ESTIMATIVOS DE LA L_p NORMA PARA LAS DERIVADAS E INTEGRALES FRACCIONARIAS DEL NÚCLEO DE POISSON Y ALGUNAS APLICACIONES A CIERTOS ESPACIOS FUNCIONALES CON ORDEN NO ENTERO DE DIFERENCIACIÓN

ANA MARÍA VIDAL ORTEGA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
POPAYÁN

2022

ESTIMATIVOS DE LA L_p NORMA PARA LAS DERIVADAS E INTEGRALES FRACCIONARIAS DEL NÚCLEO DE POISSON Y ALGUNAS APLICACIONES A CIERTOS ESPACIOS FUNCIONALES CON ORDEN NO ENTERO DE DIFERENCIACIÓN.

ANA MARÍA VIDAL ORTEGA

Trabajo de Grado en modalidad de profundización presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas otorgado por la Universidad del Cauca.

DR. FRANCISCO ENRÍQUEZ
DIRECTOR

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2022

NOTA DE ACEPTACIÓN

Dr. Francisco Eduardo Enríquez.
Director.

Johana Jimenez.

Dra. Jeidy Johana Jiménez.
Jurado.

Dr. Jhon Jairo Pérez .
Jurado.

Fecha de socialización: 6 de diciembre del 2022

Índice general

Introducción

El cálculo fraccionario es una disciplina del análisis matemático que estudia las características y aplicaciones de las derivadas e integrales de orden arbitrario real o complejo, cuenta con una amplia historia y continuo desarrollo debido a sus interconexiones con distintas ciencias y con otras ramas de la matemática, tales como la teoría de funciones, ecuaciones diferenciales e integrales, física matemática, por citar algunas. No pocas teorías surgen de la necesidad de dar solución a problemas prácticos; el cálculo fraccionario no es la excepción. Así, el concepto de integrodiferenciación fraccionaria (IDF) permite describir de manera adecuada la solución a diferentes problemas en geometría, física y mecánica; algunos de ellos se encuentran en los trabajos de Joseph Liouville, más detalles podemos encontrar en [13]. Siendo considerablemente extensa e interesante la teoría del cálculo fraccionario, vale la pena no solamente conocer sus orígenes sino también algunas de sus aplicaciones contemporaneas, que podemos ver por ejemplo en [9].

Según [13], generalmente los conceptos de diferenciación e integración fraccionaria están asociados al matemático francés Joseph Liouville; sin embargo, los creadores del cálculo diferencial e integral ya habían considerado derivadas de orden no entero; así lo muestran registros históricos en una de las cartas que Leibniz dirigió a L'Hopital en 1695 donde se cuestiona sobre la posibilidad de considerar derivadas de orden 1/2. En esta carta propone lo que podría ser una derivada de orden fraccionario, proponiendo como ejemplo la derivada de orden 1/2 de $f(x) = x$. El argumento de Leibniz es el siguiente:
"Sea dada la ordenada x en progresión geométrica de modo que si se tiene una constante $d\beta$ sea $dx = xd\beta : a$, o (sustituyendo a por la unidad) $dx = xd\beta$, ahora dx será $x \cdot \overline{d\beta^2}$ y d^3x será $x \cdot \overline{d\beta^3}$, etcétera y $d^ex = \overline{d\beta^e}$. Y de esta forma el exponente diferencial es cambiado por exponente potencia, reemplazando $dx : x$ por $d\beta$ se tendrá $d^ex = \overline{dx : x^e} \cdot x$. Así, se tiene que $d^{1:2}x$ será igual a $x \cdot \sqrt{dx : x}$ ". (Leibniz, 1859). En notación actual esto es $\dfrac{d^ex}{dx^e} = x^{1-e}$, y para $e = 1/2$, $\dfrac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = x^{1/2}$.

En 1738 Leonhard Euler dio el primer paso observando que la evaluación de la derivada de orden n de la función x^α tiene sentido para n no entero, lo cual obtuvo aplicando su fórmula de interpolación del factorial entre números enteros positivos, llegando a

$$d^n(z^e) = z^{e-n}dz^n \frac{\int dx(-1x)^e}{\int dx(-1x)^{e-n}},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

donde $x = 0$ es el límite inferior y $x = 1$ el límite superior de integración.
Es posible comparar la definición (1) con definiciones más recientes que no son tan complicadas, así lo podemos observar en [5]; además, podemos hacer notar la diferencia con la definición de Leibniz. Así, la definición de la derivada fraccionaria de dicha función para n no entero dada por Euler, puede ser expresada por:

$$\frac{d^\alpha z^\beta}{dz^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int \frac{u^\beta}{(z-u)^{\alpha+1}} du,$$

donde la existencia de la derivada depende de la convergencia de la integral.

En el tratado de cálculo diferencial e integral del matemático fránces Sylvestre Lacroix se incluye la definición de Euler para la derivada de orden fraccionario de una función potencial.
En 1822 Fourier presenta en su libro *Teoría Analítica del Calor* la primera definición para la derivada e integral de orden arbitrario para cualquier función lo suficientemente "buena".

Una de las primeras aplicaciones a la física fue dada por el matemático noruego, Niels H. Abel quien encontró la ecuación integral que resuelve el problema de la tautócrona. Dicha ecuación tiene la forma:

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\mu} dt,\ x > a,\ 0 < \mu < 1. \tag{2}$$

Aunque el problema de la tautócrona lleva al caso $\mu = 1/2$, la solución fue dada para $\mu \in (0,1)$ arbitrario. El resultado de Abel se considera de gran importancia en el desarrollo del cálculo fraccionario y la ecuación (2) se acerca a lo que hoy se conoce como la definición de la derivada fraccionaria izquierda.

Entre 1832 y 1837 se mostraron una serie de artículos de Joseph Liouville que lo convirtieron en el creador de la teoría de integro-diferenciación fraccionaria; siendo a su vez uno de los primeros en mostrar aplicaciones para la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, más detalles podemos encontrar en [13]. Aunque en sus escritos hace referencia a los trabajos de Euler, Laplace, Fourier, Lacroix y la cuarta carta que

Leibniz envía a Wallis, su desarrollo de la teoría del cálculo fraccionario se basa principalmente en los trabajos de Laplace y Fourier.

La primera definición de derivada fraccionaria de Liouville dada en [13], se basó en la fórmula de derivación de una función exponencial; bajo este hecho y el supuesto de que una función f se puede desarrollar en una serie de exponenciales, establece una fórmula general para la derivada. Primero desarrolló f en serie de exponenciales y luego la deriva término a término obteniendo:

$$D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p e^{a_k x}, \tag{3}$$

para cualquier complejo p. A partir de la ecuación (3), Liouville obtuvo la fórmula de derivación para una función potencial.
Además propuso la definición:

$$D^{-p} f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^{\infty} \varphi(x+t) t^{p-1} dt, \ -\infty < x < \infty, \ \mathrm{Re}\ p > 0,$$

llamada actualmente, salvo por el factor $(-1)^p$, forma de Liouville de diferenciación fraccionaria.

La actividad matemática llevó a la proliferación de trabajos científicos acerca de la IDF, los cuales se dan a conocer en los diferentes eventos internacionales dedicados a esta disciplina. No es de extrañarse que dicho desarrollo se debiera a los numerosos enfoques de la IDF, que en general no son equivalentes.

El objetivo general de este trabajo es caracterizar ciertos espacios con orden no entero de diferenciación, apoyándonos en los estimativos de la derivada fraccionaria del núcleo de Poisson, que para ciertos órdenes de suavidad se pueden encontrar por ejemplo en [7], [8] y [9]. Se presentan dos definiciones de derivada fraccionaria, una según el matemático francés Joseph Liouville y la otra se debe al matemático y físico italiano Michele Caputo, la cual permite dar interpretación física a ciertos problemas con condiciones iniciales, y usa las derivadas de orden entero. Para funciones con características especiales como el núcleo de Poisson, las dos definiciones coinciden, así, usaremos ambas dependiendo el caso. Dichas definiciones serán presentadas en el Capítulo I con mayor detalle. En este mismo capítulo se abordan aspectos básicos de los espacios de Lebesgue, como también las propiedades elementales del núcleo y la integral de Poisson.
El capítulo II está dedicado a los estimativos puntuales y globales para el núcleo de

Poisson y sus integrales y derivadas fraccionarias. Finalmente, el capítulo III contiene las aplicaciones, es decir la descripción de ciertos espacios de orden no entero de diferenciación utilizando los estimativos del capítulo anterior.

Tabla de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{N}_0$	Conjunto de los números enteros no negativos.
$\mathbb{R}$	Campo de los números reales.
$\mathbb{R}_+ \equiv (0, \infty)$	Números reales positivos.
$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$	Espacio euclídeo n-dimensional.
$\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$	Espacio euclídeo $(n+1)$-dimensional con segunda componente positiva.
$C^l(\Omega)$	Conjunto de funciones infinitamente continuamente diferenciables sobre Ω.
$\mu(E)$	Medida de Lebesgue del conjunto E.
$L(E) \equiv L_1(E)$	Espacio de Banach de funciones Lebesgue integrables.
$L_p(E),\ 0 < p \leq \infty$	Espacio L_p.
$\dot{\forall}$	Para casi todo.
$\dot{\sim}$	Equivalencia en el sentido de la medida.
$\sim$	Equivalencia asintótica.
$\uparrow$	Función creciente.
$\downarrow$	Función decreciente.
$\ll$	$A \ll B$ expresa que existe una constante $c > 0$ tal que $A \leq cB$, donde c no depende ni de A ni de B.
C_k^l	Combinatorio.
$I^\beta,\ \beta > 0$	Integral fraccionaria según Liouville.
$D^\beta,\ \beta > 0$	Derivada fraccionaria según Liouville.
${}^cD^\beta,\ \beta > 0$	Derivada fraccionaria según Caputo.
$P_y(x)$	Núcleo de Poisson.
$u(x, y)$	Integral de Poisson.
$B_{p,q}^\alpha$	Espacio de Nikolsky-Bésov.
$\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$	Espacio de Lipschitz.
$\square$	Culminación de una demostración.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos fundamentales de las teorías de los espacios L_p y la integrodiferenciación fraccionaria según Liouville y Caputo, el núcleo y la integral de Poisson junto con sus propiedades más importantes.

1.1. Espacios $L_p(E)$

En la teoría de espacios funcionales se encuentra una clase de espacios normados muy importantes conocidos como espacios L_p o espacios de Lebesgue. En adelante cuando se haga referencia a los conceptos de medida e integral, éstos se entenderán en el sentido de Lebesgue y se representará la medida mediante μ.

Definición 1.1. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Decimos que f es medible en E si:*

1. *E es medible y*

2. *Para todo $a \in \mathbb{R}$ es medible el conjunto $E_a := \{x \in E : f(x) > a\}$.*

Observación 1.1.

Como es conocido, salvo clases de equivalencia los espacios L_p serán cuasiBanach para $0 < p < 1$ y de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; en adelante no haremos más esta distinción.

Definición 1.2. *Sean $\mathbb{R}^n \supseteq E-$ medible, $f : E \to \mathbb{R}$ y $0 < p \leq \infty$. Decimos que $f \in L_p(E)$, si f es medible en E y es finita la expresión*

$$\|f\|_{L_p(E)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty \\ \sup\limits_{x \in E} \text{vrai} \, |f(x)|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

En tanto no haya lugar a ambigüedad usaremos la notación $\|.\|_{L_p}$ o $\|.\|_p$.

Observación 1.2.

1. *Todos los subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *y las funciones que consideraremos serán medibles.*
2. *Se llama supremo esencial de* f *en* $E \subset \mathbb{R}^n$ *y se denota* $\operatorname{ess\,sup}$ *o* $\sup \text{vrai}$ *a la expresión* $\inf\limits_{e \subset E} \sup\limits_{\substack{x \in E/e \\ \mu(e)=0}} f(x)$.
3. *El concepto de supremo esencial difiere del concepto de supremo habitual, salvo para funciones continuas definidas sobre conjuntos abiertos en* $\mathbb{R}^n$.

En adelante nos encontraremos situaciones que involucran integrales múltiples en $\mathbb{R}^n$ las cuales se pueden evaluar usando integrales iteradas; esto es posible gracias a los siguientes teoremas, cuyas demostraciones se pueden consultar en [15].

Teorema 1.1. *(**Teorema de Fubini**). Sean* $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$, *y* $f \in L(E \times F)$. *Entonces,*

1. $f(x,\cdot) \in L(F)$, $\dot{\forall}\, x \in E$, *y* $\int_F f(\cdot,y)dy \in L(E)$ *como función de* x,
2. $f(\cdot,y) \in L(E)$, $\dot{\forall}\, y \in F$, *y* $\int_E f(x,\cdot)dx \in L(F)$ *como función de* y.

Además tienen lugar las igualdades:

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \left(\int_F f(x,y)dy \right) dx = \int_F \left(\int_E f(x,y)dx \right) dy. \qquad (1.2)$$

Teorema 1.2. *(**Teorema de Tonelli**). Si al menos una de las integrales*

$$\int_E \Big(\int_F |f(x,y)|dy \Big) dx, \;\; \int_F \Big(\int_E |f(x,y)|dx \Big) dy,$$

es finita, entonces existen las tres integrales del teorema de Fubini y es válida (1.2).

1.2. Desigualdades de Hölder, de Minkowsky y de Young en L_p

En esta sección presentaremos las desigualdades más destacadas de la teoría de espacios L_p las cuales son esenciales para el desarrollo de este trabajo. Estas son las desigualdades de Hölder, Minkowsky, Hardy y de Young para convoluciones; esta última se usará especialmente en las demostracciones del Capítulo II. Más detalles podemos encontrar en [4] y [12].

Teorema 1.3. *(**Desigualdad de Hölder**). Sean $f \in L_p(E)$, $g \in L_{p'}(E)$; $1 \leq p \leq \infty$, con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, entonces $fg \in L_1(E)$ y es válida la desigualdad:*

$$\left| \int_E fg \; dx \right| \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}. \tag{1.3}$$

Demostración. Ver [12]. □

Observación 1.3. *Los números p y p' se llaman conjugados; si $p = 1$ entonces $p' = \infty$ y viceversa. Además si $p \neq 1$ tenemos que $p' = \frac{p}{p-1}$.*

De (1.3) tenemos el siguiente resultado:

Consecuencia 1.1. *Sea $0 < p \leq q \leq \infty$, $\mu(E) < \infty$. Entonces $L_q(E) \subset L_p(E)$ y*

$$\|f\|_p \leq [\mu(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Teorema 1.4. *(**Desigualdad de Minkowsky**) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$.*
Si $f, g \in L_p(E)$ entonces $f + g \in L_p(E)$ y además:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.4}$$

Demostración. Ver [12]. □

Notemos que el teorema anterior no es válido para $0 < p < 1$.
Para el caso $0 < p < 1$ tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.5. *Sea $0 < p < 1$, $f, g \in L_p(E)$. Entonces:*

$$\|f + g\|_p \leq \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &\le \int_E \big(|f|+|g|\big)^p d\mu \le \int_E \big(|f|^p+|g|^p\big)\\ &= \int_E |f|^p d\mu + \int_E |g|^p d\mu = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p.\end{aligned}$$

Elevando a la $1/p$ se tiene lo deseado. □

Teorema 1.6. ***(Desigualdad generalizada de Minkowsky para integrales)*** *Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$, $1 \le p \le \infty$. Si f es medible sobre $E \times F$, entonces:*

$$\left\| \int_F f(\cdot, y) dy \right\|_{L_p(E)} \le \int_F \|f(\cdot, y)\|_{L_p(E)} dy. \tag{1.5}$$

Demostración. Ver [12]. □

A continuación presentamos los operadores y desigualdades de Hardy, los cuales serán de ayuda para demostrar las caracteriazaciones presentadas para ciertos espacios funcionales con orden no entero de direfenciación.

Definición 1.3. *Sea $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Se llaman operadores de Hardy a:*

$$\big(H_1 f\big)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy;$$

$$\big(H_2 f\big)(x) := \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy.$$

Teorema 1.7. *Sea $1 \le p \le \infty$.*

1. *Si $\alpha < \frac{1}{p'}$, entonces*

$$\|x^\alpha H_1 f(x)\|_p \le \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_p. \tag{1.6}$$

2. *Si $\alpha > \frac{1}{p'}$, entonces*

$$\|x^\alpha H_2 f(x)\|_p \le \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_p. \tag{1.7}$$

Observación 1.4.

1. *Para* $p \in (0,1)$ *las desigualdades* (1.6) *y* (1.7) *se infringen.*

2. *Si* $\alpha = \frac{1}{p'}$, *las desigualdades* (1.6) *y* (1.7) *no son válidas.*

3. *Las constantes* $c_1 = \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}$ *y* $c_2 = \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1}$ *son exactas.*

4. *Con* $p = 1$, *las desigualdades* (1.6) *y* (1.7) *toman una forma muy simple, precisamente:*

$$\left\|x^{\alpha} H_1 f(x)\right\|_1 \leq \frac{-1}{\alpha}\left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_1, \text{ y}$$

$$\left\|x^{\alpha} H_2 f(x)\right\|_1 \leq \frac{1}{\alpha}\left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_1.$$

Comprobemos lo dicho en las observaciones 1. y 2.:

1. *Para* (1.6) *con* $p \in (0,1)$, *consideremos la función*

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|^{1/q}}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\left\|x^{\alpha} f_1(x)\right\|_p^p = \int_{1/2}^{2} x^{\alpha p}|x-1|^{-p/q} dx,$$

converge siempre que $q \in (p,1)$ *puesto que* $\frac{p}{q} < 1$. *De esta forma tenemos que la parte derecha de la desigualdad (1.6) es finita. Por otra parte, para* $x \leq 2$ *tenemos que:*

$$\left(H_1 f_1\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_1(y)dy = \frac{1}{x}\int_{1/2}^{2} \frac{dy}{|y-1|^{1/q}},$$

diverge para $q < 1$. *Luego, la parte izquierda de (1.6) es infinita. Así, (1.6) no es válida para* $0 < p < 1$.

2. *Para* $\alpha = 1/p'$ *consideremos la función:*

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Entonces,

$$\left\|x^\alpha f_2\right\|_p^p = \int_0^\infty x^{\alpha p}\|f_2(x)\|^p dx = \int_0^1 x^{p(\alpha-1)}dx,$$

esta integral converge si $p(\alpha-1) > -1$, *esto es,* $\alpha > 1/p'$. *Ahora, para la parte izquierda de* (1.6)

$$H_1 f_2(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_2(y)dy = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{dy}{y}, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dy}{y}, & x \geq 1, \end{cases}$$

diverge. Así, $\left\|x^\alpha H_1 f_2(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} = \infty$ *y (1.6) no se verifica.*

De forma similar se puede verificar que (1.7) no se cumple.
Para la siguiente desigualdad integral usaremos los siguientes conceptos.

Definición 1.4. *Sea* $0 < p \leq \infty$, $\mathbb{R}^n \supset E$ *medible. Decimos que* $f \in L_p^{loc}(E)$, *si para todo compacto* $K \subset E$, $f \in L_p(K)$.

Es fácil establecer que $L_p(E) \subset L_p^{loc}(E)$, ya que si $f \in L_p(E)$, entonces $\int_K |f|^p dx \leq \int_E |f|^p dx$, es decir $\|f\|_{L_p(K)} < \infty$, para todo $K \subset E$, $K-$compacto.

Definición 1.5. *Llamamos convolución de las funciones* $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, *a la función:*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

siempre que la integral exista.

Observación 1.5.

1. *La convolución existe pero no para todo par de funciones de* $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$; *por ejemplo, si* $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) \setminus L_1(\mathbb{R}^n)$, *entonces no existe* $1 * g$ *para ningún* $x \in \mathbb{R}^n$.
2. *La convolución posee las propiedades conmutativa y asociativa:*
    3. $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.
    4. $[(f * g) * h](x) = [f * (g * h)](x)$.

Teorema 1.8. ***(Desigualdad de Young para convoluciones)****. Sea* $1 \leq p, r \leq q \leq \infty$, $f \in L_r(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *y* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q}$. *Entonces* $\dot{\forall}\, x \in \mathbb{R}^n$ *existe* $(f*g)(x)$, $f*g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\left\|f * g\right\|_q \leq \left\|f\right\|_r \left\|g\right\|_p. \tag{1.8}$$

Demostración. Ver [10] $\square$

Observación 1.6.

1. *Si $p = 1$, entonces $p' = \infty$ y $r = q$ y en consecuencia,* $\|f * g\|_q \leq \|f\|_q \|g\|_1$.

2. *Si $p = q$, entonces $r = 1$ y en consecuencia,* $\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$.

En el análisis armónico juega un papel muy importante la transformación de Fourier. Los siguientes resultados fundamentales pueden encontrarse por ejemplo en [11],[8],[10] y serán utilizados en el Capítulo II.

Definición 1.6. *Sea $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. La transformación de Fourier de f, denotada por $\mathcal{F}f$ o $\widehat{f}(\xi)$, es una función definida en $\mathbb{R}^n$ mediante la fórmula:*

$$\big(\mathcal{F}f\big)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x\cdot\xi)} f(x)dx,$$

donde $x \cdot \xi := \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Su transformación inversa la denotaremos mediante $\big(\mathcal{F}^{-1}f\big)(\xi)$, y se expresa por:

$$\big(\mathcal{F}^{-1}f\big)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x\cdot\xi)} f(x)dx.$$

La transformación de Fourier se define para toda función $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que:

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}(f)\big](\xi) = \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}(f)\big](\xi) = f.$$

Teorema 1.9. ***(Teorema de la convolución)***. *Si $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\big(\widehat{f * g}\big)(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \tag{1.9}$$

Teorema 1.10. ***(Transformación de la derivada)***. *Sea f tal que $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Entonces,*

$$\mathcal{F}\bigg(\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(\xi)\bigg) = (i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Usaremos también como herramienta las integrales dependientes de párametro, y algunas de sus propiedades fundamentales que se resumen en los siguientes teoremas, cuyas demostraciones podemos encontrar por ejemplo en [12].

Definición 1.7. *Sean $Y \subset \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y la función $f(x,y)$ definida en $\Omega \times Y$. Si la integral*

$$\phi(y) := \int_\Omega f(x,y)dx,$$

es finita, se llama integral dependiente del parámetro y.

Teorema 1.11. ***(Derivación bajo el signo de la integral)****. Sean $Y \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $f : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ satisface:*

1. *$f(\cdot, y) \in L_1(\Omega)$ para todo $y \in Y$.*

2. *Para casi todo $x \in \Omega$, $f(\cdot, y) \in C^1(Y)$.*

3. *Existe $g \in L_1(\Omega)$ tal que $\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| \leq g(x)$, para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $y \in Y$.*

Entonces,

$$\frac{d}{dy}\int_\Omega f(x,y)dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx.$$

Un caso especial de integral dependiente de parámetro es la convolución. Para enunciar el siguiente resultado introducimos la notación: $x = (x_1, \cdots, x_n)$ vector en $\mathbb{R}^n$; sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multiíndice, $\alpha_k \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ su longitud. Para las derivadas simbolizamos:

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \textit{ Entonces } D^\alpha := \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^\alpha, \cdots, \partial x_n^\alpha}\right).$$

Teorema 1.12. ***(Derivada de la convolución)*** *Si α es cualquier multiíndice, g continua con sorporte compacto, y una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$D^\alpha(f * g)(x) = [(D^\alpha f) * g](x).$$

La fórmula anterior es válida para hipótesis más débiles. Señalemos además que la integral dependiente de parámetro posee propiedades de continuidad e integrabilidad, bajo las respectivas hipótesis. En detalle ellas pueden verse por ejemplo en [12].

1.3. Núcleo e integral de Poisson

Dado que el núcleo de Poisson ocupa un papel central en el desarrollo de este trabajo, presentaremos a manera de motivación la importancia que éste tiene en el análisis armónico.

Consideremos la integral de Poisson de una función f definida en $\mathbb{R}^n$. La integral de Poisson es la solución al problema de Dirichlet para $\mathbb{R}^{n+1}_+$, esto es: hallar una función armónica $u(x,y)$ en $\mathbb{R}^{n+1}_+$, cuyos valores de frontera en $\mathbb{R}^n$ (en el sentido apropiado) son $f(x)$ es decir,

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{1.10}$$

donde $\triangle u$ representa el operador laplaciano de la integral de Poisson. La solución formal de este problema podemos hallarla en el contexto de los espacios L_2, los cuales como es sabido son los únicos espacios L_p que son espacios de Hilbert.

Sean $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f}$ su transformación de Fourier. Consideremos

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) e^{-2\pi i(x\cdot t)} e^{-2\pi|t|y} dt, \ y > 0, \tag{1.11}$$

donde $|t| := \sqrt{t_1^2, \ldots, t_n^2}$.
La integral (1.11) converge absolutamente y tiene derivadas de cualquier orden que se calculan derivando bajo el signo de integración (ver Teorema 1.12). Así, un cálculo directo muestra que:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,$$

donde Δ simboliza el operador de Laplace, además el factor $e^{-2\pi i(x\cdot t)} e^{-2\pi|t|y}$ satisface la ecuación de Laplace para cada t fijo.
También por el Teorema de Plancherel, el cual se encuentra detallado en [10], $u(x,y) \to f(x)$ en $L_2(\mathbb{R}^n)$ cuando $y \to 0^+$. Así tenemos que para $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $u(x,y)$ es solución al problema (1.10).
Dicha solución también la podemos escribir usando el núcleo de Poisson $P_y(x)$:

$$P_y(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot t)} e^{-2\pi|t|y} dt, \ y > 0. \tag{1.12}$$

Es decir, la función $u(x,y)$ obtenida anteriormente la podemos escribir usando el Teorema de la convolución:

$$\big(P_y * f\big)(x) = u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t) f(x-t) dt.$$

En adelante u denotará la integral de Poisson.
Podemos escribir el núcleo de Poisson de manera explícita, como se muestra en [14]:
Sea $y > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Entonces

$$P_y(x) = \frac{C_n y}{\Big(|x|^2 + y^2\Big)^{\frac{n+1}{2}}}, \tag{1.13}$$

donde $C_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ y Γ representa la función Gamma[1].

En adelante por comodidad escribiremos la igualdad (1.13) como sigue:

$$P_y(x) = C_N y\Big(|x|^2 + y^2\Big)^{-N}, \text{ donde } N = \frac{n+1}{2},\ C_N = C_n = \frac{\Gamma(N)}{\pi^N}. \tag{1.14}$$

También haremos uso de las coordenadas esféricas generalizadas que introducimos a continuación. Sean $\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$ coordenadas rectangulares n dimensionales y $\big(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\big)$ coordenadas esféricas generalizadas (o en $\mathbb{R}^n$), definidas mediante:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 \\ x_2 = \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \\ \vdots \\ x_i = \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_i \sin\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-1} = \rho \cos\varphi_{n-1} \sin\varphi_{n-1} \\ x_n = \rho \sin\varphi_{n-1}, \end{cases} \tag{1.15}$$

donde $0 < \rho < \infty$, $0 < \varphi_1 < 2\pi$, $-\pi/2 < \varphi_k < \pi/2$, $k = 2, \ldots, n-1$ y el Jacobiano es:

$$J = \rho^{n-1} \cos^{n-1}\varphi_{n-1} \cos^{n-2}\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_1 \overset{\text{not}}{=} \rho^{n-1}\tilde{J} \text{ y } |x| = \rho.$$

1.3.1. Propiedades del Núcleo y de la integral de Poisson.

A continuación se presentan las propiedades fundamentales del núcleo e integral de Poisson. Los detalles de las demostraciones se pueden encontrar en [14].

Teorema 1.13. *El núcleo de Poisson verifica:*

1. $P_y(x) > 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$.
2. $P_y(x) \downarrow$ *cuando* $|x| \uparrow$, *es decir el núcleo es decreciente respecto al módulo de* x.
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x)dx = 1$, *más generalmente* $\widehat{P}_y(x) = e^{-2\pi|x|y}$.
4. $P_y(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $p > \frac{n}{n+1}$.
5. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y} P_y(x)dx = 0.$

[1] Sea $p > 0$, $\Gamma(p) := \displaystyle\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt.$

6. $\Delta P_y(x) = 0$, *es decir,* $P_y(x)$ *es función armónica respecto a las variables* x, y.

7. *Propiedad de semigrupo:* $\dot{\forall}\ y_1,\ y_2 > 0$, $P_{y_1+y_2}(x) = (P_{y_1} * P_{y_2})(x)$.

8. $\frac{\partial^k}{\partial y^k}P_y(x) = P_{\frac{y}{2}}(x) * \frac{\partial^k}{\partial y^k}P_{\frac{y}{2}}(x)$. *En particular,* $\frac{\partial^{k+m}}{\partial y^{k+m}}P_y(x) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}P_{\frac{y}{2}}(x) * \frac{\partial^m}{\partial y^m}P_{\frac{y}{2}}(x)$, *donde* $k, m \in \mathbb{N}_0$.

A continuación se probarán algunas de las propiedades mencionadas:

Demostración.
1. Es evidente de la definición del núcleo.

2. Si consideramos a $|x| \uparrow$, es claro que $P_y(x) \downarrow$.

3. Como $P_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot t)}e^{-2\pi|t|y}dy$, entonces $P_y(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi|x|y})$, de ahí que

$$\widehat{P_y}(x) = e^{-2\pi|x|y}. \tag{1.16}$$

Haciendo $x = 0$, tenemos $\widehat{P_y}(0) = 1$, es decir $\int_{\mathbb{R}^n} P_y(t)dt = 1$.

4. Notemos que el caso $p = 1$ está contenido en 3. Ahora:

   a. Sea $\frac{n}{n+1} < p < \infty$. Calculando la norma respecto a la variable $x \in \mathbb{R}^n$, y usando coordenadas esféricas generalizadas, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\|P_y(x)\right\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[C_N y\big(|x|^2 + y^2\big)^{-N}\right]^p dx \\
&= (C_n y)^p \left(\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdots\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{J} d_{\varphi_1}\dots d_{\varphi_{n-1}}\right)\int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}}d\rho \\
&= A_n (C_n y)^p \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}}d\rho \\
&= A_n (C_n y)^p \left(\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}}d\rho + \int_1^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}}d\rho\right),
\end{aligned}$$

   donde $A_n = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdots\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{J} d_{\varphi_1}\dots d_{\varphi_{n-1}}$. Así,

$$\left\|P_y(x)\right\|_p^p = A_n (C_n y)^p \left(\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}}d\rho + \int_1^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}}d\rho\right). \tag{1.17}$$

Observemos que en el miembro derecho de la igualdad (1.17) la primera integral es convergente ya que el integrando es un función continua. Por ello sólo analizaremos la convergencia de la segunda integral:

Como

$$\frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}} \sim \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2Np}} = \frac{1}{\rho^{(n+1)p-n+1}}, \text{ si } \rho \to \infty,$$

entonces

$$\int_1^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2+y^2)^{Np}} d\rho < \infty, \text{ si y sólo si } p > \frac{n}{n+1}.$$

Por lo tanto, $P_y(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ para $p > \frac{n}{n+1}$.

b. Sea $p = \infty$.

$$\left\|P_y(x)\right\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^n} |P_y(x)| = \max_{\mathbb{R}^n} \left|C_N y\left(|x|^2+y^2\right)^{-N}\right| = C_n y^{-n}.$$

Por lo tanto, $P_y(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

7. Finalmente probemos la propiedad de semigrupo. Por 4. sabemos que $P_y(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, luego usando el Teorema de la convolución (cuyas hipótesis se verifican trivialmente) para $P_{y_1}(x)$ y $P_{y_2}(x)$ tenemos:

$$(\widehat{P_{y_1} * P_{y_2}})(x) = \widehat{P_{y_1}}(x)\widehat{P_{y_2}}(x) = e^{-2\pi|x|y_1}e^{-2\pi|x|y_2} = e^{-2\pi|x|(y_1+y_2)}. \tag{1.18}$$

Apliquemos la transformación inversa de Fourier en (1.18):

$$(P_{y_1} * P_{y_2})(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi|x|(y_1+y_2)}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot t)}e^{-2\pi|x|(y_1+y_2)}dx = (P_{y_1+y_2})(x).$$

Por lo tanto, $(P_{y_1+y_2})(x) = (P_{y_1} * P_{y_2})(x)$.

□

Las otras demostraciones pueden ser consultadas en [3], [7] y [14].

Teorema 1.14. ***(Propiedades de la Integral de Poisson).***

1. *u es armónica para $f \in L_2$.*

2. *$u(x,y)$ converge a f en la p norma, para $p = \infty$.*

Demostración.

1. En efecto, usando el Teorema de la diferenciación de la convolución $\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}(f*g) = \left(\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} f\right) * g$, propiedad válida para f y g lo suficientemente suaves, como lo indican los Teoremas 1.11 y 1.12, tenemos que $\Delta u(x,y) = \Delta(P_y * f) = 0*f = 0$.

2. La prueba la podemos ver en [14].

$\square$

1.4. Derivadas Fraccionarias según Caputo y Liouville.

A través de la historia se han formulado diferentes definiciones de las derivadas fraccionarias, ver [5] y [13]; en particular las derivadas e integrales fraccionarias según Liouville se definen inicialmente en el segmento, sin embargo es posible extenderlas al caso del eje y semieje.
Describimos las definiciones según Liouville y Caputo y estudiaremos las similitudes de las dos definiciones.

Sea $\beta \in \mathbb{R}$, $[\beta]$ denotará la parte entera de β, y $\{\beta\}$ su parte fraccionaria. Así, $\beta = [\beta] + \{\beta\}$ y $0 \leq \{\beta\} < 1$. Las siguientes definiciones las podemos encontrar en [13].

Definición 1.8. *Sean $\beta > 0$ y f una función definida en $\mathbb{R}$. Si la integral*

$$\left(I^\beta f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{\beta-1} f(t) dt,$$

existe, se llama integral fraccionaria según Liouville en el semieje, de orden β, de la función f.

Definición 1.9. *Sea $0 < \beta < 1$. Se llama derivada fraccionaria según Liouville en el semieje de orden β de la función f a*

$$(D^\beta f)(x) := \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty (t-x)^{-\beta} f(t)\, dt, \tag{1.19}$$

(si esta expresión tiene sentido). En el caso $\beta \in \mathbb{N}_0$ la derivada fraccionaria se define por

$$(D^\beta f)(x) = (-1)^\beta \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x).$$

En la derivada de orden $\beta \geq 1$ puesto que $\beta = [\beta] + \{\beta\}$, se deriva $[\beta]$ veces con la derivada habitual y para la parte fraccionaria como se muestra en (1.19).

Definición 1.10. *Sean f una función definida sobre $\mathbb{R}$, $\beta > 0$ y $m = [\beta] + 1$. Si la siguiente integral existe*

$$({}^{c}D^{\beta} f)(x) := \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)} \int_x^{\infty} (t-x)^{-\{\beta\}} \frac{d^m}{dt^m} f(t) dt,$$

ella se denomina derivada fraccionaria según Caputo de orden β de la función f.

En algunos de los ejemplos propuestos a continuación recurrimos a la llamada función hipergeométrica de Gauss:

Definición 1.11. *Se llama función hipergeométrica de Gauss a:*

$${}_2F_1\left(a, b, c, z\right) = \frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(c-b\right)} \int_0^1 t^{b-1} \left(1-t\right)^{c-b-1} \left(1-zt\right)^{-a} dt, \ 0 < b < c.$$

Algunas de sus propiedades principales son:

1. ${}_2F_1\left(a, b, b, z\right) = \left(1-z\right)^{-a}$

2. ${}_2F_1\left(a, b, c, z\right) = {}_2F_1\left(b, a, c, z\right)$

3. ${}_2F_1\left(a, b, c, 0\right) = {}_2F_1\left(0, b, c, z\right) = 1$

4. ${}_2F_1\left(a, b, c, 1\right) = \dfrac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}$.

Señalemos que no siempre es posible hallar de forma explícita la integral o derivada fraccionaria de una función. A continuación mostramos algunos ejemplos para funciones elementales donde el cálculo es sencillo. Ejemplos más complejos que involcran funciones especiales como la función Psi de Euler $\psi(p)$, Hipergeométrica de Gauss entre otras, pueden encontrarse en [13].

Ejemplo 1.1.

1. *Calculemos* $I^{\beta}(e^{-ax})$*, con* $a > 0$*:*

$$I^{\beta}(e^{-ax}) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{x}^{+\infty} e^{-at}(t-x)^{\beta-1}dt.$$

Haciendo la sustitución $\tau = a(t-x)$*, tenemos:*

$$\begin{aligned} I^{\beta}(e^{-ax}) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{x}^{+\infty} e^{-a\left(\frac{\tau}{a}+x\right)} \left(\frac{\tau}{a}\right)^{\beta-1} \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-ax} a^{-\beta} \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau}\tau^{\beta-1} d\tau = a^{-\beta}e^{-ax}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I^{\beta}(e^{-ax}) = a^{-\beta}e^{-ax}$*. En particular, si* $a = 1$*,* $I^{\beta}(e^{-x}) = e^{-x}$*.*

2. *Sea* $f(x) = e^{-ax}$*,* $a > 0$*,* $0 < \beta < 1$*. Teniendo en cuenta que* $f'(e^{ax}) = ae^{x}$*, tenemos que:*

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\beta}(e^{-ax}) &= \frac{a}{\Gamma(1-\beta)} \int_{0}^{+\infty} s^{-\beta} e^{-a(x+s)} ds \\ &= \frac{a^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)} e^{-ax} \int_{0}^{+\infty} v^{-\beta} e^{-v} dv = \frac{a^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)} e^{-ax}\Gamma(1-\beta) = a^{\beta}e^{-ax}. \end{aligned}$$

Es decir, ${}^{c}D^{\beta}(e^{-ax}) = a^{\beta}e^{-ax}$*, en particular si* $a = 1$*,* ${}^{c}D^{\beta}(e^{-x}) = e^{-x}$*.*
Un cálculo directo nos muestra que para esta función la derivada de Caputo coincide con la derivada de Liouville.

3. *Sea* $f(x) = x^{-\mu}$*,* $0 < \beta < \mu < 1$*.*

$$\begin{aligned} D^{\beta}(x^{-\mu}) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_{0}^{+\infty} s^{-\beta}(x+s)^{-\mu} ds \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\int_{0}^{+\infty} v^{-\beta}(1+v)^{-\mu} dv \right] \frac{d}{dx} x^{-\beta-\mu+1} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+\beta)}{\Gamma(\mu)} x^{-\mu-\beta}, \quad \mu > 1-\beta. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Podemos establecer mediante un cálculo directo que para esta función la derivada de Liouville coincide con la derivada de Caputo.

4. *Para calcular la integral fraccionaria de* $f(x) = \dfrac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}$ *usaremos la función hipergeométrica de Gauss para obtener la fórmula*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}}.$$

En este caso conviene usar la definición de la integral en el segmento que presentamos a continuación:

Definición 1.12. *Sean* $\beta > 0$ *y* f *una función definida en* $L_1(a,b)$. *Si la integral*

$$I_{a+}^{\beta} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} f(t)dt, \ \ a \leq x \leq b,$$

existe, se llama integral fraccionaria según Liouville de orden β *de la función* f.

Reescribamos $\alpha+\beta$ *como* $1-\gamma$ *y calculemos la integral de* $f(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$.

$$\Gamma(\alpha)\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta-1}(b-t)^{\gamma-1}dt.$$

Entonces, usando la sustitución, $s = \dfrac{t-a}{x-a}$ *tenemos:*

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= (x-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1}\left[b-a-s(x-a)\right]^{\gamma-1} ds \\
&= (x-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1}(b-a)^{\gamma-1}\left(1-s\frac{x-a}{b-a}\right)^{\gamma-1} ds \\
&= (x-a)^{\alpha+\beta-1}(b-a)^{\gamma-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1}\left(1-s\frac{x-a}{b-a}\right)^{\gamma-1} ds.
\end{aligned}$$

Sea $z = \dfrac{x-a}{b-a}$.

$$\Gamma(\alpha)\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = (x-a)^{\alpha+\beta-1}(b-a)^{\gamma-1}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}\left(1-tz\right)^{\gamma-1} dt.$$

Notemos que esta integral tiene la forma de la función hipergeométrica de Gauss, donde $a = 1-\gamma$, $b = \beta$, $c = \alpha+\beta$, *de ahí que*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=(x-a)^{\alpha+\beta-1}(b-a)^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}{}_2F_1\left(1-\gamma, \beta, \alpha+\beta, \frac{x-a}{b-a}\right).$$

Como $\gamma-1=-\alpha-\beta$*, tenemos:*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=(x-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\beta)(b-a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}{}_2F_1\left(\alpha+\beta, \beta, \alpha+\beta, \frac{x-a}{b-a}\right).$$

De las propiedades 1 *y* 2*, se sigue que:*

$$\begin{aligned}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-a)^{-\alpha-\beta}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{-\beta} \\ &=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}}.$$

Es posible demostrar que los modelos de derivada según Liouville y Caputo coinciden para el caso de funciones absolutamente continuas localmente $AC^{loc}(\mathbb{R})$[2], si estas cumplen ciertas condiciones adicionales; para efectos del presente trabajo tales condiciones se expresan mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *Sea* $0<\beta<1$*,* f *definida en* $\mathbb{R}$ *o en* $\mathbb{R}_+$*,* $f \in AC^{loc}(\mathbb{R})$ $\big($*o* $f \in AC^{loc}(\mathbb{R}_+)\big)$*:*

a. $\int_1^{\infty} t^{-\beta}|f(t)| dt<\infty$,

b. $\int_1^{\infty} t^{1-\beta}|f'(t)| dt<\infty$,

c. $\lim\limits_{t \rightarrow \infty} t^{1-\beta} f(t)=0$.

---

[2]

- Recordemos que $f \in AC^{loc}(\mathbb{R})$ si y sólo si $f \in AC([a, b])$ para todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- Mediante $AC([a, b])$ representamos el espacio de funciones absolutamente continuas sobre el segmento [a,b].

Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ $(\in \mathbb{R}_+)$, $({}^cD^\beta f)(x) = (D^\beta f)(x)$.

Demostración. Sean $f \in AC^{loc}[(0, +\infty)]$ y $A > 0$. Entonces:

$$(1-\beta)\int_y^A (t-y)^{-\beta} f(t)dt = (t-y)^{1-\beta} f(t)\Big|_y^A - \int_y^A (t-y)^{1-\beta} f'(t)dt,$$

teniendo en cuenta las hipótesis y tomando el límite cuando $A \to \infty$ obtenemos:

$$(1-\beta)\int_y^\infty (t-y)^{\beta} f(t)dt = -\int_y^\infty (t-y)^{1-\beta} f'(t)dt;$$

esto es,

$$D_y^\beta f(y) = \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\int_y^\infty (t-y)^{-\beta} f(t)dt\right)_y' = \frac{1}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}\left(\int_y^\infty (t-y)^{1-\beta} f'(t)dt\right)_y'.$$

Dado que

$$\int_y^\infty (t-y)^{-\beta} f'(t)dt < \infty,$$

tenemos que

$$D_y^\beta f(y) = \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)}\int_y^\infty (t-y)^{\beta} f'(t)dt = -I^{1-\beta} f'(y) = {}^cDf(y).$$

□

Por ello, en adelante para estos dos modelos de diferenciación fraccionaria utilizaremos la notación D^β.

1.5. Derivadas e integrales fraccionarias de funciones de varias variables

Además de las definiciones 1.8 y 1.9 para el caso unidimensional, es posible definir las derivadas e integrales parciales fraccionarias de orden β_k, donde β_k es la componente k-ésima del vector $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$, con $k = 1, \cdots, n$ y $\beta_k > 0$, para todo k. Por otra parte, representaremos el vector unitario por $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$.

Definición 1.13. *Sea* $0 < \beta_k < 1$, $k = 1, \cdots, n$ *y la función* f*, definida en todo el espacio* $\mathbb{R}^n$*. Si existe la integral finita*

$$\begin{aligned}(I_k^{\beta_k})f(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\beta_k)}\int_{x_k}^\infty (t-x_k)^{\beta_k-1} f[x+(t-x_k)e_k]dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta_k)}\int_0^\infty t^{\beta_k-1} f(x+te_k)dt,\end{aligned}$$

entonces ella se llama integral parcial fraccionaria de orden β_k respecto de la k-ésima variable según Loiuville de la función f.
De manera similar se define la derivada de Caputo.

Definición 1.14. *Sea $0 < \beta_k < 1$, $k = 1, \cdots, n$ y la función f, definida en todo el espacio $\mathbb{R}^n$. Si existe la integral finita*

$$\begin{aligned}\left(D_k^{\beta_k}\right) f(x) &:= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{x_k}^{\infty} (t - x_k)^{-\beta_k} f[x + (t - x_k)e_k]dt \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^{\infty} t^{-\beta_k} f(x + te_k)dt,\end{aligned}$$

entonces ella se llama derivada parcial fraccionaria según Liouville de orden β_k respecto de la k-ésima variable de la función f.
De manera similar se definen las derivadas e integrales mixtas fraccionarias de cualquier orden positivo. Más detalles podemos encontrar en [13].

Capítulo 2

Estimativos puntuales y globales para el núcleo de Poisson y sus derivadas e integrales fraccionarias

El propósito de este capítulo es establecer estimativos punto a punto y de la p-norma para $P_y(x)$ y sus derivadas e integrales fraccionarias con el fin de usarlos en la caracterización de los espacios de Nikol'skii-Besov, presentados en el Capítulo 3.

2.1. Estimativos puntuales para $P_y(x)$

Lema 2.1. *Sean* $x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0$. *Entonces:*

1. $P_y(x) \ll y^{-n}$.
2. $P_y(x) \ll |x|^{-n}$ $(|x| \neq 0)$.

Demostración.

1. $$P_y(x) = C_N y\big(|x|^2 + y^2\big)^{-N} \leq C_N y^{-2N+1} = C_N y^{-n}, pues\ N = \frac{n+1}{2}.$$

2. *a*) Si $|x| \leq y$, usando el estimativo del item 1., tenemos:
$$P_y(x) \ll y^{-n} \ll |x|^{-n}.$$
   b) Si $|x| > y$, entonces:
$$P_y(x) = C_N y\big(|x|^2 + y^2\big)^{-N} \leq C_N |x|^{-2N+1} = C_N |x|^{-n} \ll |x|^{-n},$$
   Y por ello el resultado se tiene para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \neq 0$.

□

2.2. Estimativos para las derivadas de orden entero del núcleo de Poisson

Nuestro objetivo inmediato es obtener estimativos punto a punto para las derivadas del núcleo de Poisson en relación a y y en relación a x_j. En primer lugar estudiamos $\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)$, para ello nos basaremos en el siguiente lema.

Lema 2.2. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x,y) = y\big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda}$, $\lambda < 0$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos:*

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y) = \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-m} Q_{m+1}(|x|,y); \tag{2.1}$$

donde $Q_{m+1}(|x|,y) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m+1} a_j |x|^{m+1-j} y^j$ es un polinomio no constante de grado no superior a $m+1$ en las variables $|x|$, y; cuyos coeficientes a_j dependen únicamente de λ y n.

Las expresiones exactas de los a_j no son relevantes en lo sucesivo.

Demostración. Procedamos por inducción matemática; el caso $m=0$ es trivial.
Para $m=1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\big[y(|x|^2+y^2)^{\lambda}\big]\\ &= 2\lambda y^2\big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-1} + \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda} = \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-1}\big[|x|^2+(2\lambda+1)y^2\big],\end{aligned}$$

con $Q_2(|x|,y) = 1|x|^2 + 0|x|y + (1+2\lambda)y^2$.

Para $m=2$:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-2}\big[6\lambda y|x|^2 + (4\lambda^2+2\lambda)y^3\big],$$

con $Q_3(|x|,y) = 0|x|^3 + 6\lambda|x|^2 y + 0|x|y^2 + (4\lambda^2+2\lambda)y^3$.

Por lo tanto, la igualdad (2.1) se tiene para $m = 0,1,2$.
Ahora supongamos que para $m=k$, $k>2$ se verifica:

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x,y) = \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k} Q_{k+1},$$

con $Q_{k+1}(|x|,y) := \displaystyle\sum_{j=0}^{k+1} a_j |x|^{k+1-j} y^j \overset{\text{not}}{=} Q_{k+1}$ un polinomio no constante, es decir al menos uno de los $a_j \neq 0$, para algún j. Probemos que (2.1) es válida para $m=k+1$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} f(x,y)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\Big[\big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k} Q_{k+1}\Big]\\
&= \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k}\frac{\partial}{\partial y} Q_{k+1} + 2(\lambda-k)y\big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k-1} Q_{k+1}\\
&= \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k-1}\Big[\big(|x|^2+y^2\big)\frac{\partial}{\partial y} Q_{k+1} + 2(\lambda-k)yQ_{k+1}\Big]\\
&= \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k-1}\left[\big(|x|^2+y^2\big)\sum_{j=1}^{k+1} ja_j|x|^{k+1-j}y^{j-1} + \sum_{j=0}^{k+1} 2(\lambda-k)a_j|x|^{k+1-j}y^{j+1}\right].
\end{aligned}
$$

Sea $b_j = 2(\lambda - k)a_j$. Entonces:

$$
\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} f(x,y) = \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k-1}\left[\sum_{j=1}^{k+1} ja_j|x|^{k+3-j}y^{j-1} + \sum_{j=0}^{k+1}(ja_j+b_j)|x|^{k+1-j}y^{j+1}\right].
$$

Sea $c_j = ja_j + b_j$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} f(x,y)\\
&= \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k-1}\left[\sum_{l=0}^{k}(l+1)a_{l+1}|x|^{k+2-l}y^l + \sum_{l=1}^{k+2} c_{l-1}|x|^{k+2-l}y^l\right]\\
&= \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k-1}\\
&\quad\left\{\sum_{l=1}^{k}[(l+1)a_{l+1}+c_{l-1}]|x|^{k+2-l}y^l + a_1|x|^{k+2} + c_k|x|y^{k+1} + c_{k+1}y^{k+2}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Sean $d_l = (l+1)a_{l+1} + c_{l-1}$ con $l = 1, \ldots, k$, $d_0 = a_1$, $d_{k+1} = c_k$ y $d_{k+2} = c_{k+1}$. Entonces:

$$
\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} f(x,y) = \big(|x|^2+y^2\big)^{\lambda-k-1}\sum_{l=0}^{k+2} d_l|x|^{k+2-l}y^l,\ d_l \neq 0 \text{ para algún } l.
$$

Luego, por el principio de inducción matemática se sigue la validez de (2.1).

$\square$

Observación 2.1.

1. *De* (2.2) *se desprende que al menos uno de los coeficientes es distinto de cero. Precisamente en la sumatoria como* $(l+1)a_{l+1}+c_{l-1} = (l+1)a_{l+1}+(2\lambda-2k+l-1)a_{l-1}$ *con* $l = 1, \cdots, k$ *y además* $c_k = ka_{k+1} + b_k$ *y* $c_{k+1} = (k+1)a_{k+1} + b_{k+1}$*, entonces al menos uno de estos coeficientes no se anula puesto que por hipótesis al menos algún* $a_j \neq 0$*. Esto también se infiere de* (2.1) *de donde es claro que el polinomio no puede ser constante.*

2. *Tomando* $a = \text{máx}\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{m+1}|\}$*, se sigue que:*

$$|Q_{m+1}| \leq a \sum_{i=0}^{m+1} |x|^{m+1-i} y^i,$$

es decir

$$|Q_{m+1}| \ll \sum_{i=0}^{m+1} |x|^{m+1-i} y^i. \tag{2.3}$$

Consecuencia 2.1. *Con* $\lambda = -N$ *y* $f(x,y) = C_N^{-1} P_y(x)$*, obtenemos:*

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x) = C_N Q_{m+1}(|x|, y)\big(|x|^2 + y^2\big)^{-N-m}.$$

El siguiente resultado proporciona estimativos para $\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)$.

Teorema 2.1. *Sea* $m \in N_0$*. Entonces*

1. $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)\right| \ll y^{-n-m}.$

2. $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-m}.$

Demostración.

1. Usando coordenadas esféricas generalizadas (ver 1.15), haciendo la sustitución $\tau = 2\pi y\rho$, y aplicando el Teorema 1.11 tenemos:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m}\left[e^{-2\pi i(x\cdot t)} e^{-2\pi y|t|}\right] dt\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot t)} e^{-2\pi y|t|}(-2\pi|t|)^m dt\right| \\ &\ll \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi y|t|}|t|^m dt \ll \int_0^\infty e^{-2\pi y\rho}\rho^{m+n-1} d\rho = \int_0^\infty e^{-\tau}\frac{\tau^{m+n-1}}{(2\pi)^{m+n} y^{m+n}} d\tau \\ &\ll y^{-m-n}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{m+n-1} d\tau \ll y^{-m-n}\Gamma(m+n) \ll y^{-n-m}.\end{aligned}$$

2.
- Siendo $|x| \leq y$, usando el estimativo 1. del Teorema 2.1, tenemos:

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)\right| \ll y^{-n-m} \leq |x|^{-n-m}.$$

- Si $|x| > y$, usamos la Consecuencia 2.1 y el estimativo (2.3):

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)\right| \ll \left(|x|^2 + y^2\right)^{-N-m} \sum_{i=0}^{m+1} |x|^{m+1-i} y^i \leq |x|^{2(-N-m)} \sum_{i=0}^{m+1} |x|^{m+1}$$
$$= (m+2)|x|^{2(-N-m)+m+1} \ll |x|^{-n-m}.$$

Por lo tanto, $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-m}$.

□

Ahora estudiaremos estimativos para $\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)$.

Lema 2.3. *Sean $\lambda < 0$ y $g(t) = \left(t^2 + b\right)^{\lambda}$, b constante y $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces:*

$$\frac{d^m}{dt^m} g(t) = \left(t^2 + b\right)^{\lambda - m} R_m(t), \tag{2.4}$$

donde $R_m(t) = \sum_{l \geq \frac{m}{2}}^{m} c_l t^{2l-m} b^{m-l}$ es un polinomio en la variable t no constante, de grado no superior a m.

Demostración. Procedamos por inducción matemática; el caso $m = 0$ es trivial.
Para $m = 1$:

$$\frac{d}{dt} g(t) = 2\lambda t \left(t^2 + b\right)^{\lambda - 1},$$

con $R_1(t) = 2\lambda t$.

Para $m = 2$:

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) = 2\lambda \frac{d}{dt} t(t^2 + b)^{\lambda - 1} = 2\lambda\left[(t^2 + b)^{\lambda - 1} + 2(\lambda - 1)t^2(t^2 + b)^{\lambda - 2}\right]$$
$$= (t^2 + b)^{\lambda - 2}\left[2\lambda(t^2 + b) + 4\lambda(\lambda - 1)t^2\right] = (t^2 + b)^{\lambda - 2}\left[(4\lambda^2 - 2\lambda)t^2 + 2\lambda b\right],$$

con $R_2(t) = (4\lambda^2 - 2\lambda)t^2 + 2\lambda b t^0$.
Por lo tanto, para $m = 0, 1, 2$ se cumple (2.4).

Supongamos que (2.4) es válida para $m = k$, esto es

$$\frac{d^k}{dt^k} g(t) = (t^2+b)^{\lambda-k} R_k(t), \tag{2.5}$$

y probemos que (2.5) se verifica para $m = k+1$. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(t) &= \frac{d}{dt}(t^2+b)^{\lambda-k} R_k(t) = \left(t^2+b\right)^{\lambda-k} \frac{d}{dt} R_k(t) + 2(\lambda-k)t(t^2+b)^{\lambda-k-1} R_k(t) \\ &= \left(t^2+b\right)^{\lambda-k-1} \left[(t^2+b)\frac{d}{dt} R_k(t) + (2\lambda-2k)tR_k(t) \right]. \end{aligned}$$

Sea $A = 2\lambda - 2k$. Entonces:

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(t) = \left(t^2+b\right)^{\lambda-k-1} \left[\left(t^2+b\right) \frac{d}{dt} \sum_{l \geq \frac{k}{2}}^{k} \tilde{c}_l t^{2l-k} b^{k-l} + A \sum_{l \geq \frac{k}{2}}^{k} \tilde{c}_l t^{2l-k+1} b^{k-l} \right]. \tag{2.6}$$

Consideremos dos casos en el corchete de (2.6).

- Sea $k = 2k_1$. Se tiene:

$$\begin{aligned} &\left(t^2+b\right) \frac{d}{dt} \sum_{l=k_1}^{2k_1} \tilde{c}_l t^{2l-2k_1} b^{2k_1-l} + \sum_{l=k_1}^{2k_1} A\tilde{c}_l t^{2l-2k_1+1} b^{2k_1-l} = \\ &\left(t^2+b\right) \sum_{l=k_1+1}^{2k_1} \tilde{c}_l \left(2l-2k_1\right) t^{2l-2k_1-1} b^{2k_1-l} + \sum_{l=k_1}^{2k_1} A\tilde{c}_l t^{2l-2k_1+1} b^{2k_1-l}. \end{aligned}$$

  Sea $\alpha_l = \tilde{c}_l(2l - 2k_1)$, entonces la expresión en el corchete es

$$\begin{aligned} &\left(t^2+b\right) \sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \alpha_l t^{2l-k-1} b^{k-l} + \sum_{l=\frac{k}{2}}^{k} A\tilde{c}_l t^{2l-k+1} b^{k-l} = \\ &\sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \alpha_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \alpha_l t^{2l-k+1} b^{k-l} + \sum_{l=\frac{k}{2}}^{k} A\tilde{c}_l t^{2l-k+1} b^{k-l}. \end{aligned}$$

  Haciendo $\beta_l = \alpha_l + A\tilde{c}_l$, con $l = \frac{k}{2}+1, \cdots, k$, $\beta_{k/2} = A\tilde{c}_{k/2}$ reescribimos la expresión en la forma:

$$\sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \alpha_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \beta_l t^{2l-k+1} b^{k-l} + \beta_{\frac{k}{2}} t b^{\frac{k}{2}}.$$

Haciendo $j = l + 1$ en $\displaystyle\sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \beta_l t^{2l-k+1} b^{k-l}$ y llamando nuevamente l a j, tenemos:

$$\sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \alpha_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \sum_{l=\frac{k}{2}+2}^{k+1} \beta_{l-1} t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \beta_{\frac{k}{2}} t b^{\frac{k}{2}} =$$
$$\sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} \big(\alpha_l + \beta_{l-1}\big) t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \beta_k t^{k+1}.$$

Sean $c_l = \alpha_l + \beta_{l-1}$ con $l = \frac{k}{2} + 1, \ldots, k$ y $c_{k+1} = \beta_k$. Entonces, la última expresión se transforma en:

$$\sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k} c_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + c_{k+1} t^{2(k+1)-k-1} b^{k+1-(k-1)} = \sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k+1} c_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(t) = \big(t^2 + b\big)^{\lambda-k-1} \sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k+1} c_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l}.$$

- Sea $k = 2k_1 + 1$. En este caso el corchete es:

$$\big(t^2 + b\big) \frac{d}{dt} \sum_{l=k_1+1}^{2k_1+1} \tilde{c}_l t^{2l-2k_1-1} b^{2k_1+1-l} + \sum_{l=k_1+1}^{2k_1+1} A \tilde{c}_l t^{2l-2k_1} b^{2k_1+1-l} =$$
$$\big(t^2 + b\big) \sum_{l=k_1+1}^{2k_1+1} \tilde{c}_l \big(2l - 2k_1 - 1\big) t^{2l-2k_1-2} b^{2k_1+1-l} + \sum_{l=k_1+1}^{2k_1+1} A \tilde{c}_l t^{2l-2k_1} b^{2k_1+1-l};$$

denotando $\gamma_l = \tilde{c}_l(2l - 2k_1 - 1)$, tenemos

$$\big(t^2 + b\big) \sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} \gamma_l t^{2l-k-1} b^{k-l} + \sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} A \tilde{c}_l t^{2l-k+1} b^{k-l} =$$
$$\sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} \gamma_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} \gamma_l t^{2l-k+1} b^{k-l} + \sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} A \tilde{c}_l t^{2l-k+1} b^{k-l}.$$

Simbolizando $\delta_l = \gamma_l + A\tilde{c}_l$, $l = \frac{k+1}{2}, \cdots, k$, la última expresión toma la forma:

$$\sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} \gamma_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} \delta_l t^{2l-k+1} b^{k-l}.$$

Haciendo $j = l + 1$ en $\sum\limits_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} \delta_l t^{2l-k+1} b^{k-l}$, y llamando nuevamente l a j, tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k} \gamma_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \sum_{l=\frac{k+1}{2}+1}^{k+1} \delta_{l-1} t^{2l-k-1} b^{k+1-l} = \\
&\sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k+1} \big(\gamma_l + \delta_{l-1}\big) t^{2l-k-1} b^{k+1-l} - \gamma_{k+1} t^{k+1} - \delta_{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} = \\
&\sum_{l=\frac{k+1}{2}+1}^{k} \big(\gamma_l + \delta_{l-1}\big) t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \Big(\gamma_{\frac{k+1}{2}} + \delta_{\frac{k-1}{2}}\Big) b^{\frac{k+1}{2}} + \\
&+ \big(\gamma_{k+1} + \delta_k\big) t^{k+1} - \gamma_{k+1} t^{k+1} - \delta_{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} = \\
&\sum_{l=\frac{k+1}{2}+1}^{k} \big(\gamma_l + \delta_{l-1}\big) t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + \gamma_{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} + \delta_k t^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Sean $c_l = \gamma_l + \delta_{l-1}$ con $l = \frac{k+1}{2} + 1, \ldots, k$ y $c_{\frac{k+1}{2}} = \gamma_{\frac{k+1}{2}}$, $c_{k+1} = \delta_k$. Entonces, la última expresión puede escribirse de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=\frac{k+1}{2}+1}^{k} c_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l} + c_{\frac{k+1}{2}} t^{2(\frac{k+1}{2})-k-1} b^{k+1-(\frac{k+1}{2})} + c_{k+1} t^{2(k+1)-k-1} b^{k+1-(k+1)} = \\
&\sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k+1} c_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(t) = \big(t^2 + b\big)^{\lambda-k-1} \sum_{l=\frac{k+1}{2}}^{k+1} c_l t^{2l-k-1} b^{k+1-l}.$$

Así, por el principio de inducción matemática se tiene la validez de (2.4).

□

Observación 2.2.

1. *El polinomio $R_m(t)$ es de grado no superior a m en la variable t, los coeficientes dependen únicamente de λ y n, por ello sus expresiones exactas son irrelevantes.*

2. *El polinomio $R_m(t)$ no puede ser constante, (ver Lema 2.2).*

Consecuencia 2.2. *Si $\lambda = -N$, $g(t) = (t^2+b)^\lambda$ y $b = x_1^2+\cdots+x_{j-1}^2+x_{j+1}^2+\cdots+x_n^2+y^2$ con $t = x_j$, entonces:*

$$P_y(x) = C_N y g(t).$$

Además,

$$\frac{\partial^m P_y(x)}{\partial x_j^m} = C_N y R_m(x,y)\big(|x|^2+y^2\big)^{-N-m}, \text{ con } j = 1,\dots,n \text{ y}$$

$$R_m(x,y) = \sum_{l\geq \frac{m}{2}}^{m} c_l x_j^{2l-m}\big(|x|^2+y^2-x_j^2\big)^{m-l},$$

donde la expresión $|x|^2+y^2-x_j^2$ no depende de x_j.

Observación 2.3. *Tomando $c = \max\{|c_1|,|c_2|,\dots,|c_m|\}$, se sigue que*

$$|R_m| \leq c\sum_{l\geq \frac{m}{2}}^{m} x_j^{2l-m}\big(|x|^2+y^2-x_j^2\big)^{m-l},$$

es decir,

$$|R_m| \ll \sum_{l\leq \frac{m}{2}}^{m} |x_j|^{2l-m}\big(|x|^2+y^2-x_j^2\big)^{m-l}. \tag{2.7}$$

Teorema 2.2. *Sea $m \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Entonces:*

1. $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)\right| \ll y^{-m-n}$.

2. $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)\right| \ll |x|^{-m-n}$.

Demostración.

1. Usando coordenadas esféricas generalizadas (ver 1.15) y haciendo la sustitución $\tau = 2\pi y\rho$, tenemos:

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^m}{\partial x_j^m}\big(e^{-2\pi i(x\cdot t)}e^{-2\pi y|t|}\big)dt\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot t)}e^{-2\pi y|t|}(-2\pi i t_j)^m dt\right|$$
$$\ll \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi y|t|}|t|^m dt \ll \int_0^\infty e^{-2\pi y\rho}\rho^{m+n-1}d\rho = \int_0^\infty e^{-\tau}\frac{\tau^{m+n-1}}{(2\pi)^{m+n}y^{m+n}}d\tau$$
$$\ll y^{-m-n}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{m+n-1}d\tau \ll y^{-m-n}\Gamma(m+n) \ll y^{-n-m}.$$

Por lo tanto, $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)\right| \ll y^{-m-n}$.

2.
- Siendo $|x| \leq y$ y usando el estimativo 1. del Teorema 2.2 tenemos:

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)\right| \ll y^{-m-n} \leq |x|^{-m-n}.$$

- Si $|x| > y$ entonces por la Consecuencia 2.2:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)\right| &\ll y\big(|x|^2+y^2\big)^{-N-m}\left|\sum_{l\geq\frac{m}{2}}^{m} x_j^{2l-m}\big(|x|^2+y^2-x_j^2\big)^{m-l}\right| \\ &\ll y|x|^{2(-N-m)}\sum_{l\geq\frac{m}{2}}^{m}\left|x_j^{2l-m}\right|\big(|x|^2+y^2-x_j^2\big)^{m-l} \\ &\leq |x|^{2(-N-m)+1}\sum_{l\geq\frac{m}{2}}^{m}|x|^{2l-m}\big(|x|^2+y^2\big)^{m-l} \\ &\leq |x|^{2(-N-m)+1}\sum_{l\geq\frac{m}{2}}^{m}|x|^{m} \ll |x|^{-2N-m+1} = |x|^{-n-m}.\end{aligned}$$

□

2.3. Estimativos de la L_p norma para las derivadas del núcleo de Poisson

En esta sección nos proponemos establecer acotaciones para la $p-norma$ de las derivadas del núcleo de Poisson, usando los anteriores estimativos. Iniciaremos con el caso $p = 1$.

Teorema 2.3. *Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $j = 1, \ldots, n$. Entonces:*

1. $\left\|\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-m}.$
2. $\left\|\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-m}.$

Demostración.

1. Procedamos por inducción matemática.

   a) Si $m = 0$, el resultado se sigue de la propiedad 3. en el Teorema 1.13, más precisamente como $\int_{\mathbb{R}^n} |P_y(x)|dx = 1$, entonces $\left\|\frac{\partial^0}{\partial y^0} P_y(x)\right\|_1 = y^0$.

b) Para $m=1$, procederemos como en [14], usamos los estimativos del Teorema 2.1 y las coordenadas esféricas generalizadas:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)\right\|_1 &= \int_{|x|\leq y}\left|\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)\right|dx+\int_{|x|>y}\left|\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)\right|dx\\ &\leq \int_{|x|\leq y} nC_n y^{-n-1}dx+\int_{|x|>y} nC_n|x|^{-n-1}dx\\ &\ll y^{-n-1}\int_0^y \rho^{n-1}d\rho+\int_y^\infty \rho^{-n-1}\rho^{n-1}d\rho = y^{-n-1}\frac{\rho^n}{n}\Big|_0^y-\rho^{-1}\Big|_y^\infty \ll y^{-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\|\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-1}$.

Ahora supongamos que para $m=k$, $k\geq 2$ se verifica:

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-k},$$

Entonces, aplicando la propiedad de la derivada de la convolución enunciada en el Teorema 1.13, y la desigualdad de Young con $q=r=1$, $p'=\infty$, tenemos que:

$$\left\|\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}P_y(x)\right\|_1 = \left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}P_{\frac{y}{2}}(x)*\frac{\partial}{\partial y}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1 \leq \left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1\left\|\frac{\partial}{\partial y}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1 \ll y^{-k-1}.$$

Luego, por el principio de inducción matemática se tiene lo deseado.

2. Razonando como en el Lema 2.3 y utilizando la desigualdad de Young (Teorema 1.8) con $q=r=1$, $p'=\infty$, se sigue el resultado.

□

Para el caso $p=\infty$, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *Sean $x\in\mathbb{R}^n$, $y>0$. Entonces:*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)\right\|_\infty \ll y^{-n-1}.$$

Demostración.

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)\right\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^n}\text{vrai}\left|\frac{\partial}{\partial y}P_y(x)\right| = \max_{\mathbb{R}^n}\left|C_N\left(|x|^2+y^2\right)^{-N}-2Ny^2\left(|x|^2+y^2\right)^{-N-1}\right| \ll y^{-n-1}.$$

□

Los estimativos del Lema 2.3 y la Proposición 2.1 permiten establecer uno de los resultados deseados en esta sección:

Teorema 2.4. *Sean $y > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces:*

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x) \right\|_p \ll y^{\frac{-n}{p'} - m}. \tag{2.8}$$

Demostración.

1. El caso $p = 1$ corresponde al Lema 2.3.

2. Sea $1 < p < \infty$. De acuerdo con el Teorema 2.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x) \right\|_p^p &= \int_{|x| \leq y} \left| \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x) \right|^p dx + \int_{|x| > y} \left| \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x) \right|^p dx \\
&\ll \int_{|x| \leq y} (y^{-n-m})^p dx + \int_{|x| > y} (|x|^{-n-m})^p dx \\
&\ll (y^{-n-m})^p \int_0^y \rho^{n-1} d\rho + \int_y^\infty (\rho^{-n-m})^p \rho^{n-1} d\rho \\
&= (y^{-n-m})^p \frac{\rho^n}{n} \Big|_0^y + \frac{\rho^{p(-n-m)+n}}{p(-n-m)+n} \Big|_y^\infty \ll y^{(-n-m)p+n}.
\end{aligned}$$

   Elevando a la $1/p$ tenemos:

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x) \right\|_p \ll y^{-\frac{n}{p'} - m}.$$

3. Aplicando la desigualdad de Young con $p = q = \infty$, $r = 1$, y la propiedad de semigrupo del núcleo de Poisson (Teorema 1.13) tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_y(x) \right\|_\infty &= \left\| \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} P_{\frac{y}{2}}(x) * \frac{\partial}{\partial y} P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_1 \left\| \frac{\partial}{\partial y} P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_\infty \\
&\ll y^{-m+1} y^{-n-1} = y^{-n-m}.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.4. *Dado que $p > 1$, el exponente $p(-n-m)+n$ en el caso 2. de la prueba, es negativo y la expresión correspondiente tiende a cero; además el resultado no se tiene cuando $p = \frac{n}{n+m}$; ya que en este caso $p(-n-m)+n = 0$.*

Observación 2.5. *En la demostración anterior se utilizó la desigualdad de Young, la cual es válida para $p \geq 1$. Si bien se tiene que $P_y(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ para $p > \frac{n}{n+1}$ el resultado no se puede extender para $p \in \big(\frac{n}{n+1}, 1\big)$.*

Teorema 2.5. *Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces:*

$$\left\| \frac{\partial^m}{dx_j^m} P_y(x) \right\|_p \ll y^{-\frac{n}{p'}-m}, \; j = 1, \cdots, n.$$

Demostración. Razonando como en el Teorema 2.4 y usando la desigualdad de Young con $p = q = \infty$, $r = 1$, la propiedad de semigrupo del núcleo de Poisson y el estimativo 2. del Teorema 2.3 se obtiene el resultado. $\square$

2.4. Estimativos para la derivada fraccionaria del núcleo de Poisson

En esta sección presentamos que la derivada de Liouville y de Caputo del núcleo de Poisson coinciden, algunas propiedades de la derivada fraccionaria y mostraremos estimativos para las derivadas de orden no entero del núcleo de Poisson.

Teorema 2.6. *Sea $0 < \beta < 1$. Entonces, $DP_y(x) = {}^cDP_y(x)$.*

Demostración.

- Observemos que $\frac{\partial}{\partial y} P_y(x)$ es continua en todo segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, entonces es acotada y por ello $P_y(x) \in AC\big([a, b]\big)$ y así $P_y(x) \in AC^{loc}\big([a, b]\big)$.

- Sea $0 < \beta < 1$. Considerando el estimativo 1. del Lema 2.1

$$\int_1^\infty y^{-\beta} |P_y(x)| dy \ll \int_1^\infty y^{-\beta-n} dy < \infty,$$

  se verifica la condición a. del Teorema 1.15.

- Sea $0 < \beta < 1$. De acuerdo con el estimativo 1. del Teorema 2.1

$$\int_1^\infty y^{1-\beta} \left| \frac{\partial P_y(x)}{\partial y} \right| dy \ll \int_1^\infty y^{-\beta-n} dy < \infty,$$

  se cumple la condición b. del Teorema 1.15.

- Ahora para verificar c. del Teorema 1.15, $\lim_{y\to\infty} y^{1-\beta} P_y(x)$ tenemos,

$$\lim_{y\to\infty} y^{1-\beta} P_y(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{C_N y^{-\beta+2}}{\left(|x|^2+y^2\right)^N} = \lim_{y\to\infty} \frac{C_N y^{-\beta+2}}{y^{2N}} = \lim_{y\to\infty} \frac{C_N}{y^{\beta+n-1}} = 0,$$

  ya que $(|x^2|+y^2)^N \sim y^{2N}$, $y \to \infty$ y donde $N = \frac{n+1}{2}$.
  Observemos que los tres últimos estimativos son válidos para todo $\beta > 1-n$.

Por lo tanto, $DP_y(x) = {}^cDP_y(x)$; así en adelante no se hará distinción entre la derivada de Liouville y la de Caputo, para el núcleo de Poisson. $\square$

Ahora enunciamos algunas propiedades de la derivada fraccionaria, donde la primera está relacionada con un caso particular de la regla de la cadena para la derivada fraccionaria de Caputo, bajo el supuesto de que tales derivadas existan. Los dos siguientes describen directamente propiedades de las derivadas fraccionarias del núcleo de Poisson que se pueden agrupar bajo el nombre de propiedades de semigrupo, ver [13].

Lema 2.4. *Sea $\beta > 0$ y f una función tal que la derivada de Liouville $D_y^\beta f(y)$ existe. Si c es constante y $y = z + c$, entonces*

$$D_z^\beta f(y) = D_y^\beta f(y).$$

Podemos ver la prueba en [8], Teorema 2.4.

Lema 2.5. *Para $0 < \beta < 1$, $y > 0$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$D_y^\beta u(x,y) = D_y^\beta P_y(x) * f(x).$$

Podemos ver la prueba en [7].

Observación 2.6. *Del lema anterior se sigue que para todo $\beta > 0$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$D_y^\beta u(x,y) = D_y^\beta P_y(x) * f(x),$$

cuya prueba se puede ver en [8].

Lema 2.6. *Para $0 < \beta < 1$, $y_1, y_2 > 0$ se tiene que*

$$D_{y_1}^\beta \left[P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x)\right] = D_{y_1}^\beta P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x). \tag{2.9}$$

Demostración. Dado que $P_y(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p > \frac{n}{n+1}$, en particular para $p = \infty$, tomando $y = y_1 + y_2$ y del Lema 2.5 tenemos directamente el resultado. $\square$

Observación 2.7. *Teniendo en cuenta que $P_y(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p > \frac{n}{n+1}$, tomando $y = y_1 + y_2$ y la Observacion 2.6 podemos demostrar la veracidad del Lema 2.6 para $\beta > 0$.*

Lema 2.7. *Para todo $\beta, \lambda > 0$ tenemos que:*

1. $D_y^{\beta+\lambda} P_y(x) = D_y^{\beta} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{\lambda} P_{\frac{y}{2}}(x)$.
2. $D_y^{\beta+\lambda} P_y(x) = D_y^{\beta} D_y^{\lambda} P_y(x)$.

Demostración.

1. De la Observación 2.7 sabemos que la ecuación (2.9) es válida para $\beta > 0$. Probemos que se verifica para $\lambda > 0$. Entonces, tomando $r = [\beta],\ s = \{\beta\},\ t = [\lambda],\ v = \{\lambda\}$, usando la propiedad 8. del núcleo de Poisson y el mismo lema para r y t tenemos:

$$\begin{aligned} D_y^{\beta+\lambda} &= D_y^{r+t} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{s+v} P_{\frac{y}{2}}(x) \\ &= D_y^{r} P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^{t} P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^{s} P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^{v} P_{\frac{y}{4}}(x) = D_y^{\beta} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{\lambda} P_{\frac{y}{2}}(x). \end{aligned}$$

2. Ver [3].

$\square$

Para demostrar el Teorema 2.7 usaremos 1. del Lema 2.7.

Teorema 2.7. *Sea $\beta > 0$. Entonces:*

1. $\left|D_y^{\beta} P_y(x)\right| \ll y^{-n-\beta}, \quad \left|D_y^{\beta} P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-\beta}$,
2. $\left|D_{x_j}^{\beta} P_y(x)\right| \ll y^{-n-\beta}, \quad \left|D_{x_j}^{\beta} P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-\beta}$, *con* $j = 1, \ldots, n$.

Se probarán los estimativos en 1. para los estimativos de 2. la demostración es análoga.

Demostración.

1. - Sea $0 < \beta < 1$. Usando la definición de derivada de Caputo, Teorema 2.1, la sustitución $\tau = \frac{t-y}{y}$ y la función beta[1] tenemos:

$$\begin{aligned}\left|D_y^\beta P_y(x)\right| &= \left|\frac{-1}{\Gamma(1-\beta)}\int_y^\infty (t-y)^{-\beta}\frac{\partial}{\partial t}P_t(x)dt\right| \ll \int_y^\infty (t-y)^{-\beta}t^{-n-1}dt \\ &= \int_y^\infty y^{-\beta+1}\tau^{-\beta}\big[y(1+\tau)\big]^{-n-1}d\tau = \int_0^\infty y^{-n-\beta}\tau^{-\beta}(1+\tau)^{-n-1}d\tau \\ &= y^{-n-\beta}B(1-\beta,\beta+n) \ll y^{-n-\beta}.\end{aligned}$$

   - Sea $\beta \geq 1$, $\beta = \{\beta\} + [\beta]$. Usando el Lema **??** tenemos:

$$\begin{aligned}\left|D_y^\beta P_y(x)\right| &= \left|D_y^{\{\beta\}+[\beta]}P_y(x)\right| = \left|D_y^{\{\beta\}}P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{[\beta]}P_{\frac{y}{2}}(x)\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|D_y^{[\beta]}P_{\frac{y}{2}}(x-t)\right|\,\left|D_y^{\{\beta\}}P_{\frac{y}{2}}(t)\right|dt \\ &\ll y^{-n-\{\beta\}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial}{\partial y}^{[\beta]}P_{\frac{y}{2}}(x-t)\right|dt \\ &= y^{-n-\{\beta\}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}^{[\beta]}P_{\frac{y}{2}}(t)\right\|_1 \ll y^{-n-\{\beta\}-[\beta]} = y^{-n-\beta}.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\left|D_y^\beta P_y(x)\right| \ll y^{-n-\beta}$.

2. Probemos que $\left|D_y^\beta P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-\beta}$.

   - Sea $0 < \beta < 1$. Si $|x| \leq y$ entonces $|x|^{-n-\beta} \geq y^{-n-\beta}$ y por ello:

$$\left|D_y^\beta P_y(x)\right| \ll y^{-n-\beta} \leq |x|^{-n-\beta}.$$

   Si $|x| \geq y$ tenemos:

$$\begin{aligned}\left|D_y^\beta P_y(x)\right| &\ll \int_y^\infty (t-y)^{-\beta}\left|\frac{\partial}{\partial t}P_t(x)\right|dt \\ &= \Big(\int_y^{|x|} + \int_{|x|}^\infty\Big)(t-y)^{-\beta}\left|\frac{\partial}{\partial t}P_t(x)\right|dt.\end{aligned}$$

   Analicemos por separado las integrales del lado derecho de la igualdad anterior:

[1] Sea $p > 0$. Entonces $B(p,q) := \int_0^1 y^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \int_o^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$.

-
$$\int_y^{|x|}(t-y)^{-\beta}\Big|\frac{\partial}{\partial t}P_t(x)\Big|dt \ll |x|^{-n-1}\int_y^{|x|}(t-y)^{-\beta}dt$$
$$= |x|^{-n-1}\frac{1}{1-\beta}(t-y)^{-\beta+1}\Big|_y^{|x|}$$
$$= |x|^{-n-1}(|x|-y)^{-\beta+1} \le |x|^{-n-\beta}.$$

- Usando que $y \le |x| \le t$ y la sustitución $\tau = \frac{t-|x|}{|x|}$ tenemos que:
$$\int_{|x|}^{\infty}(t-y)^{-\beta}\Big|\frac{\partial}{\partial t}P_t(x)\Big|dt \ll \int_{|x|}^{\infty} t^{-n-1}(t-y)^{-\beta}dt \ll \int_{|x|}^{\infty} t^{-n-1}\big(t-|x|\big)^{-\beta}dt$$
$$= \int_0^{\infty}\big[|x|\big(\tau+1\big)\big]^{-n-1}\big(|x|\tau\big)^{-\beta}|x|d\tau$$
$$= |x|^{-n-\beta}\int_0^{\infty}\big(\tau+1\big)^{-n-1}\tau^{-\beta}d\tau$$
$$= |x|^{-n-\beta}B\big(1-\beta, n+\beta\big) \ll |x|^{-n-\beta}.$$

Por lo tanto, $\Big|D_y^{\beta}P_y(x)\Big| \ll |x|^{-n-\beta}$.

- Sea $\beta \ge 1$.

Si $|x| \le y$ entonces $|x|^{-n-\beta} \ge y^{-n-\beta}$ y así
$$\Big|D_y^{\beta}P_y(x)\Big| \ll y^{-n-\beta} \le |x|^{-n-\beta}.$$
Si $|x| \ge y$, $k = \big[\beta\big]$ y $s = \{\beta\}$ entonces:
$$\Big|D_y^{\beta}P_y(x)\Big| = \Big|D_y^{s}\frac{\partial^k}{\partial y^k}P_y(x)\Big|$$
$$\ll \int_y^{\infty}(t-y)^{-s}\Big|\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}P_t(x)\Big|dt$$
$$\left(\int_y^{|x|}+\int_{|x|}^{\infty}\right)(t-y)^{-s}\Big|\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}P_t(x)\Big|dt.$$

Analicemos por separado las integrales del lado derecho de la igualdad anterior:

- $$\begin{aligned}\int_y^{|x|}(t-y)^{-s}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}P_t(x)\right|dt &\ll \int_y^{|x|}(t-y)^{-s}|x|^{-n-k-1}dt\\ &= |x|^{-n-k-1}\int_y^{|x|}(t-y)^{-s}dt\\ &= |x|^{-n-k-1}\frac{1}{1-s}(t-y)^{-s+1}\Big|_y^{|x|}\\ &\ll |x|^{-n-k-1}(|x|-y)^{-s+1}\\ &\ll |x|^{-n-k-s}=|x|^{-n-\beta}.\end{aligned}$$

- Usando la sustitución $\tau=\frac{t-|x|}{|x|}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{|x|}^{\infty}(t-y)^{-s}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}P_t(x)\right|dt &\ll \int_{|x|}^{\infty}(t-|x|)^{-s}t^{-n-k-1}dt\\ &= \int_0^{\infty}(|x|\tau)^{-s}\big[|x|(\tau+1)\big]^{-n-k-1}|x|d\tau\\ &= |x|^{-s-n-k}\int_0^{\infty}\tau^{-s}(\tau+1)^{-n-k-1}d\tau\\ &\ll |x|^{-n-\beta}B(1-s,n+\beta).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.8. *Para $\beta>0$, $y>0$ y $j=1,\dots,n$, se tiene que:*

1. $\left\|D_y^{\beta}P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-\beta}$,
2. $\left\|D_{x_j}^{\beta}P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-\beta}$.

Demostración.

1. *a*) Para $0<\beta<1$ el resultado se muestra usando coordenadas esféricas generalizadas y los estimativos del Lema 2.7.

   b) Sea $\beta>1$, consideremos $[\beta]=m$ y $\{\beta\}=s$, usando el Lema 2.7 y la desigualdad de Young con parámetros $p=q=r=1$, tenemos:

$$\begin{aligned}\left\|D_y^{\beta}P_y(x)\right\|_1=\left\|D_y^{m+s}P_y(x)\right\|_1&=\left\|D_y^{m}P_{\frac{y}{2}}(x)*D_y^{s}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1\\ &\le \left\|\tfrac{\partial^m}{\partial y^m}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1\left\|D_y^{s}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1 \ll y^{-m-s}=y^{-\beta}.\end{aligned}$$

2. De manera similar, usando la desigualdad de Young con $p = q = r = 1$ y los estimativos del Teorema 2.5 obtenemos:

$$\begin{aligned}\left\|D^{\beta}_{x_j}P_y(x)\right\|_1 &= \left\|D^{m+s}_{x_j}P_y(x)\right\|_1 = \left\|D^{m+s}_{x_j}\big(P_{\frac{y}{2}}(x) * P_{\frac{y}{2}}(x)\big)\right\|_1\\ &= \left\|D^{s}_{x_j}P_{\frac{y}{2}}(x) * (-1)^m \tfrac{\partial^m}{\partial x_j^m}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1 \leq \left\|D^{s}_{x_j}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1 \left\|\tfrac{\partial^m}{\partial x_j^m}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1\\ &\ll y^{-s-m} = y^{-\beta}.\end{aligned}$$

□

El siguiente Teorema también se puede demostrar usando la técnica del Teorema anterior, con los parámetros $r = \infty$ y $p = 1$ en la desigualdad de Young; sin embargo procedemos de otra forma:

Teorema 2.9. *Sean* $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, $0 < \beta < 1$, $j = 1, \cdots, n$ *y* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces:*

1. $\left\|D^{\beta}_{y}P_y(x)\right\|_p \ll y^{\frac{n}{p}-n-\beta}$.
2. $\left\|D^{\beta}_{x_j}P_y(x)\right\|_p \ll y^{\frac{n}{p}-n-\beta}$.

Demostración.

Separemos la prueba del primer estimativo en dos casos para p. La prueba del segundo estimativo se hace de forma similar.

Sea $1 \leq p < \infty$. Usando coordenadas esféricas generalizadas y el Lema 2.7 tenemos que:

$$\begin{aligned}\left\|D^{\beta}_{y}P_y(x)\right\|_p^p &\leq \int_{|x|\leq y}\left|D^{\beta}_{y}P_y(x)\right|^p dx + \int_{|x|>y}\left|D^{\beta}_{y}P_y(x)\right|^p dx\\ &\ll \int_{|x|\leq y} y^{p(-n-\beta)}dx + \int_{|x|>y}|x|^{p(-n-\beta)}dx\\ &\ll y^{p(-n-\beta)}\int_0^y \rho^{n-1}d\rho + \int_y^{\infty}\rho^{p(-n-\beta)}\rho^{n-1}d\rho\\ &= y^{p(-n-\beta)}\frac{\rho^n}{n}\Big|_0^y - \frac{\rho^{p(-n-\beta)+n}}{p(-n-\beta)+n}\Big|_y^{\infty} \ll y^{p(-n-\beta)+n}.\end{aligned}$$

Así, $\left\|D^{\beta}_{y}P_y(x)\right\|_p \ll y^{\frac{n}{p}-n-\beta}$.

Sea $p = \infty$. Usando la desigualdad generalizada de Minkowsky, la Proposición 2.1 y la sustitución $\tau = \frac{t-y}{y}$ tenemos:

$$\left\|D_y^\beta P_y(x)\right\|_\infty \ll \int_y^\infty (t-y)^{-\beta}\left\|\frac{\partial}{\partial t}P_t(x)\right\|_\infty dt \ll \int_y^\infty (t-y)^{-\beta} t^{-n-1}dt$$
$$= y^{-n-\beta}\int_0^\infty \tau^{-\beta}(\tau+1)^{-n-1}d\tau = B(1-\beta, n+\beta)y^{-n-\beta} \ll y^{-n-\beta}.$$

Análogamente se puede probar que el Teorema anterior es válido para $\beta > 0$.

□

2.5. Estimativos para la integral fraccionaria del núcleo de Poisson

En esta sección mostraremos estimativos para las integrales de orden no entero del núcleo de Poisson.

Observación 2.8. *Anticipamos algunos comportamientos de la integral fraccionaria que difieren de los respectivos resultados para la derivada fraccionaria.*

1. *El estimativo punto a punto para la integral se comporta como el estimativo de la derivada, cambiando formalmente β por $-\beta$; sin embargo sólo es válido para $0 < \beta < n$.*

2. *Existe una diferencia marcada entre la derivada e integral fraccionaria, pues los estimativos para la derivada fraccionaria servían para cualquier orden de derivación; sin embargo para la integral el orden se restringe a $0 < \beta < n$, ya que en caso contrario no es posible garantizar la convergencia de las integrales involucradas en el cálculo de los estimativos.*

3. *A continuación enunciamos algunas equivalencias asintóticas que nos permiten observar que la integral fraccionaria no puede tomar órdenes de integración arbitrarios sino que estarán relacionados con la dimensión del espacio, esto es $0 < \beta < n$, lo cual limita el desarrollo de la teoría.*

Recordemos que $P_y(x) = \dfrac{C_N y}{(|x|^2 + y^2)^N}$ donde $N = \frac{n+1}{2}$.

Proposición 2.2. *Sea $y \to \infty$.*

1. $P_y(x) \sim C_N y^{-n}$

2. $\frac{\partial}{\partial y}P_y(x) \sim -2NC_N y^{-n-1}$

3. $I_y^1 P_y(x) \sim \frac{1}{n-1}C_N y^{-n+1}$, $n > 1$

4. $I_y^\beta P_y(x) \sim \frac{C_N}{\Gamma(\beta)}B(\beta, n-\beta)y^{\beta-n}$, $0 < \beta < n$

5. *Además, si* $|x_j| \to \infty$; $0 < \beta < n+1$, $j = 1, \ldots, n$. *Entonces,*
   $I_{x_j}^\beta P_y(x) \sim C_N y B(\beta, n-\beta+1)|x_j|^{\beta-n-1}$, $0 < \beta < n+1$.

Demostración. Sea $y \to \infty$.

1.
$$P_y(x) = \frac{C_N y}{(|x|^2+y^2)^N} \sim \frac{C_N y}{y^{2N}} = C_N y^{-n}.$$

2.
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}P_y(x) &= C_N\Big[(|x|^2+y^2)^{-N} - 2Ny^2(|x|^2+y^2)^{-N-1}\Big]\\ &\sim C_N\Big[y^{-2N} - 2Ny^{2+2(-N-1)}\Big]\\ &= C_N(y^{-n-1} - 2Ny^{-n-1}) = (1-2N)C_N y^{-n-1}.\end{aligned}$$

3. Sea $n > 1$ y $\tau = |x|^2 + t^2$.

$$\begin{aligned}I_y^1 P_y(x) &= C_N \int_y^\infty \frac{t}{(|x|^2+t^2)^N}dt = \frac{C_N}{2}\int_y^\infty \frac{d\tau}{\tau^N}\\ &= \frac{C_N}{2}\frac{\tau^{-N+1}}{-N+1}\Bigg|_y^\infty = \frac{C_N}{n-1}\big(|x|^2+y^2\big)^{\frac{-n+1}{2}} \sim \frac{C_N}{n-1}y^{-n+1}.\end{aligned}$$

4. Sea $0 < \beta < n$. Usando la sustitución $\tau = \frac{t-y}{y}$, tenemos:

$$\begin{aligned}I_y^\beta P_y(x) &= \frac{C_N}{\Gamma(\beta)}\int_y^\infty (t-y)^{\beta-1}\frac{t}{(|x|^2+t^2)^N}dt\\ &\sim \frac{C_N}{\Gamma(\beta)}\int_y^\infty (t-y)^{\beta-1}\frac{t}{t^{2N}}dt = \frac{C_N}{\Gamma(\beta)}\int_y^\infty (t-y)^{\beta-1}t^{-n}dt\\ &= \frac{C_N}{\Gamma(\beta)}y^{\beta-n}\int_0^\infty t^{\beta-1}(\tau+1)^{-n}d\tau = \frac{C_N}{\Gamma(\beta)}B(\beta, n-\beta)y^{\beta-n}.\end{aligned}$$

   El comportamiento asintótico de integrales con límites de integración variable lo podemos ver con más detalle en [12].

5. Sea $0<\beta<n+1$. Usando la sustición $\tau=\frac{t-x_j}{x_j}$ y siendo $z=x+(t-x_j)e_j$ tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{\beta} P_y(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{x_j}^{\infty}(t-x_j)^{\beta-1}P_y(z)dt &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{x_j}^{\infty}(t-x_j)^{\beta-1}\frac{C_N y}{\left(|z|^2+y^2\right)^N}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{x_j}^{\infty}(t-x_j)^{\beta-1}\frac{C_N y}{|z|^{2N}}dt = C_N y\int_{x_j}^{\infty}(t-x_j)^{\beta-1}|t|^{-n-1}dt\\ &= C_N y|x_j|^{\beta-n-1}\int_0^{\infty}\tau^{\beta-1}(\tau+1)^{-n-1}d\tau = C_N y|x_j|^{\beta-n-1}B(\beta,n-\beta+1).\end{aligned}$$

□

A continuación enuaciamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.10. *Sean $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, $j=1,\ldots,n$, $y>0$ y $0\leq\beta<n$. Entonces:*

1. $\left|I_y^{\beta}P_y(x)\right|\ll y^{-n+\beta}$, $\left|I_y^{\beta}P_y(x)\right|\ll |x|^{-n+\beta}$.
2. $\left|I_{x_j}^{\beta}P_y(x)\right|\ll y^{-n+\beta}$, $\left|I_{x_j}^{\beta}P_y(x)\right|\ll |x|^{-n+\beta}$.

Demostración.

1. ▪ Sea $0\leq\beta<n$. Por el Lema 2.1 tenemos:

$$\begin{aligned}\left|I_y^{\beta}P_y(x)\right| = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left|\int_y^{\infty}(t-y)^{\beta-1}P_t(x)dt\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty} z^{\beta-1}\left|P_{z+y}(x)\right|dz\\ &\ll \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty} z^{\beta-1}(z+y)^{-n}dz = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty} z^{\beta-1}y^{-n}\left(\frac{z}{y}+1\right)^{-n}dz.\end{aligned}$$

Ahora, usaremos la sustitución $u=\frac{z}{y}$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty} z^{\beta-1}y^{-n}\left(\frac{z}{y}+1\right)^{-n}dz &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}y^{-n+\beta}\int_0^{\infty}\frac{u^{\beta-1}}{(u+1)^{(n-\beta)+\beta}}du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}y^{-n+\beta}B(\beta,n-\beta),\ si\ n>\beta\\ &= \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(n)}y^{-n+\beta}\ll y^{-n+\beta}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|I_y^{\beta}P_y(x)|\ll y^{-n+\beta}$.

- Sea $0 \leq \beta < n$. Por el Lema 2.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|I_y^\beta P_y(x)\right| &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left|\int_0^{|x|} z^{\beta-1}P_{z+y}(x)dz + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{|x|}^{\infty} z^{\beta-1}P_{z+y}(x)dz\right| \\
&\ll \int_0^{|x|} z^{\beta-1}|x|^{-n}dz + \int_{|x|}^{\infty} z^{\beta-1}(z+y)^{-n}dz \\
&\leq |x|^{-n}\int_0^{|x|} z^{\beta-1}dz + \int_{|x|}^{\infty} z^{\beta-n-1}dz = |x|^{-n}\frac{z^\beta}{\beta}\Big|_0^{|x|} + \frac{z^{-n+\beta}}{-n+\beta}\Big|_{|x|}^{\infty} \ll |x|^{-n+\beta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left|I_y^\beta P_y(x)\right| \ll |x|^{-n+\beta}$.

□

2.6. Estimativos de la L_p norma para la integral del núcleo de Poisson

El teorema presentado a continuación es el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.11. *Sean $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $y > 0$, $p > \frac{n}{n-\beta}$ y $0 \leq \beta < \frac{n}{p'}$. Entonces:*

$$\left\|I_y^\beta P_y(x)\right\|_p \ll y^{\beta-\frac{n}{p'}}.$$

Demostración. Sea $0 \leq \beta < \frac{n}{p'}$.

1. Sea $\frac{n}{n-\beta} < p < \infty$. Usando la desigualdad generalizada de Minkowsky, el estimativo (2.8) y la sustitución $\tau = \frac{z}{y}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left\|I_y^\beta P_y(x)\right\|_p &\ll \int_0^{\infty} z^{\beta-1}\left\|P_{z+y}(x)\right\|_p dz \ll \int_0^{\infty} z^{\beta-1}(z+y)^{-\frac{n}{p'}}dz \\
&\ll y^{\beta-\frac{n}{p'}}\int_0^{\infty}\frac{\tau^{\beta-1}}{(\tau+1)^{\frac{n}{p'}}}d\tau = y^{\beta-\frac{n}{p'}}B\Big(\beta, \frac{n}{p'}-\beta\Big) \ll y^{\beta-\frac{n}{p'}}.
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\left\|I_y^\beta P_y(x)\right\|_p \ll y^{\beta-\frac{n}{p'}}$.

2. Sea $p = \infty$. Nuevamente usando la desigualdad generalizada de Minkowsky, el estimativo (2.8) y haciendo la sustitución $\tau = \frac{t-y}{y}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left\|I_y^\beta P_y(x)\right\|_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_y^\infty \big(t-y\big)^{\beta-1}\|P_t(x)\|_\infty dt\\
&\ll \int_y^\infty (t-y)^{\beta-1}t^{-n}dt = y^{\beta-n}\int_0^\infty \tau^{\beta-1}(\tau+1)^{-n}d\tau\\
&= y^{\beta-n}B(\beta, n-\beta) \ll y^{\beta-n}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\left\|I_y^\beta P_y(x)\right\|_\infty \ll y^{\beta-n}$.

$\square$

Los estimativos obtenidos en este capítulo nos premitirán caracterizar algunos espacios funcionales como los Espacios de Lipschitz y los Espacios de Nikol‘skii-Besov.

Capítulo 3

Aplicaciones a ciertos espacios funcionales

3.1. Espacio de Lipschitz

Dentro de los espacios que se definen en términos de diferencias, unos de los más conocidos son los espacios de Lipschitz $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n) \equiv \Lambda_\alpha$ que han sido ampliamente estudiados por ejemplo en [14], Capítulo V, §4. También se caracterizan porque su parámetro de diferenciación es no entero. Presentamos brevemente su definición y la caracterización a través de la integral de Poisson; más detalles se pueden encontrar en [14], de donde en particular hemos tomado la demostración de los siguientes resultados:

Definición 3.1. *Sea $0 < \alpha < 1$. Se dice que $f \in \Lambda_\alpha$ si $\big\|f(x+t) - f(x)\big\|_\infty \leq A|t|^\alpha$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $A > 0$ es una constante que no depende ni de x ni de t; la norma está dada por:*

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{|t|>0} \frac{\|f(\cdot,t) - f(\cdot)\|_\infty}{|t|^\alpha}. \tag{3.1}$$

El espacio Λ_α con la norma dada en (3.1) es un espacio de Banach.

Lema 3.1. *Sea $f \in L_\infty$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces $\left\|\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)\right\|_\infty \leq Ay^{-1+\alpha}$ es equivalente a las n condiciones $\left\|\frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y)\right\|_\infty \leq By^{-1+\alpha}$, $j = 1, \cdots, n$.*

Demostración. Usaremos las acotaciones:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y} P_y(x)\right\|_1 \leq Cy^{-1}, \ \left\|\frac{\partial}{\partial x_j} P_y(x)\right\|_1 \leq Cy^{-1}, \ j = 1, \cdots, n, \ y > 0. \tag{3.2}$$

$\Rightarrow$) Como $u(x,y) = P_{y_1} * u(x, y_2)$, $y = y_1 + y_2$, y por ello con $y_1 = y_2 = y/2$ tenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_j} u(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} P_{y/2} \right) * \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y/2) \right).$$

Así, por (3.2) y suponiendo que $\left\| \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right\|_\infty \leq A y^{-1+\alpha}$ tenemos que,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y \partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq A y^{-2+\alpha}. \tag{3.3}$$

Sin embargo, usando (3.2) tenemos:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty = \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} P_y(x) * f \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} P_y(x) \right\|_1 \|f\|_\infty.$$

Así,
$\frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y) \to 0$ en la norma de L_∞, cuando $y \to \infty$, y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y) = -\int_y^\infty \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x_j} u(x,\tau) d\tau.$$

El estimativo (3.3) entonces nos da que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_\infty \leq A_2 y^{-1+\alpha}, \ si \ \alpha < 1.$$

Renombrando $B = A_2$ se tiene lo deseado.
$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq B y^{-1+\alpha}$, para $j = 1, \cdots, n$.
Usando el razonamiento de la implicación anterior con $u(x,y) = P_{y/2}(x) * u(x, y/2)$, tenemos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} P_{y/2}(x) \right) * \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x, y/2) \right) \text{ y de aquí,}$$

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} P_{y/2}(x) \right\|_1 * \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq C A' y^{-2+\alpha}.$$

Sea $A_3 = CA'$. Luego,

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y) \right\|_\infty \leq A_3 y^{-2+\alpha}, \ j = 1, \cdots, n.$$

Sin embargo, ya que u es armónica tenemos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y). \tag{3.4}$$

Luego, pasando al supvrai,

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right\|_\infty = \left\| -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}u(x,y)\right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n} A_3 y^{-2+\alpha} = A_4 y^{-2+\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right\|_\infty \leq A_4 y^{-2+\alpha}.$$

Integrando tenemos que:

$$\left\|\int_y^\infty \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)dy\right\|_\infty \leq \int_y^\infty \left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right\|_\infty dy \leq \int_y^\infty A_4 y^{-2+\alpha}dy.$$

Usando la ecuación (3.4) tenemos:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right\|_\infty \leq \frac{A_4}{1-\alpha}y^{-1+\alpha}\Big|_y^\infty = Ay^{-1+\alpha},\ A = \frac{A_4}{1-\alpha}.$$

Así,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right\|_\infty \leq Ay^{-1+\alpha}.$$

□

Mediante la integral de Poisson se tiene una caracterización de Λ_α conocida como Teorema de Taibleson; aquí detallamos la respectiva demostración de [14].

Teorema 3.1. *(**Taibleson**) Supongamos que $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, y $0 < \alpha < 1$. Entonces, $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si*

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_\infty \leq Ay^{-1+\alpha}. \tag{3.5}$$

Nota. Como antes la constante A no depende ni de x ni de y.

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, mostremos que $\left\|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right\|_\infty \leq Ay^{-1+\alpha}$.
Notemos que $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[u(x,y) - f(x)]$.

$$u(x,y) = (P_y * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t)f(x-t)dt$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[u(x,y) - 1f(x)\Big]\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{\mathbb{R}^n} P_y(t)f(x-t)dt - \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t)f(x)dt\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y}P_y(t)\big[f(x-t) - f(x)\big]dt.\end{aligned}$$

Tomando módulo en la última igualdad tenemos:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial}{\partial y}P_y(t)\Big|\big|f(x-t)-f(x)\big|dt \leq \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial}{\partial y}P_y(t)\Big|\big\|f(x-t)-f(x)\big\|_\infty dt\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial}{\partial y}P_y(t)\Big|\frac{\big\|f(x-t)-f(x)\big\|_\infty}{|t|^\alpha}|t|^\alpha dt,\ t\neq\vec{0}.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{\big\|f(x-t)-f(x)\big\|_\infty}{|t|^\alpha} \leq \sup_{|t|>0}\frac{\big\|f(x-t)-f(x)\big\|_\infty}{|t|^\alpha} \leq \|f\|_\infty + \sup_{|t|>0}\frac{\big\|f(x-t)-f(x)\big\|_\infty}{|t|^\alpha} = \|f\|_{\Lambda_\alpha}.$$

Así, usando la hipótesis obtenemos que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right| &\leq \|f\|_{\Lambda_\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial}{\partial y}P_y(t)\Big||t|^\alpha dt\\ &= \|f\|_{\Lambda_\alpha}\left(\int_{|t|\geq y}\Big|\frac{\partial}{\partial y}P_y(t)\Big||t|^\alpha dt + \int_{|t|<y}\Big|\frac{\partial}{\partial y}P_y(t)\Big||t|^\alpha dt\right)\\ &\leq \|f\|_{\Lambda_\alpha}\left(c'\int_{|t|\geq y}|t|^{-n-1}|t|^\alpha dt + c'\int_{|t|<y}y^{-n-1}|t|^\alpha dt\right).\end{aligned}$$

Luego, usando coordenadas esféricas generalizadas:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right| &\ll \|f\|_{\Lambda_\alpha}c'\left(\int_y^\infty \rho^{\alpha-2}d\rho + y^{-n-1}\int_0^y \rho^{\alpha+n-1}d\rho\right)\\ &= \|f\|_{\Lambda_\alpha}c'\left(\frac{\rho^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big|_y^\infty + y^{-n-1}\frac{\rho^{\alpha+n}}{\alpha+n}\Big|_0^y\right)\\ &= \|f\|_{\Lambda_\alpha}c'\left(\frac{-1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha+n}\right)y^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Así,

$$\Big|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\Big| \leq cy^{\alpha-1},\ \textit{donde}\ c = c'\|f\|_{\Lambda_\alpha}\Big(\frac{-1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha+n}\Big).$$

Como esto es cierto para todo x, en particular se cumple para el supremo.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\Big| \leq cy^{\alpha-1}.$$

Esto es,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right\|_\infty \leq c y^{\alpha-1},$$

y haciendo $A = c$, se tiene lo deseado.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\left\|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right\|_\infty \leq A y^{-1+\alpha}$ y probemos que $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Recordemos que $f \in L_\infty$.

Escribamos

$$f(x+t)-f(x) = [u(x+t,y)-u(x,y)] + [f(x+t)-u(x+t,y)] - [f(x)-u(x,y)].$$

Sea $y = |t|$. Ahora,

$$\Big|u(x+t,y)-u(x,y)\Big| \leq \int_L \Big|\nabla u(x+s,y)\Big| ds,$$

donde L es el segmento que une x con $x+t$.

Recordemos que las normas $|\cdot|$, $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, en particular,

$$\Big|\nabla u(x+s,y)\Big| \leq \Big|\nabla u(x+s,y)\Big|_1 := \sum_{j=1}^n \big|u_j(x+s,y)\big| \leq \sum_{j=1}^n \big\|u_j(x,y)\big\|_\infty,$$

porque cada $\big|u_j(x+s,y)\big| \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} \big|u_j(x+s,y)\big| = \big\|u_j(x,y)\big\|_\infty$.

Así, intengrando,

$$\int_L \Big|\nabla u(x+s,y)\Big| ds \leq \int_L \sum_{j=1}^n \big\|u_j(x,y)\big\|_\infty ds = \sum_{j=1}^n \big\|u_j(x,y)\big\|_\infty \int_L ds = |t| \sum_{j=1}^n \big\|u_j(x,y)\big\|_\infty.$$

Usando nuestra hipótesis y el Lema 3.1, tenemos que

$$\int_L \big|\nabla u(x+s,y)\big| ds \leq A_5 |t|^\alpha.$$

También, dado que $u(x,y)$ es armónica, y $u(x,y) \to f(x)$ cuando $y \to 0+$:

$$f(x+t) - u(x+t,y) = -\int_0^y \frac{\partial}{\partial \tau} u(x+t,\tau) d\tau,$$

y así

$$\big|f(x+t)-u(x+t,y)\big| \leq \Big\|\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big\|_{\infty}\int_0^y d\tau \leq A_6 y^{-1+\alpha}\tau\Big|_0^y = A_6 y^{\alpha}.$$

De forma similar tenemos que:

$$\big|f(x)-u(x,y)\big| \leq A_7 y^{\alpha} = A_7|t|^{\alpha}.$$

Y así,

$$\big|f(x+t)-f(x)\big| \leq A_5|t|^{\alpha}+A_6|t|^{\alpha}-A_7|t|^{\alpha} = (A_5+A_6+A_7)|t|^{\alpha}.$$

Sea $A = A_5+A_6-A_7$. Luego, $\big|f(x+t)-f(x)\big| \leq A|t|^{\alpha}$.

Como lo anterior es cierto para todo x, tenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big|f(x+t)-f(x)\big| \leq A|t|^{\alpha},$$

y por ello

$$\big\|f(x+t)-f(x)\big\|_{\infty} \leq A|t|^{\alpha}.$$

Por lo tanto, $f \in \Lambda_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

3.2. Caracterización de $\Lambda_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $0<\alpha<1$ a través de derivadas fraccionarias

En [9] los autores logran extender el Teorema de Taibleson al caso de las derivadas de orden no entero. Para lograr esa extensión se necesitan las siguientes propiedades de la derivada fraccionaria, cuyas demostraciones las podemos encontrar en [7].

Lema 3.2. *Sean $0<\beta<1$, $f(x,y)$ una función medible sobre $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$,*

1. $\dot{\forall} x \in \mathbb{R}^n$, *para todo $y \in (0,\infty)$ existe $D^{\beta}_{y} f(x,y)$.*
2. *Para todo $y>0$,* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\Big(I^{1-\beta}_{y}|f(x,y)|\Big)dx < \infty.$
3. *Para todo $[a,b]\subset(0,\infty)$ existe una función h no negativa e integrable sobre $\mathbb{R}^n$, tal que para todo $y\in[a,b]$, $\dot{\forall} x\in\mathbb{R}^n$*

$$|D^{\beta}_{y} f(x,y)| \leq h(x).$$

Entonces, para todo $y \in (0, \infty)$

$$D_y^\beta \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} D_y^\beta f(x,y)dx.$$

Lema 3.3. *Sean $0 < \beta < 1$ y $y > 0$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_y^\beta P_y(x)dx = 0.$$

También se usará el siguiente teorema que se encuentra en [3]:

Teorema 3.2. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, λ y β reales mayores que α. Entonces son equivalentes las condiciones*

$$\|D_y^\lambda u(x,y)\|_\infty \leq Ay^{-\lambda+\alpha} \ y \ \|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty \leq By^{-\beta+\alpha}.$$

Con estos resultados es posible probar la caracterización de Λ_α a través de los estimativos para la derivada fraccionaria.

Teorema 3.3. *Sea $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Entonces $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si*

$$\left\| D_y^\beta u(x,y) \right\|_\infty \leq Ay^{-\beta+\alpha}, \ y > 0.$$

Demostración. Adaptaremos al caso no entero los razonamientos empleados en el Teorema de Taibleson.

$\Rightarrow$) Sea $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, probemos que $\left\| D_y^\beta u(x,y) \right\|_\infty \leq Ay^{-\beta+\alpha}$.

Observemos que $D_y^\beta u(x,y) = D_y^\beta[u(x,y) - f(x)]$. Por otro lado, dado que el núcleo de Poisson verifica las hipótesis de los Lemas 3.2 y 3.3 tenemos:

$$\begin{aligned} D_y^\beta u(x,y) &= D_y^\beta \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t)f(x-t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} D_y^\beta \ P_y(t)f(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} D_y^\beta \ P_y(t)\big[f(x-t) - f(x)\big]dt. \end{aligned}$$

Tomando módulo en la última igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} \left|D_y^\beta u(x,y)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|D_y^\beta P_y(t)\right| \left|f(x-t) - f(x)\right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|D_y^\beta P_y(t)\right| \left\|f(x-t) - f(x)\right\|_\infty dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|D_y^\beta P_y(t)\right| \frac{\left\|f(x-t) - f(x)\right\|_\infty}{|t|^\alpha} |t|^\alpha dt, \ t \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Como antes,

$$\frac{\left\|f(x-t)-f(x)\right\|_\infty}{|t|^\alpha} \leq \sup_{|t|>0} \frac{\left\|f(x-t)-f(x)\right\|_\infty}{|t|^\alpha} \leq \|f\|_\infty + \sup_{|t|>0} \frac{\left\|f(x-t)-f(x)\right\|_\infty}{|t|^\alpha}.$$

Así, usando el Lema 2.7 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|D_y^\beta u(x,y)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|D_y^\beta P_y(t)\right| \|f\|_{\Lambda_\alpha} |t|^\alpha dt = \|f\|_{\Lambda_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left|D_y^\beta P_y(t)\right| |t|^\alpha dt \\
&= \|f\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{|t|\geq y} \left|D_y^\beta P_y(t)\right| |t|^\alpha dt + \int_{|t|<y} \left|D_y^\beta P_y(t)\right| |t|^\alpha dt \right) \\
&\leq \|f\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{|t|\geq y} |t|^{-n-\beta} |t|^\alpha dt + \int_{|t|<y} y^{-n-\beta} |t|^\alpha dt \right) \\
&= \|f\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{|t|\geq y} |t|^{-n-\beta+\alpha} dt + \int_{|t|<y} y^{-n-\beta} |t|^\alpha dt \right).
\end{aligned}$$

Nuevamente, usando coordenadas esféricas generalizadas tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|D_y^\beta u(x,y)\right| &\ll \|f\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_y^\infty \rho^{-\beta+\alpha-1} d\rho + y^{-n-\beta} \int_0^y \rho^{\alpha+n-1} d\rho \right) \\
&= \|f\|_{\Lambda_\alpha} \left(\frac{\rho^{-\beta+\alpha}}{\alpha-\beta}\Big|_y^\infty + y^{-n-\beta} \frac{\rho^{\alpha+n}}{\alpha+n}\Big|_0^y \right) = \|f\|_{\Lambda_\alpha} \left(\frac{-1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha+n} \right) y^{-\beta+\alpha}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\left|D_y^\beta u(x,y)\right| \leq A y^{-\beta+\alpha}, \ \textit{donde } A = \|f\|_{\Lambda_\alpha} \left(\frac{-1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha+n} \right).$$

Como esto es cierto para todo x, en particular se cumple para el supremo.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D_y^\beta u(x,y)\right| \leq A y^{-\beta+\alpha},$$

y con mayor razón,

$$\left\|D_y^\beta u(x,y)\right\|_\infty \leq A y^{-\beta+\alpha}.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\left\|D_y^\beta u(x,y)\right\|_\infty \leq A y^{-\beta+\alpha}$ y mostremos que $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Como antes, $f \in L_\infty$.

Escribamos

$$f(x+t)-f(x)=[u(x+t,y)-u(x,y)]+[f(x+t)-u(x+t,y)]-[f(x)-u(x,y)].$$

Sea $y=|t|$. Ahora,

$$\Big|u(x+t,y)-u(x,y)\Big|\leq \int_L \Big|\nabla u(x+s,y)\Big|ds,$$

donde L es el segmento que une x con $x+t$.

Usando las equivalencias entre las normas $|\cdot|$, $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\Big|\nabla u(x+s,y)\Big|\leq \sum_{j=1}^{n}\big\|u_j(x,y)\big\|_\infty.$$

Así intengrando,

$$\int_L \Big|\nabla u(x+s,y)\Big|ds \leq \int_L \sum_{j=1}^{n}\big\|u_j(x,y)\big\|_\infty ds=\sum_{j=1}^{n}\big\|u_j(x,y)\big\|_\infty \int_L ds=|t|\sum_{j=1}^{n}\big\|u_j(x,y)\big\|_\infty.$$

Usando nuestra hipótesis y el Teorema 3.2, tenemos que

$$\int_L \big|\nabla u(x+s,y)\big|ds\leq A_1|t|^{-\beta+\alpha+1}.$$

Además,

$$f(x+t)-u(x+t,y)\leq y\left\|\frac{\partial u}{dt}\right\|_\infty dt,$$

Acotando la norma de la desigualdad usando desigualdad de Young y los estimativos 2.9, tenemos:

$$\big|f(x+t)-u(x+t,y)\big|\leq A_2 y^{-\beta+\alpha+1}.$$

Similarmente tenemos que:

$$\big|f(x)-u(x,y)\big|\leq A_3 y^{-\beta+\alpha+1}=A_3|t|^{-\beta+\alpha+1}.$$

Y así,

$$\big|f(x+t)-f(x)\big|\leq A_1|t|^{-\beta+\alpha+1}+A_2|t|^{-\beta+\alpha+1}-A_3|t|^{-\beta+\alpha+1}=(A_1+A_2+A_3)|t|^{-\beta+\alpha+1}.$$

Sea $A = A_1 + A_2 - A_3$. Luego, $\big|f(x+t) - f(x)\big| \leq A|t|^{\alpha}$.

Como lo anterior es cierto para todo x, tenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big|f(x+t) - f(x)\big| \leq A|t|^{\alpha},$$

y con mayor razón,

$$\big\|f(x+t) - f(x)\big\|_{\infty} \leq A|t|^{\alpha}.$$

Por lo tanto, $f \in \Lambda_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Observación 3.1. *Este resultado muestra que los estimativos obtenidos para la derivada fraccionaria de $P_y(x)$ permiten llevar al caso de órdenes no enteros de diferenciación, resultados clásicos como el Teorema de Taibleson. Nuestro objetivo inmediato es mostrar que una situación similar se tiene también para objetos más complejos, como lo son los espacios de Nikol'skii-Besov.*

3.3. Espacios de Nikol'skii-Besov

En los espacios de Nikol'skii-Besov denotados por $B^{\alpha}_{p,q}(\Omega) = B^{\alpha}_{p,q}$, donde $\alpha > 0$ y $1 \leq p, q \leq \infty$, Ω abierto de $\mathbb{R}^n$, el parámetro α no necesariamente es entero, y además refleja el orden de diferenciación de las funciones que pertenecen a este espacio. Por ello, nos referimos a $B^{\alpha}_{p,q}$ como un espacio con orden no entero de suavidad.
Estos espacios pueden definirse de distintas maneras no necesariamente equivalentes, algunos de ellas usan: el módulo de continuidad, representaciones integrales, o incluso la transformación de Fourier. Una de las aplicaciones más destacadas de estos espacios se tienen por ejemplo, en el estudio de las trazas de las funciones de los espacios de Sóbolev, denotados por $W^l_p(\Omega)$, abordadas en las obras de Aranzajin, Bavich, Besov, Gagliardo, Lizorkin, Stein, Uspensky y otros, ver [14].
Los espacios $B^{\alpha}_{p,q}$ introducidos por O.V. Bésov, para $q = \infty$ coinciden con el espacio de Nikol'skii: $B^{\alpha}_{p,\infty}(\Omega) \equiv H^{\alpha}_p(\Omega)$.
Los espacios $B^{\alpha}_{p,q}$ con las respectivas métricas son de Banach. A continuación, presentamos estas definiciones.

En estudios recientes en el Programa de Doctorado en Ciencias Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca podemos destacar el uso de una definición de los espacios de Sóbolev $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ a través de la transformación integral de Fourier, ver [6].

Definición 3.2. *Sea $l \in \mathbb{R}$. Definimos el espacio fraccionario de Sóbolev $W_2^l(\mathbb{R}^n)$ a través de la transformación de Fourier $\widehat{f}$, sobre funciones en el espacio dual de Schwarz como sigue:*

$$W_2^l(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{l/2}\widehat{f}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

con la norma

$$\|f\|^2_{B^l_{2,2}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Como es sabido, para todo $l \in \mathbb{N}$, $W_2^l(\mathbb{R}^n) = B^l_{2,2}(\mathbb{R}^n)$, entonces tenemos para el caso concreto $p = q = 2$ una forma de describir los espacios de Nikol'skii-Besov en términos de la trasformada de Fourier.

Definición 3.3. ***(Mediante representaciones integrales)*** *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha, h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $f \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ es finita, donde:*

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \left\| h^{-(\alpha-m)} \left\| \Delta^\sigma_{h,j} \frac{\partial^m}{\partial x_j^m} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L_q^*(\mathbb{R}_+)},$$

con $m = \begin{cases} [\alpha] & \text{si } \alpha \notin \mathbb{Z} \\ \alpha - 1 & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{Z} \\ 2 & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ *y*

$\dfrac{\partial^m}{\partial x_j^m}$ *representa la derivada generalizada según S. L. Sóbolev y $\big(\Delta^\sigma_{h,j} f\big)(x)$ es la diferencia finita de orden σ con paso h respecto a la j-ésima variable:*

$$\big(\Delta_{h,j} f\big)(x) := f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Definición 3.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \alpha$. Se dice que $f \in B^\alpha_{p,q}(\Omega)$ si $f \in L_p(\Omega)$ y es finita, la expresión:*

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L_p} + \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_p^k(f,t)}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}, \ 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L_p} + \sup_{t>0}\left(\frac{\omega^k_p(f,t)}{t^{\alpha}}\right), \quad q=\infty.$$

donde $\omega^k_p(f,t) := \sup_{\substack{h\in\mathbb{R}^n\\ |h|\leq t}} \|\Delta^k_h f\|_{L_p(\Omega_{k,h})}$ *y* $\Delta^k_h f(x) := \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C^l_k f(x+lh)^1$ *son el módulo de continuidad y la diferencia finita de orden* k *respectivamente.*

Para los objetivos de nuestro trabajo nos centraremos en esta última definición. Más precisamente en [14] para $0<\alpha<1$ tenemos que $k=1$ y la norma queda expresada por:

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} := \|f\|_p + \left[\int_0^{\infty}\left(\sup_{\substack{h\in\mathbb{R}^n\\ |h|\leq t}} \|f(x+h)-f(x)\|_p\,\frac{1}{t^{\alpha}}\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}.$$

Así, de acuerdo con [14] se tiene una versión más simplificada del espacio $B^{\alpha}_{p,q}$ descrita en la definición 3.4 que presentamos a continuación:

Definición 3.5. *Sea* $1\leq p,q\leq\infty$, $0<\alpha<1$. *Decimos que* $f\in B^{\alpha}_{p,q}$ *si* $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ *y es finita la expresión:*

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} := \|f\|_p + \left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_p}{|t|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right)^q dt\right]^{1/q},\ 1\leq q<\infty,$$

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}} := \|f\|_p + \sup_{|t|>0}\left(\frac{\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_p}{|t|^{\alpha}}\right),\ q=\infty.$$

Considerando la definición anterior tenemos que los espacios $B^{\alpha}_{p,q}$ se pueden caracterizar con ayuda de la integral de Poisson $u(x,y)$. Tiene lugar el siguiente teorema:

Teorema 3.4. *Sean* $1\leq p,q\leq\infty$, $0<\alpha<1$ *y* $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$. *Entonces* $f\in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si y sólo si*

$$\left\|y^{1-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|\frac{\partial}{\partial y}u(\cdot,y)\right\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L_{q,y}(\mathbb{R}_+)} < \infty.$$

Hasta el momento hemos definido los espacios $B^{\alpha}_{p,q}$ para α pequeño. El teorema anterior permite de manera natural presentar una definición para $\alpha>0$. Diremos que $f\in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ y es finita la expresión:

[1] Notemos que $\Delta_h f(x) = T_h f(x) - If(x)$, donde T_h es el operador de desplazamiento en la dirección de $h\in\mathbb{R}^n$ e I es el operador identidad. Esta diferencia finita es distinta de la usada en la definición 3.3.

$$\left\| y^{k-\alpha-1/q} \left\| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q,$$

donde $k = [\alpha] + 1$.

Puede probarse que se puede tomar cualquier $k > \alpha$ y la definición de $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ no cambia, para más detalles ver [14].

En [14], este resultado se generaliza a órdenes no enteros de diferenciación, usando por ejemplo las derivadas fraccionarias de Caputo. En la siguiente sección detallamos esta generalización a manera de aplicación de nuestros estimativos, con lo cual culminamos nuestro trabajo.

3.4. Caracterización de $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$ a través de derivadas fraccionarias

Teorema 3.5. *Sea $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < \alpha < \beta < 1$ y $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Las siguientes desigualdades son equivalentes:*

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D^{\beta}_y u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q < \infty \quad y \quad \left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D^{\beta}_j u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q < \infty,$$

donde $D^{\beta}_j \equiv D^{\beta}_{x_j}$, $j = 1, \ldots, n$.

Demostración. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < \alpha < \beta < 1$ y $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.
$\Rightarrow$) Supongamos que

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D^{\beta}_y u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q < \infty.$$

Usando el Lema 2.7 tenemos que

$$D^{\gamma}_y D^{\beta}_j u(x, y) = D^{\gamma}_j P_{\frac{y}{2}}(x) * D^{\beta}_y u(x, y/2), \text{ para todo } \gamma > 0.$$

De la desigualdad de Young con $\gamma = 1$, el Lema 2.7 y el Teorema 2.9 obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| D^{\gamma}_y D^{\beta}_j u(\cdot, y) \right\|_p &= \left\| D^{\gamma}_j P_{\frac{y}{2}}(\cdot) * D^{\beta}_y u(\cdot, y/2) \right\|_p \\ &\leq \left\| D^{\gamma}_j P_{\frac{y}{2}}(\cdot) \right\|_1 \left\| D^{\beta}_y u(\cdot, y/2) \right\|_p \\ &\ll y^{-\gamma} \left\| D^{\beta}_y u(\cdot, y/2) \right\|_p. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Así,

$$y^{\gamma}\left\|D_y^{\gamma}D_j^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p \ll \left\|D_y^{\beta}u(\cdot,y/2)\right\|_p,\ \textit{para todo}\ \gamma>0.$$

Luego, para todo $\gamma>0$,

$$\left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}+\gamma}\left\|D_y^{\gamma}D_j^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q \ll \left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q < \infty.$$

Tomando $\gamma=\beta$ tenemos

$$\left\|y^{2\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^{\beta}D_j^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q < \infty,\ \textit{para todo}\ j=1,\cdots,n.$$

Además, el Teorema 2.9 implica que $D_j^{\beta}u(\cdot,y)\to +0,\ \textit{cuando}\ y\to\infty$; por ello

$$D_j^{\beta}u(\cdot,y) = -\int_y^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}D_j^{\beta}u(\cdot,\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}D_j^{\beta}u(\cdot,y) = D_y^{1-\beta}D_y^{\beta}D_j^{\beta}u(\cdot,y).$$

Entonces, usando (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_j^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q &= \left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|\int_y^{\infty}D_y^{1-\beta}D_y^{\beta}D_j^{\beta}u(\cdot,\tau)d\tau\right\|_p\right\|_q\\
&\le \left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\int_y^{\infty}\left\|D_y^{1-\beta}D_y^{\beta}D_j^{\beta}u(\cdot,\tau)\right\|_p d\tau\right\|_q\\
&\ll \left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\int_y^{\infty}\tau^{\beta-1}\left\|D_y^{\beta}D_j^{\beta}u(\cdot,\tau)\right\|_p d\tau\right\|_q\\
&= \left\|y^{1+\beta-\alpha-\frac{1}{q}}H_2\left(y^{\beta-1}\left\|D_y^{\beta}D_j^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right)\right\|_q.
\end{aligned}$$

Ya que $1+\beta-\alpha-\frac{1}{q}>\frac{1}{q'}$, por la desigualdad de Hardy tenemos que

$$\left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_j^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q \ll \left\|y^{2\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^{\beta}D_j^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q < \infty.$$

Y se tiene lo deseado.

$\Leftarrow$) Ahora, probaremos que $\left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^{\beta}u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q<\infty$. Usando el hecho de que $\gamma>0$, el Teorema 2.9, el Lema 2.7 y la desigualdad de Young tenemos que:

$$\left\| D_j^{\beta+\gamma} u(\cdot, y) \right\|_p \ll \left\| D_j^{\gamma} P_{y/2}(\cdot) \right\|_1 \left\| D_j^{\beta} u(\cdot, y/2) \right\|_p$$
$$\ll y^{-\gamma} \left\| D_j^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p,$$

multiplicando por $y^{\beta-\alpha}$, $\beta - \alpha > 0$ obtenemos que

$$y^{\beta-\alpha+\gamma} \left\| D_j^{\beta+\gamma} u(\cdot, y) \right\|_p \ll y^{\beta-\alpha} \left\| D_j^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p.$$

Entonces, para todo $\gamma > 0$,

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}+\gamma} \| D_j^{\beta+\gamma} u(\cdot, y) \|_p \right\|_q \ll \left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \| D_j^{\beta} u(\cdot, y) \|_p \right\|_q < \infty.$$

Tomando $\gamma = 2 - \beta$ tenemos que

$$\left\| y^{2-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial^2 u(\cdot, y)}{\partial x_j^2} \right\|_p \right\|_q < \infty.$$

Utilizando el hecho que u es armónica, probemos que $\left\| y^{2-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial^2 u(\cdot, y)}{\partial y^2} \right\|_p \right\|_q < \infty.$

Como $D_y^{\beta} u(\cdot, y) = I_y^{2-\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(\cdot, y)$, entonces

$$\left\| D_y^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p = \left\| \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_y^{\infty} (\tau - y)^{1-\beta} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(\cdot, \tau) d\tau \right\|_p$$
$$\ll \int_y^{\infty} (\tau - y)^{1-\beta} \left\| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(\cdot, \tau) \right\|_p d\tau \leq \int_y^{\infty} \tau^{1-\beta} \left\| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(\cdot, \tau) \right\|_p d\tau.$$

Así,

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \| D_y^{\beta} u(\cdot, y) \|_p \right\|_q \leq \left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \int_y^{\infty} \tau^{1-\beta} \left\| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(\cdot, \tau) \right\|_p d\tau \right\|_q$$
$$\leq \left\| y^{1+\beta-\alpha-\frac{1}{q}} H_2 \left(y^{1-\beta} \left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(\cdot, y) \right\|_p \right) \right\|_q.$$

Como $1 + \beta - \alpha - \frac{1}{q} > \frac{1}{q'}$, $u(x, y)$ es armónica y aplicando la desigualdad de Hardy, tenemos:

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D_y^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q \ll \left\| y^{2-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q < \infty.$$

$\square$

A continuación enunciaremos y demostraremos la principal aplicación de nuestros estimativos para estos espacios.

Teorema 3.6. *Sean* $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$ *y* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. *Entonces,* $f \in B^{\alpha}_{p,q}$ *si y sólo si*

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D^{\beta}_{y} u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q < \infty.$$

Demostración.
$\Rightarrow$) Notemos que si $\beta = 1$, tenemos el Teorema 3.4, y se tiene lo deseado.
Para $0 < \beta < 1$ y $q < \infty$ supongamos que

$$\left\| \frac{\left\| f(\cdot + t) - f(\cdot) \right\|_p}{|t|^{\frac{n}{q}+\alpha}} \right\|_q < \infty,$$

y probemos que

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D^{\beta}_{y} u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q < \infty.$$

Usando el hecho de que $D^{\beta}_{y} u(x, y) = D^{\beta}_{y} P_y(x) * f(x)$ y el Lema 3.3, tenemos:

$$D^{\beta}_{y} u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} D^{\beta}_{y} P_y(t) f(x - t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} D^{\beta}_{y} P_y(t) \big[f(x - t) - f(x) \big] dt.$$

Tomemos la p-norma en la anterior igualdad, usemos los estimativos del Lema 2.7 y denotemos por $F(t)$ a $\|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p$. Además, usando coordenadas esféricas generalizadas donde $G(\rho) := \int_{S^{n-1}} F(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}, \rho) d\varphi_1, \cdots, d\varphi_n = \int_{S^{n-1}} F(\varphi, \rho) d\varphi$ y $s^{n-1} := \{(x_1, \cdots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho^2\}$ la esfera unitaria, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| D^{\beta}_{y} u(\cdot, y) \right\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D^{\beta}_{y} P_y(t)| F(t) dt \\
&= \int_{|t| \leq y} |D^{\beta}_{y} P_y(t)| F(t) dt + \int_{|t| > y} |D^{\beta}_{y} P_y(t)| F(t) dt \\
&\ll y^{-n-\beta} \int_{|t| \leq y} F(t) dt + \int_{|t| > y} |t|^{-n-\beta} F(t) dt \\
&\ll y^{-n-\beta} \int_0^y \rho^{n-1} G(\rho) d\rho + \int_y^{\infty} \rho^{-\beta-1} G(\rho) d\rho.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\| D_y u(x, y) \right\|_p \ll y^{-n-\beta} \int_0^y \rho^{n-1} G(\rho) d\rho + \int_y^{\infty} \rho^{-\beta-1} G(\rho) d\rho \tag{3.7}$$

Multipliquemos la ecuación (3.7) por $y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}$:

$$\begin{aligned} y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^\beta u(\cdot,y)\right\|_p &\ll y^{-n-\alpha-\frac{1}{q}}\int_0^y \rho^{n-1}G(\rho)d\rho + y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\int_y^\infty \rho^{-\beta-1}G(\beta)d\rho \\ &= y^{1-n-\alpha-\frac{1}{q}}H_1\big[y^{n-1}G(y)\big] + y^{1+\beta-\alpha-\frac{1}{q}}H_2\big[y^{-\beta-1}G(y)\big]. \end{aligned}$$

Ahora tomando q-norma y usando la desigualdad de Hardy tenemos:

$$\begin{aligned} \left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\big\|D_y^\beta u(\cdot,y)\big\|_p\right\|_q &\le \left\|y^{1-n-\alpha-\frac{1}{q}}H_1\big[y^{n-1}G(y)\big]\right\|_q + \left\|y^{1+\beta-\alpha-\frac{1}{q}}H_2\big[y^{-\beta-1}G(y)\big]\right\|_q \\ &\ll \big\|y^{-\alpha-\frac{1}{q}}G(y)\big\|_q + \big\|y^{-\alpha-\frac{1}{q}}G(y)\big\|_q \\ &\ll \big\|y^{-\alpha-\frac{1}{q}}G(y)\big\|_q = \left(\int_0^\infty |\rho^{\alpha-\frac{1}{q}}G(\rho)|^q d\rho\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Como

$$|G(\rho)|^q \le \left(\int_{S^{n-1}}|F(\varphi,\rho)|d\rho\right)^q \le \Big(\|F(\varphi,\rho)\|_{L_q(S^{n-1})}|1|_{L_{q'}(S^{n-1})}\Big)^q \ll \int_{S^{n-1}}|F(\varphi,\rho)|^q d\varphi,$$

y $0<\rho<\infty$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^\beta u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q &\ll \left(\int_0^\infty |G(\rho)|^q|\rho^{-\alpha-\frac{1}{q}}|^q d\rho\right)^{1/q} \\ &\ll \left[\int_0^\infty \rho^{-\alpha q-1}\left(\int_{S^{n-1}}\big|F(\varphi,\rho)\big|^q d\varphi\right)d\rho\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^n}|t|^{-\alpha q-n}F^q(t)dt\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{F(t)}{|t|^{\alpha+\frac{n}{q}}}\right)^q dt\right]^{1/q} = \left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|f(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p^q}{|t|^{(\alpha+\frac{n}{q})q}}dt\right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^\beta u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q \ll \left\|\frac{\|f(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p}{|t|^{\alpha+\frac{n}{q}}}\right\|_q < \infty.$$

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que

$$\left\| y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D_y^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p \right\|_q < \infty,$$

y probemos que

$$\left\| \frac{\left\| f(\cdot + t) - f(\cdot) \right\|_p}{|t|^{\frac{n}{q}+\alpha}} \right\|_q < \infty.$$

Como

$$f(x+t) - f(x) = u(x+t, y) - u(x, y) + f(x+t) - u(x+t, y) + u(x, y) - f(t), \quad (3.8)$$

y

$$u(x+t, y) - u(x, y) = \int_0^1 \nabla u(x + st, y) \cdot t ds,$$

tenemos que

$$|u(x+t, y) - u(x, y)| \leq \int_0^1 |\nabla u(x + st, y)||t| ds \ll |t| \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u(\cdot, y) \right| ds,$$

así,

$$\left\| u(\cdot + t, y) - u(\cdot, y) \right\|_p \leq |t| \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(\cdot, y) \right\|_p .$$

Reescribiendo $\frac{\partial}{\partial x_j} u(\cdot, y)$, usando la desigualdad de Young con $p = \infty$, $r = 1$ y el Teorema 2.9 tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(\cdot, y) \right\|_p &= \left\| D_j^{1-\beta} D_j^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p = \left\| D_j^{1-\beta} P_{\frac{y}{2}}(\cdot) * D_j^{\beta} u(\cdot, y/2) \right\|_p \\ &\leq \left\| D_j^{1-\beta} P_{\frac{y}{2}}(\cdot) \right\|_1 \left\| D_j^{\beta} u(\cdot, y/2) \right\|_p \ll y^{\beta-1} \left\| D_j^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p . \end{aligned}$$

Luego,

$$\left\| u(\cdot + t, y) - u(\cdot, y) \right\|_p \leq |t| y^{\beta-1} \sum_{j=1}^{n} \left\| D_j^{\beta} u(\cdot, y) \right\|_p . \quad (3.9)$$

Dado que la integral de Poisson es armónica tenemos que:

$$f(\cdot) - u(\cdot, y) = -\int_0^y \frac{\partial}{\partial \tau} u(\cdot, \tau) d\tau,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\|f(\cdot)-u(\cdot,y)\|_p &\leq \int_0^y \left\|\frac{\partial}{\partial\tau}u(\cdot,\tau)\right\|_p d\tau = \int_0^1 \left\|D_\tau^{1-\beta}D_\tau^\beta u(\cdot,\tau)\right\|_p d\tau \\ &= \int_0^y \left\|D_\tau^{1-\beta}P_{\frac{y}{2}}(\cdot)*D_\tau^\beta u(\cdot,\tau/2)\right\|_p d\tau \leq \int_0^y \left\|D_\tau^{1-\beta}P_{\frac{y}{2}}(\cdot)\right\|_1\left\|D_\tau^\beta u(\cdot,\tau/2)\right\|_p d\tau \\ &\ll \int_0^y \tau^{\beta-1}\left\|D_\tau^\beta u(\cdot,\tau/2)\right\|_p d\tau.\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos por $y^{-\alpha-\frac{1}{q}}$ y tomamos la q-norma. Además, teniendo en cuenta que $1-\alpha-\frac{1}{q}<\frac{1}{q'}$, y usando la desigualdad de Hardy, tenemos que:

$$\begin{aligned}\left\|y^{-\alpha-\frac{1}{q}}\|f(\cdot)-u(\cdot,y)\|_p\right\|_q &\leq \left\|y^{-\alpha-\frac{1}{q}}\int_0^y \tau^{\beta-1}\left\|D_\tau^\beta u(\cdot,\tau)\right\|_p d\tau\right\|_q \\ &\leq \left\|y^{1-\alpha-\frac{1}{q}}H_1\Big(y^{\beta-1}\left\|D_y^\beta u(\cdot,y)\right\|_p\Big)\right\|_q \\ &\ll \left\|y^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}\left\|D_y^\beta u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q<\infty.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Aplicando p-norma en (3.8) y dividiendo entre $|t|^{\frac{n}{q}+\alpha}$ tenemos que

$$\frac{\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_p}{|t|^{\frac{n}{q}+\alpha}} \ll |t|^{1-\frac{n}{q}-\alpha}y^{\beta-1}\sum_{j=|}^{n}\left\|D_j^\beta u(\cdot,y)\right\|_p+|t|^{\frac{-n}{q}-\alpha}\|f(\cdot)-u(\cdot,y)\|_p.$$

Tomando q-norma y $y=|t|$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_p}{|t|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right\|_q &= \left\||t|^{\beta-\alpha-\frac{n}{q}}\sum_{j=1}^{n}\left\|D_j^\beta u(\cdot,|t|)\right\|_p+|t|^{\frac{-n}{q}-\alpha}\|f(\cdot)-u(\cdot,|t|)\|_p\right\|_q \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\left\||t|^{\beta-\alpha-\frac{n}{q}}\left\|D_j^\beta u(\cdot,|t|)\right\|_p\right\|_q+\left\||t|^{-\frac{n}{q}-\alpha}\|f(\cdot)-u(\cdot,|t|)\|_p\right\|_q.\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\|\frac{\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_p}{|t|^{\frac{n}{q}+\alpha}}\right\|_q \leq \sum_{j=1}^{n}\left\||t|^{\beta-\alpha-\frac{n}{q}}\left\|D_j^\beta u(\cdot,y)\right\|_p\right\|_q+\left\||t|^{-\frac{n}{q}-\alpha}\|f(\cdot)-u(\cdot,y)\|_p\right\|_q. \tag{3.11}$$

Analicemos la parte derecha de (3.11) que nos permitirá garantizar nuestro resultado.

En primer lugar, usando coordenadas esféricas generalizadas tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| |t|^{\beta-\alpha-\frac{n}{q}} \left\| D_j^\beta u(\cdot, |t|) \right\|_p \right\|_q &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|t|^{\beta-\alpha-\frac{n}{q}} \left\| D_j^\beta u(\cdot, |t|) \right\|_p \right)^q dt \\
&\ll \int_0^\infty \rho^{n-1} \left(\rho^{\beta-\alpha-\frac{n}{q}} \left\| D_j^\beta u(\cdot, \rho) \right\|_p \right)^q d\rho \\
&= \int_0^\infty \left\| \rho^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \left\| D_j^\beta u(\cdot, \rho) \right\|_p \right)^q d\rho < \infty.
\end{aligned}$$

Además, por (3.10) podemos concluir que el segundo término de (3.11) es finito.
Y así se obtiene lo deseado, es decir, $f \in B_{p,q}^\alpha$ con $1 \leq q < \infty$.

El caso $q = \infty$ se demuestra de forma similar.

$\square$

El anterior teorema nos permitió mostrar una caracterización para los espacios de Nikol‘skii-Besov a través de los estimativos hallados a lo largo del Capítulo II, permitiéndonos ampliar la forma de considerar este tipo de espacios, más allá de su definición.

Bibliografía

[1] Aguilar, G. *El problema mecánico de Abel:Una aplicación sencilla del Teorema de convolución, Miselanea Matemática*, 1996. https://miscelaneamatematica.org

[2] Apostol, T., *Análisis Matemático*, California institute of Technology, Editorial Reverté, S.A., 1991.

[3] Bobadilla, M.; Enríquez, F.; Montes, A. y Tobar, J. , *Caracterización de los espacios de Lipschitz en términos de las derivadas de orden no entero de las integrales de Poisson*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol XV N1, 67-76, 2007.

[4] Burenkov, V. *Sobolev Spaces on Domains*, Editorial B.G.Teubner GmbH, 1998.

[5] Calderon, M.; Rosales, J.; Guzman, R. y González, R., *El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones*, Acta Universitaria Vol. 25. No.2, 20-27, 2015. https://doi.org/10.15174/au.2015.688

[6] Córdoba, R., *Local well-posedness for a class of 1D Boussinesq systems*, Tesis de Doctorado, Universidad del Cauca, 2022.

[7] Enríquez, F., *Characterization of function spaces with noninteger order of derivatives in terms of harmonic extensions*, Tesis de Maestría, Moscú 1992.

[8] Enríquez, F.; Montes, A. y Pérez, J., *Caracterización de los espacios de Lipschitz a través de las derivadas fraccionarias según Liouville*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XVII, N2, 57-72, 2009.

[9] Enríquez, F.; Montes, A. y Pérez, J., *A characterization of structural Nikol'skii-Besov space using fractional derivatives*, Boletín de Matemáticas, Vol 17, N1, 77-98, 2010.

[10] Kesavan, S., *Topics in Functional Analysis and Applications*, School of Mathematics Tata Institute of Fundamental Research Bangalore, India, 1989.

[11] Kolmogorov, A. y Fomin, S., *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial Mir. Moscú, 1975.

[12] Kudriávsev, L., *Curso de Análisis Matemático. Tomo II*, Editorial Mir. Moscú, 1983.

[13] Samko, S.; Kilbas, A. y Marichev, O., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publisher S.A., 1993.

[14] Stein, E., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[15] Royden, H., *Real Analysis*, Second Edition, The Macmillan Company, 1968.