Universidad del Cauca

Influencia de la Secuencia Periódica Pseudoaleatoria en el Desempeño de la Arquitectura de Conversión de Señales Moduladas en Banda Ancha (MWC)

Estudiante

Daniel Estivenson Dorado Lame

Directora

MSc. María Manuela Silva Zambrano

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Grupo GNTT

Popayán, Cauca

2022

Índice

1. Capítulo I: Contextualización **1**
1.1. Transmisión de información 1
1.2. Digitalización de las señales 3
1.2.1. Teorema de muestreo 3
1.2.2. Cuantificación 9
1.3. Muestreo comprimido 10
1.3.1. Escasez de la señal 12
1.3.2. Propiedad de Isometría Restringida (RIP) 12
1.3.3. Algoritmo de reconstrucción 14
1.4. Implementaciones de CS 15

2. Capítulo II: Conversor de Señales Moduladas en Banda Ancha **17**
2.1. Análisis general de MWC 17
2.2. OMP 22
2.2.1. Definición 22
2.2.2. Funcionamiento de OMP 23

3. Capítulo III: Implementación **31**
3.1. Metodología 31
3.1.1. Investigación 31
3.1.2. Contexto 32
3.1.3. Fundamentos Teóricos 32
3.2. Requerimientos y modelo del sistema 32
3.3. Implementación 35
3.4. Plan de Pruebas 40
3.4.1. Cantidad de Flops 40
3.4.2. Frecuencia de mezclador 41
3.4.3. Parámetros de simulación 42
3.4.4. Escenarios de Simulación 44

4. Capítulo IV: Resultados **47**
4.1. Análisis de resultados 47
4.1.1. Escenario 1 47
4.1.2. Escenario 2 54

5. Capitulo V: Conclusiones y Trabajos Futuros **57**
5.1. Conclusiones 57
5.2. Trabajos Futuros 58

Índice de figuras

1. Muestreo de una señal continua. 6
2. Muestreo a distintos valores de f_s. 7
3. Señal recuperada en el tiempo. 8
4. Esquema de un ADC. 10
5. Representación visual del sistema indeterminado. 11
6. Rama única de MWC. 17
7. Espectro de magnitud de $X_{bp}(f)$. 18
8. Espectro de magnitud de $X_{bb}(f)$. 18
9. Replicas espectrales en la señal $R_i(f)$. 20
10. Espectro de $U_i(f)$. 20
11. Señal mezclada con una secuencia periódica de $T_p = \frac{1}{\omega_x}$. 21
12. MWC con m ramas. 21
13. Comparación entre dos ramas de MWC. 22
14. Ilustración de los átomos y el vector $\mathbf{y}$. 26
15. Ilustración de la base seleccionada y el vector de residuo. . . . 26
16. Diagrama de bloques de metodología. 31
17. Diagrama de flujo del sistema implementado. 35
18. Conformación de la señal $x(t)$. 36
19. Señal $x(t)$ en el dominio de la frecuencia. 36
20. Comparación de la señal original y las señales mezcladas. . . . 37
21. Estimación de la ocupación espectral. 38
22. Resultados de simulación para $1 \leq m \leq 120$. 39
23. Efecto de la disminución de M. 41
24. Relación entre f_p y M. 44
25. Resultados de precisión del sistema para escenario 1 - caso 1. . 48
26. Particiones del espectro de $X(f)$ según el valor de f_p. 50
27. Comparación de espectros entre caso 1 y caso 2. 51
28. Resultados de precisión del sistema para escenario 1 - caso 2. . 52
29. Particiones del espectro de $X(f)$ según el valor de f_p para canales consecutivos. 53
30. Resultados de precisión del sistema en el escenario 2. 54

Índice de tablas

1. Precisión media para las tres configuraciones de M. 49
2. Precisión media para los primeros 20 MHz. 53
3. Precisión de la estimación en 5 configuraciones. 55

Lista de acrónimos

ADC Conversor Analógico Digital, *Analog-Digital Converter.*

AIC Conversor Analógico-Información, *Analog-Information Converter.*

BP *Basis Pursuit.*

CS Muestreo Comprimido, *Compressed Sensing.*

FDM Multiplexación por División de Frecuencias, *Frequency Division Multiplexing.*

MCS Muestreo por Multi-Conjunto, *MultiCoset Sampling.*

MMP *Multichannel MP.*

MP *Matching Pursuit.*

MWC Conversor de Señales Moduladas en Banda Ancha, *Modulated Wideband Converter.*

OMP *Orthogonal Matching Pursuit.*

RIP Propiedad de Isometría Restringida, *Restricted Isometry Property.*

1. Capítulo I: Contextualización

1.1. Transmisión de información

Los fenómenos físicos del día a día, como la temperatura, se pueden caracterizar como una señal, siendo éstas de naturaleza analógica, debido a que son continuas tanto en el tiempo como en la amplitud. En los sistemas de naturaleza digital se hace necesaria la digitalización de las señales analógicas, implicando un procesamiento adicional cuyo costo depende de las características propias de la señal a digitalizar.

En el mundo de hoy, la digitalización de las señales analógicas cobra mayor relevancia debido a la prevalencia de los sistemas digitales. En la conversión analógica-digital se pierde parte de la información de la señal analógica; sin embargo, es posible trabajar con una representación aproximada de la señal original, donde ésta contenga la mayor parte de su información[17]. Lo anterior permite obtener una compatibilidad entre los sistemas digitales, en los cuales se almacena o procesa la información, y el mundo analógico, que está relacionado con las manifestaciones de fenómenos físicos.

En el ámbito de las telecomunicaciones, el objetivo de la manipulación de las señales es transmitir la información contenida en ellas, a través de un proceso preestablecido entre quien emite la señal que contiene la información (transmisor) y quien recibe dicha señal (receptor). Sin importar la naturaleza de dicha información (analógica o digital), la señal que se transmite y viaja por el medio de comunicación es analógica, por lo que, un receptor en los sistemas de telecomunicaciones digitales debe realizar el proceso de muestreo (discretizar en el tiempo) para recuperar la información transmitida[17]. Con la creciente demanda de volumen de información a transmitir, se usa un ancho de banda mayor y se tienen mayores exigencias para los sistemas.

Para hacer uso de estos anchos de banda y cumplir con las demandas, los sistemas deben emplear dispositivos de compatibilidad entre el mundo analógico y el mundo digital para poder procesar y transmitir dicha información. La forma en que se muestrean las señales requiere que se supere un valor mínimo de la frecuencia con la que se toman las muestras, debido a esto se deben superar limitaciones tecnológicas relacionadas con la creación física de una señal muestreadora de alta frecuencia. A medida que se incrementa la nece-

sidad de mayores tasas de transmisión, las señales usan un mayor ancho de banda para llevar toda esta información, por lo cual se necesitan frecuencias de muestreo más altas, al punto donde la tecnología actual no es capaz de alcanzar.

El muestreo de la señal de información hace parte del problema, pero no es el punto más crítico. El uso de mayor ancho de banda tiene repercusiones en la complejidad de los sistemas, ya que el espectro es un recurso limitado y por ello su asignación debe hacerse de la forma más eficiente posible. Con el fin de aprovechar mejor el espectro se deben tener en cuenta otros aspectos, como la asignación y liberación de recursos de manera dinámica, para lo cual se hace necesaria la visualización del espectro de manera veloz y eficaz.

Se puede pensar que estar un poco por debajo del límite impuesto por el teorema de muestreo[11][14], tasa Nyquist, para disminuir el costo de procesamiento, implica una pérdida de exactitud en la reconstrucción de la señal pero que ésta no es muy perjudicial, no obstante, del mismo teorema de muestreo de Nyquist-Shannon se derivan los efectos adversos asociados al no cumplimiento de las condiciones suficientes para reconstruir una señal digitalizada, el *aliasing*.

El *aliasing* es un efecto dañino para la señal producido por una frecuencia de muestreo insuficiente. Para analizar este efecto es preciso pensar en términos de la frecuencia, puesto que las réplicas del espectro de la señal se traslapan, modificando la forma del mismo y distorsionando la información transmitida. Este tipo de distorsiones son llamadas *distorsiones no lineales* debido a su comportamiento no uniforme en todo el espectro de la señal muestreada y son las distorsiones más difíciles de revertir.

Para trabajar por debajo de la tasa de Nyquist, a pesar de las dificultades asociadas a esto, se ha desarrollado una técnica de procesamiento de señales muy importante actualmente llamada Muestreo Comprimido (CS, *Compressed Sensing*)[3][5]. CS es una técnica de procesamiento de señales para adquirir y reconstruir señales de manera eficiente a través de la búsqueda de posibles soluciones a sistemas lineales indeterminados. Esto permite la búsqueda de la reconstrucción de una señal usando menos muestras que las que inicialmente se necesitarían muestreando a la tasa de Nyquist.

Es importante hacer uso de CS, ya que plantea una nueva forma de trabajo respecto al muestreo de las señales, la cual es más eficiente con los recursos disponibles[3], sabiendo que éstos son limitados. Debido a su velocidad de procesamiento y respuesta, CS ha sido empleado para muchas aplicaciones donde es primordial el tiempo contra la exactitud de la reconstrucción de la señal[13][21][19].

Con el fin de entender el CS es necesario abordar primero el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon y las consecuencias que tiene el tomar muestras de una señal de tiempo continuo. Posteriormente se abordarán algunas generalidades del CS.

1.2. Digitalización de las señales

1.2.1. Teorema de muestreo

Para hablar de digitalización de señales, es necesario entender el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon. Formulado por Harry Nyquist en 1928[11] y demostrado formalmente por Claude E. Shannon en 1949[14], este teorema trata sobre las condiciones necesarias para muestrear una señal garantizando que dicho muestreo sea un proceso reversible.

Las condiciones para que la información de la señal analógica pueda ser representada a partir de sus muestras son las siguientes:

- La señal analógica debe ser limitada en banda, esto quiere decir que no puede tener componentes de frecuencia con valores superiores a un ω dado.

- Las muestras de esta señal limitada en banda deben haberse tomado como mínimo al doble de esta frecuencia ω, a esto se le conoce comúnmente como la *frecuencia Nyquist*. Matemáticamente se describe así:

$$f_s \geq 2 \times \omega, \tag{1}$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo y ω la frecuencia máxima de la señal a muestrear.

Si se cumplen estas condiciones, es posible recuperar la información comprendida entre muestras con total precisión. Como nota adicional se establece por consenso general la frecuencia de Nyquist como exactamente el doble de ω tal que: $F_{Nyq} = 2\omega$.

Para entender mejor esto, se plantea una señal $u(t)$ en banda base, limitada en banda a una frecuencia ω, la cual es muestreada empleando un tren de impulsos equiespaciados $s(t)$, con una periodicidad de $T_s = \frac{1}{2\omega} + \Delta t$. Para muestrear la señal, se sigue un proceso de multiplicación o mezcla entre la señal original $u(t)$ con la señal muestreadora $s(t)$. Matemáticamente se representa como

$$u_s(t) = u(t)s(t), \tag{2}$$

donde $u_s(t)$ es la señal muestreada.

Para visualizar este fenómeno en el dominio de la frecuencia se debe aplicar la transformada de Fourier, por lo que se tiene

$$U_s(f) = \mathcal{F}(u_s(t)s(t)) = U(f) * S(f), \tag{3}$$

donde el símbolo $*$ representa la función matemática de convolución, $U_s(f)$ es la transformada de Fourier de $u_s(t)$, f es la frecuencia en Hz y $\mathcal{F}\{\}$ es el operador de transformada de Fourier.

La transformada de Fourier de un tren de impulsos periódicos está dada de la siguiente manera

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s}\delta(f - \frac{n}{T_s}) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s), \tag{4}$$

donde $S(f)$ es la transformada de Fourier de $s(t)$, $\delta\{\}$ es la función delta de Dirac y f_s es la frecuencia de muestreo.

Al aplicar la ecuación 4 en la ecuación 3 y haciendo uso de algunas propiedades de la convolución y de la función delta de Dirac, la señal muestreada en el dominio de la frecuencia, $U_s(f)$, se puede definir matemáticamente de la siguiente forma

$$U_s(f) = U(f) * [f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)] = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f - nf_s). \tag{5}$$

Por tanto, de la ecuación 5 se deriva que el espectro de la señal muestreada por un tren de impulsos periódicos se constituye por la suma de infinitas réplicas espectrales de la señal original centradas en múltiplos enteros de f_s y se comprueba la limitación definida por Nyquist.

En la Figura 1a se ve una representación gráfica de la realización del muestreo de una señal sinusoidal $u(t) = \sin(20\pi t) + \sin(14\pi t)$ a una frecuencia de muestreo de $f_s = 200$ Hz y en la Figura 1b se ve una representación gráfica del espectro de magnitud de la señal muestreada.

Es evidente de la Figura 2a, la Figura 2b y la Figura 2c que si el proceso de muestreo se lleva acabo con una señal periódica cuya frecuencia sea inferior a 2ω, se produce una superposición de espectros, i.e., *aliasing*, y por tanto la reconstrucción de la señal original es imposible.

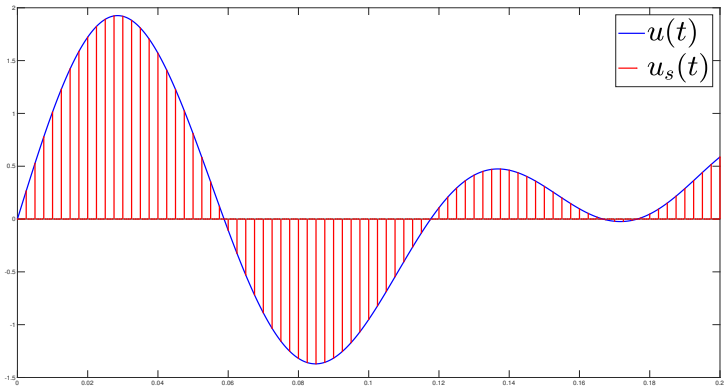
Revisando el espectro de magnitud después del muestreo realizado, la etapa de reconstrucción de la señal es bastante intuitiva. La forma de recuperar la información en una señal como se muestra en la Figura 1b es sencilla, ya que las replicas espectrales tienen una separación suficiente, lo cual permite aislar la replica ubicada en banda base, para esto se filtra la señal muestreada con un filtro de pasa bajas $H(f)$, tal que satisfaga el siguiente criterio

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_s}, |f| \leq \omega \\ 0, |f| > f_s - \omega \end{cases} . \tag{6}$$

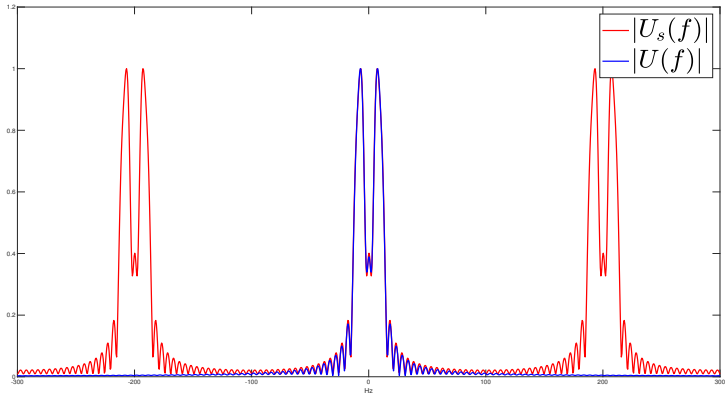
Una posible elección para cumplir estas condiciones es el filtro pasa bajas ideal, $H(f) = \frac{1}{f_s}\ \mathrm{rect}(\frac{f}{f_s})$. De esta forma, el producto entre $U_s(f)$ y $H(f)$ recupera el espectro original $U(f)$, es decir

$$U(f) = U_s(f)H(f). \tag{7}$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa para observar el comportamiento temporal, se tiene que

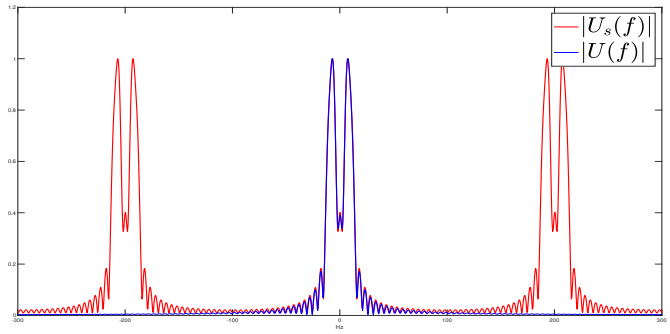


(a) Muestreo en el dominio del tiempo.

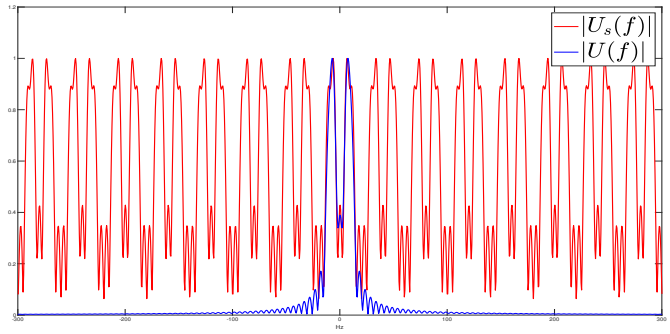


(b) Muestreo en el dominio de la frecuencia.

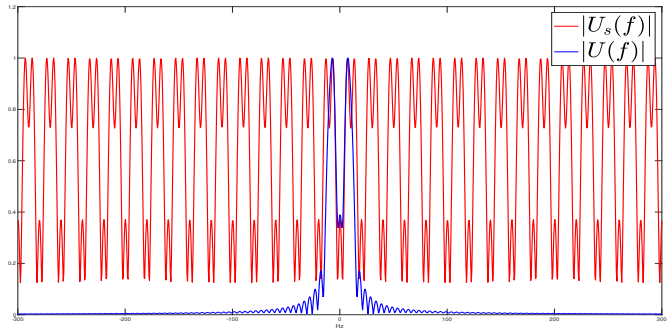
Figura 1: Muestreo de una señal continua.



(a) Señal muestreada a $f_s = 200$ Hz.



(b) Señal muestreada a $f_s = 40$ Hz.



(c) Señal muestreada a $f_s = 20$ Hz.

Figura 2: Muestreo a distintos valores de f_s.

$$
\begin{aligned}
u(t) &= u_s(t) * \mathcal{F}^{-1}(H(f)) = u_s(t) * \mathrm{sinc}(f_s t), \\
&= [\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_s)\delta(t - kT_s)] * \mathrm{sinc}(f_s t).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Aplicando nuevamente las propiedades de la convolución, se llega a la siguiente expresión

$$
u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_s)\,\mathrm{sinc}(\frac{t - kT_s}{T_s}). \tag{9}
$$

De la ecuación 9 se concluye que la reconstrucción de la señal original a partir de sus muestras consiste en una interpolación, i.e., superposición de funciones sinc desplazadas kT_s unidades de tiempo, con una amplitud igual al valor de la muestra en dicho instante y un ancho lobular igual al periodo de muestreo. En la Figura 3 se hace una representación gráfica de esta sumatoria, siendo la línea de color negro el resultado de la suma total de cada una de las líneas punteadas, las cuales representan una función sinc desplazada en el tiempo.

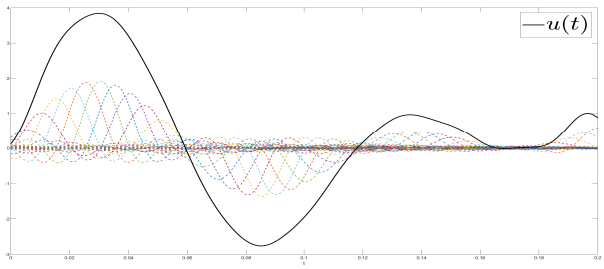


Figura 3: Señal recuperada en el tiempo.

Con lo anteriormente planteado se tiene una base matemática para hacer una representación discreta de señales analógicas limitadas en banda. Se inicia con una etapa de muestreo donde la señal de entrada $x(t)$ es continua tanto en el tiempo como en amplitud, se toman muestras de la misma cada cierto tiempo ($T_s \leq \frac{1}{F_{Nyq}}$), dando como resultado una señal discreta en el tiempo pero continua en amplitud $x[n]$, es por ello que para digitalizar una señal

analógica se debe realizar adicionalmente el proceso de cuantificación de estas muestras.

1.2.2. Cuantificación

La cuantificación se puede realizar bajo distintos métodos, pero su funcionamiento general consiste en hacer uso de un criterio de decisión, el cual permite determinar el valor que deben tomar las muestras dentro de un conjunto de valores discretos de amplitud preestablecidos y conocidos como niveles de cuantificación. En consecuencia, en la salida de la etapa de cuantificación se tienen unas muestras discretas tanto en el tiempo como en la amplitud, $\hat{x}[n]$[17].

Debido a la aproximación de valores continuos de amplitud a sus contrapartes discretas, existe una pérdida de información en la señal. No es posible evitar esta pérdida de información, por lo que se asume un grado de error llamado *Error de Cuantificación* (ϵ), el cual se describe como la diferencia entre el valor real de la muestra y el valor al que es aproximado en la etapa de cuantificación[17].

$$\epsilon = x[n] - \hat{x}[n]. \tag{10}$$

De tal modo que existe una relación inversamente proporcional entre la cantidad de niveles de cuantificación del sistema y el error de cuantificación ϵ que éste produce.

Finalmente, para los sistemas digitales se necesita codificar estos valores para preservar su información en una serie de *códigos* que pueden ser almacenados, transferidos, duplicados o tratados más fácilmente que las muestras originales o la señal original, a esta etapa se le denomina *codificación de fuente*. Los elementos que realizan todo este proceso se denominan Conversores Analógicos-Digitales (ADC, *Analog-Digital Converter*)[17]. En la Figura 4 se observa el esquema general de un ADC.

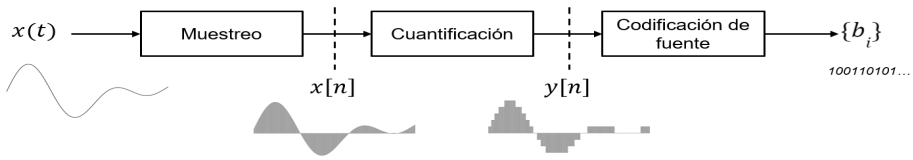


Figura 4: Esquema de un ADC.

A la salida de un ADC se obtienen secuencias binarias que representan de manera bastante aproximada toda la información de la señal analógica original. Estos valores pueden ser usados para reconstruir una versión aproximada de la señal original, aplicando los procesos inversos, esto quiere decir, decodificar la señal del código generado y reconstruir la señal con las muestras obtenidas de esta decodificación. Tradicionalmente esto se ha realizado por medio de un proceso llamado interpolación de muestras[14][17] descrito en la ecuación 9.

1.3. Muestreo comprimido

Hasta el momento se ha hablado de las consideraciones que se deben tener en cuenta en la digitalización de señales; sin embargo, en el caso particular del muestreo, resulta interesante profundizar un poco en el límite necesario para poder reconstruir una señal con un grado de precisión muy alto. Pensando en señales limitadas en banda a una frecuencia ω relativamente baja, la tecnología actual no sufre en lo absoluto para cumplir con el requisito de su frecuencia de muestreo, f_s (en la práctica f_s es mucho mayor que F_{Nyq}). Pero a medida que el valor de ω aumenta, los componentes actuales comienzan a verse limitados, por lo cual no es posible muestrear de acuerdo al paradigma tradicional.

De las limitaciones actuales nace CS, el cual, como ya se ha mencionado, es una técnica de procesamiento de señales enfocada en la eficiencia de la adquisición de las señales.

Las bases matemáticas que fundamentan esta técnica están comprendidas en soluciones de norma L^1, las cuales han sido usadas históricamente en muchos otros campos de la ciencia[5]. El conocimiento previo de la señal en esta técnica es bastante útil ya que con éste, la señal puede ser reconstruida con muchas menos muestras que las requeridas por el teorema de muestreo de

Nyquist-Shannon[5][3], esta idea es la base de CS.

Una característica importante de CS es la solución de un sistema de ecuaciones indeterminado y, por lo tanto, con infinitas soluciones. El vector de muestras se puede descomponer en una matriz de muestreo y el vector de la señal original. En el caso de este documento, se sabe que la señal original no se encuentra en un *dominio escaso*[1], por lo que es necesario representar dicha señal en un dominio donde sí lo sea.

Por tanto, el sistema a resolver es el siguiente

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}(\Phi\mathbf{s}) = \Theta\mathbf{s}, \tag{11}$$

donde, $\mathbf{y}$ es el vector de muestras;
$\mathbf{C}$ es la matriz de muestreo;
$\mathbf{x}$ es la señal original;
Φ es la matriz de transformación de dominio;
$\mathbf{s}$ es la señal en el domino donde es escasa;
Θ es la matriz resultante del producto entre las matrices de muestreo y dominio de transformación.

Una representación visual de la ecuación 11 se muestra en la Figura 5.

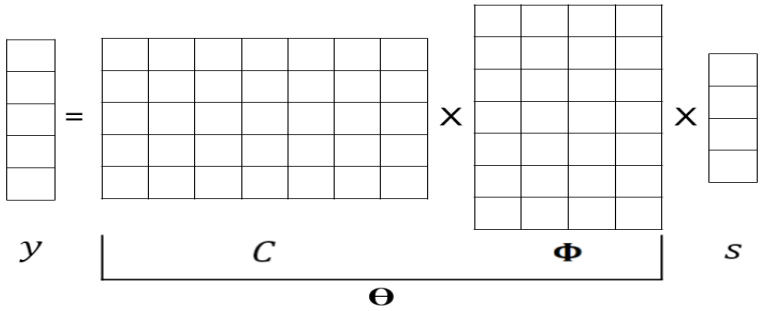


Figura 5: Representación visual del sistema indeterminado.

La teoría sobre CS también pone restricciones sobre el tipo de señal y cómo ésta puede ser recuperada[3][5], a nivel general estas condiciones son:

[1]Un dominio escaso es aquel donde una señal puede ser dicha como escasa. El término *escasez* se profundizará más adelante

- La señal debe ser escasa.
- La matriz de muestreo debe cumplir con la Propiedad de Isometría Restringida (RIP, *Restricted Isometry Property*).
- El algoritmo de reconstrucción no puede ser lineal.

1.3.1. Escasez de la señal

La primera restricción impuesta por CS es la necesidad de que la señal sea escasa. El concepto de escasez hace referencia a un valor relativamente bajo de componentes distintas de cero o superiores a un cierto umbral en un vector de valores dado[3]. En este sentido, las señales usadas para las comunicaciones en el dominio del tiempo no se pueden definir como escasas, debido a que oscilan entre muchos valores, lo cual es necesario para poder representar la información[17]. Es importante notar que algunas transformaciones lineales permiten modificar la forma en que se representa la información sin que esto implique una pérdida de la misma, en otras palabras, son procesos reversibles.

Sabiendo que las señales pueden ser transformadas y representadas en distintos dominios y éstas siguen manteniendo la misma información, por ejemplo, del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, trabajar con una señal en el dominio de la frecuencia hará que su representación tienda a ser escasa, ya que concentra toda su energía en un rango determinado de frecuencias, mientras que el resto de componentes se mantienen iguales a cero o con valores muy pequeños de amplitud; con lo cual se abre una forma de aplicar CS al objetivo del trabajo de grado.

Formalmente se tiene la notación $K-sparse$[3][5], donde K representa todos los componentes diferentes de cero, o mayores a un umbral determinado, que se encuentran presentes en una señal. Esto es importante para determinar la cantidad de muestras necesarias en CS y así tener una alta probabilidad de dar con la solución más escasa. Esto se discute con mayor profundidad una vez se introduzca el concepto de RIP.

1.3.2. Propiedad de Isometría Restringida (RIP)

Las matrices de muestreo son fundamentales en CS y es por ello que deben ser usadas solo las adecuadas para esta técnica. Es por ello que ha sido

demostrada la RIP[3], la cual es una condición suficiente para que una matriz sea definida como apropiada para muestrear señales en CS. En álgebra lineal, la RIP caracteriza matrices que son aproximadamente orto-normales, por lo menos cuando se operan con vectores escasos. También se ha usado para probar múltiples teoremas en el campo de CS[5][9][10].

Para construir matrices de muestreo en CS que cumplan la RIP se debe seguir una regla básica, la matriz de muestreo y la matriz de transformación del dominio escaso deben tener una alta incoherencia[2]. De esta condición dada por la RIP se deriva que entre mayor sea la incoherencia entre las matrices, menor será la cantidad de muestras necesarias para reconstruir la señal.

No se conocen matrices grandes que cumplan la RIP, ya que probar estas matrices es un problema $NP - Hard$[3], así como difícil de aproximar, por lo que se aconseja que las matrices de muestreo sean matrices aleatorias, ya que éstas satisfacen la RIP[9][10].

Se deben evitar matrices de muestreo como partes de la matriz de transformación de dominio o secuencias determinísticas. Esto es importante tenerlo en cuenta ya que al realizar una selección de este estilo, la incoherencia disminuiría drásticamente para Θ y la RIP no se cumpliría, dando así un sistema ineficaz.

Dado que la RIP da la condición suficiente para hacer uso de una matriz de muestreo u otra, la cantidad de muestras necesarias para reconstruir con alta probabilidad en CS está dada en términos de la RIP, siendo así

$$p \approx \bigcirc(K \log(n/K)) \approx k_1 K \log(n/K), \tag{12}$$

donde,
p corresponde a las muestras totales requeridas en muestreo comprimido;
$\bigcirc$ corresponde al operador *orden de*, el cual se usa para aproximar el tamaño

[2]La incoherencia en este contexto se define como la nula similitud entre dos vectores, filas o columnas en una matriz.

[3]Un problema $NP - Hard$ en computación se describe como un problema cuyo tiempo y complejidad en encontrar una solución aumentan polinomialmente a medida que la cantidad de elementos iniciales aumenta.

de un valor determinado;
K corresponde a la cantidad de elementos distintos de cero en la señal;
n corresponde a la cantidad de muestras totales requeridas por el muestreo tradicional;
k_1 corresponde a un coeficiente dado por RIP que describe la calidad de las muestras y da el valor exacto de muestras necesarias para reconstruir la señal.

En la práctica, se asume que entre mayor sea la incoherencia entre la matriz de transformación y la matriz de muestreo, mejor será la calidad de las muestras y se necesitará una cantidad menor de las mismas, por lo que la primer parte de la ecuación 12 es suficiente para determinar una cantidad de muestras a emplear en el proceso de muestreo.

1.3.3. Algoritmo de reconstrucción

La reconstrucción de la señal original requiere la solución de s en la ecuación 11 y, por ende, la solución directa de esta ecuación no lleva a una única solución, incluso con el conocimiento previo de la escasez de la señal, por lo que no se pueden aplicar algoritmos de reconstrucción lineal como la interpolación de muestras usado en el caso del muestreo tradicional.

Por lo anterior, y debido a la naturaleza del problema, se plantean soluciones tales como minimizar la norma L^2, lo cual equivale a minimizar la energía del sistema. Este tipo de solución es matemáticamente sencilla, pero su resultado es muy pobre en aplicaciones prácticas ya que la energía es distribuida entre todos los coeficientes de s y por tanto la solución no es realmente escasa pues la mayoría de las componentes son diferentes de cero o mayores al umbral determinado, aunque con valores relativamente pequeños[8].

Para asegurarse de tener una solución escasa se plantea la pseudo-norma L^0 la cual se describe matemáticamente como el soporte del vector donde se aplica y se escribe de la siguiente manera

$$||u||_0 = \text{supp}(u), \tag{13}$$

donde, supp corresponde al operador soporte.

El problema de usar este tipo de solución es el costo computacional necesario para encontrar un resultado válido, ya que se deben contar los elementos de cada una de las posibles combinaciones y calcular la similitud de la reconstrucción con esa posible solución contra la señal original. Este problema también se enmarca en un campo de la computación como un problema de tipo $NP - Hard$[8]. Por tanto, se debe buscar otra alternativa.

En un sentido técnico la norma L^1 es equivalente a la norma L^0, para ello se debe encontrar al candidato con la menor norma L^1. De esta forma se asegura encontrar al candidato cuya energía se concentre sobre unos pocos coeficientes y, por lo tanto, sea una solución realmente escasa[8].

Los métodos para solucionar la norma L^1 de manera eficiente ya han sido desarrollados[8], por lo que esta es la mejor opción para reconstruir una señal muestreada bajo CS. *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) o *Basis Pursuit* (BP) son dos de los algoritmos más populares para resolver este problema en CS.

1.4. Implementaciones de CS

Teniendo claras las condiciones matemáticas necesarias para que CS pueda trabajar sobre una señal, ahora es necesario detallar la forma en que esta teoría es llevada a entornos prácticos. En la literatura[9][6] se encuentran soluciones como:

- Conversor Analógico-Información (AIC, *Analog-Information Converter*), el cual se basa en un demodulador aleatorio para realizar su tarea.
- Muestreo por MultiConjunto (MCS, *MultiCoset Sampling*), el cual se basa en cambios instantáneos de ADC dentro de un grupo de los mismos.
- Conversor de Señales Moduladas en Banda Ancha (MWC, *Modulated Wideband Converter*), el cual es un tipo de arquitectura que se basa en la combinación de las dos soluciones anteriores, incorporando los elementos funcionales más apropiados, realistas y eficientes para su objetivo.

MWC es una arquitectura relativamente nueva, pues se define formalmente en el año 2010[9]. Gracias a las grandes ventajas que tiene una arquitectura

práctica de CS, ha recibido gran aceptación en el campo de las telecomunicaciones. En campos como la radio cognitiva, el radar o el sonar[13][21]; donde la reacción en tiempo real y la estimación precisa más que la reconstrucción exacta es más útil. MWC ha sido implementada para solucionar problemas inherentes a la naturaleza de este tipo de aplicaciones y ha permitido tener grandes avances en las mismas.

Si bien, es una arquitectura que puede brindar ventajas en muchos campos, se debe matizar que no es una solución universal, puesto que presenta una serie de limitaciones propias de su marco de trabajo. Entre las limitaciones más importantes se encuentra la sensibilidad al ruido presente en la señal original y la necesidad de las matrices de muestreo para poder reconstruir la señal original, lo cual es especialmente difícil, ya que estas matrices se generan de forma aleatoria y, por ende, se debe almacenar toda esta información para que luego sea transmitida al algoritmo de reconstrucción elegido[20]; sin embargo, los beneficios brindados superan a las limitaciones, por lo que es un tema en constante evolución y con mucho interés en general.

2. Capítulo II: Conversor de Señales Moduladas en Banda Ancha

2.1. Análisis general de MWC

Como se ha mencionado anteriormente, *MWC* es una arquitectura práctica para realizar muestreo por debajo de la tasa Nyquist, la cual es descrita en el documento [9] donde se detallan las motivaciones, el conocimiento y desarrollo previo antes de construir MWC. Uno de los objetivos de este trabajo de grado es evaluar una característica concreta de esta arquitectura, por lo cual es necesario conocerla a fondo antes de iniciar cualquier tipo de implementación por medio de simulación.

Para iniciar el análisis de MWC se toma el caso más simple donde solo existe una rama para el sistema, en la Figura 6 se aprecia el sistema a evaluar, donde se tiene una señal de entrada, $x(t)$, la cual pasa a ser mezclada con una secuencia periódica pseudo aleatoria, $p_i(t)$, dando como resultado una nueva señal, $r_i(t)$, la cual se filtra a pasabajas por un filtro, $h(t)$, obteniendo a la salida una señal filtrada, $u_i(t)$, para tomar muestras a una tasa, lT_s, y finalmente dando como resultado el vector de muestras, $y[n]$.

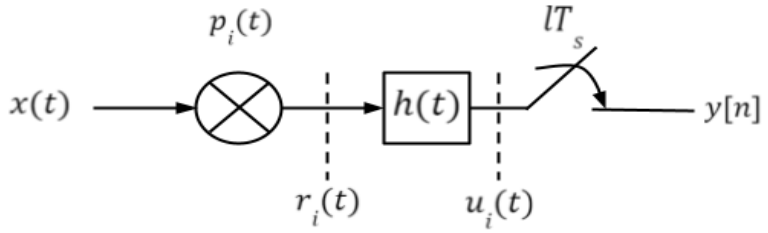


Figura 6: Rama única de MWC.

En principio, se admite una señal $x_{bp}(t)$, la cual es una señal con gran ancho de banda y en pasa banda, de tal forma que sobre ésta se puedan transportar múltiples canales de comunicación, como se muestra en la Figura 7.

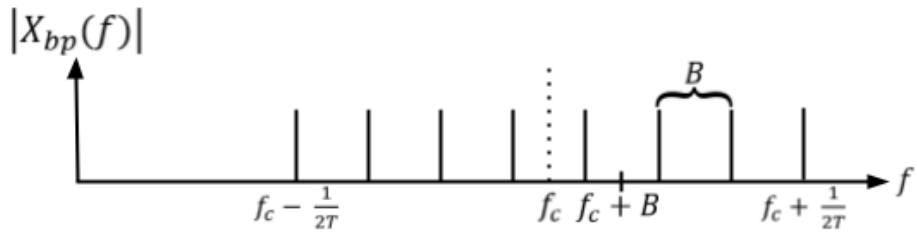


Figura 7: Espectro de magnitud de $X_{bp}(f)$.

Para realizar el proceso de muestreo sobre $x_{bp}(t)$, primero se debe realizar una traslación en frecuencia de la misma, con el fin de convertir a la señal pasa banda en una señal banda base, $x_{bb}(t)$, como se muestra en la Figura 8.

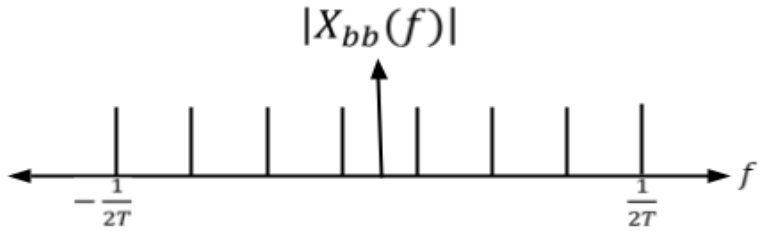


Figura 8: Espectro de magnitud de $X_{bb}(f)$.

Sin embargo, dado que la señal tiene un gran ancho de banda, muestrear a una frecuencia $f_s \geq \frac{1}{T}$ no es factible dadas las limitaciones tecnológicas. Una alternativa sería analizar de forma independiente cada uno de los canales que conforman esta señal, pero dado que no se conocen cuales de éstos están ocupados, el proceso demandaría mucho tiempo.

Si se asume que solo algunos de los canales de $X_{bb}(f)$ están ocupados, entonces se puede considerar a $X_{bb}(f)$ como una señal escasa y hacer uso de CS para determinar de forma eficiente los canales o bandas de frecuencia que están siendo utilizados. Ya que se ha establecido la escasez de la señal $x_{bb}(t)$ en el dominio de la frecuencia, se procede a evaluar su paso por el sistema.

Para simplificar la notación, se sustituye $x_{bb}(t)$ por $x(t)$. La señal $x(t)$ es mezclada con una señal periódica pseudoaleatoria, $p_i(t)$, la cual tiene un

periodo T_p. Debido a la propiedad de periodicidad de la señal $p_i(t)$, ésta se puede representar por medio de una serie de Fourier, tal que

$$p_i(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{il} e^{j\frac{2\pi}{T_p}lt}, \tag{14}$$

donde,

$$c_{il} = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_p}lt} dt. \tag{15}$$

Analizando ahora la salida de la etapa del mezclador, $r_i(t) = x(t)p_i(t)$, desde el dominio de la frecuencia, se obtiene que

$$\begin{aligned} R_i(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_i(t) e^{-j2\pi ft} dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{il} e^{j\frac{2\pi}{T_p}lt}) e^{-j2\pi ft} dt, \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{il} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-\frac{l}{T_p})t} dt, \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{il} X(f - lf_p), \end{aligned} \tag{16}$$

donde $f_p = \frac{1}{T_p}$.

Interpretando el resultado de la ecuación 16, se obtiene que el espectro $R_i(f)$ consiste en réplicas infinitas del espectro $X(f)$ espaciadas como mínimo a una distancia f_p entre ellas. Suponiendo un valor de f_p mayor a 2ω, se tendría un espectro similar al mostrado en la Figura 9.

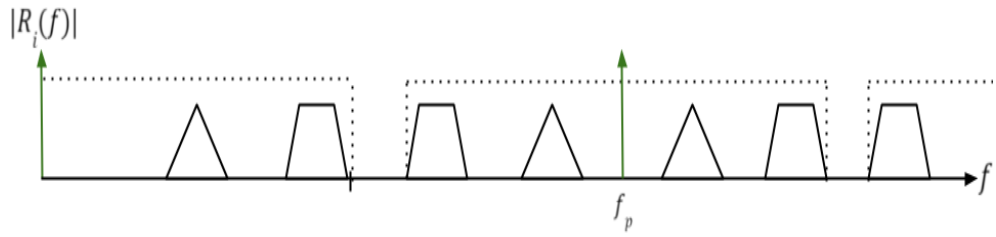


Figura 9: Replicas espectrales en la señal $R_i(f)$.

El paso siguiente es filtrar la señal $r_i(t)$, ya que como se muestra en la Figura 9 y en el resultado de la ecuación 16, el ancho de banda es ilimitado pero redundante, por lo que solo se necesita una réplica. En este caso se emplea un filtro pasa bajas a una frecuencia de corte igual a f_p para recuperar la energía que se encuentra centrada en el origen.

Entonces el espectro de la señal filtrada es el mostrado en la Figura 10.

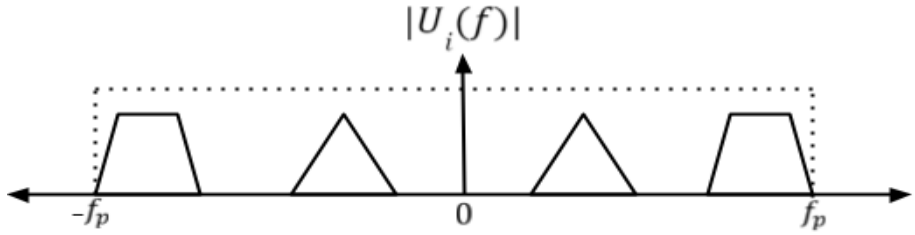


Figura 10: Espectro de $U_i(f)$.

La señal $u_i(t)$ tiene una frecuencia máxima de f_p, por lo que puede ser muestreada por un ADC a una tasa mínima de $2f_p$ para dar como resultado una señal $y[n]$ y continuar con el proceso de digitalización.

El análisis en la sección anterior demuestra el caso donde T_p debe ser lo suficientemente pequeño como para lograr una separación de las réplicas espectrales, tal que éstas sean claramente diferenciables y, por ende, recuperables. En caso de que T_p no pueda tomar un valor lo suficientemente bajo o, desde otra perspectiva, f_p no sea lo suficientemente grande como para distanciar las replicas espectrales, va a existir *aliasing*, tal como se puede deducir de la ecuación 16. Este efecto se puede apreciar en la Figura 11.
Las réplicas traslapadas no permiten la recuperación de la información original por los métodos tradicionales, pues los espectros se mezclan y la señal es

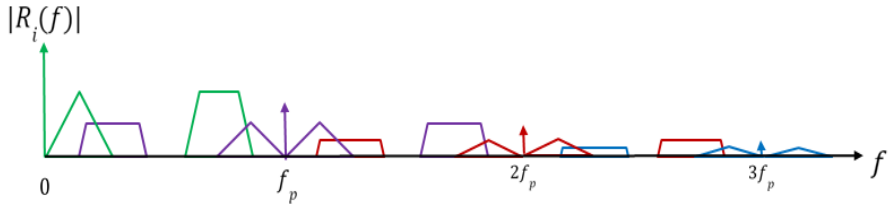


Figura 11: Señal mezclada con una secuencia periódica de $T_p = \frac{1}{\omega_x}$.

irrecuperable. Es por ello que MWC introduce el concepto de *procesamiento paralelo en m ramas distintas*. La idea detrás de este procesamiento es generar distintas secuencias moduladas por cada $p_i(t)$ lo cual lleva a un sistema de ecuaciones lineales indeterminado, el cual puede ser resuelto explotando las propiedades de la señal original[9]. En la Figura 12 se observa MWC con múltiples ramas.

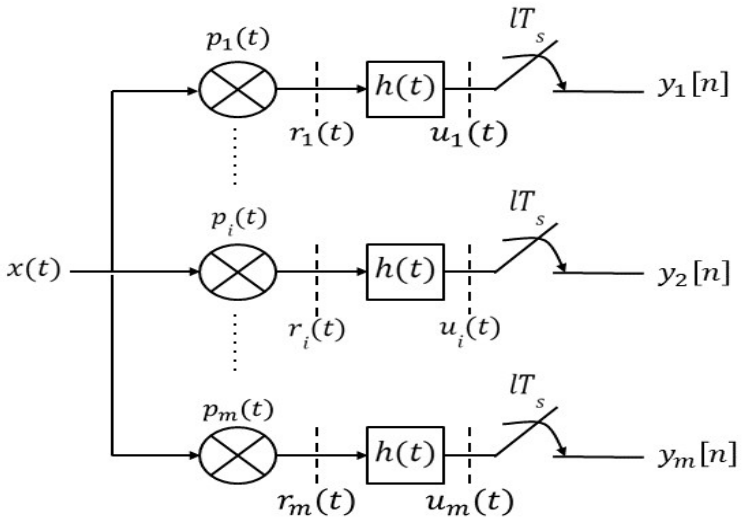


Figura 12: MWC con m ramas.

El sistema de ecuaciones lineales generado por las m ramas es semejante al modelo de sistema de ecuaciones indeterminado definido en la ecuación 11, por lo que el análisis matemático, así como su solución se puede hacer desde el punto de vista de CS, dado que tanto la señal original, como la matriz de muestras generada cumplen con las condiciones necesarias para CS.

Teniendo en claro el funcionamiento de una rama, se extrapola este conocimiento hacia múltiples ramas m, por lo que en este caso se plantea una frecuencia de mezclador f_p menor que 2ω. En dicho caso, se presentará *aliasing* en cada rama, como lo predice la ecuación 16 y su espectro será similar al de la Figura 11, con diferencias entre cada rama, pues como se observa en la ecuación 16, el valor de c_{il} varía dependiendo de la rama en que se encuentre, pues depende directamente de $p_i(t)$, la cual es una señal periódica pseudo-aleatoria. Por tanto, una comparación entre dos ramas cualquiera de MWC se ve como la Figura 13.

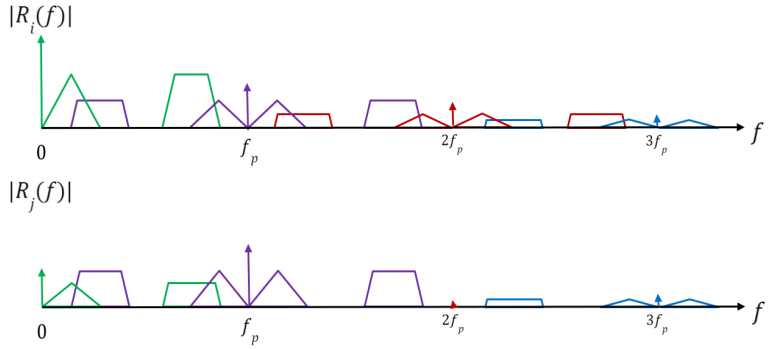


Figura 13: Comparación entre dos ramas de MWC.

A la salida de cada rama de MWC se obtiene una mezcla discretizada distinta de la señal original $x(t)$, de manera que si se desea volver a la señal original a partir de estas muestras, es necesario aplicar la teoría de CS y hacer uso de algún algoritmo de recuperación, en el caso de este documento, se emplea el algoritmo OMP mencionado brevemente en el capítulo 1.

2.2. OMP

2.2.1. Definición

OMP hace parte de la familia de algoritmos de aproximación escasa del tipo *Matching Pursuit* (MP), los cuales se dedican a encontrar la mejor pareja de arreglos de datos multidimensionales en el espacio de un diccionario A redundante. La idea básica de este tipo de algoritmos es representar aproximadamente una señal v de un espacio de Hilbert H como una suma ponderada

finita de funciones b_n, también llamadas átomos, los cuales son tomados de un diccionario A[12].

En particular, OMP es la variante de este tipo de algoritmos más famosa y su diferencia principal respecto a la idea básica es la actualización iterativa de cada coeficiente, mediante el cálculo de la proyección ortogonal de la señal sobre el subespacio ocupado por el conjunto de átomos seleccionados. Esta variante normalmente genera mejores resultados de recuperación de señales respecto a la idea base de MP, pero evidentemente requiere una mayor potencia computacional. Existen otras variantes de MP como *Multichannel* MP (MMP), la cual permite el procesamiento de señales con múltiples componentes, pero su complejidad de implementación, así como los recursos computacionales requeridos, aumentan significativamente respecto a OMP[7].

Aunque OMP muestra que requiere de mayor procesamiento que MP y no tiene un caso de uso tan especializado como MMP, también es cierto que ha mostrado tener estabilidad[4] y un buen rendimiento, garantizados bajo condiciones de RIP[15][2][4][18], por lo que lo hace el candidato perfecto para el ámbito de este trabajo, pues para la selección de un algoritmo de reconstrucción se priorizan tanto la estabilidad como el rendimiento. Es por ello que todas las pruebas, comparaciones y resultados de recuperación de señales de ahora en adelante se realizarán empleando OMP como algoritmo de recuperación de la señal.

2.2.2. Funcionamiento de OMP

Para entender mejor el funcionamiento de OMP se plantea el siguiente ejemplo[16]. Se tiene un vector $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

y una matriz $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}707 & 0{,}6 & -1 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

[4]Se entiende por estabilidad en este contexto como la consistencia de los datos entre iteraciones y valores recuperados.

se puede obtener el valor de $\mathbf{y}$ de tal forma que

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}707 & 0{,}6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}25 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Esto es similar al problema de muestreo que se ha presentado en este trabajo de grado, en concreto a la ecuación 11, donde $\mathbf{x}$ es el equivalente a $\mathbf{s}$, $\mathbf{A}$ es el equivalente a Θ y el vector resultante $\mathbf{y}$ como el vector $\mathbf{y}$.

Teniendo en cuenta el caso donde se conoce $\mathbf{y}$ y $\mathbf{A}$, es evidente que el proceso de recuperar $\mathbf{x}$ a partir de este vector y esta matriz no es una tarea sencilla, debido a que el sistema es indeterminado. Por tanto, OMP define una serie de pasos para encontrar la solución a este sistema y encontrar el valor de $\mathbf{x}$ o un valor lo más cercano posible.

Para iniciar con el análisis, se tiene que ver a la matriz $\mathbf{A}$ como una colección de vectores columna, tal que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}707 & 0{,}6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

donde

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -0{,}707 \\ 0{,}707 \end{bmatrix};\ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{bmatrix};\ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Estas columnas son los *átomos* mencionados en la sección anterior. Estos *átomos* deben estar normalizados, en caso de no estarlo, se deben normalizar y trabajar con dicha versión.

El siguiente paso, después de definir y normalizar los átomos, es calcular la contribución de cada uno sobre $\mathbf{y}$, esto se obtiene calculando el valor absoluto del producto punto entre cada átomo y $\mathbf{y}$, pero para lograr esto en una sola iteración, se plantea la siguiente ecuación

$$|\mathbf{w}_{ij}| = \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}707 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}34 \\ 1{,}17 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Se observa en la ecuación 22 que el átomo $\mathbf{b}_1$ tiene la mayor contribución sobre $\mathbf{y}$, por lo que en esta primera iteración, se selecciona $\mathbf{b}_1$ como la base de las siguientes iteraciones. Esta base se guarda en una nueva matriz $\mathbf{A}'$. Entonces se tiene

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}707 \\ 0{,}707\end{bmatrix}. \tag{23}$$

El coeficiente de contribución se guarda en un vector $\mathbf{x}_{rec}$ tal que

$$\mathbf{x}_{rec} = \begin{bmatrix}-1{,}34 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}. \tag{24}$$

Se sitúa el valor de $-1{,}34$ como primer elemento del vector, ya que su contribución proviene del primer átomo $\mathbf{b}_1$.

Con la base $\mathbf{A}'$ y el coeficiente de contribución $\mathbf{w}_1$ se debe encontrar la diferencia entre $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{A}'$ y $\mathbf{y}$, llamado **residuo**, esto es

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{A}' = \begin{bmatrix}1{,}65 \\ -0{,}25\end{bmatrix} - (-1{,}34) \cdot \begin{bmatrix}-0{,}707 \\ 0{,}707\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}7 \\ 0{,}7\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Para entender el proceso que sucede en esta primera iteración y las subsecuentes, se exhibe en la Figura 14 una representación gráfica de los vectores implicados en el proceso. Con el color azul se muestran los tres átomos y en color magenta el vector de muestras.

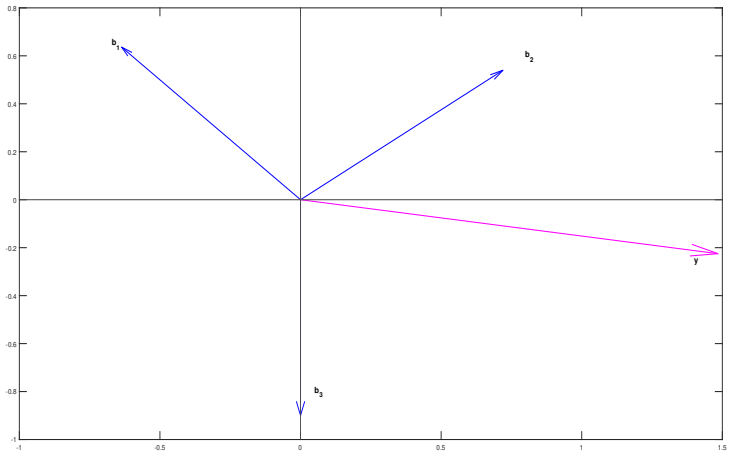


Figura 14: Ilustración de los átomos y el vector $\mathbf{y}$.

Según el cálculo hecho en la ecuación 22, se encontró que el átomo $\mathbf{b}_1$ tiene la mayor contribución, por lo que en la Figura 15 se pone de color verde el átomo seleccionado, así como su versión escalada por su coeficiente de contribución respecto a $\mathbf{y}$.

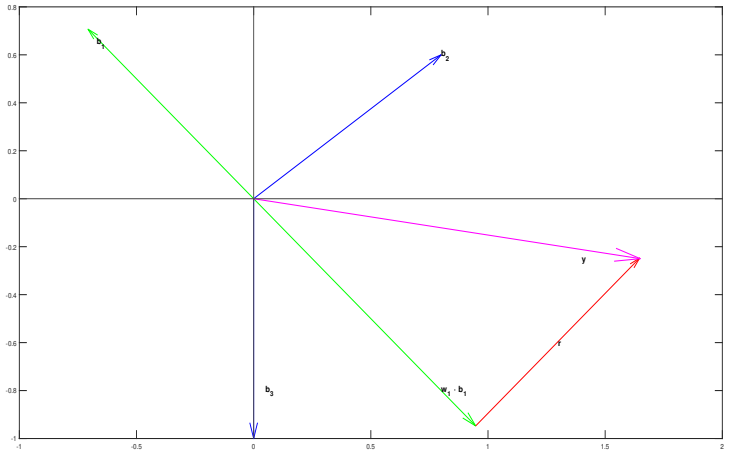


Figura 15: Ilustración de la base seleccionada y el vector de residuo.

Se procede a calcular la diferencia entre la versión escalada del átomo, respecto al vector objetivo $\mathbf{y}$, lo cual genera un nuevo vector perpendicular a la versión escalada del átomo. El vector de residuo mostrado en la Figura 15 representa el error existente entre la primer estimación y el vector objetivo, por lo que es necesario llevarlo al mínimo posible. Además, ya que este vector es perpendicular a una versión escalada del primer átomo, se sabe que no existe correlación alguna entre ellos, por lo que las contribuciones al vector de residuo solo pueden provenir de los demás átomos. Por lo tanto, es necesario seguir iterando sobre el resto de los átomos.

Continuando con el ejemplo, es necesario repetir el proceso anterior usando los valores actuales, por lo que se debe seleccionar cuál de las bases restantes $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_3$ tiene la mayor contribución sobre $\mathbf{r}$. Esto en un paso se describe de la siguiente manera

$$|\mathbf{w}_{ij}| = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3\end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{r} = \begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}6 \\ 0 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0{,}7 \\ 0{,}7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}98 \\ 0{,}7\end{bmatrix}. \tag{26}$$

De la ecuación 26 se obtiene que la base con mayor contribución sobre el vector $\mathbf{r}$ es $\mathbf{b}_2$. Por lo tanto, la colección de bases seleccionadas se actualiza en la matriz $\mathbf{A}'$, tal que

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}707 & 0{,}8 \\ 0{,}707 & 0{,}6\end{bmatrix}. \tag{27}$$

Ya que en este punto $\mathbf{A}'$ es el conjunto de bases seleccionadas y se debe calcular su contribución sobre $\mathbf{y}$, se debe solucionar un problema de mínimos cuadrados. Este problema puede ser formulado tal que

$$\mathbf{w}_1 \begin{bmatrix}-0{,}707 \\ 0{,}707\end{bmatrix} + \mathbf{w}_2 \begin{bmatrix}0{,}8 \\ 0{,}6\end{bmatrix} \approx \mathbf{y} = \begin{bmatrix}1{,}65 \\ -0{,}25\end{bmatrix}. \tag{28}$$

En términos matemáticos, lo anterior se puede formular como

$$\min||\mathbf{A}' \cdot \mathbf{W} - \mathbf{y}||_2. \tag{29}$$

En el caso particular de este ejemplo, se tiene que

$$\min \left\| \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}8 \\ 0{,}707 & 0{,}6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}25 \end{bmatrix} \right\|_2 . \tag{30}$$

Para solucionar la ecuación 30 es necesario hacerlo en términos de λ, tal que

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{'+} \cdot \mathbf{y}, \tag{31}$$

donde $\mathbf{A}^{'+}$ es la pseudo inversa de $\mathbf{A}'$ y matemáticamente descrita como

$$\mathbf{A}^{'+} = (\mathbf{A}^{'T} \cdot \mathbf{A}')^{-1} \cdot \mathbf{A}^{'T}. \tag{32}$$

En el caso de este ejemplo, el valor de la pseudo inversa de $\mathbf{A}^{'}$ es

$$\mathbf{A}^{'+} = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}8 \\ 0{,}707 & 0{,}6 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} -0{,}6062 & 0{,}8082 \\ 0{,}7143 & 0{,}7143 \end{bmatrix} . \tag{33}$$

Después de calcular $\mathbf{A}^{'+}$, se halla el valor de $\mathbf{W}$, i.e.,

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{'+} \cdot y = \begin{bmatrix} -0{,}6062 & 0{,}8082 \\ 0{,}7143 & 0{,}7143 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{34}$$

Una vez hallado el vector de coeficientes de contribución, se actualiza el vector $\mathbf{x}_{rec}$ con los nuevos valores, esto es

$$\mathbf{x}_{rec} = \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{35}$$

Los valores de W se posicionan como el primer y segundo elemento, ya que corresponden a la primer y segunda base seleccionadas. El próximo paso es hallar nuevamente el residuo con los valores actuales, por lo que se tiene que

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}8 \\ 0{,}707 & 0{,}6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{36}$$

Como se observa en la ecuación 36, el residuo es cero en todas las componentes, en este punto se debe parar el algoritmo para ahorrar recursos computacionales. En muchos casos, el residuo no llega a ser cero, por lo que algunos algoritmos introducen el *factor de escasez* K para determinar el número máximo de iteraciones antes de devolver un resultado.

Finalmente, el vector recuperado $\mathbf{x}_{rec}$ es igual al vector original $\mathbf{x}$, por tanto se puede decir que la reconstrucción fue exitosa.

3. Capítulo III: Implementación

3.1. Metodología

Presentados todos los conocimientos teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo de grado, es menester definir la metodología seguida para el desarrollo y cumplimiento de los objetivos de este trabajo de grado. En este caso, la metodología utilizada es una adaptación de la metodología de vista de tres ciclos para el diseño de la investigación científica, introducida por Alan Hevner en 2007[1], la cual se basa en un sistema de retroalimentación dividido en tres ciclos de trabajo para cada etapa o iteración de una investigación científica.

Figura 16: Diagrama de bloques de metodología.

Como se muestra en la Figura 16, los ciclos se conectan entre sí para poder aportar entre todos al desarrollo de la investigación que se está realizando. La retroalimentación existente entre los tres ciclos permite reevaluar y complementar la investigación a lo largo de su elaboración.

3.1.1. Investigación

El ciclo de investigación es el ciclo principal, en el cual se realizan los avances principales para el trabajo de investigación. Su respuesta alimenta los demás ciclos, con el fin de que éstos puedan procesar, evaluar y validar la nueva información; de forma que puedan retroalimentar al ciclo de investigación y así continuar con el bucle.

Este ciclo se encarga de crear nuevos prototipos y procesos necesarios para continuar con la investigación y cumplir con los objetivos propuestos. Así

mismo, se encarga de evaluar dichos prototipos y mejorarlos de acuerdo a los resultados obtenidos. Se alimenta del ciclo de contexto para modelar los prototipos de acuerdo al contexto dado, así como brindar y enfocarse en los resultados con mayor impacto en el contexto de aplicación. También se alimenta del ciclo de fundamentos teóricos pues es necesario tener un aprendizaje continuo, así como clarificar, entender y retener los conceptos principales en mente para desarrollar la investigación de manera más efectiva y eficaz.

3.1.2. Contexto

El ciclo de contexto es el encargado de aplicar los resultados obtenidos del ciclo de investigación en el domino de aplicación del trabajo de investigación. Su respuesta alimenta al ciclo de investigación para que éste de forma a los siguientes resultados de acuerdo a lo obtenido en el contexto.

Este ciclo se encarga de probar los resultados obtenidos en el ciclo de investigación, así como de recopilar la información suministrada por el contexto de aplicación (personas, sistemas, problemas y oportunidades). Su salida se denomina relevancia ya que procesa la información recopilada para determinar los componentes con mayor relevancia en el contexto y por ende, un indicativo de prioridad para el desarrollo de nuevos prototipos y evaluación de resultados en el ciclo de investigación.

3.1.3. Fundamentos Teóricos

El ciclo de fundamentos teóricos es el encargado de validar el nuevo conocimiento generado, compararlo con el existente y añadirlo a la base de conocimiento general del trabajo de investigación. Su respuesta alimenta al ciclo de investigación para que el conocimiento base se mantenga actualizado y vigente. Este ciclo se encarga de verificar la teoría, los métodos, la experiencia obtenida, los diseños de productos y los diseños de procesos. La salida de este ciclo se denomina rigor, ya que son las bases teóricas sobre las cuales se construye el nuevo conocimiento en el trabajo de investigación.

3.2. Requerimientos y modelo del sistema

Ya que uno de los objetivos de este trabajo de grado es simular la arquitectura MWC, es necesario identificar los parámetros que se pueden variar en ésta,

particularmente, los de interés para los objetivos planteados. Analizando la arquitectura MWC presentada en la Figura 12, se identifican una serie de parámetros descritos y evaluados según su relevancia a continuación.

- Frecuencia de Nyquist f_{Nyq}, es un parámetro fundamental del sistema ya que define el valor del ancho de banda de la señal $x(t)$; no obstante, este parámetro es diferente a la frecuencia de muestreo de la simulación f_s. Se debe mantener a f_{Nyq} en un único valor, debido a que es una referencia para crear señales con características similares en cada iteración del algoritmo, permitiendo de esta manera que se pueda realizar un comparación justa de los resultados obtenidos.

- Ancho de banda de canal B, es un parámetro que define el ancho de banda de cada señal mensaje transmitida sobre $x(t)$. Es necesario mantener un valor fijo para este parámetro, ya que al igual que f_{Nyq}, es una referencia para el diseño del sistema y la creación de señales similares cuyos resultados puedan ser comparables.

- Frecuencias de portadoras f_{ci}, es un vector que determina los canales que están ocupados en la señal de entra al sistema, $x(t)$[5]. Con este vector también es posible definir la separación existente entre canales, dado que se asume que B es un valor fijo.

- Bandas de guarda B_{guarda}, con el fin de mantener una implementación similar a los entornos del mundo real, se hace uso de bandas de guarda entre cada señal mensaje.

- Número de canales N_c, son todos los posibles canales que tiene la señal original $x(t)$, por lo tanto, es un parámetro que depende del ancho de banda de cada canal.

- Cantidad de canales ocupados N, es un valor que define cuantos canales de la señal $x(t)$ se encuentran ocupados al momento de la recepción por MWC. Este parámetro afecta directamente a la forma y escasez de $x(t)$, por lo que su variación es importante para determinar el rendimiento del sistema frente a distintos escenarios.

[5]La frecuencia central de $x(t)$ no es de interés para este trabajo de grado, por lo cual no se modifica.

- Frecuencia de mezclador f_p, es uno de los parámetros donde se presenta un mayor interés por identificar sus efectos sobre los resultados obtenidos ya que, como se evidencia en la Figura 9, su variación influye directamente sobre el *aliasing* que percibe la señal mezclada en cada rama.

- Frecuencia de corte del filtro $f_{\omega c}$, es el parámetro principal del filtro usado en cada una de las ramas de la arquitectura MWC. De acuerdo a la teoría, y por simplicidad del sistema, se opta por un valor fijo para $f_{\omega c}$ igual a f_p.

- *Flops* del mezclador M, ya que cada señal $p_i(t)$ es periódica y pseudoaleatoria es necesario poner ciertos límites y referencias sobre su comportamiento, por lo que M describe la cantidad máxima de posibles cambios en la señal periódica pseudoaleatoria en un único periodo T_p de la señal $p_i(t)$, a estos intervalos de cambio se los conoce como *Flops*. Más adelante en el documento se describe a profundidad el comportamiento de M.

- Cantidad de ramas m, es un parámetro muy importante en MWC, ya que define la cantidad de ramas con las que se desea trabajar. Para el objetivo de este trabajo de grado es importante definir una cantidad fija de ramas, con el fin de facilitar la comparación de los resultados. No obstante, es necesario resaltar la importancia de elegir una cantidad de ramas para la arquitectura de manera adecuada, por lo que, haciendo uso de un ciclo de fundamentos teóricos de la metodología propuesta, se encuentra que en la literatura[9][10][6] existen resultados experimentales de los efectos de la variación de ramas sobre la reconstrucción de la señal original. Tomando estos datos, se concluye que el mejor valor posible para aprovechar los recursos disponibles de acuerdo al caso de aplicación de este trabajo de grado es $m = 40$.

Por lo tanto, al final del análisis de parámetros se llega a la conclusión de que para este trabajo de grado los parámetros M y f_p son los únicos de interés. Serán variados para modificar el diseño de la arquitectura *MWC* y obtener resultados para cumplir con los objetivos del trabajo de grado.

3.3. Implementación

Ya que se tienen claras las bases teóricas, tanto del sistema como de los parámetros que afectan y son de interés para este trabajo de grado, se plantea la definición de un diagrama de flujo para sintetizar la implementación del sistema a usar en el entorno de simulación, éste se muestra en la Figura 17.

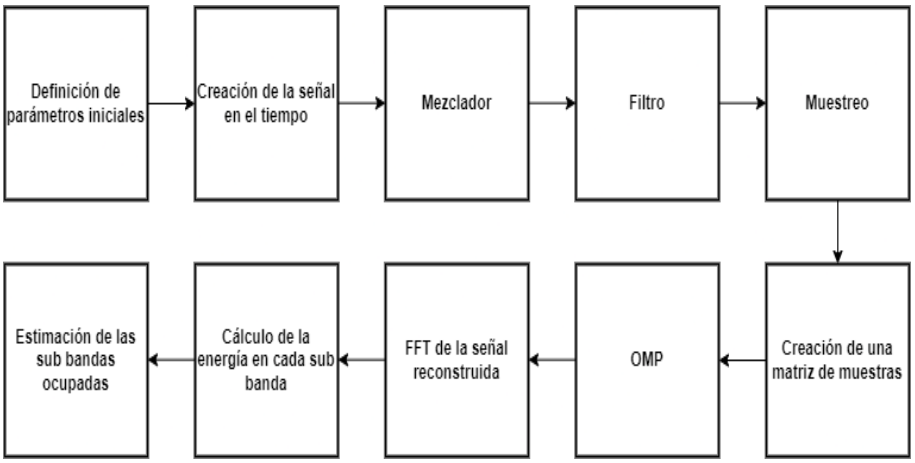


Figura 17: Diagrama de flujo del sistema implementado.

Como se observa en la Figura 17, el punto de partida del sistema es la definición de los parámetros iniciales, los cuales se han mencionado en la sección anterior, así como otros para el uso exclusivo de la simulación.

Una vez definidos estos parámetros, se crea la señal en el tiempo $x(t)$, la cual actúa como entrada del sistema. Esta señal se caracteriza por estar limitada en banda y ser el resultado de un proceso de multiplexación por división de frecuencias, como se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 18. Es importante aclarar que con el fin de simular señales que se encuentran en el rango de frecuencias del orden de los GHz es necesario manejar un factor de escala, es decir, el vector de tiempo se crea a partir de la duración de la simulación, esto es

$$t_{Max} = 2T_p. \tag{37}$$

A partir de t_{Max} y con el fin de garantizar que $x(t)$ tenga el mismo tamaño que las señales $p_i(t)$ se define el periodo de muestreo de la simulación como

$$t_s = \frac{T_p}{MR}, \tag{38}$$

donde, M es el número de valores que tiene un periodo de las señales $p_i(t)$ y R es el número de muestras usado para representar cada uno de éstos valores.

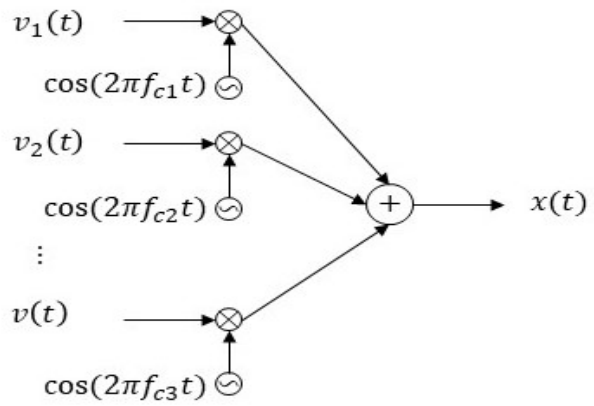


Figura 18: Conformación de la señal $x(t)$.

La representación gráfica de la señal $x(t)$ en el dominio de la frecuencia se observa en la Figura 19, en la cual se diferencian claramente los canales o bandas que la componen.

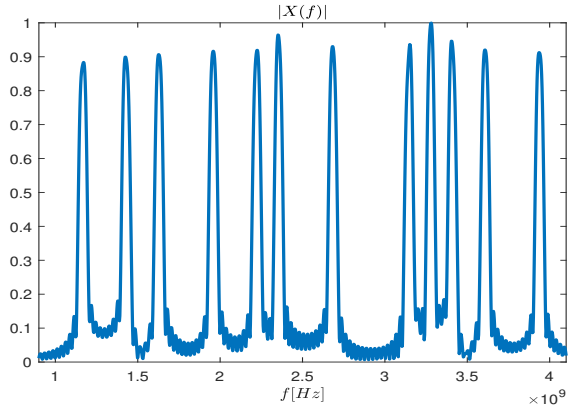


Figura 19: Señal $x(t)$ en el dominio de la frecuencia.

La señal $x(t)$ al entrar a la arquitectura MWC debe pasar por el mezclador. El mezclador es una matriz con dimensiones $m \times M$, donde las filas representan el número de ramas, $m = 40$, y las columnas la cantidad de *Flops* en un periodo de la señal. Finalmente se define una función de mezcla para que la señal itere sobre cada fila de la matriz del mezclador las veces que sean necesarias para cubrir su longitud total. En la Figura 20 se muestra un ejemplo de la señal $x(t)$ y dos de las señales resultantes del proceso de mezcla.

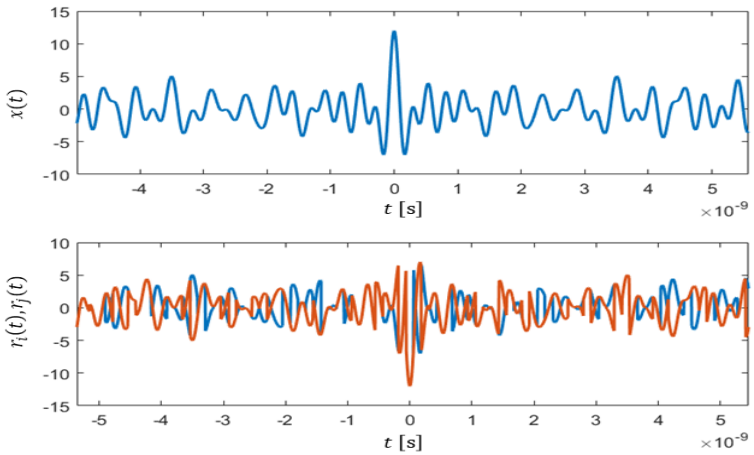


Figura 20: Comparación de la señal original y las señales mezcladas.

Ya que se han mezclado las m señales, se deben filtrar con el filtro pasa bajas, con el fin de obtener solamente una replica espectral. Como se ha mencionado anteriormente, el valor de la frecuencia de corte es igual al valor de la frecuencia de la señal del mezclador, debido a los resultados encontrados en el ciclo de fundamentos teóricos. Al finalizar este proceso se tienen m señales en banda base.

Las señales en banda base se encuentran limitadas a una frecuencia mucho menor que la señal original $x(t)$, por lo que sobre éstas se puede realizar el proceso de muestreo tradicional asumiendo que se trabaja a la frecuencia Nyquist, la cual es $f_{Nyq} = 2f_{\omega c}$.

Una vez terminado el muestreo, se guardan los resultados en una matriz v de muestras y termina la etapa correspondiente a MWC.

Ya que se tienen las muestras de MWC, el algoritmo OMP es ejecutado para recuperar la señal original a partir de estas muestras. Debido a distintos factores, como la aleatoriedad de las muestras tomadas y la naturaleza del propio algoritmo, existe una componente probabilística en la recuperación de las señales, la cual influye sobre el resultado final. Al momento de evaluar los resultados se debe tener en cuenta este comportamiento aleatorio, por lo que se debe aplicar el método de Montecarlo para encontrar resultados con validez estadística.

Dentro del ciclo de contexto se plantea que uno de los usos de este algoritmo es el de determinar la ocupación de los canales que conforman a la señal $x(t)$ (función útil para distintas aplicaciones del mundo real[13][21]), por lo que se deben adicionar procesos para que, en función de los resultados arrojados por OMP, se pueda realizar esta estimación. Por lo tanto, sobre la señal reconstruida en el dominio del tiempo se encuentra su representación en la frecuencia y, posteriormente, se calcula la energía contenida en cada uno de los canales definidos previamente y se compara con un umbral, con el fin de determinar la ocupación espectral de cada canal. En la Figura 21 se muestra la superposición del espectro de la señal original y el espectro de la señal reconstruida.

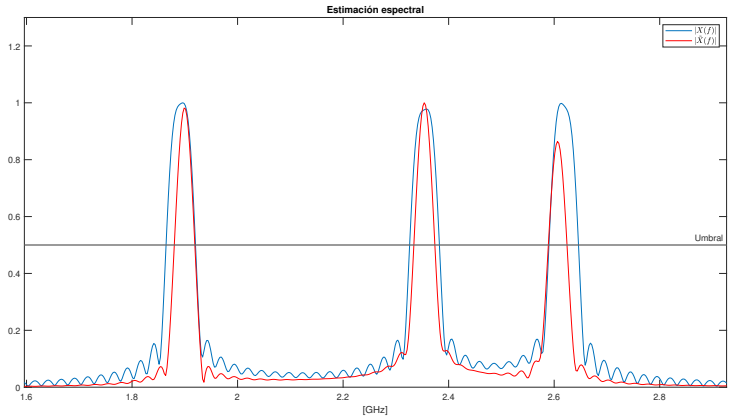


Figura 21: Estimación de la ocupación espectral.

Una vez calculadas todas las ocupaciones espectrales de la señal recuperada, se compara con los valores de la señal original y a partir de esto se calcula el desempeño del algoritmo.

Una vez finalizada la simulación del sistema es importante verificar que los datos asumidos inicialmente arrojan los resultados esperados según el ciclo de fundamentos teóricos, por lo que se plantea una serie de pruebas para determinar si los valores de las ramas influyen de la misma manera en el sistema implementado como lo hacen en los sistemas revisados. Para esto se emplean los mismos parámetros usados en [9], dando como resultado la Figura 22.

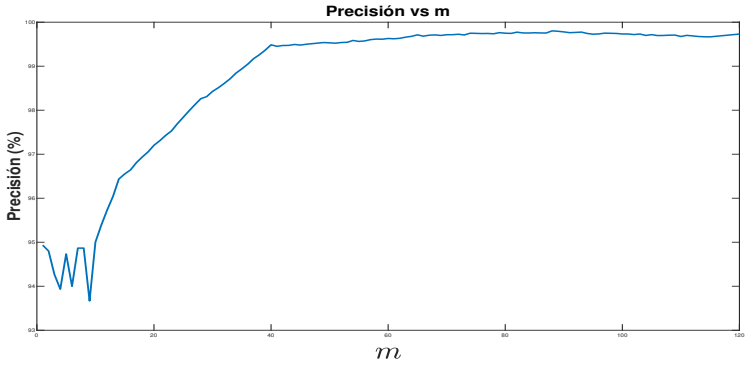


Figura 22: Resultados de simulación para $1 \leq m \leq 120$.

La gráfica de la Figura 22 representa el valor medio medido para cien iteraciones en cada valor entero de $1 \leq m \leq 120$. Al inicio se identifica una franja de error debido a la falta de las condiciones necesarias para que el sistema opere con normalidad. Seguido a esto, la gráfica presenta un comportamiento asintótico, validando que el valor de $m = 40$ es el punto de mejor relación cantidad de ramas contra precisión.

Es importante mencionar que en presencia de ruido el valor de m necesario para estabilizar el algoritmo es mayor, es decir, en presencia de ruido se deberá trabajar con un valor de $m > 40$[6]; sin embargo, este trabajo de grado, se centra en la evaluación del desempeño de la arquitectura MWC en condiciones ideales, con el fin de poder determinar el efecto de las variaciones de los parámetros propios de la arquitectura.

Una vez verificado que el sistema funciona y los datos obtenidos corresponden a los datos teóricos, se da por cumplido el primer objetivo de este trabajo de grado el cual es implementar la arquitectura MWC. Para abordar el resto

de los objetivos de este trabajo es necesario plantear un plan de pruebas que abarque la mayor cantidad de casos posibles de acuerdo a los parámetros susceptibles a variar.

3.4. Plan de Pruebas

La elaboración de un plan de pruebas efectivo es fundamental para alcanzar los objetivos propuestos ya que este paso determina el tipo de resultados que se obtendrán posteriormente y por ende la información que será analizada. Por lo tanto, para que la información sea útil en esta aplicación, se debe diseñar un plan de pruebas correcto. En el caso de este trabajo de grado, se desea conocer la influencia que tiene la señal periódica pseudoaleatoria de la etapa de mezclador en el desempeño de la arquitectura *MWC*, por lo que con el conocimiento previo adquirido sobre la arquitectura, se puede definir un plan de pruebas de la siguiente forma.

3.4.1. Cantidad de Flops

El primer parámetro de interés, que puede ser variado para configurar diferentes arquitecturas *MWC*, es M, ya que es un componente interno propio del mezclador y en gran medida determina su comportamiento. Para conocer los límites sobre los cuales M puede variar, es necesario traer más resultados del ciclo de fundamentos teóricos. Según la literatura[9][10][6], el comportamiento de M para el caso de uso de este trabajo de grado es el siguiente

$$M \geq M_{min} \triangleq 2\left\lceil \frac{f_{Nyq}}{2f_p} + \frac{1}{2} \right\rceil - 1. \tag{39}$$

Con la ecuación 39 se define una referencia para el límite inferior de M, por lo que se hace uso del valor de M_{min} como límite inferior de variación para M.

La teoría consultada no detalla un valor máximo para M, por lo que se plantea un límite superior igual a $2M_{min} - 1$ para así tener un abanico de posibilidades relativamente amplio. Por tanto, el rango de valores que puede tomar M es el siguiente

$$M_{min} \leq M \leq 2M_{min} - 1. \tag{40}$$

En todos los casos, M debe ser un entero impar[9][10][6], por lo que en caso de no cumplir esta condición su valor es redondeado al entero impar más próximo.

Ante un valor dado de f_p, si se consideran diferentes casos para M, es necesario modificar el valor de R con el fin de mantener fija la duración de la simulación, t_{Max}, y de esta forma realizar comparaciones justas. Lo anterior se desprende de las ecuaciones 37 y 38, e indica que la duración de cada uno se los símbolos que componen a las señales $p_i(t)$ aumenta conforme crece f_p, es decir, se tiene un número menor de muestras como insumo para el algoritmo OMP. En la Figura 23 se ejemplifica esta explicación.

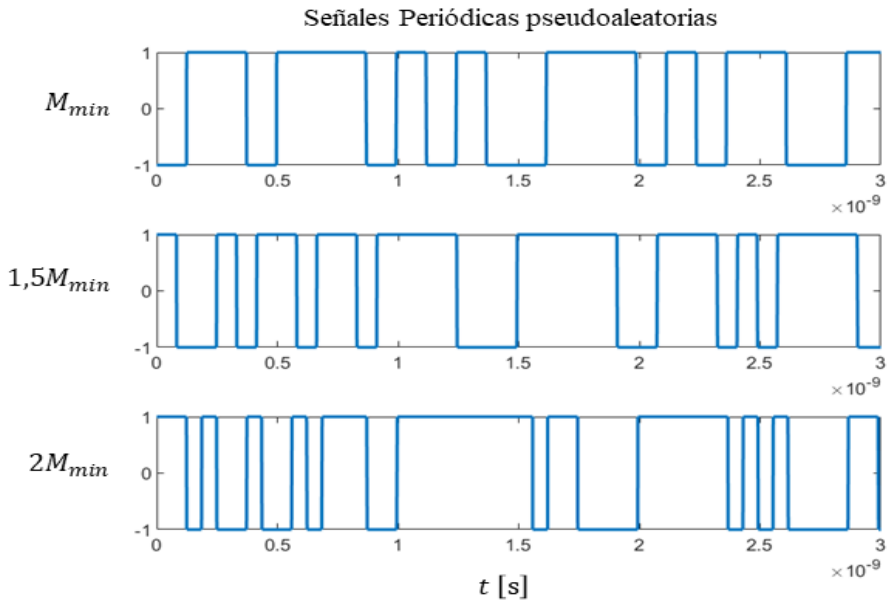


Figura 23: Efecto de la disminución de M.

3.4.2. Frecuencia de mezclador

La frecuencia de mezclador f_p es el segundo y último parámetro que se utilizará para configurar variaciones sobre la arquitectura de MWC, puesto que afecta de manera directa a la señal reconstruida. Esta frecuencia se relaciona con múltiples parámetros como lo son: la frecuencia de filtro, la cantidad de *Flops*, el ancho de banda, entre otros. De acuerdo a los fundamentos teóricos

encontrados[9][10][6], el valor de f_p debe cumplir con la condición $f_p \geq B$ para asegurar que cada banda pueda hacer una única contribución en el aliasing del espectro.

Al igual que con el parámetro M, se plantea la condición como una referencia de límite inferior, por tanto el valor de variación mínimo debe ser B y de la misma forma, el límite superior no tiene una restricción clara, por lo que se toma como tope el valor de $2B$. Por tanto, el rango de variación de f_p se describe de la siguiente forma

$$B \leq f_p \leq 2B. \tag{41}$$

Es importante recalcar que parámetros como la frecuencia de corte del filtro $f_{\omega c}$ o el valor mínimo de *Flops* de la secuencia dependen directamente del valor de frecuencia del mezclador f_p.

3.4.3. Parámetros de simulación

Una vez establecido el comportamiento de los parámetros a variar en el plan de pruebas, se procede a definir el resto de características de acuerdo a los intereses y objetivos de este trabajo de grado. Ya que la arquitectura MWC se enfoca en señales de banda ancha, la señal de entrada debe cumplir con esta característica. Por lo tanto, para la señal original se establecen las siguientes restricciones:

- $B = 50$ MHz.
- $B_{guarda} = 16$ MHz.
- $N_c = 46$.
- rango de frecuencias pasa banda: 1 GHz $\leq f \leq$ 4 GHz.
- $f_s = 8$ GHz.
- Bandas de guarda: $0{,}16B$.

No obstante, los N_c posibles canales no estarán ocupados al mismo tiempo, es decir, dentro de los casos planteados para las simulaciones se asume un número de canales ocupados tal que $N < N_c$.

Respecto a la arquitectura en general se tienen las siguientes restricciones

- $f_{\omega c} = f_p$.
- $m = 40$.

Respecto al mezclador, se tienen dos escenarios posibles debido a los dos parámetros que pueden ser variados: M y f_p.

f_p se varía teniendo en cuenta los límites ya establecidos. Por tanto, la variación de f_p debe estar comprendida entre

$$50 \text{ MHz} \leq f_p \leq 100 \text{ MHz}. \tag{42}$$

Ya que existen infinitos valores entre los limites dados, se plantea hacer uso de una lista de valores para el primer escenario de pruebas, siendo éstos

$$f_p = \{50, 51, 52, 53, ..., 100\} \text{ MHz}. \tag{43}$$

De esta forma se puede tener una buena idea de la influencia de f_p sobre el rendimiento del sistema.

Debido a que los límites de M dependen directamente del valor de M_{min} y éste a su vez depende del valor de f_p, se deben usar valores fijos de M para cada variación de f_p. Por tanto, se plantea el uso de los valores de $M = M_{min}, 1{,}5M_{min}, 2M_{min} - 1$ para cada variación de f_p.Ya que se tiene establecida la relación entre f_p y M, en la Figura 24 se observan los posibles valores que puede tomar este último.

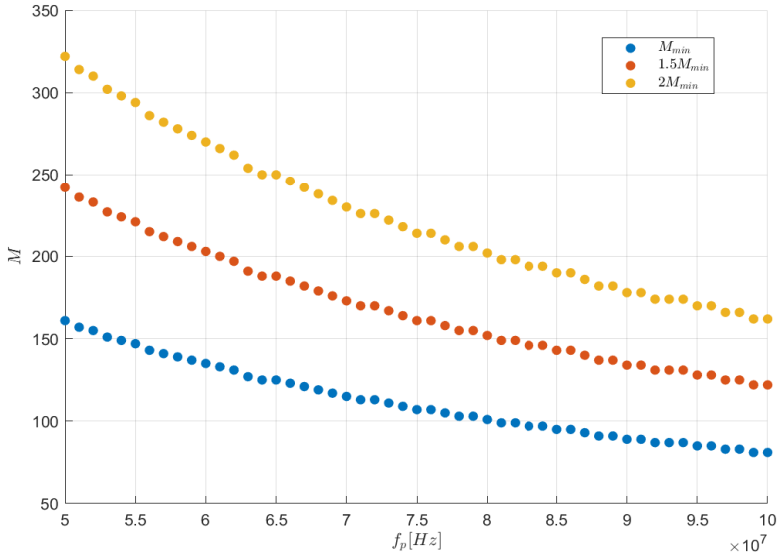


Figura 24: Relación entre f_p y M.

3.4.4. Escenarios de Simulación

Ya que $x(t)$ se crea aleatoriamente en cada iteración, se plantean dos escenarios posibles para comprobar el rendimiento del sistema frente a las distintas formas que puede tomar $x(t)$.

Escenario 1 En este escenario se opta por tomar un valor de $N = 3$ para asegurar la escasez de la señal $x(t)$. En este caso se opta por variar la distribución en que se ubican dichos canales sobre el espectro de la siguiente forma.

- Caso 1: los N canales ocupados se distribuyen de manera aleatoria con una distribución uniforme sobre los 46 canales disponibles.
- Caso 2: los N canales ocupados se distribuyen de manera consecutiva sobre los 46 canales disponibles.

Se plantean estas dos formas de distribuir los N canales ocupados ya que se desea observar el rendimiento del algoritmo cuando existen pocos canales

ocupados con mucha separación entre sí y también el caso donde la energía de la señal se encuentre concentrada en una misma franja del espectro. Además, debido a que existe un comportamiento aleatorio, se plantea realizar 500 iteraciones por cada valor de f_p y M y hallar el valor promedio de rendimiento de dicho caso. Por tanto el total de iteraciones para cada caso es de 76500 cada uno.

Escenario 2 En este escenario se desea observar el rendimiento del algoritmo a medida que la escasez de la señal se reduce gradualmente, por lo que se plantea la variación de N tal que $N = 5, 6, 7, ..., 25$. La distribución de los canales para este caso se hace de manera aleatoria con una distribución uniforme. Ya que el anterior escenario va a proporcionar una serie de resultados sobre el rendimiento del algoritmo, se hace uso de la configuración que provea el mejor rendimiento. Además, debido al comportamiento aleatorio, nuevamente se plantea la realización de 100 iteraciones por caso, dando un total de 10500 iteraciones para este escenario.

4. Capítulo IV: Resultados

4.1. Análisis de resultados

Ya que los siguientes resultados son el fundamento práctico para cumplir los objetivos de este trabajo de grado, es necesario aclarar el motivo por el cual estos escenarios específicos permiten extrapolar el conocimiento sobre cualquier otro escenario con una configuración similar. Debido a que el desarrollo matemático del sistema se fundamenta en CS, se debe retomar el concepto de escasez.

El concepto de escasez hace referencia a un valor relativamente bajo de componentes distintas de cero o superiores a un cierto umbral en un vector de valores dado, por lo que en el caso de las telecomunicaciones, y particularmente de un sistema con Multiplexación por División de Frecuencias (FDM, *Frequency Division Multiplexing*), estos conceptos se pueden relacionar con el número de señales mensaje que componen la señal a transmitir. Una señal de tipo FDM es limitada en banda, lo que implica que el número de canales o señales mensaje que puede alojar es finito, así, se puede pensar en un porcentaje de ocupación como la relación entre el número de canales ocupados sobre el número total de canales.

El despeño de la arquitectura *MWC*, basada en CS, depende del valor del porcentaje de ocupación, más no de parámetros particulares como el ancho de banda de la señal FDM o de las señales mensaje. Por lo tanto, los resultados de este trabajo de grado sirven como una guía teórica para sistemas de telecomunicaciones que trabajen en rangos de frecuencia diferentes, siempre y cuando se mantenga el porcentaje de ocupación.

4.1.1. Escenario 1

En la Figura 25 se observan los datos obtenidos para el primer caso del primer escenario, en la cual se evidencia que la precisión decae conforme el valor de f_p incrementa, con la excepción de un pico sobre el valor de 66 MHz. Las razones de este comportamiento se analizan con mayor profundidad a continuación.

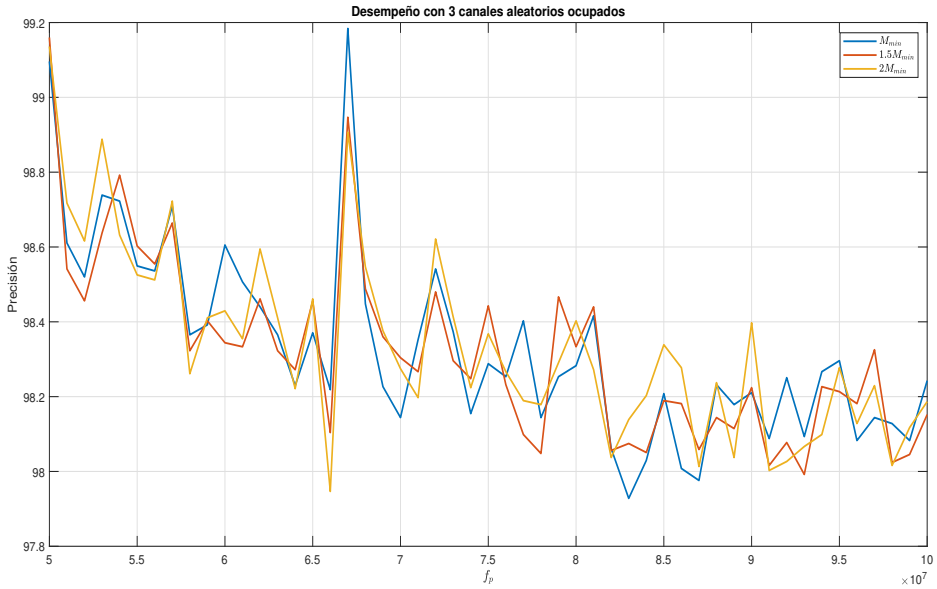


Figura 25: Resultados de precisión del sistema para escenario 1 - caso 1.

Al hacer la comparación entre los resultados de la Figura 24 y la Figura 25 se observa que la tendencia en la disminución de la precisión es similar con la tendencia de disminución que presenta el valor de M_{min} a medida que f_p aumenta. Es importante resaltar que el valor de f_p se relaciona con el tamaño de las particiones que MWC realiza sobre el espectro $X(f)$, adicionalmente, se sabe que M se relaciona matemáticamente con las dimensiones de la matriz de muestreo de la señal original, por ende, el aumento de f_p implica que al algoritmo OMP ingresa una señal con un ancho de banda mayor y un menor número de muestras, es por esta razón que la precisión se ve afectada.

Sin embargo, es claro en la Figura 25 que el comportamiento entre las tres configuraciones de M es similar entre sí en todo el rango de pruebas, en la Tabla 1 se muestra una comparación del valor medio de precisión de todas las configuraciones; por lo que aumentar el valor de M no incrementa la precisión necesariamente. En este caso toma más importancia la relación gráfica hecha anteriormente, pues muestra la tendencia de disminución similar entre las tres configuraciones de M, ya que f_p cambia y en consecuencia los límites de variación regidos por M_{min} también lo hacen, lo cual es un buen indicativo

de lo que sucede en el sistema.

Tabla 1: Precisión media para las tres configuraciones de M.

Configuración	Precisión Media
M_{min}	98.3323 %
$1{,}5M_{min}$	98.3181 %
$2M_{min}$	98.3372 %

Por lo tanto, se puede suponer que la relación entre f_p y M_{min} vista en la ecuación 39 tiene mayor influencia que el valor final de M y, por ende, para este caso se puede decir que siempre que f_p cumpla con las condiciones necesarias para el funcionamiento del sistema, el mejor valor de M es M_{min}, debido a que no se tienen diferencias significativas en la precisión, mientras que sí se tienen diferencias en el costo computacional del algoritmo, porque la matriz de muestras con $M = M_{min}$ es más pequeña.

No se debe olvidar que existen dos picos en el rendimiento, el primer pico se encuentra justo al inicio, cuando el valor de f_p es igual al valor B, lo cual es entendible ya que M_{min} toma un valor máximo dentro del rango de funcionamiento del sistema. El segundo pico se encuentra en una posición aparentemente arbitraria en 66 MHz, para analizar este pico es necesario retomar la implementación dada del sistema en este trabajo de grado y los conceptos básicos de MWC.

En el segundo capítulo se menciona que la señal esperada por MWC es una señal de gran ancho de banda, de tal forma que se pueden transportar múltiples canales de comunicación en ella. En el tercer capítulo se habla del valor mínimo que debe tomar f_p para asegurarse de que cada banda contribuya una única vez con el efecto de *aliasing*, además también se habla de las bandas de guarda en la implementación para asemejarse más a un escenario práctico. Sabiendo esto, es evidente que existe una relación entre el ancho de banda del canal y f_p, i.e.,

$$B_{real} = B_{mensaje} + 2B_{guarda} = 50 \text{ MHz } + 16 \text{ MHz} = 66 \text{ MHz}. \tag{44}$$

Aparte de esto, antes y después del valor de 66 MHz, los valores medios de precisión mantienen la tendencia descendente de M_{min}, por lo que se puede

afirmar que existe una relación entre el ancho de banda real del canal y f_p. En la Figura 26 se muestra una realización del espectro $X(f)$ con las distintas particiones realizadas según el valor de f_p. Las líneas punteadas indican las divisiones reales de los canales de $X(f)$ y las negras son las que resultan de la implementación de MWC. Es importante resaltar que solo en el caso en que $f_p = 66$ MHz las dos divisiones coinciden.

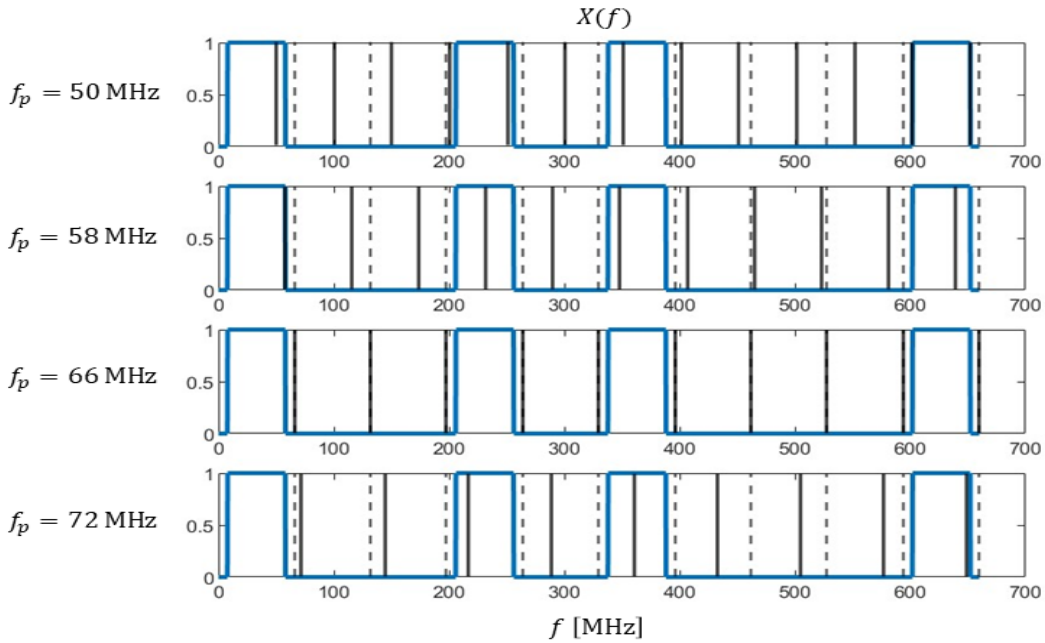


Figura 26: Particiones del espectro de $X(f)$ según el valor de f_p.

Es evidente en la Figura 26 que f_p, al tomar el valor de ancho de banda real, hay un comportamiento y posicionamiento regular entre las bandas ocupadas y las no ocupadas dentro de las distintas particiones, por lo que este efecto permite que sea mucho más fácil para el sistema estimar la ocupación espectral entre las distintas bandas.

Si bien se ha aclarado que el desempeño del sistema depende del porcentaje de ocupación que se esté considerando, es importante analizar si la forma en la que están distribuidos los canales ocupados tiene algún efecto sobre la precisión del sistema, por lo tanto, a continuación se analizan los resultados del segundo caso, en el cual los 3 canales ocupados son consecutivos.

En la Figura 27 se observa una comparación entre la energía distribuida aleatoriamente sobre todo el espectro (izquierda) y concentrada en un único rango de frecuencias (derecha), para ambos casos, y en color rojo, se encuentra superpuesto el espectro de la señal reconstruida.

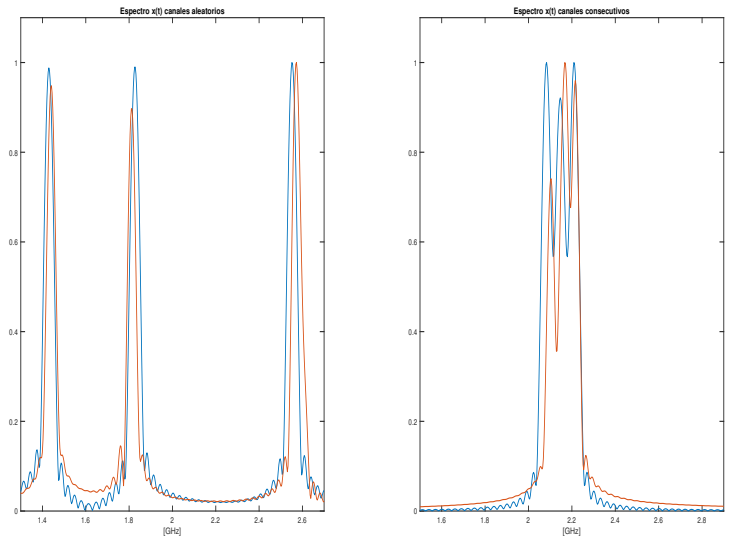


Figura 27: Comparación de espectros entre caso 1 y caso 2.

A partir de la Figura 27 se infiere que la estimación espectral cuando se distribuyen las bandas de manera aleatoria es un poco más compleja, pues el rango de error es mayor ante las ligeras variaciones de posicionamiento que pueden existir en el proceso de reconstrucción. Cuando dicha distribución de bandas se realiza de manera consecutiva, el sistema es capaz de compensar el error de posicionamiento, ya que hay un único rango con mayor amplitud donde se puede distribuir la energía.

Los resultados del segundo caso se encuentran consignados en la Figura 28, a partir de la cual se observa que la precisión con esta configuración es alta, sin importar el valor de f_p. Esto se debe al hecho de que la energía se encuentra confinada en un único rango de frecuencias, lo que permite al sistema predecir con mayor exactitud las bandas ocupadas, es un caso similar al descrito anteriormente, cuando $f_p = B_{real}$; sin embargo, se debe resaltar que el sistema

tiene un comportamiento más inestable en comparación con el primer caso, puesto que los errores de estimación no tienen una relación clara con la variación de f_p.

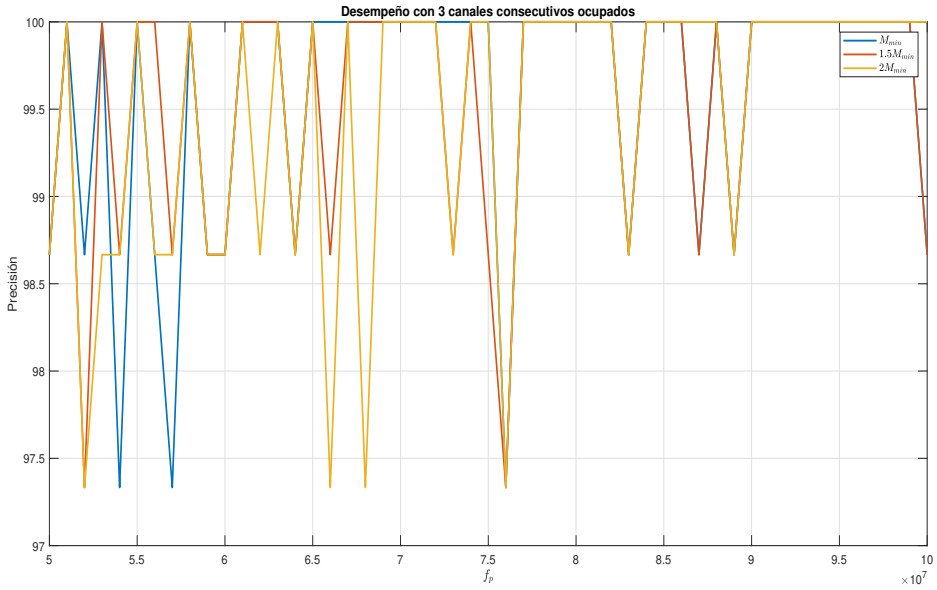


Figura 28: Resultados de precisión del sistema para escenario 1 - caso 2.

Si bien la precisión en general es alta para todos los valores de f_p, se debe notar que a medida que aumenta el valor de éste, también disminuye la cantidad de errores de estimación, ya que el mezclador es capaz de abarcar una mayor cantidad de energía por mezcla, como se muestra en la Figura 29. Esta disminución no es muy considerable como se muestra en la Tabla 2. Cabe resaltar que una precisión arriba del 98 % es equivalente a un error de estimación promedio menor a un canal, por lo que en este punto el tener un aumento en la precisión de menos del 1 % no contribuye de manera relevante.

Tabla 2: Precisión media para los primeros 20 MHz.

Configuración	$Precisión_{50-60[MHz]}$	$Precisión_{60-70[MHz]}$
M_{min}	98.9091 %	99.8788 %
$1{,}5M_{min}$	99.1515 %	99.7576 %
$2M_{min}$	98.9091 %	99.2727 %

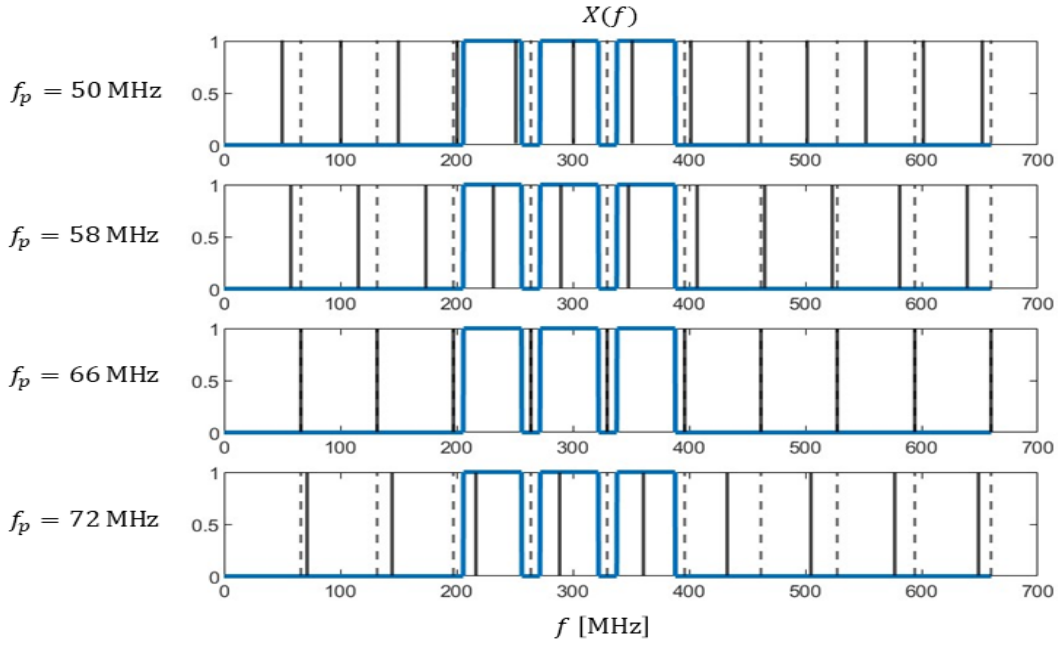


Figura 29: Particiones del espectro de $X(f)$ según el valor de f_p para canales consecutivos.

Al realizar la comparación de la precisión del sistema en los valores de $f_p =$ 50 MHz y $f_p =$ 66 MHz para los dos casos del primer escenario, se observa que a diferencia del primer caso, para el segundo caso se tiene que con $f_p =$ 50 MHz la precisión es del 98.6667 % en todas las configuraciones de M; por su parte, que el segundo valor de f_p se mantiene con un rendimiento del 100 % para el valor de M_{min}, mientras que las demás configuraciones disminuyen su precisión media a medida que se aumenta M_{min}. Por lo tanto, en el segundo caso el valor de f_p demuestra que sí tiene influencia en el desempeño del sistema, pero no deforma decreciente como en el primer caso, sino en la distinción de si f_p es igual 66 MHz o no.

En función del análisis de los resultados de los dos casos planteados para el escenario 1, se concluye que la mejor configuración para el sistema es $f_p = B_{real}$ y $M = M_{min}$, puesto que esta configuración demostró tener el mejor rendimiento en ambos casos.

4.1.2. Escenario 2

Una vez obtenida la configuración óptima a partir del escenario anterior, se procede a realizar la simulación de este escenario usando dicha configuración.

El propósito del escenario 2 es analizar cómo el aumento en el porcentaje de ocupación espectral repercute en la precisión del sistema. La señal $x(t)$ puede alojar 46 canales o señales mensaje, para este escenario se está considerando un valor de canales ocupados, N, entre 5 y 25, es decir, el porcentaje de ocupación espectral se encuentra aproximadamente entre el 11 % y el 54 %. Los resultados obtenidos para este escenario se muestran en la Figura 30.

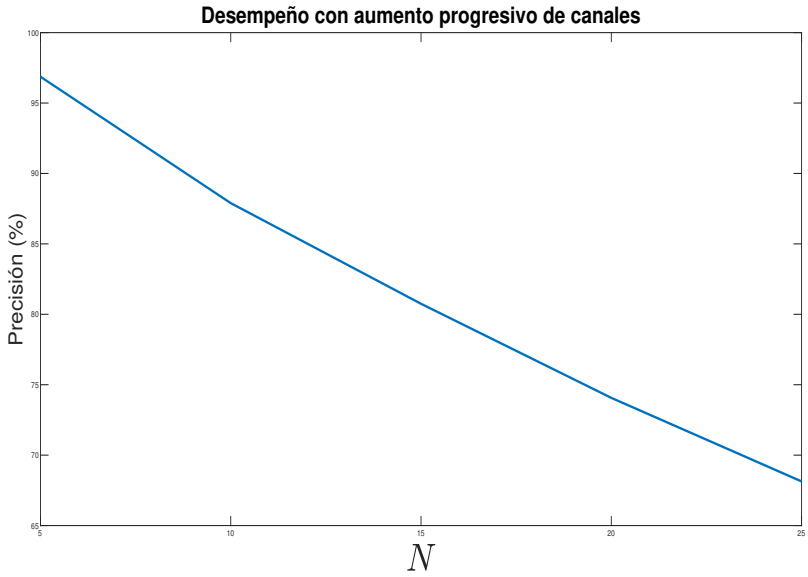


Figura 30: Resultados de precisión del sistema en el escenario 2.

A partir de la Figura 30 se evidencia que existe una caída lineal en la precisión del sistema a medida que aumenta el número de canales ocupados, en

la Tabla 3 se aprecia que la disminución de la precisión ocurre a una razón alrededor de 1 % por cada canal adicional ocupado.

Tabla 3: Precisión de la estimación en 5 configuraciones.

Canales ocupados	Precisión	Ocupación	Promedio Bandas Erróneas
5	95.992 %	10.8695 %	1.8436
10	89.8933 %	21.7591 %	2.1384
15	84.7173 %	32.6087 %	7.0298
20	79.9067 %	43.4783 %	9.2425
25	75.696 %	54.3478 %	11.1794

Los resultados obtenidos mediante la simulación se condicen con lo esperado según el ciclo de fundamentación teórica, ya que al aumentar el porcentaje de ocupación se disminuye la escasez de la señal y, por ende, el rendimiento del sistema baja. Por tanto, se infiere que en escenarios muy concurridos el sistema no puede trabajar de manera adecuada, aún en condiciones ideales como las consideradas en este trabajo de grado.

Una vez obtenidos los resultados, realizado el análisis de los mismos e identificadas las causas de éstos, se puede decir que se completa el tercer y último objetivo específico de este trabajo de grado y, por ende, el objetivo general del mismo, el cual consiste en analizar la influencia de la secuencia periódica pseudoaleatoria en el desempeño de la arquitectura MWC.

5. Capitulo V: Conclusiones y Trabajos Futuros

5.1. Conclusiones

A partir de los resultados de los escenarios de prueba y el análisis de los mismos se realizan las conclusiones de este trabajo de grado, las cuales se detallan a continuación.

Primero, la elección de los valores de los parámetros M y f_p depende en gran medida de la forma de la señal original, pues se evidenció lo dispares que pueden ser los comportamientos en la estimación de la ocupación espectral entre dos sistemas con la misma ocupación, pero una distribución energética distinta. En términos generales, se puede lograr niveles de precisión similares con configuraciones distintas dependiendo de la forma de la señal original.

Segundo, aunque el valor de f_p puede trabajar en valores como B, se recomienda que en trabajos futuros el valor de f_p sea igual al valor de B_{real} y el valor de M sea igual a M_{min}, ya que esta configuración presentó el mejor rendimiento sobre todas las pruebas. El valor de $M = M_{min}$ en esta configuración se aconseja debido a que reduce la cantidad de procesamiento necesario, dado que se tiene un menor número de muestras sobre las particiones dadas por f_p.

Tercero, en caso de no poder conseguir las condiciones anteriores, el segundo mejor escenario de trabajo es la configuración en que $f_p = B$, además, en este caso no hay restricciones para M, ya que para $M = M_{min}$ se tiene el valor máximo de precisión media posible e incrementar este valor no presenta ninguna mejoría apreciable. Esta condición se sugiere en escenarios donde el mezclador no sea capaz de alcanzar una frecuencia igual al ancho de banda real o se tengan dificultades a la hora de obtener M fija en todos los escenarios.

Cuarto, los resultados del segundo escenario funcionan como guía para observar el decaimiento de la precisión conforme disminuye la escasez en una señal. Como se mostró en dicho escenario y a partir de los resultados de diferentes ciclos de contexto, la característica más importante para obtener una buena precisión en la estimación espectral es la escasez de la señal. MWC tiene sus

bases en CS, por lo que un valor de escasez relativamente alto es primordial para que los sistemas funcionen como se espera.

5.2. Trabajos Futuros

Para trabajos futuros a partir de este trabajo de grado se propone

- Análisis del desempeño en presencia del ruido. Como se mencionó anteriormente, el valor de la cantidad de ramas necesarias para alcanzar el punto de mejor relación entre cantidad de ramas y precisión media se ve afectado por el ruido presente de la señal, por lo que se propone analizar los efectos que el ruido puede tener sobre el rendimiento del mezclador.

- Implementación y verificación a nivel de hardware. Con los conocimientos sobre la literatura y la implementación a nivel de software realizada en este trabajo de grado, se plantea el escenario de verificación de los datos obtenidos en un entorno hardware real.

- Análisis del desempeño del sistema al variar el algoritmo de reconstrucción. Como se mencionó en el primer capítulo, existen diversos tipos de algoritmos para reconstruir la señal en CS, por lo que es de gran interés validar los datos obtenidos en este trabajo de grado con un sistema que use un algoritmo de reconstrucción distinto para así comprobar o refutar la influencia del mismo en los resultados.

Referencias

[1] R Hevner Alan. "A Three Cycle View of Design Science Research". En: *Scandinavian Journal of Information Systems* 19 (2 2007), págs. 87-92. URL: https://www.researchgate.net/publication/254804390_A_Three_Cycle_View_of_Design_Science_Research.

[2] T. Tony Cai y Lie Wang. "Orthogonal Matching Pursuit for Sparse Signal Recovery With Noise". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 57 (7 jul. de 2011), págs. 4680-4688. ISSN: 0018-9448. DOI: 10.1109/TIT.2011.2146090.

[3] Emmanuel J. Candès, Justin K. Romberg y Terence Tao. "Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements". En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 59 (8 ago. de 2006), págs. 1207-1223. ISSN: 0010-3640. DOI: 10.1002/cpa.20124.

[4] Mark A. Davenport y Michael B. Wakin. "Analysis of Orthogonal Matching Pursuit Using the Restricted Isometry Property". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 56 (9 sep. de 2010), págs. 4395-4401. ISSN: 0018-9448. DOI: 10.1109/TIT.2010.2054653.

[5] D.L. Donoho. "Compressed sensing". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 52 (4 abr. de 2006), págs. 1289-1306. ISSN: 0018-9448. DOI: 10.1109/TIT.2006.871582.

[6] Yonina C. Eldar. *Multiband sampling*. Dic. de 2014. DOI: 10.1017/CBO9780511762321.015. URL: https://www.cambridge.org/core/product/identifier/CBO9780511762321A102/type/book_part.

[7] S.G. Mallat y Zhifeng Zhang. "Matching pursuits with time-frequency dictionaries". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 41 (12 1993), págs. 3397-3415. ISSN: 1053587X. DOI: 10.1109/78.258082.

[8] Rachit Manchanda y Kanika Sharma. "A Review of Reconstruction Algorithms in Compressive Sensing". En: IEEE, ago. de 2020, págs. 322-325. ISBN: 978-1-7281-9785-2. DOI: 10.1109/ICACCM50413.2020.9212838.

[9] Moshe Mishali y Yonina C. Eldar. "From theory to practice: Sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals". En: *IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing* 4 (2 2010), págs. 375-391. ISSN: 19324553. DOI: 10.1109/JSTSP.2010.2042414.

[10] Moshe Mishali y Yonina C. Eldar. "Sub-Nyquist Sampling: Bridging Theory and Practice". En: (170 2011). URL: http://arxiv.org/abs/1106.4514.

[11] H. Nyquist. "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory". En: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 47 (2 abr. de 1928), págs. 617-644. ISSN: 0096-3860. DOI: 10.1109/T-AIEE.1928.5055024.

[12] Y.C. Pati, R. Rezaiifar y P.S. Krishnaprasad. "Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition". En: IEEE Comput. Soc. Press, 1993, págs. 40-44. ISBN: 0-8186-4120-7. DOI: 10.1109/ACSSC.1993.342465.

[13] Meenu Rani, S. B. Dhok y R. B. Deshmukh. "A Systematic Review of Compressive Sensing: Concepts, Implementations and Applications". En: *IEEE Access* 6 (2018), págs. 4875-4894. ISSN: 21693536. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2793851.

[14] C.E. Shannon. "Communication in the Presence of Noise". En: *Proceedings of the IRE* 37 (1 ene. de 1949), págs. 10-21. ISSN: 0096-8390. DOI: 10.1109/JRPROC.1949.232969.

[15] Bob L. Sturm y Mads Græsbøll Christensen. "Comparison of orthogonal matching pursuit implementations". En: *2012 Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. 2012, págs. 220-224.

[16] Koredianto Usman. *Introduction to Orthogonal Matching Pursuit*. 2017. URL: https://korediantousman.staff.telkomuniversity.ac.id/.

[17] Jesús Mauricio Ramírez Viáfara, Harold Armando Romo Romero y María Manuela Silva Zambrano. *Telecomunicaciones digitales*. Universidad del Cauca, 2020. ISBN: 9789587324433.

[18] Jian Wang, Seokbeop Kwon y Byonghyo Shim. "Generalized Orthogonal Matching Pursuit". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 60 (12 dic. de 2012), págs. 6202-6216. ISSN: 1053-587X. DOI: 10.1109/TSP.2012.2218810.

[19] Xue Wang y col. *Sub-Nyquist Spectrum Sensing Based on Modulated Wideband Converter in Cognitive Radio Sensor Networks*. 2018.

[20] L. Yaroslavsky. "Is "Compressed Sensing" compressive? Can it beat the Nyquist Sampling Approach?" En: (ene. de 2015).

[21] Shilian Zheng y Xiaoniu Yang. "Wideband spectrum sensing in modulated wideband converter based cognitive radio system". En: *11th International Symposium on Communications and Information Technologies, ISCIT 2011* (Iscit 2011), págs. 114-119. DOI: 10.1109/ISCIT.2011.6089713.