# Estabilidad de onda solitaria, buen planteamiento y controlabilidad para un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq

Ricardo Córdoba Gómez

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Doctorado en Ciencias Matemáticas

Popayán
Diciembre de 2022

# Estabilidad de onda solitaria, buen planteamiento y controlabilidad para un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq

Ricardo Córdoba Gómez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias Matemáticas

Director
Dr. Alex Manuel Montes Padilla
Profesor de la Universidad del Cauca

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Doctorado en Ciencias Matemáticas
Popayán
Diciembre de 2022

A mis padres, mi hermana y mi novia

# Agradecimientos

*Agradezco a Dios por el maravilloso regalo de la vida, por permitirme ampliar mis horizontes y encontrar la armonía entre sus bordes.*

Agradezco infinitamente a mis padres y hermana por todo su valioso apoyo, amor, paciencia y por compartir incondicionalmente conmigo este nuevo sueño. Fueron ellos junto a toda mi incomparable familia, el motivo para luchar y lograr la culminación de mis estudios de doctorado. Su voz de aliento ante las adversidades y tropiezos, sus manifestaciones de alegría y orgullo ante los triunfos, me permitieron continuar con mi formación académica y crecimiento humano.

Quiero expresar mi profunda y extensa gratitud a mi profesor y director de tesis, Dr. Alex Manuel Montes Padilla, por su invaluable intercesión en el origen, evolución y progreso de este trabajo, por hacer que lo difícil sea fácil, por valorar hasta los esfuerzos más pequeños, por motivarme siempre a nunca bajar los brazos y a seguir luchando, por hacerme sentir cómodo para hacer cualquier pregunta. Agradezco sobremanera sus diligentes atenciones, incondicional apoyo, acertada dirección, sus observaciones y sugerencias, así como el tiempo y la paciencia que dedicó en ayudarme a corregir mis errores una y otra vez. Mi deuda es grande no sólo por esto, sino por todos y cada uno de sus valiosos consejos (que fueron imprescindibles en este último tiempo) para crecer no solamente académicamente, sino también como persona. Debo a él mucho más que la feliz culminación de esta tesis. Mi profesor Alex, se convirtió desde la tesis de pregrado, en el gestor y promotor de este inmenso logro que hoy culmino.

Quiero agradecer a todo el grupo de espacios funcionales por darme la oportunidad de empezarlos a conocer. De forma especial quisiera agradecer a mi profesor Francisco Enríquez Belalcázar, quien con sus extraordinarias clases, me hizo disfrutar y divertir en cada uno de los cursos que me orientó en la línea de análisis. Gracias por contestar todas mis dudas, por sus valiosos consejos y apoyo en los momentos más difíciles, por permitirme alcanzar una excelente formación académica y personal.

Agradezco a los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, muy especialmente a aquellos con los que tuve la oportunidad de compartir un poco más de cerca por medio de los cursos, seminarios o conversaciones informales, como Aida Patricia González Nieva, Jairo Roa Fajardo, Willy Will Sierra Arroyo, Yenny Leonor Rosero Rosero, Martha Lucía Bobadilla Alfaro, Gabriela Arbelaez Ramiro Acevedo Martínez, Wilson Martínez, Elkin Cárdenas, Carlos Restrepo, Maribel Díaz Noguera.

Quiero agradecer también de manera muy especial a Daniela, por su amor, compresión, apoyo incondicional, su tiempo, sus palabras de aliento. Ella es la fuente de mi inspiración para poder transformar mis ideas en ecuaciones matemáticas y bellas demostraciones.

Agradezco inmensamente a mis amigos y compañeros por compartir el día a día del fascinante mundo de las Matemáticas, por todos los buenos momentos que pasamos juntos, porque todos ocupan un lugar especial en mi corazón. En especial quisiera mencionar a mis amigos: Johan, Alina, David, Cristian, Jose Luis, Wilson, Alvaro.

Agradezco enormemente a los profesores José Raul Quintero Henao de la Universidad del Valle y Roberto Capistrano de la Universidad Federal de Pernambuco, Brasil, por sus valiosas orientaciones y recomendaciones para la exitosa culminación de esta tesis de doctorado.

Agradezco al comité de evaluación integrado por los profesores Eduardo Cerpa, Juan Carlos Muñoz y Fernando Gallego, por su gran disposición y colaboración para revisar de manera rigurosa este documento. Les agradezco sus valiosas correcciones, observaciones y sugerencias que me permitieron mejorar este trabajo.

# Resumen

En esta tesis doctoral estudiamos diferentes aspectos relacionados con el sistema tipo Boussinesq

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2 \Phi - \partial_x^4 \Phi + \partial_x \left( \eta \partial_x \Phi \right) & = 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2 \eta + \frac{1}{2} \left( \partial_x \Phi \right)^2 & = 0, \end{cases}$$

que modela la evolución de ondas de gran elongación y pequeña amplitud en un fluido, donde $\Phi = \Phi(x,t)$ representa la velocidad potencial y $\eta = \eta(x,t)$ corresponde a la elevación de la onda. En particular, establecemos un resultado de buen planteamiento para el problema de Cauchy en espacios tipo Bourgain, una propiedad de continuación única, un resultado de controlabilidad interna y la estabilidad de soluciones de onda solitaria.

**Palabras clave:** Sistema tipo Boussinesq, el problema de Cauchy, espacios de Bourgain, estimativo tipo Carleman, continuación única, análisis espectral, control interno, ondas solitarias, estabilidad orbital.

# Abstract


In this doctoral thesis we study some aspects related with the Boussinesq type system

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\left(\eta\partial_x\Phi\right) & = 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = 0, \end{cases}$$

that models the evolution of long waves with small amplitude in a fluid, where $\Phi = \Phi(x,t)$ represents the velocity potencial and $\eta = \eta(x,t)$ corresponds to the elevation of the wave. In particular, we show a result about the well-posedness of the Cauchy problem in Bourgain type spaces, a unique continuation property, a result of internal controllability and the stability of solitary wave solutions.



**Keywords:** Boussinesq type system, the Cauchy problem, Bourgain spaces, Carleman type estimate, unique continuation, spectral analysis, internal control, solitary waves, orbital stability.

# Productos de la investigación

### Artículos

[32] *Local well-posedness for a class of 1D Boussinesq systems*, Mathematical Control and Related Fields, **12** (2022), no. 2, 447-473. Con A. M. Montes.

[34] *A unique continuation result for a system of nonlinear differential equations.* Sometido a evaluación en Mathematical Modelling and Analysis. Con A. M. Montes.

[35] *Well-Posedness and Internal Controllability of a System for Water Waves.* Sometido a evaluación en Mathematical Control and Related Fields. Con A. M. Montes.

[41] *On the stability of a Boussinesq system.* Aceptado en Journal of Applied Analysis and Computation. Con A. M. Montes y J. R. Quintero.

### Artículos próximos a ser sometidos a evaluación

[33] *Local well-posedness in Sobolev spaces with negative indices for a class of 1D-Boussinesq systems.* Preprint. Con A. M. Montes.

## Ponencias

- *Controlabilidad exacta para una clase de sistemas tipo Boussinesq.* Encuentro Latinoamericano de Matemáticas y Aplicaciones - ELAMAP-2021, Brasil, Noviembre 29–Diciembre 3, 2021.

- *Un resultado de continuación única para un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq.* XI Simposio Nororiental de Matemáticas, Bucaramanga Colombia, Diciembre 1–3, 2021.

- *Un resultado de control para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.* III Jornadas Ecuatorianas de Matemática, Ecuador, Noviembre 30–Diciembre 3, 2021.

- *Un resultado de continuación única para un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq.* Seminario de Ecuaciones, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, Diciembre 17, 2021.

- *Un resultado de continuación única para un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq-Benney-Luke.* Seminario de EDP's, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Septiembre 22, 2021.

## Visitas académicas

1. Visita académica, Grupo de Ecuaciones Diferenciales Parciales y Geometría - EDPG, Universidad del Valle, Santiago de Cali, 14 de Octubre al 12 de Noviembre de 2019.

2. Visita académica, Grupo de Ecuaciones Diferenciales Parciales y Geometría - EDPG, Universidad del Valle, Santiago de Cali, 27 de Enero al 17 de Febrero de 2020.

3. Visita académica, Grupo de Análisis Matemático, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, 16-24 de Septiembre de 2021.

# Índice general

# Introducción

Hace más de 200 años, mientras realizaba experimentos para determinar un diseño más eficiente de botes para viajar a lo largo de un canal, el ingeniero escocés John Scott Russell (1808-1882) realizó un extraordinario descubrimiento científico: El fenómeno de onda solitaria u onda viajera. J. S. Russel observó en la superficie de un canal de Edinburgh-Glasgow la propagación de una ondulación que viajaba aparentemente a una velocidad constante, sin cambiar su forma y que su trayectoria describía una curva suave. La siguió por varios kilómetros y notó que esta onda no parecía debilitarse remontando la corriente. Desde entonces el estudio de la evolución de la superficie generada por una onda ha llamado la atención de matemáticos, físicos e ingenieros.

Joseph Boussinesq en investigaciones realizadas entre 1871 y 1877, las cuales incluyen su tesis doctoral, dió los primeros pasos para entender las observaciones de J. S. Russell. Este físico-matemático probó que bajo algunas consideraciones especiales la situación se puede modelar mediante la ecuación diferencial uno dimensional no lineal

$$u_{tt} - u_{xx} + \left(u^2 + u_{xx}\right)_{xx} = 0,$$

donde $u$ representa la elevación superficial de la onda. Además, demostró matemáticamente la existencia de ondas viajeras con velocidad $c > 0$, es decir, mostró la existencia de soluciones de la forma

$$u(x,t) = v(x - ct).$$

Los matemáticos Diederik Johannes Korteweg y Gustav de Vries en 1895 presentaron el modelo dispersivo 1-dimensional más simple para ondas de agua de pequeña amplitud y gran elongación con la que se brinda una explicación de la existencia de la onda viajera observada por Scott Russell, en el caso de ausencia de tensión superficial. Este modelo se conoce como la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), la cual posee soluciones de onda viajera. El modelo (KdV) tiene la forma

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

y las soluciones de onda viajera $u(x,t) = \psi(x - ct)$ (con velocidad de onda $c > 0$) son de la forma $\psi(x) = A\,\mathrm{Sech}^2(Bx)$, con $A$ y $B$ constantes apropiadas.

Es conocido que la situación física de la evolución de una onda en un fluido se describe en términos de dos variables fundamentales: La elevación superficial y la velocidad potencial. En particular, los modelos para ondas no lineales son derivados del "problema general de ondas en un fluido" mediante un proceso de aproximación, bajo la imposición de algunas restricciones de los parámetros que afectan la propagación de las ondas.

Hoy en día se conocen diversos modelos uno-dimensionales de ecuaciones diferenciales que describen la evolución de ondas en un fluido en términos de la elevación superficial de la onda bajo diferentes consideraciones, entre los cuales destacamos, además de la ecuación KdV y la ecuación Boussinesq, la ecuación Benjamin-Bona-Mahony (ver [2])

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0,$$

y la ecuación Camassa-Holm ([4])

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

Además la ecuación 1D-Benney-Luke ([37])

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + a\Phi_{xxxx} - b\Phi_{xxtt} + \Phi_t\Phi_{xx} + 2\Phi_x\Phi_{xt} = 0,$$

se destaca como un modelo para la evolución de ondas de gran elongación y pequeña amplitud en un fluido en términos de la velocidad potencial, teniendo en cuenta la tensión superficial.

En 2010, J. Quintero en el trabajo [39] (ver también los trabajos [36] y [40]) mostró que el fenómeno de la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud en presencia de tensión superficial puede reducirse al estudio de soluciones $(\eta(x,t), \Phi(x,t))$ de un sistema tipo Boussinesq de la forma

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \mu\ell_1\partial_x^4\Phi + \epsilon\partial_x\left(\eta\partial_x\Phi\right) &= 0, \\ \Phi_t + \eta - \mu\ell_2\partial_x^2\eta + \frac{\epsilon}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 &= 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Phi = \Phi(x,t)$ representa la velocidad potencial en el fondo $z = 0$, la variable $\eta = \eta(x,t)$ corresponde a la elevación de la superficie libre de la onda, $\epsilon$ es el parámetro de amplitud, $\sqrt{\mu} = \frac{h_0}{L}$ es el parámetro de onda larga ($h_0$ es la profundidad del fluido y $L$ es la longitud de la onda) y las constantes $\ell_1, \ell_2 > 0$ son tales que

$$\ell_1 + \ell_2 = \sigma - \frac{1}{3},$$

donde $\sigma^{-1}$ es conocido como el número de Bond y está asociado con la tensión superficial. Este sistema de ecuaciones modela (por esta razón también se denomina sistema tipo Boussinesq-Benney-Luke) el mismo fenómeno físico que la ecuación Benney-Luke, pero incluye las dos variables fundamentales que son la elevación superficial y la velocidad potencial; por lo que consideramos que es un modelo más aproximado a la situación física y un modelo importante e interesante de estudiar.

Cuando se estudia un modelo de ecuaciones diferenciales relacionado con una situación física es importante estudiar la existencia de soluciones del problema de valor inicial asociado (conocido como problema de Cauchy) y la existencia de soluciones especiales como las soluciones de onda solitaria. También es importante estudiar propiedades de las soluciones del modelo en consideración, de modo que en esta tesis de doctorado proponemos estudiar diferentes aspectos sobre las soluciones del sistema Boussinesq descrito anteriormente.

Por simplicidad y siguiendo las suposiciones de otros trabajos como el artículo [3] de Bona, Chen y Saut para un sistema tipo KdV-KdV, consideraremos $\ell_1 = \ell_2$. Más aún, si en (1) usamos el rescale

$$\eta(x,t) = \frac{1}{\epsilon}\eta^*\left(\frac{x}{\sqrt{\mu\ell_1}}, \frac{t}{\sqrt{\mu\ell_1}}\right), \quad \Phi(x,t) = \frac{\sqrt{\mu\ell_1}}{\epsilon}\Phi^*\left(\frac{x}{\sqrt{\mu\ell_1}}, \frac{t}{\sqrt{\mu\ell_1}}\right),$$

entonces podemos obtener el sistema simplificado

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x(\eta\partial_x\Phi) &= 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2 &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

Una de las principales características de los modelos de ondas de agua es que poseen una estructura hamiltoniana, la cual es fundamental para determinar el espacio apropiado para el estudio del problema de Cauchy asociado y la existencia de soluciones especiales como las denominadas ondas solitarias. En nuestro sistema particular (2), el hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ está definido por

$$\mathcal{H}\begin{pmatrix}\eta \\ \Phi\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\eta^2 + (\partial_x\eta)^2 + (\partial_x\Phi)^2 + (\partial_x^2\Phi)^2 + \eta(\partial_x\Phi)^2\right) dx,$$

y la estructura de tipo hamiltoniano está dada por

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \Phi_t \end{pmatrix} = \mathcal{J}\mathcal{H}' \begin{pmatrix} \eta \\ \Phi \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos directamente que el funcional $\mathcal{H}$ está bien definido para $\eta(\cdot,t), \partial_x\Phi(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R})$, para $t$ en algún intervalo. Estas condiciones caracterizan el espacio natural (espacio de energía) para el estudio de soluciones del sistema (2). Ciertamente, J. R. Quintero y A. M. Montes en [40] mostraron para el modelo Boussinesq (2) la existencia de soluciones de onda solitaria que se propagan con velocidad de onda $c$, $0 < |c| < 1$, es decir, demostraron la existencia de soluciones de la forma

$$\eta(x,t) = u(x-ct), \quad \Phi(x,t) = v(x-ct),$$

en el espacio de energía $H^1 \times \mathcal{V}^2$, donde $H^1 = H^1(\mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev usual de orden 1 y el espacio $\mathcal{V}^2$ es definido con respecto a la norma dada por

$$\|v\|_{\mathcal{V}^2}^2 = \|v'\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left((v')^2 + (v'')^2\right) dx.$$

Quintero y Montes mostraron que las soluciones de onda solitaria se pueden caracterizar como puntos críticos del funcional

$$J_c(u,v) = I_c(u,v) + G(u,v),$$

donde los funcionales $I_c$ y $G$ están definidos por

$$\begin{aligned} I_c(u,v) &= \int_{\mathbb{R}} \left[u^2 + (u')^2 + (v')^2 + (v'')^2 - 2cuv'\right] dx, \\ G(u,v) &= \int_{\mathbb{R}} u(v')^2 dx, \end{aligned}$$

y la existencia de tales puntos críticos la probaron usando el conocido Teorema de paso de montaña.

Uno de los principales objetivos de esta tesis es probar la estabilidad orbital de las soluciones de onda solitaria para el sistema Boussinesq (2). Es decir, mostraremos un resultado de estabilidad en el siguiente sentido:

Una solución de onda solitaria $(u^c, v^c)$ de (2) es orbitalmente estable si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $(\eta_0, \Phi_0) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ con

$$\|(\eta_0, \Phi_0) - (u^c, v^c)\|_{H^1 \times \mathcal{V}^2} < \delta$$

entonces la solución $(\eta, \Phi)$ del problema de Cauchy asociado con el sistema (2) con dato inicial $(\eta_0, \Phi_0)$ satisface que

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \|(\eta(\cdot,t), \Phi(\cdot,t)) - (u^c(\cdot+y), v^c(\cdot+y))\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} < \epsilon, \quad t \geq 0.$$

Esto significa que si $(\eta_0, \Phi_0) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ es un dato cercano a una solución de onda solitaria $(u^c, v^c)$ entonces la solución $(\eta(t), \Phi(t))$ del problema de Cauchy asociado con el sistema (2) con dato inicial $(\eta_0, \Phi_0)$ está cerca de la órbita de la onda solitaria $(u^c, v^c)$.

En el trabajo [19], M. Grillakis, J. Shatah y W. Strauss establecieron un criterio general de estabilidad para modelos con estructura hamiltoniana, el cual se basa en la convexidad de la función

$$d(c) = \text{ínf}\{J_c(u,v) \,:\, (u,v) \in \mathcal{M}_c\},$$

donde $\mathcal{M}_c$ es un conjunto definido adecuadamente. Ahora bien, cuando se conocen las soluciones de onda solitaria de manera explícita como en el caso de modelos uno dimensionales como la ecuación KdV, la ecuación Camassa-Holm o la ecuación 1D-Benney-Luke, el análisis de la convexidad de la función $d$ puede resultar un poco más sencillo, a diferencia del sistema (2), donde no se conoce una fórmula explícita para las soluciones de onda solitaria. Entonces para probar el resultado de estabilidad usaremos una caracterización variacional de la función $d$, siguiendo algunos trabajos para modelos dos dimensionales como el de A. de Bouard y J. C. Saut para la ecuación KP (ver [13])

$$(u_t + u_{xxx} + uu_x)_x \pm u_{yy} = 0,$$

J. Shatah para la ecuación Klein-Gordon (ver [46])

$$u_{tt} - \Delta u + u - |u|^2 u + |u|^4 u = 0,$$

o el trabajo de J. Quintero para la ecuación 2D-Benney-Luke (ver [38])

$$\Phi_{tt} - \Delta\Phi + a\Delta^2\Phi - b\Delta\Phi_{tt} + \Phi_t\Delta\Phi + 2\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi_t = 0.$$

Un aspecto importante que se debe tener en cuenta para el estudio de la estabilidad de soluciones de onda solitaria de un modelo de ecuaciones diferenciales parciales es la existencia de soluciones del problema de Cauchy asociado con el modelo. En ausencia de por lo menos un resultado de buen planteamiento local en espacios adecuados que incluyan el espacio de energía, la pregunta sobre la estabilidad no tiene significado. El concepto de buen planteamiento local que usaremos en este trabajo será en el sentido de Hadamard, es decir, la solución existe y es única en un cierto intervalo de tiempo (existencia y unicidad), la solución tiene la misma regularidad que el dato inicial en un cierto intervalo (persistencia) y la solución depende continuamente de los datos iniciales (dependencia continua). En relación con este aspecto, usando estimativos para el conmutador de Kato (ver [22], [23], [24]), J. Quintero y A. Montes en [40] probaron un resultado de buen planteamiento local del problema de Cauchy asociado con el sistema Boussinesq (2) en el espacio tipo Sobolev $H^s \times \mathcal{V}^{s+1}$, para $s > 3/2$, donde $H^s = H^s(\mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev usual de orden $s$ definido como la completación de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{H^s} = \| (1+|\xi|)^s \, \widehat{w}(\xi)\|_{L^2_\xi},$$

y $\mathcal{V}^{s+1}$ denota la completación de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{\mathcal{V}^{s+1}} = \||\xi| \, (1+|\xi|)^s \, \widehat{w}(\xi)\|_{L^2_\xi},$$

donde $\widehat{w}$ denota la transformada de Fourier de $w$ en la variable espacial $x$ y $\xi$ es la variable en el espacio de frecuencia relacionado con la variable $x$, es decir,

$$\widehat{w}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} w(x) dx.$$

Notemos que el resultado anterior de buen planteamiento no incluye el espacio de energía $H^1 \times \mathcal{V}^2$. En esta tesis de doctorado establecemos un resultado de buen planteamiento local del problema de Cauchy asociado con el sistema Boussinesq (2) con dato inicial en el espacio de Sobolev $H^s \times \mathcal{V}^{s+1}$ para $s \geq 0$. Para obtener este resultado usamos espacios tipo Bourgain. La idea es considerar un espacio de Banach adecuado,

$$C\left([0,T] : H^s \times \mathcal{V}^{s+1}\right) \cap Z^{s,\beta},$$

donde la norma del espacio $Z^{s,\beta}$ está determinada por el conocimiento de ciertas estimaciones espacio-tiempo para la solución de la parte lineal. Este método, introducido por J. Bourgain en [5]-[6] para la ecuación KdV y simplificado por Kenig, Ponce y Vega en [25]-[26], no sólo utiliza las estimaciones espacio-tiempo mencionadas anteriormente, sino que también explota las propiedades estructurales de la no linealidad del modelo.

En particular estudiamos el problema de Cauchy asociado con el sistema (2) en el espacio tipo Bourgain $Z^{s,\beta} = X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$, para $s \geq 0$ y $\beta > 1/2$, donde $X^{s,\beta}$ se define como la completación de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{X^{s,\beta}} = \|\langle |\tau| - \phi(\xi)\rangle^\beta \langle \xi \rangle^s \widetilde{w}\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$

y $Y^{s+1,\beta}$ como la completación de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{Y^{s+1,\beta}} = \|\langle |\tau| - \phi(\xi)\rangle^\beta |\xi| \langle \xi \rangle^s \widetilde{w}\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$

donde $\langle a\rangle = 1+|a|$ y $\phi(\xi)=|\xi|^3+|\xi|$ es el símbolo asociado a la parte lineal del sistema Boussinesq (2). Adicionalmente, $\widetilde{w}$ denota la transformada de Fourier espacio-tiempo de $w$ y $(\xi,\tau)$ es la variable en el espacio de frecuencias con $\xi$ como antes y $\tau$ correspondiente a la variable temporal $t$, es decir,

$$\widetilde{w}(\xi,\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi-it\tau}w(x,t)dxdt.$$

Recordemos que la norma del espacio de Bourgain asociado a la ecuación KdV es

$$\|w\|_{Z^{s,\beta}}=\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

y la norma del espacio de Bourgain asociado a la ecuación Boussinesq es

$$\|w\|_{Z^{s,\beta}}=\|\langle|\tau|-\sqrt{\xi^2+\xi^4}\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{L^2_{\xi,\tau}}\approx\|\langle|\tau|-|\xi|^2\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{L^2_{\xi,\tau}}.$$

Entonces para establecer el resultado de buen planteamiento en el espacio $X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}$ para el problema de Cauchy asociado con el sistema (2) combinamos la estrategia usada en [25]-[26] por Kenig, Ponce y Vega para la ecuación KdV y por L. Farah en [16] para la ecuación Boussinesq. De igual manera, usamos como referencia los trabajos en espacios de Bourgain de F. Linares en [29] para la ecuación Benjamin, A. Esfahani y L. Farah en [15] para la ecuación Boussinesq de sexto orden y D. Berikanov, T. Ogawa y G. Ponce en [1] para los sistemas Schrödinger-KdV y Benjamin-Ono-KdV.

En este trabajo también establecemos un resultado de continuación única. Es decir, demostraremos que si $(\eta,\Phi)=(\eta(x,t),\Phi(x,t))$ es una solución del sistema (2) en un espacio de funciones apropiado,

$$\eta\in L^2(-T,T;H^2_{loc}(\mathbb{R})),\quad \Phi\in L^2(-T,T;H^4_{loc}(\mathbb{R})),\quad \eta_t,\Phi_t\in L^2(-T,T;L^2_{loc}(\mathbb{R})),$$

y $(\eta,\Phi)\equiv 0$ en un subconjunto abierto $\Omega$ de $\mathbb{R}\times[-T,T]$, entonces $(\eta,\Phi)\equiv 0$ en la componente horizontal de $\Omega$. Recordemos que la componente horizontal $\Omega_1$ de un subconjunto abierto $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se define como la unión de todos los segmentos $t=c$ ($c$-constante real) en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ que contienen un punto de $\Omega$, esto es,

$$\Omega_1=\big\{(x,t)\in\mathbb{R}\times[-T,T]\,:\,\exists x_1\in\mathbb{R},\ (x_1,t)\in\Omega\big\}.$$

La propiedad de continuación única ha sido ampliamente estudiada en las últimas décadas. Un trabajo importante sobre este tema fue realizado por J. C. Saut y B. Scheurer en [44]; ellos probaron un resultado de continuación única para una clase general de ecuaciones dispersivas, en la cual está incluida la ecuación KdV y varias de sus generalizaciones. En el artículo [9], M. Davila y G. Menzala demostraron un resultado similar para la ecuación Benjamin-Bona-Mahony y para la ecuación Boussinesq. De manera similar, Y. Shang mostró en [45] un resultado de continuación única para la ecuación de onda larga regularizada,

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_{xt} - u_{xxtt} = 0.$$

En las ecuaciones anteriores se establece un estimativo de Carleman para demostrar que si una solución $u$ es idénticamente cero en un subconjunto abierto $\Omega$, entonces $u \equiv 0$ en la componente horizontal de $\Omega$.

Siguiendo los trabajos de Saut-Scheurer [44] y Dávila-Menzala [9], primero estableceremos un estimativo tipo Carleman apropiado para el operador lineal $\mathcal{L}$ asociado con el sistema (2). Para esto utilizamos una versión particular de la conocida desigualdad de Treves. Luego, para demostrar nuestro resultado de continuación única, probaremos que si $u$ es una solución de $\mathcal{L}u = 0$ y $u \equiv 0$ en una bola que pasa por el origen, entonces $u \equiv 0$ en un entorno del origen.

En cuanto al caso periódico, J. Quintero y A. Montes en el trabajo [36] demostraron un resultado de buen planteamiento para el problema de Cauchy asociado con el sistema Boussinesq-Benney-Luke (2) en el espacio de Sobolev de tipo periódico $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$, con $s > 3/2$, donde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, el espacio $H^s(\mathbb{T})$ se define con respecto a la norma

$$\|w\|_{H^s(\mathbb{T})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)^{2s}|\widehat{w}(k)|^2\Big)^{1/2} = \|\,(1+|k|)^s\,\widehat{w}(k)\|_{\ell^2_k},$$

y $\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ se define con respecto a la norma

$$\|w\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2(1+|k|)^{2s}|\widehat{w}(k)|^2\Big)^{1/2} = \||k|\,(1+|k|)^s\,\widehat{w}(k)\|_{\ell^2_k},$$

donde $\widehat{w} = w_k$ denota el $k$ coeficiente de Fourier de $w$ con respecto a la variable espacial $x$, es decir,

$$\widehat{w}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ixk} w(x)dx.$$

En esta tesis de doctorado también establecemos un resultado de buen planteamiento para el problema de Cauchy periódico en espacios tipo Bourgain. En este caso estudiamos el problema de valor inicial asociado con (2) en el espacio de Bourgain de tipo periódico $Z^{s,1/2}_{per} = X^{s,1/2}_{per} \times Y^{s+1,1/2}_{per}$, para $s \geq 0$, donde $X^{s,1/2}_{per}$ denota la completación de la clase de Schwartz $\mathcal{S}_{per,2\pi} = \mathcal{S}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ con respecto a la norma

$$\begin{aligned}\|w\|_{X^{s,1/2}_{per}} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widetilde{w}(k,\tau)|^2d\tau\Big)^{1/2}\\ &= \|\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{\ell^2_kL^2_\tau}\end{aligned}$$

y $Y^{s+1,1/2}_{per}$ denota la completación de la clase de Schwartz $\mathcal{S}_{per,2\pi}$ con respecto a la norma

$$\begin{aligned}\|w\|_{Y^{s+1,1/2}_{per}} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widetilde{w}(k,\tau)|^2d\tau\Big)^{1/2}\\ &= \|\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}|k|\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{\ell^2_kL^2_\tau},\end{aligned}$$

donde $\phi(k) = |k|^3 + |k|$ y $\widetilde{w}$ denota la transformada de Fourier espacio-tiempo de $w$ y $(k,\tau)$ es la variable en el espacio de frecuencia con $k$ correspondiente a la variable espacial $x$ y $\tau$ corresponde a la variable temporal $t$, es decir,

$$\widetilde{w}(k,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-ixk-it\tau}w(x,t)dxdt.$$

Vamos a suponer como en el caso de la ecuación KdV (ver [6]) que los elementos $w \in X^{s,1/2}_{per}$ tienen la propiedad de $x-$media cero pata todo $t\in\mathbb{R}$, es decir,

$$\int_{\mathbb{T}} w(x,t)dx = 0, \quad t\in\mathbb{R}.$$

El último aspecto que estudiamos en este trabajo está relacionado con el problema de control interno para el sistema (2) en el dominio periódico $\mathbb{T}$. Más precisamente, demostraremos que existe una función de control $F = F(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t))$, de modo que el sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x(\eta\partial_x\Phi) &= f_1, \quad x\in\mathbb{T}, \quad t\geq 0,\\[2ex] \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2 &= f_2, \quad x\in\mathbb{T}, \quad t\geq 0,\end{cases} \tag{3}$$

durante un intervalo de tiempo $[0,T]$ pueda llevarse de un estado inicial a un estado final predeterminado en un espacio de funciones adecuado.

Durante los últimos años se han realizado múltiples contribuciones en el estudio de la controlabilidad interna para diferentes ecuaciones de tipo dispersivo. Por ejemplo, en el caso de la ecuación KdV, D. Russell y B. Zhang en [43] demostraron que para $T>0$ y las funciones $u_0, u_T \in H^s(\mathbb{T})$, $s\geq 0$, existe un control $f$ tal que el problema de Cauchy

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = f, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

tiene una solución $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{T}))$ que satisface

$$u(x,T) = u_T(x), \quad x \in \mathbb{T},$$

cuando los estados inicial y final son suficientemente pequeños. Un resultado similar fue probado por B. Zhang en [48] para el modelo Boussinesq,

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2 + u_{xx})_{xx} = f, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x),$$

con la condición

$$u(x,T) = u_T(x), \quad u_t(x,T) = v_T(x),$$

en el espacio $H^s(\mathbb{T}) \times H^{s-2}(\mathbb{T})$ con $s \geq 2$. En el trabajo [8], E. Cerpa e I. Rivas demostraron la controlabilidad de la ecuación Boussinesq en baja regularidad, es decir, en el espacio $H^s(\mathbb{T}) \times H^{s-2}(\mathbb{T})$ con $s \geq -\frac{1}{2}$.

En esta tesis probamos que para $T > 0$ y estados inicial y final

$$(\eta_0, \Phi_0), (\eta_T, \Phi_T) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}), \; s \geq 0,$$

suficientemente pequeños, existe una función de control $F = (f_1, f_2)$ tal que el problema de Cauchy asociado con el sistema (3) con la condición inicial

$$\eta(x,0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x,0) = \Phi_0(x), \quad x \in \mathbb{T},$$

tiene una solución $(\eta, \Phi) \in C([0,T] : H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))$ que satisiface

$$\eta(x,T) = \eta_T, \quad \Phi(x,T) = \Phi_T(x), \quad x \in \mathbb{T}.$$

Siguiendo la misma estrategia utilizada en el caso de la ecuación KdV y la ecuación Boussinesq, consideramos un control de la forma

$$F(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t)) = (\rho_1 h_1(x,t), \rho_2 h_2(x,t)),$$

donde $\rho_i$ es una función suave. Para obtener el resultado, realizaremos un análisis espectral del operador

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -(I - \partial_x^2)\partial_x^2 \\ \\ -(I - \partial_x^2) & 0 \end{pmatrix}$$

definido en el espacio $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ y usando que el símbolo de Fourier para el operador $M$ está dado por

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & (1+k^2)k^2 \\ \\ -(1+k^2) & 0 \end{pmatrix},$$

probaremos para $M$ la existencia de una descomposición espectral utilizando el hecho de que sus vectores propios generan una base de Riesz para $H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$. Luego, de este análisis espectral y el método de momentos, estableceremos el resultado de controlabilidad lineal y finalmente vía el Teorema de punto fijo demostraremos la controlabilidad del sistema no lineal (3).

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 establecemos un resultado de buen planteamiento local para el problema de Cauchy asociado con el sistema Boussinesq (2) en espacios tipo Bourgain, usando un argumento de punto fijo estándar combinado con estimaciones lineales y estimativos para las formas bilineales $\partial_x(\eta\partial_x\Phi)$, $(\partial_x\Phi)(\partial_x\Phi_1)$ asociadas con la parte no lineal del sistema. Posteriormente, utilizando un estimativo tipo Carleman, en el Capítulo 2 probamos una propiedad de continuación única para el sistema Boussinesq (2). En el Capítulo 3 demostramos un teorema de buen planteamiento local del problema de Cauchy periódico para el modelo Boussinesq (2) en espacios de Bourgain de tipo periódico, usando además de estimativos lineales y no lineales, algunos resultados auxiliares. A continuación, en el Capítulo 4 estudiamos el problema de controlabilidad interna asociado al sistema (3), para tal propósito utilizamos un análisis espectral del operador $M$, el método de momentos y un argumento de punto fijo. En el Capítulo 5 establecemos la estabilidad orbital de un tipo particular de soluciones de onda solitaria para el modelo (2) usando la convexidad de la función $d(c)$. También en este capítulo final mostramos que una familia renormalizada de ondas solitarias converge a una onda solitaria de un modelo tipo KdV. Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos algunas conclusiones y trabajos futuros.

Para concluir esta introducción, describimos brevemente los aportes originales logrados durante el desarrollo de esta tesis. Mejoramos el resultado obtenido por J. Quintero y A. Montes en [40], al mostrar un resultado de buen planteamiento local para el problema de Cauchy asociado con el sistema (2) en el espacio de tipo Sobolev $H^s\times\mathcal{V}^{s+1}$, con $s\geq 0$. Seguidamente, probamos una propiedad de continuación única para el sistema Boussinesq (2). Hasta el conocimiento del autor de esta tesis no existen resultados de esta índole para el modelo (2). Posteriormente, mostramos un resultado de buen planteamiento local del problema de Cauchy asociado con el sistema (2) en el espacio de Sobolev periódico $H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$, con índice $s\geq 0$, con lo cual se mejora el resultado obtenido en el trabajo [36] por Quintero y Montes. En esta tesis probamos un primer resultado de controlabilidad (exacta) para el sistema Boussinesq (2). Finalmente, establecemos la estabilidad orbital de las soluciones de onda solitaria del modelo (2). Aunque usamos una técnica estándar y muy conocida este resultado es nuevo ya que se tienen en cuenta las particularidades del sistema Boussinesq-Benney-Luke (2).

Capítulo 1

# El problema de Cauchy

En este capítulo establecemos un resultado de buen planteamiento para el problema de Cauchy asociado con el sistema Boussinesq-Benney-Luke

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\left(\eta\partial_x\Phi\right) & = 0, \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

con la condición inicial

$$\eta(x,0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x,0) = \Phi_0(x). \tag{1.2}$$

El objetivo principal es demostrar que el problema de Cauchy para el sistema Boussinesq (1.1) con la condición inicial (1.2) en el espacio de Sobolev $H^s \times \mathcal{V}^{s+1}$ es localmente bien planteado para $s \geq 0$.

Para obtener nuestro resultado usamos el espacio tipo Bourgain $X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$, $s, \beta \in \mathbb{R}$, donde $X^{s,\beta}$ se define con respecto a la norma

$$\|w\|_{X^{s,\beta}} = \|\langle|\tau| - \phi(\xi)\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$

y $Y^{s+1,\beta}$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{Y^{s+1,\beta}} = \|\langle|\tau| - \phi(\xi)\rangle^{\beta}|\xi|\langle\xi\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$

donde $\langle a \rangle = 1 + |a|$ y $\phi(\xi) = |\xi|^3 + |\xi|$ es el símbolo asociado a la parte lineal del modelo Boussinesq (1.1). Aquí, $\widetilde{w}$ denota la transformada de Fourier en espacio-tiempo de $w$,

$$\widetilde{w}(\xi, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - it\tau} w(x,t) dx dt.$$

Adicionalmente, usaremos la notación $\widehat{w}^{(t)}$ para la transformada de Fourier de $w$ con respecto a la variable temporal,

$$\widehat{w}^{(t)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} w(t) dt.$$

Para $T > 0$ denotamos por $X_T^{s,\beta}$ el espacio de restricciones al intervalo $[0,T]$ de los elementos $\eta \in X^{s,\beta}$ con norma definida por

$$\|\eta\|_{X_T^{s,\beta}} = \inf_{w \in X^{s,\beta}} \left\{ \|w\|_{X^{s,\beta}} \,:\, w(t) = \eta(t) \quad \text{en} \quad [0,T] \right\}$$

y por $Y_T^{s+1,\beta}$ el espacio de restricciones al intervalo $[0,T]$ de los elementos $\Phi \in Y^{s+1,\beta}$ con norma definida por

$$\|\Phi\|_{Y_T^{s+1,\beta}} = \inf_{w \in Y^{s+1,\beta}} \left\{ \|w\|_{Y^{s+1,\beta}} \,:\, w(t) = \Phi(t) \quad \text{en} \quad [0,T] \right\}.$$

Notemos que el sistema (1.1) se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \\ \Phi_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (I - \partial_x^2)\partial_x^2 \\ \\ I - \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x(\eta \partial_x \Phi) \\ \\ \frac{1}{2}(\partial_x \Phi)^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Entonces la única solución del problema lineal

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \\ \Phi_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (I - \partial_x^2)\partial_x^2 \\ \\ I - \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \\ \Phi \end{pmatrix} = 0, \tag{1.3}$$

con la condición inicial

$$(\eta(x,0), \Phi(x,0)) = (\eta_0(x), \Phi_0(x)),$$

está dada por

$$(\eta(t), \Phi(t)) = S(t)(\eta_0, \Phi_0) = (S_1(t)(\eta_0, \Phi_0), S_2(t)(\eta_0, \Phi_0)),$$

donde el semigrupo $S(t)$ está descrito por

$$S_1(t)(\eta,\Phi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left[\cos(\phi(\xi)t)\widehat{\eta}(\xi) + |\xi|\sin(\phi(\xi)t)\widehat{\Phi}(\xi)\right]d\xi,$$

$$S_2(t)(\eta,\Phi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left[-\frac{\sin(\phi(\xi)t)\widehat{\eta}(\xi)}{|\xi|} + \cos(\phi(\xi)t)\widehat{\Phi}(\xi)\right]d\xi,$$

con la función $\phi$ definida por

$$\phi(\xi) = |\xi|^3 + |\xi|.$$

El concepto de solución para el problema de Cauchy viene dado por la fórmula de Duhamel. Formalmente, $(\eta,\Phi)$ en $X_T^{s,\beta} \times Y_T^{s+1,\beta}$ es una solución del problema de Cauchy (1.1)-(1.2) en $[0,T]$ si y sólo si para todo $t \in [0,T]$,

$$(\eta(t),\Phi(t)) = S(t)(\eta_0,\Phi_0) - \int_0^t S(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi), \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'. \tag{1.4}$$

Ahora, para trabajar en el contexto del espacio de Bourgain $X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$, modificamos sutilmente los términos de la derecha de (1.4) usando una función de corte. En adelante $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ representará una función con soporte en $(-2,2)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi \equiv 1$ en $[-1,1]$. Además para $0 < T < 1$ definimos $\psi_T(t) = \psi(t/T)$. De modo que consideraremos la siguiente versión modificada de (1.4),

$$(\eta(t),\Phi(t)) = \psi(t)S(t)(\eta_0,\Phi_0) - \psi_T(t)\int_0^t S(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi), \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')dt'. \tag{1.5}$$

Como es usual, para la demostración de buen planteamiento del problema de Cauchy (1.1)-(1.2), usaremos un argumento de punto fijo combinado con estimativos lineales y no lineales apropiados. Además, probaremos un resultado de inclusión continua del espacio $X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$ en la clase $C\left(\mathbb{R} : H^s \times \mathcal{V}^{s+1}\right)$ para $s \in \mathbb{R}$ y $\beta > 1/2$.

## 1.1. Estimativos lineales

Primero presentamos los siguientes estimativos relacionados con el semigrupo $S(t)$.

**Lema 1.1.1.** *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $\beta \geq 0$. Entonces existe $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\psi(t)S_1(t)(\eta_0,\Phi_0)\|_{X^{s,\beta}} \leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{R})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})},$$

$$\|\psi(t)S_2(t)(\eta_0,\Phi_0)\|_{Y^{s+1,\beta}} \leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{R})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}.$$

*Demostración.* Primero notemos que

$$
\begin{aligned}
&\left[\psi(t)\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\eta}_0(\xi)d\xi\right]^{\sim}(\xi,\tau)\\
&\qquad = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi-it\tau}\left(\psi(t)\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\eta}_0(\xi)d\xi\right)dxdt\\
&\qquad = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\psi(t)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\eta}_0(\xi)d\xi\right)dx\right)dt\\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\psi(t)e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\eta}_0(\xi)dt\\
&\qquad = \widehat{\eta}_0(\xi)\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(\xi)).
\end{aligned}
$$

Ahora, por las características de $\psi$, para todo entero $m\geq 0$ existe $K>0$ tal que

$$
|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)|\leq \frac{K}{(1+|\tau|)^m}, \tag{1.6}
$$

y por lo tanto existe $C>0$ tal que $\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{2\beta}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)|^2d\tau\leq C$. Entonces, usando la desigualdad

$$
\big||\tau|-\phi(\xi)\big|\leq \text{mín}\{|\tau-\phi(\xi)|,|\tau+\phi(\xi)|\}, \tag{1.7}
$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\psi(t)\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\eta}_0(\xi)d\xi\right\|^2_{X^{s,\beta}}\\
&\qquad = \left\|\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\left[\psi(t)\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\eta}_0(\xi)d\xi\right]^{\sim}\right\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(\xi))|^2|\widehat{\eta}_0(\xi)|^2d\xi d\tau\\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^2}\langle\tau\mp\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(\xi))|^2|\widehat{\eta}_0(\xi)|^2d\xi d\tau\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^2}\langle\tau\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)|^2|\widehat{\eta}_0(\xi)|^2d\xi d\tau\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(\xi)|^2\left(\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{2\beta}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)|^2d\tau\right)d\xi\\
&\qquad \leq C\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(\xi)|^2d\xi = C\|\eta_0\|^2_{H^s(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

De forma similar vemos que

$$\begin{aligned}&\left\|\psi(t)\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}|\xi|\widehat{\Phi}_0(\xi)d\xi\right\|^2_{X^{s,\beta}}\\ &\qquad= \int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\xi|^2|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(\xi))|^2|\widehat{\Phi}_0(\xi)|^2d\xi d\tau\\ &\qquad\leq C\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\Phi}_0(\xi)|^2d\xi = C\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, de los estimativos anteriores,

$$\|\psi(t)S_1(t)(\eta_0,\Phi_0)\|_{X^{s,\beta}}\leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{R})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}.$$

Similarmente tenemos que

$$\begin{aligned}&\left\|\psi(t)\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\eta}_0(\xi)}{|\xi|}d\xi\right\|^2_{Y^{s+1,\beta}}\\ &\qquad= \int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(\xi))|^2|\widehat{\eta}_0(\xi)|^2d\xi d\tau\leq C\|\eta_0\|^2_{H^s(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned}&\left\|\psi(t)\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{\Phi}_0(\xi)d\xi\right\|^2_{Y^{s+1,\beta}}\\ &\qquad= \int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\xi|^2|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(\xi))|^2|\widehat{\Phi}_0(\xi)|^2d\xi d\tau\leq C\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Así concluimos que

$$\|\psi(t)S_2(t)(\eta_0,\Phi_0)\|_{Y^{s+1,\beta}}\leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{R})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}.$$

□

**Lema 1.1.2.** *Sean $\beta$ y $\beta'$ tales que $-1/2<\beta'\leq 0\leq\beta\leq\beta'+1$ y $0<T\leq 1$. Entonces existe $C_2>0$ tal que*

*(i)* $\left\|\psi_T(t)\int_0^t f(t')\,dt'\right\|_{H_t^{\beta}(\mathbb{R})}\leq T^{1-(\beta-\beta')}\|f\|_{H_t^{\beta'}(\mathbb{R})}$,

*(ii)* $\left\|\psi_T(t)\int_0^t S_1(t-t')(\eta,\Phi)(t')\,dt'\right\|_{X^{s,\beta}}\leq C_2T^{1-(\beta-\beta')}\Big(\|\eta\|_{X^{s,\beta'}}+\|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta'}}\Big)$,

*(iii)* $\left\|\psi_T(t)\int_0^t S_2(t-t')(\eta,\Phi)(t')\,dt'\right\|_{Y^{s+1,\beta}}\leq C_2T^{1-(\beta-\beta')}\Big(\|\eta\|_{X^{s,\beta'}}+\|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta'}}\Big)$.

*Demostración.* La desigualdad (i) fue demostrada en el Lema 3.2 del trabajo [18]. Nótese que esta desigualdad no depende del espacio $X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$ ni del semigrupo $S(t)$. Para probar (ii) primero notemos que

$$\begin{aligned}\left(\psi_T(t)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i(t-t')\phi(\xi)}\widehat{\eta}(\xi,t')d\xi dt'\right)^{\wedge}(\xi,t) &= \psi_T(t)\int_0^t e^{\pm i(t-t')\phi(\xi)}\widehat{\eta}(\xi,t')dt' \\ &= e^{\pm i\phi(\xi)t}\psi_T(t)\int_0^t e^{\mp i\phi(\xi)t'}\widehat{\eta}(\xi,t')dt' = e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{w}(\xi,t),\end{aligned}$$

donde $w(x,t) = \psi_T(t)\int_0^t e^{\mp i\phi(\xi)t'}\eta(x,t')dt'$. De lo cual

$$\begin{aligned}\left[\psi_T(t)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i(t-t')\phi(\xi)}\widehat{\eta}(\xi,t')d\xi dt'\right]^{\sim}(\xi,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}e^{\pm i\phi(\xi)t}\widehat{w}(\xi,t)dt \\ &= \widetilde{w}(\xi,\tau\mp\phi(\xi)).\end{aligned}$$

Usando el hecho de que

$$\text{máx}\{\big||\tau+\phi(\xi)|-\phi(\xi)\big|, \big||\tau-\phi(\xi)|-\phi(\xi)\big|\} \leq |\tau|,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}&\left\|\psi_T(t)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{\pm i(t-t')\phi(\xi)}\widehat{\eta}(\xi,t')d\xi dt'\right\|_{X^{s,\beta}}^2 \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}\left|\widetilde{w}(\xi,\tau\mp\phi(\xi))\right|^2 d\xi d\tau \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau\pm\phi(\xi)|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}\left|\widetilde{w}(\tau,\xi)\right|^2 d\xi d\tau \\ &\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^2}\langle\tau\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}\left|\widetilde{w}(\xi,\tau)\right|^2 d\xi d\tau = \int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}\|\widehat{w}\|_{H_t^{\beta}(\mathbb{R})}^2 d\xi.\end{aligned}$$

Ahora, usando la parte (i) y la desigualdad (1.7) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \|\widehat{w}\|^2_{H_t^{\beta}(\mathbb{R})} d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left\| \psi_T(t) \int_0^t e^{\mp i\phi(\xi)t'} \widehat{\eta}(\xi, t') dt' \right\|^2_{H_t^{\beta}(\mathbb{R})} d\xi \\
&\leq T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left\| e^{\mp i\phi(\xi)t} \widehat{\eta}(\xi, t) \right\|^2_{H_t^{\beta'}(\mathbb{R})} d\xi \\
&= T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau\rangle^{2\beta'} \langle\xi\rangle^{2s} \left| \left[ e^{\mp i\phi(\xi)t} \widehat{\eta}(\xi, t) \right]^{\wedge(t)} (\tau) \right|^2 d\xi d\tau \\
&= T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau\rangle^{2\beta'} \langle\xi\rangle^{2s} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\tau\pm\phi(\xi))} \widehat{\eta}(\xi, t) dt \right|^2 d\xi d\tau \\
&= T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau\rangle^{2\beta'} \langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\eta}(\xi, \tau \pm \phi(\xi))|^2 d\xi d\tau \\
&= T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau \mp \phi(\xi)\rangle^{2\beta'} \langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\eta}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \\
&\leq T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}^2} \langle|\tau| - \phi(\xi)\rangle^{2\beta'} \langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\eta}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \\
&= T^{2[1-(\beta-\beta')]} \|\eta\|^2_{X^{s,\beta'}}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\left\| \psi_T(t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{\pm i(t-t')\phi(\xi)} \widehat{\eta}(\xi, t') d\xi dt' \right\|^2_{X^{s,\beta}} \leq T^{2[1-(\beta-\beta')]} \|\eta\|^2_{X^{s,\beta'}}.
$$

De forma similar podemos ver que

$$
\begin{aligned}
&\left\| \psi_T(t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{\pm i(t-t')\phi(\xi)} |\xi| \widehat{\Phi}(\xi, t') d\xi dt' \right\|^2_{X^{s,\beta}} \\
&\qquad \leq T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left\| e^{\mp i\phi(\xi)t} |\xi| \widehat{\Phi}(\xi, t) \right\|^2_{H_t^{\beta'}(\mathbb{R})} d\xi \\
&\qquad \leq T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau \mp \phi(\xi)\rangle^{2\beta'} |\xi|^2 \langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\Phi}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \\
&\qquad \leq T^{2[1-(\beta-\beta')]} \int_{\mathbb{R}^2} \langle|\tau| - \phi(\xi)\rangle^{2\beta'} |\xi|^2 \langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\Phi}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \\
&\qquad = T^{2[1-(\beta-\beta')]} \|\Phi\|^2_{Y^{s+1,\beta'}}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente

$$
\left\| \psi_T(t) \int_0^t S_1(t-t')(\eta, \Phi)(t')\, dt' \right\|_{X^{s,\beta}} \leq C_2 T^{1-(\beta-\beta')} \Big( \|\eta\|_{X^{s,\beta'}} + \|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta'}} \Big).
$$

Similarmente obtenemos la desigualdad en (iii).

$\square$

En el siguiente lema establecemos que el espacio $X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$ está incluido continuamente en la clase $C(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{R}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R}))$, para $s \in \mathbb{R}$ y $\beta > 1/2$.

**Lema 1.1.3.** *Sea $\beta > 1/2$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|(\eta, \Phi)\|_{C(\mathbb{R}:H^s(\mathbb{R})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R}))} \leq C\|(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}.$$

*Demostración.* Primero probaremos que $X^{s,\beta} \subseteq L^\infty(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{R}))$. Sean $\eta_1, \eta_2$ tales que

$$\eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \widetilde{\eta}_1(\xi, \tau) = \widetilde{\eta}(\xi, \tau)\chi_A(\tau), \quad \widetilde{\eta}_2(\xi, \tau) = \widetilde{\eta}(\xi, \tau)\chi_B(\tau),$$

donde $A = \{\tau : \tau < 0\}$ y $B = \{\tau : \tau \geq 0\}$. Notemos que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\eta_1(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \left\| \left(e^{it\phi(\xi)}\,(\eta_1)^\wedge\right)^\vee (x,t)\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \left(\left(e^{it\phi(\xi)}\,(\eta_1)^\wedge\right)^\vee\right)^{\wedge(t)} (x,\tau)\, d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left\| \left(\left(e^{it\phi(\xi)}\,(\eta_1)^\wedge\right)^\vee\right)^{\wedge(t)} (x,\tau) \right\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\tau-\phi(\xi))}\widehat{\eta}_1(\xi,t)dt \right|^2 d\xi \right)^{1/2} d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\eta}_1(\xi, \tau - \phi(\xi))|^2 d\xi \right)^{1/2} d\tau.
\end{aligned}$$

Dado que $|\tau + \phi(\xi)| = ||\tau| - \phi(\xi)|$ para $\tau \leq 0$, entonces usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $\beta > 1/2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\eta_1(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle^{-2\beta} d\tau\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\eta}_1(\xi, \tau - \phi(\xi))|^2\, d\tau d\xi\right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau + \phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\eta}_1(\xi, \tau)|^2\, d\tau d\xi\right)^{1/2} \\
&= C \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{0} \langle\tau + \phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\eta}(\xi, \tau)|^2\, d\tau d\xi\right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^2} \langle|\tau| - \phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\eta}(\xi, \tau)|^2\, d\tau d\xi\right)^{1/2} = C\|\eta\|_{X^{s,\beta}}.
\end{aligned}$$

De forma similar vemos que,

$$\begin{aligned}
\|\eta_2(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \left\| \left(e^{-it\phi(\xi)}\,(\eta_2)^\wedge\right)^\vee (x,t)\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\eta}_2(\xi, \tau+\phi(\xi))|^2 d\xi \right)^{1/2} d\tau \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle^{-2\beta} d\tau \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\eta}_2(\xi, \tau+\phi(\xi))|^2 \, d\tau d\xi \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^2} \langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s} |\widetilde{\eta}(\xi,\tau)|^2 \, d\tau d\xi \right)^{1/2} = C\|\eta\|_{X^{s,\beta}}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}\,:\,H^s)} \leq C\|\eta\|_{X^{s,\beta}}.$$

Ahora mostremos que $\eta \in C(\mathbb{R}\,:\,H^s(\mathbb{R}))$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\|\eta_1(t) - \eta_1(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\quad= \left\| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{it\tau} - e^{it'\tau}\right) \left( \left(e^{it\phi(\xi)}\,(\eta_1)^\wedge\right)^\vee \right)^{\wedge(t)} (x,\tau) d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\quad= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{it\tau} - e^{it'\tau}\right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\tau-\phi(\xi))} \widehat{\eta}_1(\xi,t) dt \right) d\tau \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\quad= \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle^{\beta}\langle\tau\rangle^{-\beta} (e^{it\tau} - e^{it'\tau}) \widetilde{\eta}_1(\xi, \tau-\phi(\xi)) d\tau \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\quad\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle^{-2\beta} d\tau \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle^{2\beta} |e^{it\tau} - e^{it'\tau}|^2 |\widetilde{\eta}_1(\xi, \tau-\phi(\xi))|^2 d\tau \right) d\xi \right)^{1/2} \\
&\quad\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^2} \langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s} |e^{it\tau} - e^{it'\tau}|^2 |\widetilde{\eta}(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Haciendo tender $t \to t'$ y usando el Teorema de convergencia dominada obtenemos que

$$\|\eta_1(t) - \eta_1(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} \to 0.$$

De forma similar,

$$\begin{aligned}
\|\eta_2(t) - \eta_2(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{it\tau} - e^{it'\tau}\right) \left( \left(e^{-it\phi(\xi)}\,(\eta_2)^\wedge\right)^\vee \right)^{\wedge(t)} (x,\tau) d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle^{\beta}\langle\tau\rangle^{-\beta} (e^{it\tau} - e^{it'\tau}) \widetilde{\eta}_2(\xi, \tau+\phi(\xi)) d\tau \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^2} \langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}\langle\xi\rangle^{2s} |e^{it\tau} - e^{it'\tau}|^2 |\widetilde{\eta}(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Luego concluimos que $\|\eta_2(t)-\eta_2(t')\|_{H^s(\mathbb{R})}\to 0$; de donde $\eta\in C(\mathbb{R}:H^s(\mathbb{R}))$ y además

$$\|\eta\|_{C(\mathbb{R}:H^s(\mathbb{R}))}\leq C\|\eta\|_{X^{s,\beta}}.$$

Ahora, sea $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ donde $\widetilde{\Phi}_1(\xi,\tau)=\widetilde{\Phi}(\xi,\tau)\chi_A(\tau)$, $\widetilde{\Phi}_2(\xi,\tau)=\widetilde{\Phi}(\xi,\tau)\chi_B(\tau)$. Entonces para todo $t\in\mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(t)\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})} &= \left\| \left(e^{it\phi(\xi)}\left(\Phi_1\right)^{\wedge}\right)^{\vee}(x,t)\right\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\Phi}_1(\xi,\tau-\phi(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}d\tau\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{-2\beta}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\langle\tau\rangle^{2\beta}|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\Phi}_1(\xi,\tau-\phi(\xi))|^2\,d\tau d\xi\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\Phi}(\xi,\tau)|^2\,d\tau d\xi\right)^{1/2}=C\|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta}},
\end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_2(t)\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})} &= \left\| \left(e^{-it\phi(\xi)}\left(\Phi_2\right)^{\wedge}\right)^{\vee}(x,t)\right\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\Phi}_2(\xi,\tau+\phi(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}d\tau\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{-2\beta}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\langle\tau\rangle^{2\beta}|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\Phi}_2(\xi,\tau+\phi(\xi))|^2\,d\tau d\xi\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^2}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{2\beta}|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{\Phi}(\xi,\tau)|^2\,d\tau d\xi\right)^{1/2}=C\|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}:\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R}))}\leq C\|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta}}.$$

Como en el caso anterior, usando el Teorema de convergencia dominada tenemos que $\|\Phi(t)-\Phi(t')\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R})}\to 0$ y además que $\Phi\in C(\mathbb{R}:\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R}))$; de donde

$$\|(\eta,\Phi)\|_{C(\mathbb{R}:H^s(\mathbb{R})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{R}))}\leq C\|(\eta,\Phi)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}.$$

$\square$

## 1.2. Estimativos bilineales

Primero presentamos el siguiente lema, donde se establecen algunas desigualdades que usaremos en esta sección y cuya demostración puede verse, respectivamente, en el Lema 4.2 de [17] y el Lema 2.3 de [26].

**Lema 1.2.1.** *Si* $p, q > 0$ *y* $r = \min\{p, q, p+q-1\}$ *con* $p+q > 1$, *entonces tenemos que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x-\lambda\rangle^{p}\langle x-\mu\rangle^{q}} \le \frac{C}{\langle \lambda-\mu\rangle^{r}} \tag{1.8}$$

*y*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x\rangle^{2\beta}|\sqrt{\lambda-x}|} \le \frac{C}{\langle \lambda\rangle^{1/2}}. \tag{1.9}$$

Usando el método introducido por J. Bourgain en los trabajos [5]-[6], probamos los siguientes estimativos no lineales.

**Lema 1.2.2.** *Sean* $s \ge 0$, $\alpha \ge 1/4$ *y* $\beta > 1/2$. *Entonces existe* $C_3 > 0$ *tal que*

*(i)* $\|\partial_x(\eta\partial_x\Phi)\|_{X^{s,-\alpha}} \le C_3\|\eta\|_{X^{s,\beta}}\|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta}}$,

*(ii)* $\|(\partial_x\Phi)(\partial_x\Phi_1)\|_{Y^{s+1,-\alpha}} \le C_3\|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta}}\|\Phi_1\|_{Y^{s+1,\beta}}$.

*Demostración.* Primero notemos que usando un argumento de dualidad

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x(\eta\partial_x\Phi)\|_{X^{s,-\alpha}}\\
&\quad= \left\|\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{-\alpha}\xi\langle\xi\rangle^{s}\big(\widetilde{\eta}*\widetilde{\partial_x\Phi}\big)(\xi,\tau)\right\|_{L^2_{\xi,\tau}}\\
&\quad= \sup_{\|h\|_{L^2_{\xi,\tau}}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^4}\xi\langle\xi\rangle^{s}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{-\alpha}\widetilde{\eta}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\xi_1\widetilde{\Phi}(\xi_1,\tau_1)h(\xi,\tau)\,d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1\right|.
\end{aligned}$$

Entonces, definiendo

$$f(\xi,\tau) = \langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\widetilde{\eta}(\xi,\tau), \quad g(\xi,\tau) = \langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{\beta}\xi\langle\xi\rangle^{s}\widetilde{\Phi}(\xi,\tau),$$

vemos que (i) es equivalente a

$$|J(f,g,h)| \le C\|f\|_{L^2_{\xi,\tau}}\|g\|_{L^2_{\xi,\tau}}\|h\|_{L^2_{\xi,\tau}}, \tag{1.10}$$

donde

$$J(f,g,h)=\int_{\mathbb{R}^4}\frac{\xi\langle\xi\rangle^s f(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)g(\xi_1,\tau_1)h(\xi,\tau)\,d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi-\xi_1\rangle^s\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^\alpha\langle|\tau_1|-\phi(\xi_1)\rangle^\beta\langle|\tau-\tau_1|-\phi(\xi-\xi_1)\rangle^\beta}.$$

Para obtener la desigualdad (1.10), analizamos todos los casos posibles para el signo de $\tau,\tau_1$ y $\tau-\tau_1$. Para hacer esto dividimos $\mathbb{R}^4$ en las siguientes regiones

$$\begin{aligned}
\Gamma_1&=\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4\ :\ \tau_1<0,\tau-\tau_1<0\},\\
\Gamma_2&=\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4\ :\ \tau_1\geq 0,\tau-\tau_1<0,\tau\geq 0\},\\
\Gamma_3&=\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4\ :\ \tau_1\geq 0,\tau-\tau_1<0,\tau<0\},\\
\Gamma_4&=\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4\ :\ \tau_1<0,\tau-\tau_1\geq 0,\tau\geq 0\},\\
\Gamma_5&=\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4\ :\ \tau_1<0,\tau-\tau_1\geq 0,\tau<0\},\\
\Gamma_6&=\{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\mathbb{R}^4\ :\ \tau_1\geq 0,\tau-\tau_1\geq 0\}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\tau_1<0$ y $\tau-\tau_1<0$ implican que $\tau<0$, y $\tau_1\geq 0$ y $\tau-\tau_1\geq 0$ implican que $\tau\geq 0$. Luego los casos $\tau_1<0,\tau-\tau_1<0,\tau\geq 0$ y $\tau_1\geq 0,\tau-\tau_1\geq 0,\tau<0$ no pueden ocurrir. Ahora, dado que

$$1+|\xi|\leq(1+|\xi_1|)(1+|\xi-\xi_1|),$$

entonces para $s\geq 0$ tenemos que

$$\frac{\langle\xi\rangle^{2s}}{\langle\xi_1\rangle^{2s}\langle\xi-\xi_1\rangle^{2s}}\leq 1.$$

Así, probaremos la desigualdad (1.10) con $Z(f,g,h)$ en lugar de $J(f,g,h)$ donde

$$Z(f,g,h)=\int_{\mathbb{R}^4}\frac{\xi f(\xi_2,\tau_2)g(\xi_1,\tau_1)h(\xi,\tau)\,d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^\alpha\langle\sigma_1\rangle^\beta\langle\sigma_2\rangle^\beta},$$

con $\xi_2=\xi-\xi_1,\tau_2=\tau-\tau_1$ y $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ perteneciendo a uno de los siguientes casos

$$\begin{aligned}
&(C_1)\quad \sigma=\tau+|\xi|^3+|\xi|,\ \sigma_1=\tau_1+|\xi_1|^3+|\xi_1|,\ \sigma_2=\tau_2+|\xi_2|^3+|\xi_2|,\\
&(C_2)\quad \sigma=\tau-|\xi|^3-|\xi|,\ \sigma_1=\tau_1-|\xi_1|^3-|\xi_1|,\ \sigma_2=\tau_2+|\xi_2|^3+|\xi_2|,\\
&(C_3)\quad \sigma=\tau+|\xi|^3+|\xi|,\ \sigma_1=\tau_1-|\xi_1|^3-|\xi_1|,\ \sigma_2=\tau_2+|\xi_2|^3+|\xi_2|,\\
&(C_4)\quad \sigma=\tau-|\xi|^3-|\xi|,\ \sigma_1=\tau_1+|\xi_1|^3+|\xi_1|,\ \sigma_2=\tau_2-|\xi_2|^3-|\xi_2|,\\
&(C_5)\quad \sigma=\tau+|\xi|^3+|\xi|,\ \sigma_1=\tau_1+|\xi_1|^3+|\xi_1|,\ \sigma_2=\tau_2-|\xi_2|^3-|\xi_2|,\\
&(C_6)\quad \sigma=\tau-|\xi|^3-|\xi|,\ \sigma_1=\tau_1-|\xi_1|^3-|\xi_1|,\ \sigma_2=\tau_2-|\xi_2|^3-|\xi_2|.
\end{aligned}$$

Primero consideremos $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ como en el caso $(C1)$. Usando la desigualdad (1.8) en el Lema 1.2.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\beta}\langle\sigma_2\rangle^{2\beta}} \leq \frac{C}{\langle\tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi_2|^3 + |\xi_2|\rangle^{2\beta}}.$$

En consecuencia, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned}
&|Z(f,g,h)|^2 \\
&\quad \leq \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi_2,\tau_2)g(\xi_1,\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^2 d\xi_1 d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^{2\alpha}\langle\sigma_1\rangle^{2\beta}\langle\sigma_2\rangle^{2\beta}} \right) d\xi d\tau \\
&\quad \leq C\|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi_2,\tau_2)g(\xi_1,\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right) \\
&\qquad\qquad \times \left( \frac{|\xi|^2}{\langle\sigma\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle\tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi_2|^3 + |\xi_2|\rangle^{2\beta}} \right) d\xi d\tau \\
&\quad \leq C\|f\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \|g\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \\
&\qquad \times \left\| \frac{|\xi|^2}{\langle\tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle\tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi-\xi_1|^3 + |\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}} \right\|_{L^\infty_{\xi,\tau}}.
\end{aligned}$$

Entonces, para $\beta > 1/2$ y $\alpha \geq 1/4$ probaremos que existe $C > 0$ tal que

$$G(\xi,\tau) = \frac{|\xi|^2}{\langle\tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle\tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi-\xi_1|^3 + |\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}} \leq C.$$

Para $\xi > 0$ dividamos $\mathbb{R}$ en los conjuntos

$$A_1 = (-\infty, 0], \quad A_2 = [0,\xi], \quad A_3 = [\xi, +\infty).$$

Si $\xi_1 \in A_1$, entonces $\xi_1 \leq 0 < \xi$ y por tanto

$$\begin{aligned}
&\int_{A_1} \frac{d\xi_1}{\langle\tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi-\xi_1|^3 + |\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}} \\
&\qquad = \int_{A_1} \frac{d\xi_1}{\langle\tau - \xi_1^3 - \xi_1 + (\xi-\xi_1)^3 + (\xi-\xi_1)\rangle^{2\beta}} \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle 2\xi_1^3 + 2\xi_1 - \tau - \xi^3 + 3\xi^2\xi_1 - 3\xi\xi_1^2 - \xi\rangle^{2\beta}} = I_1.
\end{aligned}$$

Usando el cambio de variable

$$\mu = 2\xi_1^3 + 2\xi_1 - \tau - \xi^3 + 3\xi^2\xi_1 - 3\xi\xi_1^2 - \xi, \quad d\mu = (6\xi_1^2 - 6\xi\xi_1 + 3\xi^2 + 2)d\xi_1,$$

y que

$$6\xi_1^2 - 6\xi\xi_1 + 3\xi^2 + 2 = 6\left(\xi_1 - \frac{\xi}{2}\right)^2 + \frac{3\xi^2}{2} + 2 \geq \xi^2,$$

tenemos que

$$\frac{|\xi|^2}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi| \rangle^{2\alpha}} I_1 \leq \frac{1}{(1 + |\tau + \xi^3 + \xi|)^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\langle \mu \rangle^{2\beta}} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\langle \mu \rangle^{2\beta}} \leq C.$$

*Observación* 1.2.3. Usando los cálculos del argumento anterior, para $\xi < 0$ y el conjunto $B_1 = (-\infty, \xi]$ vemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{|\xi|^2}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi| \rangle^{2\alpha}} \int_{B_1} \frac{d\xi_1}{\langle \tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi - \xi_1|^3 + |\xi - \xi_1| \rangle^{2\beta}} \\
&\qquad \leq \frac{|\xi|^2}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi| \rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle 2\xi_1^3 + 2\xi_1 - \tau - \xi^3 + 3\xi^2\xi_1 - 3\xi\xi_1^2 - \xi \rangle^{2\beta}} \\
&\qquad = \frac{|\xi|^2}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi| \rangle^{2\alpha}} I_1 \leq C.
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{A_2} \frac{d\xi_1}{\langle \tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi - \xi_1|^3 + |\xi - \xi_1| \rangle^{2\beta}} \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau + \xi^3 - 3\xi^2\xi_1 + 3\xi\xi_1^2 + \xi \rangle^{2\beta}} = I_2. \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

A continuación haremos el siguiente cambio de variable

$$\mu = \tau + \xi^3 - 3\xi^2\xi_1 + 3\xi\xi_1^2 + \xi,\ d\mu = 3\xi(2\xi_1 - \xi)d\xi_1,\ \xi_1 = \frac{1}{2}\left[\xi \pm \sqrt{\frac{4\mu - \xi^3 - 4\tau - 4\xi}{3\xi}}\ \right].$$

Usando que $2\alpha \geq 1/2$, la desigualdad (1.9) en el Lema 1.2.1, que

$$|3\xi(2\xi_1 - \xi)| = \sqrt{3\xi}\sqrt{4\mu - \xi^3 - 4\tau - 4\xi}, \quad d\xi_1 = \frac{d\mu}{\sqrt{3\xi}\sqrt{4\mu - \xi^3 - 4\tau - 4\xi}},$$

y el hecho

$$\left|\frac{3\xi^3}{4}\right| = \left|\tau + \xi^3 + \xi - \left(\tau + \xi + \frac{\xi^3}{4}\right)\right| \leq \langle \tau + \xi^3 + \xi \rangle \left\langle \tau + \xi + \frac{\xi^3}{4} \right\rangle,$$

obtenemos que

$$\frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}\,I_2 \leq \frac{\xi^{3/2}}{\langle\tau+\xi^3+\xi\rangle^{2\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu}{\sqrt{4\mu-\xi^3-4\tau-4\xi}\,\langle\mu\rangle^{2\beta}}$$
$$\leq \frac{\xi^{3/2}}{\langle\tau+\xi^3+\xi\rangle^{2\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu-\left(\tau+\xi+\frac{\xi^3}{4}\right)}\;\langle\mu\rangle^{2\beta}}$$
$$\leq \frac{C\xi^{3/2}}{\langle\tau+\xi^3+\xi\rangle^{2\alpha}\left\langle\tau+\xi+\frac{\xi^3}{4}\right\rangle^{1/2}} \leq C.$$

Notando que

$$\int_{A_3}\frac{d\xi_1}{\langle\tau+|\xi_1|^3+|\xi_1|+|\xi-\xi_1|^3+|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}}$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_1}{\langle\tau+2\xi_1^3+2\xi_1-\xi^3+3\xi^2\xi_1-3\xi\xi_1^2-\xi\rangle^{2\beta}} = I_3,$$

y usando el cambio de variable

$$\mu=\tau+2\xi_1^3+2\xi_1-\xi^3+3\xi^2\xi_1-3\xi\xi_1^2-\xi,\quad d\mu=(6\xi_1^2-6\xi\xi_1+3\xi^2+2)d\xi_1,$$

tenemos que

$$\frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}I_3 \leq \frac{1}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu}{\langle\mu\rangle^{2\beta}} \leq C.$$

*Observación* 1.2.4. Usando los cálculos del procedimiento anterior, para $\xi < 0$ y el conjunto $B_3 = [0,+\infty)$ tenemos que

$$\frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}\int_{B_3}\frac{d\xi_1}{\langle\tau+|\xi_1|^3+|\xi_1|+|\xi-\xi_1|^3+|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}}$$
$$\leq \frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}I_3 \leq C.$$

Ahora, de la Observación 1.2.3 y la Observación 1.2.4, para $\xi < 0$ consideramos únicamente $B_2 = [\xi, 0]$. Luego entonces

$$\int_{B_2}\frac{d\xi_1}{\langle\tau+|\xi_1|^3+|\xi_1|+|\xi-\xi_1|^3+|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}} \leq \int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_1}{\langle\tau+\xi^3-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi\rangle^{2\beta}}.$$

Del cambio de variable

$$\mu = \tau - \xi^3 + 3\xi^2\xi_1 - 3\xi\xi_1^2 - \xi, \quad d\mu = 3\xi(\xi - 2\xi_1)d\xi_1,$$

vemos que

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left[\xi \pm \sqrt{\frac{4\tau - \xi^3 - 4\xi - 4\mu}{3\xi}}\,\right],$$

y además

$$|3\xi(2\xi_1 - \xi)| = \sqrt{3|\xi|}\sqrt{4\mu + 4\xi + \xi^3 - 4\tau}, \qquad d\xi_1 = \frac{d\mu}{\sqrt{3|\xi|}\sqrt{4\mu + 4\xi + \xi^3 - 4\tau}}.$$

Así, usando la desigualdad (1.9) en el Lema 1.2.1 y que

$$\left|\frac{3\xi^3}{4}\right| \leq \langle \tau - \xi^3 - \xi\rangle \left\langle \tau - \xi - \frac{\xi^3}{4}\right\rangle,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi|^2}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} &\int_{B_3} \frac{d\xi_1}{\langle \tau + |\xi_1|^3 + |\xi_1| + |\xi - \xi_1|^3 + |\xi - \xi_1|\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{3/2}}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{4\mu + 4\xi + \xi^3 - 4\tau}\,\langle\mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{3/2}}{\langle \tau - \xi^3 - \xi\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu - \left(\tau - \xi - \frac{\xi^3}{4}\right)}\,\langle\mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{C|\xi|^{3/2}}{\langle \tau - \xi^3 - \xi\rangle^{2\alpha}\left\langle \tau - \xi - \frac{\xi^3}{4}\right\rangle^{1/2}} \leq C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\beta > 1/2$, $\alpha \geq 1/4$ y $\sigma, \sigma_1, \sigma_3$ como en el caso $(C1)$ tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$|Z(f, g, h)| \leq C\|f\|_{L^2_{\xi,\tau}}\|g\|_{L^2_{\xi,\tau}}\|h\|_{L^2_{\xi,\tau}}.$$

Ahora, consideremos $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ como en el caso $(C_3)$. De la desigualdad (1.8) en el Lema 1.2.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle\sigma_1\rangle^{2\beta}\langle\sigma_2\rangle^{2\beta}} \leq \frac{C}{\langle |\xi_1|^3 + |\xi_1| - \tau - |\xi_2|^3 - |\xi_2|\rangle^{2\beta}}.$$

Entonces vemos que

$$|Z(f, g, h)|^2 \leq C\|f\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\|g\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\|H\|_{L^\infty_{\xi,\tau}},$$

donde

$$H(\xi,\tau)=\frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_1}{\langle|\xi_1|^3+|\xi_1|-\tau-|\xi-\xi_1|^3-|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}}.$$

Siguiendo el argumento previo, para $\xi>0$ dividimos de nuevo $\mathbb{R}$ en los conjuntos

$$A_1=(-\infty,0],\quad A_2=[0,\xi],\quad A_3=[\xi,+\infty).$$

Primero vemos que

$$\int_{A_1}\frac{d\xi_1}{\langle|\xi_1|^3+|\xi_1|-\tau-|\xi-\xi_1|^3-|\xi_1|\rangle^{2\beta}}\le\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_1}{\langle\tau+\xi^3-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi\rangle^{2\beta}}=I_2,$$

donde $I_2$ está definido en (1.11). En consecuencia

$$\frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}I_2\le C.$$

Ahora, notemos que

$$\int_{A_2}\frac{d\xi_1}{\langle|\xi_1|^3+|\xi_1|-\tau-|\xi-\xi_1|^3-|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}}$$
$$\le\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_1}{\langle2\xi_1^3+2\xi_1-\tau-\xi^3+3\xi^2\xi_1-3\xi\xi_1^2-\xi\rangle^{2\beta}}=I_1.$$

Así que

$$\frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}I_1\le C.$$

A continuación vemos que

$$\int_{A_3}\frac{d\xi_1}{\langle|\xi_1|^3+|\xi_1|-\tau-|\xi-\xi_1|^3-|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}}$$
$$\le\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_1}{\langle\xi^3-\tau-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi\rangle^{2\beta}}=I_4.$$

Usando el cambio de variable $\mu=\xi^3-\tau-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi$ y $d\mu=3\xi(2\xi_1-\xi)d\xi_1$, tenemos que

$$\xi_1=\frac{1}{2}\left[\xi\pm\sqrt{\frac{4\tau-\xi^3-4\xi+4\mu}{3\xi}}\right],$$

y también que

$$|3\xi(2\xi_1-\xi)| = \sqrt{3\xi}\sqrt{4\mu+4\tau-\xi^3-4\xi}, \quad d\xi_1 = \frac{d\mu}{\sqrt{3\xi}\sqrt{4\mu+4\tau-\xi^3-4\xi}}.$$

Luego, usando la desigualdad (1.9) en el Lema 1.2.1 y que

$$\left|\frac{5\xi^3}{4}\right| \leq \langle \tau+\xi^3+\xi\rangle \left\langle \tau-\xi-\frac{\xi^3}{4}\right\rangle,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi|^2}{\langle \tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}} I_4 &\leq \frac{\xi^{3/2}}{\langle \tau+\xi^3+\xi\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{4\mu+4\tau-\xi^3-4\xi}\,\langle\mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{\xi^{3/2}}{\langle \tau+\xi^3+\xi\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu-\left(-\tau+\xi+\frac{\xi^3}{4}\right)}\,\langle\mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{C\xi^{3/2}}{\langle \tau+\xi^3+\xi\rangle^{2\alpha}\left\langle \tau-\xi-\frac{\xi^3}{4}\right\rangle^{1/2}} \leq C.
\end{aligned}$$

Ahora, para $\xi<0$ consideramos $B_1=(-\infty,\xi]$, $B_2=[\xi,0]$ y $B_3=[0,+\infty]$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} \frac{d\xi_1}{\langle |\xi_1|^3+|\xi_1|-\tau-|\xi-\xi_1|^3-|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}} \\
&\qquad\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau+\xi^3-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi\rangle^{2\beta}} = I_2.
\end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $\mu=\tau+\xi^3-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi$ y $d\mu=3\xi(2\xi_1-\xi)d\xi_1$ obtenemos que

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left[\xi \pm \sqrt{\frac{4\mu-4\tau-4\xi-\xi^3}{3\xi}}\right],$$

y también que

$$|3\xi(2\xi_1-\xi)| = \sqrt{3|\xi|}\sqrt{4\tau+4\xi+\xi^3-4\mu}, \quad d\xi_1 = \frac{d\mu}{\sqrt{3|\xi|}\sqrt{4\tau+4\xi+\xi^3-4\mu}}.$$

De la desigualdad (1.9) en el Lema 1.2.1 y del hecho que

$$\left|\frac{5\xi^3}{4}\right| \leq \langle \tau-\xi^3-\xi\rangle \left\langle \tau+\xi+\frac{\xi^3}{4}\right\rangle,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi|^2}{\langle \tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}} I_2 &\leq \frac{|\xi|^{3/2}}{\langle \tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{4\tau+4\xi+\xi^3-4\mu}\,\langle\mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{3/2}}{\langle \tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{\left(\tau+\xi+\frac{\xi^3}{4}\right)-4\mu}\,\langle\mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{C|\xi|^{3/2}}{\langle \tau-\xi^3-\xi\rangle^{2\alpha}\left\langle \tau+\xi+\frac{\xi^3}{4}\right\rangle^{1/2}} \leq C.
\end{aligned}$$

A continuación, notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_2} \frac{d\xi_1}{\langle |\xi_1|^3+|\xi_1|-\tau-|\xi-\xi_1|^3-|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}} \\
&\qquad\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau+2\xi_1^3+2\xi_1-\xi^3+3\xi^2\xi_1-3\xi\xi_1^2-\xi\rangle^{2\beta}} = I_3,
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{|\xi|^2}{\langle \tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}} I_3 \leq C.$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_3} \frac{d\xi_1}{\langle |\xi_1|^3+|\xi_1|-\tau-|\xi-\xi_1|^3-|\xi-\xi_1|\rangle^{2\beta}} \\
&\qquad\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \xi^3-\tau-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi\rangle^{2\beta}} = I_4.
\end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $\mu = \xi^3-\tau-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2+\xi$ y $d\mu = 3\xi(2\xi_1-\xi)d\xi_1$, tenemos que

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left[\xi \pm \sqrt{\frac{4\tau-\xi^3-4\xi+4\mu}{3\xi}}\right]$$

y también que

$$|3\xi(2\xi_1-\xi)| = \sqrt{3|\xi|}\sqrt{\xi^3+\xi-4\tau-4\mu}, \quad d\xi_1 = \frac{d\mu}{\sqrt{3|\xi|}\sqrt{\xi^3+\xi-4\tau-4\mu}}.$$

Así, usando la desigualdad (1.9) en el Lema 1.2.1 y que

$$\left|\frac{3\xi^3}{4}\right| \leq \langle \tau - \xi^3 - \xi\rangle \Big\langle \tau - \xi - \frac{\xi^3}{4}\Big\rangle,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi|^2}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} I_4 &\leq \frac{|\xi|^{3/2}}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{\xi^3 + \xi - 4\tau - 4\mu}\,\langle \mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{3/2}}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\sqrt{\left(\xi - \tau + \frac{\xi^3}{4}\right) - \mu}\,\langle \mu\rangle^{2\beta}} \\
&\leq \frac{C|\xi|^{3/2}}{\langle \tau - \xi^3 - \xi\rangle^{2\alpha} \Big\langle \tau - \xi - \frac{\xi^3}{4}\Big\rangle^{1/2}} \leq C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\sigma, \sigma_1, \sigma_3$ como en el caso $(C_3)$ tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$|Z(f,g,h)| \leq C\|f\|_{L^2_{\xi,\tau}} \|g\|_{L^2_{\xi,\tau}} \|h\|_{L^2_{\xi,\tau}}.$$

Ahora, consideremos $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ como en el caso $(C_4)$. Usando el cambio de variable

$$(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) \mapsto -(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
|Z(f,g,h)|^2 &\leq \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi_2,\tau_2) g(\xi_1,\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right) \\
&\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^2 d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau - |\xi|^3 - |\xi|\rangle^{\alpha} \langle \tau_1 + |\xi_1|^3 + |\xi_1|\rangle^{\beta} \langle \tau_2 - |\xi_2|^3 - |\xi_2|\rangle^{\beta}} \right) d\xi d\tau \\
&= \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(-\xi_2,-\tau_2) g(-\xi_1,-\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right) \\
&\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^2 d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{\alpha} \langle \tau_1 - |\xi_1|^3 - |\xi_1|\rangle^{\beta} \langle \tau_2 + |\xi_2|^3 + |\xi_2|\rangle^{\beta}} \right) d\xi d\tau \\
&\leq C\|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(-\xi_2,-\tau_2) g(-\xi_1,-\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right) \\
&\qquad \times \left( \frac{|\xi|^2}{\langle \tau + |\xi|^3 + |\xi|\rangle^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle |\xi_1|^3 + |\xi_1| - \tau - |\xi_2|^3 - |\xi_2|\rangle^{2\beta}} \right) d\xi d\tau \\
&\leq C\|f\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \|g\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}} \|H\|_{L^\infty_{\xi,\tau}},
\end{aligned}$$

entonces, la demostración de la desigualdad (1.10) con $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ como en el caso $(C_4)$ se reduce a la prueba de (1.10) con $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ como en el caso $(C_3)$. Similarmente, usando el cambio de variable $(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\mapsto -(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)$, vemos que la prueba de (1.10) con $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en los casos $(C_5)$ y $(C_6)$ puede ser reducida, respectivamente a la demostración de (1.10) con $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ como en los casos $(C_2)$ y $(C_1)$.

Finalmente, consideremos $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en el caso $(C_2)$. Usando los cambios de variable

$$\tau_2=\tau-\tau_1,\quad \xi_2=\xi-\xi_1,\quad (\xi,\tau,\xi_2,\tau_2)\mapsto -(\xi,\tau,\xi_2,\tau_2),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
&|Z(f,g,h)|^2\\
&\le \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|f(\xi_2,\tau_2)g(\xi_1,\tau_1)|^2d\xi_1d\tau_1\right)\\
&\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\xi|^2d\xi_1d\tau_1}{\langle\tau-|\xi|^3-|\xi|\rangle^\alpha\langle\tau_1-|\xi_1|^3-|\xi_1|\rangle^\beta\langle\tau_2+|\xi_2|^3+|\xi_2|\rangle^\beta}\right)d\xi d\tau\\
&= \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|f(\xi_2,\tau_2)g(\xi-\xi_2,\tau-\tau_2)|^2d\xi_2d\tau_2\right)\\
&\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\xi|^2d\xi_2d\tau_2}{\langle\tau-|\xi|^3-|\xi|\rangle^\alpha\langle\tau-\tau_2-|\xi-\xi_2|^3-|\xi-\xi_2|\rangle^\beta\langle\tau_2+|\xi_2|^3+|\xi_2|\rangle^\beta}\right)d\xi d\tau\\
&= \|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|f(-\xi_2,-\tau_2)g(\xi_2-\xi,\tau_2-\tau)|^2d\xi_2d\tau_2\right)\\
&\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\xi|^2d\xi_2d\tau_2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^\alpha\langle\tau-\tau_2+|\xi-\xi_2|^3+|\xi-\xi_2|\rangle^\beta\langle\tau_2-|\xi_2|^3-|\xi_2|\rangle^\beta}\right)d\xi d\tau\\
&\le C\|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|f(-\xi_2,-\tau_2)g(\xi_2-\xi,\tau_2-\tau)|^2d\xi_2d\tau_2\right)\\
&\qquad\times\left(\frac{|\xi|^2}{\langle\tau+|\xi|^3+|\xi|\rangle^{2\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_2}{\langle|\xi_2|^3+|\xi_2|-\tau-|\xi-\xi_2|^3-|\xi-\xi_2|\rangle^{2\beta}}\right)d\xi d\tau\\
&\le C\|f\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\|g\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\|h\|^2_{L^2_{\xi,\tau}}\|H\|_{L^\infty_{\xi,\tau}}
\end{aligned}$$

y entonces la prueba se reduce al caso $(C_3)$.

Por último,

$$\begin{aligned}
&\|(\partial_x\Phi)(\partial_x\Phi_1)\|_{Y^{s+1,-\alpha}}\\
&\qquad=\sup_{\|h\|_{L^2_{\xi,\tau}}=1}\bigg|\int_{\mathbb{R}^4}|\xi|\langle\xi\rangle^s\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{-\alpha}(\xi-\xi_1)\widetilde{\Phi}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\xi_1\widetilde{\Phi}_1(\xi_1,\tau_1)\\
&\qquad\qquad\times h(\xi,\tau)\,d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1\bigg|.
\end{aligned}$$

Entonces, definiendo

$$f(\xi,\tau)=\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\xi\widetilde{\Phi}(\xi,\tau),\quad f_1(\xi,\tau)=\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{\beta}\langle\xi\rangle^{s}\xi\widetilde{\Phi}_1(\xi,\tau),$$

tenemos que (ii) es equivalente a

$$|K(f,f_1,h)|\leq C\|f\|_{L^2_{\xi,\tau}}\|f_1\|_{L^2_{\xi,\tau}}\|h\|_{L^2_{\xi,\tau}} \tag{1.12}$$

donde

$$K(f,f_1,h)=\int_{\mathbb{R}^4}\frac{\xi\langle\xi\rangle^{s}f(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)f_1(\xi_1,\tau_1)h(\xi,\tau)\,d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1}{\langle\xi_1\rangle^{s}\langle\xi-\xi_1\rangle^{s}\langle|\tau|-\phi(\xi)\rangle^{\alpha}\langle|\tau_1|-\phi(\xi_1)\rangle^{\beta}\langle|\tau-\tau_1|-\phi(\xi-\xi_1)\rangle^{\beta}},$$

y por consiguiente la demostración de (1.12) es análoga a la demostración de (1.10).

□

## 1.3. Buen planteamiento

El siguiente teorema constituye el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 1.3.1.** *Sean $s\geq 0$ y $1/2<\beta\leq 3/4$, entonces para todo $(\eta_0,\Phi_0)\in H^s\times\mathcal{V}^{s+1}$, existen un tiempo $T=T(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s\times\mathcal{V}^{s+1}})>0$ y una única solución $(\eta,\Phi)$ del problema de Cauchy* (1.1)-(1.2) *tal que*

$$\eta\in C\left([0,T]\,:\,H^s\right)\cap X_T^{s,\beta}\quad y\quad \Phi\in C\left([0,T]\,:\,\mathcal{V}^{s+1}\right)\cap Y_T^{s+1,\beta}.$$

*Además, para todo $0<T'<T$ existe una vecindad $\mathbb{V}$ de $(\eta_0,\Phi_0)$ en $H^s\times\mathcal{V}^{s+1}$ tal que la aplicación dato-solución es Lipschitz de $\mathbb{V}$ en la clase*

$$C\left([0,T']\,:\,H^s\times\mathcal{V}^{s+1}\right)\cap\left(X_T^{s,\beta}\times Y_T^{s+1,\beta}\right).$$

*Demostración.* Para $(\eta_0,\Phi_0)\in H^s\times\mathcal{V}^{s+1}$ y $0<T<1$ consideremos el operador $\Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2)$, donde $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ están dados por

$$\Gamma_1(\eta,\Phi)(t)=\psi(t)S_1(t)(\eta_0,\Phi_0)-\psi_T(t)\int_0^t S_1(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi),\frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'$$

$$\Gamma_2(\eta,\Phi)(t)=\psi(t)S_2(t)(\eta_0,\Phi_0)-\psi_T(t)\int_0^t S_2(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi),\frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'.$$

Ahora, sea $Z_M$ la bola cerrada de radio $M$ centrada en el origen en $X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$, es decir,

$$Z_M = \{(\eta, \Phi) \in X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta} : \|(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \leq M\}.$$

Probaremos que la aplicación $(\eta, \Phi) \mapsto \Gamma(\eta, \Phi)$ es una contracción si $M$ y $T$ son elegidos apropiadamente. En efecto, sea $\alpha \in [1/4, 1/2)$ tal que $\beta \leq 1 - \alpha$ y $\delta = 1 - (\beta + \alpha)$. En consecuencia, usando el Lema 1.1.1, el Lema 1.1.2 con $\beta' = -\alpha$ y el Lema 1.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta}} &\leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} + C_2 T^\delta \Big( \|\partial_x(\eta \partial_x \Phi)\|_{X^{s,-\alpha}} + \|(\partial_x \Phi)^2\|_{Y^{s+1,-\alpha}} \Big) \\
&\leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} + C_2 C_3 T^\delta \Big( \|\eta\|_{X^{s,\beta}} \|\Phi\|_{Y^{s+1,\beta}} + \|\Phi\|^2_{Y^{s+1,\beta}} \Big) \\
&\leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} + C_2 C_3 T^\delta \|(\eta, \Phi)\|^2_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}}.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2(\eta, \Phi)\|_{Y^{s+1,\beta}} &\leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} + C_2 T^\delta \Big( \|\partial_x(\eta \partial_x \Phi)\|_{X^{s,-\alpha}} + \|(\partial_x \Phi)^2\|_{Y^{s+1,-\alpha}} \Big) \\
&\leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} + C_2 C_3 T^\delta \|(\eta, \Phi)\|^2_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|\Gamma(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} + C_2 C_3 T^\delta \|(\eta, \Phi)\|^2_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}}. \tag{1.13}$$

Si elegimos $M = 2C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}}$ y $0 < T < 1$ tal que

$$K_1 = 4 C_1 C_2 C_3 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} T^\delta < 1/2, \tag{1.14}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} &\leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} (1 + 4 C_1 C_2 C_3 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} T^\delta) \\
&\leq 2 C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} = M,
\end{aligned}$$

de lo cual se sigue que $\Gamma$ envía $Z_M$ en $Z_M$. Seguidamente, demostremos que $\Gamma$ es una contracción. En efecto, si $(\eta, \Phi), (\eta_1, \Phi_1) \in Z_M$, usando el Lema 1.1.2 y el Lema 1.2.2

tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1(\eta,\Phi)-&\Gamma_1(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}}\\
&\leq C_2T^{\delta}\Big(\|\partial_x(\eta\partial_x\Phi-\eta_1\partial_x\Phi_1)\|_{X^{s,-\alpha}}+\|(\partial_x\Phi)^2-(\partial_x\Phi_1)^2\|_{Y^{s+1,-\alpha}}\Big)\\
&\leq C_2T^{\delta}\Big(\|\partial_x(\eta\partial_x(\Phi-\Phi_1))\|_{X^{s,-\alpha}}+\|\partial_x((\eta-\eta_1)\partial_x\Phi_1)\|_{X^{s,-\alpha}}\\
&\qquad\qquad+\|\partial_x(\Phi-\Phi_1)\partial_x(\Phi+\Phi_1)\|_{Y^{s+1,-\alpha}}\Big)\\
&\leq C_2C_3T^{\delta}\Big(\|\eta\|_{X^{s,\beta}}\|\Phi-\Phi_1\|_{Y^{s+1,\beta}}+\|\eta-\eta_1\|_{X^{s,\beta}}\|\Phi_1\|_{Y^{s+1,\beta}}\\
&\qquad\qquad+\|\Phi-\Phi_1\|_{Y^{s+1,\beta}}\|\Phi+\Phi_1\|_{Y^{s+1,\beta}}\Big)\\
&\leq C_2C_3T^{\delta}\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\Big(\|(\eta,\Phi)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\\
&\qquad\qquad+\|(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\Big).
\end{aligned}$$

De forma similar vemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2(\eta,\Phi)-&\Gamma_2(\eta_1,\Phi_1)\|_{Y^{s+1,\beta}}\\
&\leq C_2T^{\delta}\Big(\|\partial_x(\eta\partial_x\Phi-\eta_1\partial_x\Phi_1)\|_{X^{s,-\alpha}}+\|(\partial_x\Phi)^2-(\partial_x\Phi_1)^2\|_{Y^{s+1,-\alpha}}\Big)\\
&\leq C_2T^{\delta}\Big(\|\partial_x(\eta\partial_x(\Phi-\Phi_1))\|_{X^{s,-\alpha}}+\|\partial_x((\eta-\eta_1)\partial_x\Phi_1)\|_{X^{s,-\alpha}}\\
&\qquad\qquad+\|\partial_x(\Phi-\Phi_1)\partial_x(\Phi+\Phi_1)\|_{Y^{s+1,-\alpha}}\Big)\\
&\leq C_2C_3T^{\delta}\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\Big(\|(\eta,\Phi)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\\
&\qquad\qquad+\|(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\Big).
\end{aligned}$$

De este modo concluimos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(\eta,\Phi)-&\Gamma(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\\
&\leq C_2C_3T^{\delta}\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\Big(\|(\eta,\Phi)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\\
&\qquad\qquad+\|(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\Big)\\
&\leq 2MC_2C_3T^{\delta}\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}. \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Así, escogiendo $0<T<1$ suficientemente pequeño tal que (1.14) se cumpla, obtenemos que

$$\|\Gamma(\eta,\Phi)-\Gamma(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}}\leq K_1\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{X^{s,\beta}\times Y^{s+1,\beta}},$$

y en consecuencia $\Gamma$ es una contracción en $Z_M$. Por lo tanto, por el Teorema de punto fijo de Banach tenemos que existe un único punto fijo $(\eta, \Phi)$ de $\Gamma$ en $Z_M$, el cual es solución del problema integral tuncrado (1.5). Ahora, si $(\eta_1, \Phi_1)$ es una restricción de $(\eta, \Phi)$ en $[0, T]$, entonces usando el Lema 1.1.3 tenemos que

$$\eta_1 \in C([0,T] \,:\, H^s) \cap X_T^{s,\beta}, \quad \Phi_1 \in C([0,T] \,:\, \mathcal{V}^{s+1}) \cap Y_T^{s+1,\beta},$$

y también que $(\eta_1, \Phi_1)$ es una solución del problema integral (1.4) en $[0, T]$.

Del argumento de punto fijo usado anteriormente, tenemos la unicidad para el problema integral truncado (1.5) en el conjunto $Z_M$. Debemos ahora probar la unicidad del problema integral (1.4) en el espacio $X_T^{s,\beta} \times Y_T^{s+1,\beta}$.

Si $T > 0$, sea $(\eta, \Phi) \in X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$ la solución del problema integral truncado (1.5) obtenida anteriormente y $(\eta_1, \Phi_1) \in X_T^{s,\beta} \times Y_T^{s+1,\beta}$ una solución del problema integral (1.4) con la misma condición inicial $(\eta_0, \Phi_0) \in H^s \times \mathcal{V}^{s+1}$. Fijemos una extensión $(\eta_2, \Phi_2) \in X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$ de $(\eta_1, \Phi_1)$, entonces para algún $T^* < T < 1$ que definiremos después, vemos que

$$\eta_2(t) = \psi(t)S_1(t)(\eta_0, \Phi_0) - \psi_{T^*}(t) \int_0^t S_1(t-t')\Big(\partial_x(\eta_2\partial_x\Phi_2), \frac{1}{2}(\partial_x\Phi_2)^2\Big)(t')dt'$$

y

$$\Phi_2(t) = \psi(t)S_2(t)(\eta_0, \Phi_0) - \psi_{T^*}(t) \int_0^t S_2(t-t')\Big(\partial_x(\eta_2\partial_x\Phi_2), \frac{1}{2}(\partial_x\Phi_2)^2\Big)(t')dt',$$

para todo $t \in [0, T^*]$.

De la definición del espacio $X_{T^*}^{s,\beta} \times Y_{T^*}^{s+1,\beta}$ tenemos que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $(\omega, \vartheta) \in X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}$ tal que para todo $t \in [0, T^*]$,

$$\omega(t) = \eta(t) - \eta_2(t), \quad \vartheta(t) = \Phi(t) - \Phi_2(t)$$

y

$$\|\omega\|_{X^{s,\beta}} \leq \|\eta - \eta_2\|_{X_{T^*}^{s,\beta}} + \epsilon, \quad \|\vartheta\|_{Y^{s+1,\beta}} \leq \|\Phi - \Phi_2\|_{Y_{T^*}^{s+1,\beta}} + \epsilon. \tag{1.16}$$

Definamos

$$\omega_1(t) = -\psi_{T^*}(t) \int_0^t S_1(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\vartheta) + \partial_x(\omega\partial_x\Phi_2), \frac{1}{2}\partial_x\vartheta\partial_x(\Phi + \Phi_2)\Big)(t')dt',$$

$$\vartheta_1(t) = -\psi_{T^*}(t) \int_0^t S_2(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\vartheta) + \partial_x(\omega\partial_x\Phi_2), \frac{1}{2}\partial_x\vartheta\partial_x(\Phi + \Phi_2)\Big)(t')dt'.$$

En consecuencia, $\omega_1(t) = \eta(t) - \eta_2(t)$ y $\vartheta_1(t) = \Phi(t) - \Phi_2(t)$, para todo $t \in [0, T^*]$. Por tanto, del Lema 1.1.2 y el Lema 1.2.2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\eta - \eta_2\|_{X^{s,\beta}_{T^*}} \\
&\quad \leq \|\omega_1\|_{X^{s,\beta}} \\
&\quad \leq C_2 C_3 T^{*\delta} \|(\omega, \vartheta)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \Big( \|(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} + \|(\eta_2, \Phi_2)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \Big) \\
&\quad \leq 2 C_2 C_3 N T^{*\delta} \|(\omega, \vartheta)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

donde suponemos que

$$\text{máx}\left\{ \|(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}},\ \|(\eta_2, \Phi_2)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \right\} \leq N.$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi - \Phi_2\|_{Y^{s+1,\beta}_{T^*}} \\
&\quad \leq \|\vartheta_1\|_{Y^{s+1,\beta}} \\
&\quad \leq C_2 C_3 T^{*\delta} \|(\omega, \vartheta)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \Big( \|(\eta, \Phi)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} + \|(\eta_2, \Phi_2)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \Big) \\
&\quad \leq 2 C_2 C_3 N T^{*\delta} \|(\omega, \vartheta)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Si escogemos $T^* > 0$ tal que

$$4 C_2 C_3 N T^{*\delta} \leq 1/2,$$

obtenemos, usando (1.16), (1.17) y (1.18), que

$$\begin{aligned}
\|\eta - \eta_2\|_{X^{s,\beta}_{T^*}} + \|\Phi - \Phi_2\|_{Y^{s+1,\beta}_{T^*}} &\leq 4 C_2 C_3 N T^{*\delta} \|(\omega, \vartheta)\|_{X^{s,\beta} \times Y^{s+1,\beta}} \\
&\leq \frac{1}{2} \Big( \|\eta - \eta_2\|_{X^{s,\beta}_{T^*}} + \|\Phi - \Phi_2\|_{Y^{s+1,\beta}_{T^*}} + 2\epsilon \Big).
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\|\eta - \eta_2\|_{X^{s,\beta}_{T^*}} + \|\Phi - \Phi_2\|_{Y^{s+1,\beta}_{T^*}} \leq 2\epsilon.$$

Por lo tanto, $\eta = \eta_2$ y $\Phi = \Phi_2$ en $[0, T^*]$. Ahora, ya que el argumento no depende de la condición inicial, entonces usando un argumento conocido (ver por ejemplo el Teorema 3.3.1 de [10]), podemos repetir este proceso un número finito de veces para extender el resultado de unicidad sobre todo el intervalo $[0, T]$.

Combinando el Lema 1.1.3 con un argumento idéntico al utilizado en la prueba de existencia, podemos mostrar que la aplicación dato-solución es localmente Lipschitz. Este procedimiento es relativamente estándar.

□

Capítulo 2

# Propiedad de continuación única

En este capítulo estamos interesados en probar un resultado de continuación única para el sistema Boussinesq-Benney-Luke

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\left(\eta\partial_x\Phi\right) & = 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Más exactamente demostraremos que si $(\eta, \Phi) = (\eta(x,t), \Phi(x,t))$ es una solución del modelo Boussinesq (2.1) con

$$\eta \in L^2(-T,T; H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^2(-T,T; H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \eta_t, \Phi_t \in L^2(-T,T; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$$

y $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en un subconjunto abierto $\Omega$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, entonces $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en la componente horizontal de $\Omega$. Recordemos que la componente horizontal de un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se define como

$$\Omega_1 = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ \exists x_1 \in \mathbb{R}, \ (x_1, t) \in \Omega\right\}.$$

Inicialmente, usando una versión particular de la desigualdad de Treves, establecemos un estimativo tipo Carleman para un operador diferencial $\mathcal{L}$ asociado con el sistema (2.1); luego presentamos una serie de resultados auxiliares para finalmente probar la propiedad de continuación única.

## 2.1. Un estimativo tipo Carleman

En esta sección establecemos un estimativo de Carleman para el operador diferencial $\mathcal{L}$ definido como

$$\mathcal{L} := \begin{pmatrix} \partial_t + f(x,t)\partial_x & g(x,t)\partial_x^2 - \partial_x^4 \\ \\ I - \partial_x^2 & \partial_t + h(x,t)\partial_x \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

En adelante usaremos la notación $D = (\partial_x, \partial_t)$. Si $P = P(\xi_1, \xi_2)$ es un polinomio en dos variables, que tiene coeficientes constantes y grado $m$, entonces consideramos el operador diferencial de orden $m$ asociado a $P$,

$$P(D) = P(\partial_x, \partial_t) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

con $D^\alpha = \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Por definición

$$P^{(\beta)}(\xi_1, \xi_2) = \partial_{\xi_1}^{\beta_1} \partial_{\xi_2}^{\beta_2} P(\xi_1, \xi_2),$$

donde $\beta$ está dado por $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$.

Para demostrar el estimativo de Carleman usaremos la siguiente versión de la desigualdad de Treves, cuya demostración puede verse en el Corolario 1 de [45] o también en el Corolario 5.1 de [9].

**Teorema 2.1.1.** *(Desigualdad de Treves) Sea $P(D) = P(\partial_x, \partial_t)$ un operador diferencial de orden $m$ con coeficientes constantes. Entonces para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $\delta > 0$, $\tau > 0$, $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $\psi(x,t) = (x-\delta)^2 + \delta^2 t^2$ tenemos que*

$$\frac{2^{2|\alpha|}\tau^{|\alpha|}\delta^{2\alpha_2}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^2} |P^{(\alpha)}(D)\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \leq C(m,\alpha) \int_{\mathbb{R}^2} |P(D)\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \tag{2.3}$$

*con*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \quad y \quad C(m,\alpha) = \begin{cases} \sup_{|r+\alpha| \leq m} \begin{pmatrix} r+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, & si \quad |\alpha| \leq m, \\ 0, & si \quad |\alpha| > m. \end{cases}$$

A continuación presentamos el estimativo deseado para el operador diferencial $\mathcal{L}$.

**Teorema 2.1.2.** *Sea $\mathcal{L}$ el operador diferencial definido en (2.2), donde las funciones $f, g, h \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Si consideramos*

$$B_\delta := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + t^2 < \delta^2\}, \quad \psi(x,t) = (x-\delta)^2 + \delta^2 t^2, \quad \delta > 0,$$

*entonces existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad*

$$\begin{aligned}\tau^2 \int_{B_\delta} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^4 \int_{B_\delta} |\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ + \tau^3 \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^2 \int_{B_\delta} |\partial_x^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \end{aligned} \tag{2.4}$$

*se satisface para todo $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) \in C_0^\infty(B_\delta) \times C_0^\infty(B_\delta)$ y cualquier $\tau > 0$ con*

$$\frac{\|f\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\|g\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^2} \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{\|h\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^3} \leq \frac{1}{8}.$$

*Demostración.* Sea $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) \in C_0^\infty(B_\delta) \times C_0^\infty(B_\delta)$. Consideremos el polinomio

$$P_2(\xi_1, \xi_2) = -\xi_1^4,$$

y

$$P_2(D) = P_2(\partial_x, \partial_t) = -\partial_x^4$$

el operador diferencial asociado a $P_2$. Luego, si $\alpha = (4, 0)$ tenemos que

$$P_2^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2) = P_2^{(4,0)}(\xi_1, \xi_2) = -24, \quad P_2^{(\alpha)}(D)\Psi_2 = -24\Psi_2$$

y

$$C(4, (4, 0)) = \sup_{|r+\alpha| \leq 4} \binom{r+\alpha}{\alpha} = 1.$$

De donde, usando el Teorema 2.1.1,

$$\begin{aligned}\tau^4 \int_{B_\delta} |\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt &\leq (24) 2^8 \tau^4 \int_{B_\delta} |\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &= \frac{2^{2|\alpha|} \tau^{|\alpha|} \delta^{2\alpha_2}}{\alpha!} \int_{B_\delta} |P_2^{(\alpha)}(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq \int_{B_\delta} |P_2(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Similarmente,

$$P_2^{(3,0)}(\xi_1, \xi_2) = -24\xi_1, \quad P_2^{(3,0)}(D)\Psi_2 = -24\partial_x \Psi_2, \quad C(4, (3, 0)) = 4.$$

Por consiguiente, usando nuevamente el Teorema 2.1.1, obtenemos que

$$\begin{aligned}\tau^3 \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt &\leq \frac{2^6 \tau^3}{24} \int_{B_\delta} |P_2^{(3,0)}(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq \int_{B_\delta} |P_2(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De forma similar,

$$P_2^{(2,0)}(\xi_1, \xi_2) - 12\xi_1^2, \quad P_2^{(2,0)}(D)\Psi_2 = -12\partial_x^2 \Psi_2, \quad C(4, (2,0)) = 6.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\tau^2 \int_{B_\delta} |\partial_x^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt &\leq \frac{2^4 \tau^2}{12} \int_{B_\delta} |P_2^{(2,0)}(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq \int_{B_\delta} |P_2(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ahora, definiendo

$$P_3(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1^2, \quad P_3(D) = I - \partial_x^2,$$

tenemos que

$$P_3^{(2,0)}(\xi_1, \xi_2) = -2, \quad P_3^{(2,0)}(D)\Psi_1 = -2\Psi_1, \quad C(2, (2,0)) = 1,$$

y entonces

$$\begin{aligned}\tau^2 \int_{B_\delta} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt &\leq \frac{2^4 \tau^2}{2} \int_{B_\delta} |P_3^{(2,0)}(D)\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq \int_{B_\delta} |P_3(D)\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Análogamente, tenemos que

$$P_3^{(1,0)}(D)\Psi_1 = -2\partial_x \Psi_1, \quad C(2, (1,0)) = 2,$$

y además

$$\begin{aligned}\tau \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt &\leq \frac{2^2 \tau}{2} \int_{B_\delta} |P_3^{(1,0)}(D)\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq \int_{B_\delta} |P_3(D)\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

De las desigualdades (2.5)-(2.9) vemos que exite $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\tau^2 \int_{B_\delta} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^4 \int_{B_\delta} |\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ + \tau^3 \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^2 \int_{B_\delta} |\partial_x^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq C \int_{B_\delta} \left(|P_2(D)\Psi_2|^2 + |P_3(D)\Psi_1|^2\right) e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ahora, notemos que si $\mathcal{L}_2 = P_2(D) + g(x,t)\partial_x^2$ entonces $P_2(D)\Psi_2 = \mathcal{L}_2\Psi_2 - g(x,t)\partial_x^2\Psi_2$. Por consiguiente, de las desigualdades (2.6)-(2.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |h(x,t)\partial_x\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq \|h\|^2_{L^\infty(B_\delta)} \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq \frac{\|h\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^3} \int_{B_\delta} |P_2(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq \frac{2\|h\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^3} \int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2\right) e^{2\tau\psi} dxdt, \end{aligned} \tag{2.11}$$

y también

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} \leq \|g\|^2_{L^\infty(B_\delta)} \int_{B_\delta} |\partial_x^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq \frac{\|g\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^2} \int_{B_\delta} |P_2(D)\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq \frac{2\|g\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^2} \int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2\right) e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

De forma similar, si $\mathcal{L}_3 = I - \partial_x^2 = P_3(D)$, entonces $P_3(D)\Psi_1 = \mathcal{L}_3\Psi_1$. Luego, usando la desigualdad (2.9) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |f(x,t)\partial_x\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \leq \|f\|^2_{L^\infty(B_\delta)} \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq \frac{\|f\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau} \int_{B_\delta} |P_3(D)\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ = \frac{\|f\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau} \int_{B_\delta} |\mathcal{L}_3\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ahora, si elegimos $\tau > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{\|f\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\|g\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^2} \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{\|h\|^2_{L^\infty(B_\delta)}}{\tau^3} \leq \frac{1}{8},$$

entonces de las desigualdades (2.11)-(2.13) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\delta} \left(|f(x,t)\partial_x\Psi_1|^2 + |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2 + |h(x,t)\partial_x\Psi_2|^2\right) e^{2\tau\psi}dxdt \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |\mathcal{L}_3\Psi_1|^2\right) e^{2\tau\psi}dxdt + \frac{1}{2}\int_{B_\delta} |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi}dxdt,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\delta} \left(|f(x,t)\partial_x\Psi_1|^2 + |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2 + |h(x,t)\partial_x\Psi_2|^2\right) e^{2\tau\psi}dxdt \\
&\qquad \leq \int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_1\Psi_1|^2 + |\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |\mathcal{L}_3\Psi_1|^2 + |\mathcal{L}_4\Psi_2|^2\right) e^{2\tau\psi}dxdt \\
&\qquad \leq \int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi}dxdt,
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L}_1 = \partial_t + f(x,t)\partial_x, \quad \mathcal{L}_4 = \partial_t + h(x,t)\partial_x$$

y

$$|\mathcal{L}\Psi| = \left(|\mathcal{L}_1\Psi_1|^2 + |\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |\mathcal{L}_3\Psi_1|^2 + |\mathcal{L}_4\Psi_2|^2\right)^{1/2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\delta} \left(|P_2(D)\Psi_2|^2 + |P_3(D)\Psi_1|^2\right) e^{2\tau\psi}dxdt \\
&\quad \leq 2\int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2\right) e^{2\tau\psi}dxdt + \int_{B_\delta} |\mathcal{L}_3\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi}dxdt \\
&\quad \leq 2\int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi}dxdt \\
&\quad + 2\int_{B_\delta} \left(|f(x,t)\partial_x\Psi_1|^2 + |g(x,t)\partial_x^2\Psi_2|^2 + |h(x,t)\partial_x\Psi_1|^2\right) e^{2\tau\psi}dxdt \\
&\quad \leq 4\int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi}dxdt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la desigualdad (2.10) y la desigualdad anterior obtenemos el estimativo tipo Carleman (2.4).

□

*Observación* 2.1.3. El estimativo tipo Carleman (2.4) es invariante bajo cambios de signo en las componentes del operador diferencial $\mathcal{L}$.

**Corolario 2.1.4.** *Sea $T > 0$. Si además de la hipótesis del Teorema 2.1.2 tenemos que*

$$\eta \in L^2(-T,T;H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^2(-T,T;H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \eta_t, \Phi_t \in L^2(-T,T;L^2_{loc}(\mathbb{R}))$$

*y el soporte de $\eta$ y el soporte de $\Phi$ son conjuntos compactos contenidos en $B_\delta$, entonces, la desigualdad (2.4) se cumple si reemplazamos $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ por $U = (\eta, \Phi)$. Es decir,*

$$\begin{aligned}\tau^2 \int_{B_\delta} |\eta|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau \int_{B_\delta} |\partial_x \eta|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^4 \int_{B_\delta} |\Phi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ + \tau^3 \int_{B_\delta} |\partial_x \Phi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^2 \int_{B_\delta} |\partial_x^2 \Phi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L}U|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.14}$$

*Demostración.* Sea $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una sucesión regularizante (en las variables $x$ y $t$) y consideremos

$$U_\epsilon = (\rho_\epsilon * \eta, \rho_\epsilon * \Phi),$$

donde $*$ denota la convolución usual de funciones. Entonces $U_\epsilon \in C_0^\infty(B_\delta) \times C_0^\infty(B_\delta)$ y la desigualdad (2.4) se verifica para $U_\epsilon$, esto es,

$$\begin{aligned}\tau^2 \int_{B_\delta} |\rho_\epsilon * \eta|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau \int_{B_\delta} |\partial_x(\rho_\epsilon * \eta)|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^4 \int_{B_\delta} |\rho_\epsilon * \Phi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ + \tau^3 \int_{B_\delta} |\partial_x(\rho_\epsilon * \Phi)|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^2 \int_{B_\delta} |\partial_x^2(\rho_\epsilon * \Phi)|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L}U_\epsilon|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ahora, para $n = 0, 1$ y $m = 0, 1, 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|\partial_x^n(\rho_\epsilon * \eta) e^{\tau\psi} - \partial_x^n \eta \, e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} &= \|(\rho_\epsilon * \partial_x^n \eta) e^{\tau\psi} - \partial_x^n \eta \, e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} \\ &\leq C\|\partial_x^n(\rho_\epsilon * \eta) - \partial_x^n \eta\|_{L^2(B_\delta)} \to 0,\end{aligned}$$

y además

$$\|\partial_x^m(\rho_\epsilon * \Phi) e^{\tau\psi} - \partial_x^n \Phi \, e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} \leq C\|\partial_x^m(\rho_\epsilon * \Phi) - \partial_x^n \Phi\|_{L^2(B_\delta)} \to 0, \quad \text{cuando} \quad \epsilon \to 0^+,$$

donde $C$ es una constante positiva que depende únicamente de $\tau$ y $\delta$. De forma similar obtenemos que

$$\int_{B_\delta} \left( |\mathcal{L}U_\epsilon|^2 e^{\tau\psi} - |\mathcal{L}U|^2 e^{\tau\psi} \right) dxdt \to 0, \quad \text{cuando} \quad \epsilon \to 0^+.$$

Por lo tanto, pasando al límite en (2.15) obtenemos el estimativo (2.14).

□

## 2.2. Continuación única

En esta sección probaremos el resultado de continuación única para el sistema (2.1). Antes, establecemos los siguientes resultados auxiliares.

**Lema 2.2.1.** *Sean $T > 0$ y $f, g, h \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times (-T, T))$. Sea $U = (\eta, \Phi)$ con*

$$\eta \in L^2(-T, T; H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^2(-T, T; H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \eta_t, \Phi_t \in L^2(-T, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$$

*una solución de $\mathcal{L}U = 0$ en $\mathbb{R} \times (-T, T)$ donde $\mathcal{L}$ es el operador diferencial definido en (2.2). Sea*

$$V = \begin{cases} U & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0. \end{cases}$$

*Si $V \equiv 0$ en la región $\{(x, t) : x < t\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0)$, entonces existe un entorno $\mathcal{O}_1$ de $(0, 0)$ (en el plano $xt$) tal que $V \equiv 0$ en $\mathcal{O}_1$.*

*Demostración.* Por hipótesis existe $0 < \delta < 1$ tal que $V \equiv 0$ en $R_\delta = R_1 \cup R_2$, donde

$$R_1 = \{(x, t) : x < t\} \cap B_\delta, \quad R_2 = \{(x, t) : t < 0\} \cap B_\delta, \quad B_\delta = \{(x, t) : x^2 + t^2 < \delta^2\}.$$

A continuación, consideremos $\chi \in C_0^\infty(B_\delta)$ tal que $\chi = 1$ en un entorno $\mathcal{O}$ de $(0, 0)$ y definamos

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) = \chi V.$$

Entonces tenemos que

$$\Psi_1 \in L^2(-T, T; H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Psi_2 \in L^2(-T, T; H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \partial_t \Psi_1, \partial_t \Psi_2 \in L^2(-T, T; L^2_{loc}(\mathbb{R})),$$

y también que

$$supp\, \Psi \subset B_\delta.$$

Por definición de $\chi$, vemos que $\mathcal{L}\Psi = 0$ en $\mathcal{O}$. Luego, usando el corolario anterior, tenemos para $\psi(x,t) = (x-\delta)^2 + \delta^2 t^2$ y $\tau > 0$ suficientemente grande que

$$\begin{aligned}\tau^2 \int_{B_\delta} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^4 \int_{B_\delta} |\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ + \tau^3 \int_{B_\delta} |\partial_x \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt + \tau^2 \int_{B_\delta} |\partial_x^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt = C \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ahora, usando nuevamente la definición de $\chi$ y el hecho de que $V \equiv 0$ en $R_\delta$, obtenemos que

$$\mathit{supp}\, \Psi \subset D, \quad \mathit{supp}\, \mathcal{L}\Psi \subset D \cap (B_\delta \setminus \mathcal{O}), \quad D = \{(x,t) \,:\, 0 \leq t \leq x < \delta < 1\}.$$

De esto se deduce que si $(x,t) \neq (0,0)$ y $(x,t) \in D$ entonces

$$\psi(x,t) = (x-\delta)^2 + \delta^2 t^2 \leq (t-\delta)^2 + \delta^2 t^2 = t^2(1+\delta^2) - 2t\delta + \delta^2 < \delta^2.$$

Así, existe $0 < \epsilon < \delta^2$ tal que

$$\psi(x,t) \leq \delta^2 - \epsilon, \quad (x,t) \in D \cap (B_\delta \setminus \mathcal{O}).$$

Además, dado que $\psi(0,0) = \delta^2$, podemos escoger un entorno $\mathcal{O}_1$ de $(0,0)$ contenido en $\mathcal{O}$ tal que

$$\psi(x,t) > \delta^2 - \epsilon, \quad (x,t) \in \mathcal{O}_1.$$

De la construcción anterior y la desigualdad (2.16), tenemos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\tau^2 e^{2\tau(\delta^2-\epsilon)} \int_{\mathcal{O}_1} |\Psi_1|^2 dxdt &\leq \tau^2 \int_{\mathcal{O}_1} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq \tau^2 \int_{B_\delta} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq C_1 \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dxdt \\ &\leq C_1 e^{2\tau(\delta^2-\epsilon)} \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\Psi|^2 dxdt,\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}\tau^4 e^{2\tau(\delta^2-\epsilon)}\int_{\mathcal{O}_1}|\Psi_2|^2dxdt &\leq \tau^4\int_{\mathcal{O}_1}|\Psi_2|^2e^{2\tau\psi}dxdt\\ &\leq \tau^4\int_{B_\delta}|\Psi_2|^2e^{2\tau\psi}dxdt\\ &\leq C_1\int_{B_\delta\setminus\mathcal{O}}|\mathcal{L}\Psi|^2e^{2\tau\psi}dxdt\\ &\leq C_1e^{2\tau(\delta^2-\epsilon)}\int_{B_\delta\setminus\mathcal{O}}|\mathcal{L}\Psi|^2dxdt.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathcal{O}_1}|\Psi_1|^2dxdt \leq \frac{C_1}{\tau^2}\int_{B_\delta\setminus\mathcal{O}}|\mathcal{L}\Psi|^2dxdt, \qquad \int_{\mathcal{O}_1}|\Psi_2|^2dxdt \leq \frac{C_1}{\tau^4}\int_{B_\delta\setminus\mathcal{O}}|\mathcal{L}\Psi|^2dxdt.$$

En consecuencia, pasando al límite cuando $\tau \to +\infty$, tenemos que $\Psi \equiv 0$ en $\mathcal{O}_1$. Dado que $V = \Psi$ en $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, vemos que $V \equiv 0$ en $\mathcal{O}_1$.

□

Usando un argumento similar, podemos demostrar el siguiente resultado.

**Lema 2.2.2.** *Sean $T > 0$ y $f, g, h \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times (-T, T))$. Sea $U = (\eta, \Phi)$ con*

$$\eta \in L^2(-T, T; H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^2(-T, T; H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \eta_t, \Phi_t \in L^2(-T, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$$

*una solución de $\mathcal{L}U = 0$ en $\mathbb{R} \times (-T, T)$, donde $\mathcal{L}$ es el operador diferencial definido en (2.2). Sea*

$$V = \begin{cases} 0 & si \quad t \geq 0 \\ U & si \quad t < 0. \end{cases}$$

*Supongamos que $V \equiv 0$ en la región $\{(x, t) : x < -t\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0)$. Entonces existe un entorno $\mathcal{O}_2$ de $(0, 0)$ (en el pano $xt$) tal que $V \equiv 0$ en $\mathcal{O}_2$.*

Usando los lemas anteriores tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.3.** *Sean $T > 0$ y $F_1, F_2, F_3 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times (-T, T))$. Sea $U = (\eta, \Phi)$ con*

$$\eta \in L^2(-T, T; H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^2(-T, T; H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \eta_t, \Phi_t \in L^2(-T, T; L^2_{loc}(\mathbb{R})),$$

*una solución en* $\mathbb{R} \times (-T, T)$ *del sistema*

$$\begin{cases} \eta_t - \partial_x^4 \Phi + F_1(x,t)\partial_x \eta + F_2(x,t)\partial_x^2 \Phi = 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2 \eta + F_3(x,t)\partial_x \Phi = 0. \end{cases}$$

*Sea* $\gamma$ *una circunferencia que pasa por el origen* $(0,0)$*. Supongamos que* $U \equiv 0$ *en el interior del círculo (con frontera* $\gamma$*) en un entorno de* $(0,0)$*. Entonces, existe un entorno de* $(0,0)$ *donde* $U \equiv 0$*.*

*Demostración.* Supongamos que la circunferencia (o una parte de ella) $\gamma$ está dada por $x = u(t)$. Usando la hipótesis tenemos que $U \equiv 0$ en la región $\{(x,t) : x < u(t)\}$ interceptada con un entorno de $(0,0)$. Luego, existe $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ tal que $U \equiv 0$ en un entorno de $(0,0)$ interceptado con $\{(x,t) : x < v(t)\}$ donde

$$v(t) = \begin{cases} \omega t & \text{si} \quad t \geq 0 \\ -\frac{1}{\omega} t & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Ahora, consideremos el siguiente cambio de variable $(x,t) \to (X,T)$ con

$$\begin{aligned} X &= x - v(t) + |t| \\ T &= t. \end{aligned}$$

Notemos que en las nuevas variables, si $T \geq 0$ entonces $U = U(X,T) = (\eta(X,T), \Phi(X,T))$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \eta_T - \partial_X^4 \Phi + (1 - \omega + F_1(X,T))\partial_X \eta + F_2(X,T)\partial_X^2 \Phi = 0, \\ \\ \Phi_T + \eta - \partial_X^2 \eta + (1 - \omega + F_3(X,T))\partial_X \Phi = 0. \end{cases}$$

Además, $U \equiv 0$ en la región $\{(X,T) : X < T,\, T \geq 0\}$ interceptada con un entorno de $(0,0)$ y satisface que

$$\mathcal{L}U = 0 \quad \text{si} \quad T \geq 0,$$

donde

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial_T + f(X,T)\partial_X & g(X,T)\partial_X^2 - \partial_X^4 \\ \\ I - \partial_X^2 & \partial_T + h(X,T)\partial_X \end{pmatrix}$$

con

$$f = 1 - \omega + F_1, \quad g = F_2, \quad h = 1 - \omega + F_3.$$

Ahora, sea

$$V_1 = \begin{cases} U & \text{si} \quad T \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad T < 0. \end{cases}$$

Así, $V_1 \equiv 0$ en la región $\{(X,T) : X < T, T \geq 0\} \cup \{(X,T) : T < 0\}$ interceptada con un entorno de $(0,0)$. Usando el Lema 2.2.1 con el operador diferencial anterior $\mathcal{L}$, tenemos que existe un entorno $\mathcal{O}_1$ de $(0,0)$ en el plano $XT$ donde $V_1 \equiv 0$. Por tanto, si $T \geq 0$ entonces $U \equiv 0$ en $\mathcal{O}_1$.

Similarmente, $U \equiv 0$ en la región $\{(X,T) : X < -T, T < 0\}$ interceptada con un entorno de $(0,0)$ y satisface que

$$\mathcal{L}U = 0 \quad \text{si} \quad T < 0,$$

donde

$$f = \frac{1}{\omega} - 1 + F_1, \quad g = F_2, \quad h = \frac{1}{\omega} - 1 + F_3.$$

En consecuencia, si

$$V_2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad T \geq 0 \\ U & \text{si} \quad T < 0, \end{cases}$$

entonces del Lema 2.2.2 tenemos que existe un entorno $\mathcal{O}_2$ de $(0,0)$ en el plano $XT$ donde $V_2 \equiv 0$. En conclusión, si $T < 0$ entonces $U \equiv 0$ en $\mathcal{O}_2$. Por lo tanto $U \equiv 0$ en $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, y regresando a las variables originales $(x,t)$ tenemos el resultado.

□

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 2.2.4.** *Sean $T > 0$ y $(\eta, \Phi) = (\eta(x,t), \Phi(x,t))$ con*

$$\eta \in L^2(-T,T; H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^2(-T,T; H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \eta_t, \Phi_t \in L^2(-T,T; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$$

*una solución en $\mathbb{R} \times (-T,T)$ del sistema Boussinesq (2.1). Si $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en un subconjunto abierto $\Omega$ de $\mathbb{R} \times (-T,T)$, entonces $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en la componente horizontal de $\Omega$.*

*Demostración.* Definiendo las funciones

$$F_1(x,t) = \partial_x \Phi(x,t), \quad F_2(x,t) = 1 + \eta(x,t), \quad F_3(x,t) = \tfrac{1}{2}\partial_x \Phi(x,t),$$

vemos que el sistema Boussinesq (2.1) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{cases} \eta_t - \partial_x^4 \Phi + F_1(x,t)\partial_x \eta + F_2(x,t)\partial_x^2 \Phi = 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2 \eta + F_3(x,t)\partial_x \Phi = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Usando algunos resultados de inclusión tenemos que

$$\eta \in L^\infty(-T,T; H^1_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^\infty(-T,T; H^3_{loc}(\mathbb{R})),$$

y así

$$\|F_2\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq 1 + \|\eta\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq 1 + C \sup_{t\in(-T,T)} \|\eta(t)\|_{H^1_{loc}(\mathbb{R})},$$

y también

$$\begin{aligned} \|F_3\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times(-T,T))} &\leq \|F_1\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times(-T,T))} \\ &\leq C \sup_{t\in(-T,T)} \|F_1(t)\|_{H^2_{loc}(\mathbb{R})} \\ &\leq C \sup_{t\in(-T,T)} \|\Phi(t)\|_{H^3_{loc}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $F_1, F_2, F_3 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times(-T,T))$. Por consiguiente, probaremos el Teorema 2.2.4 para el sistema (2.17).

Ahora, denotemos por $\Omega_1$ la componente horizontal del conjunto $\Omega$ y sea

$$\Lambda = \{(x,t) \in \Omega_1 \,:\, (\eta,\Phi) \equiv 0 \quad \text{en un entorno de} \quad (x,t)\}.$$

Sea $Q \in \Omega_1$ arbitrario y escojamos $P \in \Lambda$. Además, sea $\Gamma$ una curva continua contenida en $\Omega_1$ que une $P$ y $Q$, parametrizada por una función continua $f : [0,1] \to \Omega_1$ con $f(0) = P$ y $f(1) = Q$. Dado que $P \in \Lambda$ entonces existe $r > 0$ tal que

$$(\eta,\Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_r(P), \tag{2.18}$$

donde $B_r(P)$ es la bola abierta centrada en $P$ de radio $r$. A continuación, sea $r_0 > 0$ con $r_0 < \min\{r, dist(\Gamma, \partial\Omega_1)\}$. Notemos que de la elección de $r_0$, $B_{r_0}(P) \subset B_r(P)$. En consecuencia $B_{r_0}(P) \subset \Lambda$. Ahora, sea $r_1 < \frac{r_0}{4}$. Luego

$$B_{2r_1}(f(s)) \subset \Omega_1, \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1], \tag{2.19}$$

ya que si $w \in B_{2r_1}(f(s))$ y $w \notin \Omega_1$ entonces

$$\|w - f(s)\| < 2r_1 < r_0 < dist(\Gamma, \partial\Omega_1) \leq \|w - f(s)\|,$$

lo cual es una contradicción.

Ahora consideremos el conjunto

$$\Lambda_1 = \{(x,t) \in \Lambda \, : \, (\eta, \Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_1}(x,t) \cap \Omega_1\},$$

y también

$$S = \{0 \leq \ell \leq 1 \, : \, f(s) \in \Lambda_1 \quad \text{siempre que} \quad 0 \leq s \leq \ell\}, \quad \ell_0 = \sup S.$$

Probaremos que $f(\ell_0) \in \Lambda_1$. En efecto, si $w \in B_{r_1}(f(\ell_0))$ y $r_2 = \|w - f(\ell_0)\| \geq 0$, entonces usando la continuidad de $f$, tenemos que existe $0 < \delta < \ell_0$ tal que

$$\|f(\ell_0) - f(\ell_0 - \delta)\| < r_1 - r_2,$$

de modo que

$$\|w - f(\ell_0 - \delta)\| \leq \|w - f(\ell_0)\| + \|f(\ell_0) - f(\ell_0 - \delta)\| < r_1,$$

y además $w \in B_{r_1}(f(\ell_0 - \delta))$. De la definición de $\ell_0$, existe $\ell_\delta \in S$ tal que $\ell_0 - \delta < \ell_\delta \leq \ell_0$, lo que implica que $f(\ell_0 - \delta) \in \Lambda_1$. Luego, usando (2.19) vemos que

$$(\eta, \Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_1}(f(\ell_0 - \delta)) \cap \Omega_1 = B_{r_1}(f(\ell_0 - \delta)). \tag{2.20}$$

En consecuencia, obtenemos que $(\eta(w), \Phi(w)) = 0$, y por tanto

$$(\eta, \Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_1}(f(\ell_0)). \tag{2.21}$$

Por consiguiente, hemos demostrado que $f(\ell_0) \in \Lambda_1$.

Ahora, si $\ell_0 = 1$ entonces del razonamiento anterior tenemos que $Q = f(1) \in \Lambda_1 \subset \Lambda$. En consecuencia, dado que $Q$ fue elegido arbitrariamente obtenemos que $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en $\Omega_1$; lo cual demuestra el Teorema 2.2.4. Por tanto, para completar la demostración del Teorema 2.2.4 debemos probar que $\ell_0 = 1$. En efecto, supongamos que $\ell_0 < 1$ y sea $G$ el conjunto dado por

$$G = \{Y \in \Omega_1 \, : \, \|Y - f(\ell_0)\| = r_1\}.$$

Para $w = (x_1, t_1) \in G$ fijo, consideremos el cambio de variable $(x,t) \to (X,T)$ donde

$$\begin{aligned} X &= x - x_1, \\ T &= t - t_1. \end{aligned}$$

Notemos que $(0,0) \in G^* = \{Y = (X,T) \, : \, \|Y - (f(\ell_0) - w)\| = r_1\}$. Más aún, usando (2.21) vemos que

$$(\eta(X,T), \Phi(X,T)) = 0, \quad (X,T) \in B_{r_1}(f(\ell_0) - w).$$

Por lo tanto, por el Corolario 2.2.3 existe $r_w^* > 0$ tal que

$$(\eta(X,T), \Phi(X,T)) = 0, \quad (X,T) \in B_{r_w^*}(0,0),$$

de lo cual volviendo a las variables originales, tenemos que para cada $w \in G$, existe $r_w^* > 0$ tal que

$$(\eta, \Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_w^*}(w).$$

Entonces, usando (2.21) y la compacidad de $G$ tenemos que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$(\eta, \Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_1+\epsilon_1}(f(\ell_0)). \tag{2.22}$$

Usando nuevamente la continuidad de $f$, tenemos que existe $0 < \delta_1 < 1 - \ell_0$ tal que si $w \in B_{r_1}(f(\ell_0 + \delta_1))$ entonces

$$\|w - f(\ell_0)\| \leq \|w - f(\ell_0 + \delta_1)\| + \|f(\ell_0 + \delta_1) - f(\ell_0)\| < r_1 + \epsilon_1.$$

Así, $w \in B_{r_1+\epsilon_1}(f(\ell_0))$ y por tanto tenemos que $B_{r_1}(f(\ell_0 + \delta_1)) \subset B_{r_1+\epsilon_1}(f(\ell_0))$. En consecuencia, usando (2.22) obtenemos que $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en $B_{r_1}(f(\ell_0 + \delta_1))$, y también que $f(\ell_0 + \delta_1) \in \Lambda_1$, lo cual contradice la definición de $\ell_0$. Luego $\ell_0 = 1$ y la demostración está completa.

$\square$

Capítulo 3

# El problema de Cauchy periódico

En este capítulo estudiamos el problema de Cauchy periódico,

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\left(\eta\partial_x\Phi\right) & = 0, \quad x \in \mathbb{T}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = 0, \quad x \in \mathbb{T}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

con la condición inicial

$$\eta(x,0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x,0) = \Phi_0(x). \tag{3.2}$$

Nuestro objetivo principal es probar que el problema de Cauchy (3.1)-(3.2) es localmente bien planteado, para $s \geq 0$, en el espacio periódico $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$.

Para obtener el resultado de buen planteamiento usamos el espacio de Bourgain de tipo periódico $X^{s,\beta}_{per} \times Y^{s+1,\beta}_{per}$, $s, \beta \in \mathbb{R}$, donde $X^{s,\beta}_{per}$ denota la completación del espacio $\mathcal{Y}$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{X^{s,\beta}_{per}} = \|\langle|\tau| - \phi(k)\rangle^{\beta}\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{\ell^2_k L^2_\tau},$$

donde $\mathcal{Y}$ denota el espacio de funciones $w$ tales que

(i) $w : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

(ii) $w(x,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $x \in \mathbb{T}$,

(iii) $x \to w(x,\cdot)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$,

(iv) $\widehat{w}(0,t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Además, $Y^{s+1,\beta}_{per}$ denota la completación de la clase de Schwartz $\mathcal{S}_{per,2\pi}$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{Y^{s+1,\beta}_{per}} = \|\langle|\tau| - \phi(k)\rangle^{\beta}|k|\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}\|_{\ell^2_k L^2_\tau},$$

donde $\langle a\rangle = 1+|a|$ y $\phi(k) = |k|^3 + |k|$ es el símbolo asociado a la parte lineal del sistema Boussinesq-Benney-Luke (3.1). Aquí

$$\widetilde{w}(k,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-ixk-it\tau}w(x,t)dxdt.$$

Notemos que en la definición del espacio $X^{s,\beta}_{per}$ estamos suponiendo, como en el caso de la ecuación KdV (ver [6]), que los elementos $w \in X^{s,\beta}_{per}$ tienen la propiedad de $x-$media cero para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\int_{\mathbb{T}} w(x,t)dx = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para simplificar la escritura de los espacios de Bourgain $X^{s,\beta}_{per}$, $Y^{s+1,\beta}_{per}$ de ahora en adelante usaremos las notaciones, respectivamente, $X^{s,\beta}$, $Y^{s+1,\beta}$.

También consideremos los espacios $U^s, V^{s+1}$, $s \in \mathbb{R}$, donde $U^s$ se define con respecto a la norma

$$\|w\|_{U^s} = \|w\|_{X^{s,1/2}} + \|\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}(k,\tau)\|_{\ell^2_k L^1_\tau},$$

y el espacio $V^{s+1}$ se define con respecto a la norma

$$\|w\|_{V^{s+1}} = \|w\|_{Y^{s+1,1/2}} + \||k|\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}(k,\tau)\|_{\ell^2_k L^1_\tau}.$$

Similarmente introducimos los espacios $Z^s, W^{s+1}$, $s \in \mathbb{R}$, con normas definidas respectivamente por

$$\|w\|_{Z^s} = \|w\|_{X^{s,-1/2}} + \left\|\frac{\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}(k,\tau)}{\langle|\tau| - \phi(k)\rangle}\right\|_{\ell^2_k L^1_\tau}$$

y

$$\|w\|_{W^{s+1}} = \|w\|_{Y^{s+1,-1/2}} + \left\|\frac{|k|\langle k\rangle^{s}\widetilde{w}(k,\tau)}{\langle|\tau| - \phi(k)\rangle}\right\|_{\ell^2_k L^1_\tau}.$$

Además, para $T > 0$ denotemos por $U_T^s$ el espacio con norma

$$\|\eta\|_{U_T^s} = \inf_{w \in U^s} \big\{ \|w\|_{U^s} \,:\, w(t) = \eta(t) \quad \text{en} \quad [0,T] \big\},$$

y por $V_T^{s+1}$ el espacio con norma

$$\|\Phi\|_{V_T^{s+1}} = \inf_{w \in V^{s+1}} \big\{ \|w\|_{V^{s+1}} \,:\, w(t) = \Phi(t) \quad \text{en} \quad [0,T] \big\}.$$

De otro lado, $(\eta, \Phi)$ en $U_T^s \times V_T^{s+1}$ es una solución del problema de Cauchy asociado con el modelo (3.1) con la condición inicial (3.2) en $[0,T]$ si y sólo si para todo $t \in [0,T]$,

$$(\eta(t), \Phi(t)) = S(t)(\eta_0, \Phi_0) - \int_0^t S(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi), \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt', \tag{3.3}$$

donde

$$(\eta(t), \Phi(t)) = S(t)(\eta_0, \Phi_0) = (S_1(t)(\eta_0, \Phi_0), S_2(t)(\eta_0, \Phi_0))$$

es la solución del problema lineal asociado con (3.1) y el semigrupo $S(t)$ está descrito por

$$S_1(t)(\eta, \Phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx} \left[ \cos(\phi(k)t)\widehat{\eta}(k) + |k| \sin(\phi(k)t)\widehat{\Phi}(k) \right],$$

$$S_2(t)(\eta, \Phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx} \left[ -\frac{\sin(\phi(k)t)\widehat{\eta}(k)}{|k|} + \cos(\phi(k)t)\widehat{\Phi}(k) \right],$$

con la función $\phi$ definida por

$$\phi(k) = |k|^3 + |k|.$$

Para trabajar en el contexto del espacio de tipo periódico $U^s \times V^{s+1}$, modificamos los términos de la derecha de (3.3) utilizando una función de corte. Como en el caso del Capítulo 1, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ representará una función con soporte en $(-2,2)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi \equiv 1$ en $[-1,1]$. Entonces para $0 < T < 1$ consideraremos la siguiente versión modificada

$$(\eta(t), \Phi(t)) = \psi(t)S(t)(\eta_0, \Phi_0) - \psi(t)\int_0^t S(t-t')\psi(t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi), \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')dt'. \tag{3.4}$$

Para la prueba de buen planteamiento, además de usar estimativos lineales y no lineales, utilizamos algunos resultados auxiliares.

## 3.1. Estimativos lineales

Inicialmente establecemos los siguientes resultados auxiliares.

**Lema 3.1.1.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

*(i)* $\|\psi\eta\|_{X^{s,-1/2}} \leq C\|\eta\|_{X^{s,-1/2}}$,

*(ii)* $\|\psi\Phi\|_{Y^{s+1,-1/2}} \leq C\|\Phi\|_{Y^{s+1,-1/2}}$.

*Demostración.* Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi\eta}(k,\tau) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-ixk}e^{-it\tau}\psi(t)\eta(x,t)dxdt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-ixk}e^{-it\tau}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)d\lambda\right)\eta(x,t)dxdt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-ixk}e^{-it(\tau-\lambda)}\eta(x,t)dxdt\right)d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\|\psi\eta\|^2_{X^{s,-1/2}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}\left|\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda\right|^2 d\tau.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{0}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}\left|\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda\right|^2 d\tau \\
&\qquad \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau+\phi(k)\rangle^{-1}\left|\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda\right|^2 d\tau \\
&\qquad = \left\|\langle\tau+\phi(k)\rangle^{-1/2}\langle k\rangle^{s}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda\right\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau} \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\|\langle\tau+\phi(k)\rangle^{-1/2}\langle k\rangle^{s}\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}d\lambda,
\end{aligned}$$

y además

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_0^{+\infty}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}\Big|\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda\Big|^2 d\tau&\\
\leq\Big\|\langle\tau-\phi(k)\rangle^{-1/2}\langle k\rangle^s\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda\Big\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}&\\
\leq\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\|\langle\tau-\phi(k)\rangle^{-1/2}\langle k\rangle^s\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}d\lambda.&
\end{aligned}
$$

A continuación, usando que

$$
\big||\tau|-\phi(k)\big|\leq\text{mín}\{|\tau-\phi(k)|,|\tau+\phi(k)|\},\tag{3.6}
$$

tenemos para todo $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$
\langle|\tau|-\phi(k)\rangle\leq\langle\tau\pm\phi(k)\rangle\leq\langle\tau+\lambda\pm\phi(k)\rangle\langle\lambda\rangle.\tag{3.7}
$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\|\langle\tau\pm\phi(k)\rangle^{-1/2}\langle k\rangle^s\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}d\lambda&\\
=\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\pm\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)|^2d\tau\Big)d\lambda&\\
=\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau+\lambda\pm\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau)|^2d\tau\Big)d\lambda&\\
\leq\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\lambda\rangle\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau)|^2d\tau\Big)d\lambda&\\
=\|\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1/2}\langle k\rangle^s\widetilde{\eta}\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}\int_{\mathbb{R}}\langle\lambda\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2d\lambda&\\
\leq C\|\eta\|^2_{X^{s,-1/2}}.&
\end{aligned}
$$

Por tanto concluimos que

$$
\|\psi\eta\|_{X^{s,-1/2}}\leq C\|\eta\|_{X^{s,-1/2}}.
$$

Análogamente tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\psi\Phi\|^2_{Y^{s+1,-1/2}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}\Big|\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\Phi}(k,\tau-\lambda)d\lambda\Big|^2 d\tau\\
&\leq \Big\|\langle\tau+\phi(k)\rangle^{-1/2}|k|\langle k\rangle^s\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\Phi}(k,\tau-\lambda)d\lambda\Big\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}\\
&+\Big\|\langle\tau-\phi(k)\rangle^{-1/2}|k|\langle k\rangle^s\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)\widetilde{\eta}(k,\tau-\lambda)d\lambda\Big\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\|\langle\tau+\phi(k)\rangle^{-1/2}|k|\langle k\rangle^s\widetilde{\Phi}(k,\tau-\lambda)\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}d\lambda\\
&+\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2\|\langle\tau-\phi(k)\rangle^{-1/2}|k|\langle k\rangle^s\widetilde{\Phi}(k,\tau-\lambda)\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}d\lambda.
\end{aligned}$$

De (3.7) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}(\lambda)^{(t)}|^2\|\langle\tau\pm\phi(k)\rangle^{-1/2}|k|\langle k\rangle^s\widetilde{\Phi}(k,\tau-\lambda)\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}d\lambda&\\
\leq \|\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1/2}|k|\langle k\rangle^s\widetilde{\Phi}\|^2_{\ell^2_kL^2_\tau}\int_{\mathbb{R}}\langle\lambda\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\lambda)|^2d\lambda&\\
\leq C\|\Phi\|^2_{Y^{s+1,-1/2}}.&
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|\psi\Phi\|_{Y^{s+1,-1/2}} \leq C\|\Phi\|_{Y^{s+1,-1/2}}.$$

□

Usando un argumento similar podemos demostrar el siguiente lema.

**Lema 3.1.2.** *Sea $s\in\mathbb{R}$. Entonces existe $C>0$ tal que*

*(i)* $\left\|\frac{\langle k\rangle^s\widetilde{\psi\eta}(k,\tau)}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle}\right\|_{\ell^2_kL^1_\tau} \leq C\left\|\frac{\langle k\rangle^s\widetilde{\eta}(k,\tau)}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle}\right\|_{\ell^2_kL^1_\tau}$,

*(ii)* $\left\|\frac{|k|\langle k\rangle^s\widetilde{\psi\Phi}(k,\tau)}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle}\right\|_{\ell^2_kL^1_\tau} \leq C\left\|\frac{|k|\langle k\rangle^s\widetilde{\Phi}(k,\tau)}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle}\right\|_{\ell^2_kL^1_\tau}$.

En los siguientes lemas establecemos los estimativos lineales. Algunos apartes de las demostraciones son similares a las realizadas en el Capítulo 1. Pero para efectos de completez e independencia de los capítulos incluimos la mayoría de los detalles.

**Lema 3.1.3.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces existe $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\psi(t)S_1(t)(\eta_0, \Phi_0)\|_{U^s} \leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})},$$

$$\|\psi(t)S_2(t)(\eta_0, \Phi_0)\|_{V^{s+1}} \leq C_1 \|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}.$$

*Demostración.* Primero notemos que

$$\Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\eta}_0(k)\Big]^{\sim}(k,\tau) = \widehat{\eta}_0(k)\widehat{\psi}^{(t)}(\tau \mp \phi(k))$$

y además de la desigualdad (1.6) tenemos que existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)|^2 d\tau \leq K, \quad \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)| d\tau \leq K.$$

Entonces, usando la desigualdad (3.6), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big\|\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\eta}_0(k)\Big\|^2_{X^{s,1/2}} &= \Big\|\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^s\Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\eta}_0(k)\Big]^{\sim}\Big\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2 \int_{\mathbb{R}} \langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|^2 d\tau \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2 \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\mp\phi(k)\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|^2 d\tau \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2 \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)|^2 d\tau \\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2 = C\|\eta_0\|^2_{H^s(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

También notemos que

$$\begin{aligned}
\Big\|\langle k\rangle^s\Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\eta}_0(k)\Big]^{\sim}\Big\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))| d\tau\right)^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)| d\tau\right)^2 \\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2 = C\|\eta_0\|^2_{H^s(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

De igual manera vemos que

$$
\begin{aligned}
\Big\|\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i\phi(k)t}|k|\widehat{\Phi}_0(k)\Big\|^2_{X^{s,1/2}}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|k|^2|\widehat{\Phi}_0(k)|^2\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|^2 d\tau\\
&\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|k|^2|\widehat{\Phi}_0(k)|^2 = C\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})},
\end{aligned}
$$

y también que

$$
\begin{aligned}
\Big\|\langle k\rangle^s\Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i\phi(k)t}|k|\widehat{\Phi}_0(k)\Big]^{\sim}\Big\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|k|^2|\widehat{\Phi}_0(k)|^2\left(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|d\tau\right)^2\\
&\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|k|^2|\widehat{\Phi}_0(k)|^2 = C\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}.
\end{aligned}
$$

Entonces de los estimativos anteriores obtenemos que

$$
\|\psi(t)S_1(t)(\eta_0,\Phi_0)\|_{U^s} \le C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}.
$$

De manera análoga

$$
\begin{aligned}
\Big\|\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ikx}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\eta}_0(k)}{|k|}\Big\|_{Y^{s+1,1/2}}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|^2 d\tau\\
&\le C\|\eta_0\|^2_{H^s(\mathbb{T})}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\Big\||k|\langle k\rangle^s\Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ikx}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\eta}_0(k)}{|k|}\Big]^{\sim}\Big\|_{\ell^2_k L^1_\tau}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|\widehat{\eta}_0(k)|^2\Big(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|d\tau\Big)^2\\
&\le C\|\eta_0\|^2_{H^s(\mathbb{T})}.
\end{aligned}
$$

También se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Big\|\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\Phi}_0(k)\Big\|_{Y^{s+1,1/2}}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|k|^2|\widehat{\Phi}_0(k)|^2\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|^2 d\tau \le C\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})},
\end{aligned}
$$

y

$$\Big\| |k|\langle k\rangle^s \Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{\Phi}_0(k)\Big]^{\sim}\Big\|_{\ell^2_k L^1_\tau} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|k|^2|\widehat{\Phi}_0(k)|^2\Big(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|d\tau\Big)^2$$
$$\leq C\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}.$$

Por consiguiente

$$\|\psi(t)S_2(t)(\eta_0,\Phi_0)\|_{V^{s+1}} \leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}.$$

□

**Lema 3.1.4.** *Sea $s\in\mathbb{R}$. Entonces existe $C_2>0$ tal que*

*(i)* $\left\|\psi(t)\int_0^t f(t')dt'\right\|_{H_t^{1/2}} \leq C_2\left(\|f\|_{H_t^{-1/2}} + \|\langle\tau\rangle^{-1}\widehat{f}^{(t)}\|_{L^1_\tau}\right),$

*(ii)* $\left\|\psi(t)\int_0^t S_1(t-t')(\eta,\Phi)(t')\,dt'\right\|_{U^s} \leq C_2\left(\|\eta\|_{Z^s}+\|\Phi\|_{W^{s+1}}\right),$

*(iii)* $\left\|\psi(t)\int_0^t S_2(t-t')(\eta,\Phi)(t')\,dt'\right\|_{V^{s+1}} \leq C_2\left(\|\eta\|_{Z^s}+\|\Phi\|_{W^{s+1}}\right).$

*Demostración.* La desigualdad (i) fue demostrada en la Observación 3.13 del trabajo [7]. Para probar la desigualdad (ii), primero notemos que

$$\left(\psi(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\widehat{\eta}(k,t')dt'\right)^{\wedge}(k,t) = \psi(t)\int_0^t e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\widehat{\eta}(k,t')dt'$$
$$= e^{\pm i\phi(k)t}\psi(t)\int_0^t e^{\mp i\phi(k)t'}\widehat{\eta}(k,t')dt' = e^{\pm i\phi(k)t}\widehat{w}(k,t),$$

donde $w(x,t)=\psi(t)\int_0^t e^{\mp i\phi(k)t'}\eta(x,t')dt'$. Entonces obtenemos que

$$\Big[\psi(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\widehat{\eta}(k,t')dt'\Big]^{\sim}(k,\tau) = \widetilde{w}(k,\tau\mp\phi(k)).$$

Usando el hecho de que

$$\text{máx}\{\big||\tau+\phi(k)|-\phi(k)\big|,\big||\tau-\phi(k)|-\phi(k)\big|\}\leq|\tau|, \tag{3.8}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\|\psi(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\widehat{\eta}(k,t')dt'\Big\|^2_{X^{s,1/2}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widetilde{w}(k,\tau\mp\phi(k))|^2d\tau\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau\pm\phi(k)|-\phi(k)\rangle|\widetilde{w}(k,\tau)|^2d\tau\\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle|\widetilde{w}(k,\tau)|^2d\tau = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\|\widehat{w}\|^2_{H_t^{1/2}}.\end{aligned}$$

Pero usando la parte (i) y la desigualdad (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\|\widehat{w}\|^2_{H_t^{1/2}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big\|\psi(t)\int_0^t e^{\mp i\phi(k)t'}\widehat{\eta}(k,t')dt'\Big\|^2_{H_t^{1/2}}\\ &\le C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big\|e^{\mp i\phi(k)t}\widehat{\eta}(k,t)\Big\|^2_{H_t^{-1/2}}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big\|\langle\tau\rangle^{-1}\Big[e^{\mp i\phi(k)t}\widehat{\eta}(k,t)\Big]^{\wedge(t)}\Big\|^2_{L^1_\tau}\right)\\ &= C\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau\pm\phi(k))|^2d\tau\ +\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau\pm\phi(k))|d\tau\right)^2\right]\\ &= C\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\mp\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau)|^2d\tau+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\mp\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau)|d\tau\right)^2\right]\\ &\le C\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau)|^2d\tau+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau)|d\tau\right)^2\right]\\ &\le C\|\eta\|^2_{Z^s}.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\Big\|\psi(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\widehat{\eta}(k,t')dt'\Big\|^2_{X^{s,1/2}}\le C\|\eta\|^2_{Z^s}.$$

Ahora, sea $\varrho$ una función de corte, en la variable temporal, con soporte en $A=[-1,1]$.

Entonces

$$\begin{aligned}
&\psi(t)\int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\widehat{\eta}(k,t')dt'\\
&\qquad = \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_0^t e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{it'\tau}\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau\Big)dt'\\
&\qquad = \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} e^{\pm it\phi(k)}\widetilde{\eta}(k,\tau)\Big(\int_0^t e^{it'(\tau\mp\phi(k))}dt'\Big)d\tau\\
&\qquad = \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tau t}-e^{\pm it\phi(k)}}{i(\tau\mp\phi(k))}\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau = S_1+S_2-S_3,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_1 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tau t}-e^{\pm it\phi(k)}}{i(\tau\mp\phi(k))}\varrho(\tau\mp\phi(k))\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau,\\
S_2 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} \frac{[1-\varrho(\tau\mp\phi(k))]}{i(\tau\mp\phi(k))}\widetilde{\eta}(k,\tau)e^{i\tau t}d\tau,\\
S_3 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(xk\pm t\phi(k))}\int_{\mathbb{R}} \frac{[1-\varrho(\tau\mp\phi(k))]}{i(\tau\mp\phi(k))}\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $e^{it(\tau\mp\phi(k))}=\sum_{n\geq 0}\frac{[it(\tau\mp\phi(k))]^n}{n!}$, entonces

$$\begin{aligned}
S_1 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm it\phi(k)}\big(e^{it(\tau\mp\phi(k))}-1\big)}{i(\tau\mp\phi(k))}\varrho(\tau\mp\phi(k))\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau\\
&= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(xk\pm\phi(k))}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n\geq 1} \frac{t^n[i(\tau\mp\phi(k))]^{n-1}}{n!}\varrho(\tau\mp\phi(k))\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau\\
&= \psi(t)\sum_{n\geq 1}\frac{t^n i^{n-1}}{n!}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(xk\pm t\phi(k))}\int_{\mathbb{R}}(\tau\mp\phi(k))^{n-1}\varrho(\tau\mp\phi(k))\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau\Big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si usamos la notación

$$f_n(k)=\int_{\mathbb{R}} i^{n-1}(\tau\mp\phi(k))^{n-1}\varrho(\tau\mp\phi(k))\widetilde{\eta}(k,\tau)d\tau,\quad \omega_n(t)=\psi(t)t^n,$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_1(k,\tau) &= \Big[\sum_{n\geq 1}\frac{\omega_n(t)}{n!}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(xk\pm t\phi(k))}f_n(k)\Big)\Big]^{\sim}(k,\tau)\\
&= \Big(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}f_n(k)e^{\pm it\phi(k)}\omega_n(t)\Big)^{\wedge(t)}(\tau)\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}f_n(k)\widehat{\omega}_n^{(t)}(\tau\mp\phi(k)).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, usando la desigualdad (1.6), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\langle k\rangle^s\widetilde{S}_1\|^2_{\ell^2_kL^1_\tau} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\widetilde{S}_1(k,\tau)|d\tau\Big)^2\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}|f_n(k)|\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\omega}_n^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|d\tau\Big)^2\\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big(\|\chi_A(\tau\mp\phi(k))\widetilde{\eta}(k,\tau)\|_{L^1_\tau}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\omega}_n^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|d\tau\Big)^2\\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\|\chi_A(\tau\mp\phi(k))\widetilde{\eta}(k,\tau)\|^2_{L^1_\tau}\\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big(\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\mp\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\eta}(k,\tau)|d\tau\Big)^2\\
&= C\|\langle k\rangle^s\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}\widetilde{\eta}\|^2_{\ell^2_kL^1_\tau}.
\end{aligned}$$

Ahora, si usamos la notación

$$g(k,\tau) = [i(\tau\mp\phi(k))]^{-1}[1-\varrho(\tau\mp\phi(k))]\widetilde{\eta}(k,\tau),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_2(k,\tau) &= \Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ikx}\int_{\mathbb{R}}e^{it\tau}g(k,\tau)d\tau\Big]^{\sim}(k,\tau) = \Big[\psi(t)g^{\sim^{-1}}(x,t)\Big]^{\sim}(k,\tau)\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}}e^{-ixk}e^{-it\tau}\psi(t)g^{\sim^{-1}}(x,t)dxdt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-it\tau}\psi(t)g^{\vee(t)}(k,t)dt\\
&= \Big[\psi(t)g^{\vee(t)}(k,t)\Big]^{\wedge(t)}(\tau) = \widehat{\psi}^{(t)}(\tau)*g(k,\tau).
\end{aligned}$$

En consecuencia, usando la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned}
\|\langle k\rangle^s \widetilde{S}_2\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)\|^2_{L^1_\tau} \|g(k,\tau)\|^2_{L^1_\tau} \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \mp \phi(k)\rangle^{-1} |\chi_B(\tau \mp \phi(k)) \widetilde{\eta}(k,\tau)| d\tau \right)^2 \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \langle |\tau| - \phi(k)\rangle^{-1} |\widetilde{\eta}(k,\tau)| d\tau \right)^2 \\
&= C \|\langle k\rangle^s \langle |\tau| - \phi(k)\rangle^{-1} \widetilde{\eta}\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau},
\end{aligned}$$

donde $B = \{\tau \,:\, |\tau| \geq 1\}$. A continuación estimaremos $S_3$ y para esto definamos

$$\widehat{h}(k) = \int_{\mathbb{R}} [i(\tau \mp \phi(k))]^{-1} [1 - \varrho(\tau \mp \phi(k))] \widetilde{\eta}(k,\tau) d\tau.$$

Entonces $S_3 = \psi(t)\Big[e^{\pm it\phi(k)} \widehat{h}(k)\Big]^{\vee}$, y por tanto $\widetilde{S}_3(k,\tau) = \widehat{h}(k)\Big(e^{\pm it\phi(k)}\psi(t)\Big)^{\wedge(t)}(\tau)$. Luego

$$\begin{aligned}
\|\langle k\rangle^s \widetilde{S}_3\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau} &= \|\langle k\rangle^s \widehat{h}(k) \widehat{\psi}^{(t)}(\tau \mp \phi(k))\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{h}(k)|^2 \Big( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}^{(t)}(\tau \mp \phi(k))| d\tau \Big)^2 \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \Big( \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \mp \phi(k)\rangle^{-1} |\chi_B(\tau \mp \phi(k)) \widetilde{\eta}(k,\tau)| d\tau \Big)^2 \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \Big( \int_{\mathbb{R}} \langle |\tau| - \phi(k)\rangle^{-1} |\widetilde{\eta}(k,\tau)| d\tau \Big)^2 \\
&= C \|\langle k\rangle^s \langle |\tau| - \phi(k)\rangle^{-1} \widetilde{\eta}\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau}.
\end{aligned}$$

Así, de los estimativos anteriores concluimos que

$$\Big\| \langle k\rangle^s \Big[ \psi(t) \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk} e^{\pm i(t-t')\phi(k)} \widehat{\eta}(k,t') dt' \Big]^{\sim} \Big\|_{\ell^2_k L^1_\tau} \leq C \|\langle k\rangle^s \langle |\tau| - \phi(k)\rangle^{-1} \widetilde{\eta}\|_{\ell^2_k L^1_\tau}.$$

En lo que sigue usaremos argumentos similares a los anteriores. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\left( \psi(t) \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk} e^{\pm i(t-t')\phi(k)} |k| \widehat{\Phi}(k,t') dt' \right)^{\wedge} (k,t) &= e^{\pm i\phi(k)t} \psi(t) \int_0^t e^{\mp i\phi(k)t'} |k| \widehat{\Phi}(k,t') dt' \\
&= e^{\pm i\phi(k)t} \widehat{v}(k,t),
\end{aligned}$$

donde $v(x,t)=\psi(t)\int_0^t e^{\mp i\phi(k)t'}|k|\Phi(x,t')dt'$. Entonces obtenemos que

$$\Big[\psi(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}|k|\widehat{\Phi}(k,t')dt'\Big]^{\sim}(k,\tau)=\widetilde{v}(k,\tau\mp\phi(k)).$$

En consecuencia, usando la parte (i) y las desigualdades (3.6)-(3.8) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\Big\|\psi(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}|k|\widehat{\Phi}(k,t')dt'\Big\|^2_{X^{s,1/2}}\\
&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle|\widetilde{v}(k,\tau\mp\phi(k))|^2d\tau\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\|\widehat{v}\|^2_{H_t^{1/2}}\\
&\le C\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big\|e^{\mp i\phi(k)t}|k|\widehat{\Phi}(k,t)\Big\|^2_{H_t^{-1/2}}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\Big\|\langle\tau\rangle^{-1}\Big[e^{\mp i\phi(k)t}|k|\widehat{\Phi}(k,t)\Big]^{\wedge(t)}\Big\|^2_{L^1_\tau}\Big)\\
&\le C\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\mp\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\Phi}(k,\tau)|^2d\tau\\
&\qquad\qquad+\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2\langle k\rangle^{2s}\Big(\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\mp\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\Phi}(k,\tau)|d\tau\Big)^2\Big]\\
&\le C\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2\langle k\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\Phi}(k,\tau)|^2d\tau\\
&\qquad\qquad+\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2\langle k\rangle^{2s}\Big(\int_{\mathbb{R}}\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\Phi}(k,\tau)|d\tau\Big)^2\Big]\\
&\le C\|\Phi\|^2_{W^{s+1}}.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
&\psi(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}|k|\widehat{\Phi}(k,t')dt'\\
&\qquad=\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}|k|\int_0^t e^{\pm i(t-t')\phi(k)}\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{it'\tau}\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau\Big)dt'\\
&\qquad=\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}|k|\int_{\mathbb{R}}e^{\pm it\phi(k)}\widetilde{\Phi}(k,\tau)\Big(\int_0^t e^{it'(\tau\mp\phi(k))}dt'\Big)d\tau\\
&\qquad=\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ixk}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\tau t}-e^{\pm it\phi(k)}}{i(\tau\mp\phi(k))}|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau=S_4+S_5-S_6,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_4 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tau t}-e^{\pm it\phi(k)}}{i(\tau\mp\phi(k))}\varrho(\tau\mp\phi(k))|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau,\\
S_5 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} \frac{[1-\varrho(\tau\mp\phi(k))]}{i(\tau\mp\phi(k))}|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)e^{i\tau t}d\tau,\\
S_6 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(xk\pm t\phi(k))}\int_{\mathbb{R}} \frac{[1-\varrho(\tau\mp\phi(k))]}{i(\tau\mp\phi(k))}|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

A continuación notemos que

$$\begin{aligned}
S_4 &= \psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm it\phi(k)}\big(e^{it(\tau\mp\phi(k))}-1\big)}{i(\tau\mp\phi(k))}\varrho(\tau\mp\phi(k))|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau\\
&= \psi(t)\sum_{n\geq 1}\frac{t^n i^{n-1}}{n!}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(xk\pm t\phi(k))}\int_{\mathbb{R}}(\tau\mp\phi(k))^{n-1}\varrho(\tau\mp\phi(k))|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau\Big).
\end{aligned}$$

En consecuencia, si usamos la notación

$$\zeta_n(k) = \int_{\mathbb{R}} i^{n-1}(\tau\mp\phi(k))^{n-1}\varrho(\tau\mp\phi(k))|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau, \quad \omega_n(t)=\psi(t)t^n,$$

obtenemos que

$$\widetilde{S}_4(k,\tau = \Big[\sum_{n\geq 1}\frac{\omega_n(t)}{n!}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(xk\pm t\phi(k))}\zeta_n(k)\Big)\Big]^{\sim}(k,\tau) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\zeta_n(k)\widehat{\omega}_n^{(t)}(\tau\mp\phi(k)).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\langle k\rangle^s\widetilde{S}_4\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}|\zeta_n(k)|\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\omega}_n^{(t)}(\tau\mp\phi(k))|d\tau\right)^2\\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}\|\chi_A(\tau\mp\phi(k))|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)\|^2_{L^1_\tau}\\
&= C\||k|\langle k\rangle^s\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1}\widetilde{\Phi}\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau}.
\end{aligned}$$

Ahora, si usamos la notación

$$g_1(k,\tau) = [i(\tau\mp\phi(k))]^{-1}[1-\varrho(\tau\mp\phi(k))]|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)$$

entonces vemos que

$$\widetilde{S}_5(k,\tau) = \Big[\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} g_1(k,\tau)d\tau\Big]^{\sim}(k,\tau) = \Big[\psi(t) g_1^{\sim^{-1}}(x,t)\Big]^{\sim}(k,\tau)$$
$$= \Big[\psi(t) g_1^{\vee(t)}(k,t)\Big]^{\wedge(t)}(\tau) = \widehat{\psi}^{(t)}(\tau) * g_1(k,\tau).$$

En consecuencia, de la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned}\|\langle k\rangle^s \widetilde{S}_5\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau) * g_1(k,\tau)\|^2_{L^1_\tau}\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \|\widehat{\psi}^{(t)}(\tau)\|^2_{L^1_\tau} \|g_1(k,\tau)\|^2_{L^1_\tau}\\ &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2\langle k\rangle^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}} \langle|\tau| - \phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\Phi}(k,\tau)|d\tau\right)^2\\ &= C\||k|\langle k\rangle^s\langle|\tau| - \phi(k)\rangle^{-1}\widetilde{\Phi}\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau}.\end{aligned}$$

Ahora, estimaremos $S_6$ y para esto definamos

$$\widehat{h}_1(k) = \int_{\mathbb{R}} [i(\tau \mp \phi(k))]^{-1}[1 - \varrho(\tau \mp \phi(k))]|k|\widetilde{\Phi}(k,\tau)d\tau.$$

Entonces $S_6 = \psi(t)\Big[e^{\pm it\phi(k)}\widehat{h}_1(k)\Big]^{\vee}$ y así $\widetilde{S}_6(k,\tau) = \widehat{h}_1(k)\Big(e^{\pm it\phi(k)}\psi(t)\Big)^{\wedge(t)}(\tau)$. Luego

$$\begin{aligned}\|\langle k\rangle^s \widetilde{S}_6\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau} &= \|\langle k\rangle^s \widehat{h}_1(k)\widehat{\psi}^{(t)}(\tau \mp \phi(k))\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{h}_1(k)|^2\left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}^{(t)}(\tau \mp \phi(k))|d\tau\right)^2\\ &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2\langle k\rangle^{2s}\left(\int_{\mathbb{R}} \langle|\tau| - \phi(k)\rangle^{-1}|\widetilde{\Phi}(k,\tau)|d\tau\right)^2\\ &= C\||k|\langle k\rangle^s\langle|\tau| - \phi(k)\rangle^{-1}\widetilde{\Phi}\|^2_{\ell^2_k L^1_\tau}.\end{aligned}$$

Así, de los estimativos anteriores tenemos que

$$\left\|\langle k\rangle^s\Big[\psi(t)\int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk}e^{\pm i(t-t')\phi(k)}|k|\widehat{\Phi}(k,t')dt'\Big]^{\sim}\right\|_{\ell^2_k L^1_\tau} \leq C\||k|\langle k\rangle^s\langle|\tau| - \phi(k)\rangle^{-1}\widetilde{\Phi}\|_{\ell^2_k L^1_\tau}.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\left\|\psi(t)\int_0^t S_1(t-t')(\eta,\Phi)(t')\,dt'\right\|_{U^s} \leq C_2\Big(\|\eta\|_{Z^s} + \|\Phi\|_{W^{s+1}}\Big).$$

De forma similar obtenemos la otra desigualdad en (iii).

$\square$

En el siguiente lema establecemos que el espacio $U^s \times V^{s+1}$ está incluido continuamente en la clase $C(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))$ para $s \in \mathbb{R}$.

**Lema 3.1.5.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|(\eta, \Phi)\|_{C(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))} \leq C\|(\eta, \Phi)\|_{U^s \times V^{s+1}}.$$

*Demostración.* Primero probemos que $U^s \subseteq L^\infty(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{T}))$. Dado que

$$\begin{aligned}
\|\eta(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{\eta(t)}(k)|^2\Big)^{1/2} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \widetilde{\eta}(k,\tau) d\tau \Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \Big( \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\eta}(k,\tau)| d\tau\Big)^2\Big)^{1/2} \leq \|\eta\|_{U^s},
\end{aligned}$$

tenemos que $\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{T}))} \leq \|\eta\|_{U^s}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\|\eta(t) - \eta(t')\|^2_{H^s(\mathbb{T})} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \Big| \widehat{\eta(t)}(k) - \widehat{\eta(t')}(k) \Big|^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} \Big( \int_{\mathbb{R}} |e^{it\tau} - e^{it'\tau}| |\widetilde{\eta}(k,\tau)| d\tau \Big)^2.
\end{aligned}$$

Entonces, usando el Teorema de convergencia dominada,

$$\|\eta(t) - \eta(t')\|_{H^s(\mathbb{T})} \to 0, \quad t \to t'.$$

Por consiguiente $\eta \in C(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{T}))$ y además $\|\eta\|_{C(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{T}))} \leq C\|\eta\|_{U^s}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 \langle k\rangle^{2s} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \widetilde{\Phi}(k,\tau) d\tau \Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 \langle k\rangle^{2s} \Big( \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\Phi}(k,\tau)| d\tau\Big)^2\Big)^{1/2} \leq \|\Phi\|_{V^{s+1}}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, como en el caso anterior,

$$\|\Phi\|_{C(\mathbb{R} : \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))} \leq C\|\Phi\|_{V^{s+1}},$$

de donde

$$\|(\eta,\Phi)\|_{C(\mathbb{R}\,:\,H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))}\leq C\|(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}}.$$

□

## 3.2. Estimativos bilineales

En primer lugar presentamos los siguientes resultados cuyas demostraciones pueden revisarse, respectivamente, en el Lema 5.3 de [27] y el Lema 2.5 de [47].

**Lema 3.2.1.** *Si* $\mu>1/2$ *y* $\nu=\nu(k,\tau)>0$, *entonces*

$$\sup_{(k,\tau)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\nu+|k_1^2+\alpha_1k_1+\alpha_2|)^{\mu}}<+\infty,$$

*donde* $\alpha_1=\alpha_1(k,\tau)$ *y* $\alpha_2=\alpha_2(k,\tau)$.

**Lema 3.2.2.** *Si* $\mu>1/3$ *y* $\nu=\nu(k,\tau)>0$, *entonces*

$$\sup_{(k,\tau)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\nu^3+|k_1^3+\alpha_1k_1^2+\alpha_2k_1+\alpha_3|)^{\mu}}<+\infty,$$

*donde* $\alpha_1=\alpha_1(k,\tau),\alpha_2=\alpha_2(k,\tau)$ *y* $\alpha_3=\alpha_3(k,\tau)$.

Los siguientes estimativos no lineales constituyen una herramienta importante para obtener el resultado de buen planteamiento local en espacios de tipo periódico.

**Lema 3.2.3.** *Sea* $s\geq 0$. *Entonces existe* $C_3>0$ *tal que*

*(i)* $\|\partial_x(\eta\partial_x\Phi)\|_{X^{s,-1/2}}\leq C_3\|\eta\|_{X^{s,1/2}}\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}}$,

*(ii)* $\|(\partial_x\Phi)(\partial_x\Phi_1)\|_{Y^{s+1,-1/2}}\leq C_3\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}}\|\Phi_1\|_{Y^{s+1,1/2}}$.

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x(\eta\partial_x\Phi)\|_{X^{s,-1/2}}\\
&\quad=\|\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1/2}k\langle k\rangle^s(\widetilde{\eta}*\widetilde{\partial_x\Phi})(k,\tau)\|_{\ell^2_kL^2_\tau}\\
&\quad=\sup_{\|h\|_{\ell^2_kL^2_\tau}=1}\Big|\sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}k\langle k\rangle^s\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1/2}\widetilde{\eta}(k-k_1,\tau-\tau_1)k_1\widetilde{\Phi}(k_1,\tau_1)h(k,\tau)\,d\tau d\tau_1\Big|.
\end{aligned}$$

Entonces, definiendo

$$f(k,\tau) = \langle |\tau| - \phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^s \widetilde{\eta}(k,\tau), \quad g(k,\tau) = \langle |\tau| - \phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^s k\widetilde{\Phi}(k,\tau),$$

vemos que (i) es equivalente a

$$|J(f,g,h)| \leq C\|f\|_{\ell_k^2 L_\tau^2}\|g\|_{\ell_k^2 L_\tau^2}\|h\|_{\ell_k^2 L_\tau^2}, \tag{3.9}$$

donde

$$J(f,g,h) = \sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{k\langle k\rangle^s f(k-k_1,\tau-\tau_1)g(k_1,\tau_1)h(k,\tau)d\tau d\tau_1}{\langle k_1\rangle^s\langle k-k_1\rangle^s\langle |\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle |\tau_1|-\phi(k_1)\rangle^{1/2}\langle |\tau-\tau_1|-\phi(k-k_1)\rangle^{1/2}}.$$

Para obtener la desigualdad (3.9), analizamos todos los casos posibles para el signo de $\tau, \tau_1$ y $\tau-\tau_1$. Para hacer esto dividimos $\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2$ en las siguientes regiones

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2 : \tau_1<0, \tau-\tau_1<0\},\\
\Gamma_2 &= \{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2 : \tau_1\geq 0, \tau-\tau_1<0, \tau\geq 0\},\\
\Gamma_3 &= \{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2 : \tau_1\geq 0, \tau-\tau_1<0, \tau< 0\},\\
\Gamma_4 &= \{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2 : \tau_1< 0, \tau-\tau_1\geq 0, \tau\geq 0\},\\
\Gamma_5 &= \{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2 : \tau_1< 0, \tau-\tau_1\geq 0, \tau< 0\},\\
\Gamma_6 &= \{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2 : \tau_1\geq 0, \tau-\tau_1\geq 0\}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\tau_1<0$ y $\tau-\tau_1<0$ implican $\tau<0$. Además $\tau_1\geq 0$ y $\tau-\tau_1\geq 0$ implican que $\tau\geq 0$. Entonces los casos $\tau_1<0$, $\tau-\tau_1<0$, $\tau\geq 0$ y $\tau_1\geq 0$, $\tau-\tau_1\geq 0$, $\tau<0$ no pueden ocurrir. Ahora, dado que

$$1+|k| \leq (1+|k_1|)(1+|k-k_1|),$$

entonces para $s\geq 0$ tenemos que

$$\frac{\langle k\rangle^s}{\langle k_1\rangle^s\langle k-k_1\rangle^s} \leq 1.$$

En consecuencia, probaremos la desigualdad (3.9) con $Z(f,g,h)$ en lugar de $J(f,g,h)$, donde

$$Z(f,g,h) = \sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)h(k,\tau)\,d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^{1/2}\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}},$$

con $k_2 = k - k_1, \tau_2 = \tau - \tau_1$ y $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ perteneciendo a uno de los siguientes casos

$$
\begin{aligned}
&(C_1)\, \sigma = \tau + |k|^3 + |k|,\ \sigma_1 = \tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|,\ \sigma_2 = \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|,\\
&(C_2)\, \sigma = \tau - |k|^3 - |k|,\ \sigma_1 = \tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|,\ \sigma_2 = \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|,\\
&(C_3)\, \sigma = \tau + |k|^3 + |k|,\ \sigma_1 = \tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|,\ \sigma_2 = \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|,\\
&(C_4)\, \sigma = \tau - |k|^3 - |k|,\ \sigma_1 = \tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|,\ \sigma_2 = \tau_2 - |k_2|^3 - |k_2|,\\
&(C_5)\, \sigma = \tau + |k|^3 + |k|,\ \sigma_1 = \tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|,\ \sigma_2 = \tau_2 - |k_2|^3 - |k_2|,\\
&(C_6)\, \sigma = \tau - |k|^3 - |k|,\ \sigma_1 = \tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|,\ \sigma_2 = \tau_2 - |k_2|^3 - |k_2|.
\end{aligned}
$$

Por hipótesis tenemos que $\widehat{\eta}(0,t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, en consecuencia, si $k = k_1$ entonces vemos $f(k_2, \tau_2) = 0$. Similarmente si $k_1 = 0$ entonces $g(k_1, \tau_1) = 0$. Por consiguiente, estimaremos $Z(f, g, h)$ cuando $k \neq 0$, $k_1 \neq 0$ y $k - k_1 \neq 0$.

Por simetría es suficiente estimar $Z(f, g, h)$ en el siguiente conjunto

$$R = \{(k, k_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \,:\, |\sigma_2| \leq |\sigma_1|\}.$$

Usando la definición de $R$ vemos que $Z(f, g, h)$ se puede escribir como la suma $S_1 + S_2$, donde

$$S_j = \sum_k \sum_{k_1} \int\!\!\int \frac{k f(k_2, \tau_2) g(k_1, \tau_1) h(k, \tau) \chi_{R_j}\, d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^{1/2} \langle\sigma_1\rangle^{1/2} \langle\sigma_2\rangle^{1/2}}, \quad j = 1, 2,$$

y los conjuntos $R_1$, $R_2$ están definidos por

$$R_1 = \{(k, k_1, \tau, \tau_1) \in R \,:\, |\sigma_1| \leq |\sigma|\}, \quad R_2 = \{(k, k_1, \tau, \tau_1) \in R \,:\, |\sigma| \leq |\sigma_1|\}.$$

Primero consideremos $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ como en el caso $(C_1)$. Utilizaremos las notaciones $\sum_n F_1(n)$, $\int F_2(x)dx$ para indicar que la suma o la integral se calculan, respectivamente, en algún subconjunto de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$
\begin{aligned}
|S_1|^2 &\leq \left( \sum_k \int |h(k,\tau)|^2 d\tau \right) \left( \sum_k \int \left( \sum_{k_1} \int \frac{|k f(k_2, \tau_2) g(k_1, \tau_1) \chi_{R_1}|}{\langle\sigma\rangle^{1/2} \langle\sigma_1\rangle^{1/2} \langle\sigma_2\rangle^{1/2}} d\tau_1 \right)^2 d\tau \right)\\
&\leq \|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_k \int \left( \sum_{k_1} \int |f(k_2, \tau_2) g(k_1, \tau_1)|^2 d\tau_1 \right) \left( \sum_{k_1} \int \frac{\chi^2_{R_1} |k|^2 d\tau_1}{\langle\sigma\rangle \langle\sigma_1\rangle \langle\sigma_2\rangle} \right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Demostremos que la expresión

$$\sum_{k_1} \int \frac{\chi^2_{R_1} |k|^2 d\tau_1}{\langle\sigma\rangle \langle\sigma_1\rangle \langle\sigma_2\rangle} = \frac{|k|^2}{\langle\sigma\rangle} \sum_{k_1} \int \frac{\chi^2_{R_1} d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle \langle\sigma_2\rangle}$$

es acotada. Utilizando la desigualdad (1.8) en el Lema 1.2.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_1 + |k_1|^3 + |k_1| \rangle \langle \tau - \tau_1 + |k_2|^3 + |k_2| \rangle} \leq \frac{C}{\langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k_2|^3 + |k_2| \rangle}.$$

Por consiguiente, probaremos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{|k|^2}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle} \sum_{k_1} \frac{1}{\langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k - k_1|^3 + |k - k_1| \rangle} \leq C, \quad \text{en} \quad R_1.$$

Dado que para $k \neq 0$, $k_1 \neq 0$ y $k \neq k_1$,

$$|k| = |k_1 + (k - k_1)| \leq |k_1| + |k - k_1| \leq 2|k_1(k - k_1)|$$

entonces vemos que

$$\frac{k^2}{2} \leq |kk_1(k - k_1)|. \tag{3.10}$$

Además observemos la relación

$$\tau + |k|^3 + |k| - \big[\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1| + \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\big] = |k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|. \tag{3.11}$$

Notemos que si $(k, k_1, \tau, \tau_1) \in R_1$, entonces tenemos que

$$|\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|| \leq |\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|| \leq |\tau + |k|^3 + |k||.$$

Por tanto, utilizando la desigualdad triangular en (3.11) obtenemos que

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| \leq 3|\tau + |k|^3 + |k||. \tag{3.12}$$

Supongamos $k_1 > 0$ y $k - k_1 > 0$. Entonces $k > k_1 > 0$ y por tanto, usando el Lema 3.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1} &\frac{1}{\langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k - k_1|^3 + |k - k_1| \rangle} \\
&= \sum_{k_1} \frac{1}{\langle \tau + k_1^3 + k_1 + (k - k_1)^3 + (k - k_1) \rangle} \\
&\leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau + k^3 + k - 3k^2 k_1 + 3kk_1^2 \rangle} \\
&\leq \sup_{(k,\tau) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left( \frac{1}{3|k|} + \left| k_1^2 - kk_1 + \frac{\tau}{3k} + \frac{k^2}{3} + \frac{1}{3} \right| \right)} \leq C,
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Además

$$|k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2| = k^3 + k - k_1^3 - k_1 - k_2^3 - k_2 = 3kk_1(k-k_1) > 0.$$

Así, de (3.12) y la desigualdad (3.10) obtenemos que

$$|\tau + k^3 + k| \geq |kk_1(k-k_1)| \geq \frac{|k|^2}{2},$$

de donde

$$\frac{|k|^2}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle} \leq C.$$

Supongamos $k_1 < 0$ y $k - k_1 < 0$. Entonces $k < k_1 < 0$ y por consiguiente, usando el Lema 3.2.1, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1} & \frac{1}{\langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k-k_1|^3 + |k-k_1| \rangle} \\
&\leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau - k^3 - k + 3k^2 k_1 - 3kk_1^2 \rangle} \\
&\leq \sup_{(k,\tau) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left( \frac{1}{3|k|} + \left| k_1^2 - kk_1 - \frac{\tau}{3k} + \frac{k^2}{3} + \frac{1}{3} \right| \right)} \leq C.
\end{aligned}$$

Además

$$\big| |k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2| \big| = \big| - k^3 - k + k_1^3 + k_1 + k_2^3 + k_2 \big| = 3|kk_1(k-k_1)|.$$

Entonces de (3.12) y la desigualdad (3.10) obtenemos que

$$|\tau - k^3 - k| \geq |kk_1(k-k_1)| \geq \frac{|k|^2}{2}$$

y por tanto tenemos que

$$\frac{|k|^2}{\langle \tau - k^3 - k \rangle} \leq C.$$

Supongamos $k_1 > 0$ y $k - k_1 < 0$. Usando el Lema 3.2.2,

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1} & \frac{1}{\langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k-k_1|^3 + |k-k_1| \rangle} \\
&\leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau + 2k_1^3 + 2k_1 - k^3 - k + 3k^2 k_1 - 3kk_1^2 \rangle} \\
&\leq \sup_{(k,\tau) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + \left| k_1^3 - \frac{3}{2} kk_1^2 + k_1 + \frac{3}{2} k^2 k_1 + \frac{\tau}{2} - \frac{k^3}{2} - \frac{k}{2} \right| \right)} \leq C.
\end{aligned}$$

Además, si $k>0$ entonces

$$\begin{aligned}&\big||k|^3+|k|-|k_1|^3-|k_1|-|k_2|^3-|k_2|\big|=|2k^3+2k-2k_1^3-2k_1-3k^2k_1+3kk_1^2|\\&=2|k-k_1\Big|k^2+k_1^2+1-\frac{kk_1}{2}\Big|=2|k-k_1|\Big[\Big(k_1-\frac{k}{4}\Big)^2+\frac{15k^2}{16}+1\Big]\geq\frac{15}{8}k^2.\end{aligned}$$

Si $k<0$ entonces

$$\begin{aligned}&\big||k|^3+|k|-|k_1|^3-|k_1|-|k_2|^3-|k_2|\big|=|-2k_1^3-2k_1-3k^2k_1+3kk_1^2|\\&=2|k_1|\Big|k_1^2+1+\frac{3}{2}k^2-\frac{3}{2}kk_1\Big|=2|k_1|\Big[\Big(k_1-\frac{3k}{4}\Big)^2+\frac{15k^2}{16}+1\Big]\geq\frac{15k^2}{8}.\end{aligned}$$

Así, de la desigualdad (3.12) tenemos que

$$|\tau+|k|^3+|k||\geq\frac{5k^2}{8},$$

y por tanto

$$\frac{|k|^2}{\langle\tau+|k|^3+|k|\rangle}\leq C.$$

Supongamos $k_1<0$ y $k-k_1>0$. Usando el Lema 3.2.2,

$$\begin{aligned}&\sum_{k_1}\frac{1}{\langle\tau+|k_1|^3+|k_1|+|k-k_1|^3+|k-k_1|\rangle}\\&\qquad\leq\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\langle\tau-2k_1^3-2k_1+k^3+k-3k^2k_1+3kk_1^2\rangle}\\&\qquad\leq\sup_{(k,\tau)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\left|k_1^3-\frac{3}{2}kk_1^2+k_1+\frac{3}{2}k^2k_1-\frac{\tau}{2}-\frac{k^3}{2}-\frac{k}{2}\right|\right)}\leq C.\end{aligned}$$

Si $k>0$ entonces

$$\begin{aligned}\big||k|^3+|k|-|k_1|^3-|k_1|-|k_2|^3-|k_2|\big|&=\big|k^3+k+k_1^3+k_1-k_2^3-k_2\big|\\&=2|k_1|\Big[\Big(k_1-\frac{3k}{4}\Big)^2+\frac{15k^2}{16}+1\Big]\geq\frac{15k^2}{8}.\end{aligned}$$

Si $k<0$ entonces

$$\begin{aligned}\big||k|^3+|k|-|k_1|^3-|k_1|-|k_2|^3-|k_2|\big|&=\big|-k^3-k+k_1^3+k_1+k_2^3+k_2\big|\\&=2|k-k_1|\Big[\Big(k_1-\frac{k}{4}\Big)^2+\frac{15k^2}{16}+1\Big]\geq\frac{15}{8}k^2.\end{aligned}$$

Así, de (3.12),

$$|\tau + |k|^3 + |k|| \geq \frac{5k^2}{8},$$

y por consiguiente

$$\frac{|k|^2}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle} \leq C.$$

En consecuencia, de los estimativos previos existe $C > 0$ tal que

$$\frac{|k|^2}{\langle \sigma \rangle} \sum_{k_1} \int \frac{d\tau_1}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle} \leq C, \quad \text{en} \quad R_1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|S_1|^2 &\leq C \|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |g(k_1,\tau_1)|^2 \Big( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(k_2,\tau_2)|^2 d\tau \Big) d\tau_1 \\
&\leq C \|f\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}.
\end{aligned}$$

De forma similar trabajamos con el término $S_2$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|S_2|^2 &\leq \Big( \sum_{k_1} \int |g(k_1,\tau_1)|^2 d\tau_1 \Big) \Big( \sum_{k_1} \int \Big( \sum_{k} \int \frac{|k f(k_2,\tau_2) h(k,\tau) \chi_{R_2}|}{\langle \sigma \rangle^{1/2} \langle \sigma_1 \rangle^{1/2} \langle \sigma_2 \rangle^{1/2}} d\tau \Big)^2 d\tau_1 \Big) \\
&\leq \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \Big( \sum_{k} \int |f(k_2,\tau_2) h(k,\tau)|^2 d\tau \Big) \Big( \sum_{k} \int \frac{\chi^2_{R_2} |k|^2 d\tau}{\langle \sigma \rangle \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle} \Big) d\tau_1.
\end{aligned}$$

Demostraremos que la expresión

$$\sum_{k} \int \frac{\chi^2_{R_2} |k|^2 d\tau}{\langle \sigma \rangle \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle} = \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle} \sum_{k} \int \frac{\chi^2_{R_2} |k|^2 d\tau}{\langle \sigma \rangle \langle \sigma_2 \rangle}$$

es acotada. Utilizando la desigualdad (1.8) en el Lema 1.2.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle \langle \tau - \tau_1 + |k_2|^3 + |k_2| \rangle} \leq \frac{C}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k_2|^3 - |k_2| \rangle}.$$

Por consiguiente, probaremos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\langle \tau_1 + |k_1|^3 + |k_1| \rangle} \sum_{k} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k-k_1|^3 - |k-k_1| \rangle} \leq C, \; \text{ en } \; R_2.$$

Notemos que si $(k, k_1, \tau, \tau_1) \in R_2$, entonces obtenemos que

$$|\tau + |k|^3 + |k|| \leq |\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1||, \qquad |\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|| \leq |\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1||.$$

Por tanto, utilizando la desigualdad triangular en (3.11) obtenemos que

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| \leq 3|\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1||. \tag{3.13}$$

Supongamos $k > 0$ y $k - k_1 > 0$. Luego

$$\sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k_2|^3 - |k_2| \rangle} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2 \rangle} = J_1. \tag{3.14}$$

Además, si $k_1 > 0$ entonces, usando la desigualdad (3.10),

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 3|kk_1(k - k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.$$

Si $k_1 < 0$ entonces

$$\begin{aligned}\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| &= \big|2k_1^3 + 2k_1 + 3kk_1(k - k_1)\big| \\ &= 2|k_1|\left[\left(k_1 - \frac{3k}{4}\right)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\right] \geq \frac{15k^2}{8}.\end{aligned}$$

En consecuencia, de (3.13) existe $C > 0$ tal que

$$|\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|| \geq Ck^2,$$

y por consiguiente, utilizando el Lema 3.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\langle \tau_1 + |k_1|^3 + |k_1| \rangle} J_1 &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2 \rangle} \\ &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{3|k_1|} + \left|k^2 - kk_1 + \frac{\tau_1}{3k_1} + \frac{k_1^2}{3} + \frac{1}{3}\right|\right)} \leq C.\end{aligned}$$

Supongamos $k < 0$ y $k - k_1 < 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}&\sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k - k_1|^3 - |k - k_1| \rangle} \\ &\qquad \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 - k_1^3 - k_1 - 3k^2k_1 + 3kk_1^2 \rangle} = J_2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Además, si $k_1 > 0$ entonces

$$\begin{aligned}\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| &= \big|2k_1^3 + 2k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2\big| \\ = 2|k_1|\Big|k_1^2 + 1 + \frac{3}{2}k^2 - \frac{3}{2}kk_1\Big| &= 2|k_1|\Big[\Big(k_1 - \frac{3k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \geq \frac{15k^2}{8}.\end{aligned}$$

Si $k_1 < 0$ entonces, usando (3.10),

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 3|kk_1(k - k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.$$

En consecuencia, de (3.13), existe $C > 0$ tal que

$$|\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|| \geq Ck^2,$$

y por tanto, del Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1\rangle} J_2 &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1 - k_1^3 - k_1 - 3k^2k_1 + 3kk_1^2\rangle} \\ &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Big(\frac{1}{3|k_1|} + \Big|k^2 - kk_1 - \frac{\tau_1}{3k_1} + \frac{k_1^2}{3} + \frac{1}{3}\Big|\Big)} \leq C.\end{aligned}$$

Supongamos $k > 0$ y $k - k_1 < 0$. Entonces $k_1 > k > 0$ y por tanto

$$\begin{aligned}\sum_k &\frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k - k_1|^3 - |k - k_1|\rangle} \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + 2k^3 + 2k - 3k^2k_1 + 3kk_1^2 - k_1^3 - k_1\rangle} = J_3. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Además vemos que

$$\begin{aligned}\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| &= \big|2k^3 + 2k - 2k_1^3 - 2k_1 - 3k^2k_1 + 3kk_1^2\big| \\ &= 2|k - k_1|\Big[\Big(k_1 - \frac{k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \geq \frac{15k^2}{8}.\end{aligned}$$

Usando la relación (3.13),

$$|\tau_1 + k_1^3 + k_1| \geq \frac{5k^2}{8}.$$

Por consiguiente, del Lema 3.2.2,

$$\frac{1}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1\rangle} J_3 \le C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1 + 2k^3 + 2k - 3k^2k_1 + 3kk_1^2 - k_1^3 - k_1\rangle}$$
$$\le \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \left|k^3 - \frac{3}{2}k^2k_1 + k + \frac{3}{2}kk_1^2 + \frac{\tau_1}{2} - \frac{k_1^3}{2} - \frac{k_1}{2}\right|\right)} \le C.$$

Supongamos $k < 0$ y $k - k_1 > 0$. Entonces $k_1 < k < 0$ y por tanto

$$\sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k-k_1|^3 - |k-k_1|\rangle}$$
$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 - 2k^3 - 2k + k_1^3 + k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2\rangle} = J_4. \tag{3.17}$$

Además, tenemos que

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = \big| -2k^3 - 2k + 2k_1^3 + 2k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2\big|$$
$$= 2|k-k_1|\Big[\Big(k_1 - \frac{k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \ge \frac{15k^2}{8}.$$

Así, usando (3.13),

$$|\tau_1 + k_1^3 + k_1| \ge \frac{5k^2}{8}.$$

Por tanto, del Lema 3.2.2,

$$\frac{1}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1\rangle} J_4 \le C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1 - 2k^3 - 2k + 3k^2k_1 - 3kk_1^2 + k_1^3 + k_1\rangle}$$
$$\le C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \left|k^3 - \frac{3}{2}k^2k_1 + k + \frac{3}{2}kk_1^2 - \frac{\tau_1}{2} - \frac{k_1^3}{2} - \frac{k_1}{2}\right|\right)} \le C.$$

En consecuencia, de los estimativos anteriores vemos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle}\sum_k \int \frac{|k|^2 d\tau}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_2\rangle} \le C, \quad \text{en} \quad R_2.$$

Por lo tanto

$$|S_2|^2 \le C\|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |h(k,\tau)|^2 \Big(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(k_2,\tau_2)|^2 d\tau_1\Big) d\tau$$
$$\le C\|f\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}\|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}\|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}.$$

Empleando argumentos análogos podemos estimar $Z(f,g,h)$ en el conjunto

$$R^* = \{(k,k_1,\tau,\tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \,:\, |\sigma_1| \leq |\sigma_2|\}$$

y concluir que para $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ como en el caso $(C_1)$ tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$|Z(f,g,h)| \leq C\|f\|_{\ell^2_k L^2_\tau}\|g\|_{\ell^2_k L^2_\tau}\|h\|_{\ell^2_k L^2_\tau}.$$

Ahora, consideremos $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ como en el caso $(C_3)$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|S_1|^2 &\leq \left(\sum_k \int |h(k,\tau)|^2 d\tau\right)\left(\sum_k \int \left(\sum_{k_1} \int \frac{|kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)\chi_{R_1}|}{\langle\sigma\rangle^{1/2}\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}} d\tau_1\right)^2 d\tau\right) \\
&\leq \|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_k \int \left(\sum_{k_1} \int |f(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)|^2 d\tau_1\right)\left(\sum_{k_1} \int \frac{\chi^2_{R_1}|k|^2 d\tau_1}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle}\right) d\tau.
\end{aligned}$$

Demostremos que la expresión

$$\sum_{k_1} \int \frac{\chi^2_{R_1}|k|^2 d\tau_1}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle} = \frac{|k|^2}{\langle\sigma\rangle} \sum_{k_1} \int \frac{\chi^2_{R_1} d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle}$$

es acotada. Utilizando la desigualdad (1.8) en el Lema 1.2.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle\tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|\rangle\langle\tau - \tau_1 + |k_2|^2 + |k_2|\rangle} \leq \frac{C}{\langle|k_1|^3 + |k_1| - \tau - |k_2|^3 - |k_2|\rangle}.$$

Luego entonces probaremos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{|k|^2}{\langle\tau + |k|^3 + |k|\rangle} \sum_{k_1} \frac{1}{\langle|k_1|^3 + |k_1| - \tau - |k-k_1|^3 - |k-k_1|\rangle} \leq C, \quad \text{en} \quad R_1.$$

Observemos la relación

$$\begin{aligned}
\tau + |k|^3 + |k| - \big[\tau_1 - |k_1|^3 - &|k_1| + \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\big] \\
&= |k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Notemos que si $(k,k_1,\tau,\tau_1) \in R_1$, entonces tenemos que

$$|\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|| \leq |\tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|| \leq |\tau + |k|^3 + |k||.$$

Así, usando en (3.18) la desigualdad triangular obtenemos que

$$\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| \leq 3|\tau + |k|^3 + |k||. \tag{3.19}$$

Supongamos $k_1 > 0$ y $k - k_1 > 0$. Entonces $k > k_1 > 0$ y por tanto, del Lema 3.2.2,

$$\sum_{k_1} \frac{1}{\langle |k_1|^3 + |k_1| - \tau - |k-k_1|^3 - |k-k_1| \rangle}$$

$$\leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau - 2k_1^3 - 2k_1 + k^3 + k - 3k^2 k_1 + 3kk_1^2 \rangle}$$

$$\leq \sup_{(k,\tau)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \left|k_1^3 - \frac{3}{2}kk_1^2 + k_1 + \frac{3}{2}k^2 k_1 - \frac{\tau}{2} - \frac{k^3}{2} - \frac{k}{2}\right|\right)} \leq C.$$

Además vemos que

$$\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = \big|k^3 + k + k_1^3 + k_1 - k_2^3 - k_2\big|$$
$$= 2|k_1|\left|\left(k_1 - \frac{3k}{4} + \frac{15k^2}{16} + 1\right)^2\right| \geq \frac{15k^2}{8}.$$

En consecuencia, utilizado (3.19),

$$|\tau + k^3 + k| \geq \frac{5k^2}{8}$$

y por tanto

$$\frac{|k|^2}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle} \leq C.$$

Supongamos $k_1 < 0$ y $k - k_1 < 0$. Luego $k < k_1 < 0$ y por tanto, usando el Lema 3.2.2,

$$\sum_{k_1} \frac{1}{\langle |k_1|^3 + |k_1| - \tau - |k-k_1|^3 - |k-k_1| \rangle}$$

$$\leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau + 2k_1^3 + 2k_1 - k^3 - k + 3k^2 k_1 - 3kk_1^2 \rangle}$$

$$\leq \sup_{(k,\tau)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \left|k_1^3 - \frac{3}{2}kk_1^2 + k_1 + \frac{3}{2}k^2 k_1 + \frac{\tau}{2} - \frac{k^3}{2} - \frac{k}{2}\right|\right)} \leq C.$$

Además, vemos que

$$\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = | - 2k_1^3 - 2k_1 - 3kk_1(k - k_1)|$$
$$= 2|k_1|\left[\left(k_1 - \frac{3k}{4}\right)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\right] \geq \frac{15k^2}{8}.$$

De (3.19) tenemos que

$$|\tau - k^3 - k| \geq \frac{5k^2}{8} \quad \text{y} \quad \frac{|k|^2}{\langle \tau - k^3 - k\rangle} \leq C.$$

Supongamos $k_1 > 0$ y $k - k_1 < 0$. Usando el Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1} & \frac{1}{\langle |k_1|^3 + |k_1| - \tau - |k-k_1|^3 - |k-k_1|\rangle} \\
&\leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau - k^3 - k + 3k^2 k_1 - 3kk_1^2\rangle} \\
&\leq \sup_{(k,\tau)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{3|k|} + \left|k_1^2 - kk_1 - \frac{\tau}{3k} + \frac{k^2}{3} + \frac{1}{3}\right|\right)} \leq C.
\end{aligned}$$

Además, si $k > 0$ entonces, usando (3.10),

$$\begin{aligned}
\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| &= \big|2k^3 + 2k - 3kk_1(k-k_1)\big| \\
&\geq 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.
\end{aligned}$$

Si $k < 0$ entonces

$$\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.$$

En consecuencia, de (3.19),

$$|\tau + |k|^3 + |k|| \geq \frac{k^2}{2}$$

y por consiguiente

$$\frac{|k|^2}{\langle \tau + |k|^3 + |k|\rangle} \leq C.$$

Supongamos $k_1 < 0$ y $k - k_1 > 0$. Luego, usando el Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1} & \frac{1}{\langle |k_1|^3 + |k_1| - \tau - |k-k_1|^3 - |k-k_1|\rangle} \\
&\leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau + k^3 + k - 3k^2 k_1 + 3kk_1^2\rangle} \\
&\leq \sup_{(k,\tau)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{3|k|} + \left|k_1^2 - kk_1 + \frac{\tau}{3k} + \frac{k^2}{3} + \frac{1}{3}\right|\right)} \leq C.
\end{aligned}$$

Además, si $k > 0$ entonces

$$\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.$$

Si $k < 0$ entonces

$$\begin{aligned}\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| &= \big|2k^3 + 2k - 3kk_1(k-k_1)\big| \\ &\geq 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.\end{aligned}$$

En consecuencia, usando (3.19),

$$|\tau + |k|^3 + |k|| \geq \frac{k^2}{2} \quad \text{y} \quad \frac{|k|^2}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle} \leq C.$$

En consecuencia, de los estimativos anteriores tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{|k|^2}{\langle \sigma \rangle} \sum_{k_1} \int \frac{d\tau_1}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle} \leq C, \quad \text{en} \quad R_1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}|S_1|^2 &\leq C\|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |g(k_1,\tau_1)|^2 \Bigg( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(k_2,\tau_2)|^2 d\tau \Bigg) d\tau_1 \\ &\leq C\|f\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}.\end{aligned}$$

De forma similar trabajamos con el término $S_2$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|S_2|^2 &\leq \Bigg( \sum_{k_1} \int |g(k_1,\tau_1)|^2 d\tau_1 \Bigg) \Bigg( \sum_{k_1} \int \Bigg( \sum_k \int \frac{|kf(k_2,\tau_2)h(k,\tau)\chi_{R_2}|}{\langle \sigma \rangle^{1/2} \langle \sigma_1 \rangle^{1/2} \langle \sigma_2 \rangle^{1/2}} d\tau \Bigg)^2 d\tau_1 \Bigg) \\ &\leq \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k_1} \int \Bigg( \sum_k \int |f(k_2,\tau_2)h(k,\tau)|^2 d\tau \Bigg) \Bigg( \sum_k \int \frac{\chi^2_{R_2} |k|^2 d\tau}{\langle \sigma \rangle \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle} \Bigg) d\tau_1.\end{aligned}$$

Demostraremos que la expresión

$$\sum_k \int \frac{\chi^2_{R_2} |k|^2 d\tau}{\langle \sigma \rangle \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle} = \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle} \sum_k \int \frac{\chi^2_{R_2} |k|^2 d\tau}{\langle \sigma \rangle \langle \sigma_2 \rangle}$$

es acotada. Utilizando la desigualdad (1.8) en el Lema 1.2.1 obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle \langle \tau - \tau_1 + |k_2|^3 + |k_2| \rangle} \leq \frac{C}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k_2|^3 - |k_2| \rangle}.$$

Por consiguiente probaremos que existe $C>0$ tal que

$$\frac{1}{\langle \tau_1 - |k_1|^3 - |k_1| \rangle} \sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k-k_1|^3 - |k-k_1| \rangle} \leq C, \quad \text{en} \quad R_2.$$

Notemos que si $(k, k_1, \tau, \tau_1) \in R_2$, entonces tenemos que

$$|\tau + |k|^3 + |k|| \leq |\tau_1 - |k_1|^3 - |k_1||, \qquad |\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|| \leq |\tau_1 - |k_1|^3 - |k_1||.$$

Así, utilizando en (3.18) la desigualdad triangular obtenemos que

$$\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| \leq 3|\tau_1 - |k_1|^3 - |k_1||. \tag{3.20}$$

Supongamos $k>0$ y $k-k_1>0$. Por consiguiente

$$\sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k-k_1|^3 - |k-k_1| \rangle} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2 \rangle} = J_1,$$

donde $J_1$ está definido en (3.14). Además, si $k_1>0$ entonces de (3.10),

$$\begin{aligned} \big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| &= \big|2k_1^3 + 2k_1 + 3kk_1(k-k_1)\big| \\ &= 2|k_1|\Big[\Big(k_1 - \frac{3k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \geq \frac{15k^2}{8}. \end{aligned}$$

Si $k_1<0$ entonces usando (3.10),

$$\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.$$

En consecuencia, de (3.20) existe $C>0$ tal que

$$|\tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|| \geq Ck^2$$

y por consiguiente, usando el Lema 3.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \tau_1 - |k_1|^3 - |k_1| \rangle} J_1 &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}*\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2 \rangle} \\ &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Big(\frac{1}{3|k_1|} + \Big|k^2 - kk_1 + \frac{\tau_1}{3k_1} + \frac{k_1^2}{3} + \frac{1}{3}\Big|\Big)} \leq C. \end{aligned}$$

Supongamos $k<0$ y $k-k_1<0$. Por tanto

$$\sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1+|k|^3+|k|-|k-k_1|^3-|k-k_1|\rangle} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1-k_1^3-k_1-3k^2k_1+3kk_1^2\rangle} = J_2,$$

donde $J_2$ está definido en (3.15). Además, si $k_1>0$ entonces usando (3.10),

$$\big||k|^3+|k|+|k_1|^3+|k_1|-|k_2|^3-|k_2|\big| = 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}$$

y si $k_1<0$ entonces,

$$\begin{aligned}\big||k|^3+|k|+|k_1|^3+|k_1|-|k_2|^3-|k_2|\big| &= \big|2k_1^3+2k_1+3k^2k_1-3kk_1^2\big| \\ &= 2|k_1|\left[\left(k_1-\frac{3k}{4}\right)^2+\frac{15k^2}{16}+1\right] \geq \frac{15k^2}{8}.\end{aligned}$$

En consecuencia, de (3.20), existe $C>0$ tal que

$$|\tau_1-|k_1|^3-|k_1|| \geq Ck^2$$

y por tanto, del Lema 3.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\langle \tau_1-|k_1|^3-|k_1|\rangle} J_2 &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1-k_1^3-k_1-3k^2k_1+3kk_1^2\rangle} \\ &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{3|k_1|}+\left|k^2-kk_1-\frac{\tau_1}{3k_1}+\frac{k_1^2}{3}+\frac{1}{3}\right|\right)} \leq C.\end{aligned}$$

Supongamos $k>0$ y $k-k_1<0$. Entonces $k_1>k>0$ y por tanto

$$\begin{aligned}&\sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1+|k|^3+|k|-|k-k_1|^3-|k-k_1|\rangle} \\ &\qquad\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1+2k^3+2k-3k^2k_1+3kk_1^2-k_1^3-k_1\rangle} = J_2,\end{aligned}$$

donde $J_2$ está definido en (3.15). Además, tenemos que

$$\begin{aligned}\big||k|^3+|k|+|k_1|^3+|k_1|-|k_2|^3-|k_2|\big| &= \big|2k^3+2k-3k^2k_1+3kk_1^2\big| \\ &\geq 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad (3.20),

$$|\tau_1 + k_1^3 + k_1| \geq \frac{k^2}{2}.$$

Por consiguiente, del Lema 3.2.2, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1 \rangle} J_2 &\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1 + 2k^3 + 2k - 3k^2k_1 + 3kk_1^2 - k_1^3 - k_1 \rangle} \\
&\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \left|k^3 - \frac{3}{2}k^2k_1 + k + \frac{3}{2}kk_1^2 + \frac{\tau_1}{2} - \frac{k_1^3}{2} - \frac{k_1}{2}\right|\right)} \leq C.
\end{aligned}$$

Supongamos $k < 0$ y $k - k_1 > 0$. Entonces $k_1 < k < 0$ y por tanto

$$\begin{aligned}
&\sum_k \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 + |k|^3 + |k| - |k-k_1|^3 - |k-k_1| \rangle} \\
&\qquad \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^2}{\langle \tau_1 - 2k^3 - 2k + k_1^3 + k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2 \rangle} = J_4,
\end{aligned}$$

donde $J_4$ está definido en (3.17). También, tenemos que

$$\begin{aligned}
\big||k|^3 + |k| + |k_1|^3 + |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| &= \big| -2k^3 - 2k + 3k^2k_1 - 3kk_1^2\big| \\
&\geq 3|kk_1(k-k_1)| \geq \frac{3k^2}{2}.
\end{aligned}$$

Así, usando (3.20), obtenemos que $|\tau_1 + k_1^3 + k_1| \geq \frac{k^2}{2}$. En consecuencia, del Lema 3.2.2,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\langle \tau_1 + k_1^3 + k_1 \rangle} J_4 \\
&\quad\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\langle \tau_1 - 2k^3 - 2k + k_1^3 + k_1 + 3k^2k_1 - 3kk_1^2 \rangle} \\
&\quad\leq C \sup_{(k_1,\tau_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \left|k^3 - \frac{3}{2}k^2k_1 + k + \frac{3}{2}kk_1^2 - \frac{\tau_1}{2} - \frac{k_1^3}{2} - \frac{k_1}{2}\right|\right)} \leq C.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de los estimativos anteriores obtenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle} \sum_k \int \frac{|k|^2 d\tau}{\langle \sigma \rangle \langle \sigma_2 \rangle} \leq C, \quad \text{en} \quad R_2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}|S_2|^2 &\leq C\|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |h(k,\tau)|^2 \Big( \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(k_2,\tau_2)|^2 d\tau_1 \Big) d\tau \\ &\leq C\|f\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}.\end{aligned}$$

Análogamente podemos estimar $Z(f,g,h)$ en el conjunto

$$R^* = \{(k,k_1,\tau,\tau_1) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \,:\, |\sigma_1| \leq |\sigma_2|\}$$

y concluir que para $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en el caso $(C_3)$ que existe $C>0$ tal que

$$|Z(f,g,h)| \leq C\|f\|_{\ell^2_k L^2_\tau} \|g\|_{\ell^2_k L^2_\tau} \|h\|_{\ell^2_k L^2_\tau}.$$

A continuación, consideremos $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en el caso $(C_4)$. Entonces, usando el cambio de variable $(k,k_1,\tau,\tau_1) \mapsto -(k,k_1,\tau,\tau_1)$ tenemos que

$$\begin{aligned}Z(f,g,h) &= \sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)h(k,k\tau)d\tau d\tau_1}{\langle \tau - |k|^3 - |k|\rangle^{1/2} \langle \tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|\rangle^{1/2} \langle \tau_2 - |k_2|^3 - |k_2|\rangle^{1/2}} \\ &= \sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-kf(-k_2,-\tau_2)g(-k_1,-\tau_1)h(-k,-\tau)d\tau d\tau_1}{\langle \tau + |k|^3 + |k|\rangle^{1/2} \langle \tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|\rangle^{1/2} \langle \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\rangle^{1/2}},\end{aligned}$$

entonces, la demostración de la desigualdad (3.9) con $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en el caso $(C_4)$ se reduce a la prueba de (3.9) con $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en el caso $(C_3)$. Similarmente, usando el cambio de variable $(k,k_1,\tau,\tau_1) \mapsto -(k,k_1,\tau,\tau_1)$, vemos que la prueba de (3.9) con $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en los casos $(C_5)$ y $(C_6)$ puede ser reducida, respectivamente a la demostración de (3.9) con $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en los casos $(C_2)$ y $(C_1)$.

Finalmente, consideremos $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ como en el caso $(C_2)$. Usando los cambios de variable

$$\tau_2 = \tau - \tau_1, \quad k_2 = k - k_1, \quad (k,k_2,\tau,\tau_2) \mapsto -(k,k_2,\tau,\tau_2)$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}&Z(f,g,h) \\ &= \sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)h(k,\tau)d\tau d\tau_1}{\langle \tau - |k|^3 - |k|\rangle^{1/2} \langle \tau_1 - |k_1|^3 - |k_1|\rangle^{1/2} \langle \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\rangle^{1/2}} \\ &= \sum_{k,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{kf(k_2,\tau_2)g(k-k_2,\tau-\tau_2)h(k,\tau)d\tau d\tau_2}{\langle \tau - |k|^3 - |k|\rangle^{1/2} \langle \tau - \tau_2 - |k-k_2|^3 - |k-k_2|\rangle^{1/2} \langle \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\rangle^{1/2}} \\ &= \sum_{k,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-kf(-k_2,-\tau_2)g(k_2-k,\tau_2-\tau)h(-k,-\tau)d\tau d\tau_2}{\langle \tau + |k|^3 + |k|\rangle^{1/2} \langle \tau - \tau_2 + |k-k_2|^3 + |k-k_2|\rangle^{1/2} \langle \tau_2 - |k_2|^3 - |k_2|\rangle^{1/2}}\end{aligned}$$

y entonces la prueba se reduce al caso $(C_3)$.

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
&\|(\partial_x\Phi)(\partial_x\Phi_1)\|_{Y^{s+1,-1/2}} \\
&\qquad = \sup_{\|h\|_{\ell^2_k L^2_\tau}=1} \Big| \sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} k\langle k\rangle^s \langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{-1/2}(k-k_1)\widetilde{\Phi}(k-k_1,\tau-\tau_1)k_1\widetilde{\Phi}_1(k_1,\tau_1) \\
&\qquad\qquad \times h(k,\tau)\,d\tau d\tau_1\Big|.
\end{aligned}$$

Entonces, definiendo

$$f(k,\tau)=\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^s k\widetilde{\Phi}(k,\tau), \quad f_1(k,\tau)=\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^s k\widetilde{\Phi}_1(k,\tau),$$

tenemos que (ii) es equivalente a

$$|K(f,f_1,h)| \le C\|f\|_{\ell^2_k L^2_\tau}\|f_1\|_{\ell^2_k L^2_\tau}\|h\|_{\ell^2_k L^2_\tau}, \tag{3.21}$$

donde

$$\begin{aligned}
&K(f,f_1,h) \\
&\quad = \sum_{k,k_1\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{k\langle k\rangle^s f(k-k_1,\tau-\tau_1)f_1(k_1,\tau_1)h(k,\tau)\,d\tau d\tau_1}{\langle k_1\rangle^s\langle k-k_1\rangle^s\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle|\tau_1|-\phi(k_1)\rangle^{1/2}\langle|\tau-\tau_1|-\phi(k-k_1)\rangle^{1/2}},
\end{aligned}$$

y por consiguiente la demostración de (3.21) es análoga a la prueba de (3.9).

□

La demostración de los siguientes estimativos es análoga a la prueba del Lema 3.2.3.

**Lema 3.2.4.** *Sea $s\ge 0$. Entonces existe $C_4>0$ tal que*

*(i)* $\left\| \frac{\langle k\rangle^s[\partial_x(\eta\partial_x\Phi)]^\sim(k,\tau)}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle} \right\|_{\ell^2_k L^1_\tau} \le C_4\|\eta\|_{X^{s,1/2}}\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}}$,

*(ii)* $\left\| \frac{|k|\langle k\rangle^s[(\partial_x\Phi)(\partial_x\Phi_1)]^\sim(k,\tau)}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle} \right\|_{\ell^2_k L^1_\tau} \le C_4\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}}\|\Phi_1\|_{Y^{s+1,1/2}}$.

*Demostración.* Primero notemos que

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\frac{\langle k\rangle^s[\partial_x(\eta\partial_x\Phi)]^{\sim}(k,\tau)}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle}\Big\|_{\ell^2_kL^1_\tau}\\
&=\Big\|\frac{k\langle k\rangle^s}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\eta}(k-k_1,\tau-\tau_1)k_1\widetilde{\Phi}(k_1,\tau_1)d\tau_1\Big\|_{\ell^2_kL^1_\tau}\\
&=\Big\|\frac{k\langle k\rangle^s}{\langle|\tau|-\phi(k)\rangle}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(k-k_1,\tau-\tau_1)g(k_1,\tau_1)d\tau_1}{\langle k_1\rangle^s\langle k-k_1\rangle^s\langle|\tau_1|-\phi(k_1)\rangle^{1/2}\langle|\tau-\tau_1|-\phi(k-k_1)\rangle^{1/2}}\Big\|_{\ell^2_kL^1_\tau}\\
&=J(f,g),
\end{aligned}
$$

donde

$$
f(k,\tau)=\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^s\widetilde{\eta}(k,\tau),\quad g(k,\tau)=\langle|\tau|-\phi(k)\rangle^{1/2}\langle k\rangle^s k\widetilde{\Phi}(k,\tau).
$$

En vista de la desigualdad (3.2) demostraremos la desigualdad en (i) con $Z(f,g)$ en lugar de $J(f,g)$ donde

$$
Z(f,g)=\Big\|\frac{k}{\langle\sigma\rangle}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big\|_{\ell^2_kL^1_\tau}.
$$

Más específicamente, estudiaremos la expresión

$$
Z_j(f,g)=\Big\|\frac{k}{\langle\sigma\rangle}\sum_{k_1}\int\frac{f(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)\chi_{R_j}d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big\|_{\ell^2_kL^1_\tau},\quad j=1,2,
$$

con $k_2=k-k_1,\tau_2=\tau-\tau_1$; $\sigma,\sigma_1,\sigma_2$ perteneciendo a uno de los casos $(C_1)-(C_6)$ considerados en el Lema 3.2.3; y los conjuntos $R$, $R_1$, $R_2$ están definidos por

$$
R=\{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2\,:\,|\sigma_2|\le|\sigma_1|\},
$$

$$
R_1=\{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in R\,:\,|\sigma_1|\le|\sigma|\}\quad\text{y}\quad R_2=\{(k,k_1,\tau,\tau_1)\in R\,:\,|\sigma|\le|\sigma_1|\}.
$$

Utilizando un argumento de dualidad vemos que

$$
\begin{aligned}
Z_1(f,g)&=\Big\|\Big\|\frac{k}{\langle\sigma\rangle}\sum_{k_1}\int\frac{f(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)\chi_{R_1}d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big\|_{L^1_\tau}\Big\|_{\ell^2_k}\\
&=\sup_{\|h\|_{\ell^2_k}=1}\Big|\sum_k\sum_{k_1}\int\int\frac{kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)h(k)\chi_{R_1}d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big|.
\end{aligned}
$$

Considerando $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ como en el caso $(C_1)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\Bigg[\sum_k \sum_{k_1} \int\int \frac{|kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)h(k)|\chi_{R_1} d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Bigg]^2 \\ \leq \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k_1} \int \Big(\sum_k \int |f(k_2,\tau_2)h(k)|^2 d\tau\Big)\Big(\sum_k \int \frac{\chi^2_{R_1}|k|^2 d\tau}{\langle\sigma\rangle^2\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle}\Big) d\tau_1 \\ \leq \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau} \sum_{k_1} \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)|^2 \int_{\mathbb{R}} |f(k_2,\tau_2)|^2 d\tau \Big\|_{L^\infty_{\tau_1}} \sum_k \int\int \frac{\chi^2_{R_1}|k|^2 d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^2\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle}.\end{aligned}$$

Demostremos que la expresión

$$\sum_k \int\int \frac{\chi^2_{R_1}|k|^2 d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^2\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle} = \sum_k |k|^2 \int \frac{1}{\langle\sigma\rangle^2}\Big(\int \frac{\chi^2_{R_1} d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle}\Big) d\tau$$

es acotada. En efecto si $(k, k_1, \tau, \tau_1) \in R_1$,

$$|\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|| \leq |\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1|| \leq |\tau + |k|^3 + |k||. \tag{3.22}$$

Por consiguiente, usando la desigualdad (1.8) en el Lema 1.2.1, tenemos para $0 < r < 1/4$ que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\langle\tau + |k|^3 + |k|\rangle^2} \int \frac{d\tau_1}{\langle\tau + |k_1|^3 + |k_1|\rangle\langle\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\rangle} \\ &= \frac{1}{\langle\tau + |k|^3 + |k|\rangle^{2(1-r)}} \int \frac{d\tau_1}{\langle\tau + |k|^3 + |k|\rangle^{2r}\langle\tau + |k_1|^3 + |k_1|\rangle\langle\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\rangle} \\ &\leq \frac{1}{\langle\tau + |k|^3 + |k|\rangle^{2(1-r)}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle\tau + |k_1|^3 + |k_1|\rangle^{1+r}\langle\tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\rangle^{1+r}} \\ &\leq \frac{C}{\langle\tau + |k|^3 + |k|\rangle^{2(1-r)}\langle\tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k_2|^3 + |k_2|\rangle^{1+r}}.\end{aligned}$$

Por tanto, para $0 < r < 1/4$, probaremos que existe $C > 0$ tal que

$$\sum_k |k|^2 \int \frac{d\tau}{\langle\tau + |k|^3 + |k|\rangle^{2(1-r)}\langle\tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k_2|^3 + |k_2|\rangle^{1+r}} \leq C, \quad \text{en } R_1.$$

Más adelante se notará la importancia de la elección de $r$. Tenemos la relación

$$\tau + |k|^3 + |k| - \big[\tau_1 + |k_1|^3 + |k_1| + \tau_2 + |k_2|^3 + |k_2|\big] = |k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|. \tag{3.23}$$

Utilizando la desigualdad triangular en (3.23) y la desigualdad (3.22) obtenemos que

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| \leq 3|\tau + |k|^3 + |k||. \tag{3.24}$$

Supongamos $k_1 > 0$ y $k - k_1 > 0$. Entonces $k > k_1 > 0$ y por tanto

$$|k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 + |k_2| = 3kk_1(k - k_1) > 0.$$

Así, de (3.23) y (3.10) vemos que

$$|\tau + k^3 + k| \geq |kk_1(k - k_1)| \geq \frac{|k|^2}{2},$$

y en consecuencia, para $0 < r < 1/4$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_k |k|^2 \int \frac{d\tau}{\langle \tau + |k|^3 + |k|\rangle^{2(1-r)} \langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k - k_1|^3 + |k - k_1|\rangle^{1+r}} \\
&\qquad = \sum_k |k|^2 \int \frac{d\tau}{\langle \tau + k^3 + k\rangle^{2(1-r)} \langle \tau + k_1^3 + k_1 + (k - k_1)^3 + (k - k_1)\rangle^{1+r}} \\
&\qquad \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|^{2-4r}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle \tau + k^3 + k - 3k^2 k_1 + 3kk_1^2\rangle^{1+r}}.
\end{aligned}$$

Supongamos $k_1 < 0$ y $k - k_1 < 0$. Entonces $k < k_1 < 0$ y por consiguiente

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 + |k_2|\big| = 3|kk_1(k - k_1)|.$$

Entonces, de la desigualdad (3.24) y la desigualdad (3.10) obtenemos que

$$|\tau - k^3 - k| \geq |kk_1(k - k_1)| \geq \frac{|k|^2}{2}.$$

Por tanto, para $0 < r < 1/4$,

$$\begin{aligned}
&\sum_k |k|^2 \int \frac{d\tau}{\langle \tau + |k|^3 + |k|\rangle^{2(1-r)} \langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k - k_1|^3 + |k - k_1|\rangle^{1+r}} \\
&\qquad \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|^{2-4r}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle \tau - k^3 + 3k^2 k_1 - 3kk_1^2 - k\rangle^{1+r}}.
\end{aligned}$$

Supongamos $k_1 > 0$ y $k - k_1 < 0$. Por tanto, si $k > 0$ entonces

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 2|k - k_1|\Big[\Big(k_1 - \frac{k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \geq \frac{15}{8}k^2$$

y si $k < 0$ entonces

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 2|k_1|\Big[\Big(k_1 - \frac{3k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \geq \frac{15}{8}k^2.$$

Así, de la desigualdad (3.24) tenemos que

$$|\tau + |k|^3 + |k|| \geq \frac{5}{8}k^2,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\sum_k |k|^2 \int & \frac{d\tau}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle^{2(1-r)} \langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k-k_1|^3 + |k-k_1| \rangle^{1+r}} \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|^{2-4r}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle \tau + 2k_1^3 + 2k_1 - k^3 + 3k^2 k_1 - 3kk_1^2 - k \rangle^{1+r}}.\end{aligned}$$

Supongamos $k_1 < 0$ y $k - k_1 > 0$. En consecuencia, si $k > 0$ entonces

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 2|k_1| \Big[\Big(k_1 - \frac{3k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \geq \frac{15k^2}{8}$$

y si $k < 0$ entonces

$$\big||k|^3 + |k| - |k_1|^3 - |k_1| - |k_2|^3 - |k_2|\big| = 2|k - k_1| \Big[\Big(k_1 - \frac{k}{4}\Big)^2 + \frac{15k^2}{16} + 1\Big] \geq \frac{15}{8}k^2.$$

Así, usando (3.24),

$$|\tau + |k|^3 + |k|| \geq \frac{5}{8}k^2$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}\sum_k |k|^2 \int & \frac{d\tau}{\langle \tau + |k|^3 + |k| \rangle^{2(1-r)} \langle \tau + |k_1|^3 + |k_1| + |k-k_1|^3 + |k-k_1| \rangle^{1+r}} \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|^{2-4r}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle \tau - 2k_1^3 - 2k_1 + k^3 - 3k^2 k_1 + 3kk_1^2 + k \rangle^{1+r}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $h \in \ell_k^2$ tenemos que

$$\begin{aligned}|Z_1|^2 &\leq C\|g\|^2_{\ell_k^2 L_\tau^2} \Big( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)|^2 \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(k_2, \tau)|^2 d\tau \Big) \\ &\leq C\|f\|^2_{\ell_k^2 L_\tau^2} \|g\|^2_{\ell_k^2 L_\tau^2} \|h\|^2_{\ell_k^2}.\end{aligned}$$

A continuación elegimos $1/2 < r < 3/4$ y vemos que

$$\begin{aligned}
|Z_2| &\leq \Big[\sum_k \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2r}}\Big)\Big(\int\Big(\sum_k \int \frac{|kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)|\chi_{R_2} d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^{1-r}\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big)^2 d\tau\Big)\Big]^{1/2}\\
&\leq C\Big\|\frac{|k|}{\langle\sigma\rangle^{1-r}}\sum_{k_1}\int \frac{|f(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)|\chi_{R_2} d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big\|_{\ell^2_k L^2_\tau}\\
&= C \sup_{\|h\|_{\ell^2_k L^2_\tau}=1}\Big|\sum_k\sum_{k_1}\int\int \frac{|kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)|h(k,\tau)\chi_{R_2} d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^{1-r}\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big|.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\Big[\sum_k\sum_{k_1}\int\int \frac{|kf(k_2,\tau_2)g(k_1,\tau_1)h(k,\tau)|\chi_{R_2} d\tau d\tau_1}{\langle\sigma\rangle^{1-r}\langle\sigma_1\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\Big]^2\\
&\leq \|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}\sum_{k_1}\int\Big(\sum_k\int |f(k_2,\tau_2)h(k,\tau)|^2 d\tau\Big)\Big(\sum_k\int \frac{\chi^2_{R_2}|k|^2 d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2(1-r)}\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle}\Big)d\tau_1.
\end{aligned}$$

Demostremos que la expresión

$$\sum_k\int \frac{\chi^2_{R_2}|k|^2 d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2(1-r)}\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle} = \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle}\sum_k |k|^2\int \frac{\chi^2_{R_2} d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2(1-r)}\langle\sigma_2\rangle}$$

es acotada. Utilizando el Lema 1.2.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle\tau+|k|^3+|k|\rangle^{2(1-r)}\langle\tau_2+|k_2|^3+|k_2|\rangle} \leq \frac{C}{\langle\tau_1+|k|^3+|k|-|k_2|^3-|k_2|\rangle^{2(1-r)}}.$$

Como en la demostración del Lema 3.2.3, para $1/2 < r < 3/4$ es posible probar que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\langle\tau_1+|k_1|^3+|k_1|\rangle}\sum_k \frac{|k|^2}{\langle\tau_1+|k|^3+|k|-|k-k_1|^3-|k-k_1|\rangle^{2(1-r)}} \leq C, \quad \text{en} \quad R_2.$$

Por lo tanto, para toda $h \in \ell^2_k L^2_\tau$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|Z_2|^2 &\leq C\|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} |h(k,\tau)|^2\Big(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} |f(k_2,\tau_2)|^2 d\tau_1\Big)d\tau\Big)\\
&\leq C\|f\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}\|g\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}\|h\|^2_{\ell^2_k L^2_\tau}.
\end{aligned}$$

El resto de la demostración sigue manera análoga.

□

Como consecuencia de los lemas anteriores tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.2.5.** *Sea $s \geq 0$. Entonces existe $C_5 > 0$ tal que*

*(i)* $\|\psi\partial_x(\eta\partial_x\Phi)\|_{Z^s} \leq C_5\|\eta\|_{X^{s,1/2}}\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}}$,

*(ii)* $\|\psi(\partial_x\eta)(\partial_x\Phi_1)\|_{W^{s+1}} \leq C_5\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}}\|\Phi_1\|_{Y^{s+1,1/2}}$.

## 3.3. Buen planteamiento en espacios periódicos

El siguiente teorema es el resultado central de este capítulo.

**Teorema 3.3.1.** *Sea $s \geq 0$. Entonces para todo $(\eta_0, \Phi_0) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ existen un tiempo $T = T(\|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}) > 0$ y una única solución $(\eta, \Phi)$ del problema de Cauchy (3.1)-(3.2) tal que*

$$\eta \in C([0,T] : H^s(\mathbb{T})) \cap U_T^s \quad y \quad \Phi \in C([0,T] : \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})) \cap V_T^{s+1}.$$

*Además, para todo $0 < T' < T$ existe una vecindad $\mathbb{V}$ de $(\eta_0, \Phi_0)$ en $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ tal que la aplicación dato-solución es Lipschitz de $\mathbb{V}$ en la clase*

$$C([0,T'] : H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})) \cap (U_T^s \times V_T^{s+1}).$$

*Demostración.* La demostración de este teorema es análoga a la prueba del Teorema 1.3.1. Para $(\eta_0, \Phi_0) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ consideremos el operador $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ donde

$$\Gamma_1(\eta,\Phi)(t) = \psi(t)S_1(t)(\eta_0,\Phi_0) - \psi(t)\int_0^t S_1(t-t')\psi(t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi), \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'$$

y

$$\Gamma_2(\eta,\Phi)(t) = \psi(t)S_2(t)(\eta_0,\Phi_0) - \psi(t)\int_0^t S_2(t-t')\psi(t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi), \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'.$$

Sea $Z_M$ la bola cerrada de radio $M$ en $U^s \times V^{s+1}$ centrada en el origen. Probaremos que la aplicación $(\eta, \Phi) \mapsto \Gamma(\eta, \Phi)$ aplica $Z_M$ en $Z_M$ y define una contracción si escogemos a

$M$ apropiadamente. En efecto, usando el Lema 3.1.3, el Lema 3.1.4 y el Corolario 3.2.5 obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1(\eta,\Phi)\|_{U^s} &\leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + C_2C_5\Big(\|\eta\|_{X^{s,1/2}}\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}} + \|\Phi\|^2_{Y^{s+1,1/2}}\Big)\\ &\leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + C_2C_5\|(\eta,\Phi)\|^2_{U^s\times V^{s+1}},\end{aligned}$$

y también que

$$\|\Gamma_2(\eta,\Phi)\|_{V^{s+1}} \leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + C_2C_5\|(\eta,\Phi)\|^2_{U^s\times V^{s+1}},$$

de donde

$$\|\Gamma(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}} \leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + C_2C_5\|(\eta,\Phi)\|^2_{U^s\times V^{s+1}}.$$

Escogiendo $M = 2C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}$ tal que

$$K_1 = 4C_1C_2C_5\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} < 1,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}} &\leq C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}(1 + 4C_1C_2C_5\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})})\\ &\leq 2C_1\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} = M.\end{aligned}$$

Probemos ahora que $\Gamma$ es una contracción. En efecto, si $(\eta,\Phi),(\eta_1,\Phi_1)\in Z_M$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1(\eta,\Phi)-&\Gamma_1(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s}\\ &\leq C_2\Big(\|\psi\partial_x(\eta\partial_x\Phi - \eta_1\partial_x\Phi_1)\|_{Z^s} + \|\psi((\partial_x\Phi)^2 - (\partial_x\Phi_1)^2)\|_{W^{s+1}}\Big)\\ &\leq C_2C_5\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}\left(\|(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}} + \|(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}\right).\end{aligned}$$

De forma similar vemos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_2(\eta,\Phi)-&\Gamma_2(\eta_1,\Phi_1)\|_{V^{s+1}}\\ &\leq C_2C_5\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}\left(\|(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}} + \|(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}\right).\end{aligned}$$

Así concluimos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma(\eta,\Phi) &- \Gamma(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}\\ &\leq C_2C_5\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}\left(\|(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}} + \|(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}\right),\end{aligned}$$

y por tanto

$$\|\Gamma(\eta,\Phi) - \Gamma(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}} \leq K_1\|(\eta,\Phi)-(\eta_1,\Phi_1)\|_{U^s\times V^{s+1}}.$$

El resto de la demostración se sigue usando el mismo argumento de la prueba del Teorema 1.3.1.

□

Capítulo 4

# Controlabilidad interna

En este capítulo estudiamos el problema de controlabilidad interna asociado con el sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big) & = 0, \quad x \in \mathbb{T}, \quad t \geq 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = 0, \quad x \in \mathbb{T}, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Veremos que para $T > 0$ y estados inicial y final

$$(\eta_0, \Phi_0), (\eta_T, \Phi_T) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}), \; s \geq 0,$$

suficientemente pequeños, existe una función de control $F = (f_1, f_2)$ tal que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\left(\eta\partial_x\Phi\right) & = f_1, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = f_2, \end{cases} \tag{4.2}$$

con condición inicial

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad x \in \mathbb{T},$$

tiene una solución $(\eta, \Phi) \in C([0, T] \,:\, H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))$ que satisiface

$$\eta(x, T) = \eta_T, \quad \Phi(x, T) = \Phi_T(x), \quad x \in \mathbb{T}.$$

Para obtener el mencionado resultado, primero realizamos un análisis espectral del operador

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -(I - \partial_x^2)\partial_x^2 \\ \\ -(I - \partial_x^2) & 0 \end{pmatrix}$$

definido en el espacio $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$. Usando que el símbolo de Fourier para este operador está dado por

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & (1+k^2)k^2 \\ -(1+k^2) & 0 \end{pmatrix},$$

probaremos para $M$ la existencia de una descomposición espectral, basándonos en el hecho de que sus vectores propios generan una base de Riesz para $H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$. Luego, utilizando este análisis espectral y el método de momentos demostramos un resultado de controlabilidad lineal. Usando un argumento de punto fijo, probamos finalmente el resultado de controlabilidad para el sistema (4.2).

## 4.1. Análisis espectral

Consideremos

$$E_{1,k} = \begin{pmatrix} e^{ikx} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k}e^{ikx} \end{pmatrix},$$

para $k \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si definimos

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & (1+k^2)k^2 \\ -(1+k^2) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & (1+k^2)k \\ -(1+k^2)k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^*,$$

entonces podemos ver directamente que

$$M_k(E_{1,k}, E_{2,k}) = (E_{1,k}, E_{2,k})\Sigma_k, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

Además, tenemos que los valores propios para $\Sigma_k$ son

$$\lambda_{1,k} = i\sqrt{(1+k^2)^2k^2}, \quad \lambda_{2,k} = -i\sqrt{(1+k^2)^2k^2}, \quad k \in \mathbb{Z}^*,$$

con vectores propios correspondientes

$$\tilde{e}_{1,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_{1,k}}{(1+k^2)k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_{2,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_{2,k}}{(1+k^2)k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} M(E_{1,k}, E_{2,k})(\tilde{e}_{1,k}, \tilde{e}_{2,k}) &= (E_{1,k}, E_{2,k})\Sigma_k(\tilde{e}_{1,k}, \tilde{e}_{2,k}) \\ &= (\lambda_{1,k}(E_{1,k}, E_{2,k})\tilde{e}_{1,k}, \lambda_{2,k}(E_{1,k}, E_{2,k})\tilde{e}_{2,k}), \quad k \in \mathbb{Z}^*, \end{aligned}$$

lo que indica que $\lambda_{1,k}$ y $\lambda_{2,k}$ son los valores propios para el operador $M$ con vectores propios correspondientes

$$\eta_{j,k} = (E_{1,k}, E_{2,k})\tilde{e}_{j,k}, \quad j = 1, 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde

$$\lambda_{1,0} = \lambda_{2,0} = 0, \quad \tilde{e}_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De otro lado,

$$\lim_{k\to\pm\infty} \frac{\lambda_{1,k}}{(1+k^2)k} = \pm i, \qquad \lim_{k\to\pm\infty} \frac{\lambda_{2,k}}{(1+k^2)k} = \mp i.$$

En consecuencia

$$\lim_{k\to\infty} (\tilde{e}_{1,k}, \tilde{e}_{2,k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \pm i & \mp i \end{pmatrix},$$

y además

$$\lim_{k\to\infty} \det(\tilde{e}_{1,k}, \tilde{e}_{2,k}) = \mp 2i \neq 0.$$

Dado que $\{E_{1,k}, E_{2,k} \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortogonal para $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$, entonces siguiendo el trabajo [20] de S. Hansen vemos que $\{\nu_{1,0}, \nu_{2,0}, \nu_{1,k}, \nu_{2,k} \;:\; k \in \mathbb{Z}^*\}$ forma una base de Riesz para el espacio $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ donde

$$\nu_{j,k} = \frac{\eta_{j,k}}{\|\eta_{j,k}\|_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}}}.$$

También, usando la definición de $\nu_{j,k}$, para $j = 1, 2$ vemos que $\nu_{j,k} = \vec{b}_{j,k} e^{ikx}$ con

$$0 < B_1 \leq \|\vec{b}_{j,k}\| \leq B_2, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad s \geq 0. \tag{4.3}$$

De la discusión anterior tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1.** *Sean $\lambda_k$ y $\phi_{j,k}$, $j = 1, 2$ definidos respectivamente por*

$$\lambda_k = i\, sign(k)\sqrt{(1+k^2)^2 k^2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\phi_{1,k} = \begin{cases} \nu_{1,k}, & k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \nu_{2,k}, & k = -1, -2, -3, \ldots, \end{cases} \qquad \phi_{2,k} = \begin{cases} \nu_{1,-k}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu_{2,-k}, & k = 0, -1, -2, -3, \ldots \end{cases}$$

*Entonces*

*(i) El espectro del operador $M$ es $\sigma(M) = \{\lambda_k \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$, en el que cada $\lambda_k$ es un valor propio doble con vectores propios $\phi_{1,k}$ y $\phi_{2,k}$.*

*(ii)* *El conjunto* $\{\phi_{1,k}, \phi_{2,k} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ *forma una base ortonormal para el espacio* $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ *de manera que cualquier* $(\eta, \Phi) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ *tiene la siguiente expansión*

$$(\eta, \Phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_{1,k}\phi_{1,k} + \alpha_{2,k}\phi_{2,k}), \quad \alpha_{j,k} = \langle (\eta, \Phi), \phi_{j,k} \rangle_Q, \quad j = 1, 2, \ k \in \mathbb{Z},$$

*donde* $Q = L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$.

## 4.2. Controlabilidad lineal

En esta sección estudiamos el problema de control para el sistema lineal

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2 \Phi - \partial_x^4 \Phi &= f_1, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2 \eta &= f_2, \end{cases} \tag{4.4}$$

con la condición inicial

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x, 0) = \Phi_0(x). \tag{4.5}$$

Inicialmente demostramos el siguiente resultado de controlabilidad lineal con un solo control, el cual actuará sobre la primera ecuación.

**Teorema 4.2.1.** *Supongamos que* $\rho_1$ *es es una función suave distinta de cero definida en* $\mathbb{T}$. *Sean* $s \geq 0$ *y* $T > 0$. *Entonces para todo* $\eta_0, \eta_T \in H^s(\mathbb{T})$ *existe una función* $h \in L^2(0, T; H^s(\mathbb{T}))$ *tal que si* $f_1(x, t) = \rho_1(x)h(x, t)$, *el problema (4.4)-(4.5) con* $f_2 = \Phi_0 = 0$ *tiene una solución* $(\eta, \Phi) \in C([0, T] : H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))$ *que satisface*

$$\eta(x, T) = \eta_T(x), \quad \Phi(x, T) = 0.$$

*Además, existe* $C = C(T) > 0$ *tal que*

$$\|h\|_{L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))} \leq C \left( \|\eta_0\|_{H^s(\mathbb{T})} + \|\eta_T\|_{H^s(\mathbb{T})} \right).$$

*Demostración.* Para cualquier función $h = h(x, t)$ definimos el operador de control $L$ por

$$(Lh)(x, t) = \rho_1(x)h(x, t).$$

Si $f_1 = Lh$ y $f_2 = 0$, entonces reescribimos el problema (4.4)-(4.5) como el sistema lineal de primer orden

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \Phi \end{pmatrix}_t = M \begin{pmatrix} \eta \\ \Phi \end{pmatrix} + Bh, \tag{4.6}$$

con condición inicial

$$\eta(x,0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x,0) = 0, \tag{4.7}$$

donde

$$Bh = \begin{pmatrix} Lh \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso para $h \in L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))$ la solución $(\eta, \Phi)$ del problema lineal (4.6)-(4.7) está dada por

$$(\eta(t), \Phi(t)) = S(t)(\eta_0, 0) + \int_0^t S(t-\tau)Bh(\tau)\,d\tau.$$

Usando el análisis espectral para el operador $M$ tenemos que

$$\begin{aligned}(\eta(t), \Phi(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\lambda_n t}(\alpha_{1,n}\phi_{1,n} + \alpha_{2,n}\phi_{2,n}) \\ + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} \left(\beta_{1,n}(\tau)\phi_{1,n} + \beta_{2,n}(\tau)\phi_{2,n}\right) d\tau,\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $\alpha_{j,n}$ y $\beta_{j,n}$, $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}$, están dados por

$$\alpha_{j,n} = \langle (\eta_0, 0), \phi_{j,n} \rangle_Q, \quad \beta_{j,n}(t) = \langle Bh, \phi_{j,n} \rangle_Q. \tag{4.9}$$

Dado que

$$\langle Bh, (\eta, \Phi) \rangle_Q = \langle (Lh, 0), (\eta, \Phi) \rangle_Q = \langle Lh, \eta \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle h, L\eta \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

entonces vemos que

$$\alpha_{j,n} = \left\langle \eta_0, \phi_{j,n}^{(1)} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \quad \beta_{j,n}(t) = \left\langle h(\cdot, t), L(\phi_{j,n}^{(1)}) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})},$$

donde $\phi^{(m)}$ denota la $m$ componente de $\phi$.

El problema de control consiste en determinar $h \in L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))$ tal que

$$\eta(x,T) = \eta_T(x), \quad \Phi(x,T) = 0.$$

Entonces, supongamos que $(\eta_0, 0)$ y $(\eta_T, 0)$ tienen las siguientes descomposiciones

$$(\eta_0, 0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha_{1,n}\phi_{1,n} + \alpha_{2,n}\phi_{2,n}) = \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left( \alpha_{1,n}\phi_{1,n}^{(1)} + \alpha_{2,n}\phi_{2,n}^{(1)} \right), 0 \right),$$

$$(\eta_T, 0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\gamma_{1,n}\phi_{1,n} + \gamma_{2,n}\phi_{2,n}) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\gamma_{1,n}\phi_{1,n}^{(1)} + \gamma_{2,n}\phi_{2,n}^{(1)}\right), 0\right),$$

donde $\gamma_{j,n} = \left\langle \eta_T, \phi_{j,n}^{(1)} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}$. Utilizando (4.8) vemos que

$$(\eta(x,T), 0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\lambda_n T} (\alpha_{1,n}\phi_{1,n} + \alpha_{2,n}\phi_{2,n}) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^T e^{\lambda_n(T-\tau)} (\beta_{1,n}(\tau)\phi_{1,n} + \beta_{2,n}(\tau)\phi_{2,n})\, d\tau.$$

En consecuencia, para $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha_{j,n} + \int_0^T e^{-\lambda_n\tau}\beta_{j,n}(\tau)\, d\tau = \gamma_{j,n} e^{-\lambda_n T}. \tag{4.10}$$

Ahora, de [21] tenemos que el conjunto $\mathcal{P} = \{e^{\lambda_k t} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz para $\mathcal{P}_T = \overline{gen}\,\mathcal{P}$ en $L^2(0,T)$, con base de Riesz dual dada por $\mathcal{L} = \{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ que satisface

$$\int_0^T q_l(t)\overline{e^{\lambda_k t}}\, dt = \delta_l^k, \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

Siguiendo el trabajo de D. Russel y B. Zhang [43] sobre la controlabilidad interna de la ecuación KdV, supongamos que $f_1$ es de la forma $f_1 = Lh$ con $h$ dada por la expansión

$$h(x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} q_l(t)\left(c_{1,l}L(\phi_{1,l}^{(1)}) + c_{2,l}L(\phi_{2,l}^{(1)})\right), \tag{4.11}$$

donde los coeficientes $c_{1,l}$ y $c_{2,l}$ deben determinarse de modo que la serie (4.11) sea convergente. Notemos que para $j=1,2$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T e^{-\lambda_n\tau}\beta_{j,n}(\tau)\,d\tau &= \int_0^T e^{-\lambda_n\tau}\left\langle h(\cdot,\tau), L(\phi_{j,n}^{(1)})\right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} d\tau\\
&= \int_0^T e^{-\lambda_n\tau}\Big(\int_{\mathbb{T}} h(y,\tau)\overline{L(\phi_{j,n}^{(1)})}dy\Big)\,d\tau\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^T e^{-\lambda_n\tau}\Big(\int_{\mathbb{T}} h(y,\tau)e^{iky}\,dy\Big)\overline{\Big(L(\phi_{j,n}^{(1)})\Big)_k}\,d\tau\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\Big(L(\phi_{j,n}^{(1)})\Big)_k}\int_{\mathbb{T}}\Big(\int_0^T e^{-\lambda_n\tau}h(y,\tau)\,d\tau\Big)e^{iky}\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\Big(L(\phi_{j,n}^{(1)})\Big)_k}\int_{\mathbb{T}}\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_0^T q_l(\tau)e^{\overline{\lambda_n\tau}}d\tau\,\Big(c_{1,l}L(\phi_{1,l}^{(1)})+c_{2,l}L(\phi_{2,l}^{(1)})\Big)\Big)e^{iky}\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\Big(L(\phi_{j,n}^{(1)})\Big)_k}\int_{\mathbb{T}}\Big(c_{1,n}L(\phi_{1,n}^{(1)})+c_{2,n}L(\phi_{2,n}^{(1)})\Big)e^{iky}\,dy\\
&= c_{1,n}\left\langle L(\phi_{1,n}^{(1)}), L(\phi_{j,n}^{(1)})\right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}+c_{2,n}\left\langle L(\phi_{2,n}^{(1)}), L(\phi_{j,n}^{(1)})\right\rangle_{L^2(\mathbb{T})},
\end{aligned}
$$

donde $\Big(L(\phi_{j,n}^{(1)})\Big)_k=\Big(\widehat{L(\phi_{j,n}^{(1)})}\Big)(k)$. Luego entonces, utilizando (4.10),

$$
c_{1,n}\left\langle L(\phi_{1,n}^{(1)}), L(\phi_{j,n}^{(1)})\right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}+c_{2,n}\left\langle L(\phi_{2,n}^{(1)}), L(\phi_{j,n}^{(1)})\right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}=-\alpha_{j,n}+\gamma_{j,n}e^{-\lambda_nT}.
$$

Por tanto, para $n\in\mathbb{Z}$, tenemos que $c_{1,n}$ y $c_{2,n}$ deben satisfacer el sistema lineal

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,n}\\ c_{2,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha_{1,n}+\gamma_{1,n}e^{-\lambda_nT}\\ -\alpha_{2,n}+\gamma_{2,n}e^{-\lambda_nT}\end{pmatrix},
$$

donde $a_{jl}=\left\langle L(\phi_{j,n}^{(1)}), L(\phi_{l,n}^{(1)})\right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}$. Usando el hecho de que $L(\phi_{1,n}^{(1)})$ y $L(\phi_{2,n}^{(1)})$ son linealmente independientes, obtenemos que

$$
\Delta_n=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=\|L(\phi_{1,n}^{(1)})\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\|L(\phi_{2,n}^{(1)})\|^2_{L^2(\mathbb{T})}-\left|\left\langle L(\phi_{1,n}^{(1)}), L(\phi_{2,n}^{(1)})\right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\right|^2\neq 0.
$$

Además, usando (4.3) tenemos que

$$
\|L(\phi_{j,n}^{(1)})\|^2_{L^2(\mathbb{T})}=\int_{\mathbb{T}}|\rho_1(x)|^2|\phi_{j,n}^{(1)}|^2\,dx\sim\int_{\mathbb{T}}|\phi_{j,n}^{(1)}|^2\,dx=\int_{\mathbb{T}}|b_{j,n}^{(1)}|^2\,dx\geq C>0, \tag{4.12}
$$

donde $A \sim B$ significa que existen constantes positivas $b_1, b_2$ tales que $b_1 B \leq A \leq b_2 B$. También, dado que

$$\begin{aligned}\|\eta_{j,n}\|^2_{H^s \times \mathcal{V}^{s+1}} &= \|e^{inx}\|^2_{H^s} + \left\| \frac{e^{inx}\lambda_{j,n}}{(1+n^2)n^2} \right\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |\widehat{e^{inx}}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 (1+|k|)^{2s} \left| \frac{\lambda_{j,n}}{(1+n^2)n^2} \right|^2 \left|\widehat{e^{inx}}(k)\right|^2 \\ &= C(1+|n|)^{2s},\end{aligned}$$

vemos que

$$|\phi^{(1)}_{j,n}| \leq \frac{C}{(1+|n|)^s} \to 0, \quad n \to \infty, \quad j = 1, 2,$$

y por consiguiente

$$\left| \left\langle L(\phi^{(1)}_{1,n}), L(\phi^{(1)}_{2,n}) \right\rangle \right|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \int_{\mathbb{T}} |\phi^{(1)}_{1,n}||\phi^{(1)}_{2,n}| \, dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.13}$$

En consecuencia, usando (4.12)-(4.13), existe $\epsilon > 0$ tal que $|\Delta_n| > \epsilon$. Concluimos así que $c_{1,n}$ y $c_{2,n}$ están dados por

$$c_{1,n} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{1,n} + \gamma_{1,n} e^{-\lambda_n T} & a_{21} \\ -\alpha_{2,n} + \gamma_{2,n} e^{-\lambda_n T} & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_n}, \quad c_{2,n} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -\alpha_{1,n} + \gamma_{1,n} e^{-\lambda_n T} \\ a_{12} & -\alpha_{2,n} + \gamma_{2,n} e^{-\lambda_n T} \end{vmatrix}}{\Delta_n}. \tag{4.14}$$

Finalmente demostremos que $h$ definido por (4.11) y (4.14) pertenece a $L^2(0, T; H^s(\mathbb{T}))$, siempre que $\eta_0, \eta_T \in H^s(\mathbb{T})$. Para hacer esto, escribamos

$$L(\phi^{(1)}_{j,l}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,lk} e^{ikx}, \quad a_{j,lk} = \left( L(\phi^{(1)}_{j,l}) \right)_k, \quad l, k \in \mathbb{Z}, \; j = 1, 2.$$

Así

$$h(x,t) = h_1(x,t) + h_2(x,t),$$

donde

$$h_j(x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,l} a_{j,lk} q_l(t) e^{ikx}, \quad j = 1, 2.$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\|h_j\|^2_{L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))} &= \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |\left(h_j(\cdot,t)\right)_k|^2 \, dt \\
&= \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} \Big| \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{j,lk} c_{j,l} q_l(t) \Big|^2 dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} \int_0^T \Big| \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{j,lk} c_{j,l} q_l(t) \Big|^2 dt \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{j,l}|^2 |a_{j,lk}|^2 \\
&= C \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{j,l}|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |a_{j,lk}|^2,
\end{aligned}
$$

donde la constante $C > 0$ está determinada por la base de Riesz $\mathcal{L}$. Ahora, usando (4.3), si $\rho_1 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho^1_m e^{imx}$ tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|a_{j,lk}| &= \Big| \left\langle L(\phi^{(1)}_{j,l}),\, e^{ikx} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \Big| = \Big| \left\langle \rho_1 \phi^{(1)}_{j,l},\, e^{ikx} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \Big| \\
&= \Big| \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho^1_m \left\langle \phi^{(1)}_{j,l} e^{imx},\, e^{ikx} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \Big| \\
&= \Big| \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho^1_m \left\langle b^{(1)}_{j,l} e^{ilx} e^{imx},\, e^{ikx} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \Big| \\
&\leq C \Big| \int_{\mathbb{T}} e^{-ix(k-l)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho^1_m e^{imx} \, dx \Big| \\
&= C \Big| \int_{\mathbb{T}} e^{-ix(k-l)} \rho^1(x) \, dx \Big| \leq C \left| \rho^1_{k-l} \right|.
\end{aligned}
$$

De lo anterior se deduce que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |a_{j,lk}|^2 &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |\rho^1_{k-l}|^2 \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k+l|)^{2s} |\rho^1_k|^2 \\
&\leq C (1+|l|)^{2s} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |\rho^1_k|^2 \\
&= (1+|l|)^{2s} \, \|\rho_1\|^2_{H^s(\mathbb{T})}.
\end{aligned}
$$

De otro lado, utilizando (4.12)-(4.14) vemos que

$$\begin{aligned}|c_{1,l}|^2 &\leq C\big(|a_{22}|^2+|a_{21}|^2\big)\big(|\alpha_{1,l}|^2+|\alpha_{2,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2+|\gamma_{2,l}|^2\big)\\ &= C\Big(\|L(\phi_{2,l}^{(1)})\|_{L^2(\mathbb{T})}^4+\Big|\Big\langle L(\phi_{2,l}^{(1)}),L(\phi_{1,l}^{(1)})\Big\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\Big|^2\Big)\big(|\alpha_{1,l}|^2+|\alpha_{2,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2+|\gamma_{2,l}|^2\big)\\ &\leq C\left(|\alpha_{1,l}|^2+|\alpha_{2,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2+|\gamma_{2,l}|^2\right).\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}|c_{2,l}|^2 &\leq C\Big(\|L(\phi_{1,l}^{(1)})\|_{L^2(\mathbb{T})}^4+\Big|\Big\langle L(\phi_{1,l}^{(1)}),L(\phi_{2,l}^{(1)})\Big\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\Big|^2\Big)\big(|\alpha_{1,l}|^2+|\alpha_{2,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2+|\gamma_{2,l}|^2\big)\\ &\leq C\left(|\alpha_{1,l}|^2+|\alpha_{2,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2+|\gamma_{2,l}|^2\right).\end{aligned}$$

Así concluimos que

$$\begin{aligned}\|h\|_{L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))}^2 &\leq C\|\rho_1\|_{H^s(\mathbb{T})}^2\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}(1+|l|)^{2s}\left(|\alpha_{1,l}|^2+|\alpha_{2,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2\right)\right)\\ &\leq C\|\rho_1\|_{H^s(\mathbb{T})}^2\left(\|\eta_0\|_{H^s(\mathbb{T})}^2+\|\eta_T\|_{H^s(\mathbb{T})}^2\right).\end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema demostramos el resultado de control con el control actuando sobre la segunda ecuación.

**Teorema 4.2.2.** *Supongamos que $\rho_2$ es una función suave distinta de cero definida en $\mathbb{T}$. Sean $s\geq 0$ y $T>0$. Entonces para todo $\Phi_0,\Phi_T\in\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ existe una función $h\in L^2\left(0,T;\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})\right)$ tal que si $f_2(x,t)=\rho_2(x)h(x,t)$, el problema (4.4)-(4.5) con $f_1=\eta_0=0$ tiene una solución $(\eta,\Phi)\in C\left([0,T]:H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})\right)$ que satisface*

$$\eta(x,T)=0,\quad \Phi(x,T)=\Phi_T(x).$$

*Además, existe $C=C(T)>0$ tal que*

$$\|h\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))}\leq C\left(\|\Phi_0\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}+\|\Phi_T\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\right).$$

*Demostración.* Dado que la demostración es análoga a la del Teorema 4.2.1, únicamente presentamos algunas ideas. La solución del problema lineal

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \Phi\end{pmatrix}_t=M\begin{pmatrix}\eta\\ \Phi\end{pmatrix}+Bh,\quad \eta(x,0)=0,\quad \Phi(x,0)=\Phi_0(x),$$

con

$$(Bh)(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (Lh)(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_2(x)h(x,t) \end{pmatrix}$$

está dada por

$$(\eta(t), \Phi(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\lambda_n t} \left(\alpha_{1,n}\phi_{1,n} + \alpha_{2,n}\phi_{2,n}\right) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} \left(\beta_{1,n}(\tau)\phi_{1,n} + \beta_{2,n}(\tau)\phi_{2,n}\right) d\tau,$$

donde $\alpha_{j,n}$ y $\beta_{j,n}$, $j = 1,2$, $n \in \mathbb{Z}$, están definidas por

$$\alpha_{j,n} = \langle (0,\Phi_0), \phi_{j,n}\rangle_Q = \left\langle \Phi_0, \phi_{j,n}^{(2)} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \quad \beta_{j,n}(t) = \langle Bh, \phi_{j,n}\rangle_Q = \left\langle h(\cdot,t), L(\phi_{j,n}^{(2)}) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Si suponemos que $(0,\Phi_0)$ y $(0,\Phi_T)$ tienen las siguientes descomposiciones

$$(0,\Phi_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\alpha_{1,n}\phi_{1,n} + \alpha_{2,n}\phi_{2,n}\right) = \left(0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\alpha_{1,n}\phi_{1,n}^{(2)} + \alpha_{2,n}\phi_{2,n}^{(2)}\right)\right),$$

$$(0,\Phi_T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\gamma_{1,n}\phi_{1,n} + \gamma_{2,n}\phi_{2,n}\right) = \left(0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\gamma_{1,n}\phi_{1,n}^{(2)} + \gamma_{2,n}\phi_{2,n}^{(2)}\right)\right),$$

donde $\gamma_{j,n} = \left\langle \Phi_T, \phi_{j,n}^{(2)} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}$, entonces obtenemos que

$$\alpha_{j,n} + \int_0^T e^{-\lambda_n\tau} \beta_{j,n}(\tau)\, d\tau = \gamma_{j,n} e^{-\lambda_n T}.$$

Ahora, consideremos el control $h$ de la forma

$$h(x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} q_l(t) \left(c_{1,l} L(\phi_{1,l}^{(2)}) + c_{2,l} L(\phi_{2,l}^{(2)})\right)$$

con

$$\int_0^T q_l(t)\overline{e^{\lambda_k t}}\, dt = \delta_l^k, \quad l,k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, para $j = 1,2$, $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-\lambda_n\tau} \beta_{j,n}(\tau)\, d\tau &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\left(L\phi_{j,n}^{(2)}\right)_k} \int_0^T e^{-\lambda_n\tau} \left(\int_{\mathbb{T}} h(y,\tau) e^{iky}\, dy\right) d\tau \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\left(L(\phi_{j,n}^{(2)})\right)_k} \int_{\mathbb{T}} \left(c_{1,n} L(\phi_{1,n}^{(2)}) + c_{2,n} L(\phi_{2,n}^{(2)})\right) e^{iky}\, dy \\
&= c_{1,n} \left\langle L(\phi_{1,n}^{(2)}), L(\phi_{j,n}^{(2)}) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + c_{2,n} \left\langle L(\phi_{2,n}^{(2)}), L(\phi_{j,n}^{(2)}) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Así, los coeficientes $c_{1,n}$ y $c_{2,n}$ están dados por

$$c_{1,n} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{1,n} + \gamma_{1,n} e^{-\lambda_n T} & a_{21} \\ -\alpha_{2,n} + \gamma_{2,n} e^{-\lambda_n T} & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_n}, \quad c_{2,n} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -\alpha_{1,n} + \gamma_{1,n} e^{-\lambda_n T} \\ a_{12} & -\alpha_{2,n} + \gamma_{2,n} e^{-\lambda_n T} \end{vmatrix}}{\Delta_n},$$

donde

$$a_{jl} = \left\langle L(\phi_{j,n}^{(2)}), L(\phi_{l,n}^{(2)}) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

y

$$\Delta_n = \|L(\phi_{1,n}^{(2)})\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \|L(\phi_{2,n}^{(2)})\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \left| \left\langle L(\phi_{1,n}^{(2)}), L(\phi_{2,n}^{(2)}) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right|^2.$$

Finalmente, escribamos

$$\rho_2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho_k^2 e^{ikx}, \quad L(\phi_{j,l}^{(2)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,lk} e^{ikx}, \quad a_{j,lk} = \left( L(\phi_{j,l}^{(2)}) \right)_k, \quad l,k\in\mathbb{Z},\ j=1,2.$$

Por consiguiente

$$h(x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{1,l} a_{1,lk} q_l(t) e^{ikx} + \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{2,l} a_{2,lk} q_l(t) e^{ikx}$$

y además

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))}^2 &= \sum_{j=1}^{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 (1+|k|)^{2s} \int_0^T \Big| \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{j,lk} c_{j,l} q_l(t) \Big|^2 dt \\ &\le C \sum_{j=1}^{2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{j,l}|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 (1+|k|)^{2s} |a_{j,lk}|^2. \end{aligned}$$

Ahora, usando el hecho de que $|a_{j,lk}| \le C \left| \rho_{k-l}^2 \right|$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 (1+|k|)^{2s} |a_{j,lk}|^2 \\ &\qquad \le C \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k+l|^2 (1+|k+l|)^{2s} \left|\rho_k^2\right|^2 \le C|l|^2 \left(1+|l|\right)^{2s} \|\rho_2\|_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}^2. \end{aligned}$$

Luego, utilizando que

$$|c_{j,l}|^2 \le C \left( |\alpha_{1,l}|^2 + |\alpha_{2,l}|^2 + |\gamma_{1,l}|^2 + |\gamma_{2,l}|^2 \right),$$

concluimos

$$\begin{aligned}\|h\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))} &\leq C\|\rho_2\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}|l|^2(1+|l|)^{2s}\left(|\alpha_{1,l}|^2+|\alpha_{2,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2+|\gamma_{1,l}|^2\right)\right)\\ &\leq C\|\rho_2\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\left(\|\Phi_0\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}+\|\Phi_T\|^2_{\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\right).\end{aligned}$$

□

De los teoremas anteriores obtenemos el siguiente resultado de controlabilidad lineal.

**Corolario 4.2.3.** *Supongamos que $\rho_1$ y $\rho_2$ son funciones suaves distintas de cero definidas en $\mathbb{T}$. Sean $s \geq 0$ y $T > 0$. Entonces para todo $(\eta_0, \Phi_0)$, $(\eta_T, \Phi_T) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ existe una función $H = (h_1, h_2) \in L^2\left(0, T; H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})\right)$ tal que si*

$$F = (f_1(x,t), f_2(x,t)) = (\rho_1 h_1(x,t), \rho_2(x) h_2(x,t))$$

*entonces el problema (4.4)-(4.5) tiene una solución*

$$(\eta, \Phi) \in C\left([0,T]\,:\, H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})\right),$$

*que satisface*

$$\eta(x,T) = \eta_T(x), \quad \Phi(x,T) = \Phi_T(x).$$

*Además, existe $C = C(T) > 0$ tal que*

$$\|H\|_{L^2(0,T;H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))} \leq C\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\right).$$

*Observación* 4.2.4. Si $T > 0$ y $(\eta_0, \Phi_0), (\eta_T, \Phi_T) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$ con $s \geq 0$, entonces el Corolario 4.2.3 implica que existe $F$ tal que

$$S(T)(\eta_0,\Phi_0) + \int_0^T S(T-\tau)F(\tau)\,d\tau = (\eta_T, \Phi_T).$$

Más aún, existe $C = C(T) > 0$ tal que

$$\|F\|_{L^1(0,T;H^s\times\mathcal{V}^{s+1})} \leq C\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s\times\mathcal{V}^{s+1}} + \|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s\times\mathcal{V}^{s+1}}\right).$$

## 4.3. Controlabilidad no lineal

Finalmente estudiamos la controlabilidad interna del sistema no lineal

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big) &= f_1, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 &= f_2, \end{cases} \tag{4.15}$$

con la condición inicial

$$\eta(x,0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x,0) = \Phi_0(x). \tag{4.16}$$

El siguiente teorema es el resultado principal del capítulo.

**Teorema 4.3.1.** *Sean $s \geq 0$ y $T > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo*

$$(\eta_0, \Phi_0), (\eta_T, \Phi_T) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$$

*que satisfacen*

$$\|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}, \quad \|(\eta_T, \Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} < \delta,$$

*existe una función de control $F = (f_1, f_2) \in L^1(0,T; H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))$ tal que el problema (4.15)-(4.16) tiene una solución $(\eta, \Phi) \in C\left([0,T] : H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})\right) \cap U_T^s \times V_T^{s+1}$ tal que*

$$\eta(x,T) = \eta_T(x), \quad \Phi(x,T) = \Phi_T(x).$$

*Demostración.* La demostración de este teorema es similar a la prueba del Teorema 3.3.1. Primero escribamos el problema (4.15)-(4.16) en la siguiente forma equivalente:

$$\begin{aligned}(\eta(t), \Phi(t)) = S(t)(\eta_0, \Phi_0) &+ \int_0^t S(t-t')F(t')\,dt' \\ &- \int_0^t S(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi), \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Ahora, para cualquier $(\eta, \Phi) = (\eta(x,t), \Phi(x,t))$ definamos

$$w((\eta,\Phi),T) = \int_0^T S(T-t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big), \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')\,dt'.$$

Entonces usando el Corolario 4.2.3 para $(\eta_0, \Phi_0), (\eta_T, \Phi_T) \in H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$, podemos escoger

$$F = F_{(\eta,\Phi)},$$

tal que

$$S(T)(\eta_0,\Phi_0)+\int_0^T S(T-t')F_{(\eta,\Phi)}(t')\,dt' = (\eta_T,\Phi_T)+w((\eta,\Phi),T)$$

en la ecuación (4.17), de modo que

$$\begin{aligned}(\eta(t),\Phi(t)) &= S(t)(\eta_0,\Phi_0)\\ &\quad+\int_0^t S(t-t')F_{(\eta,\Phi)}(t')\,dt' - \int_0^t S(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi),\frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'.\end{aligned}$$

Además note que

$$(\eta(0),\Phi(0)) = (\eta_0,\Phi_0)$$

y

$$\begin{aligned}(\eta(T),\Phi(T)) &= S(T)(\eta_0,\Phi_0)+\int_0^T S(T-t')F_{(\eta,\Phi)}(t')dt'\\ &\quad-\int_0^T S(T-t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big),\frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')dt'\\ &= (\eta_T,\Phi_T)+w((\eta,\Phi),T)-w((\eta,\Phi),T) = (\eta_T,\Phi_T).\end{aligned}$$

Esto sugiere que consideremos la aplicación

$$\Gamma(\eta,\Phi) = S(t)(\eta_0,\Phi_0)+\int_0^t S(t-t')F_{(\eta,\Phi)}(t')dt'-\int_0^t S(t-t')\Big(\partial_x(\eta\partial_x\Phi),\frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2\Big)(t')dt'.$$

Si demostramos que la aplicación $\Gamma$ es una contracción en un espacio apropiado, entonces su punto fijo $(\eta,\Phi)$ es una solución de (4.15)-(4.16) y satisface

$$(\eta(x,T),\Phi(x,T)) = (\eta_T(x),\Phi_T(x)).$$

Probaremos esto en el caso del espacio $U^s\times V^{s+1}$. Como en el caso de la ecuación KdV (ver [43]), modificamos el operador $\Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\eta,\Phi)(t) &= \psi_1(t)S_1(t)(\eta_0,\Phi_0)+\psi_1(t)\int_0^t S_1(t-t')\psi_2(t')F_{(\eta,\Phi)}(t')dt'\\ &\quad-\psi_1(t)\int_0^t S_1(t-t')\psi_2(t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big),\frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')dt',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2(\eta,\Phi)(t) &= \psi_1(t)S_2(t)(\eta_0,\Phi_0)+\psi_1(t)\int_0^t S_2(t-t')\psi_2(t')F_{(\eta,\Phi)}(t')dt'\\ &\quad-\psi_1(t)\int_0^t S_2(t-t')\psi_2(t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big),\frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')dt',\end{aligned}$$

donde $\psi_1$ es una función suave con soporte contenido en el intervalo $(T-1, T+1)$ y $\psi_1(t) = 1$ para $t \in [-T, T]$, y además $\psi_2$ es una función suave no negativa tal que *supp* $\psi_2 \subset (-T-1, T+1)$ que satisface que $\psi_2(t) = 1$ para cualquier $t$ en el soporte de $\psi_1$.

Sea $Z_M$ la bola cerrada de radio $M$ centrada en el origen en $U^s \times V^{s+1}$. Usando la Observación 4.2.4 y ligeras modificaciones de los resultados en los Lemas 3.1.1-3.1.5 tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\|w((\eta,\Phi),T)\|_{H^s\times\mathcal{V}^{s+1}} \\
&\qquad = \left\| \int_0^T S(T-t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big), \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')\,dt' \right\|_{H^s\times\mathcal{V}^{s+1}} \\
&\qquad \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \psi_1(t)\int_0^t S(t-t')\psi_2(t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big), \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')\,dt' \right\|_{H^s\times\mathcal{V}^{s+1}} \\
&\qquad \le C\left\| \psi_1(t)\int_0^t S(t-t')\psi_2(t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big), \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')\,dt' \right\|_{U^s\times V^{s+1}} \\
&\qquad \le C\left(\|\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big)\|_{Z^s} + \|\left(\partial_x\Phi\right)^2\|_{W^{s+1}}\right) \\
&\qquad \le C\left(\|\eta\|_{X^{s,1/2}}\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}} + \|\Phi\|^2_{Y^{s+1,1/2}}\right)
\end{aligned}
$$

y también que

$$
\begin{aligned}
&\|\Gamma_1(\eta,\Phi)\|_{U^s} \\
&\quad \le C(T)\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|F_{(\eta,\Phi)}\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + C_2C_5\Big(\|\eta\|_{X^{s,1/2}}\|\Phi\|_{Y^{s+1,1/2}} + \|\Phi\|^2_{Y^{s+1,1/2}}\Big) \\
&\quad \le C(T)\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta,\Phi)\|^2_{U^s\times V^{s+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
&\|\Gamma_2(\eta,\Phi)\|_{V^{s+1}} \\
&\quad \le C(T)\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta,\Phi)\|^2_{U^s\times V^{s+1}}\right),
\end{aligned}
$$

de lo cual

$$
\begin{aligned}
&\|\Gamma(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}} \\
&\quad \le C(T)\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta,\Phi)\|^2_{U^s\times V^{s+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Escogiendo $\delta > 0$ y $M = 2C(T)\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} + \|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\right)$ tal que

$$
2C^2(T)M < 1, \quad 2C(T)\delta \le M,
$$

entonces para cualquier $(\eta,\Phi)\in Z_M$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma(\eta,\Phi)\|_{U^s\times V^{s+1}}\\
&\qquad \le C(T)\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}+\|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\right)\left(1+4C^2(T)M\right)\\
&\qquad \le 2C(T)\left(\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}+\|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}\right)\\
&\qquad \le 2C(T)\delta\le M,
\end{aligned}$$

siempre que
$$\|(\eta_0,\Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}+\|(\eta_T,\Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})}<\delta,$$
y así que $\Gamma$ envía $Z_M$ en $Z_M$. Ahora, usando el mismo tipo de cálculos, tenemos qe $\Gamma$ es una contracción en $Z_M$, y en consecuencia, el Teorema de punto fijo de Banach garantiza la existencia de un único punto fijo $(\eta,\Phi)$ de $\Gamma$ en $Z_M$. Este punto fijo $(\eta,\Phi)$ es la única solución del problema integral

$$\begin{aligned}
(\eta(t),\Phi(t)) &= \psi_1(t)S(t)(\eta_0,\Phi_0)+\psi_1(t)\int_0^t S(t-t')\psi_2(t')F_{(\eta,\Phi)}(t')dt'\\
&\qquad -\psi_1(t)\int_0^t S(t-t')\psi_2(t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big),\frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')dt'.
\end{aligned}$$

En particular, para $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
(\eta(t),\Phi(t)) &= S(t)(\eta_0,\Phi_0)+\int_0^t S(t-t')(t')F_{(\eta,\Phi)}(t')dt'\\
&\qquad -\int_0^t S(t-t')(t')\Big(\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big),\frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2\Big)(t')dt'.
\end{aligned}$$

Es decir, $(\eta,\Phi)\in C\left([0,T]:H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})\right)$ es solución del sistema

$$\begin{cases}
\eta_t+\partial_x^2\Phi-\partial_x^4\Phi+\partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big) = f_1,\\[2ex]
\Phi_t+\eta-\partial_x^2\eta+\frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 = f_2,
\end{cases}$$

con las condiciones

$$\eta(x,0)=\eta_0(x),\quad \Phi(x,0)=\Phi_0(x),\quad \eta(x,T)=\eta_T(x),\quad \Phi(x,T)=\Phi_T(x)$$

$\square$

Capítulo 5

# Estabilidad orbital

En este capítulo estudiamos la estabilidad de soluciones de onda solitaria del sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\left(\eta\partial_x\Phi\right) & = 0, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Más exactamente, probaremos que un tipo especial de soluciones de onda solitaria denominadas “ground state solitary wave solutions” (que serán definidas más adelante) son orbitalmente estables.

Notemos que, si $(\eta, \Phi)$ es una solución del sistema (5.1) de la forma

$$\eta(x,t) = u(x-ct), \quad \Phi(x,t) = v(x-ct),$$

donde $c$ denota la velocidad de onda, entonces $(u, v)$ debe satisfacer el sistema

$$\begin{cases} cu' + v'''' - v'' - (uv')' & = 0, \\ \\ u - u'' - cv' + \frac{1}{2}(v')^2 & = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Luego, multiplicando el modelo (5.2) por una función de prueba $(w, z) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ e integrando por partes tenemos que $(u, v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ satisface

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \begin{pmatrix} v'z' + v''z'' \\ uw + u'w' \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} uz' \\ wv' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} uv'z' \\ \frac{1}{2}w(v')^2 \end{pmatrix} \right] dx = 0. \tag{5.3}$$

En consecuencia, diremos que $(u,v)$ es una solución del modelo (5.2) si para todo $(w,z) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ el sistema (5.3) se satisface.

Ahora definamos en el espacio de energía $H^1 \times \mathcal{V}^2$, el funcional $J_c$ por

$$J_c(u,v) = I_c(u,v) + G(u,v),$$

donde los funcionales $I_c$ y $G$ están definidos en el espacio $H^1 \times \mathcal{V}^2$ por

$$I_c(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \left[u^2 + (u')^2 + (v')^2 + (v'')^2 - 2cuv'\right] dx, \qquad G(u,v) = \int_{\mathbb{R}} u(v')^2 dx.$$

Usando la definición de $I_c$ y $G$ podemos ver que $I_c, G \in C^1(H^1 \times \mathcal{V}^2 : \mathbb{R})$ y sus derivadas en $(u,v)$ en la dirección de $(w,z)$ están dadas por

$$\begin{aligned}\langle I_c'(u,v),(w,z)\rangle &= 2\int_{\mathbb{R}} \left[uw + u'w' + v'z' + v''z'' - c(uz' + wv')\right] dx,\\ \langle G_c'(u,v),(w,z)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left[2uv'w' + w(v')^2\right] dx. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Como consecuencia de lo anterior, concluimos que $J_c \in C^1(H^1 \times \mathcal{V}^2 : \mathbb{R})$ y también que

$$\begin{aligned}\langle J_c'(u,v),(w,z)\rangle &= \langle I_c'(u,v),(w,z)\rangle + \langle G_c'(u,v),(w,z)\rangle\\ &= 2\int_{\mathbb{R}} \left[uw + u'w' + v'z' + v''z'' - c(uz' + wv')\right] dx + \int_{\mathbb{R}} \left[2uv'w' + w(v')^2\right] dx.\end{aligned}$$

Siguiendo el trabajo [19] de M. Grillakis, J. Shatah y W. Strauss, consideramos el problema de minimización

$$\text{ínf}\left\{J_c(u,v) \,:\, (u,v) \in \mathcal{M}_c\right\},$$

donde $\mathcal{M}_c$ está definido por

$$\mathcal{M}_c = \left\{(u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \,:\, K_c(u,v) = 0, \quad (u,v) \neq 0\right\},$$

y el funcional $K_c$ está dado por

$$K_c(u,v) = \langle J_c'(u,v),(u,v)\rangle.$$

Si existe $(u_0,v_0) \in \mathcal{M}_c$, $(u_0,v_0) \neq 0$ tal que

$$J_c(u_0,v_0) = \text{ínf}\left\{J_c(u,v) \,:\, (u,v) \in \mathcal{M}_c\right\},$$

entonces es posible demostrar que $(u_0,v_0)$ es una solución de onda solitaria del sistema Boussinesq (5.1) (ver Lema 5.3.2); este tipo de soluciones se acostumbran a llamar "ground state solitary wave solutions". Veremos que el análisis de la estabilidad de este tipo de soluciones (ver Teorema 5.4.3 para el concepto de estabilidad) depende de la convexidad de la función $d(c)$ definida por

$$d(c) = \text{ínf}\{J_c(u,v) \,:\, (u,v) \in \mathcal{M}_c\}. \tag{5.5}$$

Aplicando la misma técnica usada para diversos modelos dispersivos (ver [13], [14], [28], [38], [46] por ejemplo) establecemos la existencia de soluciones de onda solitaria como múltiplos escalares de minimizadores del problema

$$\mathcal{I}_c = \text{ínf}\{I_c(u,v) \,:\, (u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \quad \text{con} \quad G(u,v) = 1\}. \tag{5.6}$$

Para tal efecto, usando el Principio de concentración y compacidad y un resultado de inclusión compacta, demostraremos que si $\{(u_m, v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para $\mathcal{I}_c$, entonces existe una subsucesión de $\{(u_m, v_m)\}_m$ que después de una traslación converge fuertemente a un minimizador $(u_0, v_0)$ de $\mathcal{I}_c$.

Luego, notando que si

$$K_c(u,v) = 2I_c(u,v) + 3G(u,v) = 0$$

entonces

$$J_c(u,v) = I_c(u,v) + G(u,v) = \frac{1}{3} I_c(u,v),$$

establecemos una relación entre los problemas de minimización (5.5) y (5.6). Esta relación permitirá probar algunas propiedades variacionales de la función $d(c)$ y por lo tanto la convexidad.

En este capítulo (Sección 5.2) también mostraremos una relación interesante entre las soluciones de onda solitaria del sistema (5.1) y las soluciones de onda solitaria para un modelo tipo KdV. Mostraremos que una familia renormalizada de soluciones de onda solitaria del modelo Boussinesq (5.1) converge a una onda solitaria de un modelo tipo KdV, cuando la velocidad de onda $c$ es cercana a 1. Este resultado además de ser interesante en sí mismo, también lo usaremos en la prueba de estabilidad.

## 5.1. Soluciones de onda solitaria

En esta sección mostramos la existencia de soluciones de onda solitaria para el sistema Boussinesq-Benney-Luke (5.1) con velocidad de onda $c$ $(0 < |c| < 1)$, vía el Teorema de concentración y compacidad, considerando el problema de minimización (5.6). Este procedimiento es relativamente estándar.

Usando la definición del funcional $I_c$ es sencillo demostrar el siguiente resultado.

**Lema 5.1.1.** *El funcional $I_c$ es no negativo y existen $M_1(c)$, $M_2(c) > 0$ tal que*

$$M_1\|(u,v)\|^2_{H^1\times\mathcal{V}^2} \leq I_c(u,v) \leq M_2\|(u,v)\|^2_{H^1\times\mathcal{V}^2}. \tag{5.7}$$

*Además, $\mathcal{I}_c$ es finito y positivo.*

También tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.2.** *Si $(u_0, v_0)$ es un minimizador del problema (5.6), entonces tenemos que $(u,v) = -k(u_0,v_0)$ es una solución no trivial de (5.2) para $k = \frac{2}{3}\mathcal{I}_c$.*

*Demostración.* Usando el Teorema de Lagrange tenemos que existe un multiplicador $k$ tal que para todo $(w,z) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$,

$$\langle I'_c(u_0,v_0),(w,z)\rangle - k\langle G'_c(u_0,v_0),(w,z)\rangle = 0.$$

En particular si $(w,z) = (u_0,v_0)$, entonces utilizando (5.4), vemos que

$$2I_c(u_0,v_0) - 3kG(u_0,v_0) = 0$$

y en consecuencia

$$I_c(u_0,v_0) - \frac{3k}{2}G(u_0,v_0) = 0.$$

Por lo tanto, dado que $(u_0,v_0)$ es un minimizador de (5.6), tenemos que $k = \frac{2}{3}\mathcal{I}_c$. Además podemos ver que $-k(u_0,v_0)$ es una solución no trivial de (5.2), en el sentido de que se satisface (5.3) para todo $(w,z) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$. $\square$

A continuación presentamos el Teorema de concentración y compacidad de P. L. Lions (ver [30], [31]).

**Teorema 5.1.3.** *Supongamos que $\{\nu_m\}_m$ es una sucesión de medidas no negativas en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} d\nu_m = \mathcal{J}.$$

*Entonces existe una subsucesión de $\{\nu_m\}_m$ (denotada de la misma forma) que satisface sólo una de las siguientes propiedades.*

***Anulamiento***. *Para cualquier* $R > 0$,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{B_R(x)} d\nu_m\right) = 0, \tag{5.8}$$

*donde* $B_R(x) = (x - R, x + R)$.

***Dicotomía***. *Existe* $\theta \in (0, \mathcal{J})$ *tal que para cualquier* $\gamma > 0$, *existen* $R > 0$ *y una sucesión* $\{x_m\}_m$ *en* $\mathbb{R}$ *con la siguiente propiedad: dado* $R' > R$ *existen medidas no negativas* $\nu_m^1, \nu_m^2$ *tales que*

1. $0 \le \nu_m^1 + \nu_m^2 \le \nu_m$,
2. $supp\,(\nu_m^1) \subset B_R(x_m)$, $\quad supp\,(\nu_m^2) \subset \mathbb{R} \setminus B_{R'}(x_m)$,
3. $\limsup_{m\to\infty}\left(|\theta - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^1| + |(\mathcal{J} - \theta) - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^2|\right) \le \gamma$.

***Compacidad***. *Existe una sucesión* $\{x_m\}_m$ *en* $\mathbb{R}$ *tal que para cualquier* $\gamma > 0$, *existe* $R > 0$ *con la siguiente propiedad*

$$\int_{B_R(x_m)} d\nu_m \ge \mathcal{J} - \gamma, \quad \textit{para todo } m. \tag{5.9}$$

Para aplicar este resultado a nuestro problema supongamos que $\{(u_m, v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para $\mathcal{I}_c$ en $H^1 \times \mathcal{V}^2$. Entonces definimos las medidas positivas $\{\nu_m\}_m$ por $d\nu_m = \rho_m dx$, donde $\rho_m$ está dado por

$$\rho_m = u_m^2 + (u_m')^2 + (v_m')^2 + (v_m'')^2 - 2cu_m v_m', \tag{5.10}$$

que corresponde al integrando de $I_c(u_m, v_m)$. Usando el Teorema de concentración y compacidad tenemos que existe una subsucesión de $\{\nu_m\}_m$ (denotada de la misma forma) que satisface sólo una de las siguientes propiedades: anulamiento, dicotomía o compacidad. Veremos que las propiedades de anulamiento y dicotomía no pueden ocurrir, y en consecuencia utilizando la compacidad y un resultado de inclusión local compacta, demostraremos que la sucesión minimizante $\{(u_m, v_m)\}_m$ es secuencialmente compacta en $H^1 \times \mathcal{V}^2$ bajo traslación.

Primero probamos algunos resultados técnicos. El primero está relacionado con la caracterización de sucesiones tipo "vanishing" en $H^1 \times \mathcal{V}^2$.

**Lema 5.1.4.** *Sean $R > 0$ y $\{(u_m, v_m)\}_m$ una sucesión acotada en $H^1 \times \mathcal{V}^2$ tal que*

$$\lim_{m\to\infty} \left( \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{B_R(x)} d\nu_m \right) = 0.$$

*Entonces tenemos que*

$$\lim_{m\to\infty} G(u_m, v_m) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_m(v_m')^2 dx = 0.$$

*En particular, si $\{(u_m, v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para $\mathcal{I}_c$, es decir, si*

$$\lim_{m\to\infty} I_c(u_m, v_m) = \mathcal{I}_c \quad y \quad G(u_m, v_m) = 1,$$

*entonces la propiedad de anulamiento no se cumple.*

*Demostración.* Sea $B_R = B_R(x)$. Entonces usando la desigualdad (5.7) vemos que existe $C > 0$ tal que

$$\|u_m\|^2_{H^1(B_R)} + \|v_m'\|^2_{H^1(B_R)} \leq C \int_{B_R} d\nu_m.$$

Luego, dado que la inclusión $H^1(B_R) \hookrightarrow L^3(B_R)$ es continua y utilizando la desigualdad de Young, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} u_m(v_m')^2 dx &\leq C \left( \|u_m\|^3_{H^1(B_R)} + \|v_m'\|^3_{H^1(B_R)} \right) \\ &\leq C \left( \|u_m\|^2_{H^1(B_R)} + \|v_m'\|^2_{H^1(B_R)} \right) \left( \int_{B_R} d\nu_m \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ahora bien, $\mathbb{R}$ se puede cubrir con bolas de radio $R$ de tal forma que cada punto de $\mathbb{R}$ pertenece al menos a dos bolas. Luego entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_m(v_m')^2 dx &\leq 2C \left( \|u_m\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_m'\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \right) \left( \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{B_R} d\nu_m \right)^{1/2} \\ &\leq 2C I_c(u_m, v_m) \left( \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{B_R} d\nu_m \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

En consecuencia, usando la hipótesis vemos que

$$\lim_{m\to\infty} G(u_m, v_m) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_m(v_m')^2 dx = 0.$$

Ahora, supongamos que $\{(u_m, v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para $\mathcal{I}_c$. Entonces tenemos que $G(u_m, v_m) = 1$, pero del hecho anterior obtenemos una contradicción y por lo tanto la propiedad de anulamiento no se cumple.

$\square$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que la propiedad de dicotomía no se cumple. Para esto, sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} : \mathbb{R}^+)$ con soporte en $(-2, 2)$ tal que $\phi \equiv 1$ en $(-1, 1)$. Si $R > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces para $(u, v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ definamos

$$u = u_R^1 + u_R^2 \quad \text{y} \quad v = v_R^1 + v_R^2,$$

donde

$$u_R^1 = u\phi_R, \quad u_R^2 = u(1 - \phi_R), \quad v_R^1 = (v - a_R)\phi_R, \quad v_R^2 = (v - a_R)(1 - \phi_R) + a_R,$$

con

$$\phi_R(x) = \phi\left(\frac{x - x_0}{R}\right),$$

y

$$a_R = \frac{1}{2R}\int_{A_R(x_0)} v(x)dx, \quad A_R(x_0) = B_{2R}(x_0) \setminus B_R(x_0).$$

Notemos que la descomposición de la función $v$ no es estándar, lo que refleja la naturaleza del espacio $\mathcal{V}^2$.

En el próximo resultado usaremos la siguiente desigualdad tipo Poincaré:

$$\left(\int_{A_R(x_0)} |v - a_R|^q dx\right)^{1/q} \leq CR^{2/q}\left(\int_{A_R(x_0)} |v'|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{5.11}$$

donde $2 \leq q < \infty$ y $C$ no depende de $R$ (ver [12], [42]).

**Lema 5.1.5.** *Sean $\{R_m\}_m$ con $R_m > 0$ y $\{x_m\}_m$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Definamos*

$$A(m) = A_{R_m}(x_m) \quad y \quad \phi_m(x) = \phi\left(\frac{x - x_m}{R_m}\right).$$

*Si*

$$\limsup_{m\to\infty}\left(\int_{A(m)} d\nu_m\right) = 0, \tag{5.12}$$

*entonces cuando $m \to \infty$ tenemos que* *(i)* $I_c(u_m, v_m) = I_c(u_m^1, v_m^1) + I_c(u_m^2, v_m^2) + o(1)$,

*(ii)* $G(u_m, v_m) = G(u_m^1, v_m^1) + G(u_m^2, v_m^2) + o(1)$.

*Demostración.* Primero notemos que el funcional $I_c$ se puede escribir como

$$I_c(u, v) = I_1(u) + I_2(v) + I_3(u, v),$$

donde

$$I_1(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[u^2 + (u')^2\right] dx, \quad I_2(v) = \int_{\mathbb{R}} \left[(v')^2 + (v'')^2\right] dx, \quad I_3(u, v) = -2c \int_{\mathbb{R}} uv' dx.$$

Demostremos que

$$I_j(z_m) = I_j(z_m^1) + I_j(z_m^2) + o(1), \quad \text{cuando} \quad m \to \infty, \tag{5.13}$$

donde $z_m = u_m$ para $j = 1$, $z_m = v_m$ para $j = 2$ y $z_m = (u_m, v_m)$ para $j = 3$. En efecto, primero observemos que

$$\delta^{(0)} u_m := \int_{\mathbb{R}} \left[(u_m)^2 - (u_m^1)^2 - (u_m^2)^2\right] dx = 2 \int_{A(m)} \phi_m (1 - \phi_m)(u_m)^2 dx.$$

Entonces, utilizando la hipótesis,

$$|\delta^{(0)} u_m| \leq C \int_{A(m)} |\phi_m (1 - \phi_m)| (u_m)^2 dx \leq C \int_{A(m)} d\nu_m \to 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \delta' u_m &:= \int_{\mathbb{R}} \left[(u_m')^2 - ((u_m^1)')^2 - ((u_m^2)')^2\right] dx \\ &= 2 \int_{A(m)} \left[\phi_m (1 - \phi_m)(u_m')^2 + (1 - 2\phi_m) u_m u_m' \phi_m' - u_m^2 (\phi_m')^2\right] dx. \end{aligned}$$

Luego entonces, usando la desigualdad de Young,

$$|\delta' u_m| \leq C \int_{A(m)} \left[(u_m)^2 + (u_m')^2\right] dx \leq C \int_{A(m)} d\nu_m \to 0.$$

Por tanto

$$\lim_{m \to \infty} [I_1(u_m) - I_1(u_m^1) - I_1(u_m^2)] = 0.$$

A continuación,

$$\begin{aligned}\delta' v_m &:= \int_{\mathbb{R}} \left[(v_m')^2 - ((v_m^1)')^2 - ((v_m^2)')^2\right] dx \\ &= 2\int_{A(m)} \left[\phi_m(1-\phi_m)(v_m')^2 - (v_m - a_m)^2(\phi_m')^2 + (1-2\phi_m)v_m'(v_m - a_m)\phi_m'\right] dx.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad tipo Poincaré (5.11) tenemos que

$$\int_{A(m)} |v_m - a_m|^2 dx \leq C R_m^2 \int_{A(m)} |v_m'|^2 dx.$$

En consecuencia, utilizando que $|\phi_m'| \leq C/R_m$, obtenemos

$$|\delta' v_m| \leq C\int_{A(m)} \left[(v_m')^2 + \frac{(v_m - a_m)^2}{R_m^2}\right] dx \leq C\int_{A(m)} |v_m'|^2 dx \leq C\int_{A(m)} d\nu_m \to 0.$$

Ahora, si $w_m = (v_m - a_m)\phi_m'' + 2v_m'\phi_m'$ entonces vemos que

$$(v_m^1)'' = v_m''\phi_m + w_m, \quad (v_m^2)'' = v_m''(1-\phi_m) - w_m.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}\delta'' v_m &:= \int_{\mathbb{R}} \left[(v_m'')^2 - ((v_m^1)'')^2 - ((v_m^2)'')^2\right] dx \\ &= 2\int_{A(m)} \left[\phi_m(1-\phi_m)(v_m'')^2 - w_m^2 + (1-2\phi_m)v_m'' w_m\right] dx.\end{aligned}$$

Dado que $|\phi_m''| \leq C/R_m^2$ y usando la desigualdad tipo Poincaré (5.11) obtenemos que

$$|\delta'' v_m| \leq C\int_{A(m)} \left[(v_m'')^2 + \frac{(v_m - a_m)^2}{R_m^4} + \frac{(v_m')^2}{R_m^2}\right] dx \leq C\int_{A(m)} d\nu_m.$$

Luego entonces

$$\lim_{m\to\infty} [I_2(v_m) - I_2(v_m^1) - I_2(v_m^2)] = 0.$$

Ahora demostremos el resultado para $I_3$. Primero notemos que

$$\begin{aligned}\delta_1^{(0)} &:= \int_{\mathbb{R}} \left[u_m v_m' - u_m^1 (v_m^1)' - u_m^2 (v_m^2)'\right] dx \\ &= \int_{A(m)} \left[2\phi_m(1-\phi_m)u_m v_m' + (1-2\phi_m)u_m(v_m - a_m)\phi_m'\right] dx,\end{aligned}$$

por tanto, usando de nuevo que $|\phi'_m| \leq C/R_m$, la desigualdad de Young y la desigualdad (5.11) obtenemos que

$$|\delta_1^{(0)}| \leq C \int_{A(m)} d\nu_m \to 0,$$

lo cual implica (5.13) y por consiguiente la igualdad en (i). Ahora probemos la afirmación (ii). Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \Big| u_m(v'_m)^2 - u_m^1((v_m^1)')^2 - u_m^2((v_m^2)')^2 \Big| dx \\
&= \int_{A(m)} \Big| 2(1-2\phi_m)u_m v'_m(v_m - a_m)\phi'_m + 3\phi_m(1-\phi_m)u_m(v'_m)^2 - u_m(v_m-a_m)^2(\phi'_m)^2 \Big| dx \\
&\leq C \int_{A(m)} \left[ (u_m)^2 + (v'_m)^2 + |u_m|^3 + |v'_m|^3 + \frac{(v_m-a_m)^2}{R_m^2} + \frac{|v_m-a_m|^3}{R_m^3} \right] dx \\
&\leq C \left[ \int_{A(m)} d\nu_m + \left( \int_{A(m)} d\nu_m \right)^{3/2} \right] \to 0.
\end{aligned}$$

Entonces, cuando $m \to \infty$ concluimos que

$$G(u_m, v_m) = G(u_m^1, v_m^1) + G(u_m^2, v_m^2) + o(1).$$

□

Usando el resultado anterior tenemos el siguiente lema.

**Lema 5.1.6.** *Sea $\{(u_m, v_m)\}_m$ una sucesión minimizante para $\mathcal{I}_c$, entonces la propiedad de dicotomía no se cumple.*

*Demostración.* Supongamos que se cumple la propiedad de dicotomía, entonces podemos escoger sucesiones $\gamma_m \to 0$ y $R_m \to \infty$ tales que

$$supp\,(\nu_m^1) \subset B_{R_m}(x_m), \quad supp\,(\nu_m^2) \subset \mathbb{R} \setminus B_{2R_m}(x_m) \tag{5.14}$$

y también que

$$\limsup_{m\to\infty} \left( \left| \theta - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^1 \right| + \left| (\mathcal{I}_c - \theta) - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^2 \right| \right) = 0. \tag{5.15}$$

De estos hechos tenemos que

$$\limsup_{m\to\infty} \left( \int_{A(m)} d\nu_m \right) = 0. \tag{5.16}$$

En efecto, usando (5.14) y el hecho de que $0 \leq \nu_m^1 + \nu_m^2 \leq \nu_m$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{A(m)} d\nu_m &= \left( \int_{\mathbb{R}} - \int_{B_{R_m}(x_m)} - \int_{\mathbb{R}\setminus B_{2R_m}(x_m)} \right) d\nu_m \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} d\nu_m - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^1 - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^2 \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}} d\nu_m - \mathcal{I}_c \right) + \left| \theta - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^1 \right| + \left| (\mathcal{I}_c - \theta) - \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^2 \right|.
\end{aligned}$$

Utilizando (5.15) y el Lema 5.1.5 concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} [I_c(u_m, v_m) - I_c(u_m^1, v_m^1) - I_c(u_m^2, v_m^2)] = 0, \\
\lim_{m\to\infty} [G(u_m, v_m) - G(u_m^1, v_m^1) - G(u_m^2, v_m^2)] = 0.
\end{aligned}$$

Ahora, sea $\lambda_{m,i} = G(u_m^i, v_m^i)$, para $i = 1, 2$. Pasando a una subsucesión si es necesario obtenemos que $\lambda_i := \lim_{m\to\infty} \lambda_{m,i}$ existe. A continuación, demostremos que $\lambda_i \neq 0$. Supongamos que $\lim_{m\to\infty} \lambda_{m,1} = 0$; dado que $\{(u_m, v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para $\mathcal{I}_c$, entonces $G(u_m, v_m) = 1$ y en consecuencia tenemos $\lim_{m\to\infty} \lambda_{m,2} = 1$ (procedemos de forma similar en el otro caso). Por tanto $\lambda_{m,2} > 0$, para $m$ suficientemente grande. Luego consideremos

$$(w_m, z_m) = \lambda_{m,2}^{-\frac{1}{3}} (u_m^2, v_m^2).$$

Así que

$$(w_m, z_m) \in H^1 \times \mathcal{V}^2, \quad G(w_m, z_m) = 1.$$

Usando (5.15) y el hecho de que $\phi_{R_m} \equiv 1$ en $B_{R_m}(x_m)$ obtenemos una contradicción ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_c = \lim_{m\to\infty} I_c(u_m, v_m) &= \lim_{m\to\infty} \left( I_c(u_m^1, v_m^1) + I_c(u_m^2, v_m^2) \right) \\
&\geq \lim_{m\to\infty} \left( \int_{B_{R_m}(x_m)} d\nu_m + \lambda_{m,2}^{\frac{2}{3}} I_c(w_m, z_m) \right) \\
&\geq \lim_{m\to\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} d\nu_m^1 + \lambda_{m,2}^{\frac{2}{3}} \mathcal{I}_c \right) = \theta + \mathcal{I}_c.
\end{aligned}$$

En otras palabras, $|\lambda_{m,i}| > 0$ para $m$ suficientemente grande. Entonces podemos definir

$$(w_{m,i}, z_{m,i}) = \lambda_{m,i}^{-\frac{1}{3}} (u_m^i, v_m^i), \quad i = 1, 2.$$

Notemos que $(w_{m,i}, z_{m,i}) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ y $G(w_{m,i}, z_{m,i}) = 1$. De donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_c &= \lim_{m\to\infty} \left[ I_c(u_m^1, v_m^1) + I_c(u_m^2, v_m^2) \right] \\
&= \lim_{m\to\infty} \left( |\lambda_{m,1}|^{\frac{2}{3}} I_c(w_{m,1}, z_{m,1}) + |\lambda_{m,2}|^{\frac{2}{3}} I_c(w_{m,2}, z_{m,2}) \right) \\
&\geq \left( |\lambda_1|^{\frac{2}{3}} + |\lambda_2|^{\frac{2}{3}} \right) \mathcal{I}_c.
\end{aligned}$$

Luego

$$1 \geq |\lambda_1|^{\frac{2}{3}} + |\lambda_2|^{\frac{2}{3}} \geq (|\lambda_1| + |\lambda_2|)^{\frac{2}{3}} \geq |\lambda_1 + \lambda_2|^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Por lo tanto, $|\lambda_1| + |\lambda_2| = 1$. Usando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_i \neq 0$, tenemos que $\lambda_i > 0$ y

$$\lambda_1^{\frac{2}{3}} + \lambda_2^{\frac{2}{3}} = (\lambda_1 + \lambda_2)^{\frac{2}{3}}. \tag{5.17}$$

Pero de (5.17) obtenemos una contradicción dado que para $t \in \mathbb{R}^+$ la función $f(t) = t^{\frac{2}{3}}$ es estrictamente cóncava, es decir

$$f(t_1 + t_2) < f(t_1) + f(t_2), \quad \text{para} \quad t_1, t_2 > 0.$$

En consecuencia hemos probado que la propiedad de dicotomía no se cumple.

□

Ahora establecemos el resultado principal de esta sección: la existencia de un minimizador para $\mathcal{I}_c$. Usando los lemas anteriores y el Teorema de concentración y compacidad, tenemos que existe una subsucesión de $\{\nu_m\}_m$ (denotada de la misma forma) que satisface la propiedad de *compacidad*.

**Teorema 5.1.7.** *Si $\{(u_m, v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para (5.6), entonces existen una subsucesión de $\{(u_m, v_m)\}_m$ (denotada de la misma forma), una sucesión $\{x_m\}_m$ en $\mathbb{R}$ y un minimizador $(u_0, v_0) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ de (5.6), tal que las funciones trasladadas*

$$(\tilde{u}_m, \tilde{v}_m) = (u_m(\cdot + x_m), v_m(\cdot + x_m))$$

*convergen fuertemente a $(u_0, v_0)$ en $H^1 \times \mathcal{V}^2$.*

*Demostración.* Sea $\{(u_m, v_m)\}_m$ una sucesión minimizante para (5.6), es decir,

$$\lim_{m\to\infty} I_c(u_m, v_m) = \mathcal{I}_c \quad \text{y} \quad G(u_m, v_m) = 1.$$

Por *compacidad*, existe una sucesión $\{x_m\}_m$ en $\mathbb{R}$ tal que para $\gamma > 0$ dado, existe $R > 0$ con la siguiente propiedad,

$$\int_{B_R(x_m)} d\nu_m \geq \mathcal{I}_c - \gamma, \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.18}$$

Usando lo anterior, podemos localizar la sucesión minimizante $\{(u_m, v_m)\}_m$ alrededor del origen, definiendo

$$\widetilde{\rho}_m(x) = \rho_m(x + x_m), \quad (\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m)(x) = (u_m, v_m)(x + x_m).$$

En consecuencia tenemos la siguiente desigualdad

$$\int_{B_R(0)} \widetilde{\rho}_m dx = \int_{B_R(x_m)} d\nu_m \geq \mathcal{I}_c - \gamma, \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.19}$$

y también que

$$G(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m) = G(u_m, v_m) = 1, \quad \lim_{m\to\infty} I_c(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m) = \lim_{m\to\infty} I_c(u_m, v_m) = \mathcal{I}_c. \tag{5.20}$$

Entonces, utilizando la desigualdad (5.7) vemos que $\{(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m)\}_m$ es una sucesión acotada en $H^1 \times \mathcal{V}^2$. De otro lado, dado que $\widetilde{u}_m, \widetilde{v}'_m \in H^1(U)$ para cualquier conjunto abierto acotado $U$ y la inclusión $H^1(U) \hookrightarrow L^q(U)$ es compacta para $q \geq 2$, entonces existe una subsucesión de $\{(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m)\}_m$ (la cual denotamos de la misma forma) y $(u_0, v_0) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ tal que

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}_m \rightharpoonup u_0 \quad \text{en} \quad H^1(\mathbb{R}), \quad \widetilde{u}_m \rightharpoonup u_0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}), \\ &\widetilde{v}_m \rightharpoonup v_0 \quad \text{en} \quad \mathcal{V}^2(\mathbb{R}), \quad \widetilde{v}'_m \rightharpoonup v'_0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

y también tenemos que

$$\widetilde{u}_m \to u_0, \quad \widetilde{v}'_m \to v'_0 \quad \text{en} \quad L^2_{loc}(\mathbb{R}).$$

Además,

$$\widetilde{u}_m \to u_0, \quad \widetilde{v}'_m \to v'_0 \quad \text{en casi toda parte.}$$

Usando estos hechos demostraremos que existe una subsucesión de $\{(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m)\}_m$ (la cual denotamos de la misma forma) que converge fuertemente en $H^1 \times \mathcal{V}^2$ a un minimizador no trivial $(u_0, v_0)$ de (5.6). Primero veamos que

$$\widetilde{u}_m \to u_0, \quad \widetilde{v}'_m \to v'_0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}). \tag{5.21}$$

En efecto, usando (5.19)-(5.20) y la definición de $I_c$, tenemos que para $\gamma > 0$ existe $R > 0$ tal que para $m$ suficientemente grande,

$$\int_{B_R(0)} |\widetilde{u}_m|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}_m|^2 dx - 2\gamma.$$

Entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx &\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}_m|^2 dx \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(0)} |\widetilde{u}_m|^2 dx + 2\gamma \\ &= \int_{B_R(0)} |u_0|^2 dx + 2\gamma \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx + 2\gamma.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}_m|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx.$$

Luego entonces, existe una subsucesión de $\{\widetilde{u}_m\}_m$ tal que $\widetilde{u}_m \to u_0$ en $L^2(\mathbb{R})$. Usando un argumento similar probamos la otra afirmación en (5.21). Además, también podemos ver que

$$\widetilde{u}_m' \to u_0', \quad \widetilde{v}_m'' \to v_0'' \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}). \tag{5.22}$$

Ahora, utilizando (5.21)-(5.22) y el hecho de que la inclusión $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R})$ es continua tenemos que

$$G(u_0, v_0) = \lim_{m\to\infty} G(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m) = 1. \tag{5.23}$$

En efecto, usando la definición del funcional $G$ vemos que

$$\begin{aligned}G(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m) - G(u_0, v_0) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\widetilde{u}_m (\widetilde{v}_m')^2 - u_0 (v_0')^2\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[(\widetilde{u}_m - u_0)(\widetilde{v}_m')^2 + u_0((\widetilde{v}_m')^2 - (v_0')^2)\right] dx.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\widetilde{u}_m - u_0)(\widetilde{v}_m')^2 dx &\leq \|\widetilde{u}_m - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\widetilde{v}_m'\|_{L^4(\mathbb{R})}^2 \leq C\|\widetilde{u}_m - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\widetilde{v}_m'\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C I_c(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m) \|\widetilde{u}_m - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|\widetilde{u}_m - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0,\end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_0 \left((\widetilde{v}_m')^2 - (v_0')^2\right) dx &\leq \|(\widetilde{v}_m - v_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})} \|(\widetilde{v}_m + v_0)'\|_{L^4(\mathbb{R})} \|u_0\|_{L^4(\mathbb{R})} \\ &\leq C\|(\widetilde{v}_m - v_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})} \|(\widetilde{v}_m + v_0)'\|_{H^1(\mathbb{R})} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \\ &\leq C\|(\widetilde{v}_m - v_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \|(\widetilde{v}_m + v_0)'\|_{H^1(\mathbb{R})}^2\right) \\ &\leq C\|(\widetilde{v}_m - v_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(I_c(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m) + I_c(u_0, v_0)\right) \to 0.\end{aligned}$$

Entonces obtenemos (5.23) y en consecuencia

$$(u_0, v_0) \neq (0, 0).$$

De otro lado, usando ( 5.21)-(5.22) podemos ver que

$$\lim_{m\to\infty} I_c(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m) = I_c(u_0, v_0) = \mathcal{I}_c, \quad \lim_{m\to\infty} I_c(\widetilde{u}_m - u_0, \widetilde{v}_m - v_0) = 0.$$

Además, la sucesión $\{(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m)\}_m$ converge a $(u_0, v_0)$ en $H^1 \times \mathcal{V}^2$ dado que

$$\|(\widetilde{u}_m - u_0, \widetilde{v}_m - v_0)\|^2_{H^1\times\mathcal{V}^2} \leq C I_c(\widetilde{u}_m - u_0, \widetilde{v}_m - v_0).$$

Por lo tanto $\{(\widetilde{u}_m, \widetilde{v}_m)\}_m$ converge a $(u_0, v_0)$ en $H^1 \times \mathcal{V}^2$ y $(u_0, v_0)$ es un minimizador de $\mathcal{I}_c$.

□

## 5.2. Relación entre ondas solitarias del sistema Boussinesq y un modelo KdV

En esta sección probaremos que una familia de ondas solitarias del modelo (5.1) converge a una onda solitaria de un modelo tipo KdV, bajo la suposición de que la velocidad de onda $c$ es cercana a 1.

Es conocida la siguiente caracterización de ondas solitarias para el modelo KdV. La prueba es similar a la demostración del Teorema 5.1.7. Primero definamos el espacio de Banach $\mathcal{Z}$ como la completación de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con respecto a la norma dada por

$$||w||^2_{\mathcal{Z}} = \int_{\mathbb{R}} \left[(\partial_x w)^2 + (\partial_x^2 w)^2\right] dx.$$

También definamos los funcionales $J^0$, $G^0$ en el espacio $\mathcal{Z}$ por

$$J^0(w) = \int_{\mathbb{R}} \left[(\partial_x w)^2 + 2(\partial_x^2 w)^2\right] dx, \quad G^0(w) = \int_{\mathbb{R}} (\partial_x w)^3 dx,$$

y consideremos el siguiente problema de minimización

$$\mathcal{J}^0 = \inf\{J^0(w) : w \in \mathcal{Z},\ G^0(w) = 1\}.$$

Entonces tenemos el siguiente teorema (ver [11], [12]).

**Teorema 5.2.1.** *Sea $\{w_m\}_m$ una sucesión minimizante para $\mathcal{J}^0$. Entonces existe una subsucesión de $\{w_m\}_m$ (denotada de la misma forma) y una función no nula $w_0 \in \mathcal{Z}$ tal que*

$$J^0(w_0) = \mathcal{J}^0,$$

*y existe una sucesión de puntos $\{x_m\}_m$ en $\mathbb{R}$ tal que $w_m(\,\cdot + x_m) \to w_0$ en $\mathcal{Z}$. Además, $w_0$ es una solución de la ecuación*

$$-\partial_x^2 w + 2\partial_x^4 w + 2\mathcal{J}^0 \partial_x w \partial_x^2 w = 0, \tag{5.24}$$

*y entonces $w = -\left(\frac{2}{3}\mathcal{J}^0\right)\partial_x w_0$ es una solución de onda solitaria no trivial de la ecuación*

$$\partial_x w - 2\partial_x^3 w + 3w\partial_x w = 0. \tag{5.25}$$

Ahora, sean $\epsilon > 0$ y $c^2 = 1 - \epsilon$. Entonces para $(u, v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ definamos las funciones $w$ y $z$ por

$$u(x) = \epsilon^{\frac{1}{6}} z(y), \quad v(x) = \epsilon^{-\frac{1}{3}} w(y), \quad y = \epsilon^{\frac{1}{2}} x. \tag{5.26}$$

En consecuencia tenemos que

$$I_1(u) + I_2(v) = \epsilon^{\frac{5}{6}} I^{1,\epsilon}(z) + \epsilon^{\frac{5}{6}} I^{2,\epsilon}(w), \quad I_3(u,v) = I_{3,c}(u,v) = \epsilon^{\frac{5}{6}} I^{3,\epsilon}(z,w),$$

y también que

$$I_{c(\epsilon)}(u,v) = \epsilon^{\frac{5}{6}} I^{\epsilon}(z,w), \quad G(u,v) = G^{\epsilon}(z,w),$$

donde $I^{1,\epsilon}$, $I^{2,\epsilon}$, $I^{3,\epsilon}$, $I^{\epsilon}$ y $G^{\epsilon}$ están definidos por

$$\begin{aligned}
I^{\epsilon}(z,w) &= I^{1,\epsilon}(z) + I^{2,\epsilon}(w) + I^{3,\epsilon}(z,w),\\
I^{1,\epsilon}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\epsilon^{-1} z^2 + (z')^2\right) dy, \quad I^{2,\epsilon}(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(\epsilon^{-1}(w')^2 + (w'')^2\right) dy,\\
I^{3,\epsilon}(z,w) &= -2c \int_{\mathbb{R}} \epsilon^{-1} z w' \, dy, \quad G^{\epsilon}(z,w) = \int_{\mathbb{R}} z(w')^2 \, dy.
\end{aligned}$$

Notemos que si $0 < |c| < 1$, entonces $I^{\epsilon}(z,w) > 0$ y existe una familia $\{(u_c, v_c)\}_c$ tal que

$$I_c(u_c, v_c) = \mathcal{I}_c, \quad G(u_c, v_c) = 1.$$

Por consiguiente, si denotamos

$$\mathcal{I}^{\epsilon} := \text{ínf}\left\{ I^{\epsilon}(z,w) \ : \ (z,w) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \ \text{ con } \ G^{\epsilon}(z,w) = 1 \right\},$$

entonces existe una familia $\{(z^{\epsilon}, w^{\epsilon})\}_{\epsilon}$ tal que

$$\mathcal{I}^{\epsilon} = I^{\epsilon}(z^{\epsilon}, w^{\epsilon}), \quad G^{\epsilon}(z^{\epsilon}, w^{\epsilon}) = 1, \quad \mathcal{I}_c = \epsilon^{\frac{5}{6}} \mathcal{I}^{\epsilon}.$$

Además, $(z^\epsilon, w^\epsilon)$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \epsilon w'''' - w'' + cz' + \frac{2}{3}\epsilon^{\frac{1}{6}}\mathcal{I}_c\,(zw')' &= 0, \\ \\ z - \epsilon z'' - cw' - \frac{1}{3}\epsilon^{\frac{1}{6}}\mathcal{I}_c\,(w')^2 &= 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

Estamos interesados en relacionar la familia $\{(z^\epsilon, w^\epsilon)\}_\epsilon$ cuando $\epsilon$ tiende a cero con las soluciones de onda solitaria de un modelo tipo KdV. Para esto, definamos en el espacio $\mathcal{V}^2$ los funcionales

$$J^\epsilon(w) = I^\epsilon(c\partial_x w, w) = \int_{\mathbb{R}} \Big[(w')^2 + (2-\epsilon)(w'')^2\Big] dx,$$

$$K^\epsilon(w) = G(c\partial_x w, w) = c\int_{\mathbb{R}} (w')^3 dx.$$

Observemos que si $\epsilon$ es suficientemente pequeño, entonces el funcional $J^\epsilon$ es no negativo. Así, definimos el número $\mathcal{J}^\epsilon$ por

$$\mathcal{J}^\epsilon = \text{ínf}\{J^\epsilon(w) : w \in \mathcal{V}^2 \quad \text{con} \quad K^\epsilon(w) = 1\}$$

y establecemos el siguiente resultado.

**Lema 5.2.2.** *Sea $0 < |c| < 1$. Entonces tenemos que*

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{I}^\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0^+} I^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon) = \mathcal{J}^0 > 0, \\ &\lim_{\epsilon\to 0^+} G^0(w^\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} K^\epsilon(w^\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} G(z^\epsilon, w^\epsilon) = 1. \end{aligned} \tag{5.28}$$

*Además, para cualquier sucesión $\epsilon_j \to 0$, la sucesión $\left\{(G^0(w^{\epsilon_j}))^{-\frac{1}{3}} w^{\epsilon_j}\right\}_j$ es una sucesión minimizante para $\mathcal{J}^0$.*

*Demostración.* Sea $w \in \mathcal{V}^2$ tal que $\int_{\mathbb{R}}(w')^3 dx = 1$, entonces tenemos que

$$K^\epsilon(w) = c\int_{\mathbb{R}} (w')^3 dx \neq 0.$$

Luego, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño vemos que

$$\mathcal{I}^\epsilon \le I^\epsilon\left(\frac{1}{G^\epsilon(cw', w)^{1/3}}(cw', w)\right) = \frac{I^\epsilon(cw', w)}{G^\epsilon(cw', w)^{\frac{2}{3}}} = \frac{J^\epsilon(w)}{K^\epsilon(w)^{\frac{2}{3}}} \tag{5.29}$$

y

$$\mathcal{J}^\epsilon \le J^\epsilon\left(\frac{1}{K^\epsilon(w)^{1/3}} w\right) = \frac{J^\epsilon(w)}{K^\epsilon(w)^{\frac{2}{3}}}. \tag{5.30}$$

De otro lado, usando que $c^2 = 1 - \epsilon$,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+} J^\epsilon(w) = \lim_{\epsilon\to 0^+} I^\epsilon(cw', w) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \Big[(w')^2 + (2-\epsilon)(w'')^2\Big] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big[(w')^2 + 2(w'')^2\Big] dx = J^0(w),\end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} K^\epsilon(w) = \lim_{\epsilon\to 0^+} G^\epsilon(cw', w) = \lim_{\epsilon\to 0^+} c\int_{\mathbb{R}} (w')^3 dx = \int_{\mathbb{R}} (w')^3 dx = 1.$$

En consecuencia, si $w \in \mathcal{V}^2$ y $\int_{\mathbb{R}} (w')^3 dx = 1$ entonces, utilizando (5.29)-(5.30) y los hechos anteriores, concluimos que

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{I}^\epsilon \leq \mathcal{J}^0, \quad \limsup_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{J}^\epsilon \leq \mathcal{J}^0. \tag{5.31}$$

Además, para $\epsilon$ suficientemente pequeño tenemos que

$$\epsilon^{-\frac{5}{6}} I_c(u_c, v_c) = \mathcal{I}^\epsilon \leq 2\mathcal{J}^0.$$

Ahora, notemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} G^0(w^\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} c\int_{\mathbb{R}} ((w^\epsilon)')^3\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} G^\epsilon(c(w^\epsilon)', w^\epsilon).$$

Queremos demostrar que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} G^0(w^\epsilon) = 1.$$

Dado que $\lim_{\epsilon\to 0^+} G^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon) = 1$, entonces probaremos que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} G^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} G^\epsilon(c(w^\epsilon)', w^\epsilon). \tag{5.32}$$

Para esto, es suficiente establecer el siguiente límite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} (z^\epsilon - c(w^\epsilon)')((w^\epsilon)')^2 dx = 0. \tag{5.33}$$

En efecto, de la segunda ecuación de (5.27) tenemos que $(z^\epsilon, w^\epsilon)$ satisfece la ecuación

$$z - cw' = \epsilon z'' + \frac{1}{3}\epsilon^{1/6}\mathcal{I}_c(w')^2. \tag{5.34}$$

Usando un argumento de dualidad mostraremos que en $L^2(\mathbb{R})$ el lado derecho de (5.34) es de orden $O(1)$. Primero, utilizando que la sucesión $\{I^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon)\}_\epsilon$ es acotada, notemos que

$$\|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(1), \quad \|(w^\epsilon)'\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(1). \tag{5.35}$$

Entonces para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que

$$|\langle z^\epsilon, \psi''\rangle| \leq \|\psi''\|_{L^2(\mathbb{R})}\|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En consecuencia, usando (5.34)-(5.35) obtenemos que

$$\|z^\epsilon - c(w^\epsilon)'\|_{H^1(\mathbb{R})} = O(\epsilon). \tag{5.36}$$

Utilizaremos (5.36) en la demostración del siguiente lema. Luego vemos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (z^\epsilon - c(w^\epsilon)')\left((w^\epsilon)'\right)^2 dx\right| \leq C\|z^\epsilon - c(w^\epsilon)'\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(w^\epsilon)'\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \to 0,$$

como deseabamos. Por consiguiente

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} G^0(w^\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} K^\epsilon(w^\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} G^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon) = 1.$$

Por lo tanto, para $\epsilon$ suficientemente pequeño tenemos que $G^0(w^\epsilon) \neq 0$, y entonces

$$\mathcal{J}^0 \leq J^0\left(\frac{w^\epsilon}{G^0(w^\epsilon)^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{J^0(w^\epsilon)}{G^0(w^\epsilon)^{\frac{2}{3}}}.$$

Pero, cuando $\epsilon \to 0$,

$$J^\epsilon(w^\epsilon) - J^0(w^\epsilon) = o(1), \quad I^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon) - J^\epsilon(w^\epsilon) = o(1). \tag{5.37}$$

Luego entonces

$$\mathcal{J}^0 \leq \liminf_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{I}^\epsilon. \tag{5.38}$$

Combinando (5.31) y (5.38) otenemos,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{I}^\epsilon = \mathcal{J}^0.$$

Ahora notemos que si $K^\epsilon(w) = 1$, entonces usando (5.29), tenemos que $\mathcal{I}^\epsilon \leq J^\epsilon(w)$ y por consiguiente $\mathcal{I}^\epsilon \leq \mathcal{J}^\epsilon$. Por lo tanto

$$\mathcal{J}^0 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{I}^\epsilon \leq \liminf_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{J}^\epsilon.$$

De (5.31) concluimos que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{J}^\epsilon = \mathcal{J}^0,$$

y la demostración está completa.

□

Ahora, presentaremos el resultado principal de esta sección. Probaremos que una subsucesión de la sucesión $\{(z^\epsilon, w^\epsilon)\}_\epsilon$ después de una traslación converge a $(z_0, w_0)$ que satisface el sistema (5.2) y en consecuencia $z_0 = \partial_x w_0$ es una solución de una ecuación tipo KdV.

**Lema 5.2.3.** *Sea $0 < |c| < 1$. Entonces para toda sucesión $\{\epsilon_j\}_j$ tal que $\epsilon_j \to 0^+$ existen una sucesión trasladada de $\{(z^{\epsilon_j}, w^{\epsilon_j})\}_j$ (denotada de la misma forma) y funciones no triviales $w_0 \in \mathcal{Z}$ y $z_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tales que cuando $j \to \infty$,*

$$w^{\epsilon_j} \to w_0 \quad en\ \mathcal{Z}, \quad z^{\epsilon_j} - \partial_x w^{\epsilon_j} \to 0, \quad z^{\epsilon_j} \to z_0 \quad en \quad H^1(\mathbb{R}). \tag{5.39}$$

*Además, $(z_0, w_0)$ es una solución no trivial del sistema*

$$\begin{aligned} z &= \partial_x w \\ \partial_x^2 w - 2\partial_x^4 w + 3\partial_x w \partial_x^2 w &= 0. \end{aligned} \tag{5.40}$$

*Es decir, $z_0 = \partial_x w_0 \in H^1(\mathbb{R})$, con $\partial_x w_0$ siendo una solución de la ecuación de onda solitaria para un modelo tipo KdV.*

*Demostración.* Sea $\{\epsilon_j\}_j$ una sucesión de números positivos tal que $\epsilon_j \to 0^+$. Entonces del Lema 5.2.2 tenemos que $\left\{\left(G^0\left(w^{\epsilon_j}\right)\right)^{-\frac{1}{3}} w^{\epsilon_j}\right\}_j$ es una sucesión minimizante para $\mathcal{J}^0$ y también que $G^0\left(w^{\epsilon_j}\right) \to 1$. Usando este hecho y el Teorema 5.2.1, tenemos que existen una sucesión trasladada de $\{(z^{\epsilon_j}, w^{\epsilon_j})\}_j$ (denotada de la misma forma) y una función no nula $w_0 \in \mathcal{Z}$ tal que $w^{\epsilon_j} \to w_0$ en $\mathcal{Z}$; además $w_0$ es una solución de la ecuación (5.24). Entonces usando (5.36) tenemos que existe $z_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $z^{\epsilon_j} \to z_0$ en $H^1(\mathbb{R})$. En consecuencia obtenemos (5.39) y que $z_0 = \partial_x w_0$.

Ahora, notemos que el sistema de onda solitaria (5.27) se puede escribir, después de derivar con respecto a $x$ y multiplicar por $c_j$ la segunda ecuación, en la forma

$$\begin{aligned} \epsilon_j^{-1}(c_j(z^{\epsilon_j})' - (w^{\epsilon_j})'') + (w^{\epsilon_j})'''' + \tfrac{2}{3}\mathcal{I}^{\epsilon_j}\left((z^{\epsilon_j})(w^{\epsilon_j})'' + (z^{\epsilon_j})'(w^{\epsilon_j})'\right) &= 0, \\ \epsilon_j^{-1}(c_j(z^{\epsilon_j})' - c_j^2(w^{\epsilon_j})'') - c_j(z^{\epsilon_j})''' - \tfrac{2}{3}c_j\mathcal{I}^{\epsilon_j}\left((w^{\epsilon_j})'(w^{\epsilon_j})''\right) &= 0. \end{aligned}$$

Usando que $c_j^2 = 1 - \epsilon_j$ y restando la segunda ecuación de la primera ecuación, obtenemos que

$$\begin{aligned} &-(w^{\epsilon_j})'' + c_j(z^{\epsilon_j})''' + \frac{2}{3}c_j\mathcal{I}^{\epsilon_j}\left((w^{\epsilon_j})'(w^{\epsilon_j})''\right) = \\ &\qquad\qquad -(w^{\epsilon_j})'''' - \frac{2}{3}\mathcal{I}^{\epsilon_j}\left((z^{\epsilon_j})(w^{\epsilon_j})'' + (z^{\epsilon_j})'(w^{\epsilon_j})'\right). \end{aligned} \tag{5.41}$$

Entonces, utilizando que $\mathcal{I}^{\epsilon_j} \to \mathcal{I}^0$, $w^{\epsilon_j} \to w_0$ en $\mathcal{Z}$, $z^{\epsilon_j} \to z_0$ en $H^1(\mathbb{R})$, y $z_0 = \partial_x w_0$, para cualquier función de prueba $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \left\langle \frac{2c_j}{3}\mathcal{I}^{\epsilon_j}((w^{\epsilon_j})'(w^{\epsilon_j})'') + \frac{2}{3}\mathcal{I}^{\epsilon_j}((z^{\epsilon_j})(w^{\epsilon_j})')', \psi \right\rangle = 2\mathcal{I}^0\langle w_0' w_0'', \psi\rangle.$$

En consecuencia

$$\lim_{j\to\infty} \langle -(w^{\epsilon_j})'' + (w^{\epsilon_j})'''' + c_j (z^{\epsilon_j})''', \psi\rangle = \langle -w_0'' + 2w_0'''', \psi\rangle\,.$$

Por lo tanto, de (5.41) concluimos que $w_0$ es una solución no trivial de la ecuación

$$-\partial_x^2 w + 2\partial_x^4 w + 2\mathcal{J}^0 \partial_x w \partial_x^2 w = 0.$$

En particular, $(z^0, w^0) = -\left(\frac{2}{3}\mathcal{J}^0\right)(z_0, w_0)$ es una solución no trivial del sistema (5.40). En otras palabras, $z^0 = \partial_x w^0$ es una solución para la ecuación de onda solitaria de la ecuación KdV (5.25). $\square$

## 5.3. Propiedades variacionales y convexidad de $d(c)$

Recordemos que la derivada del funcional $J_c$ en $(u, v)$ en la dirección de $(w, z)$ está dada por

$$\begin{aligned}\langle J_c'(u,v),(w,z)\rangle &= \langle I_c'(u,v),(w,z)\rangle + \langle G_c'(u,v),(w,z)\rangle \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} \big[uw + u'w' + v'z' + v''z'' - c(uz' + wv')\big]dx + \int_{\mathbb{R}} \big[2uv'w' + w(v')^2\big]dx.\end{aligned}$$

En consecuencia tenemos que

$$K_c(u,v) = \langle J_c'(u,v),(u,v)\rangle = 2I_c(u,v) + 3G(u,v) = 2J_c(u,v) + G(u,v).$$

Usando la definición de “ground state solution” vemos que el conjunto de este tipo particular de soluciones del sistema (5.1) está dado por

$$\mathcal{G}_c = \{(u,v) \in \mathcal{M}_c :\ d(c) = J_c(u,v)\}\,,$$

donde la función $d(c)$ y el conjunto $\mathcal{M}_c$ fueron definidos anteriormente por

$$d(c) = \inf\{J_c(u,v) :\ (u,v) \in \mathcal{M}_c\}$$

y

$$\mathcal{M}_c = \left\{(u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \ :\ K_c(u,v) = 0,\ (u,v) \neq 0\right\}.$$

Entonces podemos ver que

$$\mathcal{G}_c = \left\{(u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \setminus \{0\} \ : \ d(c) = \frac{1}{3} I_c(u,v) = -\frac{1}{2} G(u,v)\right\} =: E \subset \mathcal{M}_c.$$

En efecto, si $(u,v) \in \mathcal{G}_c$ entonces $d(c) = J_c(u,v)$ y $K_c(u,v) = 0$. Así obtenemos que

$$2J_c(u,v) + G(u,v) = 0, \quad 2I_c(u,v) + 3G(u,v) = 0,$$

de donde

$$d(c) = \frac{1}{3} I_c(u,v) = -\frac{1}{2} G(u,v).$$

Además, utilizando la definición de $\mathcal{G}_c$ vemos que $(u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \setminus \{0\}$. Por consiguiente hemos probado que $(u,v) \in E$. De otro lado, si $(u,v) \in E$ entonces tenemos que $(u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \setminus \{0\}$ y también que

$$K(u,v) = 2I_c(u,v) + 3G(u,v) = 0.$$

De donde $(u,v) \in \mathcal{M}_c$. Adicionalmente, usando la definición de $J_c$ y el hecho de que $d(c) = \frac{1}{3} I_c(u,v) = -\frac{1}{2} G(u,v)$ obtenemos que

$$J_c(u,v) = I_c(u,v) + G(u,v) = -\frac{1}{2} G(u,v) = d(c).$$

Por tanto $(u,v) \in \mathcal{G}_c$, lo cual concluye la demostración de la afirmación.

Al inicio de este capítulo se mencionó que el estudio de la estabilidad depende de algunas propiedades de la función $d(c)$. En el siguiente lema demostramos que $d(c)$ es positiva y caracterizamos esta función usando el funcional $I_c$ y la condición $K_c(u,v) \leq 0$.

**Lema 5.3.1.** *Sea* $0 < |c| < 1$. *Entonces tenemos que*

*(i)* $d(c)$ *existe y es positiva,*

*(ii)* $d(c) = \text{ínf}\left\{\frac{1}{3} I_c(u,v) \ : \ K_c(u,v) \leq 0, \, (u,v) \neq 0\right\}$.

*Demostración.* (i) Sea $(u,v) \in \mathcal{M}_c$, entonces vemos que $K(u,v) = 0$ y por consiguiente

$$\frac{1}{3} I_c(u,v) = -\frac{1}{2} G(u,v).$$

Luego, de la definición del funcional $J_c$ tenemos que

$$J_c(u,v) = I_c(u,v) + G(u,v) = \frac{1}{3} I_c(u,v) \geq 0.$$

Por tanto $d(c)$ existe. Ahora, usando la desigualdad de Young y el hecho de que la inclusión $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})$ es continua para $q \geq 2$, vemos que existe $C > 0$ tal que

$$|G(u,v)| \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\|v'\|^2_{L^4(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\|v'\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\Big(\|u\|^3_{H^1(\mathbb{R})} + \|v'\|^3_{H^1(\mathbb{R})}\Big).$$

En consecuencia, utilizando la desigualdad (5.7) obtenemos que

$$J_c(u,v) = \frac{1}{3}I_c(u,v) = -\frac{1}{2}G(u,v) \leq C\|(u,v)\|^3_{H^1\times\mathcal{V}^2} \leq C\left(I_c(u,v)\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Luego entonces $\frac{1}{3}I_c(u,v) \geq C$ y por lo tanto $d(c) \geq C > 0$.

(ii) Para $(u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \setminus \{0\}$ tal que $K_c(u,v) \leq 0$ tenemos que $G(u,v) < 0$. Definamos $\alpha \in [0,1)$ por

$$\alpha = -\frac{2I_c(u,v)}{3G(u,v)}.$$

Entonces obtenemos que $K_c(\alpha(u,v)) = 2\alpha^2 I_c(u,v) + 3\alpha^3 G(u,v) = 0$. En otras palabras, tenemos que $\alpha(u,v) \in \mathcal{M}_c$. Así, dado que $\alpha \in [0,1)$, obtenemos

$$d(c) \leq J_c(\alpha(u,v)) = \frac{\alpha^2}{3}I_c(u,v) \leq \frac{1}{3}I_c(u,v).$$

En consecuencia

$$d(c) \leq \inf\Big\{\frac{1}{3}I_c(u,v) \;:\; K_c(u,v) \leq 0,\, (u,v) \neq 0\Big\}.$$

Ahora, si $(u,v) \in \mathcal{M}_c$ entonces vemos que $J_c(u,v) = \frac{1}{3}I_c(u,v)$ y también que

$$\Big\{J_c(u,v) \;:\; (u,v) \in \mathcal{M}_c\Big\} \subseteq \Big\{\frac{1}{3}I_c(u,v) \;:\; K_c(u,v) \leq 0,\; (u,v) \neq 0\Big\}.$$

Por consiguiente

$$\inf\Big\{\frac{1}{3}I_c(u,v) \;:\; K_c(u,v) \leq 0,\; (u,v) \neq 0\Big\} \leq \inf\Big\{J_c(u,v) \;:\; (u,v) \in \mathcal{M}_c\Big\} = d(c),$$

y por lo tanto hemos demostrado la afirmación (ii) del lema.

$\square$

En el siguiente resultado probamos la existencia de minimizadores del problema (5.5) y establecemos cierta relación entre los problemas (5.5) y (5.6).

**Lema 5.3.2.** *Sea $0 < |c| < 1$. Entonces tenemos que*

*(i) Si $\{(u_m, v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para $d(c)$, entonces existen una subsucesión de $\{(u_m, v_m)\}_m$ denotada de la misma forma, una sucesión $\{x_m\}_m$ en $\mathbb{R}$ y $(u^c, v^c) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \setminus \{0\}$ tal que las funciones trasladadas*

$$(u_m(\cdot + x_m), v_m(\cdot + x_m))$$

*convergen a $(u^c, v^c)$ fuertemente en $H^1 \times \mathcal{V}^2$, $(u^c, v^c) \in \mathcal{M}_c$, $d(c) = J_c(u^c, v^c)$ y $(u^c, v^c)$ es una solución de (5.2). Además,*

$$d(c) = \frac{4}{27}\mathcal{I}_c^3, \tag{5.42}$$

*donde $\mathcal{I}_c = \text{ínf}\,\{I_c(u,v)\ :\ (u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \ \text{ con } \ G(u,v) = 1\}$.*

*(ii) Sea $\{(u_m, v_m)\}_m$ una sucesión en $H^1 \times \mathcal{V}^2$ tal que*

$$\frac{1}{3}I_c(u_m, v_m) \to d(c) \quad y \quad J_c(u_m, v_m) \to d_1 \leq d(c).$$

*Entonces existen una subsucesión de $\{(u_m, v_m)\}_m$ denotada de la misma manera, una sucesión $\{x_m\}_m$ en $\mathbb{R}$ y $(u^c, v^c) \in \mathcal{M}_c$ tal que las funciones trasladadas*

$$(u_m(\cdot + x_m), v_m(\cdot + x_m))$$

*convergen a $(u^c, v^c)$ fuertemente en $H^1 \times \mathcal{V}^2$ y $d_1 = d(c) = \frac{1}{3}I_c(u^c, v^c)$.*

*Demostración.* Usando argumentos similares a los utilizados en la demostración del Teorema 5.1.7 tenemos la primera parte de la afirmación en (i). Ahora probemos la igualdad en (5.42). Sea $(u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \setminus \{0\}$ tal que $K_c(u,v) = 0$, entonces

$$I_c(u,v) = -\frac{3}{2}G(u,v) = 3J_c(u,v).$$

Consideremos $(w,z)$ definido por

$$(w,z) = \frac{1}{G^{\frac{1}{3}}(u,v)}(u,v).$$

Entonces $(w,z) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \setminus \{0\}$ y además $G(w,z) = 1$. En consecuencia

$$\mathcal{I}_c \leq I_c(w,z) = \frac{1}{G^{\frac{2}{3}}(u,v)}I_c(u,v) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} I_c^{\frac{1}{3}}(u,v) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \Big(3J_c(u,v)\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

Así concluimos que
$$\frac{4}{27}\mathcal{I}_c^3 \leq d(c).$$
Ahora, supongamos que $(u,v) \neq 0$ tal que $G(u,v) = 1$. Tomemos $t$ tal que
$$K_c(tu,tv) = 0.$$
En este caso, $2I_c(u,v) + 3t = 0$. Por tanto
$$t^2 = \frac{4}{9}I_c^2(u,v).$$
Entonces obtenemos que
$$d(c) \leq J_c(tu,tv) = t^2 I_c(u,v) + t^3 G(u,v) = t^2\left(I_c(u,v) + t\right) = \frac{4}{27}I_c^3(u,v).$$
De donde
$$d(c) \leq \frac{4}{27}\mathcal{I}_c^3.$$
Esto prueba (5.42). Ahora, demostremos la segunda parte del lema. Recordemos que $K_c = 2I_c + 3G$, entonces usando la hipótesis obtenemos que
$$\frac{1}{3}I_c(u_m,v_m) \to d(c), \quad J_c(u_m,v_m) = \frac{1}{3}\left(I_c(u_m,v_m) + K_c(u_m,v_m)\right) \to d_1 \leq d(c)$$
y además para $m$ suficientemente grande $K_c(u_m,v_m) \leq 0$. Así tenemos que $\{(u_m,v_m)\}_m$ es una sucesión minimizante para $d(c)$. Por tanto, usando la parte (i) tenemos que existen una subsucesión de $\{(u_m,v_m)\}_m$, la cual denotaremos de la misma forma, una sucesión $\{x_m\}_m$ en $\mathbb{R}$ y $(u^c,v^c) \in \mathcal{M}_c$ tal que
$$(u_m(\cdot + y_m), v_m(\cdot + y_m)) \to (u^c,v^c) \quad \text{en} \quad H^1 \times \mathcal{V}^2.$$
En particular $K_c(u^c,v^c) = 0$ y $d_1 = d(c) = \frac{1}{3}I_c(u^c,v^c)$. □

A continuación mostramos algunas propiedes adicionales de la función $d(c)$, útiles para demostrar la convexidad de esta función para velocidad de onda $c$ cerca de 1.

**Lema 5.3.3.** *Sea* $0 < |c| < 1$. *Entonces*

*(i) Si* $0 < c_1 < c_2 < 1$ *y* $(u,v) \in \mathcal{G}_c$, *tenemos que* $d(c)$ *y* $I_{3,c}(u,v)$ *son funciones uniformemente acotadas en* $[c_1,c_2]$.

*(ii) Si* $c_1 < c_2$ *y* $(u^{c_i}, v^{c_i}) \in \mathcal{G}_{c_i}$*, tenemos que*

$$d(c_1) \leq d(c_2) - \left(\frac{c_2 - c_1}{c_2}\right) I_{3,c_2}(u^{c_2}, v^{c_2}) + o(c_2 - c_1),$$
$$d(c_2) \leq d(c_1) + \left(\frac{c_2 - c_1}{c_1}\right) I_{3,c_1}(u^{c_1}, v^{c_1}) + o(c_2 - c_1).$$

*(iii) Si* $0 < c_1 < c_2 < 1$, $(u^{c_1}, v^{c_1}) \in \mathcal{G}_{c_1}$ *y* $I_{3,c_1}(u^{c_1}, v^{c_1}) \leq 0$*, entonces obtenemos que*

$$d(c_2) \leq d(c_1) + \frac{(c_2 - c_1)}{3c_1} I_{3,c_1}(u^{c_1}, v^{c_1}).$$

*En particular,* $d$ *es una función estrictamente decreciente en* $(c_1, 1)$*.*

*Demostración.* (i) Sean $c_1, c_2$ tales que $0 < c_1 < c_2 < 1$ y sea $(u, v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ tal que $G(u, v) \neq 0$. Definamos $t_c$ por

$$t_c = -\frac{2}{3}\frac{I_c(u, v)}{G(u, v)}.$$

Luego

$$K_c(t_c(u, v)) = 2I_c(t_c(u, v)) + 3G(t_c(u, v)) = 2t_c^2 I_c(u, v) + 3t_c^3 G(u, v) = 0.$$

Por consiguiente $(t_c(u, v)) \in \mathcal{M}_c$ y también

$$\frac{1}{3}I_c(t_c(u, v)) = -\frac{1}{2}G(t_c(u, v)), \quad J_c(t_c(u, v)) = I_c(t_c(u, v)) + G(t_c(u, v)) = \frac{t_c^2}{3} I_c(u, v).$$

En consecuencia, usando la desigualdad (5.7), existe $C > 0$ tal que para todo $c \in [c_1, c_2]$,

$$d(c) \leq J_c(t_c(u, v)) = \frac{4}{27}\frac{I_c^3(u, v)}{G^2(u, v)} \leq \frac{C\|(u, v)\|^6_{H^1 \times \mathcal{V}^2}}{G^2(u, v)}.$$

Ahora, sea $(w, z) \in \mathcal{G}_c$, entonces vemos que $2I_c(w, z) + 3G(w, z) = 0$. Además,

$$M_1(c_1, c_2)\|(w, z)\|^2_{H^1 \times \mathcal{V}^2} \leq 2I_c(w, z) = -3G(w, z) \leq C\|(w, z)\|^3_{H^1 \times \mathcal{V}^2}.$$

Por tanto

$$M_1(c_1, c_2) \leq \|(w, z)\|_{H^1 \times \mathcal{V}^2} \leq M_2(c_1, c_2)\left(\frac{1}{3}I_c(w, z)\right)^{\frac{1}{2}} = M_2(c_1, c_2)\,(d(c))^{\frac{1}{2}}.$$

Así, hemos demostrado que

$$d(c) \geq \left(\frac{M_1(c_1, c_2)}{M_2(c_1, c_2)}\right)^2.$$

Por consiguiente, si $(u,v)\in\mathcal{G}_c$ entonces obtenemos que $I_c(u,v)$ y $G(u,v)$ son uniformemente acotadas en $[c_1,c_2]$ ya que

$$d(c)=\frac{1}{3}I_c(u,v)=-\frac{1}{2}G(u,v),$$

lo cual implica que $I_{3,c}(u,v)$ es también uniformemente acotada dado que $K_c(u,v)=0$ y existen $C_1,C_2>0$ tales que

$$C_1\|(u,v)\|^2_{H^1\times\mathcal{V}^2}\le I_1(u)+I_2(v)\le C_2\|(u,v)\|^2_{H^1\times\mathcal{V}^2}.$$

(ii) Sea $(w,z)$ definida por $(w,z)=t(u^{c_2},v^{c_2})$. Determinemos $t$ tal que $K_{c_1}(w,z)=0$. Usando la definición de $I_{c_1}$, $I_{c_2}$ y el hecho de que

$$I_{3,c_1}(u^{c_2},v^{c_2})=\frac{c_1}{c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}),$$

vemos que

$$I_{c_1}(u^{c_2},v^{c_2})=I_1(u^{c_2})+I_2(v^{c_2})+I_{3,c_1}(u^{c_2},v^{c_2})=I_{c_2}(u^{c_2},v^{c_2})+\frac{(c_1-c_2)}{c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}).$$

En consecuencia, dado que $(u^{c_2},v^{c_2})\in\mathcal{G}_{c_2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
K_{c_1}(w,z)&=2t^2I_{c_1}(u^{c_2},v^{c_2})+3t^3G(u^{c_2},v^{c_2})\\
&=t^2\left(2I_{c_2}(u^{c_2},v^{c_2})-\frac{2(c_2-c_1)}{c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})\right)+3t^3G(u^{c_2},v^{c_2})\\
&=t^2\left(3tG(u^{c_2},v^{c_2})-3G(u^{c_2},v^{c_2})-\frac{2(c_2-c_1)}{c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}\right).
\end{aligned}$$

Luego entonces, $t$ debe ser tal que

$$tG(u^{c_2},v^{c_2})=G(u^{c_2},v^{c_2})+\frac{2(c_2-c_1)}{3c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}),$$

es decir,

$$t=1+\frac{2(c_2-c_1)}{3c_2}\left(\frac{I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})}{G(u^{c_2},v^{c_2})}\right)=1-\frac{(c_2-c_1)}{3c_2}\left(\frac{I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})}{d(c_2)}\right),$$

donde usamos que $d(c_2)=\frac{1}{3}I_{c_2}(u^{c_2},v^{c_2})=-\frac{1}{2}G(u^{c_2},v^{c_2})$ (note que $(u^{c_2},v^{c_2})\in\mathcal{G}_{c_2}$).

Entonces para este $t$ concluimos que $K_{c_1}(w,z)=0$. Ahora

$$\begin{aligned}
&d(c_1) \leq J_{c_1}(w,z) = t^2\left(I_{c_1}(u^{c_2},v^{c_2}) + tG(u^{c_2},v^{c_2})\right)\\
&= t^2\left(I_{c_2}(u^{c_2},v^{c_2}) + \frac{c_1-c_2}{c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}) + tG(u^{c_2},v^{c_2})\right)\\
&= t^2\left(I_{c_2}(u^{c_2},v^{c_2}) + \frac{c_1-c_2}{c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}) + \left(1+\frac{2(c_2-c_1)}{3c_2}\frac{I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})}{G(u^{c_2},v^{c_2})}\right)G(u^{c_2},v^{c_2})\right)\\
&= t^2\left(I_{c_2}(u^{c_2},v^{c_2}) + G(u^{c_2},v^{c_2}) - \frac{c_2-c_1}{3c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})\right)\\
&= t^2\left(d(c_2) - \frac{c_2-c_1}{3c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})\right).
\end{aligned}$$

Pero sabemos que

$$\begin{aligned}
t^2 &= \left(1-\frac{(c_2-c_1)}{3c_2}\left(\frac{I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})}{d(c_2)}\right)\right)^2\\
&= 1-\frac{2(c_2-c_1)}{3c_2}\left(\frac{I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})}{d(c_2)}\right) + O\left((c_2-c_1)^2\right).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$t^2\left(d(c_2)-\frac{(c_2-c_1)}{3c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2})\right) = d(c_2) - \frac{(c_2-c_1)}{c_2}I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}) + O\left((c_2-c_1)^2\right)$$

y por consiguiente

$$d(c_1) \leq d(c_2) - \left(\frac{c_2-c_1}{c_2}\right)I_{3,c_2}(u^{c_2},v^{c_2}) + o(c_2-c_1).$$

Ahora, sea $(w,z)$ definido por $(w,z)=t(u^{c_1},v^{c_1})$. Como antes, determinemos $t$ tal que $K_{c_2}(w,z)=0$. En este caso,

$$t = 1-\frac{2(c_2-c_1)}{3c_1}\left(\frac{I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})}{G(u^{c_1},v^{c_1})}\right) = 1+\frac{(c_2-c_1)}{3c_1}\left(\frac{I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})}{d(c_1)}\right).$$

Dado que $K_{c_1}(w,z)=0$, entonces vemos que

$$d(c_2) \leq J_{c_2}(w,z) = t^2\left(d(c_1)+\frac{c_2-c_1}{3c_1}I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})\right).$$

Usando argumentos similares a los anteriores tenemos que

$$t^2 = 1+\frac{2(c_2-c_1)}{3c_1}\left(\frac{I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})}{d(c_1)}\right) + O\left((c_2-c_1)^2\right).$$

En consecuencia

$$t^2\left(d(c_1)+\frac{(c_2-c_1)}{3c_1}I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})\right)=d(c_1)+\frac{(c_2-c_1)}{c_1}I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})+O\left((c_2-c_1)^2\right),$$

y por lo tanto

$$d(c_2)\leq d(c_1)+\left(\frac{c_2-c_1}{c_1}\right)I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})+o(c_2-c_1).$$

(iii) Dado que $(u^{c_1},v^{c_1})\in\mathcal{G}_{c_1}$, entonces $K_{c_1}(u^{c_1},v^{c_1})=0$. En consecuencia vemos que $G(u^{c_1},v^{c_1})\leq 0$. Ahora, si $I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})\leq 0$ entonces para $c_1<c_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
K_{c_2}(u^{c_1},v^{c_1}) &= 2I_{c_2}(u^{c_1},v^{c_1})+3G(u^{c_1},v^{c_1})\\
&= 2I_{c_1}(u^{c_1},v^{c_1})+\frac{2(c_2-c_1)}{c_1}I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})+3G(u^{c_1},v^{c_1})\\
&= K_{c_1}(u^{c_1},v^{c_1})+\frac{2(c_2-c_1)}{c_1}I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})\leq 0.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
d(c_2)\leq \frac{1}{3}I_{c_2}(u^{c_1},v^{c_1}) &= \frac{1}{3}\left(I_{c_1}(u^{c_1},v^{c_1})+\frac{c_2-c_1}{c_1}I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1})\right)\\
&\leq d(c_1)+\frac{c_2-c_1}{3c_1}I_{3,c_1}(u^{c_1},v^{c_1}).
\end{aligned}$$

Esto también implica que $d(c_2)<d(c_1)$ siempre que $0<c_1<c_2<1$ y por lo tanto la función $d$ es estrictamente decreciente en $(c_1,1)$.

□

Ahora probaremos que la función $d$ es estrictamente convexa en $(c_0,1)$ con $c_0>0$ cerca de 1. Para tal propósito, calcularemos $d'$ y analizaremos el comportamiento de $d$ y $d'$ cerca de 1. Iniciemos determinando $d'(c)$.

**Lema 5.3.4.** *Si $(u^c,v^c)\in\mathcal{G}_c$, entonces tenemos que*

$$d'(c)=\frac{I_{3,c}(u^c,v^c)}{c}. \tag{5.43}$$

*Demostración.* Notemos que $d'$ se puede calcular tomando los límites apropiados en la parte (ii) del Lema 5.3.3.

□

Para realizar el estudio del comportamiento de las funciones $d$ y $d'$ cerca de 1, usamos los siguientes resultados.

**Teorema 5.3.5.** *Sean* $0 < |c| < 1$ *y* $(u^c, v^c) \in \mathcal{G}_c$. *Entonces tenemos que*

$$\lim_{c \to 1^-} d(c) = 0 \quad y \quad I_{3,c}(u^c, v^c) < 0 \quad \text{para } c \text{ cerca de } 1^-.$$

*Demostración.* Sabemos que existe una familia $\{(z^\epsilon, w^\epsilon)\}_\epsilon$ tal que

$$\mathcal{I}^\epsilon = I^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon), \quad G^\epsilon(z^\epsilon, w^\epsilon) = 1, \quad \mathcal{I}_c = \epsilon^{5/6}\mathcal{I}^\epsilon.$$

Además, de (5.42) vemos que

$$d(c) = \frac{4}{27}\mathcal{I}_c^3 = \frac{4}{27}\left(\epsilon^{5/6}\mathcal{I}^\epsilon\right)^3.$$

Así, dado que cuando $\epsilon \to 0^+$, $c \to 1^-$ entonces

$$\lim_{c \to 1^-} d(c) = \frac{4}{27}\lim_{c \to 1^{-1}} \mathcal{I}_c^3 = \frac{4}{27}\lim_{\epsilon \to 0^+}\left(\epsilon^{5/6}\mathcal{I}^\epsilon\right)^3 = 0.$$

Ahora, usando la misma notación de la Sección 5.2 tenemos que

$$\epsilon I^{3,\epsilon}(z^\epsilon, w^\epsilon) = -2c\int_{\mathbb{R}} z^\epsilon\,(w^\epsilon)'\,dx = -2c\int_{\mathbb{R}}\left[z^\epsilon - c\,(w^\epsilon)'\right](w^\epsilon)'\,dx - 2c^2\int_{\mathbb{R}}\left[(w^\epsilon)'\right]^2 dx.$$

Por consiguiente, utilizando (5.35)-(5.36), obtenemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon I^{3,\epsilon}(z^\epsilon, w^\epsilon) < 0,$$

lo cual implica que cuando $c \to 1^-$,

$$I_{3,c}(u^c, v^c) < 0.$$

□

**Teorema 5.3.6.** *Sea* $0 < |c| < 1$. *Entonces existe* $0 < c_0 < 1$ *cerca de* 1 *tal que* $d$ *es una función decreciente en* $(c_0, 1)$. *Además, tenemos que* $\lim_{c \to 1^-} d'(c) = 0$.

*Demostración.* Usando el Lemma 5.3.4 y el Teorema 5.3.5 tenemos que $d$ es una función decreciente para $c$ cerca de $1^-$ ya que

$$d'(c) = \frac{I_{3,c}(u^c, v^c)}{c} < 0.$$

Además, utilizando el Teorema 5.3.5 obtenemos que $\lim_{c\to 1^-} d(c) = 0$. Así vemos que $\lim_{c\to 1^-} \|(u^c, v^c)\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} = 0$ para cualquier $(u^c, v^c) \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ tal que $d(c) = \frac{1}{3}I_c(u^c, v^c)$, dado que

$$\|(u^c, v^c)\|^2_{H^1\times\mathcal{V}^2} \leq C(c)I_c(u^c, v^c) = C(c)d(c).$$

En consecuencia, de (5.43) y la definición de $I_{3,c}$ concluimos que

$$|d'(c)| \leq C(c)\|u^c\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(v^c)'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(c)\|(u^c, v^c)\|^2_{H^1\times\mathcal{V}^2}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{c\to 1^-} d'(c) = 0.$$

□

De los resultados anteriores tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 5.3.7.** *La función $d$ es estrictamente convexa para $c$ cerca de $1^-$.*

## 5.4. Estabilidad de onda solitaria

En esta sección demostramos el resultado principal de este capítulo. Para esto, primero consideremos el sistema modulado asociado con (5.2), es decir, supongamos que la solución $(\eta(x,t), \Phi(x,t))$ del sistema Boussinesq (5.1) tiene la forma

$$\eta(x,t) = u(x - ct, t), \quad \Phi(x,t) = v(x - ct, t).$$

Entonces vemos que $(u, v)$ satisface el sistema

$$\begin{cases} u_t - c\partial_x u + \partial_x^2 v - \partial_x^4 v + \partial_x (u\partial_x v) & = 0, \\ \\ v_t - c\partial_x v + u - \partial_x^2 u + \frac{1}{2}(\partial_x v)^2 & = 0. \end{cases} \tag{5.44}$$

Notemos que el Hamiltoniano para este sistema tiene la forma

$$\mathcal{H}_c(u, v) = \frac{1}{2}J_c(u, v) = \mathcal{H}(u, v) + \frac{1}{2}I_{3,c}(u, v).$$

También observemos que $\mathcal{H}_c$ es conservado en tiempo sobre las soluciones ya que

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_v \mathcal{H}_c(u, v) = c\partial_x u + \partial_x^4 v - \partial_x^2 v - \partial_x (u\partial_x v), \\ -v_t &= \partial_u \mathcal{H}_c(u, v) = -c\partial_x v + u - \partial_x^2 u + \frac{1}{2}(\partial_x v)^2. \end{aligned}$$

Si definimos las regiones $\mathcal{R}_c^i$, $i = 1, 2$, en el espacio de energía $H^1 \times \mathcal{V}^2$ por

$$\mathcal{R}_c^1 = \left\{ (u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \ : \ \mathcal{H}_c(u,v) < \frac{1}{2}d(c), \ \frac{1}{3}I_c(u,v) < d(c) \right\},$$
$$\mathcal{R}_c^2 = \left\{ (u,v) \in H^1 \times \mathcal{V}^2 \ : \ \mathcal{H}_c(u,v) < \frac{1}{2}d(c), \ \frac{1}{3}I_c(u,v) > d(c) \right\},$$

tenemos el siguiente resultado.

**Lema 5.4.1.** *$\mathcal{R}_c^1, \mathcal{R}_c^2$ son regiones invariantes bajo el flujo del modelo (5.44).*

*Demostración.* Sea $(u_0, v_0) \in \mathcal{R}_c^1$. Supongamos que $(u(t), v(t))$ satisface el sistema (5.44) con condición inicial

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0.$$

Usando la caracterización de $d(c)$ dada en el Lema 5.3.1 y la definición de $\mathcal{R}_c^1$, demostremos que

$$K_c(u_0, v_0) > 0.$$

En efecto, supongamos que $K_c(u_0, v_0) \leq 0$. Del Lema 5.3.1 vemos que $d(c) \leq \frac{1}{3}I_c(u_0, v_0)$. Además, si $(u(t), v(t)) \in \mathcal{R}_c^1$ para algún $t > 0$, entonces tenemos que $K_c(u(t), v(t)) > 0$. Ahora, utilizando la continuidad de $K_c$, existe un mínimo $t_0 > 0$ tal que $K_c(u(t), v(t)) > 0$ para $t \in [0, t_0)$ y $K_c(u(t_0), v(t_0)) = 0$. Luego, de la caracterización de $d(c)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
d(c) &\leq \frac{1}{3}I_c(u(t_0), v(t_0)) \\
&\leq \liminf_{t \to t_0^-} \left( \frac{1}{3}I_c(u(t), v(t)) + \frac{1}{3}K_c(u(t), v(t)) \right) \\
&= \liminf_{t \to t_0^-} J_c(u(t), v(t)) \\
&= 2 \liminf_{t \to t_0^-} \mathcal{H}_c(u(t), v(t)) \\
&\leq 2\mathcal{H}_c(u_0, v_0) \\
&< d(c),
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $K_c(u_0, v_0) > 0$. De otro lado,

$$\begin{aligned}
d(c) &> 2\mathcal{H}_c(u(t), v(t)) \\
&= 2\mathcal{H}_c(u_0, v_0) = J_c(u_0, v_0) = \frac{1}{3}I_c(u_0, v_0) + \frac{1}{3}K_c(u_0, v_0) > \frac{1}{3}I_c(u_0, v_0),
\end{aligned}$$

lo cual muestra que $\mathcal{R}_c^1$ es invariante bajo el flujo del sistema (5.44). De forma similar tenemos que $\mathcal{R}_c^2$ es invariante bajo el flujo de (5.44).

$\square$

El siguiente lema será usado para obtener el resultado de estabilidad. En adelante usaremos la notación $U^c = (u^c, v^c)$ para "ground state solution", es decir que $d(c) = J_c(U^c)$.

**Lema 5.4.2.** *Sea $0 < c_0 < 1$ cerca de 1. Si $U(t) = (\eta(t), \Phi(t))$ es una solución del problema de Cauchy asociado con el sistema Boussinesq (5.1) con condición inicial $U(0) = U_0 \in H^1 \times \mathcal{V}^2$, entonces para cada $M$, existe $\delta(M)$ tal que si*

$$\|U_0 - U^{c_0}\|_{H^1 \times \mathcal{V}^2} < \delta(M)$$

*entonces tenemos*

$$d\left(c_0 + \frac{1}{M}\right) \leq \frac{1}{3} I_{c_0}(U(t)) \leq d\left(c_0 - \frac{1}{M}\right), \quad t \geq 0.$$

*Demostración.* Sea $M > 0$ fijo y definamos $c_1 = c_0 - \frac{1}{M}$ y $c_2 = c_0 + \frac{1}{M}$. Ahora, sea $(u^i(t), v^i(t))$ definida por

$$\eta(x,t) = u^i(x - c_i t, t), \quad \Phi(x,t) = v^i(x - c_i t, t), \quad i = 1, 2.$$

Entonces $(u^i(t), v^i(t))$ satisface (5.44) con condición inicial

$$(u^i(0), v^i(0)) = U(0).$$

Para esta solución tenemos que el Hamiltoniano es conservado en tiempo, es decir,

$$\mathcal{H}_{c_i}(U(t)) = \mathcal{H}_{c_i}(U(0)).$$

Ahora, usando la hipótesis concluimos para $\delta$ pequeño que

$$I_{c_i}(U^{c_0}) = I_{c_i}(U(0)) + O(\delta).$$

Dado que $d$ es una función estrictamente decreciente tal que $d(c_0) = \frac{1}{3} I_{c_0}(U^{c_0})$, entonces podemos escoger $\delta$ suficientemente pequeño de tal manera que

$$d(c_2) < \frac{1}{3} I_{c_0}(U(0)) < d(c_1).$$

También, utilizando el Lema 5.3.4, tenemos que

$$\begin{aligned}J_{c_i}(U(0)) &= J_{c_i}(U^{c_0}) + O(\delta)\\&= J_{c_0}(U^{c_0}) + \frac{c_i - c_0}{c_0} I_{3,c_0}(U^{c_0}) + O(\delta)\\&= d(c_0) + (c_i - c_0)d'(c_0) + O(\delta).\end{aligned}$$

Además tenemos que

$$d(c_i) = d(c_0) + (c_i - c_0)d'(c_0) + \frac{1}{2}(c_i - c_0)^2 d''(c_0),$$

donde estamos empleando la expansión de Taylor en $c_0$. Así, reemplazando en la igualdad anterior, vemos que

$$J_{c_i}(U(0)) = d(c_i) - \frac{1}{2}(c_i - c_0)^2 d''(c_0) + O(\delta).$$

Luego, escogiendo $\delta$ suficientemente pequeño tal que

$$-\frac{1}{2}(c_i - c_0)^2 d''(c_0) + O(\delta) < 0,$$

obtenemos que

$$2\mathcal{H}_{c_i}\left(U(0)\right) = J_{c_i}\left(U(0)\right) < d(c_i). \tag{5.45}$$

Entonces, usando el Lema 5.4.1, tenemos para todo $t \in \mathbb{R}$ que

$$\mathcal{H}_{c_i}\left(U(t)\right) < \frac{1}{2}d(c_i), \quad d\Big(c_0 + \frac{1}{M}\Big) \leq \frac{1}{3}I_{c_0}\left(U(t)\right) \leq d\Big(c_0 - \frac{1}{M}\Big).$$

□

Finalmente establecemos el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 5.4.3.** *Sea $0 < c_0 < 1$ cerca de 1. Entonces las soluciones de onda solitaria $U^{c_0}$ (ground state solitary wave solutions) del sistema (5.1) son orbitalmente estables en el siguiente sentido: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $U_0 \in H^1 \times \mathcal{V}^2$ con la condición*

$$\|U_0 - U^{c_0}\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} < \delta(\varepsilon),$$

*se tiene que la solución $U(t) = (\eta(t), \Phi(t))$ del problema de Cauchy asociado con el modelo Boussinesq (5.1) con condición inicial $U_0$ satisface que*

$$\inf_{V\in\mathcal{G}_{c_0}} \|U(t) - V\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} < \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

*Demostración.* Argumentaremos por contradicción. Supongamos que existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $\{t_k\}_k$ en $\mathbb{R}$ y $\{U_0^k\}_k$ en $H^1 \times \mathcal{V}^2$, tales que

$$\lim_{k\to\infty} \|U_0^k - U^{c_0}\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} = 0, \quad \inf_{V\in\mathcal{G}_{c_0}} \|U^k(t_k) - V\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} > \varepsilon_0,$$

donde $U^k$ denota la única solución del sistema (5.1) con condición inicial $U^k(0) = U_0^k$. Luego, del Lema 5.4.2, dado $m > 0$ tenemos que existen $\delta(m) > 0$ y una subsucesión $\{k_m\}_m$ tal que

$$\|U_0^{k_m} - U^{c_0}\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} < \delta(m),$$

y también

$$d\Big(c_0 + \frac{1}{k_m}\Big) \le \frac{1}{3} I_{c_0}\left(U^{k_m}(t_{k_m})\right) \le d\Big(c_0 - \frac{1}{k_m}\Big),$$

lo que significa que existe una subsucesión de $\{U^k(t_k)\}_k$, la cual denotaremos de la misma manera, tal que

$$d\Big(c_0 + \frac{1}{k}\Big) \le \frac{1}{3} I_{c_0}\left(U^k(t_k)\right) \le d\Big(c_0 - \frac{1}{k}\Big).$$

En particular, tenemos que

$$\frac{1}{3} I_{c_0}\left(U^k(t_k)\right) \longrightarrow d(c_0) \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Ahora, consideremos $c_2 = c_0 + \frac{1}{k}$ y $V^{k,2}(t,x)$ definida por $U^k(t,x) = V^{k,2}(t, x - c_2 t)$. Entonces como en la demostración del lema anterior (ver (5.45)), obtenemos que

$$2\mathcal{H}_{c_2}\left(U^k(t_k)\right) = J_{c_2}\left(U^k(t_k)\right) < d(c_2) < d(c_0) < d\Big(c_0 - \frac{1}{k}\Big).$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} J_{c_2}\left(U^k(t_k)\right) &= J_{c_0}\left(U^k(t_k)\right) + \left(\frac{c_2 - c_0}{c_0}\right) I_{3,c_0}\left(U^k(t_k)\right) \\ &= J_{c_0}\left(U^k(t_k)\right) + \left(\frac{1}{kc_0}\right) I_{3,c_0}\left(U^k(t_k)\right). \end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{kc_0} \left|I_{3,c_0}\left(U^k(t_k)\right)\right| \le \lim_{k\to\infty} \frac{C}{k} \|U^k(t_k)\|_X^2 = 0.$$

En consecuencia

$$J_{c_0}\left(U^k(t_k)\right) \longrightarrow d_1 \le d(c_0).$$

Entonces por el Lema 5.3.2, tenemos que existe $U_{c_0} \in \mathcal{G}_{c_0}$ tal que

$$U^k(t_k) \longrightarrow U_{c_0} \quad \text{en} \quad H^1 \times \mathcal{V}^2, \quad \frac{1}{3} I_{c_0}\left(U^k(t_k)\right) \longrightarrow d(c_0) = d_1, \quad k \to \infty,$$

y también que $J_{c_0}\left(U^k(t_k)\right) \longrightarrow d(c_0)$. Pero esto contradice la suposición de inestabilidad

$$\inf_{V\in\mathcal{G}_{c_0}} \|U^k(t_k) - V\|_{H^1\times\mathcal{V}^2} > \varepsilon_0.$$

$\square$

Capítulo 6

# Conclusiones y trabajos futuros

## 6.1. Conclusiones

En el Capítulo 1 demostramos que el problema de Cauchy asociado con el sistema Boussinesq-Benney-Luke (2) es localmente bien planteado en el espacio de tipo Sobolev $H^s \times \mathcal{V}^{s+1}$, para $s \geq 0$. Para la demostración del resultado usamos un argumento de punto fijo combinado con estimaciones lineales y bilineales en espacios tipo Bourgain.

El Capítulo 2 está dedicado a establecer un resultado de continuación única para el sistema Boussinesq (2). Probamos que si $(\eta, \Phi) = (\eta(x,t), \Phi(x,t))$ es una solución del modelo (2) con

$$\eta \in L^2(-T,T; H^2_{loc}(\mathbb{R})), \quad \Phi \in L^2(-T,T; H^4_{loc}(\mathbb{R})), \quad \eta_t, \Phi_t \in L^2(-T,T; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$$

y $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en un subconjunto abierto $\Omega$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en la componente horizontal de $\Omega$. La herramienta principal para obtener el resultado es un estimativo tipo Carleman para un operador diferencial $\mathcal{L}$ asociado con el sistema Boussinesq (2).

En el Capítulo 3 probamos un resultado de buen planteamiento local para el problema de Cauchy asociado con el sistema (2) en el espacio de Sobolev periódico $H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$, con $s \geq 0$. Para tal fin usamos estimativos lineales y no lineales, y algunos resultados auxiliares.

En el Capítulo 4 estudiamos el problema de controlabilidad interna asociado al modelo

Boussinesq (2). Para datos iniciales y finales $(\eta_0, \Phi_0)$, $(\eta_T, \Phi_T)$ suficientemente pequeños probamos que existen controles $f_1$ y $f_2$ tales que el problema de Cauchy asociado con el sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x\big(\eta\partial_x\Phi\big) & = f_1, \\ \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}\left(\partial_x\Phi\right)^2 & = f_2, \end{array}\right. \tag{6.1}$$

con la condición inicial

$$\eta(x,0) = \eta_0(x), \quad \Phi(x,0) = \Phi_0(x) \tag{6.2}$$

tiene una solución $(\eta(x,t), \Phi(x,t))$ que satisface

$$\eta(x,T) = \eta_T(x), \quad \Phi(x,T) = \Phi_T(x).$$

Finalmente en el Capítulo 5 establecemos la estabilidad orbital de un tipo especial de soluciones de onda solitaria para el sistema Boussinesq (2) denominadas "ground state solitary wave solutions". Para tal propósito utilizamos métodos variacionales combinados con resultados de compacidad. Adicionalmente mostramos que una familia renormalizada de soluciones de onda solitaria del sistema (2) converge a una onda solitaria de un modelo tipo KdV.

## 6.2. Trabajos futuros

A partir del trabajo desarrollado en esta tesis de doctorado, surgen de manera natural algunos problemas que aboraderemos en el futuro.

### 6.2.1. Controlabilidad global

Intentaremos extender el resultado de controlabilidad local (ver Toerema 4.3.1) para el sistema Boussinesq (2) a un resultado de controlabilidad global. Más exactamente, queremos probar un resultado como el siguiente.

**Teorema 6.2.1.** *Sean $s \geq 0$ y $R > 0$. Entonces existe un tiempo $T > 0$ tal que si*

$$\|(\eta_0, \Phi_0)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} \leq R, \quad \|(\eta_T, \Phi_T)\|_{H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})} \leq R,$$

*existe una función de control $F = (f_1, f_2) \in L^1(0,T; H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T}))$ tal que el problema (6.1)-(6.2) tiene una solución $(\eta, \Phi) \in C\left([0,T] : H^s(\mathbb{T}) \times \mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})\right)$ tal que*

$$\eta(x,T) = \eta_T(x), \quad \Phi(x,T) = \Phi_T(x).$$

### 6.2.2. Controlabilidad en un dominio acotado

Pretendemos estudiar el problema de control asociado con el sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x(\eta\partial_x\Phi) = 0, & (x,t)\in(0,L)\times(0,T), \quad L>0, \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2 = 0, & (x,t)\in(0,L)\times(0,T), \quad L>0, \\ \eta(0,t)=0, \quad \eta(L,t)=f_1(t), & t\in(0,T), \\ \Phi(0,t)=0, \quad \Phi(L,t)=f_2(t), & t\in(0,T), \end{cases} \tag{6.3}$$

Es decir, dados $T>0$ y estados inicial $(\eta_0,\Phi_0)$ y final $(\eta_T,\Phi_T)$ en un espacio de funciones adecuado, queremos probar que existen controles $f_1$ y $f_2$ tales que el sistema (6.3) tiene una solución $(\eta(x,t),\Phi(x,t))$ que satisface

$$\eta(x,0)=\eta_0, \quad \Phi(x,0)=\Phi_0, \quad \eta(x,T)=\eta_T(x), \quad \Phi(x,T)=\Phi_T(x).$$

### 6.2.3. El problema de Cauchy periódico en espacios de índice negativo

Queremos probar que el problema de Cauchy periódico

$$\begin{cases} \eta_t + \partial_x^2\Phi - \partial_x^4\Phi + \partial_x(\eta\partial_x\Phi) = 0, & x\in\mathbb{T}, \quad t\in\mathbb{R} \\ \Phi_t + \eta - \partial_x^2\eta + \frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2 = 0, & x\in\mathbb{T}, \quad t\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{6.4}$$

con la condición inicial

$$\eta(x,0)=\eta_0(x), \quad \Phi(x,0)=\Phi_0(x) \tag{6.5}$$

es localmente bien planteado, para $-1/2\le s<0$, en el espacio de tipo Sobolev periódico $H^s(\mathbb{T})\times\mathcal{V}^{s+1}(\mathbb{T})$. Usando argumentos similares al caso $s\ge 0$ y algunas desigualdades auxiliares cuando $s=-1/2$, debemos establecer los estimativos bilineales de la Sección 3.2 con índice $-1/2\le s<0$ y demostrar el Teorema 3.3.1 cuando $-1/2\le s<0$. En este problema hemos avanzado en un alto porcentaje.

# Bibliografía


[1] D. Bekiranov, T. Ogawa, G. Ponce, Interaction equations for short and long dispersive waves, *J. Funct. Anal.* 158 (1998), 357-388.

[2] T. Benjamin, J. Bona, J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 272 (1972), 47-78.

[3] J. Bona, M. Chen, J. Saut, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media II: Nonlinear theory, *Nonlinearity.* 17 (2004), 925-952.

[4] J. Bona, N. Tzvetkov, Sharp well-posedness results for the BBM equations, *Discret. Contin. Dyn. Syst.* 23 (2009), 1241-1252.

[5] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I, *Geometric and Functional Anal.* 3 (1993), 107-156.

[6] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations II, *Geometric and Functional Anal.* 3 (1993), 209-262.

[7] M. Burak, N. Tzirakis, Dispersive Partial Differential Equations: Wellposedness and Applications, *London Mathematical Society Student Texts.* 86 (2016).

[8] E. Cerpa, I. Rivas, On the controllability of the Boussinesq equation in low regularity, *Journal of Evolution Equations.* 18 (2018), 1501-1519.

[9] M. Davilla, G. Perla Menzala, Unique continuation for the Benjamin-Bona-Mahony and Boussinesq's equations, *Nonlinear differ. equ. appl.* 5 (1998), 367-382.

[10] E. de Araujo, The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$, with $s > -3/4$, Mestrado em Matemática (2004), Universidade Estadual de Campinas-Brasil.

[11] A. de Bouard, J. Saut, Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations, *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320(3) (1995), 315-318.

[12] A. de Bouard, J. Saut, Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.* 14(2) (1997), 211-236.

[13] A. de Bouard, J. Saut, Remarks on the stability of generalized KP solitary waves, *Comtemp. Math.* 200 (1996), 75-84.

[14] A. Esfahani, S. Levandosky, Solitary waves of a coupled KdV system with a weak rotation. *J. Differential Equations.* 265 (2018), 4835-4872.

[15] A. Esfahani, L. Farah, Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation, *J. Math. Anal. Appl.* 385 (2012), 230-242.

[16] L. Farah, Local solutions in Sobolev spaces with negative indices for the good Boussinesq equation, *Communications in PDE.* 34 (2009), 52-73.

[17] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, G. Velo, On the Cauchy problem for the Zakharov system, *J. Funct. Anal.* 151 (1997), 384-436.

[18] J. Ginibre, Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain), *Séminaire Bourbaki.* 237 (1996), 163-187.

[19] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, Stability Theory of Solitary Waves in Presence of Symmetry, I, *Functional Anal.* 74 (1987), 160-197.

[20] S. Hansen, Bounds on functions biorthogonal to sets of complex exponentials; control of damped elastic systems, *Math. Anal. Appl.* 158 (1991), 487-508.

[21] A. Ingham, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Z.* 41 (1936), 367-379.

[22] T. Kato, On the Korteweg-De Vries equation, *Manuscripta Mathematica.* 28 (1979), 89-99.

[23] T. Kato, Quasilinear equations of evolution, with applications to partial differential equations, *Proceedings of the symposium at Dundee, Lecture Notes in Mathematics.* 448 (1975), 25-70.

[24] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-De Vries equation, *Studies in Applied Mathematics, Advances in mathematics, Supplementary Studies.* 8 (1983), 92-128.

[25] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices, *Duke Math. J.* 71 (1993), 1-21.

[26] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, A bilinear estimate with applications to the KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), 573-603.

[27] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 348 (1996), 3323-3353.

[28] S. Levandosky, Y. Liu, Stability of Solitary Waves of a Generalized Ostrovsky Equation, *SIAM J. Math. Analysis.* 38 (2006), 985-1011.

[29] F. Linares, $L^2$ global well-posedness of the initial value problem associated to the Benjamin equation, *J. Diff. Eq.* 152 (1999), 377-393.

[30] P. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.* 1 (1984), 109-145.

[31] P. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.* 1 (1984), 223-283.

[32] A. Montes, R. Córdoba, Local well-posedness for a class of 1D Boussinesq system, *Mathematical Control and Related Fields.* 12(2) (2022), 447-473.

[33] A. Montes, R. Córdoba, Local well-posedness in Sobolev spaces with negative indices for a class of 1D-Boussinesq systems. Preprint.

[34] A. Montes, R. Córdoba, A unique continuation result for a system of nonlinear differential equations. Submitted to Mathematical Modelling and Analysis.

[35] A. Montes, R. Córdoba, Well-posedness and internal controllability of a Boussinesq type system for surface waves. Submitted to Communications on Pure and Applied Analysis.

[36] A. Montes, J. Quintero, Periodic solutions for a class of one-Dimensional Boussinesq systems, *Dynamics of PDE.* 13 (2016), 241-261.

[37] R. Pego, J. Quintero, Two-dimensional solitary waves for a Benney-Luke equation, *Physica D.* 132 (1999), 476-496.

[38] J. Quintero, Nonlinear stability of solitary waves for a 2-D Benney-Luke equation, *Discrete Contin. Dynam. Systems.* 13 (2005), 203-218.

[39] J. Quintero, Solitary water waves for a 2D Boussinesq type system, *J. Part. Diff. Eq.* 23 (2010), 251-280.

[40] J. Quintero, A. Montes, On the Cauchy and solitons for a class of 1D Boussinesq systems, *Diff. Eq. Dyn. Syst.* 24 (2016), 367-389.

[41] J. Quintero, A. Montes, R. Córdoba, On the stability of a Boussinesq system. Submited to Journal of Applied Analysis and Computation.

[42] J. Quintero, R. Pego, Two-dimensional solitary waves for a Benney-Luke equation, *Physica D.* 45 (1999), 476-496.

[43] D. Russel, B. Zhang, Exact Controllability and Stabilizability of the Korteweg-de Vries equation, *Transactions of the American Mathematical Society.* 348 (1996), 3643-3672.

[44] J. Saut, B. Scheurer, Unique continuation for some evolution equations, *J. Diff. Equations.* 66 (1987), 118-139.

[45] Y. Shang, Unique continuation for the symmetric regularized long wave equation, *Mathematical Methods in Applied Sciences.* 30 (2007), 375-388.

[46] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, *Comm. Math. Phys. A.* 91 (1983), 313-327.

[47] H. Wang, A. Esfahani, Well-posedness for the Cauchy problem associated to a periodic Boussinesq equation, *Nonlinear Anal.* 89 (2013), 267-275.

[48] B. Zhang, Exact controllability of the generalized Boussinesq equation, *International Series of Numerical Mathematics.* 126 (1998), 297-310.