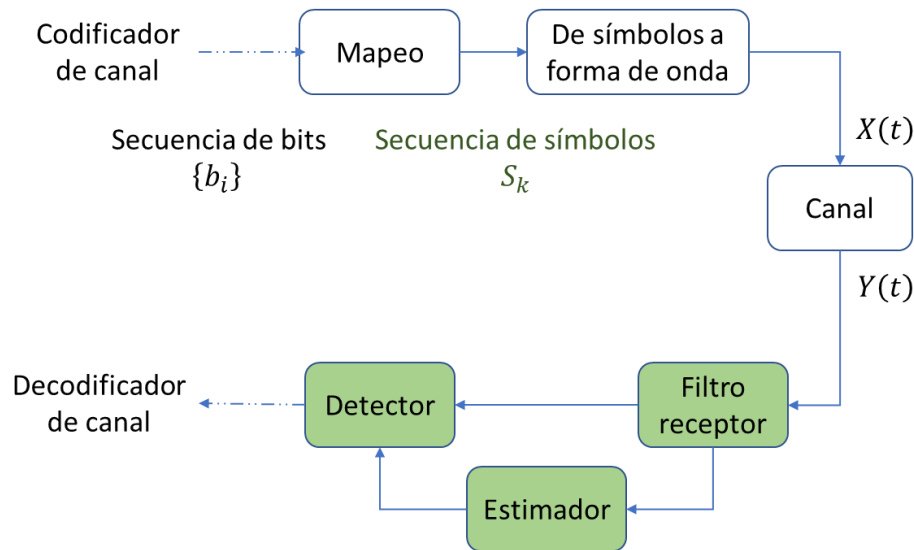


Figura 1.4. Proceso de estimación de canal.

El **estimador** de canal de la Figura 1.4 es un elemento adicional que permite, entre otras cosas, ecualizar errores causados por la distorsión de la señal debido a un canal dispersivo, los cuales generan ISI y aumentan considerablemente la BER, esto se logra mediante la estimación paramétrica del canal.

- **Técnica de Estimación del Canal Ciega (BCET, *Blind Channel Estimation Technique*):** la estimación ciega, por su parte, se basa en la estimación del canal a partir de la observación de la señal recibida sin hacer uso de secuencias piloto, es decir, el canal se estima usando información inherente de la señal recibida y las propiedades estructurales de la señal transmitida. Esta técnica se puede clasificar como estadística o determinística. Si bien, este tipo de estimación tiene mayor eficiencia espectral al evitar la sobrecarga que producen las secuencias piloto, requiere de largas ventanas de observación, lo que limita su capacidad de seguimiento y aumenta la complejidad computacional [9, p. 2], [10, p. 288], [11].
- **Técnica de Estimación del Canal Semi-Ciega (SBCET, *Semi-Blind Channel Estimation Technique*):** la estimación de canal semi-ciega requiere la transmisión de secuencias piloto muy cortas y ventanas de observación más reducidas que las utilizadas en estimación ciega, lo que proporciona un balance entre precisión y eficiencia espectral [9, p. 2], [11].
- **Estimación de Canal Dirigida por Decisión (DDCE, *Decision-Directed Channel Estimation*):** esta técnica trabaja con decisiones previas o tentativas y no requiere

de ningún tipo de información insertada en el flujo de datos. Tiene como mayor inconveniente la propagación de errores [11].

El tipo de estimación propuesto a implementar en el presente trabajo de grado es PSACE. A continuación, se desarrolla con más detalle este tipo de estimación, sus características y la forma en que se implementa.

### 1.3.1. Estimación de canal asistida por piloto en modulación multiportadora

Como se mencionó anteriormente, esta técnica consiste en hacer seguimiento a una secuencia de símbolos conocidos llamada *secuencia piloto o de entrenamiento* [9, p. 2], [10, p. 286], [12, p. 2], de tal forma que la información obtenida en el receptor se pueda usar para estimar el/los parámetros necesarios que determinan el comportamiento del canal, también denominada Información del Estado del Canal (CSI, *Channel State Information*) [10, p. 286]. La estimación basada en símbolos piloto se divide en dos partes: la primera es la disposición (según un patrón) de la secuencia de símbolos piloto, multiplexada con la secuencia de símbolos de información (en transmisión), para ser enviados en una posición predeterminada. La segunda es la forma en que se obtiene la información del canal usando una técnica basada en la estimación del/los parámetros necesarios.

PSACE se puede clasificar de acuerdo a la disposición de símbolos piloto [9, p. 2], de la siguiente manera:

- **Estimación de Canal por disposición de símbolos piloto en Bloque (BCE, *Block-type Channel Estimation*):** se caracteriza por transmitir simultáneamente símbolos piloto en todos los tonos, intercalando en el tiempo. En la Figura 1.5 se observa la disposición. Los círculos azules representan los símbolos piloto y los círculos blancos representan información del mensaje a transmitir.
- **Estimación de Canal por disposición de símbolos piloto tipo Peine (CCE, *Comb Channel Estimation*):** se caracteriza por transmitir símbolos piloto y símbolos de información intercaladamente sobre cada tono, es decir, en los tonos de índice impar se transmiten símbolos piloto (círculos azules), y en los de índice par, símbolos de información (círculos blancos). En la Figura 1.6 se ilustra lo anterior.
- **Estimación de Canal por disposición de símbolos piloto en inclinación:** también conocido como disposición dispersa de los símbolos piloto, el cual sigue un patrón diagonal. En la Figura 1.7 se evidencia lo anterior.

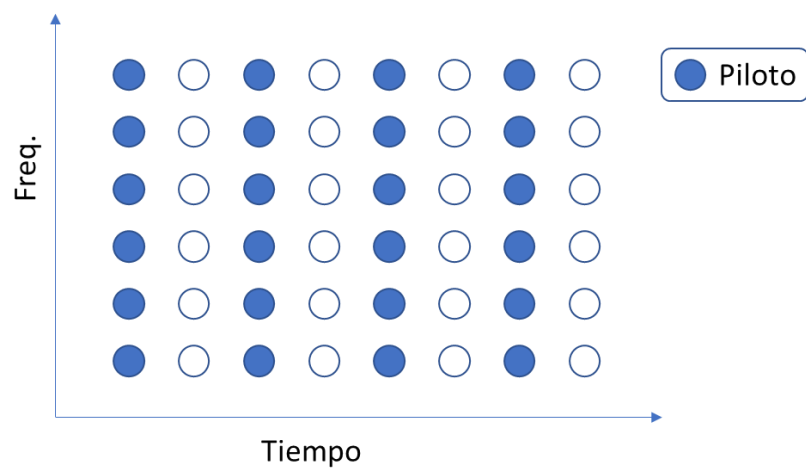


Figura 1.5. Disposición de símbolos piloto tipo BCE.

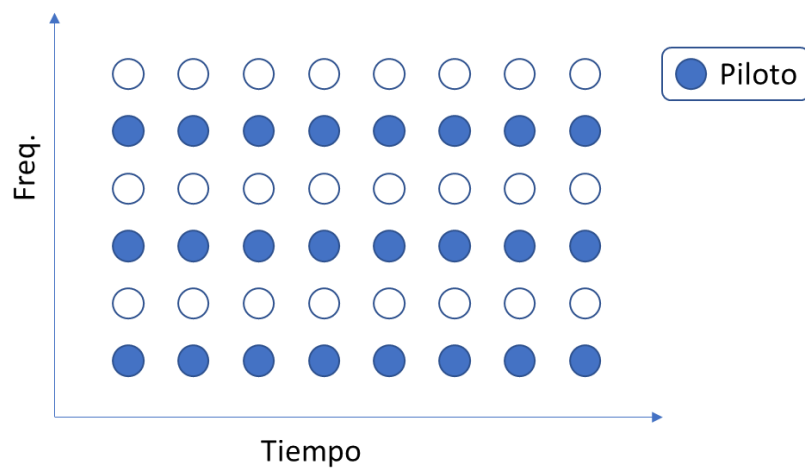


Figura 1.6. Disposición de símbolos piloto tipo CCE.

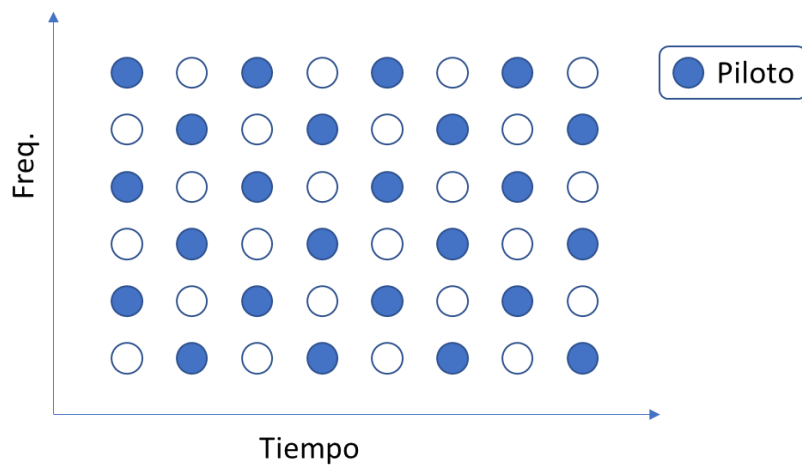


Figura 1.7. Disposición de símbolos piloto en inclinación.



La disposición de símbolos piloto en “peine” es ideal para canales variantes en el tiempo con desvanecimiento rápido, con el objetivo de hacer tareas de transmisión y estimación de forma simultánea, pues la respuesta al impulso del canal tiene variación constante y rápida [13, p. 1]. Además, se caracteriza por transmitir símbolos piloto y símbolos de información intercaladamente sobre cada tono (lo cual da la característica de “peine”), (ver Figura 1.6), y los coeficientes de los tonos carentes de piloto, se obtienen interpolando los coeficientes de los tonos vecinos, es por ello que requiere técnicas de interpolación [12, p. 2].

Por otro lado la disposición en bloque se usa en escenarios de poca movilidad (canales con desvanecimiento lento), donde todas las subportadoras están completamente ocupadas por símbolos pilotos (ver Figura 1.5), de forma que cada bloque, se transmite periódicamente con un periodo predefinido [12, p. 2].

Dado que el escenario considerado en el sistema es de tipo estacionario (es decir que todos los elementos del mismo, incluyendo el transmisor y el receptor, permanecen fijos), el tipo de canal a considerar es invariante en el tiempo. Lo anterior indica que no se consideran efectos de desvanecimiento lento ni rápido en el canal, los efectos de desvanecimiento que serán considerados son aquellos relacionados con la variabilidad en frecuencia, como los son: el desvanecimiento plano y el desvanecimiento selectivo. El tipo de estimación de canal asistido por símbolos piloto a considerar en presente trabajo de grado es el asistido por secuencias piloto en bloque, ya que solo basta con estimar el canal una sola vez. Además, la técnica de estimación usada es la de máxima verosimilitud, explicada con detalle en la sección 1.2.2.



## Capítulo 2

### 2. Esquema de modulación FMT sobre canales dispersivos Gaussianos

Este capítulo inicia con una descripción de las características y funcionamiento de la modulación multiportadora en un sistema de comunicación digital (sección 2.1), además, se indica el efecto que tiene el canal dispersivo Gaussiano sobre estas técnicas de modulación (sección 2.2). Posteriormente, se describe el proceso de transmisión y recepción para la modulación FMT en banda base y tiempo discreto (sección 2.3). Finalmente, se realiza el análisis matemático para la etapa de estimación de los coeficientes del canal, haciendo uso de la estimación por máxima verosimilitud y mediante secuencias piloto en bloque (sección 2.4).

---

#### 2.1. Modulación multiportadora

La Modulación Multiportadora (MCM, *MultiCarrier Modulation*) es una técnica que divide el espectro del canal en  $N$  subcanales que por lo general están uniformemente espaciados (también conocidos como sub-bandas). De esta manera, se tienen  $N$  subportadoras, las cuales, son generalmente ortogonales entre sí [14], [15, p. 455]. En consecuencia, el flujo de datos de entrada se divide en varios subflujos paralelos de menor velocidad (ver Figura 2.3). El objetivo de dividir el espectro es mitigar el efecto de canales altamente distorsivos sobre la señal, de tal forma que cada subportadora perciba un comportamiento aproximadamente plano del canal, lo cual permite un mejor

desempeño de la comunicación a pesar de la distorsión introducida por el canal [15, p. 457].

Como ya se mencionó, cada subcanal se corresponde con una subportadora  $f_i$ , donde  $i = 0, \dots, N - 1$ , y, tiene un ancho de banda  $B_N$  definido como:

$$B_N = \frac{B}{N}, \quad (2.1)$$

donde  $B$  es el ancho de banda total del canal. El número de subportadoras,  $N$ , debe ser tal que el ancho de banda de cada sub-canal,  $B_N$ , sea menor que el ancho de banda de coherencia del canal  $B_c$ , esto con el fin de garantizar que los subcanales perciban desvanecimiento plano (no selectivo en frecuencia). Numéricamente se considera que se percibe desvanecimiento plano cuando el ancho de banda de cada subcanal es mucho menor que el ancho de banda de coherencia [16, p. 193]. En términos prácticos, se debe cumplir que:

$$B_N \leq 0.1B_c, \quad (2.2)$$

de otra forma, la selectividad en frecuencia causaría la aparición de ISI en recepción. Por su parte, el ancho de banda de coherencia se define como el mínimo intervalo de frecuencia a través del cual la respuesta del canal cambia radicalmente. En canales afectados por multitrayecto, se tiene que:

$$B_c = \frac{1}{\tau_{rms}}, \quad (2.3)$$

donde  $\tau_{rms}$  es la dispersión de retardo rms del canal<sup>5</sup>, se mide en segundos y está definida por:

$$\tau_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^P \alpha_i (\tau_i - \bar{\tau}_i)^2}{\sum_{i=0}^P \alpha_i^2}}, \quad \bar{\tau}_i = \frac{\sum_{i=0}^P \alpha_i^2 \tau_i}{\sum_{i=0}^P \alpha_i^2}, \quad (2.4)$$

donde  $P$  es el número de rayos indirectos que llegan al receptor,  $\alpha_i$  y  $\tau_i$  son la ganancia y el retardo del  $i$ -ésimo rayo respectivamente. En la Figura 2.1, se puede apreciar la subdivisión de un canal dispersivo en múltiples canales no selectivos en frecuencia, donde cada subcanal es lo suficientemente estrecho, de tal forma que la ganancia percibida es aproximadamente una constante compleja  $a^{(i)}$  [15, p. 455].

En la Figura 2.2 se puede apreciar el diagrama de bloques de un sistema MCM convencional para transmisión. El flujo de datos de entrada corresponde a símbolos

<sup>5</sup> La dispersión de retardo es una medida numérica que permite clasificar un canal dispersivo multiproyecto como plano o selectivo.

denotados con  $S_k$ , los cuales pertenecen a un conjunto finito discreto de tamaño  $M$  conocido como alfabeto del modulador.

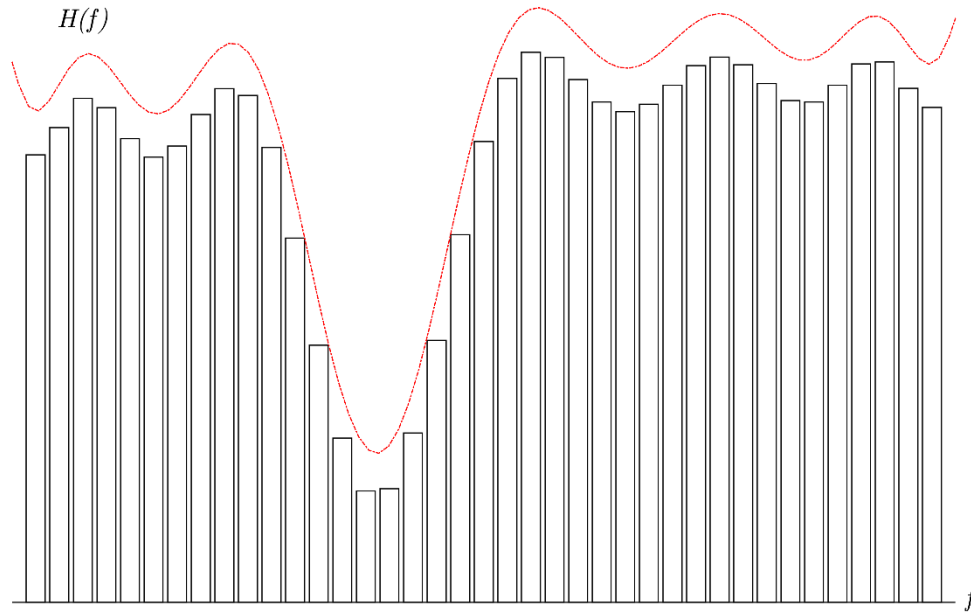


Figura 2.1. Canal con subdivisión del espectro en MCM.

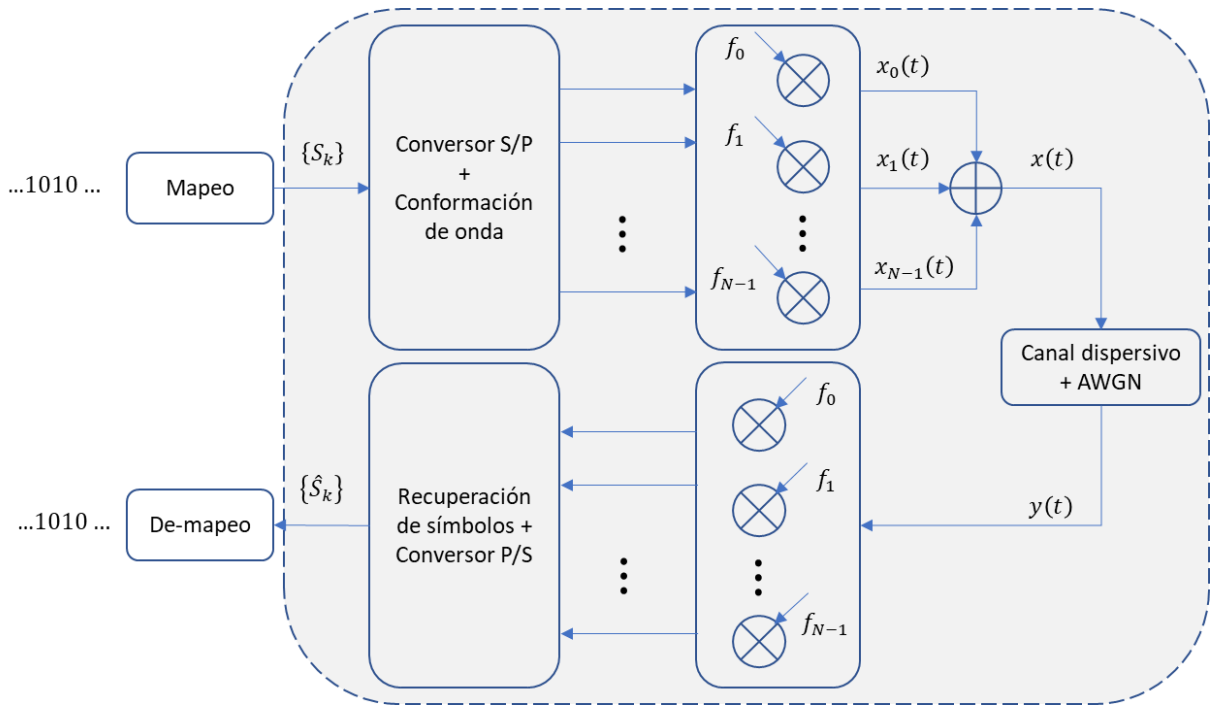


Figura 2.2. Diagrama de bloques general de un transmisor MCM.

La cantidad de bits que puede ser representada por cada símbolo está dada por  $\log_2 M$ , por tanto, el periodo transcurrido entre cada símbolo se define como  $T = T_b \log_2 M$ , donde,  $T_b$  corresponde al periodo de bit. La velocidad de símbolo corresponde al inverso del periodo de símbolo  $R = 1/T$ .

El símbolo de cada subflujo después del conversor S/P tiene un intervalo de duración igual a:

$$T_N = NT, \quad (2.5)$$

(ver Figura 2.3) y un ancho de banda por sub-banda  $B_N$  [16, p. 196]. Todos los símbolos son representados mediante una forma de onda llamada pulso conformador (pulso de modulación, filtro conformador o filtro transmisor) y se denota por  $p(t)$ .

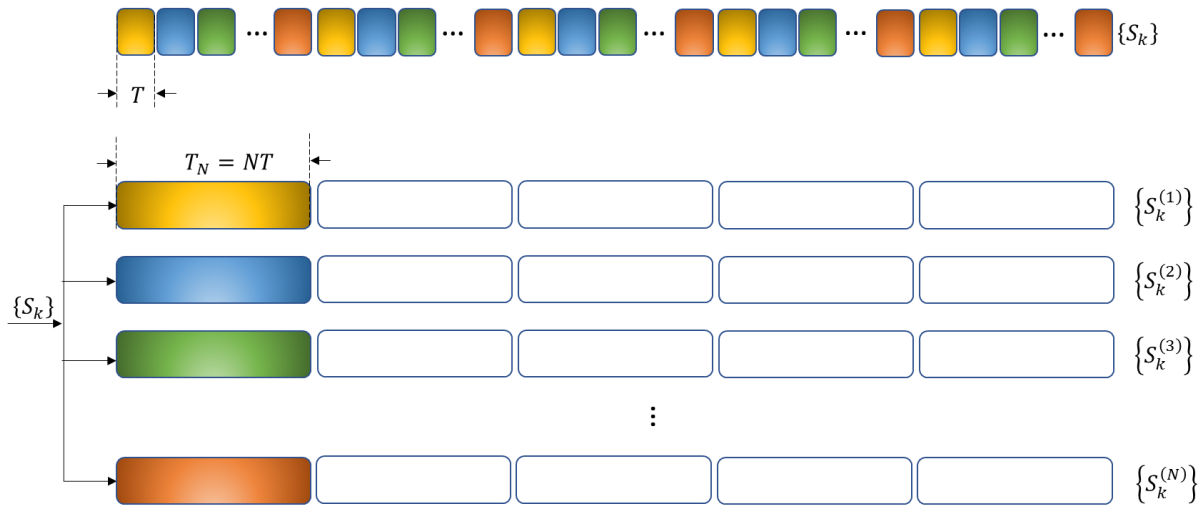


Figura 2.3. Flujo de símbolos de menor velocidad después del proceso de conversión S/P.

La salida del transmisor  $x(t)$  de un sistema MCM corresponde a la suma de todos los subflujos, esto es:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i(t), \quad (2.6)$$

donde,  $x_i(t)$  es la señal correspondiente al subflujo  $i$ -ésimo modulado por una frecuencia portadora  $f_i$ :

$$x_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k^{(i)} p(t - kT_N) e^{j2\pi f_i t}. \quad (2.7)$$

En FMT, dado que se transmite secuencias de símbolos en modulaciones con constelaciones bi-dimensiones, la señal es modulada mediante una exponencial compleja, tal como en la ecuación (2.7).

### 2.1.1. Clasificación de las MCM

Existen diferentes tipos de modulaciones multiportadora, de manera general, se tienen dos tipos de clasificaciones:

1) De acuerdo a si existe o no traslape entre sub-canales:

- *Modulación multiportadora sin superposición*, también llamada modulación multitono filtrada (FMT, *Filtered Multi-tone* o *Filtered bank Multi-tone*): permite transmitir varios símbolos en paralelo utilizando Modulación por Amplitud en Cuadratura (QAM, *Quadrature Amplitude Modulation*). Se caracteriza porque los espectros de las sub-portadoras no se superponen. Para que esto se cumpla, cada subportadora debe estar separada en al menos el ancho de ocupación espectral de la misma, esto es,  $B_i = B_N$ .
- *Modulaciones multiportadora con superposición*: en este tipo de modulación se permite una superposición parcial de las sub-portadoras. La función de transferencia del filtro conformador debe diseñarse de tal forma que gran parte de su energía se ubique en el lóbulo principal, cuyo ancho se define como  $B_i = 1/T_i$ . La condición de ortogonalidad es importante, ya que esto evita interferencia entre sub-portadoras debido a la superposición. Una de las técnicas más comunes es la Multiplexación por División de Frecuencias Ortogonales (OFDM, *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*). Otro tipo de modulaciones de este tipo son:
  - La modulación Multitono Discreta usando Wavelets (DWMT, *Discrete Wavelet MultiTone*).
  - La modulación Multitono Modulada en Coseno (CMT, *Cosine modulated MultiTone*).
  - Basadas en amplitud por cuadratura que a menudo son llamadas como OFDM/OQAM, FBMC/OQAM o Modulación Multitono Escalonadas (SMT, *Staggered Multitone*).

Dado que los canales dispersivos pueden afectar la señal transmitida generando ISI, a menudo se usa una extensión cíclica, conocida como Prefijo Cíclico (CP, *Circular Prefixes*) [17].

2) De acuerdo a la técnica de implementación:

- *Implementadas bajo operaciones basadas en la transformada Fourier y su inversa*; son OFDM y su equivalente para medios cableados es DMT.

- *Implementadas con bancos de filtros.* Emplean bancos de filtros de síntesis y de análisis, mediante versiones desplazadas en frecuencia, basados en un filtro prototipo paso bajo de tipo FIR. También se conocen como modulaciones Multitportadora por Banco de Filtros (FBMC: *Filter Bank-based MultiCarrier*), las cuales tienen diferentes posibilidades [18]:
  - i. Bancos de filtros modulados por una exponencial compleja (*Complex exponential-modulated filter banks*).
  - ii. Bancos de filtros modulados por coseno (*Cosine-modulated filter Banks*).
  - iii. Bancos de filtros usados en procesamiento de señales de múltiples velocidades (*Transmultiplexers*).
  - iv. Bancos de filtros de reconstrucción perfecta (*Perfect reconstruction filter Banks*), diseñados para eliminar el cross-talk.
  - v. Bancos de filtros sobremuestreados (*Oversampled filter banks*).
  - vi. Bancos de filtros de transformada de Fourier modificados (*Modified discrete Fourier transform filter banks*).

---

## 2.2. Canal dispersivo AWGN

El canal de comunicación comúnmente se modela mediante un sistema que introduce ruido, el cual perturba a la señal recibida de manera aditiva. Dicho ruido se describe como un proceso Gaussiano o una variante del mismo [19, p. 44]. En un entorno práctico, además del ruido, la señal de entrada se ve afectada por la respuesta del canal  $h(t)$ , la cual tiende a distorsionarla [20, pp. 203–204]. La Figura 2.4 ilustra el modelo esquemático del canal.

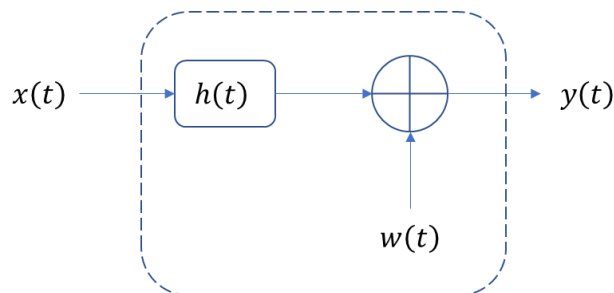


Figura 2.4. Canal lineal AWGN.



El canal de comunicación se conoce como dispersivo porque introduce variaciones en el espectro de la señal transmitida, causando fenómenos de desvanecimiento, ya sea de tipo plano o selectivo en frecuencia. Esto a su vez ocasiona la aparición de ISI, lo cual aumenta la probabilidad de error en recepción. El modelo matemático en el dominio del tiempo del canal dispersivo está dado por:

$$y(t) = x(t) * h(t) + w(t), \quad (2.8)$$

donde  $y(t)$  es la salida del canal (proceso aleatorio),  $x(t)$  es la entrada del canal (proceso aleatorio),  $h(t)$  es la respuesta al canal (función determinista)<sup>6</sup>,  $w(t)$  es el Ruido Blanco Aditivo Gaussiano (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*), el cual es no correlacionando con la entrada  $x(t)$ , y tiene las siguientes características [20, p. 204]:

- Distribución normal.
- Media cero.
- Varianza  $\sigma^2 = N_0/2$ , donde  $N_0$  es la densidad espectral unilateral de potencia, medida en *Watts/Hz*.
- Función de densidad de probabilidad como sigue:

$$f_w(z; t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{z^2}{N_0}}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

El modelo general del canal dispersivo en el dominio de frecuencia, está dado por:

$$Y(f) = X(f)H(f) + W(f), \quad (2.10)$$

por otro lado, la señal de salida corresponde a la suma de todas las señales de las múltiples subportadoras:

$$Y(f) = \sum_{i=0}^{N-1} Y_i(f), \quad (2.11)$$

pero, teniendo en cuenta que  $N$  es lo suficientemente grande ( $B_i \ll B_c$ ), tal que la magnitud de la respuesta al impulso del subcanal  $i$ -ésimo tiene un comportamiento aproximadamente constante, es decir,  $H(f_i) = a^{(i)}$ ,  $Y_i(f)$  se puede aproximar a:

$$Y_i(f) \cong X_i(f)a^{(i)} + W_i(f), \quad (2.12)$$

en el dominio temporal, es equivalente a:

$$y_i(t) \cong x_i(t)a^{(i)} + w_i(t) \quad (2.13)$$

---

<sup>6</sup> Para efectos del presente trabajo de grado, se parte del hecho de que no se tiene conocimiento del canal, es decir que  $h(t)$  es desconocido, ya que el propósito es estimar las constantes complejas  $c_i$  del subcanal  $i$ -ésimo que afecta a la señal.

La ecuación (2.13) indica que la secuencia de símbolos de cada subcanal se ve afectada por una constante compleja  $a^{(i)}$  y ruido de banda angosta.

---

### 2.3. Modulación multitono filtrada (FMT)

**FMT** es una técnica de modulación multiportadora propuesta y popularizada inicialmente en la tecnología de acceso de línea de abonado digital de muy alta tasa de transferencia [18], [21], [22]. Esta técnica hace parte de un conjunto de técnicas de MCM también conocidas como FBMC, entre las cuales se encuentran: la modulación FMT, SMT y CMT, esto se debe a que usan un conjunto de filtros para dividir el espectro de frecuencia en múltiples subcanales o subbandas [22], [23].

En particular FMT se diferencia de las demás ya que no admite superposición, esto ocasiona una disminución en su eficiencia espectral, pero a cambio tiene otras ventajas. La entrada de un sistema FMT corresponde a una secuencia de símbolos complejos que por lo general son de tipo M-QAM o QPSK, dichos símbolos pasan por un proceso de sobremuestreo (*upsample*), y en consecuencia el espectro de la señal de entrada se hace periódico. Posterior al muestreo, la señal es conformada mediante un pulso, denominado filtro prototipo<sup>7</sup>, modulado por una exponencial compleja, el cual se encarga de seleccionar la parte de la señal que se desea transmitir sobre la  $i$ -ésima subportadora.

FMT y en general FBMC tienen características particulares que las diferencian de las demás [17], [23], como son:

- I. No requiere de prefijo cíclico, CP.
- II. De acuerdo al tipo de filtro usado, los lóbulos laterales son bajos, esto implica una fuga espectral poco significativa, lo que quiere decir que no afecta la energía de las otras subportadoras en las demás subbandas, reduciendo la interferencia entre subcanales (ICI). Esta característica también implica una alta contención espectral, lo cual minimiza el traslape de subportadoras adyacentes o vecinas.

---

<sup>7</sup> Es llamado filtro prototipo, porque éste corresponde al filtro base de los demás filtros en el  $i$ -ésimo subcanal, siendo estos una versión desplazada en frecuencia del primer filtro.

- III. Menor sensibilidad al Desplazamiento en Frecuencia de las Portadoras (CFO, *Carrier Frequency Offset*)<sup>8</sup>, el cual es causado por el efecto Doppler en la movilidad del transmisor y/o receptor. El menor efecto del CFO se debe a que no hay superposición entre portadoras.
- IV. En comparación con OFDM, FMT requiere de menos subportadoras virtuales<sup>9</sup>. En la práctica OFDM, además de usar CP, deja algunas subportadoras en los extremos de la banda de transmisión sin usar, esto con el fin de evitar interferencia entre bandas de comunicación usadas para otros servicios.

Dichas características hacen de FMT una gran opción para las nuevas tecnologías inalámbricas como las comunicaciones 5G. El procedimiento para transmisión que lleva a cabo FMT es el mismo de una modulación multiportadora convencional, su diferencia radica en la implementación de los filtros y el tipo de función usada para modular las señales, que en este caso es una exponencial compleja.

### 2.3.1. Proceso de transmisión FMT

Como se mencionó en la sección 2.3, FMT hace parte de un conjunto de técnicas MCM denominado FBMC, y, se caracteriza por implementar un banco de filtros de síntesis y otro de análisis para dividir el espectro y mitigar el efecto dispersivo de los canales multitrayecto. Para la consecución de la presente etapa, se considera la señal transmitida en banda base  $x_{bb}(t)$ , por lo tanto, la señal resultante es una señal compleja, siendo necesario más adelante encontrar un equivalente en banda base para el canal. Como primera parte el análisis de la transmisión FMT se hace a partir de la señal de salida en el transmisor  $x(t)$  utilizando la ecuación general para modulaciones multiportadora (2.6):

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k^{(i)} p(t - kT_N) e^{j2\pi f_i t}, \quad (2.14)$$

donde, el pulso  $p(t)$  debe ser tal que satisfaga el criterio de Nyquist para evitar la ISI [16, p. 198], es decir, su autocorrelación  $g(t) = p(t) * p^*(-t)$  debe satisfacer:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = \pm T_N, \pm 2T_N, \dots \end{cases} \quad (2.15)$$

además, el espectro de  $p(t)$  debe ser limitado en banda para garantizar contención espectral en cada subcanal y evitar la ICI. La elección del filtro corresponde a un filtro

<sup>8</sup> Cabe destacar que este fenómeno, es particular en canales no estacionarios que por lo general son móviles, es decir que cambia conforme pasa el tiempo, y, en el presente trabajo de grado el tipo de canal es estacionario.

<sup>9</sup> Se parte del hecho de que la banda de frecuencia usada para transmitir está aislada de otros servicios.

en Raíz Cuadrada de Coseno Alzado (SRRC, *Square Root Raised Cosine*), por lo tanto:

$$p(t) = \text{srrc}\left(\frac{t}{T_N}\right), \quad (2.16)$$

cuyo ancho espectral del filtro,  $B_{\text{srrc}}$ , corresponde al ancho de banda de cada subcanal:

$$B_{\text{srrc}} = \frac{(1 + \rho)}{T_N} = B_N, \quad (2.17)$$

donde  $\rho$  es el factor de *roll-off* que indica el exceso de ancho de banda. Dado que, los símbolos transmitidos en FMT son símbolos M-QAM<sup>10</sup> y el tipo de filtro usado es SRRC, la señal resultante compleja  $x(t)$  ocupa un ancho espectral  $B$  igual a  $N$  veces el ancho de banda del filtro SRRC, tal como en la Figura 2.5, es decir:

$$B = NB_N = NB_{\text{srrc}} = \frac{N(1 + \rho)}{T_N}. \quad (2.18)$$

Numéricamente  $B$  es igual al ancho de banda en pasa banda,  $B_{pb}$ . Reemplazando  $T_N = NT$  en la ecuación (2.18),  $B$  queda como sigue:

$$B = \frac{(1 + \rho)}{T} = B_{pb}, \quad (2.19)$$

$B_{pb}$  corresponde al ancho de banda de una señal de portadora única con símbolos espaciados cada  $T$  segundos usando un único pulso SRRC. Lo anterior garantiza que FMT no altera el consumo de ancho de banda de la señal transmitida al subdividir el espectro.

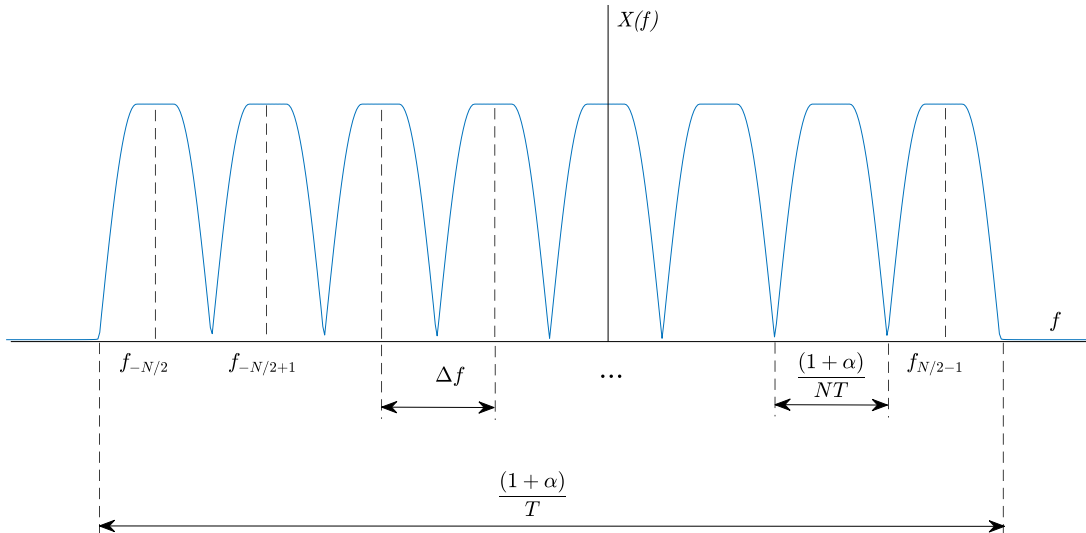


Figura 2.5. Distribución de subcanales en FMT.

<sup>10</sup> FMT al ser modulado mediante una exponencial compleja, permite símbolos de modulación bidimensional, es decir, M-PSK, M-QAM o híbrido.

**Asignación del espectro:** en FMT, el espaciamiento entre portadoras,  $\Delta f$ , debe ser mayor o igual<sup>11</sup> al ancho de banda de cada subportadora  $B_i$  con el fin de mitigar la ICI, por lo tanto, el espaciamiento cumple que:

$$\Delta f \geq \frac{1 + \rho}{T_N}. \quad (2.20)$$

La asignación de frecuencias se da en espaciamientos uniformes de  $\Delta f = B_i$ , esto implica:

$$f_i = (\Delta f)i = \frac{(1 + \rho)}{T_N} i, \quad \forall i = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1 \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (2.21)$$

donde  $i$  corresponde al índice de la portadora de cada subcanal. Teniendo en cuenta la asignación de frecuencias en el espectro de la ecuación (2.21) y el filtro de la ecuación (2.16), la señal de salida del transmisor,  $x(t)$ , en la ecuación (2.14), se convierte en un modelo en banda base,  $x_{bb}(t)$ , en tiempo continuo, como sigue:

$$x_{bb}(t) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k^{(i)} \text{srrc}\left(\frac{t - kT_N}{T_N}\right) e^{j2\pi f_i t}. \quad (2.22)$$

De la Figura 2.5, se puede observar que el ancho de banda de la señal en banda base  $x_{bb}(t)$  corresponde a la mitad del ancho de banda de la señal en pasa banda, es decir:

$$B_{bb} = \frac{B_{pb}}{2} = \frac{B}{2} = \frac{1}{2T} (1 + \rho), \quad (2.23)$$

por lo tanto,  $x_{bb}(t)$  es limitada en banda a:

$$\frac{1}{2T} (1 + \rho) \leq \frac{1}{T} \text{ Hz}. \quad (2.24)$$

Como  $x(t)$  es limitada en banda a  $1/T$  Hz, se puede representar a través de sus muestras tomadas cada  $T_s$  segundos, a una frecuencia  $f_s = 1/T_s$  mayor o igual a dos veces  $1/T$  Hz, es decir:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq \frac{2}{T}. \quad (2.25)$$

La condición anterior se puede reescribir como sigue:

$$f_s = \frac{L}{T}, \quad \forall L \in \{2,3,4, \dots\}, \quad (2.26)$$

<sup>11</sup> El espaciamiento se toma igual a  $\Delta f = B_i$  para tener un máximo aprovechamiento espectral. Matemáticamente es posible que  $\Delta f > B_i$ , pero en FMT no aplica, ya que, si bien no existe traslape espectral entre portadoras este alteraría el consumo de ancho de banda de la señal transmitida.

$$T_s = \frac{T}{L}, \quad (2.27)$$

a  $L$  se le denomina *factor de sobremuestreo*, e indica que se debe completar con  $L$  muestras cada periodo de símbolo  $T$  para poder transmitir la secuencia de símbolos sin perder información a partir de su versión muestreada (ver Figura 2.6), siempre que cumpla el criterio de muestreo anterior. Además, de la Figura 2.5, se debe aclarar que en la práctica el espectro de la subportadora posicionada en  $-N/2$  no corresponde a la imagen de la subportadora posicionada en  $N/2 - 1$ , ya que, la señal se trabaja en un modelo equivalente en banda base para tener mayor claridad al manejar las ecuaciones, pero los resultados son equivalentes al trabajar en pasa banda.

En la literatura, FMT es comúnmente desarrollada bajo su análisis en tiempo discreto. A continuación, se lleva a cabo el proceso que permite hallar el sistema equivalente de  $x_{bb}(t)$  en tiempo discreto, en adelante nombrado con el subíndice  $n$ ,  $x_n$ :

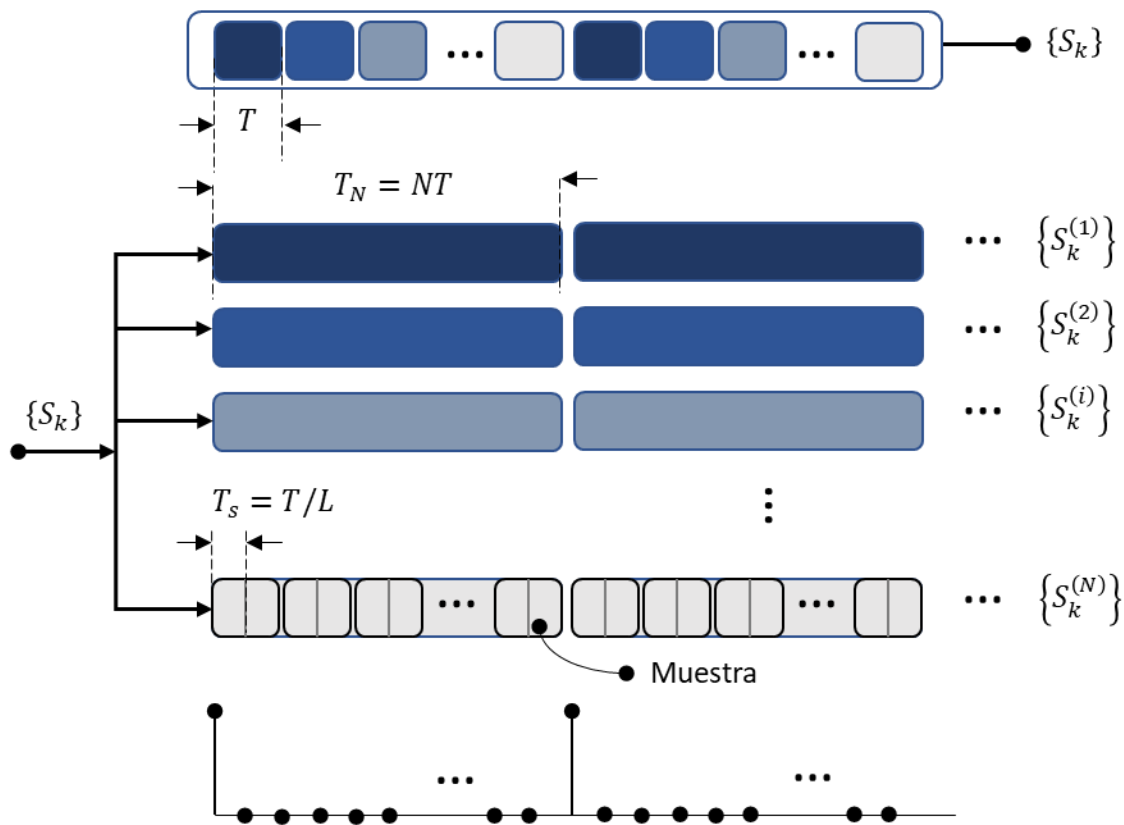


Figura 2.6. Representación gráfica del muestreo en FMT.

**Equivalente discreto:** permite representar la señal  $x_{bb}(t)$  en su versión discreta  $x_n$ , de tal forma que ésta cumpla el teorema de muestreo, para poder recuperar la señal

sin pérdida de información. La transformación de tiempo continuo a tiempo discreto se puede definir matemáticamente como:

$$x_{bb}(t) \rightarrow x_n = x(nl)$$

$$t \in \mathbb{R}: x_{bb}(t) \in \mathbb{C} \quad n \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{R}^+: x(n) \in \mathbb{C}.$$

El proceso de transformación se da mediante muestras tomadas cada  $T_s$  segundos, de la siguiente manera:

$$x_n = x(nT_s) = x\left(\frac{nT}{L}\right), \quad (2.28)$$

por lo tanto, la señal  $x_{bb}(t)$  de la ecuación (2.22) se puede representar en su versión discreta con  $t \equiv nT/L$ , como sigue:

$$x_n = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k^{(i)} \text{srrc}\left(\frac{\frac{nT}{L} - kT_N}{T_N}\right) e^{j2\pi f_i \frac{nT}{L}}, \quad (2.29)$$

reemplazando  $T_N$  y  $f_i$  de las ecuaciones (2.5) y (2.21) respectivamente, en la ecuación (2.29),  $x_n$  queda:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k^{(i)} \text{srrc}\left(\frac{\frac{nT}{L} - kNT}{NT}\right) e^{j2\pi\left(\frac{1+\rho}{NT}i\right)\frac{nT}{L}} \\ &= \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{j2\pi\left(\frac{1+\rho}{NL}\right)in} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k^{(i)} \text{srrc}\left(\frac{n}{NL} - k\right) \\ &= \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{j2\pi\left(\frac{1+\rho}{NL}\right)in} A, \end{aligned} \quad (2.30)$$

al hacer el cambio de variables  $k = m/NL$  en  $A$ , es decir  $m = kNL$ , la sumatoria correspondiente a  $A$ , queda:

$$A = \sum_{m/NL=-\infty}^{\infty} S_{\frac{m}{NL}}^{(i)} \text{srrc}\left(\frac{n}{NL} - \frac{m}{NL}\right). \quad (2.31)$$

Luego, al aplicar las propiedades de convolución en la ecuación (2.31), se tiene que:

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{m/NL=-\infty}^{\infty} \frac{S_m^{(i)}}{NL} \text{srrc}\left(\frac{n}{NL} - \frac{m}{NL}\right) = \frac{S_n^{(i)}}{NL} * \text{srrc}\left(\frac{n}{NL}\right) \\
&= \left(S_n^{(i)} \uparrow NL\right) * \text{srrc}\left(\frac{n}{NL}\right),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

donde el símbolo  $\uparrow NL$  corresponde al operador de sobremuestreo en un factor  $NL$ .

Por lo tanto, las muestras de la señal  $x_n$ , serán:

$$x_n = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left[ \left( S_n^{(i)} \uparrow NL \right) * \text{srrc}\left(\frac{n}{NL}\right) \right] e^{j2\pi\left(\frac{1+\rho}{NL}\right)in}. \tag{2.33}$$

Lo anterior indica que el símbolo  $n$ -ésimo de la subportadora  $i$ -ésima se sobremuestra en un factor de  $NL$  y luego se filtra con un filtro de raíz cuadrada de coseno alzado  $\text{srrc}\left(\frac{n}{NL}\right)$ . Este filtro corresponde al **filtro prototipo** del sistema en cuestión.

## 2.4. Estimación de canal en FMT

El análisis parte de su versión continua, pero se aplica de igual forma en su versión discreta. La información correspondiente a cada subportadora,  $x_i(t)$ , que atraviesa el canal dispersivo AWGN, se ve afectada por una constante compleja y ruido de banda angosta, tal como en la ecuación (2.13), por lo tanto, la salida del canal es la suma de todas las contribuciones:

$$y(t) \cong \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} y_i(t) \cong \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_i(t) a^{(i)} + w_i(t), \tag{2.34}$$

El receptor se encarga de separar cada subportadora de tal forma que trate cada subcanal de forma independiente. De manera recíproca a la transmisión, este proceso se lleva a cabo mediante la extracción en frecuencia de la  $i$ -ésima subportadora y la correlación con el filtro receptor  $\text{srrc}\left(\frac{t-kT_N}{T_N}\right)$  (equivalente al filtro  $\text{srrc}\left(\frac{n}{NL}\right)$  en tiempo discreto). En consecuencia, la observación  $u_k^{(i)}$  del símbolo transmitido  $S_k^{(i)}$  en el instante  $k$ -ésimo y el tono  $i$ -ésimo, está dada por [24]:



$$u_k^{(i)} = a^{(i)} S_k^{(i)} + w_k^{(i)}, \quad (2.35)$$

donde,  $w_k^{(i)}$  corresponde a una variable aleatoria compleja (ver Figura 2.7), con distribución normal compleja circularmente simétrica<sup>12</sup> de media cero y varianza  $\sigma^2$ , y,  $a^{(i)}$  es el parámetro complejo que se desea estimar y afecta a la  $i$ -ésima subportadora. Por tanto,  $u_k^{(i)}$  corresponde a otra variable aleatoria compleja con distribución:

$$u_k^{(i)} \sim \mathcal{CN}(a^{(i)} S_k^{(i)}, \sigma^2). \quad (2.36)$$

Dado que,  $u_k^{(i)}$  es una variable aleatoria compleja, esta se compone a su vez de dos variables aleatorias reales  $P, Q$  iid, como sigue:

$$u_k^{(i)} = \Re[u_k^{(i)}] + j \Im[u_k^{(i)}] = P + jQ, \quad (2.37)$$

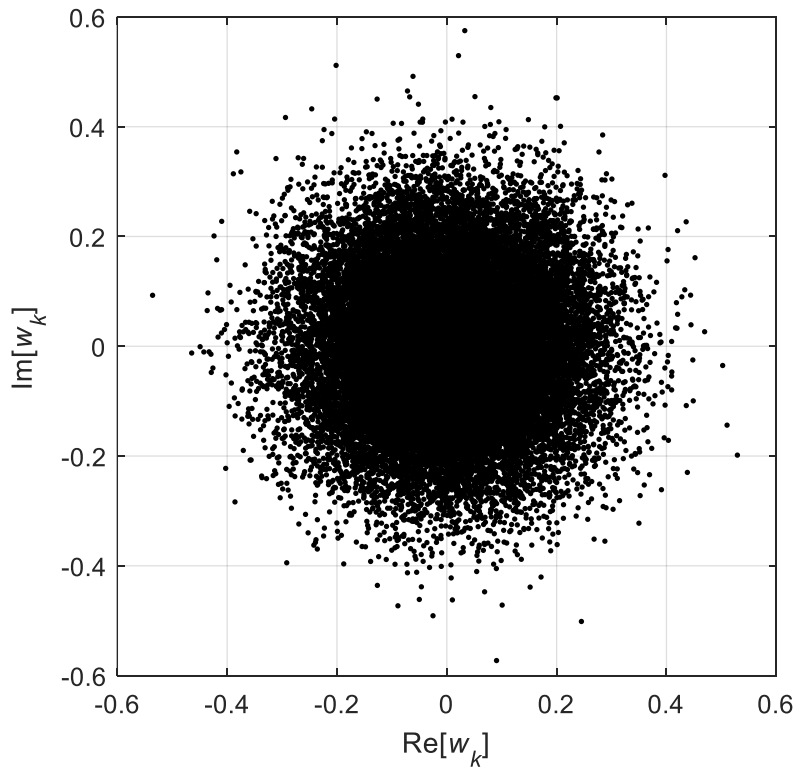


Figura 2.7. Dispersión del ruido complejo en el plano complejo.

cuyas pdf están definidas, de acuerdo a la ecuación (2.9), por:

$$f_P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z - \Re[a^{(i)} S_k^{(i)}])^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{R}; \quad (2.38)$$

<sup>12</sup> Variable aleatoria compleja cuyas partes real e imaginaria son independientes e idénticamente distribuidas, con distribución normal de media cero y varianza  $\sigma^2$ .

$$f_Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\omega - \text{Im}[a^{(i)}S_k^{(i)}])^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.39)$$

por lo tanto, la jpdf de  $u_k^{(i)}$  corresponde a la multiplicación de las pdf individuales, de la siguiente forma:

$$f_{u_k^{(i)}}(z, \omega) = f_P(z) f_Q(\omega)$$

$$f_{u_k^{(i)}}(z, \omega) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{[(z - \text{Re}[a^{(i)}S_k^{(i)}])^2 + (\omega - \text{Im}[a^{(i)}S_k^{(i)}])^2]}{2\sigma^2}}, \quad \forall z, \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.40)$$

donde  $a^{(i)}$  representa un parámetro complejo desconocido de la distribución de  $u_k^{(i)}$ , el cual es necesario estimar para ecualizar la señal recibida, y, está definido a su vez por dos parámetros reales  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$ , de la siguiente forma:

$$a^{(i)} = a_1^{(i)} + ja_2^{(i)}. \quad (2.41)$$

Luego, para estimar el parámetro complejo  $a^{(i)}$  es necesario estimar los parámetros reales  $a_1^{(i)}$  y  $a_2^{(i)}$ , los cuales rigen las distribuciones individuales de las partes real e imaginaria de  $u_k^{(i)}$ .

#### 2.4.1. Técnica de estimación por secuencias de entrenamiento o asistidas por pilotos en bloque FMT.

Esta técnica consiste en enviar una secuencia de símbolos piloto  $\vec{S}$ , conocida en recepción, de longitud  $L_p$ , sobre cada subportadora:

$$\vec{S} = [S_0^{(i)}, S_1^{(i)}, \dots, S_{L_p-1}^{(i)}], \quad (2.42)$$

en consecuencia, todas las observaciones de los  $L_p$  símbolos transmitidos constituyen un vector aleatorio de  $L_p$  variables aleatorias independientes, como sigue:

$$\vec{u} = [u_0^{(i)}, u_1^{(i)}, \dots, u_{L_p-1}^{(i)}]. \quad (2.43)$$

La pdf conjunta de  $\vec{u}$  es igual a:

$$f_{\vec{u}}(\mathbf{v}; a^{(i)}) = f_{\vec{u}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\omega}; a^{(i)}) \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
&= f_{\vec{u}}\left(\mathcal{z}_0^{(i)}, \mathbf{w}_0^{(i)}, \mathcal{z}_1^{(i)}, \mathbf{w}_1^{(i)}, \dots, \mathcal{z}_{L_p-1}^{(i)}, \mathbf{w}_{L_p-1}^{(i)}; \mathbf{a}^{(i)}\right) \\
&= f_{u_0^{(i)}}\left(\mathcal{z}_0^{(i)}, \mathbf{w}_0^{(i)}; \mathbf{a}^{(i)}\right) f_{u_1^{(i)}}\left(\mathcal{z}_1^{(i)}, \mathbf{w}_1^{(i)}; \mathbf{a}^{(i)}\right) \dots f_{u_{L_p-1}^{(i)}}\left(\mathcal{z}_{L_p-1}^{(i)}, \mathbf{w}_{L_p-1}^{(i)}; \mathbf{a}^{(i)}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{L_p-1} f_{u_k^{(i)}}\left(\mathcal{z}_k^{(i)}, \mathbf{w}_k^{(i)}; \mathbf{a}^{(i)}\right) = \prod_{k=0}^{L_p-1} f_{u_k^{(i)}}\left(\mathcal{z}_k^{(i)}, \mathbf{w}_k^{(i)}; a_1^{(i)}, a_2^{(i)}\right),
\end{aligned}$$

donde,  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$  son los parámetros que rigen la distribución y  $\mathbf{v} = v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_{L_p-1}^{(i)}$  se define como una realización del vector  $\vec{u}$  dada por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{z} + j\mathbf{w}, \quad (2.45)$$

donde,  $\mathbf{z}, \mathbf{w}$  se corresponden con sus respectivos valores:

$$\mathbf{z} = \mathcal{z}_0^{(i)}, \mathcal{z}_1^{(i)}, \dots, \mathcal{z}_{L_p-1}^{(i)}, \quad \forall \mathcal{z}_k^{(i)} \in \mathbb{R} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0^{(i)}, \mathbf{w}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{w}_{L_p-1}^{(i)}, \quad \forall \mathcal{z}_k^{(i)} \in \mathbb{R}. \quad (2.47)$$

A  $f_{\vec{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; \mathbf{a}^{(i)})$  se le conoce como función de verosimilitud del vector de observaciones  $\vec{u}$ . Reemplazando la ecuación (2.40) en (2.44), la función de verosimilitud se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
f_{\vec{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; \mathbf{a}^{(i)}) &= \prod_{k=0}^{L_p-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\left\{ \left( \mathcal{z}_k^{(i)} - \operatorname{Re}[a^{(i)} S_k^{(i)}] \right)^2 + \left( \mathbf{w}_k^{(i)} - \operatorname{Im}[a^{(i)} S_k^{(i)}] \right)^2 \right\}}{2\sigma^2}} \\
&= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{L_p} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{L_p-1} \left\{ \left( \mathcal{z}_k^{(i)} - \operatorname{Re}[a^{(i)} S_k^{(i)}] \right)^2 + \left( \mathbf{w}_k^{(i)} - \operatorname{Im}[a^{(i)} S_k^{(i)}] \right)^2 \right\}}.
\end{aligned} \quad (2.48)$$

**Estimación por el método de máxima verosimilitud ML:** para el vector de observaciones  $\vec{u}$  de la ecuación (2.43), se define la estimación  $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ :

$$\hat{\mathbf{a}}^{(i)} = \hat{a}_1^{(i)} + j\hat{a}_2^{(i)}, \quad (2.49)$$

como aquellos valores  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$  que maximizan la probabilidad de obtener una realización  $\mathbf{v}$  de  $\vec{u}$ , esto es:

$$\hat{\mathbf{a}}^{(i)} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{a}^{(i)} \in \mathbb{C}} \{f_{\vec{u}}(\mathbf{v}; \mathbf{a}^{(i)})\} = \operatorname{argmax}_{a_1^{(i)}, a_2^{(i)} \in \mathbb{R}} \left\{ f_{\vec{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; a_1^{(i)}, a_2^{(i)}) \right\}. \quad (2.50)$$

Una solución para encontrar las estimaciones  $\hat{a}_1^{(i)}, \hat{a}_2^{(i)}$  es derivar parcialmente el logaritmo de la función de verosimilitud, ya que esta es una función monótona creciente. El logaritmo de la función de verosimilitud es:

$$\ln f_{\vec{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; a_1^{(i)}, a_2^{(i)}) = L_p \ln \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \quad (2.51)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{L_p-1} \left\{ \left( z_k^{(i)} - \Re[a^{(i)} S_k^{(i)}] \right)^2 + \left( w_k^{(i)} - \Im[a^{(i)} S_k^{(i)}] \right)^2 \right\},$$

teniendo en cuenta que:

$$\Re[a^{(i)} S_k^{(i)}] = a_1^{(i)} \Re[S_k^{(i)}] - a_2^{(i)} \Im[S_k^{(i)}]; \quad (2.52)$$

$$\Im[a^{(i)} S_k^{(i)}] = a_2^{(i)} \Re[S_k^{(i)}] + a_1^{(i)} \Im[S_k^{(i)}], \quad (2.53)$$

La ecuación (2.51) queda como:

$$\begin{aligned} \ln f_{\bar{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; a_1^{(i)}, a_2^{(i)}) &= L_p \ln \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{L_p-1} \left\{ \left( z_k^{(i)} - a_1^{(i)} \Re[S_k^{(i)}] + a_2^{(i)} \Im[S_k^{(i)}] \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( w_k^{(i)} - a_2^{(i)} \Re[S_k^{(i)}] - a_1^{(i)} \Im[S_k^{(i)}] \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

La ecuación (2.54) se conoce como ecuación de log-verosimilitud. Al derivar la ecuación de log-verosimilitud de manera parcial respecto a  $a_1^{(i)}$  e igualar cero, se puede despejar el valor  $a_1^{(i)}$  que maximiza la función (es decir la estimación  $\hat{a}_1^{(i)}$ ). Primero se deriva la ecuación (2.54), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1^{(i)}} \ln f_{\bar{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; a_1^{(i)}, a_2^{(i)}) &= -\frac{2}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{k=0}^{L_p-1} \left( z_k^{(i)} - a_1^{(i)} \Re[S_k^{(i)}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_2^{(i)} \Im[S_k^{(i)}] \right) \left( -\Re[S_k^{(i)}] \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{L_p-1} \left( w_k^{(i)} - a_2^{(i)} \Re[S_k^{(i)}] - a_1^{(i)} \Im[S_k^{(i)}] \right) \left( -\Im[S_k^{(i)}] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

Luego, se iguala a cero la anterior ecuación, y se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{L_p-1} \left( z_k^{(i)} - a_1^{(i)} \Re [S_k^{(i)}] + a_2^{(i)} \Im [S_k^{(i)}] \right) \left( -\Re [S_k^{(i)}] \right) \\
&= \sum_{k=0}^{L_p-1} \left( w_k^{(i)} - a_2^{(i)} \Re [S_k^{(i)}] \right. \\
&\quad \left. - a_1^{(i)} \Im [S_k^{(i)}] \right) \left( \Im [S_k^{(i)}] \right).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Resolviendo (2.56) para despejar  $a_1^{(i)}$  se puede encontrar su estimación ML:

$$\hat{a}_1^{(i)} = \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} w_k^{(i)} \Im [S_k^{(i)}] + z_k^{(i)} \Re [S_k^{(i)}]}{\sum_{k=0}^{L_p-1} \Re^2 [S_k^{(i)}] + \Im^2 [S_k^{(i)}]}. \tag{2.57}$$

De igual modo al derivar parcialmente la función de log-verosimilitud e igualar a cero se puede despejar la estimación de  $a_2^{(i)}$ :

$$\hat{a}_2^{(i)} = \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} w_k^{(i)} \Re [S_k^{(i)}] - z_k^{(i)} \Im [S_k^{(i)}]}{\sum_{k=0}^{L_p-1} \Re^2 [S_k^{(i)}] + \Im^2 [S_k^{(i)}]}, \tag{2.58}$$

Reemplazando  $\hat{a}_1^{(i)}$  y  $\hat{a}_2^{(i)}$  en la ecuación (2.49), se obtiene la estimación de  $a^{(i)}$ , quedando como sigue:

$$\begin{aligned}
\hat{a}^{(i)} &= \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} w_k^{(i)} \Im [S_k^{(i)}] + z_k^{(i)} \Re [S_k^{(i)}] + j \left( w_k^{(i)} \Re [S_k^{(i)}] - z_k^{(i)} \Im [S_k^{(i)}] \right)}{\sum_{k=0}^{L_p-1} \Re^2 [S_k^{(i)}] + \Im^2 [S_k^{(i)}]} \\
\hat{a}^{(i)} &= \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} \left( z_k^{(i)} + j w_k^{(i)} \right) \left( \Re [S_k^{(i)}] \right) + \left( w_k^{(i)} - j z_k^{(i)} \right) \left( \Im [S_k^{(i)}] \right)}{\sum_{k=0}^{L_p-1} \Re^2 [S_k^{(i)}] + \Im^2 [S_k^{(i)}]} \\
\hat{a}^{(i)} &= \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} \left( z_k^{(i)} + j w_k^{(i)} \right) \left( \Re [S_k^{(i)}] - j \Im [S_k^{(i)}] \right)}{\sum_{k=0}^{L_p-1} \Re^2 [S_k^{(i)}] + \Im^2 [S_k^{(i)}]} \\
&\boxed{\hat{a}^{(i)} = \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} v_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2}}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

El valor  $\hat{a}^{(i)}$  de la ecuación (2.59) es un número complejo que corresponde a la estimación del parámetro  $a^{(i)}$ , el cual maximiza la probabilidad de obtener los valores observados  $v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_{L_p-1}^{(i)}$  del vector de observaciones  $\vec{u}$ , dado un conjunto de símbolos transmitidos  $\vec{S}$ . Extrapolando la ecuación (2.59) se puede encontrar el estimador  $\hat{A}^{(i)}$  del parámetro  $a^{(i)}$ , el cual constituye una variable aleatoria, es decir:

$$\hat{A}^{(i)} = \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} u_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2}. \quad (2.60)$$

De este modo, la estimación  $\hat{a}^{(i)}$  es una realización de la variable aleatoria  $\hat{A}^{(i)}$ .

**Sesgo del estimador:**  $\hat{A}^{(i)}$  es un estimador insesgado del parámetro  $a^{(i)}$ , cuyo valor esperado es el mismo parámetro  $a^{(i)}$ .

*Demostración:* Si se considera la variable de observación  $u_k^{(i)} = a^{(i)} S_k^{(i)} + w_k^{(i)}$ , cuyo estimador del parámetro complejo  $a^{(i)}$  es  $\hat{A}^{(i)}$ , y está dado por la ecuación (2.60), entonces se puede decir que:

$$\begin{aligned} \hat{A}^{(i)} &= \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} (a^{(i)} S_k^{(i)} + w_k^{(i)}) S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} = \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} a^{(i)} S_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} + \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} w_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} \\ &= a^{(i)} \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} + \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} w_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} = a^{(i)} + \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} w_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2}, \\ \hat{A}^{(i)} &= a^{(i)} + C, \quad C = \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} w_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

teniendo en cuenta que  $w_k^{(i)}$  tiene distribución normal compleja circularmente simétrica de media cero y varianza  $\sigma^2$ , la media de  $C$  es:

$$E[C] = 0, \quad (2.62)$$

por lo tanto:

$$E[\hat{A}^{(i)}] = E[a^{(i)} + C] = a^{(i)} + E[C] = a^{(i)}, \quad (2.63)$$

de acuerdo al criterio de insesgabilidad para un estimador, dado en la sección 1.1, la ecuación (2.63) indica que el estimador  $\hat{A}^{(i)}$  es **insesgado**, pues su media es igual al parámetro complejo desconocido  $a^{(i)}$ .

**Varianza del estimador:** de acuerdo a la ecuación (2.61), la varianza de  $\hat{A}^{(i)}$  es igual a la varianza de  $C$ , ya que,  $a^{(i)}$  es una constante compleja. Entonces, para encontrar la varianza de  $C$ , se expande de la siguiente manera:

$$C = \frac{w_0^{(i)} S_0^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} + \frac{w_1^{(i)} S_1^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} + \dots + \frac{w_{L_p-1}^{(i)} S_{L_p-1}^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2}, \quad (2.64)$$

lo anterior, indica que  $C$  es la suma de  $L_p$  variables aleatorias complejas independientes, y teniendo en cuenta que  $S_k^{(i)}$  es un valor no aleatorio, por propiedades de la varianza se tiene que la varianza de cada término de  $C$  es igual a:

$$\left( \frac{S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} \right)^2 \text{Var}[w_k^{(i)}] = \left( \frac{S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2} \right)^2 \sigma^2, \quad (2.65)$$

por lo tanto, al ser  $C$  la suma de  $L_p$  variables aleatorias independientes, la varianza de  $\hat{A}^{(i)}$  es:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{A}^{(i)}] &= \text{Var}[C] = \sum_{k=0}^{L_p-1} \left( \frac{S_k^{(i)*}}{\sum_{j=0}^{L_p-1} |S_j^{(i)}|^2} \right)^2 \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\left( \sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2 \right)^2} \sum_{k=0}^{L_p-1} (S_k^{(i)*})^2. \end{aligned} \quad (2.66)$$

La anterior ecuación indica que: conforme aumenta el número de símbolos piloto  $L_p$ , la varianza del estimador  $\hat{A}^{(i)}$  disminuye. A tal punto que si  $L_p$  tiende a infinito,  $\hat{A}^{(i)}$  converge a  $a^{(i)}$ , ya que su varianza tiende a cero.





## Capítulo 3

### 3. Diseño e implementación

El presente capítulo tiene como objetivo diseñar e implementar el esquema de transmisión FMT indicado en la sección 2.3.1, haciendo uso de secuencias piloto para estimar el canal de comunicaciones. El sistema será implementado en MATLAB, el cual maneja un lenguaje de alto nivel, y permite simular el sistema de comunicación planteado.

El modelo de desarrollo que se tomará como referencia en el transcurso de la fase de diseño e implementación es el *modelo de desarrollo concurrente* [25, pp. 40–42]. Este modelo permite trabajar de manera iterativa y evolutiva las actividades, acciones o tareas de cada fase, y se caracteriza porque dos o más actividades se pueden estar desarrollando simultáneamente, pero en diferente estado, sin estar ligados a otra actividad en específico. Además, puede ser implementado en cualquier modelo evolutivo. La fase de diseño e implementación equivale a las fases de modelado y construcción del modelo en cuestión, cuyas actividades o tareas siguen el modelo concurrente. En la Figura 3.1 se observa el diagrama de estados que representa el enfoque de modelado concurrente, el cual tiene la característica de poder realizar cambios o correcciones una vez finalice una actividad, acción o tarea con base en los requerimientos.

En la sección 3.1 se desarrollará la fase de diseño e implementación de un sistema FMT sobre un canal dispersivo Gaussiano. En la sección 3.2 se desarrollará la fase de diseño e implementación de la estimación del canal.

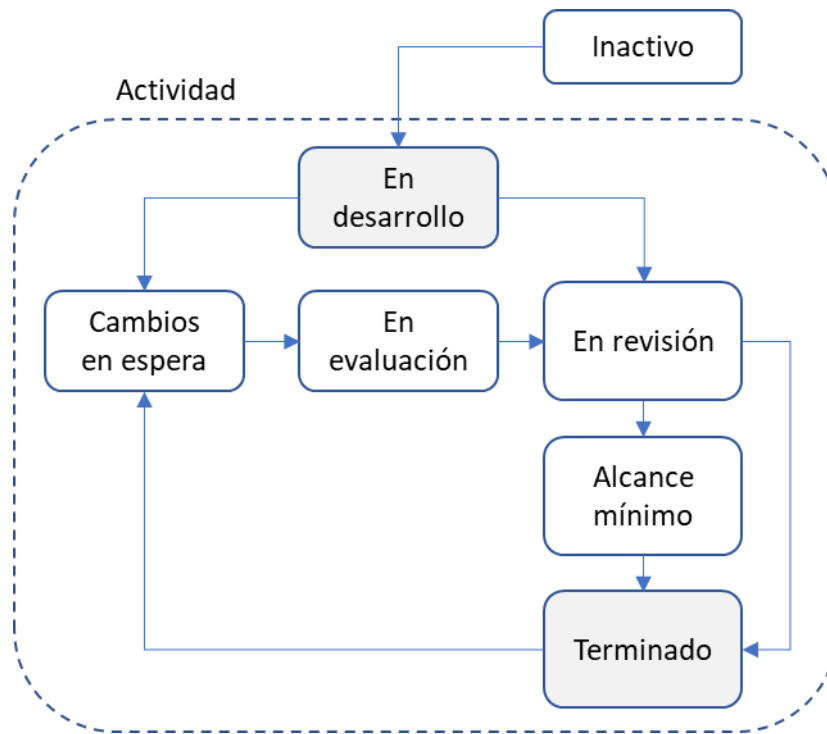


Figura 3.1. Diagrama de estados de las actividades en el modelado concurrente.

### 3.1. Sistema FMT sobre un canal dispersivo Gaussiano

A continuación, se describen los requerimientos funcionales del sistema:

- El sistema debe contar con todas las etapas necesarias para transmitir símbolos, tales como: fuente generadora de símbolos, transmisor FMT y cada uno de los elementos que lo componen.
- El sistema debe contar con un canal capaz de simular el carácter dispersivo y el ruido AWGN.
- El sistema debe contar con todas las etapas necesarias para recuperar los símbolos transmitidos a través de un canal dispersivo Gaussiano, tales como: receptor FMT y cada uno de los elementos que lo componen.
- Todos los elementos del sistema deben ser desarrollados para las modulaciones 4-QAM y 16-QAM.
- El sistema debe contar con herramientas de visualización que permitan evaluar el desempeño del sistema, tales como:
  - Gráfica de espectro de la señal.
  - Diagrama de constelación.
  - Gráfico de la  $BER$  vs  $E_b/N_0$ .

Variables de entrada del sistema:

- *Alfabeto*: corresponde al conjunto de todos los posibles valores de los símbolos M-QAM.
- *Relación de energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido*,  $E_b/N_0$ .

Variables de salida:

- *Vector de símbolos complejos* que representa la secuencia de símbolos recuperados en recepción.
- *Tasa de error de bit*, BER.

En la Figura 3.2 se observa el diagrama general por bloques del sistema FMT, el cual considera un canal dispersivo Gaussiano y no realiza estimación de canal.

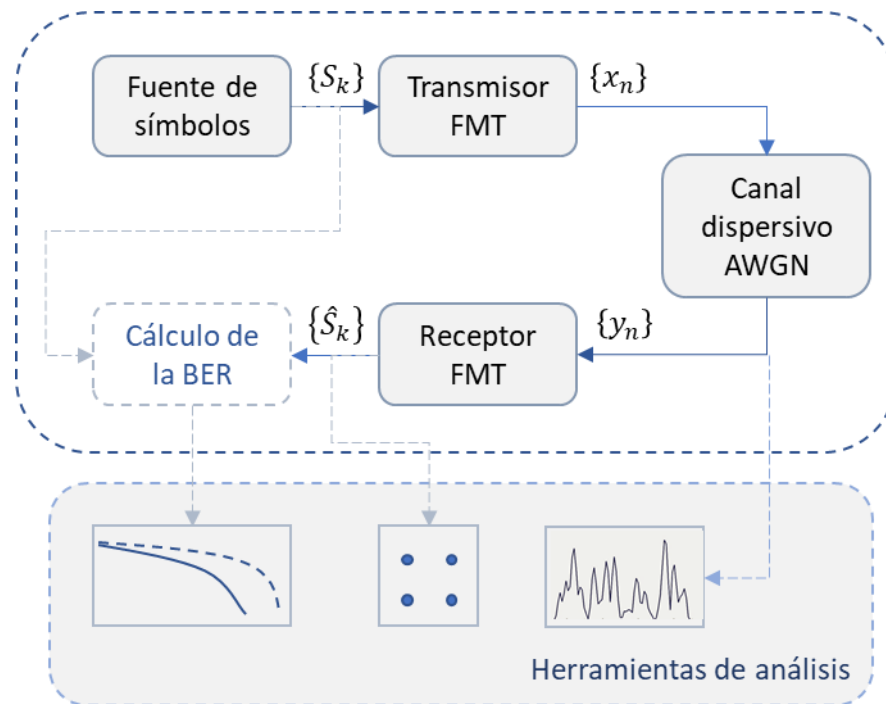


Figura 3.2. Diagrama general en bloques del Sistema FMT.

### 3.1.1. Bloque generador de símbolos M-QAM

Corresponde a una fuente generadora de símbolos pertenecientes a un alfabeto discreto  $\Omega_{M-QAM}$ , donde  $M$  es el orden de la modulación que se desea implementar.

**Variables de entrada:**

- Alfabeto  $\Omega_{M-QAM}$ . Son todos los posibles valores complejos que pueden tomar los símbolos M-QAM con orden de modulación 4 o 16, de la siguiente forma:

$$\Omega_{4-QAM} = \{a\lambda + jb\lambda \mid a, b \in \{-1, 1\}\}, \quad (3.1)$$

$$\Omega_{16-QAM} = \{a\lambda + jb\lambda \mid a \text{ y } b \in (-3, -1, 1, 3)\}, \quad (3.2)$$

donde,  $\lambda$  determina la distancia mínima entre símbolos y por ende el factor de escala de la constelación. Para la simulación del sistema se asume  $\lambda = 1$ .

**Variable de salida:**

- Secuencia de símbolos  $\vec{S} = \{S_k \in \Omega_{4-QAM} \text{ ó } \Omega_{16-QAM} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Son los símbolos generados por la fuente aleatoria en un instante  $k$ -ésimo.

El periodo de símbolo en el sistema se asume como  $T = 1$ . La Figura 3.3, muestra los diagramas de constelación para 4-QAM y 16-QAM respectivamente.

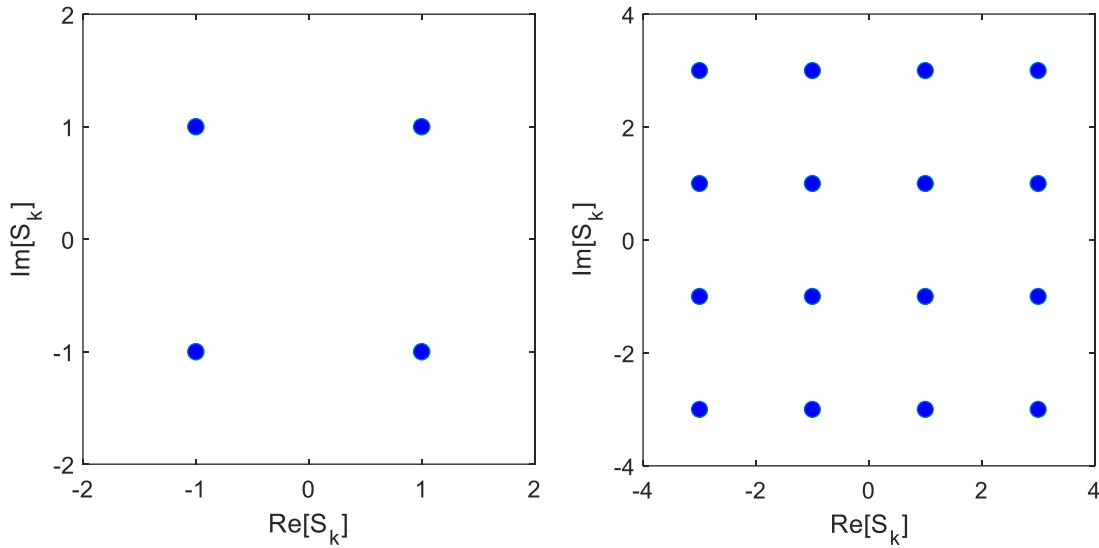


Figura 3.3. Diagramas de constelación para 4-QAM y 16-QAM.

**Energía promedio del alfabeto:** corresponde a la energía promedio de la constelación, está dada por:

$$E_s = \sum_{m=1}^M \Pr\{\hat{S}_m = S_m\} |S_m|^2, \text{ donde } S_m \in \Omega_{M-QAM}, \quad (3.3)$$

de este modo, la energía promedio de símbolo para una constelación 4-QAM está dada por:

$$E_{S_{4-QAM}} = 4 \times \frac{1}{4} |\lambda + j\lambda|^2 = 2\lambda^2 = 2(1)^2 = 2, \quad (3.4)$$

y, para una constelación 16-QAM:

$$\begin{aligned} E_{S_{16-QAM}} &= 4 \times \frac{1}{16} |\lambda + j\lambda|^2 + 8 \times \frac{1}{16} |\lambda + j3\lambda|^2 \\ &\quad + 4 \times \frac{1}{16} |3\lambda + j3\lambda|^2 = 10\lambda^2 = 10. \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.1.2. Bloque transmisor FMT

El diseño del transmisor FMT está desarrollado con base en la ecuación (2.31), y su representación esquemática se puede apreciar en la Figura 3.4. De este modo, es necesario implementar las etapas que lo componen, tales como: convertor S/P, sobremuestreo, filtro prototipo, conformación de onda, modulación y señal resultante. A continuación, se indica la forma en que se desarrolla cada uno de los anteriores elementos, empezando con el convertor serie-paralelo.

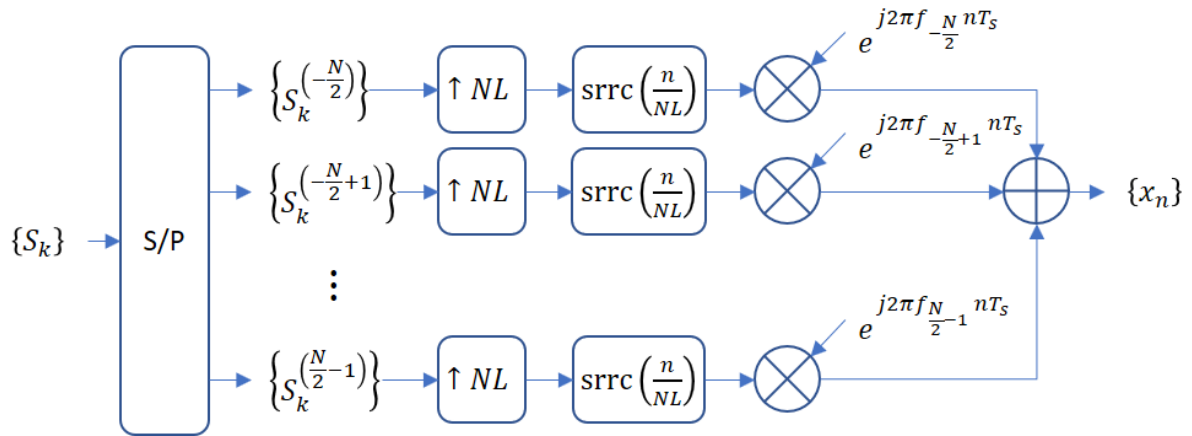


Figura 3.4. Esquema transmisor FMT.

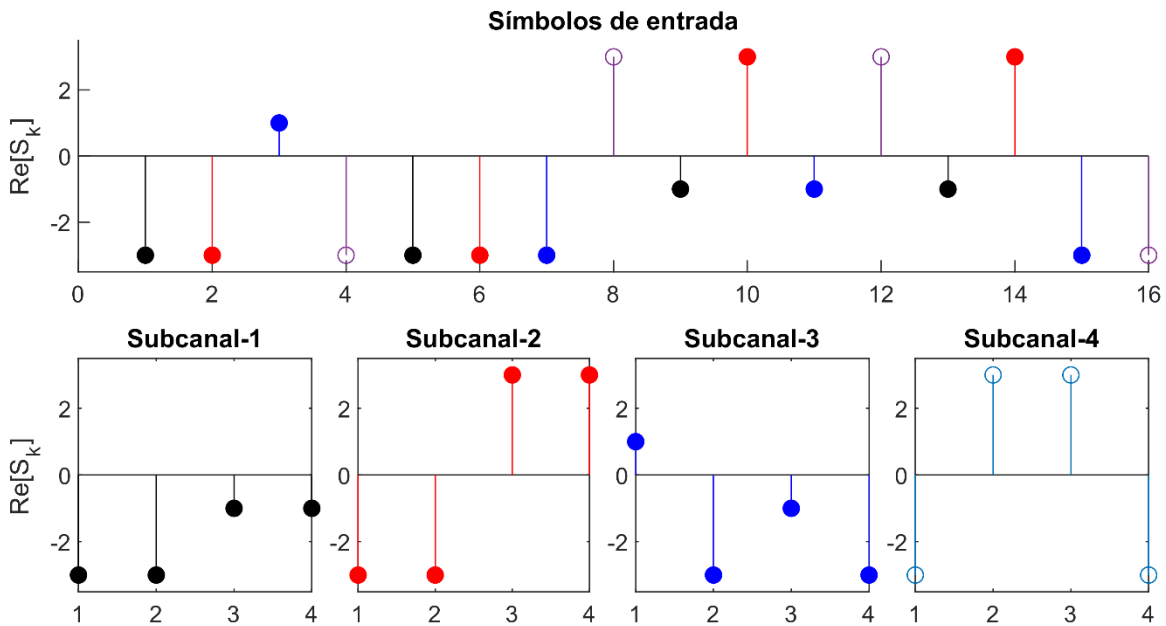


Figura 3.5. Secuencia de símbolos demultiplexados en el convertor S/P.

**Convertor serie-paralelo (S/P):** éste elemento corresponde a un demultiplexor, el cual selecciona un símbolo de la secuencia de entrada  $\{S_k\}$  por cada grupo de  $N$  símbolos para ordenarlo en el  $i$ -ésimo subcanal. La Figura 3.5 corresponde a la parte real de una secuencia de 16 símbolos, demultiplexados en 4 subcanales (dado que, los símbolos son complejos, la componente imaginaria es demultiplexada simultáneamente con la parte real, pero con sus respectivos valores de amplitud).

**Sobremuestreo:** esta etapa añade ceros entre cada par de símbolos, en un factor de  $NL$ , donde  $N$  corresponde al número de subcanales en que se divide el espectro del canal y  $L$  se conoce como factor de sobremuestreo, el cual determina la frecuencia Nyquist  $f_s = L/T$  a la cual se debe muestrear la señal, tal como en la ecuación (2.26), donde  $L \geq 2$ . Para la correspondiente implementación, se asume el valor crítico  $L = 2$ . En la Figura 3.6 se puede apreciar una secuencia de 4 símbolos sobremuestreados en un factor de  $NL = 8$ .

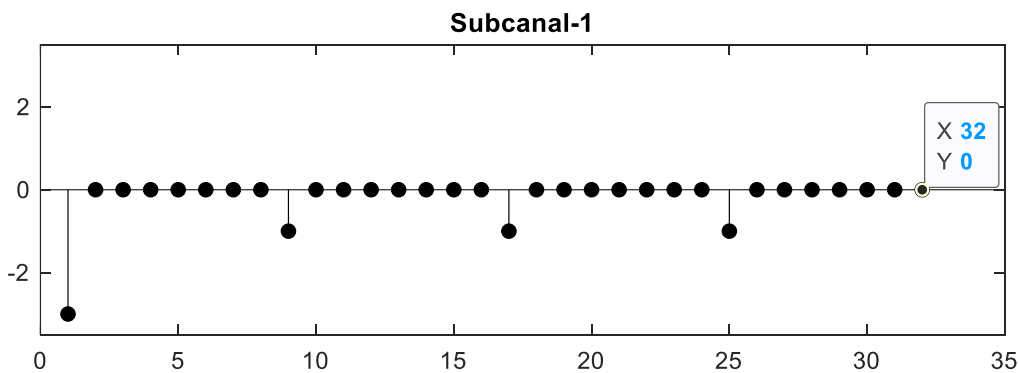


Figura 3.6. Secuencia de símbolos sobremuestreada en un factor de  $NL=8$ .

**Filtro prototipo:** el filtro prototipo en transmisión corresponde a un filtro discreto en raíz cuadrada de coseno alzado, escalonado en un factor de  $NL$ . Los parámetros de entrada del filtro son los siguientes: factor de *roll-off* ( $\rho$ ), número de periodos de símbolo ( $2 * numT$ ), y tasa de sobremuestreo (*rate*). En la Figura 3.7 se aprecia el filtro prototipo con sus respectivos valores.

Los puntos negros de la Figura 3.7 indican la posición de los símbolos antes y después del símbolo actual (valor central). Se debe tener en cuenta que la longitud del filtro ocupa un ancho en muestras igual a  $2 * numT * NL + 1$ , por lo cual añade un total de  $numT$  periodos de símbolo, equivalente en muestras a la señal de entrada a partir del primer símbolo<sup>13</sup> (para el ejemplo de la Figura 3.7, se asume  $N = 4$  y  $L = 2$ ).

<sup>13</sup> Estas muestras antes y después de la señal original se conocen como transiente.

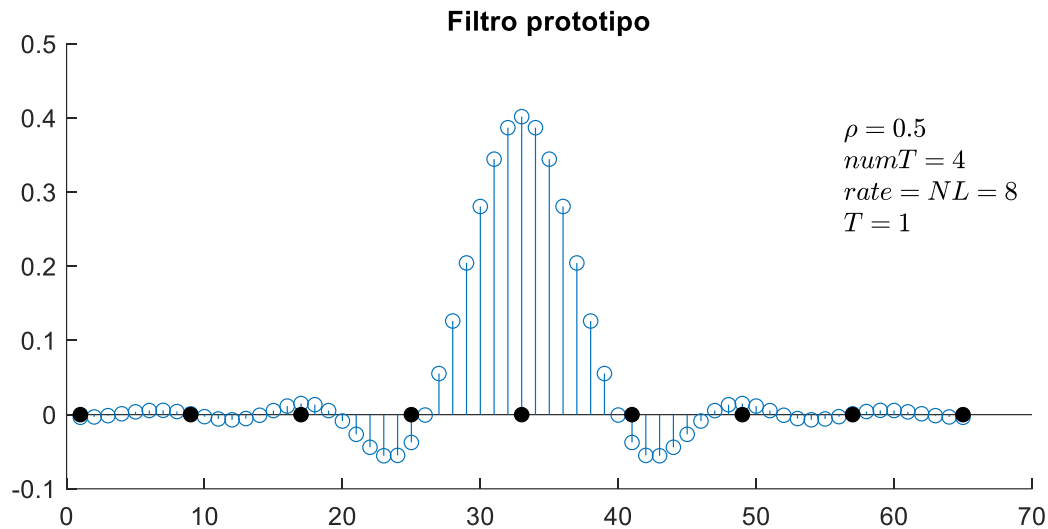


Figura 3.7. Filtro prototipo implementado en MATLAB.

**Conformación de onda:** corresponde a la convolución entre la señal sobremuestreada y el filtro transmisor, tal como lo indica la ecuación (2.33). La Figura 3.8 corresponde a la señal filtrada de secuencia en la Figura 3.6.

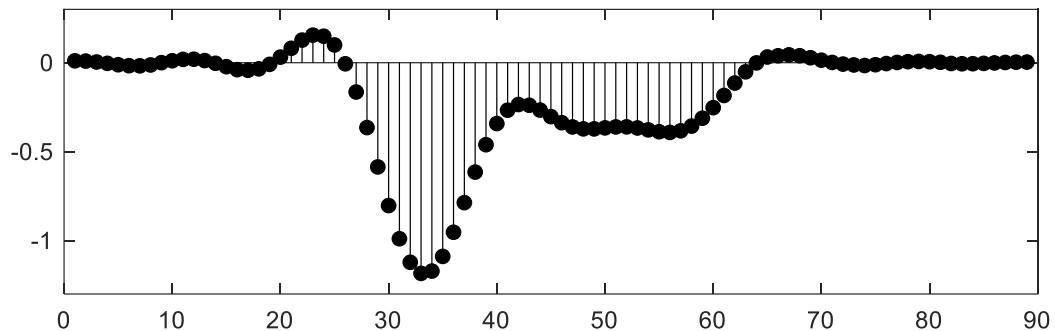


Figura 3.8. Señal a la salida del filtro (señal conformada).

**Modulación:** esta etapa se encarga de asignar una frecuencia portadora  $f_i$  a cada subcanal, conforme lo estipulado en la ecuación (2.21). Este proceso se logra mediante la exponencial compleja de la ecuación (2.33), cuya base de tiempo discreta  $n$  debe tener la misma longitud de la señal conformada. La Figura 3.9 corresponde a la señal modulada.

**Señal resultante  $x_n$ :** corresponde a la suma de todas las señales de cada subcanal. Suponiendo 4 subcanales y 16 símbolos transmitidos, la señal  $x_n$  resultante se puede apreciar en la Figura 3.10:

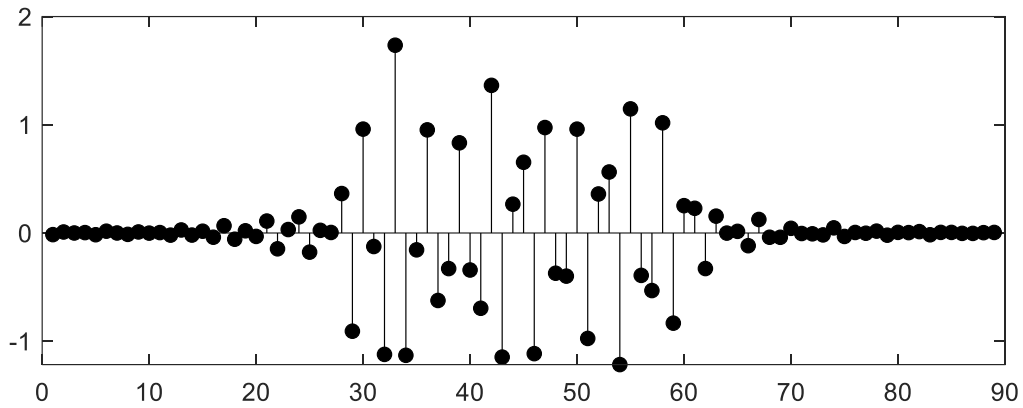


Figura 3.9. Señal modulada mediante una exponencial compleja.

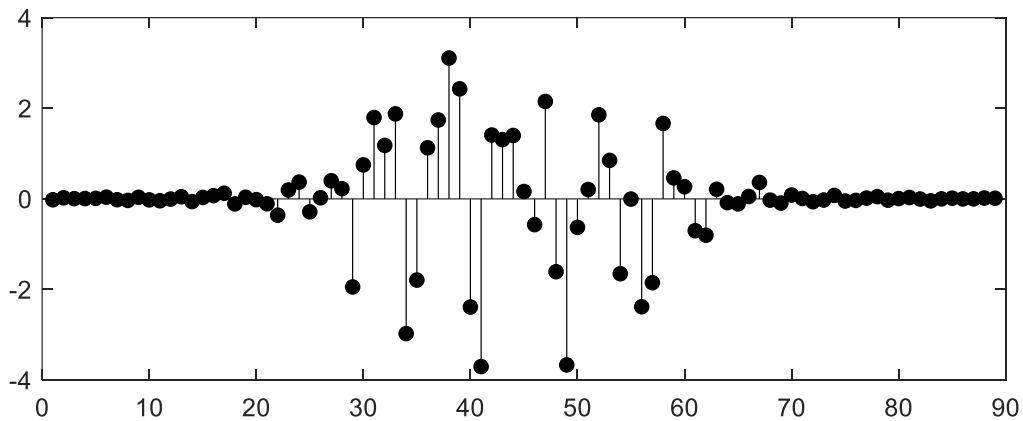


Figura 3.10. Señal modulada a la salida del transmisor.

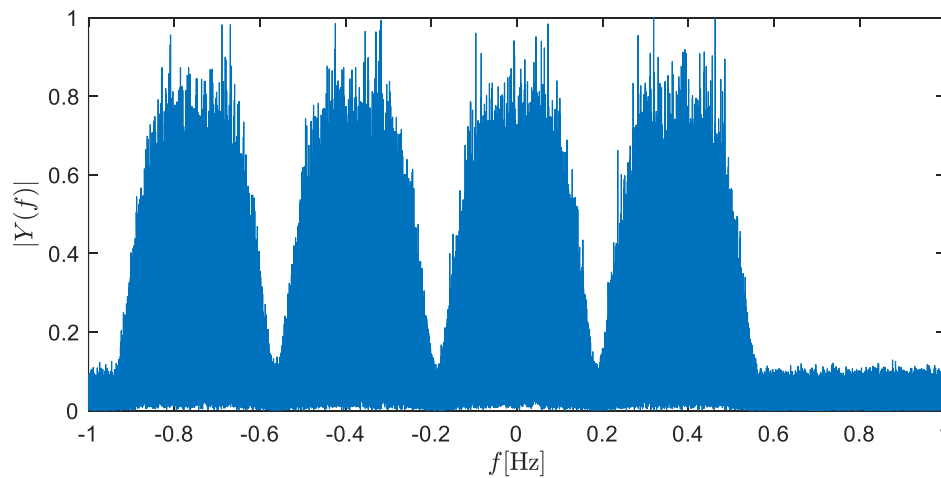


Figura 3.11. Espectro de la señal  $x_n$  a la salida del transmisor.

**Espectro de la señal de salida:** es la gráfica que permite verificar la señal de salida  $x_n$  en el dominio de la frecuencia. La Figura 3.11 evidencia la distribución de canales



alrededor de la frecuencia portadora nominal  $f_c$  de todo el espectro, para el ejemplo se tienen 4 canales que ocupan un ancho espectral igual a:

$$\frac{(1 + \rho)}{T} = \frac{(1 + 0.5)}{1} = 1.5 \text{ Hz}$$

### 3.1.3. Canal dispersivo AWGN

El diseño del canal dispersivo Gaussiano equivale a realizar un módulo con 2 fuentes de contaminación para la señal transmitida, uno que representa el ruido AWGN y otro que altera el comportamiento de la magnitud del espectro de la señal, denominado canal dispersivo. Dado que el análisis matemático de la señal se desarrolla con su equivalente en banda base y dominio de tiempo discreto, es necesario encontrar un modelo de canal equivalente. A continuación, se desarrolla este modelo de canal.

**Modelo del canal dispersivo en banda base:** permite simular el efecto de un canal multirrayecto en banda base. Un canal multirrayecto corresponde a un canal dispersivo que altera la magnitud del espectro de la señal transmitida. Este se caracteriza porque, además del rayo directo, existe un (o varios) rayo secundario que distorsiona la señal resultante (ver Figura 3.12).

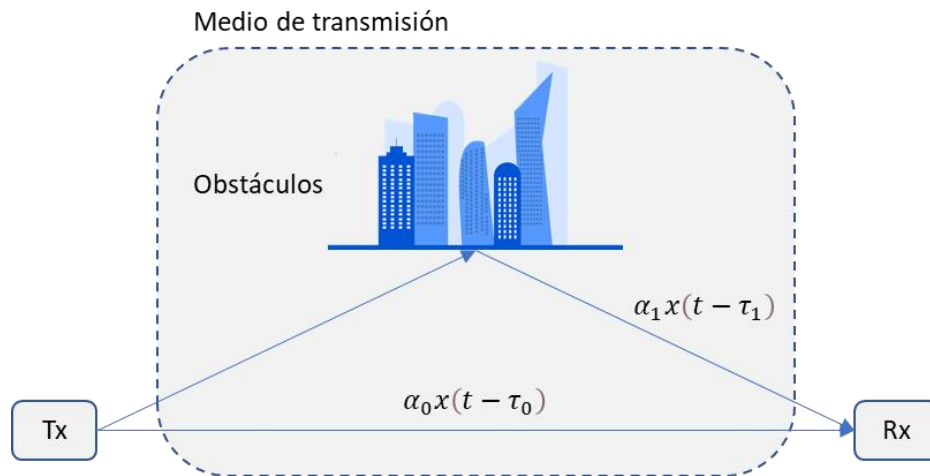


Figura 3.12. Canal multirrayecto con 1 solo rayo indirecto.

La respuesta al impulso de un canal multirrayecto que produce el efecto de un solo rayo secundario, está definida por:

$$h(t) = \alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1), \quad (3.6)$$

donde,  $(\alpha_0, \alpha_1)$  son las ganancias de los rayos directo y secundario respectivamente, y  $(\tau_0, \tau_1)$  son sus respectivos retardos. Reemplazando  $h(t)$  en la ecuación (2.8) de la sección 2.2 en la ecuación (3.6), se tiene:

$$y(t) = \alpha_0 x(t - \tau_0) + \alpha_1 x(t - \tau_1) + w(t). \quad (3.7)$$

Si se considera que el rayo directo llega sin atenuación ni retardo, entonces la ecuación (3.7) queda como sigue:

$$y(t) = x(t) + \alpha_1 x(t - \tau_1) + w(t), \quad (3.8)$$

además, teniendo cuenta que la señal  $x(t)$  se considera en pasa banda es necesario hallar su equivalente en banda base, haciendo uso de las siguientes ecuaciones:

$$y(t) = \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{y}(t)], \quad (3.9)$$

$$x(t) = \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{x}(t)], \quad (3.10)$$

$$w(t) = \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{w}(t)], \quad (3.11)$$

donde:  $\tilde{y}(t)$  es el equivalente en banda base de  $y(t)$ ;  $\tilde{x}(t)$  es el equivalente en banda base de  $x(t)$ ;  $\tilde{w}(t)$  es el equivalente en banda base de  $w(t)$  y  $f_c$  es la frecuencia portadora nominal que permite simular el efecto pasa banda en el modelo equivalente en banda base (descrito en esta sección), variando su valor, lo cual altera la posición de  $H(f)$  en el espectro. Reemplazando las ecuaciones (3.9), (3.10), y (3.11) en (3.8), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{y}(t)] &= \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{x}(t)] + \alpha_1 \Re[e^{j2\pi f_c (t-\tau_1)} \tilde{x}(t - \tau_1)] + \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{w}(t)] \\ &= \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{x}(t) + \alpha_1 e^{j2\pi f_c (t-\tau_1)} \tilde{x}(t - \tau_1) + e^{j2\pi f_c t} \tilde{w}(t)] \\ &= \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{x}(t) + \alpha_1 e^{j2\pi f_c t} e^{-j2\pi f_c \tau_1} \tilde{x}(t - \tau_1) + e^{j2\pi f_c t} \tilde{w}(t)] \\ &= \Re \left[ e^{j2\pi f_c t} \left( \tilde{x}(t) + \alpha_1 e^{-j2\pi f_c \tau_1} \tilde{x}(t - \tau_1) + \tilde{w}(t) \right) \right], \\ \Re[e^{j2\pi f_c t} \tilde{y}(t)] &= \Re \left[ e^{j2\pi f_c t} \left( \tilde{x}(t) + \alpha_1 e^{-j2\pi f_c \tau_1} \tilde{x}(t - \tau_1) + \tilde{w}(t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando la igualdad de la ecuación (3.12), el modelo del canal equivalente en banda base está dado por:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) + \alpha_1 e^{-j2\pi f_c \tau_1} \tilde{x}(t - \tau_1) + \tilde{w}(t), \quad (3.13)$$

donde,  $\tilde{w}(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ . Teniendo en cuenta que la señal de salida en el transmisor  $x_n$  de la ecuación (2.33) está en banda base y dominio discreto, el modelo del canal en banda base equivalente en el dominio discreto, se puede reescribir como:

$$\boxed{y_n = x_n + \alpha x_{n-\tau_n} + w_n, \quad \alpha = \alpha_1 e^{-j2\pi f_c \tau_s},} \quad (3.14)$$

donde,  $\tau_s = \tau_n \frac{T}{L}$ , y  $\tau_n$  es el retardo en muestras de la señal en un instante discreto  $n$ . En el dominio espectral, la señal de salida del canal dispersivo en banda base está dada por:

$$Y(f) = X(f)H(f) + Z(f),$$

donde, la función de transferencia  $H(f)$  corresponde a:

$$H(f) = 1 + \alpha_1 e^{-j2\pi\tau_s(f_c+f)}, \quad (3.15)$$

y su magnitud se representa en la figura Figura 3.13.

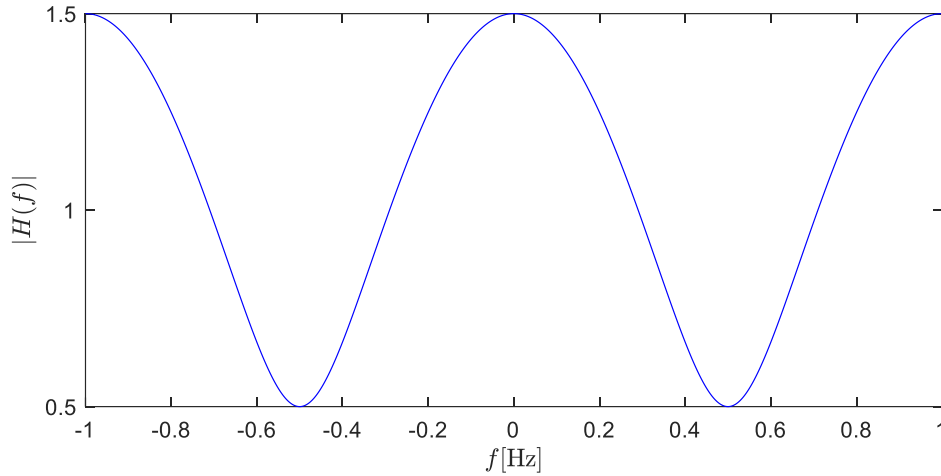


Figura 3.13. Función de transferencia.

El esquema que modela la ecuación (3.14) correspondiente a un canal dispersivo cuyas señales de entrada y salida están en el dominio discreto, es el que se muestra en la Figura 3.14.

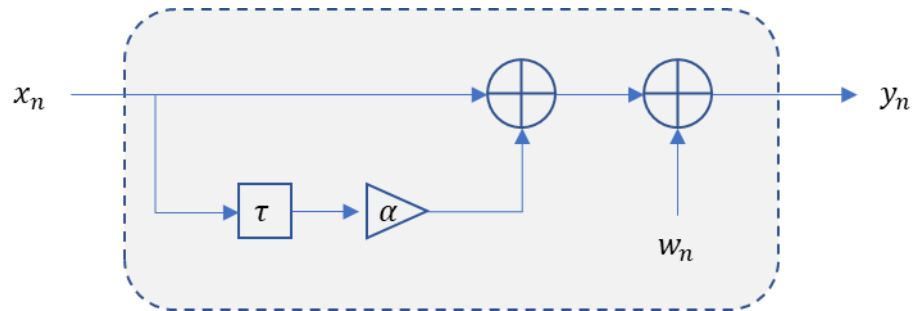


Figura 3.14. Canal multitrayecto en tiempo discreto.

**Ruido complejo AWGN:** equivale a una fuente generadora de ruido complejo discreto  $w_n$ , el cual tiene distribución normal compleja con media 0 y varianza  $\sigma^2 = N_0/2$ . Para realizar una correcta implementación es necesario determinar el valor de  $\sigma^2$  en función de los parámetros del sistema como son:  $E_b/N_0$ ,  $M$ , y  $E_s$ . Teniendo en cuenta que la relación de la energía de bit con la energía de la señal está dada por:

$$\frac{E_s}{N_0} = k \frac{E_b}{N_0}, \quad (3.16)$$

donde  $k = \log_2 M$  es la cantidad de bits que representa cada símbolo de una modulación  $M$  aria y dado que  $N_0 = 2\sigma^2$ , la ecuación (3.16) queda como sigue:

$$\frac{E_s}{2\sigma^2} = k \frac{E_b}{N_0}. \quad (3.17)$$

Luego despejando  $\sigma^2$  de la ecuación (3.17), la varianza de ruido complejo en función de la energía de bit está dada por:

$$\sigma^2 = \frac{E_s}{2k \frac{E_b}{N_0}} = \frac{E_s}{2 \log_2 M \frac{E_b}{N_0}}, \quad (3.18)$$

donde  $E_s$  es la energía promedio de la constelación,  $M$  es el orden de modulación y  $E_b/N_0$  es la relación energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido (en escala lineal). Por lo tanto, la generación de ruido complejo está dada por:

$$w_n = \sqrt{\sigma^2} v = \sigma v, \quad (3.19)$$

donde,  $v$  es una secuencia aleatoria de números complejos con partes real e imaginaria iid, cada una con distribución normal estándar.

**Espectro de la señal de salida del canal:** en la Figura 3.15 se observa la alteración del espectro de la señal de salida, representada en cada uno de los cuatro subespectros. Lo anterior, se da debido a la forma de la función de transferencia del canal, cuando el canal es dispersivo Gaussiano.

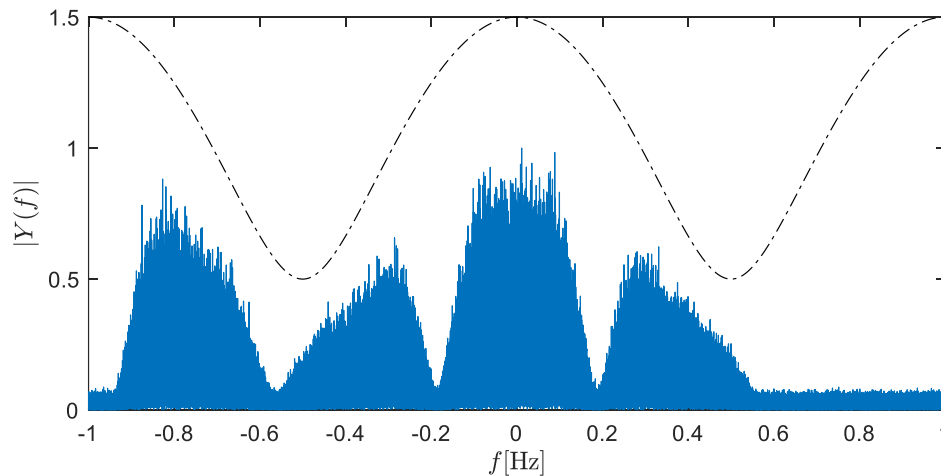


Figura 3.15. Espectro de la señal después del canal  $Y(f)$ .

### 3.1.4. Bloque receptor FMT

El receptor del sistema FMT corresponde a las etapas recíprocas de transmisión, esto es: 1) dividir la señal de entrada en múltiples canales con ayuda de la exponencial compleja conjugada del transmisor, 2) filtrar la señal para recuperar la señal sobremuestreada, 3) recuperar los símbolos mediante un proceso de submuestreo, 4) multiplexar los símbolos de cada canal en una sola secuencia de símbolos, 5)

finalmente se realiza el proceso de decisión. El esquema de recepción FMT se observa en la Figura 3.16, éste representa el proceso inverso a la transmisión.

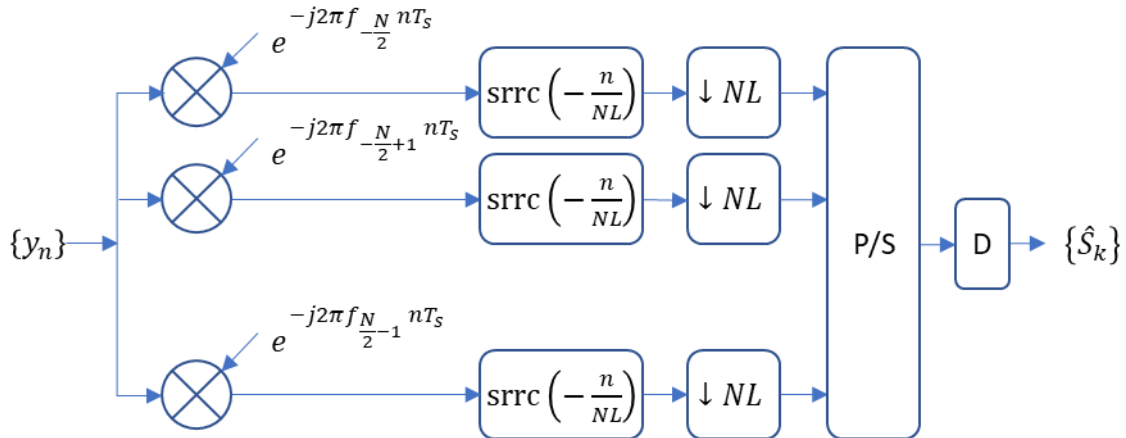


Figura 3.16. Esquema receptor FMT sin estimación de canal y ecualización.

**Etapa de decisión:** corresponde al proceso de estimar los símbolos recibidos con base en los valores multiplexados (P/S). Para ello, se usa el criterio de distancia mínima, definido como:

$$\hat{S}_k = \operatorname{argmin}_{s \in \Omega} \{|y_k - s|\}, \quad (3.20)$$

donde,  $y_k$  es la secuencia de observaciones después de ser ordenadas en serie en el multiplexor. La Figura 3.17 representa los símbolos antes (puntos verdes) y después de ser estimados (círculos negros) en el proceso de decisión.

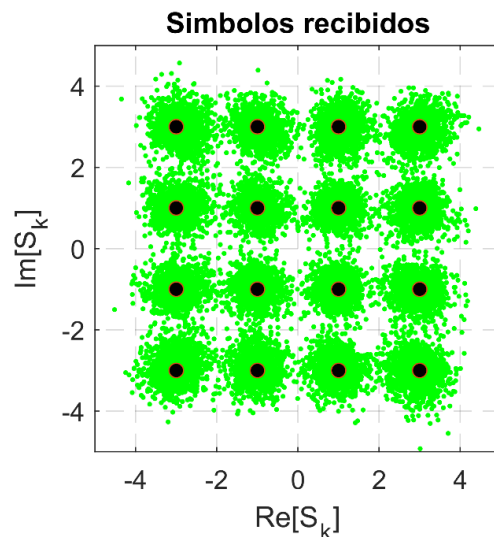


Figura 3.17. Proceso de decisión.

**Medidas de desempeño:** para evaluar el desempeño del sistema, se analizará el comportamiento de las curvas de BER vs  $E_b/N_0$ , además de las gráficas del espectro

y la constelación. Para determinar la BER, se hace el siguiente ajuste lineal de la tasa de error de símbolo (SER).

$$\text{BER} \cong \frac{\text{SER}}{\log_2 M}. \quad (3.21)$$

### 3.1.5. Pruebas de validación del sistema

Con el objetivo de verificar el correcto funcionamiento del sistema, se realizan algunas pruebas para evaluar el comportamiento de las curvas de desempeño, BER vs  $E_b/N_0$ . El método de simulación implementado se conoce como simulación por Monte Carlo, el cual es un método o procedimiento matemático que permite encontrar la respuesta a un problema mediante la simulación de un fenómeno real gobernado por la aleatoriedad [26]. En este sentido, medir el desempeño del sistema en cuanto a la BER se hace simulando el sistema en múltiples ocasiones con un número determinado de símbolos de entrada y promediando los resultados, o simulando una sola vez con un número considerablemente grande de símbolos. Dado que los símbolos erróneos en recepción tienen una baja probabilidad de ocurrencia, se pretende simular el sistema con una cantidad considerablemente alta (mayor a 600mil) de símbolos, de tal forma que los resultados de la simulación sean estadísticamente confiables.

Como primera medida, se realiza la simulación del sistema sin ninguna fuente de contaminación, esto con el objetivo de verificar el correcto funcionamiento de todos los elementos que lo componen en transmisión y recepción, obteniendo como resultado una BER = 0 para todos los posibles valores de  $E_b/N_0$ .

Tabla 1. Parámetros generales de simulación para validar el sistema FMT.

Parámetro	Valor
$T$ [s]	1
$L$	2
$f_c$ [Hz]	0

En adelante, se verifica el correcto funcionamiento del sistema transmisor FMT con símbolos de constelaciones 4-QAM y 16-QAM sobre un canal dispersivo Gaussiano, en 3 etapas: i) visualización de las curvas de desempeño del sistema con el ruido AWGN como única fuente de contaminación, ii) se añade el efecto dispersivo del canal y finalmente iii) se habilita la transmisión multiportadora FMT. En la Tabla 1 se encuentran los parámetros generales de la simulación. Además, para la simulación se usa una distancia mínima entre símbolos  $\lambda = 1$  tanto para 4-QAM como para 16-QAM, de modo que la energía promedio de la constelación es 2 y 10 respectivamente.

i) **Sistema AWGN:** consiste en simular el sistema cuando la única fuente de contaminación es el ruido AWGN. Para esta simulación, se fija el número de canales en  $N = 1$ , de tal forma que simule una transmisión de portadora única. En la Figura 3.18 se evidencia la similitud entre las curvas de desempeño para un canal AWGN y las curvas teóricas dependiendo de constelación usada (4-QAM o 16-QAM), lo cual garantiza una correcta implementación del bloque generador de ruido. Dada la similitud de las curvas (teórica y simulada), en adelante se usa la curva teórica para referirse al desempeño del sistema con ruido AWGN como única fuente de contaminación.

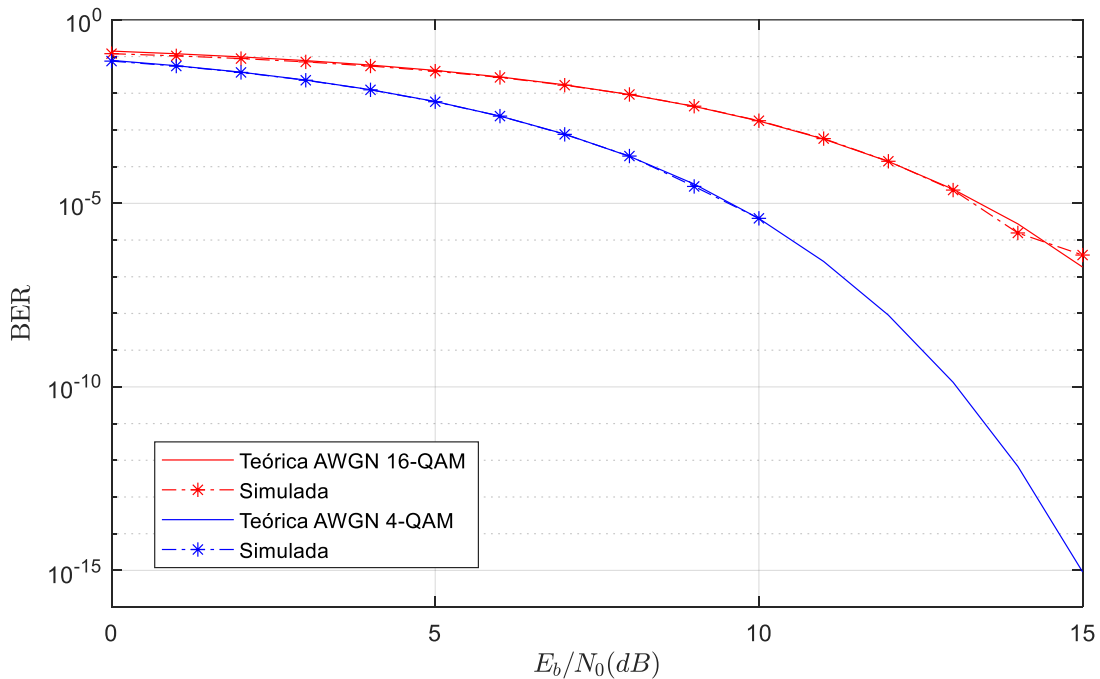


Figura 3.18. Curvas de desempeño sobre un canal AWGN.

Adicionalmente, se simula el sistema para 32 canales ( $N = 32$ ) con el objetivo de visualizar el espectro. La Figura 3.19 muestra el espectro de la señal de salida del canal AWGN para  $N = 1$  (sistema de portadora única) y  $N = 32$  (transmisión multiportadora), donde se evidencia que ambos tienen el mismo ancho espectral de 1.5 Hz. Lo anterior corrobora que el transmisor FMT no altera el consumo de ancho de banda del sistema.

ii) **Sistema con canal dispersivo AWGN:** para este caso, se fija la transmisión de la señal en un solo canal ( $N = 1$ ) con el objetivo de visualizar el efecto del canal dispersivo AWGN sobre la señal. Entonces, se varía el retardo del canal en (muestras) para los siguientes valores  $\tau_n \in \{1,2,3,4,6\}$  cuyo equivalente en tiempo está dado por  $\tau_s = \tau_n T/L$ , y se fija la ganancia del rayo secundario en  $\alpha = 0.5$ . Los símbolos usados son los de la constelación 4-QAM.

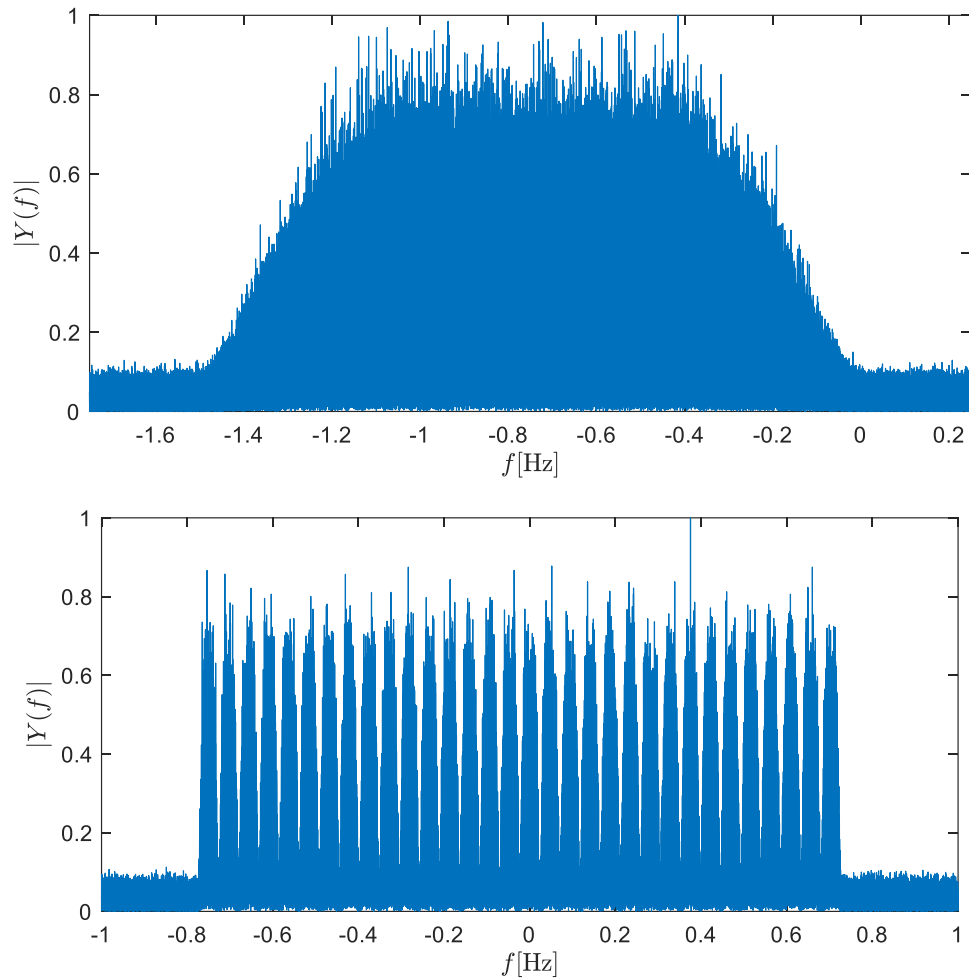


Figura 3.19. Espectro de la señal a la salida del canal AWGN (superior  $N=1$ , inferior  $N=32$ ).

Los resultados de la simulación se muestran en la Figura 3.20, donde se evidencia una disminución del desempeño del sistema en cuanto a la BER a medida que el canal aumenta su retardo. Lo anterior se da debido a que a mayor retardo mayor número de ondulaciones de la respuesta del canal, lo cual hace que aparezcan más zonas (picos invertidos) que alteran las componentes de frecuencia de la señal transmitida. Esto se traduce en el aumento de la BER del sistema. Las ilustraciones pequeñas de la Figura 3.20 muestran gráficamente el efecto del retardo en el espectro de la señal transmitida, cuya envolvente sigue la misma forma de la función de transferencia, por ejemplo, para la curva azul que representa la función de transferencia, cuando el retardo es  $\tau_s = 6T/4$  se obtiene una BER inaceptable para el rango de  $E_b/N_0$  simulado. Por otra parte, se observa que en el caso de  $\tau_s = 3T/4$  (curva verde) también se obtiene una curva



con BER inaceptable dado que la función de transferencia afecta en mayor medida al espectro del canal en comparación con  $\tau_s = 4T/4$ .

Lo anterior permite validar la correcta implementación del bloque dispersivo.

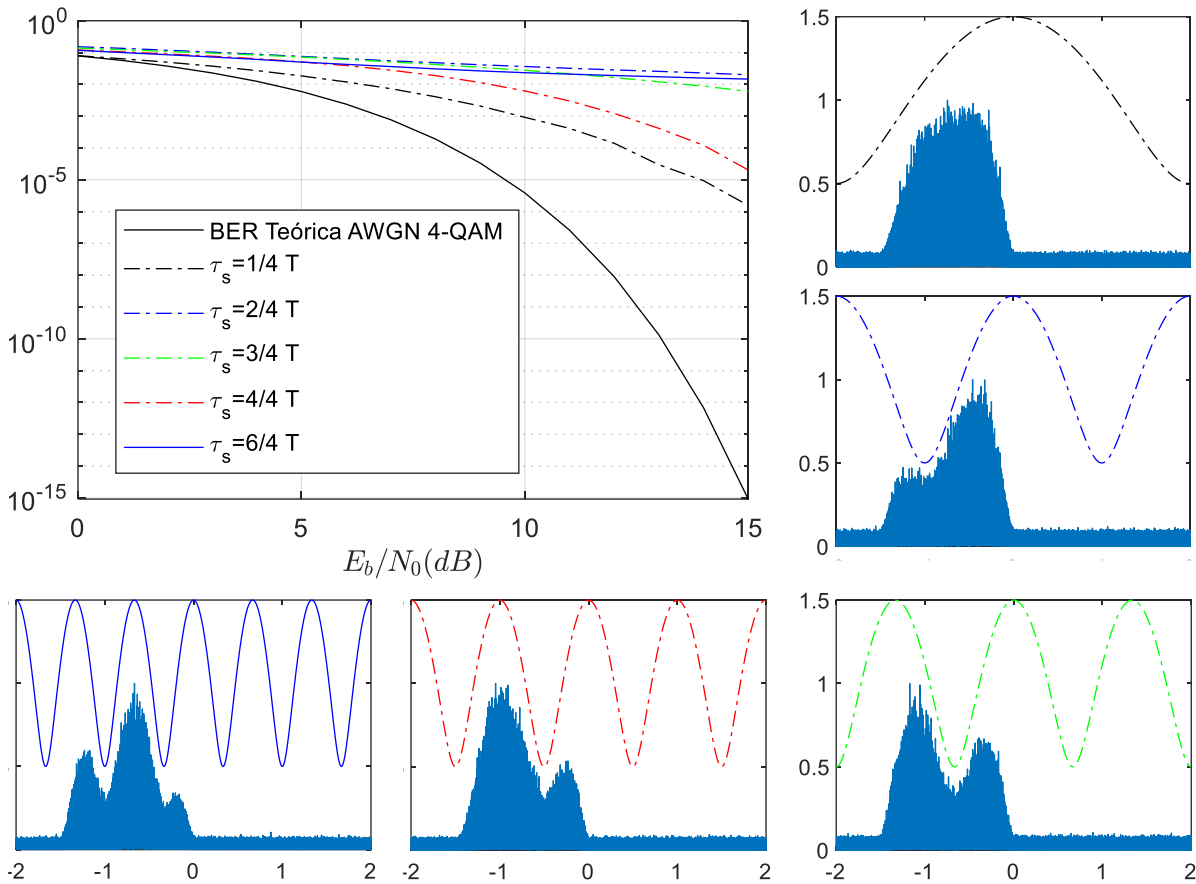


Figura 3.20. Efecto del canal dispersivo AWGN en las curvas de desempeño de la BER.

iii) **Sistema FMT con canal dispersivo Gaussiano:** para este caso se verifica el efecto que tiene la modulación FMT sobre un canal dispersivo. Se habilita el transmisor FMT ( $N > 1$ ), y, como medida previa, se verifica que el sistema FMT sin ningún tipo de contaminación no arroje errores ( $BER = 0$ ). Primero, se fija un canal dispersivo con las siguientes características: ganancia del rayo secundario  $\alpha = 0.5$ , retardo de 2 muestras, es decir,  $\tau_s = \tau_n T/L = 2T/2 = 1 T$ . Luego se varía el número de canales ( $N$ ) para evaluar su comportamiento.

La Figura 3.21 y la Figura 3.22 muestran el desempeño del sistema FMT con un canal dispersivo Gaussiano, en cuanto a la BER, donde es evidente que el desempeño con modulación 16-QAM es peor que con 4-QAM. Lo anterior se da debido a que el tamaño

de la constelación 16-QAM es mayor frente a 4-QAM, aumentando la probabilidad de error de bit en recepción.

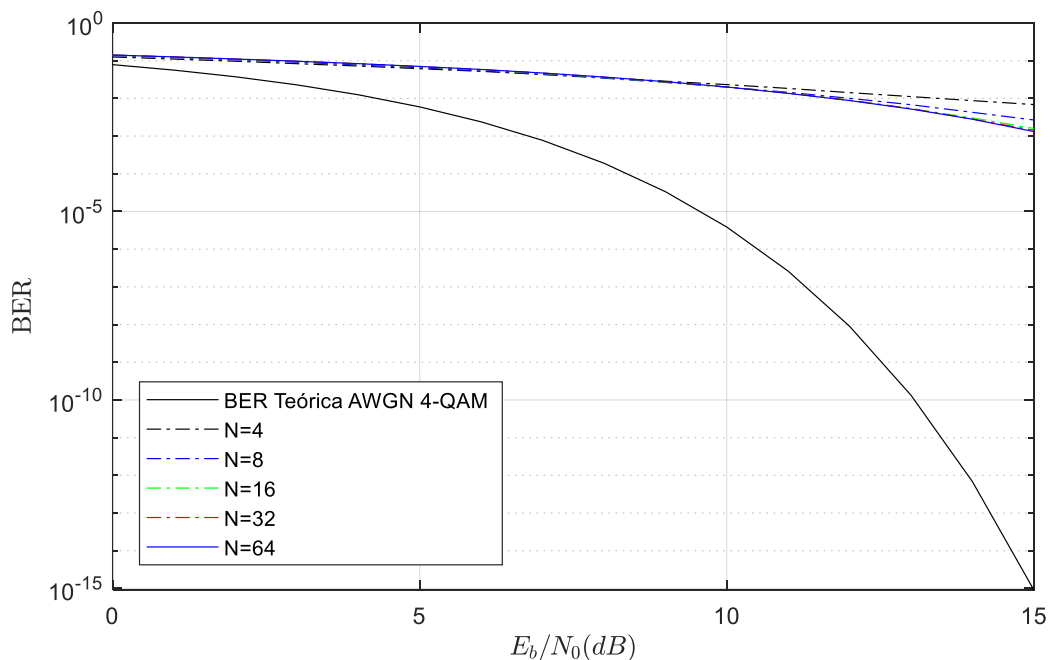


Figura 3.21. Curvas de desempeño para validar la transmisión FMT sobre canal dispersivo AWGN con modulación 4QAM.

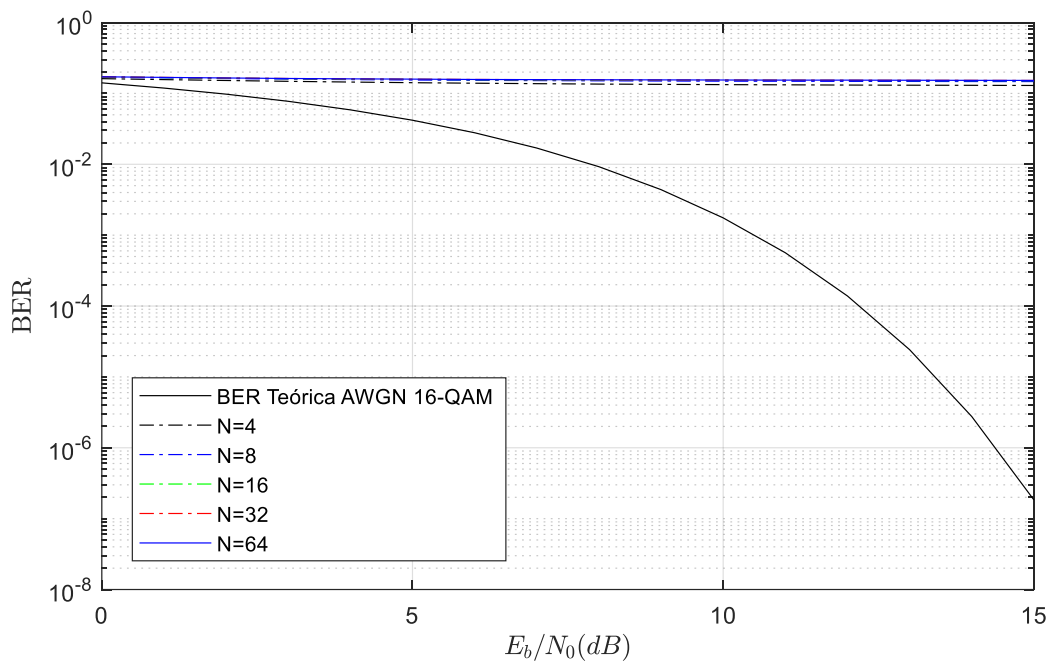


Figura 3.22. Curvas de desempeño para validar la transmisión FMT sobre canal dispersivo AWGN con modulación 16QAM.

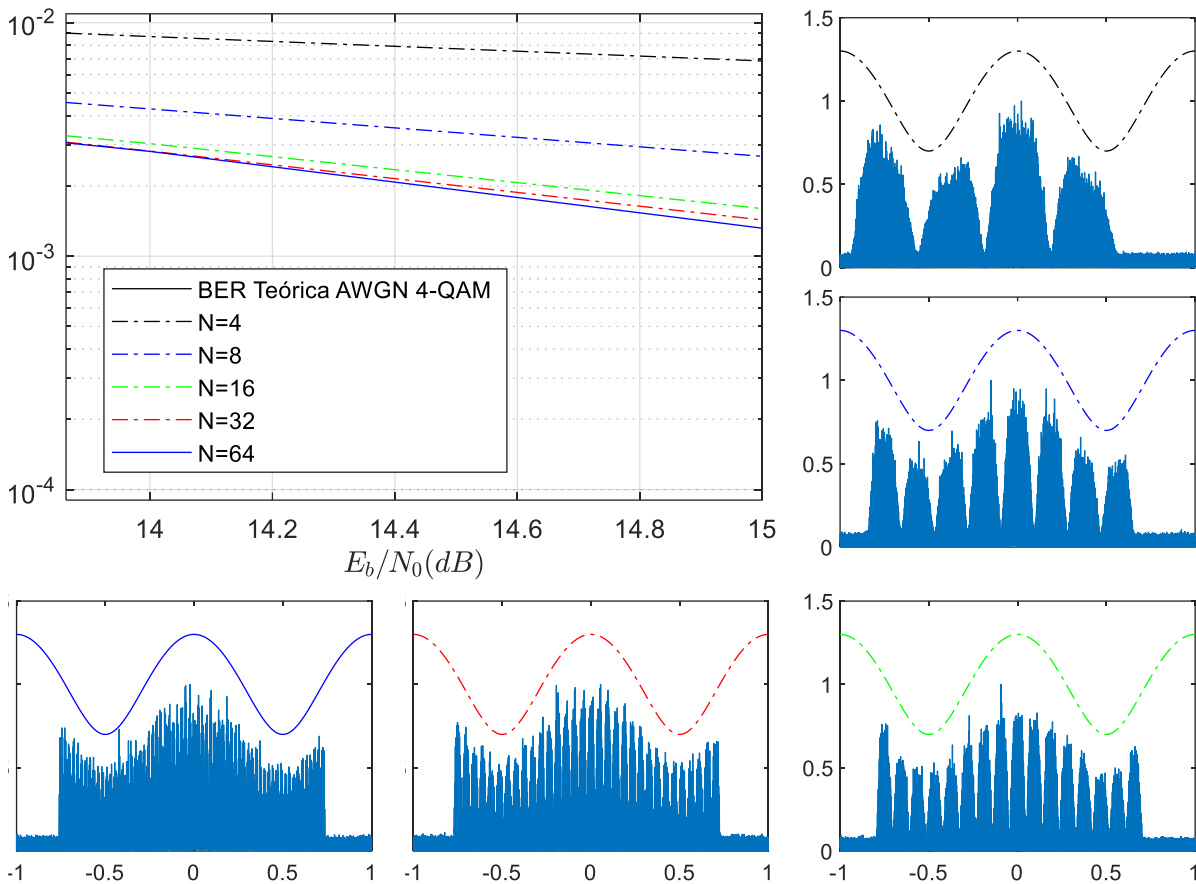


Figura 3.23. Curvas de desempeño del sistema FMT sobre canal dispersivo AWGN y orden de modulación 4-QAM, variando el número de canales.

Adicionalmente, la Figura 3.23 muestra con más detalle la variación de la BER conforme cambia el número de canales para los símbolos 4-QAM de la Figura 3.21.

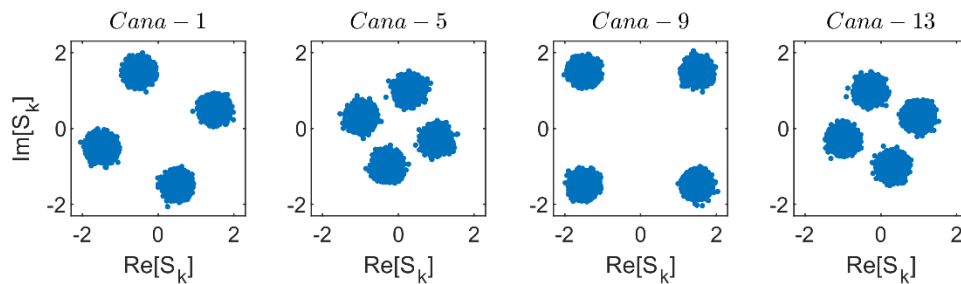


Figura 3.24. Efecto de rotación en FMT, N=16.

Se evidencia una leve mejoría conforme aumenta el número de canales, pero es insuficiente para una mejora significativa, ya que cada canal se ve afectado por una constante compleja  $a^{(i)}$  que hace que los símbolos cambien sus características originales. Este efecto se visualiza en la Figura 3.24, donde se muestra un cambio de

rotación causado por el parámetro complejo  $a^{(i)}$ , en el  $i$ -ésimo subcanal debido al efecto del canal dispersivo AWGN cuando se transmite usando FMT sobre un canal dividido en 16 subcanales (corresponde a la curva verde de la Figura 3.23), dicho efecto es necesario ecualizarlo haciendo uso de la estimación de canal.

## 3.2. Estimación de canal

Es un proceso adicional al sistema FMT con canal dispersivo Gaussiano ubicado en el bloque receptor, y es el encargado de estimar los coeficientes del canal con los cuales posteriormente se ecualiza la señal recibida. Este proceso es necesario, ya que, por lo general, el receptor no tiene conocimiento previo del comportamiento del canal, sin lo cual no es posible demodular correctamente el mensaje (Figura 3.21 y Figura 3.22). A continuación, se describen los requerimientos adicionales para la correcta implementación de esta etapa:

- El sistema debe incluir un bloque que permita estimar los coeficientes del canal.
- El sistema debe incluir un bloque para ecualizar la señal recibida, haciendo uso de los coeficientes estimados.

Variables de entrada:

- Secuencia de símbolos piloto  $S_k^{(i)}$  de longitud  $L_p$ , donde  $k \in \{0, 1, \dots, L_p - 1\}$ .

Variables de salida:

- Secuencia de observaciones  $u_k^{(i)}$  de longitud  $L_p$ , donde  $k \in \{0, 1, \dots, L_p - 1\}$ .
- Conjunto de  $N$  coeficientes  $\hat{a}^{(i)}$  del canal.

La Figura 3.25 representa el esquema del receptor con la etapa de estimación de canal y ecualización, donde  $v_k^{(i)}$  corresponde a una realización de  $u_k^{(i)}$ , con la cual, en adición al conjunto de símbolos piloto transmitidos  $S_k^{(i)}$ , se halla una estimación del parámetro complejo  $a^{(i)}$ .

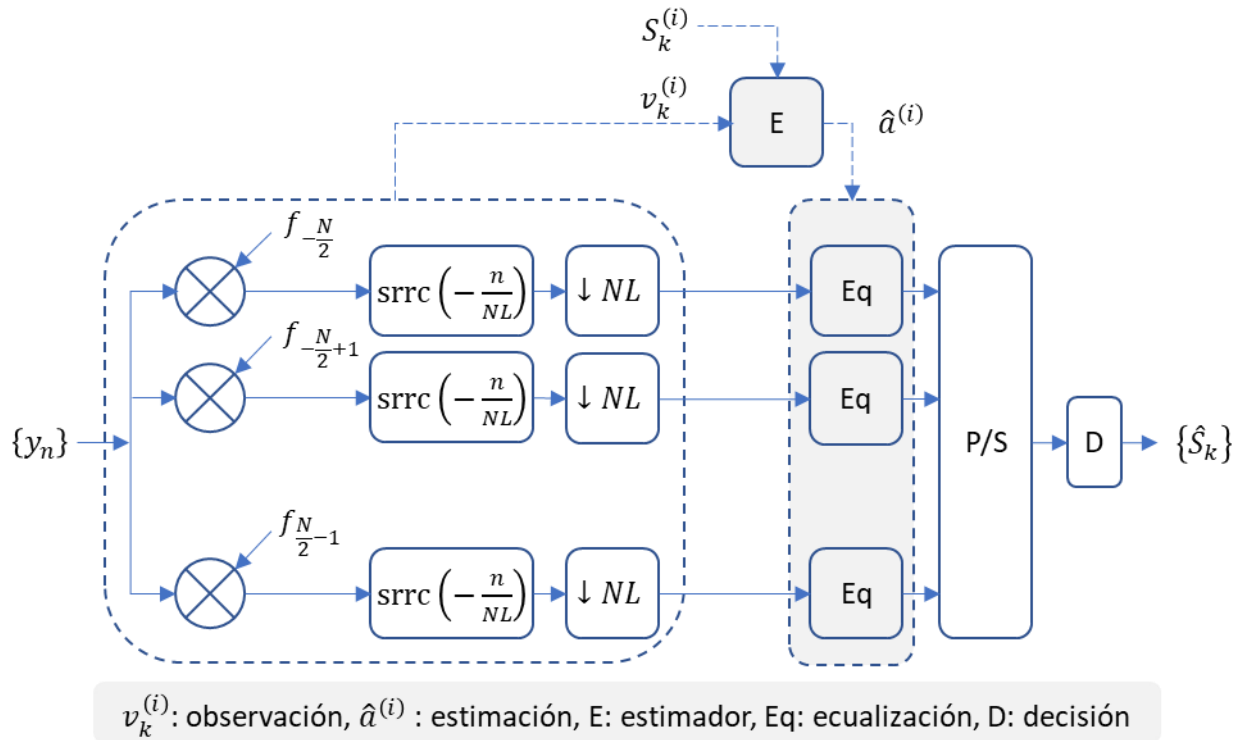


Figura 3.25. Etapa de estimación de canal.

**Estimación de canal:** esta etapa se encarga de estimar el parámetro complejo  $a^{(i)}$  con el fin de ecualizar la señal recibida en recepción. La estimación está definida por la ecuación (2.59):

$$\hat{a}^{(i)} = \frac{\sum_{k=0}^{L_p-1} v_k^{(i)} S_k^{(i)*}}{\sum_{k=0}^{L_p-1} |S_k^{(i)}|^2},$$

La técnica de estimación en bloque hace referencia a transmitir símbolos piloto en todas las subportadoras, de tal forma que se haga una estimación del coeficiente complejo  $a^{(i)}$  en cada canal. Para ello, se transmite una secuencia de símbolos piloto conocidos en recepción  $\{S_0^{(i)}, S_1^{(i)}, \dots, S_{L_p-1}^{(i)}\}$ , de longitud finita  $L_p$ , sobre cada una de las subportadoras del sistema FMT. Para la correspondiente implementación se usan los primeros  $L_p$  símbolos de cada subportadora, con el fin de estimar su correspondiente coeficiente complejo  $a^{(i)}$ . La Figura 3.27 b) muestra una estimación de los coeficientes del canal para una transmisión FMT de 16 canales.

**Ecualización:** en esta etapa se corrige el efecto rotativo (causado al transmitir sobre un canal dispersivo Gaussiano usando FMT) en amplitud y fase de los símbolos

recibidos afectados por los coeficientes complejos  $a^{(i)}$  del canal, lo cual se refleja en la ecuación (2.35). La Figura 3.26 ilustra el efecto de la ecualización.

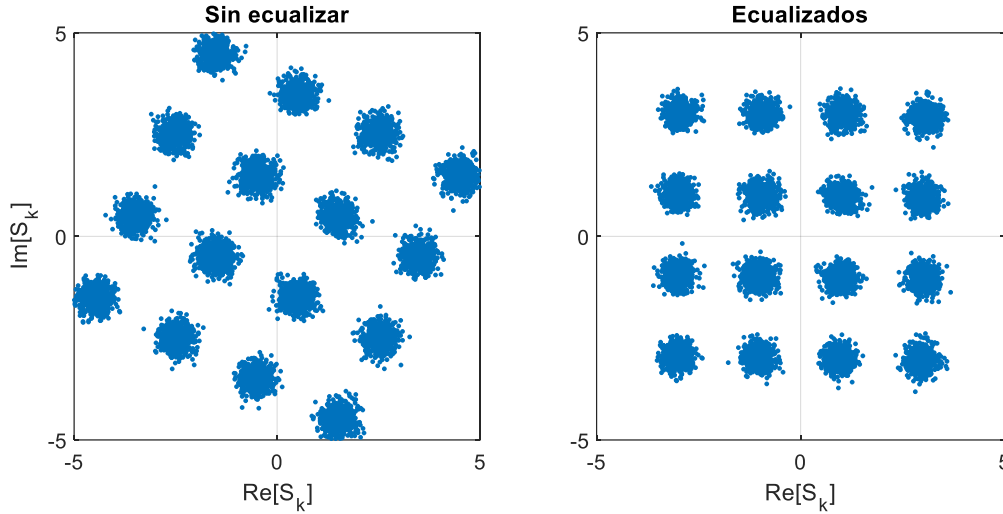


Figura 3.26. Ecualización de los símbolos.

Matemáticamente la ecualización se puede representar como:

$$y_k^{(i)} = \frac{v_k^{(i)}}{\hat{a}^{(i)}} = \frac{\hat{a}^{(i)}S_k^{(i)} + w_k^{(i)}}{\hat{a}^{(i)}} = S_k^{(i)} + \frac{w_k^{(i)}}{\hat{a}^{(i)}} = S_k^{(i)} + \psi_k^{(i)}, \quad (3.22)$$

donde  $y_k^{(i)}$  corresponde a las observaciones ecualizadas en cada subcanal en el instante  $k$ -ésimo, y  $\psi_k^{(i)}$  es ruido complejo AWGN afectado por la constante compleja  $\hat{a}^{(i)}$  de cada subcanal. Dado que el ruido se ve afectado por la estimación compleja  $\hat{a}^{(i)}$  la señal en recepción presenta un fenómeno conocido como realce de ruido. Dicho fenómeno es el resultado de la variación de la respuesta al impulso del canal, representada por cada uno de los valores complejos  $\hat{a}^{(i)}$  afectando la varianza del ruido en proporción inversa al módulo al cuadrado del parámetro complejo estimado.

### 3.2.1. Pruebas de validación de la etapa de estimación de canal

Para determinar la correcta implementación de la etapa de estimación de canal, primero se define un canal dispersivo Gaussiano, con las siguientes características: ganancia  $\alpha = 0.5$ , retardo  $\tau_s = 1 T [s]$  ( $\tau_n = 2 \text{ muestras}$ ). El factor de sobremuestreo ( $L$ ) del sistema se fija en 2, el número de canales  $N = 16$ , el periodo de símbolo ( $T$ ) en 1 y el número de símbolos piloto para estimar el canal  $L_p = 8$ . En la Figura 3.27 se aprecia la similitud que existe entre la función de transferencia  $|H(f)|$  del canal dispersivo AWGN (imagen a) y los coeficientes del canal estimados (imagen b).

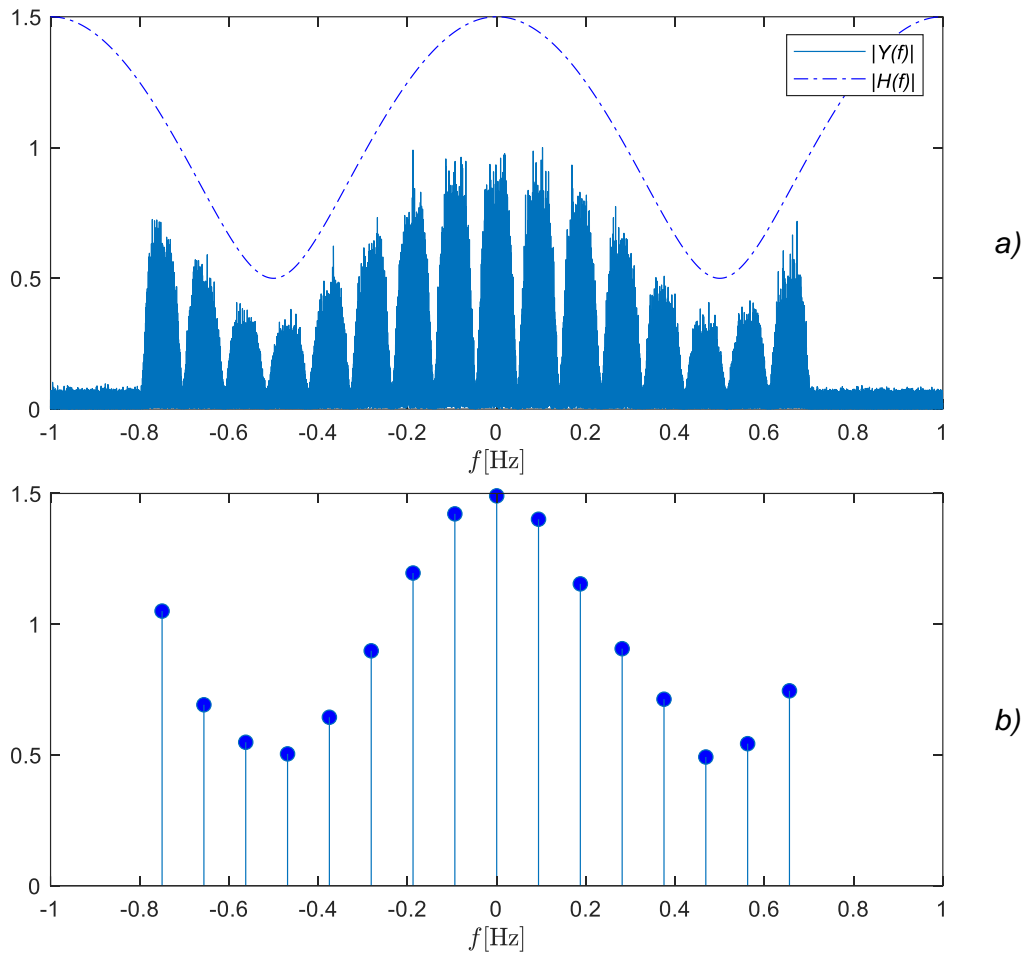


Figura 3.27. a) Espectro de la señal y función de transferencia, b) coeficientes estimados.

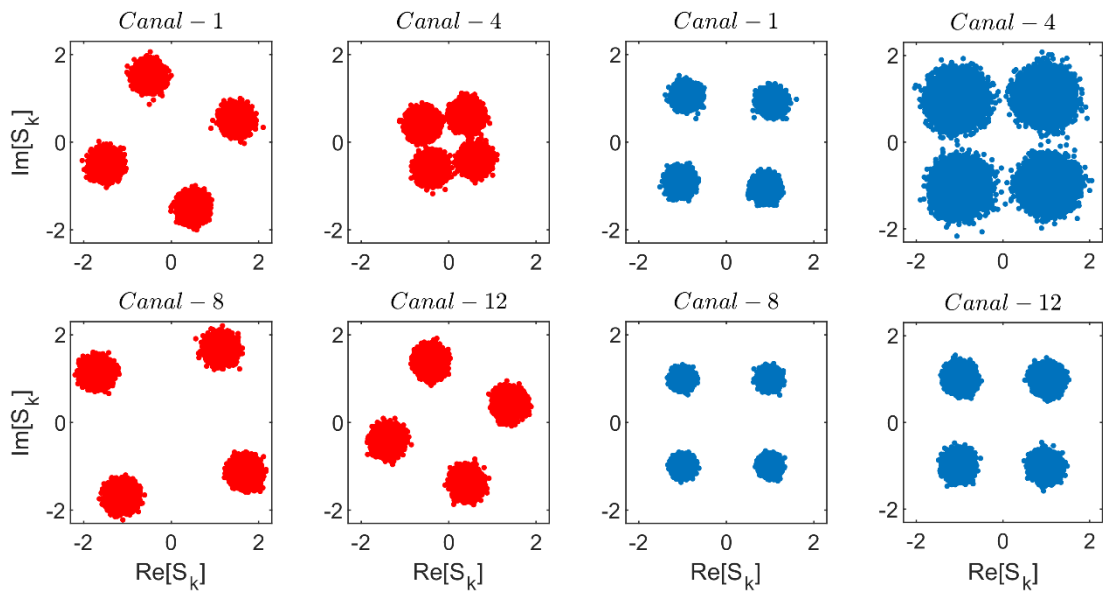


Figura 3.28. Antes (rojo) y después de ecualizar (azul), para los canales 1,4,8,12.

Por otro lado, en la Figura 3.28 se observa el efecto de ecualizar los canales, donde se corrige, no solo el efecto de rotación, sino la escala de los valores nominales de la constelación, tal como sucede con los canales 4 y 8, donde se evidencia el efecto de realce de ruido, en función del módulo del valor complejo estimado, ya que, si es menor el efecto de ruido crece, causando una mayor dispersión de los símbolos en la constelación y viceversa.

Por último, se evidencia una mejora de desempeño cuando se estima el canal de aproximadamente 4 dB de  $E_b/N_0$  para una BER objetivo de  $10^{-3}$ , tal como aparece en la Figura 3.29. Lo anterior permite validar y garantizar el buen funcionamiento de la etapa de estimación de canal.

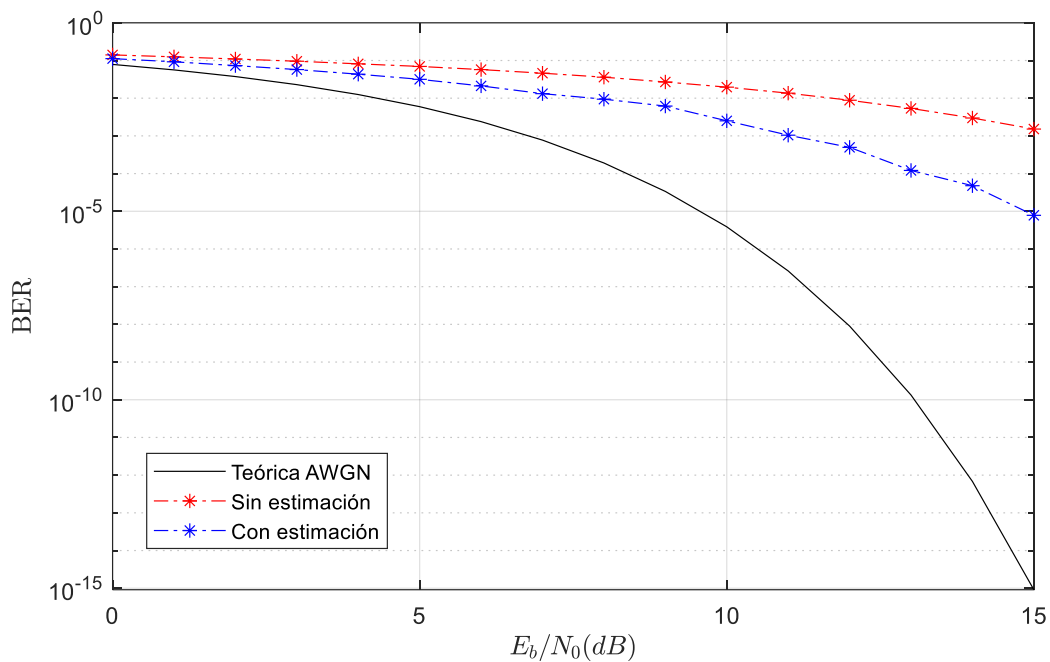


Figura 3.29. Curvas de desempeño para validar la estimación del canal.



# Capítulo 4

## 4. Resultados, análisis y conclusiones

Con el fin de presentar los resultados, análisis y conclusiones acerca del desempeño del sistema FMT sobre un canal dispersivo Gaussiano usando secuencias piloto para estimar el canal, se divide el capítulo en 2 partes: en la primera (sección 4.1) se evalúa el comportamiento de las gráficas de desempeño BER *vs*  $E_b/N_0$ , variando los siguientes parámetros: longitud piloto  $L_p$  (subsección 4.1.1), factor de sobremuestreo  $L$  (subsección 4.1.2), frecuencia nominal  $f_c$  (subsección 4.1.3), factor de *roll-off*  $\rho$  (subsección 4.1.4) y número de canales  $N$  (subsección 4.1.4). Además, se compara el desempeño del sistema FMT con una transmisión de portadora única (subsección 4.1.5). En la segunda parte, se muestran las conclusiones del presente trabajo de grado (sección 4.2) y se proponen algunos trabajos futuros.

---

### 4.1. Resultados y análisis del desempeño.

#### 4.1.1. Variando la longitud de la secuencia piloto

La simulación se lleva a cabo bajo las condiciones del sistema y canal mostrados en la Tabla 2. El parámetro que se varía es la longitud de la secuencia de símbolos piloto  $L_p$ .

Las funciones de transferencia,  $H(f)$ , y el espectro de la señal de salida del canal,  $Y(f)$ , del sistema propuesto, se muestran en la gráfica de color azul de la Figura 4.1, las demás gráficas corresponden a una aproximación del canal dispersivo en función del número de símbolos piloto transmitidos. Se puede evidenciar que los coeficientes

se aproximan con mayor precisión a la función de transferencia del canal conforme aumenta el número de símbolos piloto transmitidos.

Tabla 2. Parámetros generales del sistema, al variar  $L_p$ .

Sistema FMT		
Nombre	Parámetro	Valor
Orden de modulación QAM	$M$	4, 16
Factor de sobremuestreo	$L$	2
Periodo de símbolo	$T$	1
Factor de <i>roll-off</i>	$\rho$	0.5
Número de canales	$N$	32, 4
Canal dispersivo AWGN		
Retardo [ <i>muestras</i> ]	$\tau_n$	2
Retardo [s]	$\tau_s$	$1T$
Atenuación	$\alpha$	0.5

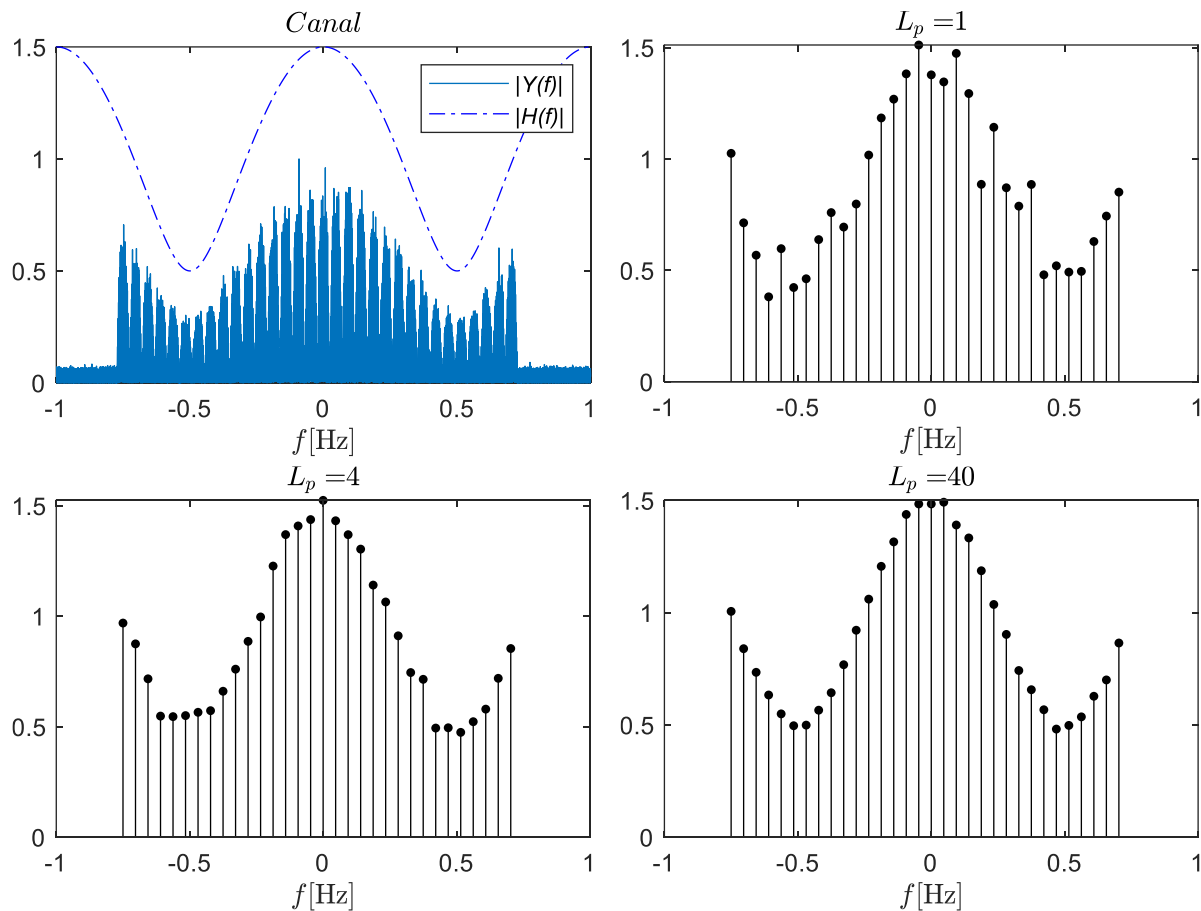


Figura 4.1. Coeficientes del canal estimados para  $L_p = 1, 4, 40$ .

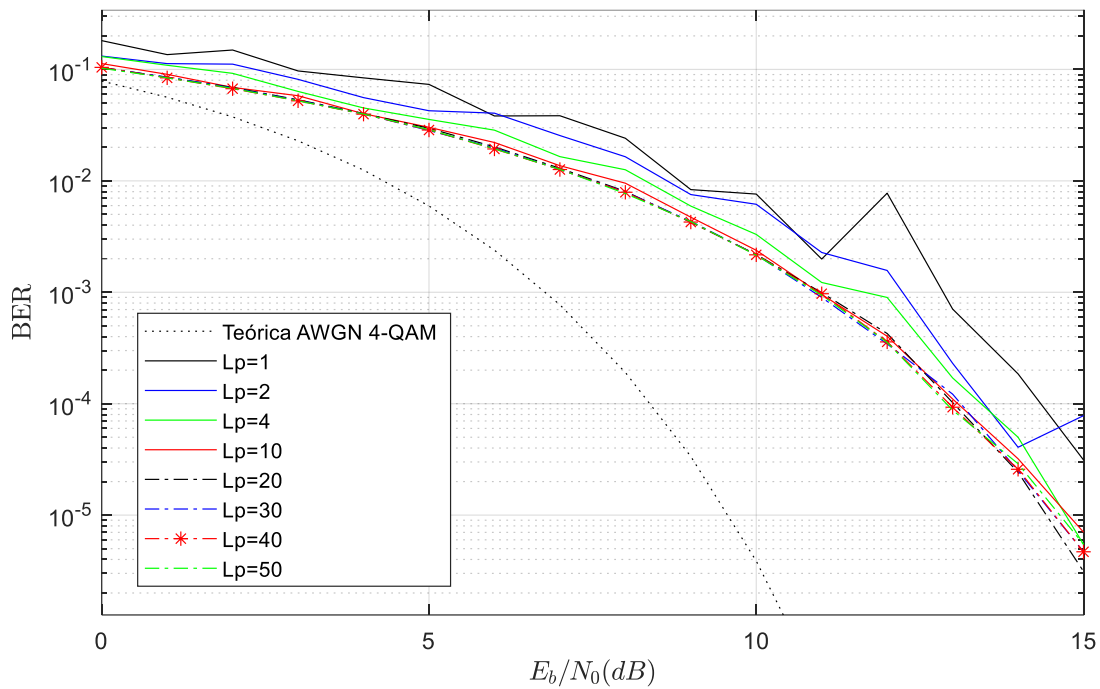


Figura 4.2. Curvas de desempeño 4QAM, variando  $L_p$  para  $N=32$ .

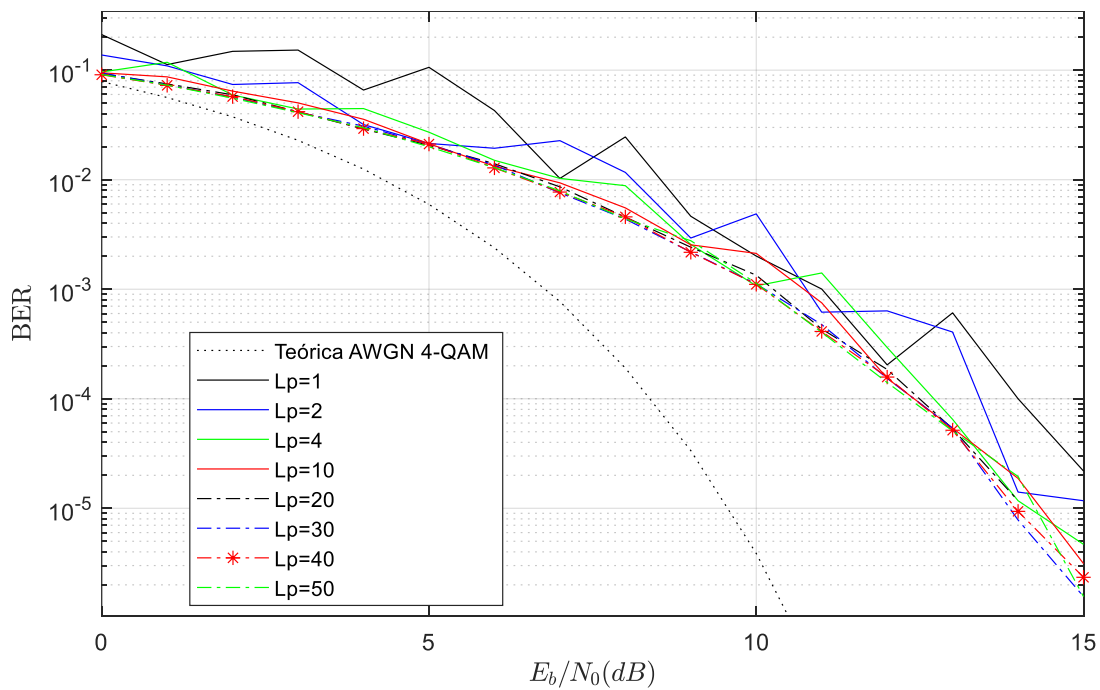


Figura 4.3. Curvas de desempeño 4QAM, variando  $L_p$  para  $N = 4$ .

Por otro lado, las curvas de desempeño de la Figura 4.2 ratifican lo dicho anteriormente, ya que se pueden observar curvas más dispersas de la BER para una

cantidad pequeña de símbolos piloto, y mayor precisión (valores menos dispersos) conforme aumenta  $L_p$ , convergiendo a un límite.

En teoría, dicho límite se encuentra cuando la longitud de la secuencia piloto es infinita (tal como lo indica la ecuación (2.66)), pero a partir de  $L_p = 40$ , se observa que la mejora de la curva de desempeño en cuanto a la precisión es despreciable, lo que confirma que con dicha longitud se se está razonablemente cerca al límite teórico.

El procedimiento anterior se repitió para el caso de  $N = 4$ , cuyas curvas de desempeño se muestran en la Figura 4.3. Además, la simulación se realiza para el caso de símbolos de entrada pertenecientes a la constelación 16-QAM, obteniendo resultados similares (ver Figura 4.4).

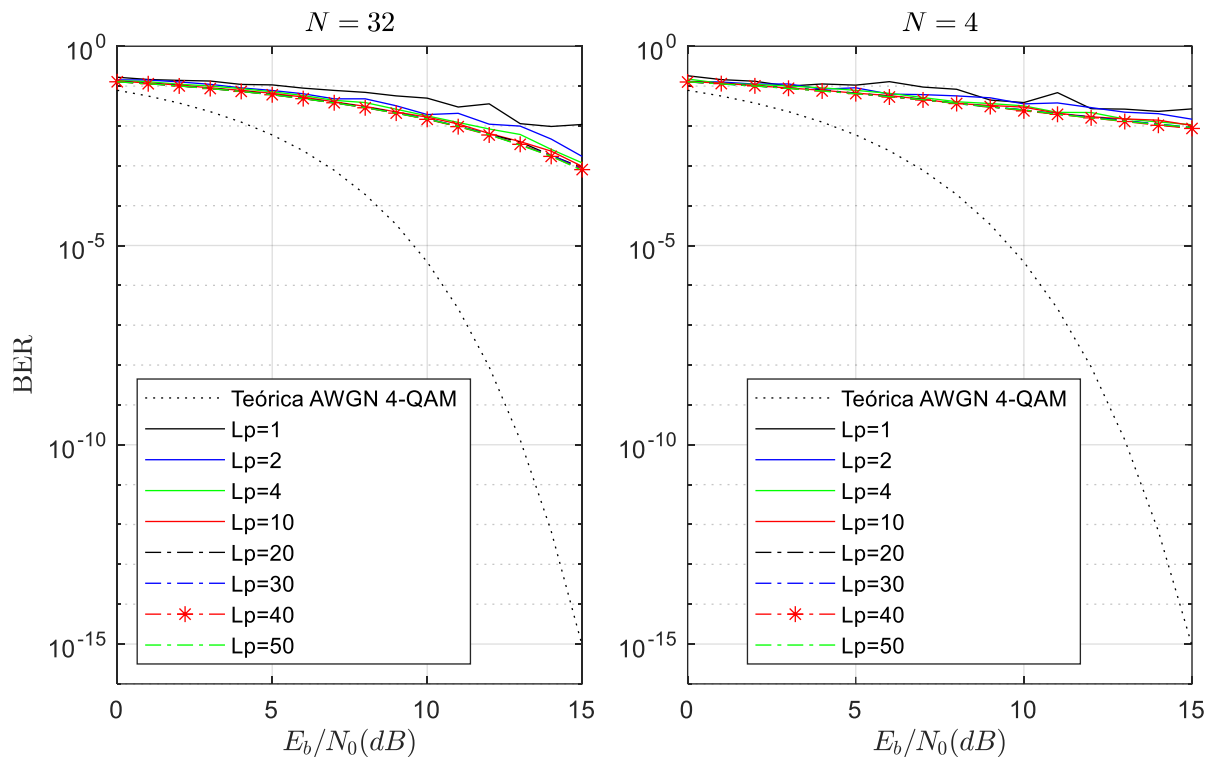


Figura 4.4. Curvas de desempeño 16QAM, variando  $L_p$  para  $N=32$  y  $N=4$ .

#### 4.1.2. Variando el factor de sobremuestreo

Las características del sistema son las mismas que las mencionadas en la Tabla 2 de la anterior subsección. Para este caso se varía el parámetro  $L$ , el cual es el factor de sobre muestreo. La Figura 4.5 muestra que el factor de sobremuestreo no altera el ancho del espectro, ya que se mantiene en 1.5 Hz, tal como en la Figura 4.1 cuando  $L = 2$ .

Respecto a las curvas de desempeño, la Figura 4.6 indica el comportamiento para  $L = 2, 4, y 8$  donde se evidencia que no hay una mejora significativa cuando se aumenta el factor de sobremuestreo y, por ende, la frecuencia de muestreo.

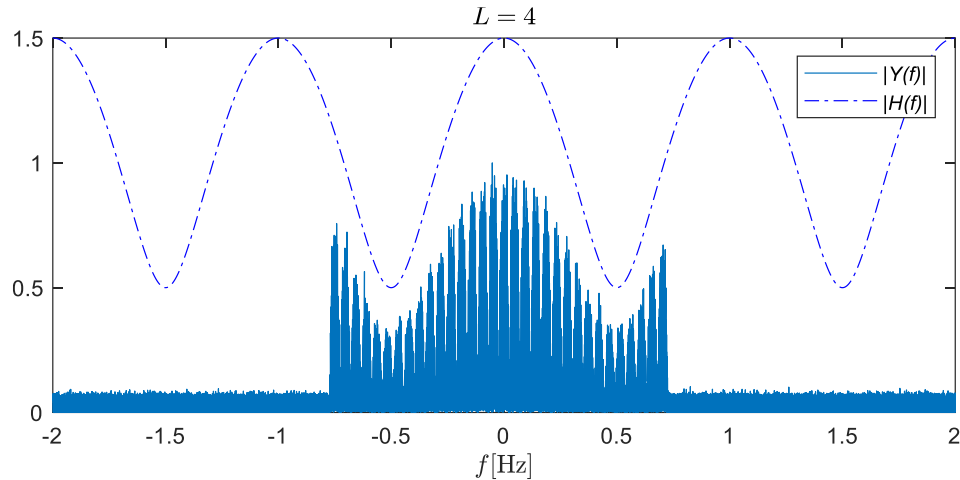


Figura 4.5.. Espectro y función de transferencia para el caso de  $L=4$ .

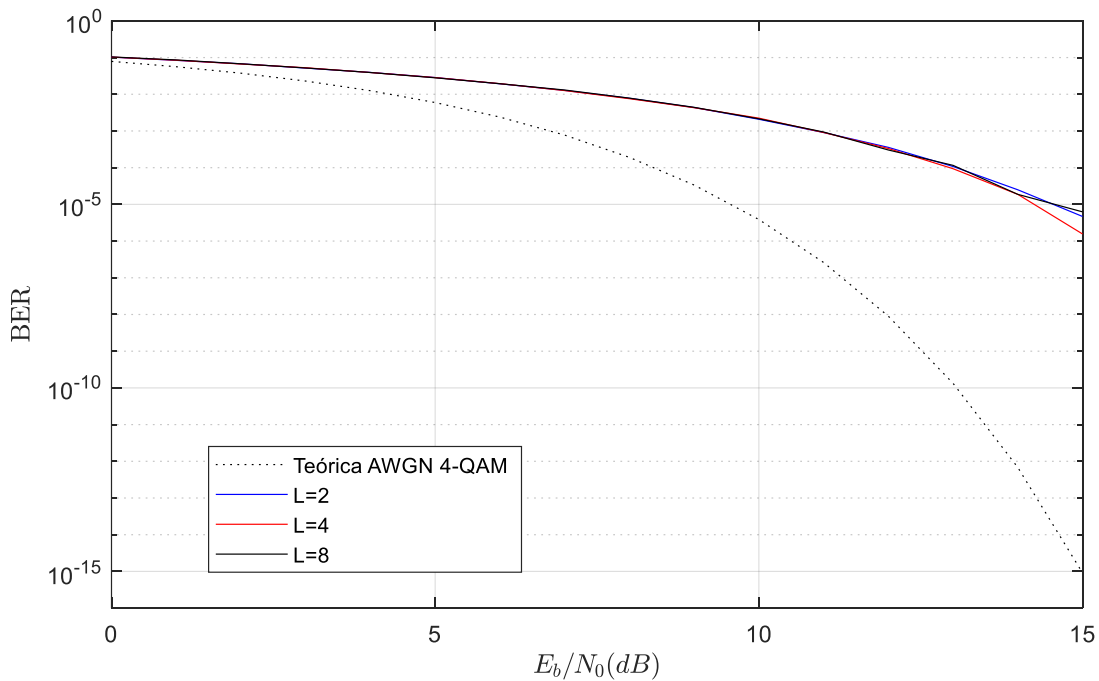


Figura 4.6. Curvas de desempeño del sistema al variar  $L$ .

#### 4.1.3. Variando la frecuencia nominal

En esta subsección se plantea un sistema con las características mostradas en la Tabla 3. El propósito es observar el efecto que se produce en el sistema al variar la frecuencia portadora nominal  $f_c$ . Para ello, se traslada de  $f_c = 0 \text{ Hz}$  (ver Figura 4.7 a)

a  $1/2 \tau_s$  Hz, de tal forma que el mínimo de la función de transferencia afecte mayoritariamente a la magnitud del espectro de la señal de entrada al canal (ver Figura 4.7 b).

Tabla 3 Parámetros generales del sistema, variando  $f_c$ .

Sistema FMT		
Nombre	Parámetro	Valor
Orden de modulación QAM	$M$	4
Factor de sobremuestreo	$L$	4
Periodo de símbolo	$T$	1
Factor de <i>roll-off</i>	$\rho$	0.5
Longitud piloto	$L_p$	40
Canal dispersivo AWGN		
Retardo [ <i>muestras</i> ]	$\tau_n$	1
Retardo [s]	$\tau_s$	$1/4T$
Atenuación	$\alpha$	0.75

Lo anterior es con el objetivo de mostrar el efecto constructivo o destructivo que puede generar el canal dependiendo del lugar donde se posiciona el espectro de la señal transmitida, es decir del valor que tome la frecuencia nominal  $f_c$ . En la Figura 4.7-a se observa un efecto constructivo en el espectro de la frecuencia del canal, por ende, las curvas de desempeño mejoran respecto a la curva teórica del canal AWGN (ver Figura 4.8 izquierda), esto se da debido a que en ese punto el módulo de los coeficientes es mayor y por lo tanto la dispersión de los símbolos en las constelaciones disminuye, generando una menor BER.

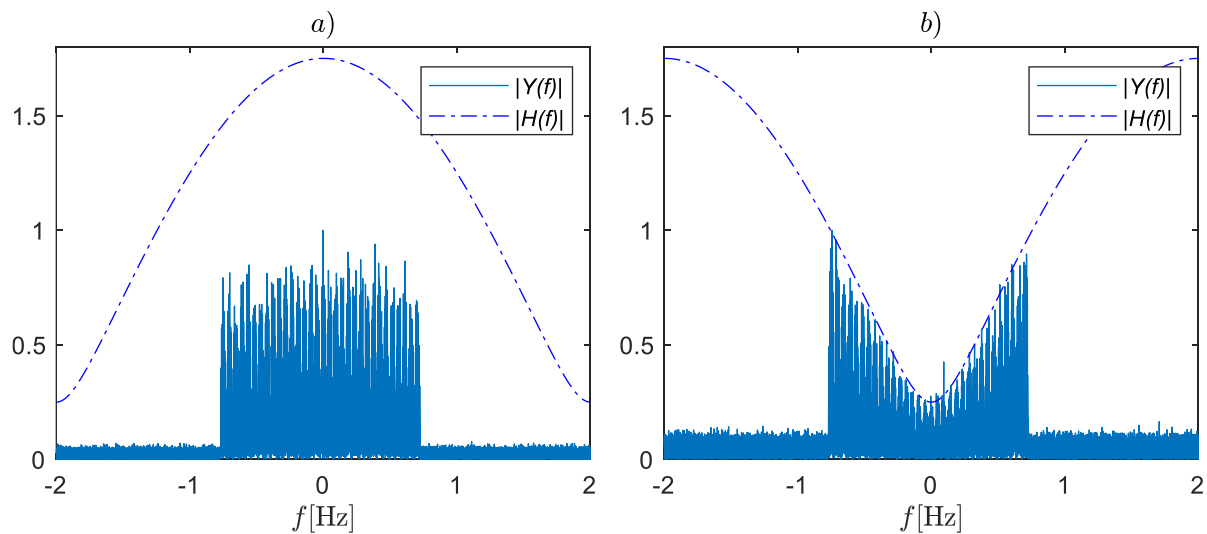


Figura 4.7. Espectro al variar  $f_c$ .

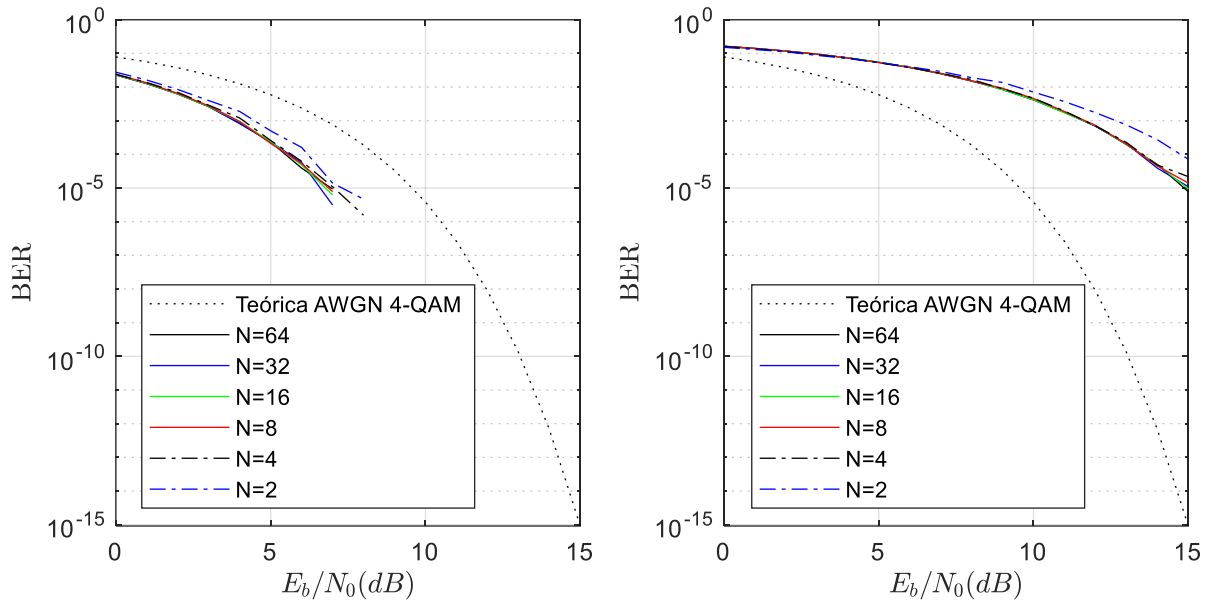


Figura 4.8. Curvas de desempeño,  $f_c = 0$  Hz (izquierda) y  $f_c = 1/2\tau_s$  (derecha).

#### 4.1.4. Variando el factor de roll-off

Otro parámetro que tiene influencia en el desempeño del sistema es el factor *roll-off*. Este parámetro indica el exceso de ancho de banda del filtro SRRC, el cual oscila entre 0 y 1, de tal forma que, entre más grande su valor, mayor la separación entre canales, lo que se refleja en un aumento considerable en el consumo de ancho de banda de la señal transmitida. Para ver el efecto que tiene en el desempeño del sistema, se toman sus valores extremos 0 y 1, tomando como referencia las características del sistema indicadas en la Tabla 2.

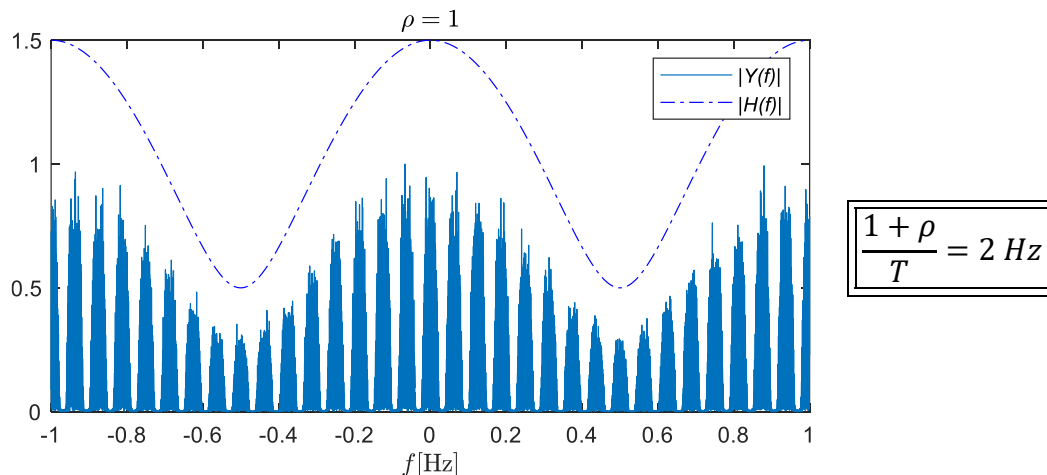


Figura 4.9. Ancho espectral para el valor máximo de  $\rho$ .

El espectro de frecuencia de la Figura 4.9 muestra una gran separación entre canales, esto, producto de un mayor valor de  $\rho$ . De modo que, el ancho espectral necesario

para poder transmitir los 32 canales es de 2 Hz. Lo anterior se ve reflejado en las curvas de desempeño (ver Figura 4.11). Por otro lado, cuando  $\rho = 0$ , no existe separación entre canales, por lo tanto, el ancho espectral es menor (ver Figura 4.10), pero, esto requiere filtros rectangulares que en la práctica no son implementables y, se refleja en una curva de desempeño de peor rendimiento. Esto es también consecuencia de la cantidad de energía que se usa para representar los pulsos prototipo (en la simulación desde  $-4T$  hasta  $4T$  donde se concentra la mayor cantidad de energía), ya que no es posible computacionalmente representar toda la señal, por lo tanto se hace imposible reconstruir un filtro totalmente rectangular en su espectro.

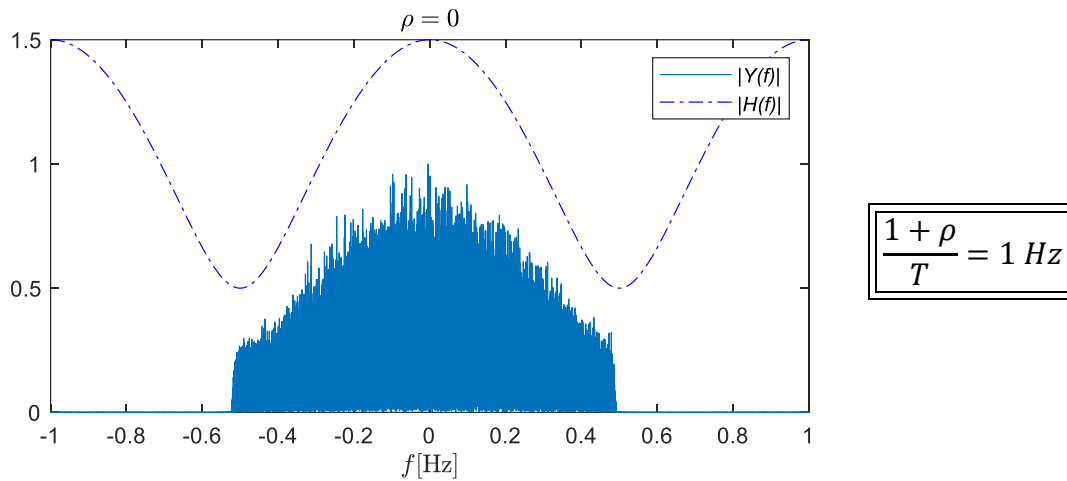


Figura 4.10. Ancho espectral para el valor mínimo de  $\rho$ .

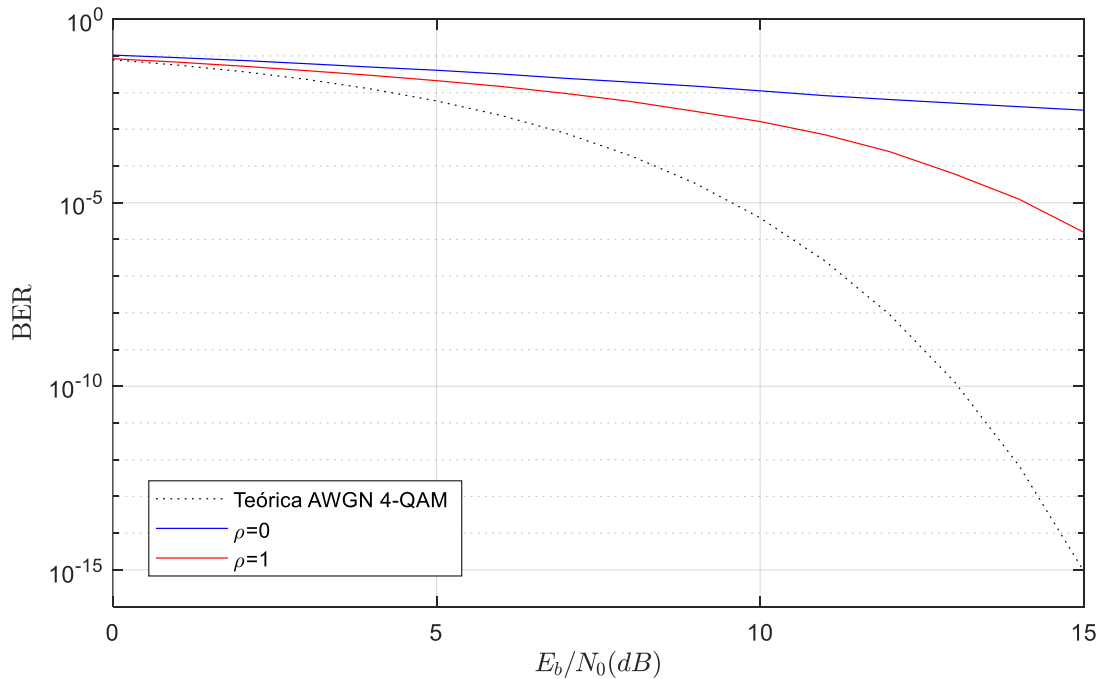


Figura 4.11. Curvas de desempeño cuando se varía  $\rho$ .



#### 4.1.5. Variando el número de subcanales

Se proponen dos canales dispersivos cuyas características se especifican en la Tabla 4. Los espectros se presentan en la Figura 4.12 y las simulaciones se realizan variando el número de canales.

Tabla 4. Parámetros del canal, variando  $N$ .

Parámetro		Canal 1	Canal 2
Retardo [muestras]	$\tau_n$	1	8
Retardo [s]	$\tau_s$	$1/4T$	$2T$
Atenuación	$\alpha$	0.75	0.75

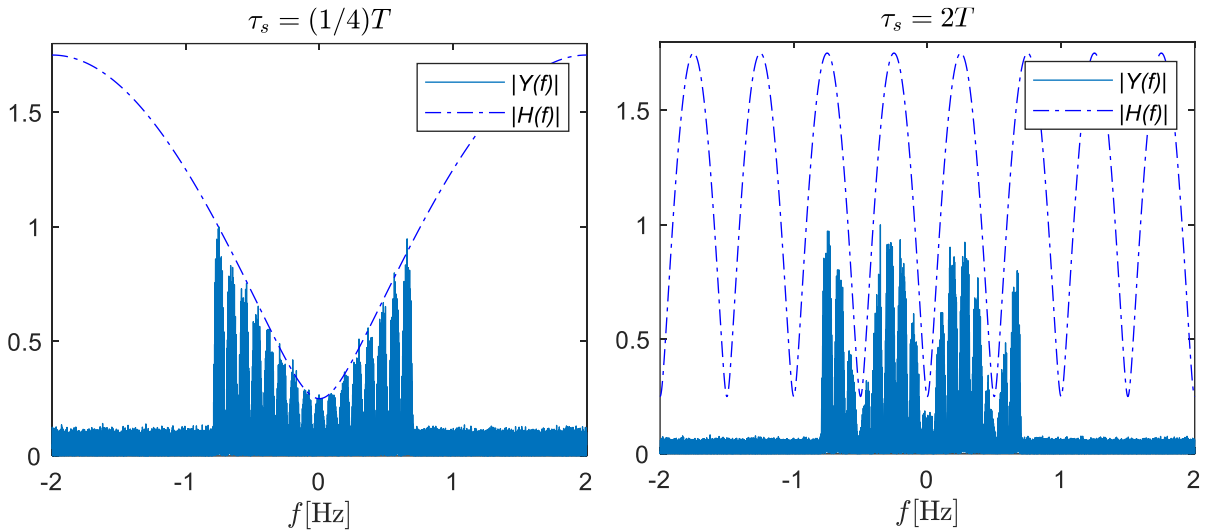


Figura 4.12. Canal 1 (izquierda), canal 2 (derecha).

Las gráficas del lado derecho en las Figura 4.13 y Figura 4.14 muestran con más detalle las curvas de desempeño. En ambas figuras se observa que las curvas de desempeño tienden a mejorar conforme aumenta el número de canales. Lo anterior se da ya que, al aumentar  $N$ , cada subcanal se vuelve menos selectivo (o lo que es lo mismo, percibe un desvanecimiento plano), favoreciendo a la señal cuando se transmite por canales distorsivos. De acuerdo con las ecuaciones (2.2) y (2.17), el criterio para definir un canal que perciba desvanecimiento plano está dado por:

$$\frac{1 + \rho}{NT} \leq 0.1B_c, \quad (4.1)$$

despejando  $N$  queda:

$$N \geq \frac{10(1 + \rho)}{B_c T}, \quad (4.2)$$

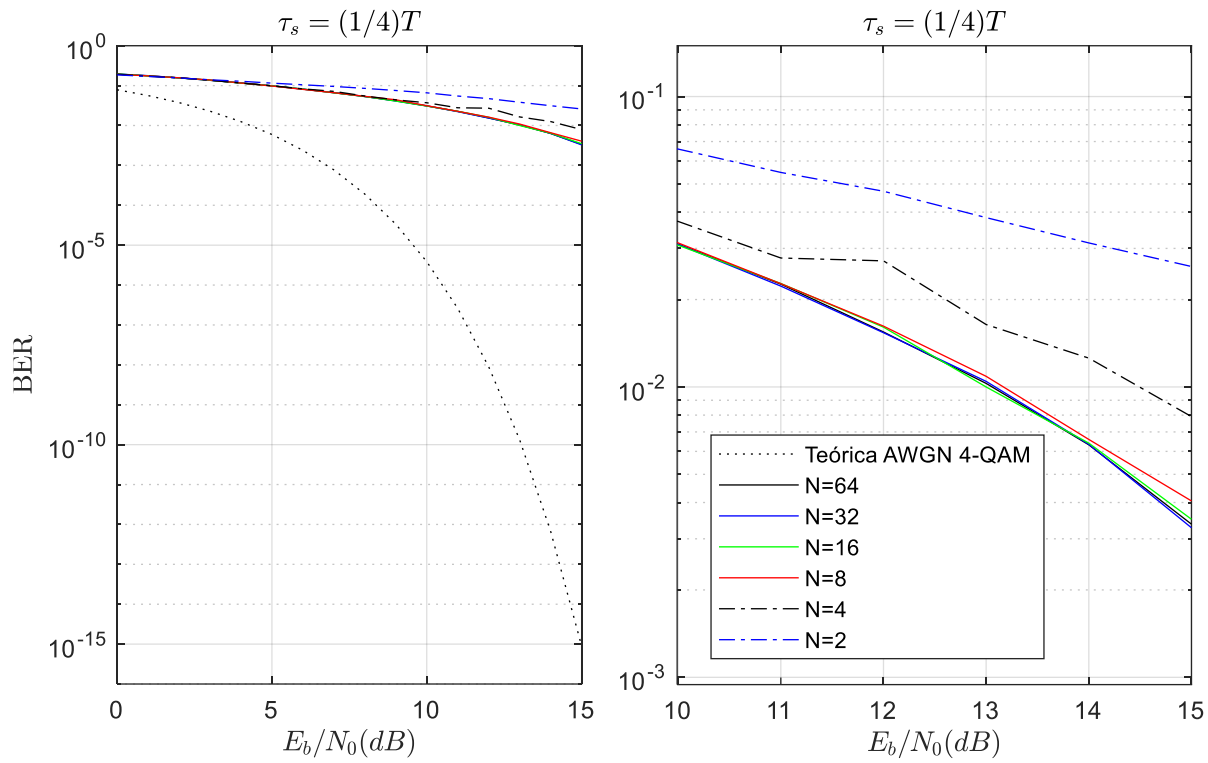


Figura 4.13. Curvas de desempeño al variar  $N$ , canal 1.

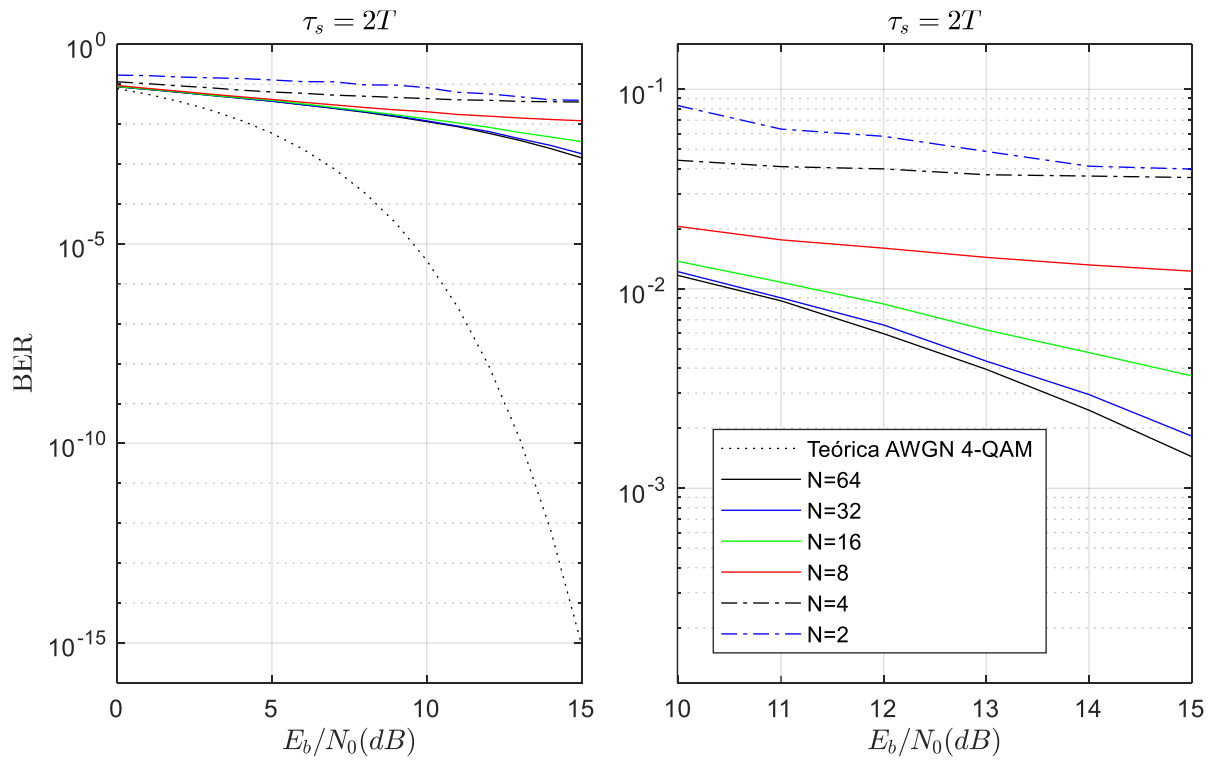


Figura 4.14. Curvas de desempeño al variar  $N$ , canal 2.

donde el ancho de banda de coherencia,  $B_c$ , está definido por las ecuaciones (2.3) y (2.4) de la sección 2.1. Evaluando los valores de retardo y atenuación de la Tabla 4 para los canales 1 y 2, en el ancho de banda de coherencia, y reemplazando éste en la ecuación (4.2), se obtiene:

$$N_{canal1} \geq 2, \quad (4.3)$$

$$N_{canal2} \geq 16. \quad (4.4)$$

El anterior criterio permite establecer un valor aceptable para  $N$  a partir del cual se obtiene el número mínimo de canales, de tal forma que cada canal perciba desvanecimiento aproximadamente plano. En relación con las curvas de desempeño de la Figura 4.13, se puede apreciar que el desempeño deja de cambiar significativamente a partir de valores de  $N$  entre 4 y 8, lo cual está por encima de lo estipulado por el criterio, a saber,  $N_{canal1} \geq 2$ . Respecto al canal 2 (ver Figura 4.14), se aprecia que las curvas de desempeño dejan de variar radicalmente a partir de valores de  $N$  entre 16 y 32, lo cual, está más cercano al valor teórico,  $N_{canal2} \geq 16$ . Lo anterior indica que el criterio establecido anteriormente tiene mayor precisión frente a canales con mayor grado de distorsión.

Además, se realiza una tabla comparativa (Tabla 5) donde se confronta el número de canales  $N$  vs  $E_b/N_0$  cuando se fija una BER objetivo de  $10^{-4}$  en 2 escenarios de retardo distintos y una ganancia de  $\alpha = 0.5$ . En ésta, se puede observar que la  $E_b/N_0$  necesaria para alcanzar la BER objetivo disminuye conforme se aumenta el número de canales, tanto para 4-QAM como para 16-QAM.

Tabla 5 Tabla comparativa de  $N$  vs  $E_b/N_0$  para una BER objetivo de  $10^{-4}$ .

BER = $10^{-4}$				
4 - QAM			16 - QAM	
	$\tau_s = 1/4 T$	$\tau_s = 2T$	$\tau_s = 1/4 T$	$\tau_s = 2T$
$N$	$E_b/N_0$	$E_b/N_0$	$E_b/N_0$	$E_b/N_0$
2	14.86	14.5	$\infty$	$\infty$
4	13.77	17.6	16.4	$\infty$
6	13.48	17.2	14.6	$\infty$
8	13.47	15.8	13.8	$\infty$
10	13.46	14.3	13.6	$\infty$
12	13.51	14.7	13.3	$\infty$
14	13.41	13.6	13.2	$\gg$
16	13.45	13.4	13.1	$\gg$
32	13.52	12.4	12.8	22
64	13.42	12.2	12.9	17.5

Lo anterior se da debido a que al aumentar el número de canales la señal percibe un desvanecimiento menos selectivo en frecuencia y por ende requiere una menor  $E_b/N_0$  para alcanzar la tasa de error de bit específica. Para el caso donde los símbolos pertenecen a una constelación de 16-QAM y retardo de  $2T$ , la  $E_b/N_0$  tiende a ser infinita, ya que las curvas de desempeño no descienden del valor de  $BER = 10^{-3}$ , y por ende no alcanzan la BER objetivo (ver la Figura 4.15).

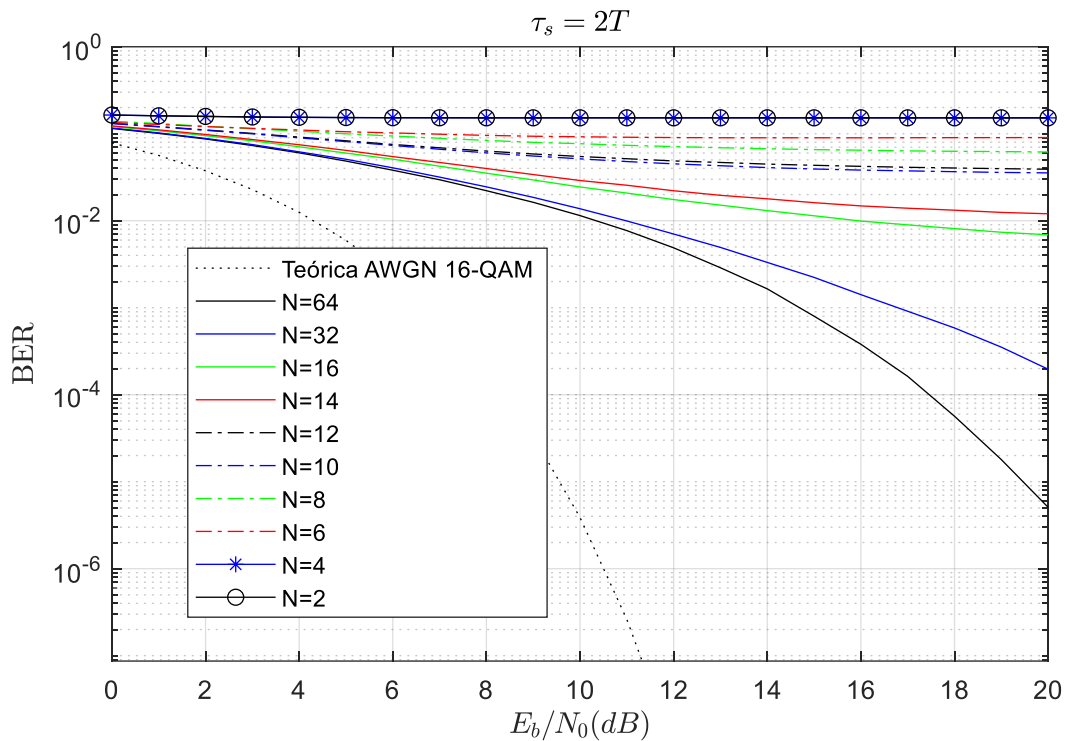


Figura 4.15 Curvas de desempeño distintos  $N$  y orden de modulación 16-QAM.

#### 4.1.6. Sistema FMT vs canal de portadora única.

En este apartado se hace una comparación del desempeño del sistema FMT usando estimación de canal vs una transmisión de portadora única. Los parámetros del sistema y del canal se presentan en la Tabla 6. La simulación se hace variando el número de canales, tal como en la subsección anterior. El espectro de la señal y la función de transferencia se pueden apreciar en la Figura 4.16.

Tabla 6. Parámetros generales del sistema.

Sistema FMT		
Nombre	Parámetro	Valor
Orden de modulación QAM	$M$	4
Factor de sobremuestreo	$L$	4
Periodo de símbolo	$T$	1
Factor de roll-off	$\rho$	0.5
Número de canales	$N$	32
Frecuencia nominal	$f_c$	$1/(2\tau_s)$
Canal dispersivo AWGN		
Retardo [ <i>muestras</i> ]	$\tau_n$	3
Retardo [ <i>s</i> ]	$\tau_s$	$(3/4)T$
Atenuación	$\alpha$	0.75

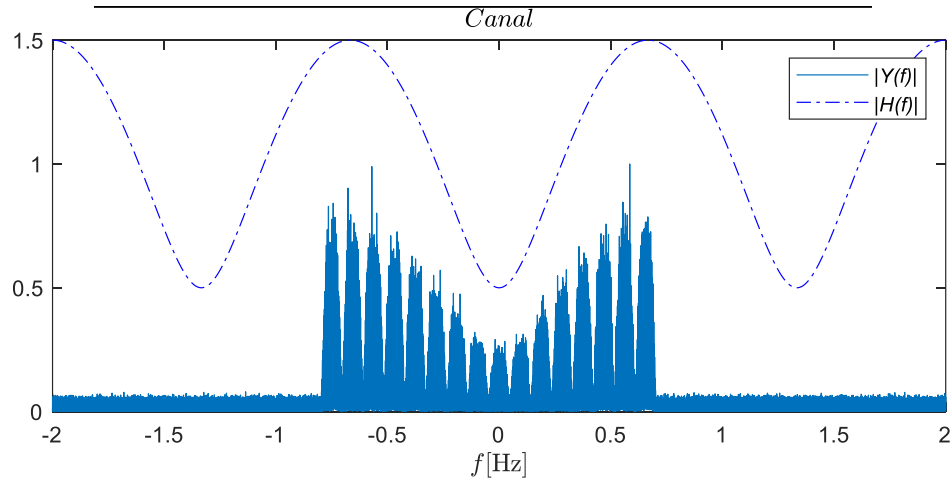


Figura 4.16. Espectro del canal.

Las curvas de desempeño de la Figura 4.17 evidencian una ganancia del sistema de aproximadamente 3 dB para una BER objetivo de  $10^{-4}$ , respecto a un sistema de portadora única, cuando se transmite usando 8 canales. La ganancia es ligeramente mayor para 16, 32 y 64 canales.

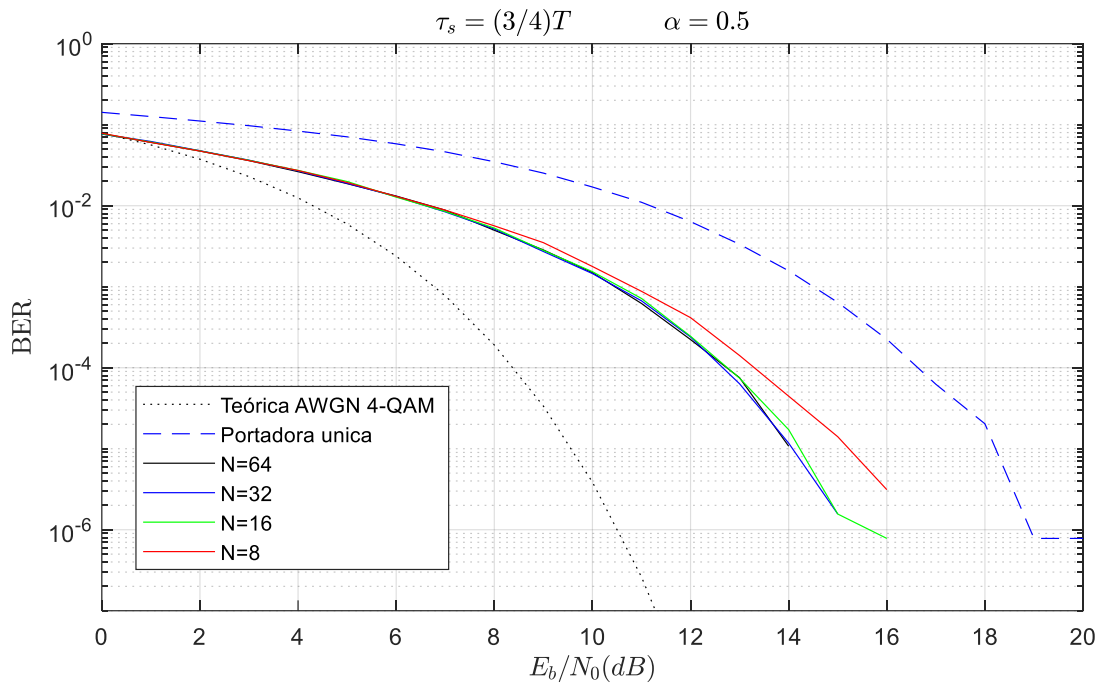


Figura 4.17. Curvas de desempeño para la simulación con 4QAM.

Las curvas de desempeño para la simulación con constelación 16QAM se muestran en la Figura 4.18. En ésta se aprecia una ganancia infinita en dB, ya que la BER para un canal con portadora única cuyos parámetros se presentan en la Tabla 6, no desciende más de  $10^{-1}$  respecto a las transmisiones con FMT.

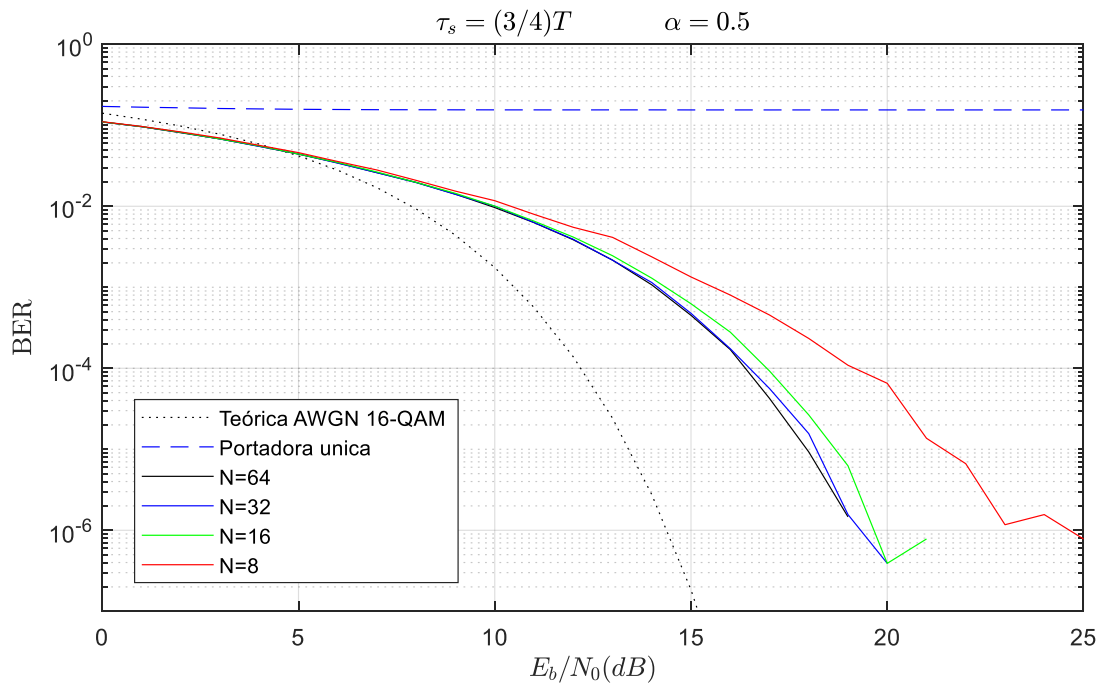


Figura 4.18. Curvas de desempeño para la simulación con 16QAM.

## 4.2. Conclusiones

Al analizar el desempeño, en cuanto a la tasa de error de bit (BER), de un sistema de comunicación que emplea la modulación FMT sobre un canal dispersivo Gaussiano, usando secuencias piloto para estimar el canal, se concluye que:

- En primer lugar, la hipótesis planteada en el proyecto de investigación es válida, puesto que, al transmitir información sobre un canal dispersivo Gaussiano que introduce ruido AWGN, mediante el uso de la técnica de transmisión FMT y partiendo del hecho de que no se tiene conocimiento perfecto del estado del canal por parte del receptor, éste es capaz de estimar los coeficientes complejos que causan un efecto de rotación y alteración de la escala de las constelaciones, mediante la técnica de estimación de canal por secuencias piloto dispuestas en bloque y el estimador de máxima verosimilitud, de tal forma que se compensa dicho efecto. Esta acción corrige en amplitud y fase las constelaciones de los símbolos recibidas, y por ende disminuye notablemente la BER.
- La longitud de la secuencia de símbolos piloto usada para estimar el canal afecta el desempeño de la curva de BER *vs*  $E_b/N_0$  en cuanto a la precisión de la misma, ya que, al aumentar la longitud de la secuencia piloto,  $L_p$ , los coeficientes se aproximan con mayor precisión a la función de transferencia del canal. En este sentido, para tener una precisión considerablemente aceptable de la curva de desempeño se propone usar valores de  $L_p$  en un rango de 30 a 60 símbolos piloto, de tal forma que no se altere las curvas de desempeño ni aumente drásticamente la complejidad computacional. Esto se debe a la reducción de la varianza del estimador y a su carácter insesgado, lo que genera una estimación más precisa de los coeficientes del canal y por ende un mejor desempeño de la curva BER *vs*  $E_b/N_0$ .
- Al implementar el sistema en el dominio discreto, y variar el factor de sobremuestreo  $L$ , se concluye que el valor mínimo de sobre muestreo  $L = 2$  garantiza un desempeño óptimo en las curvas de BER *vs*  $E_b/N_0$ , ya que, al aumentar dicho factor, no se observa una mejora sustancial del desempeño, mientras que se aumenta considerablemente la complejidad computacional.
- Al momento de implementar un sistema FMT sobre un canal dispersivo Gaussiano generado a partir de un fenómeno de multitrayecto, es posible que existan algunas combinaciones de ganancia y retardo que conduzcan a desempeños mejores a los obtenidos sobre un canal AWGN no dispersivo. Esto

se debe al hecho de que, en algunos casos, el espectro de la señal se ubica en la región de mayor ganancia del canal, lo que se puede interpretar como un efecto de interferencia constructiva.

- El desempeño del sistema, en cuanto a la BER, mejora al aumentar el factor de *roll-off* (que varía en un rango de 0 a 1) del filtro prototipo implementado. Esto debido a que la separación espectral entre portadoras adyacentes aumenta. Pero se debe tener en cuenta que la eficiencia espectral disminuye, ya que se tienen una mayor separación entre canales.
- El desempeño del sistema mejora conforme aumenta el número de subcanales implementados al usar FMT, esto debido a la relación existente entre el ancho de banda de coherencia del canal (condición necesaria para percibir desvanecimiento plano) y el número de subcanales  $N$ , tal como en la ecuación (2.2). De igual forma, a mayor número de subcanales, mayor cantidad de coeficientes estimados, y por ende conocimiento más fino del estado del canal (función de transferencia), lo cual se traduce en un mejor desempeño del sistema.
- El desempeño del sistema de FMT mejora sustancialmente respecto a un sistema de portadora única cuando se usa la estimación de canal mediante secuencias piloto y estimador de máxima verosimilitud.

### 4.3. Trabajos futuros

Con el objetivo de complementar la presente investigación se plantean 3 trabajos futuros:

- Realizar el análisis del desempeño de un sistema de comunicación que emplea la modulación multi-tono filtrado (FMT) sobre un canal dispersivo Gaussiano *variante en el tiempo*, utilizando secuencias piloto para la estimación del canal.
- Realizar el análisis del desempeño de un sistema de comunicación que emplea la modulación multi-tono filtrado (FMT) sobre un canal dispersivo Gaussiano *variante en el tiempo*, utilizando *estimación de canal semi-ciega*.
- Realizar el análisis del desempeño de un sistema de comunicación que emplea la modulación multi-tono filtrado (FMT) sobre un canal dispersivo Gaussiano *variante en el tiempo*, utilizando una técnica de estimación de canal con *espaciamiento espectral no uniforme entre portadoras adyacentes, en función de la selectividad de cada subcanal y asignación de potencia variable*.





## Bibliografía

- [1] Ikanos, "The Benefits of Discrete Multi-Tone ( DMT ) Modulation for VDSL Systems." Ikanos Communications, Inc, Fremont - California, pp. 1–18, 2008.
- [2] I. Kalet, "Multitone Modulation," in *Subband and Wavelet Transforms*, Haifa: Springer, 1996, pp. 391–412.
- [3] L. Tong, "Channel Modeling and Estimation," *Wiley Encycl. Telecommun.*, pp. 398–409, Apr. 2003, doi: 10.1002/0471219282.eot119.
- [4] J. J. Shynk, "Sufficient Statistics and Parameter Estimation," in *Probability, random variables, and random processes. Theory and Signal Processing Applications*, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 2013, pp. 519–595.
- [5] P. L. Meyer, "Estimación de los parámetros," in *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, 2nd ed., Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 1992, pp. 290–319.
- [6] M. Barkat, "Parameter Estimation," in *Signal detection and estimation*, 2nd ed., Norwood, Massachusetts: Artech House, Inc., 2012, pp. 345–398.
- [7] S. Senthilkumar and C. Geetha Priya, "A review of channel estimation and security techniques for CRNS," *Autom. Control Comput. Sci.*, vol. 50, no. 3, pp. 187–210, 2016, doi: 10.3103/S0146411616030068.
- [8] L. Pu, J. Liu, Y. Fang, W. Li, and Z. Wang, "Channel estimation in mobile wireless communication," in *2010 International Conference on Communications and Mobile Computing*, 2010, vol. 2, pp. 77–80, doi: 10.1109/CMC.2010.201.
- [9] D. Pandey and N. Dewangan, "Performance analysis of pilot assisted channel estimation in OFDM," in *2015 IEEE International Conference on Computer, Communication and Control (IC4)*, 2015, pp. 1–6, doi: 10.1109/IC4.2015.7375622.
- [10] O. O. Oyerinde and S. H. Mneney, "Review of channel estimation for wireless communication systems," *IETE Tech. Rev. (Institution Electron. Telecommun. Eng. India)*, vol. 29, no. 4, pp. 282–298, 2012, doi: 10.4103/0256-4602.101308.
- [11] C. Prieto del Amo, "Estimación de canal y desplazamiento de frecuencia en sistemas MIMO-

- OFDM con prefijo cíclico insuficiente,” Universidad Carlos III de Madrid, 2015.
- [12] A. Ahmed Mohammed, “OFDM Channel Estimation Enhancement using Null Subcarriers,” *Tikrit J. Eng. Sci.*, vol. 25, no. 1, pp. 12–17, 2018, doi: <http://dx.doi.org/10.25130/tjes.25.1.03>.
- [13] L. U. Khan, M. I. Khattak, N. Khan, and M. Shafi, “Low complexity MMSE estimator for OFDM systems over slow fading Rayleigh channels,” in *5th International Conference on Computing Communication and Networking Technologies, ICCCNT 2014*, 2014, pp. 11–14, doi: 10.1109/ICCCNT.2014.6963076.
- [14] R. Vallet and K. H. Taieb, “Fraction spaced Multi-Carrier modulation,” *Wirel. Pers. Commun.*, vol. 2, no. 1–2, pp. 97–103, 1995, doi: 10.1007/BF01099532.
- [15] H. Malepati, “Digital communications,” in *Digital Media Processing*, Elsevier, 2010, pp. 437–508.
- [16] M. Pischella and D. Le Ruyet, “Multi-carrier Modulations,” in *Digital Communications 2: Digital Modulations*, Wiley Blackwell, 2015, pp. 193–237.
- [17] I. Berenguer and I. Wassell, “FMT modulation: receiver filter bank definition for the derivation of an efficient implementation,” in *Proc. 7th International OFDM Workshop*, 2002.
- [18] P. Siohan and M. Renfors, “Orthogonal Communication Waveforms,” in *Orthogonal Waveforms and Filter Banks for Future Communication Systems*, Academic Press, 2017, pp. 129–156.
- [19] S. Chen and A. M. Wyglinski, “Digital communication fundamentals for cognitive radio,” in *Cognitive Radio Communications and Networks*, Woodhead Publishing Limited, 2010, pp. 41–83.
- [20] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication - MIT Course Material*. 2008.
- [21] K. Dostert, M. Giroto, L. Lampe, A. M. Tonello, and T. G. Swart, “Digital Transmission Techniques,” in *Power Line Communications: Principles, Standards and Applications from Multimedia to Smart Grid*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Ltd, 2016, pp. 261–385.
- [22] P. Silhavy and O. Krajs, “Half-overlap Subchannel Filtered MultiTone Modulation and Its Implementation,” in *Discrete Time Systems*, Dr. Mario., Czech Republic: INTECH, 2011, pp. 363–382.
- [23] E. Çatak and L. Durak-Ata, “Waveform Design Considerations for 5G Wireless Networks,” *Towar. 5G Wirel. Networks - A Phys. Layer Perspect.*, no. December 2016, pp. 27–48, 2016, doi: 10.5772/66050.
- [24] S. A. Molano López and A. Serna Herrera, “Análisis de desempeño de la técnica de transmisión multitono sobre un canal dispersivo gaussiano,” Universidad del Cauca, 2019.
- [25] R. S. Pressman, “Modelos del proceso,” in *Ingeniería del software un enfoque práctico*, 7th ed., Mexico, D.F: Mc Graw Hill, 2012, pp. 26–54.
- [26] I. Illana, *Métodos Monte Carlo*. Departamento de Física Teórica y el Cosmos Universidad de Granada, 2013.

## **Anexos**

Como anexo se incluye el código de simulación en formato digital desarrollado en Matlab, debidamente documentado.