EXISTENCIA DE ONDAS VIAJERAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES TIPO OSTROVSKY

ALVARO FELIPE GALINDEZ HURTADO

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán - Cauca
2020

EXISTENCIA DE ONDAS VIAJERAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES TIPO OSTROVSKY

ALVARO FELIPE GALINDEZ HURTADO

Tesis presentada como requisito parcial
para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas

Dr. ALEX M. MONTES PADILLA
Director

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán - Cauca
2020

Nota de aceptación

Dr. Alex Manuel Montes Padilla
Director

Dr. Juan Carlos Muñoz Grajales
Jurado

Dr. Ramiro Miguel Acevedo Martínez
Jurado

A mis padres, hermanos y sobrino,
son la fuente de mi felicidad y el motor de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por su infinito amor y bondad, por impulsar mis sueños y darme fuerza y sabiduría para continuar pese a las situaciones difíciles y permitir que este sueño se haga realidad.

Agradezco a mis padres y hermanos por todo su apoyo, amor y paciencia, por compartir incondicionalmente conmigo este sueño, por su voz de aliento ante las adversidades y sus manifestaciones de alegría y orgullo.

Quiero agradecer a los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, con quienes tuve la oportunidad de compartir en seminarios o conversaciones informales, especialmente quiero expresar mi agradecimiento a mi director de tesis Dr. Alex Manuel Montes Padilla, por su apoyo, acompañamiento, observaciones, sugerencias y tiempo de dedicación durante el proceso de realización de esta investigación.

También agradezco al comité de evaluación, por su gran disposición y colaboración al revisar de manera rigurosa este documento y a través de sus correcciones, observaciones y sugerencias aportaron en complementar y mejorar este trabajo.

Finalmente, agradezco a mis amigos y compañeros, con quienes compartí el día a día del fascinante mundo de las Matemáticas, en especial a Ricardo, Daniela, Angélica, Alina, Javier y Wilson y de manera muy especial a Andrea y a su familia, quienes me brindaron su apoyo incondicional, cuidado y palabras de aliento, ella es la fuente de inspiración que impulsa mi vida y me lleva a transformar los sueños en realidad.

Resumen

En esta tesis mostramos la existencia y la analiticidad de soluciones de onda viajera para el sistema de ecuaciones tipo Ostrovsky

$$\begin{cases} (u_t + uu_x + u_{xxx} + (uv)_x + vv_x)_x + \beta u = 0, \\ \\ (v_t + vv_x + v_{xxx} + (uv)_x + uu_x)_x + \gamma v = 0, \end{cases}$$

que modela la evolución de ondas largas de pequeña amplitud en un fluido con rotación. Para tal efecto caracterizamos las soluciones de onda viajera como puntos críticos de un funcional definido adecuadamente. La existencia de estos puntos críticos se sigue de la aplicación del Teorema de Paso de Montaña.

Índice general

Introducción

Hace más de 200 años, el ingeniero escocés John Scott Russell (1808-1882) realizó un extraordinario descubrimiento científico: el fenómeno de onda solitaria u onda viajera. Mientras realizaba experimentos para determinar un diseño más eficiente de botes para viajar a lo largo de un canal, J. S. Russel observó en la superficie del canal la propagación de una ondulación que viajaba aparentemente a una velocidad constante, sin cambiar su forma y que su trayectoria describía una curva suave; la siguió por varios kilómetros y notó que esta onda no parecía debilitarse remontando la corriente. Este evento tuvo lugar en el Canal Unión en Hermiston (Escocia), muy cerca del campus Riccarton de la Universidad de Heriot-Watt (Edimburgo).

Algún tipo de explicación para la existencia de ondas viajeras apareció sólo hasta el año 1870 con los trabajos realizados por Joseph Boussinesq. Este físico-matemático probó que bajo algunas consideraciones especiales la situación se puede modelar mediante la ecuación diferencial uno dimensional no lineal,

$$u_{tt} - ghu_{xx} - g\left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{h^3}{3}u_{xx}\right)_{xx} = 0,$$

donde u representa la elevación superficial de la onda, g es la constante gravitacional y h es la profundidad media del fluido. Además, demostró matemáticamente la existencia de ondas viajeras con velocidad $c > 0$, es decir, mostró la existencia de soluciones de la forma

$$u = u(x - ct).$$

En 1895, dos matemáticos holandeses, Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) y su estudiante Gustav de Vries (1866-1934), obtuvieron una ecuación satisfactoria que describe el perfil de la onda viajera. Esta ecuación está basada en la suposición de que la profundidad del agua es pequeña en comparación con la amplitud de las ondas. La ecuación propuesta por D. Korteweg y G. de Vries denominada ecuación Korteweg-de Vries (ecuación KdV),

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

es uno de los modelos clásicos no lineales más relevantes en el estudio de ondas de agua de gran elongación y de pequeña amplitud en dimensión espacial uno. En la ecuación KdV u representa la elevación superficial de la onda y no se considera el fenómeno de rotación.

Es conocido que la situación física de la evolución de una onda en un fluido se describe en términos de dos variables fundamentales: la elevación superficial y la velocidad potencial. En particular, los modelos para ondas no lineales son derivados del "problema general de ondas en un fluido"mediante un proceso de aproximación, bajo la imposición de algunas restricciones de los parámetros que afectan la propagación de las ondas.

Hoy en día se conocen muchos modelos uno-dimensionales de ecuaciones diferenciales que describen la evolución de ondas en un fluido en términos de la elevación superficial bajo diferentes consideraciones, entre los cuales destacamos la ecuación Benjamin-Bona-Mahony, la ecuación Camassa-Holm y ecuaciones tipo Boussinesq. La ecuación 1D-Benney-Luke se destaca como un modelo para la evolución de ondas de gran elongación y pequeña amplitud en un fluido en términos de la velocidad potencial. En todos los modelos anteriores se ha probado la existencia de soluciones de onda viajera; en algunos casos se ha determinado soluciones explícitas y en otros casos se ha mostrado la existencia teórica de tales soluciones. Además es de anotar que los mencionados modelos no consideran rotación en el fluido.

Es interesante el hecho de que el fenómeno de onda viajera se presente en otras situaciones físicas como en problemas de óptica, electromagnetismo, acústica, física del plasma, dinámica de electrones, etc. Además, el uso de ondas viajeras tiene diferentes aplicaciones, en especial en el envío de señales y las telecomunicaciones.

El uso de ondas viajeras fue propuesto en 1973 por Akira Hasegawa, de los laboratorios Bell de la empresa AT&T, para mejorar el rendimiento de las transmisiones en las redes ópticas de telecomunicaciones. En 1988 Linn Mollenauer y su equipo transmitieron ondas solitarias a más de 4.000 km usando el efecto Raman (nombre de un científico indio que describió una forma de amplificar las señales en una fibra óptica). En 1991, también en los laboratorios Bell, un equipo transmitió ondas solitarias a más de 14.000 km utilizando amplificadores de Erbio. En 2001 los solitones (ondas viajeras de energía finita) encontraron una aplicación práctica con el primer equipo de telecomunicaciones, que los utilizaba para transporte de tráfico real de señales sobre una red comercial.

L. A. Ostrovsky en 1978 en el artículo [8] dedujo la ecuación uno-dimensional

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x = \gamma u,$$

como un modelo para la evolución de ondas largas de pequeña amplitud en un fluido considerando la rotación. En este modelo u representa la elevación superficial de la onda y es obtenida del problema general de fluidos por medio de un proceso de aproximación para eliminar la variable que representa la velocidad potencial. Este modelo ha sido bastante estudiado y en particular se ha mostrado la existencia de soluciones de onda viajera.

Recientemente, A. Alias en su tesis doctoral (ver [1]) derivó el sistema de ecuaciones uno-dimensional no lineal

$$\begin{cases} (u_t + uu_x + u_{xxx} + n(uv)_x + mvv_x + \alpha v_{xxx})_x + \beta u + \varepsilon v = 0, \\ \\ (v_t + vv_x + \delta v_{xxx} + \theta v_x + p(uv)_x + quu_x + \lambda u_{xxx})_x + \mu u + \gamma v = 0, \end{cases}$$

como un modelo para la evolución de ondas largas de pequeña amplitud en un fluido considerando la rotación, y considerando las dos variables para el fenómeno como son la elevación superficial u y la velocidad potencial v. En este caso, desde el punto de vista físico, parece más apropiado y realista estudiar la evolución de ondas en un fluido con rotación a través del sistema anterior, sin la eliminación de la velocidad potencial como es el caso de la ecuación de Ostrovsky.

Ahora bien, cuando se estudia un sistema de ecuaciones relacionado con un modelo físico es importante mostrar la existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial asociado, así como es importante mostrar la existencia de soluciones especiales como las denominadas soluciones de onda viajera. Hasta el conocimiento de quien realizó este trabajo no existen resultados de esta índole para el sistema de ecuaciones anteriormente descrito.

A. Esfahani y S. Levandosky en el trabajo [5] mostraron la existencia de ondas viajeras para el caso particular,

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x &= 0, \\ \\ (v_t + v_{xxx} + (uv)_x)_x &= \gamma v. \end{cases}$$

Para acercarnos un poco más al estudio del modelo completo derivado por A. Alias, en el presente trabajo proponemos estudiar la existencia de ondas viajeras para el caso particular,

$$
\begin{cases}
(u_t + uu_x + u_{xxx} + (uv)_x + vv_x)_x + \beta u = 0, \\
\\
(v_t + vv_x + v_{xxx} + (uv)_x + uu_x)_x + \gamma v = 0.
\end{cases}
\tag{1}
$$

Aprovechando la estructura Hamiltoniana del sistema (1), usando una técnica variacional, mostraremos la existencia de soluciones de la forma

$$
u(x,t) = w(x - ct), \quad v(x,t) = z(x - ct),
\tag{2}
$$

donde la técnica de aproximación variacional radica en caracterizar las soluciones de onda viajera como puntos críticos de un funcional adecuado y la existencia de dichos puntos críticos se obtiene como consecuencia del Teorema de Paso de Montaña. Además en este trabajo demostraremos que las soluciones de onda viajera del modelo (1) son funciones analíticas en el sentido de que admiten un desarrollo en serie de Taylor.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 describimos la caracterización variacional de las soluciones de onda viajera como puntos críticos de un funcional adecuado. En el Capítulo 2 mostraremos la existencia de soluciones de onda viajera para el sistema de ecuaciones (1), usando el Teorema de Paso de Montaña. En el Capítulo 3 estableceremos que las soluciones de onda viajera son funciones analíticas. A lo largo del trabajo C denotará una constante genérica cuyo valor puede cambiar de línea a línea.

Capítulo 1

Aproximación Variacional

Notemos que el sistema de ecuaciones diferenciales (1) se puede escribir en la forma equivalente

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + (uv)_x + vv_x + \beta\partial_x^{-1}u &= 0, \\ \\ v_t + vv_x + v_{xxx} + (uv)_x + uu_x + \gamma\partial_x^{-1}v &= 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde el operador ∂_x^{-1} se define por

$$\partial_x^{-1}h(x) = \int_{-\infty}^{x} h(s)ds.$$

Es fácil ver que si (u, v) es una solución de la forma (2) para el sistema anterior, entonces (w, z) debe satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \left(cw - \frac{1}{2}w^2 - w'' - wz - \frac{1}{2}z^2 - \beta\partial_x^{-2}w\right)' &= 0, \\ \\ \left(cz - \frac{1}{2}z^2 - z'' - wz - \frac{1}{2}w^2 - \gamma\partial_x^{-2}z\right)' &= 0. \end{cases}$$

Por lo tanto existen constantes A_1 y A_2 tales que

$$\begin{cases} cw - \frac{1}{2}w^2 - w'' - wz - \frac{1}{2}z^2 - \beta\partial_x^{-2}w &= A_1, \\ \\ cz - \frac{1}{2}z^2 - z'' - wz - \frac{1}{2}w^2 - \gamma\partial_x^{-2}z &= A_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ahora bien, si consideramos soluciones (w, z) con la propiedad de que,

$$w^{(n)}(y) \to 0, \quad z^{(n)}(y) \to 0, \quad \text{cuando} \quad |y| \to \infty, \quad n = -2, -1, 0, 1, 2,$$

entonces tenemos que el sistema de ecuaciones (1.2) toma la forma

$$\begin{cases} cw - \frac{1}{2}w^2 - w'' - wz - \frac{1}{2}z^2 - \beta\partial_x^{-2}w &= 0, \\ cz - \frac{1}{2}z^2 - z'' - wz - \frac{1}{2}w^2 - \gamma\partial_x^{-2}z &= 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar la existencia de soluciones para el sistema de ecuaciones (1.3) en el espacio $Y = Y(\mathbb{R})$ definido por

$$Y = \{(w, z) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) : (\partial_x^{-1} w, \partial_x^{-1} z) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})\},$$

dotado con la norma

$$\|(w, z)\|_Y = \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(w^2 + (w')^2 + (\partial_x^{-1} w)^2 + z^2 + (z')^2 + (\partial_x^{-1} z)^2\Big) dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

en donde $H^1 = H^1(\mathbb{R})$, es el espacio de Sobolev estándar definido como la completación del espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ y norma

$$\|v\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} \Big(v^2 + (v')^2\Big) dx.$$

Aquí $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en $\mathbb{R}$, es decir,

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad | \ f(x) = 0 \ \textit{para todo} \ x \in \mathbb{R} \setminus K, \ \textit{donde} \ K \ \textit{es compacto} \big\}.$$

El soporte de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se denota por *supp* f y se define como la clausura del conjunto $\big\{x \in \mathbb{R} \ \ | \ \ f(x) \ \neq \ 0 \ \big\}$. También consideramos el espacio

$$(C_0^\infty \times C_0^\infty)(\mathbb{R}) = \big\{ (f, g) \ | \ (f(x), g(x)) = 0 \ \textit{para todo} \ x \in \mathbb{R} \setminus K, \ \textit{donde} \ K \ \textit{es compacto} \big\},$$

y definimos *supp* (f, g) como la clausura del conjunto $\big\{ x \in \mathbb{R} \ \ | \ \ (f(x), g(x)) \ \neq \ 0 \ \big\}$ si $(f, g) \in (C_0^\infty \times C_0^\infty)(\mathbb{R})$. Además, para $1 \leq p < \infty$ y Ω un subconjunto de $\mathbb{R}$, consideramos el espacio

$$L^p(\Omega) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ | \ \ f \ \textit{es medible y} \ \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \big\},$$

con norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \ dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\int_\Omega f(x) \ dx$ denota la integral de Lebesgue. Además consideramos el espacio

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad | \ f \ \textit{ es medible y} \ (\exists \ \ M > 0 \ ) \ (\ |f(x)| \leq M \quad \textit{p.c.t.} \ \ x \in \Omega \ ) \ \Big\},$$

con norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \text{ínf} \ \ \big\{ M \quad | \ \ |f(x)| \leq M \quad \textit{p.c.t.} \ \ x \in \Omega \big\}.$$

También definamos el espacio

$$L^p_{loc}(\Omega) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ | \ \ \chi_K f \in L^p(\Omega), \ \ \textit{para todo} \ K \subset \Omega \ \ \textit{compacto} \big\},$$

donde χ_K representa la función característica relativa a K.

Ahora, para lograr el objetivo usaremos el conocido método variacional, el cual ha sido utilizado en diferentes modelos de ecuaciones no lineales (ver [4], [9], [11], [12], entre otros trabajos). En este método las soluciones se caracterizan como puntos críticos de un funcional definido adecuadamente. En efecto, si definimos en el espacio Y el funcional

$$J_c(w,z) = I_c(w,z) - G(w,z),$$

donde

$$\begin{aligned} I_c(w,z) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(cw^2 + (w')^2 + \beta(\partial_x^{-1}w)^2 + cz^2 + (z')^2 + \gamma(\partial_x^{-1}z)^2\right) dx, \\ G(w,z) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{3}w^3 + wz^2 + w^2 z + \frac{1}{3}z^3\right) dx, \end{aligned}$$

entonces $I_c, G, J_c \in C^1(Y,\mathbb{R})$ y las derivadas en (w,z) en la dirección de (W,Z) están dadas por

$$\begin{aligned} \left\langle I_c'(w,z),(W,Z)\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (cwW + w'W' + \beta\partial_x^{-1}w\partial_x^{-1}W + czZ + z'Z' + \gamma\partial_x^{-1}z\partial_x^{-1}Z)\, dx, \\ \left\langle G'(w,z),(W,Z)\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}w^2 W + \frac{1}{2}z^2 W + wzW + \frac{1}{2}w^2 Z + \frac{1}{2}z^2 Z + wzZ\right) dx. \end{aligned}$$

Una prueba detallada del anterior cálculo la presentaremos en el siguiente capítulo. Luego, usando integración por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle I_c'(w,z),(W,Z)\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (cwW + w'W' + \beta\partial_x^{-1}w\partial_x^{-1}W + czZ + z'Z' + \gamma\partial_x^{-1}z\partial_x^{-1}Z)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (cwW - w''W - \beta\partial_x^{-2}wW + czZ - z''Z - \gamma\partial_x^{-2}zZ)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\begin{pmatrix} cw - w'' - \beta\partial_x^{-2}w \\ cz - z'' - \gamma\partial_x^{-2}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}\right] dx \end{aligned}$$

y también que

$$\left\langle G'(w,z),(W,Z)\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}z^2 + wz \\ \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}z^2 + wz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}\right] dx,$$

entonces concluimos que

$$J_c'(w,z) = I_c'(w,z) - G'(w,z) = \begin{pmatrix} cw - w'' - \beta\partial_x^{-2}w - \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}z^2 - wz \\ cz - z'' - \gamma\partial_x^{-2}z - \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}z^2 - wz \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si (w,z) es un punto crítico del funcional J_c en el espacio Y entonces (w,z) es una solución del sistema de ecuaciones (1.3). Es decir, (w,z) es una solución de onda viajera. De esta manera debemos demostrar la existencia de puntos críticos para el funcional J_c. Para esto usaremos la siguiente versión del Teorema de Paso de Montaña.

Teorema 1 *(Teorema 1.15 en [12]) Sean X un espacio de Hilbert, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$, $r > 0$ tales que $\|e\|_X > r$ y*

$$\vartheta = \inf_{\|v\|_X = r} \varphi(v) > \varphi(0) \geq \varphi(e).$$

Entonces, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in X$ tal que

$$\varphi(v_n) \to \delta, \quad \varphi'(v_n) \to 0 \quad en \quad X' \quad y \quad \delta \geq \vartheta$$

donde

$$\delta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)) \quad y \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \, \gamma(1) = e\}.$$

Capítulo 2

Existencia de Ondas Viajeras

En este capítulo, para el sistema de ecuaciones (1.1) mostraremos la existencia de soluciones de onda viajera, con valores fijos de los parámetros $\gamma, \beta > 0$ y velocidad de onda $c > 0$. Es decir, mostraremos la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones (1.3) en el espacio Y, lo que es equivalente a mostrar la existencia de puntos críticos del funcional J_c definido como

$$J_c(w, z) = I_c(w, z) - G(w, z),$$

donde los funcionales I_c y G están definidos en Y por

$$\begin{aligned} I_c(w, z) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(cw^2 + (w')^2 + \beta(\partial_x^{-1} w)^2 + cz^2 + (z')^2 + \gamma(\partial_x^{-1} z)^2 \right) dx, \\ G(w, z) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{3}\, w^3 + wz^2 + w^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right) dx. \end{aligned}$$

Para establecer la existencia de un punto crítico no trivial para el funcional J_c, probaremos inicialmente algunas propiedades de los funcionales I_c y G. Primero recordemos que el espacio de Sobolev $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, se define como la completación del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma

$$\|v\|^2_{H^k(\Omega)} = \sum_{m=0}^{k} \int_\Omega \left[v^{(m)} \right]^2 dx,$$

donde $\Omega = (a, b)$ es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ no necesariamente acotado.

Además definimos el espacio $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{H} = \{w \in H^1(\mathbb{R}) : \partial_x^{-1} w \in L^2(\mathbb{R})\},$$

el cual está dotado del producto interno

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, v \rangle_{H^1(\mathbb{R})} + \langle \partial_x^{-1} u, \partial_x^{-1} v \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.1}$$

Este producto interno induce la norma

$$\|w\|_{\mathcal{H}} = \langle w, w\rangle_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} = \Big(\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \|\partial_x^{-1} w\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(w^2 + (w')^2 + (\partial_x^{-1} w)^2\Big) dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

la cual es equivalente a la norma

$$\|w\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|\partial_x^{-1} w\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Teniendo en cuenta el producto interno (2.1) el espacio $\mathcal{H}$ tiene las siguientes propiedades: es un espacio de Hilbert, es un espacio reflexivo, el espacio de funciones $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{H}$; adicionalmente dado que la inclusión $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})$ es continua para $2 \leq q \leq \infty$, concluimos que la inclusión $\mathcal{H} \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})$, $2 \leq q \leq \infty$ es continua. Además la inclusión $\mathcal{H} \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R})$, $2 \leq q < \infty$ es compacta (ver Lema 3.3 en [6] y Observación 1.1 en [5]). Es decir, si $\{u_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{H}$ y $K \subset \mathbb{R}$ es cualquier compacto, entonces existe $u \in L^q(K)$ tal que $u_n \to u$ en $L^q(K)$. Para conocer detalles sobre la técnica para demostrar este tipo de resultados se puede ver la prueba del Teorema 7.2 en [12].

Note que si $u \in \mathcal{H}$ entonces $\partial_x^{-1} u \in L^2(\mathbb{R})$ y por tanto para cualquier $v \in L^2(\mathbb{R})$ y cualquier compacto K tenemos que

$$\int_K \partial_x^{-1} u\, v\, dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_K \partial_x^{-1} u\, v\, dx,$$

donde χ_K es la función característica relativa a K. Los resultados anteriores los usaremos a lo largo del desarrollo de este trabajo. Ahora, notamos que el espacio Y (ver introducción) es de tal manera que

$$Y = \mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

está dotado con la norma

$$\|(w, z)\|_Y = (\|w\|^2_{\mathcal{H}} + \|z\|^2_{\mathcal{H}})^{\frac{1}{2}},$$

la cual es equivalente a la norma

$$\|(w, z)\|_Y = \|w\|_{\mathcal{H}} + \|z\|_{\mathcal{H}},$$

y $(C_0^\infty \times C_0^\infty)(\mathbb{R})$ es denso en Y.

En el siguiente lema mostraremos algunas propiedades fundamentales de los funcionales I_c, G y J_c.

Lema 1 *Supongamos $\gamma, \beta, c > 0$. Entonces*

1. *Los funcionales I_c, G y J_c están bien definidos en Y.*

2. *El funcional I_c es no negativo. Más aún, existen constantes positivas $C_1 = C_1(\beta, \gamma, c)$, $C_2 = C_2(\beta, \gamma, c)$ tales que*

$$C_1 \|(w, z)\|_Y^2 \leq I_c(w, z) \leq C_2 \|(w, z)\|_Y^2. \tag{2.2}$$

3. *$I_c, G, J_c \in C^1(Y, \mathbb{R})$.*

Demostración. Si $(w, z) \in Y$, entonces $w, w', z, z', \partial_x^{-1} w, \partial_x^{-1} z \in L^2(\mathbb{R})$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
I_c(w, z) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(cw^2 + (w')^2 + \beta(\partial_x^{-1} w)^2 + cz^2 + (z')^2 + \gamma(\partial_x^{-1} z)^2 \right) \, dx \\
&\leq \text{máx} \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}, \frac{c}{2}, \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}} \left(w^2 + (w')^2 + (\partial_x^{-1} w)^2 + z^2 + (z')^2 + (\partial_x^{-1} z)^2 \right) \, dx \\
&= C_2(\beta, \gamma, c) \|(w, z)\|_Y^2.
\end{aligned}$$

De forma similar obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_c(w, z) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(cw^2 + (w')^2 + \beta(\partial_x^{-1} w)^2 + cz^2 + (z')^2 + \gamma(\partial_x^{-1} z)^2 \right) \, dx \\
&\geq \text{mín} \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}, \frac{c}{2}, \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}} \left(w^2 + (w')^2 + (\partial_x^{-1} w)^2 + z^2 + (z')^2 + (\partial_x^{-1} z)^2 \right) \, dx \\
&= C_1(\beta, \gamma, c) \|(w, z)\|_Y^2.
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que el funcional I_c está bien definido en Y, es no negativo y la desigualdad (2.2) se satisface. Ahora, observemos que el funcional G está bien definido en Y. Más aún, mostremos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|G(w, z)| \leq C \|(w, z)\|_Y^3. \tag{2.3}$$

En efecto, si $(w, z) \in Y$ entonces, usando el hecho de que la inclusión $\mathcal{H} \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})$ es continua para $q \geq 2$, vemos que existe una constante positiva C tal que para toda $u \in \mathcal{H}$,

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.4}$$

Además puesto que $\|(w, z)\|_Y = \|w\|_{\mathcal{H}} + \|z\|_{\mathcal{H}}$ se sigue que

$$\|w\|_{\mathcal{H}} \leq \|(w, z)\|_Y \quad y \quad \|z\|_{\mathcal{H}} \leq \|(w, z)\|_Y. \tag{2.5}$$

Entonces, usando desigualdad de Hölder y las desigualdades (2.4) y (2.5), obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |w^3|\,dx &= \int_{\mathbb{R}} |w||w|^2\,dx\\ &\leq \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}\|w\|^2_{L^4(\mathbb{R})}\\ &\leq C\|w\|^3_{\mathcal{H}}\\ &\leq C\|(w,z)\|^3_Y,\end{aligned}$$

y de manera similar obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |z^3|\,dx \leq C\|(w,z)\|^3_Y.$$

Además

$$\int_{\mathbb{R}} |wz^2|\,dx \leq \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}\|z\|^2_{L^4(\mathbb{R})} \leq C\|w\|_{L^2(\mathbb{R})}\|z\|^2_{\mathcal{H}} \leq C\|(w,z)\|^3_Y,$$

y también

$$\int_{\mathbb{R}} |w^2z|\,dx \leq \|w\|^2_{L^4(\mathbb{R})}\|z\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|w\|^2_{\mathcal{H}}\|z\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|(w,z)\|^3_Y.$$

Por ello podemos ver que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|G(w,z)| &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{3}|w^3| + |wz^2| + |w^2z| + \frac{1}{3}|z^3|\Big)dx\\ &\leq C\|(w,z)\|^3_Y.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el funcional G está bien definido en Y, además existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad (2.3) se cumple.

Finalmente, es posible demostrar que $I_c, G, J_c \in C^1(Y,\mathbb{R})$. En efecto, si definimos los funcionales $I_1(w,z)$, $I_2(w,z)$ e $I_3(w,z)$ por

$$I_1(w,z) = \int_{\mathbb{R}} (w^2 + z^2)\,dx, \quad I_2(w,z) = \int_{\mathbb{R}} ((w')^2 + (z')^2)\,dx,$$

$$I_3(w,z) = \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x^{-1}w)^2 + (\partial_x^{-1}z)^2)\,dx,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\big\langle I_1'(w,z),(W,Z)\big\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(I_1((w,z)+t(W,Z)) - I_1(w,z)\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \Big((w+tW)^2 + (z+tZ)^2 - w^2 - z^2\Big)\,dx\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} (2t(wW+zZ) + t^2(W^2+Z^2))\,dx\\ &= 2\int_{\mathbb{R}} (wW+zZ)dx.\end{aligned}$$

De igual manera obtenemos que

$$\big\langle I_2'(w,z),(W,Z)\big\rangle = 2\int_{\mathbb{R}} (w'W' + z'Z')\,dx.$$

Además,

$$\begin{aligned}\langle I_3'(w,z),(W,Z)\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(I_3((w,z)+t(W,Z)) - I_3(w,z)\Big)\\ &= 2\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^{-1}w\partial_x^{-1}W + \partial_x^{-1}z\partial_x^{-1}Z)\,dx.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\langle I_c'(w,z),(W,Z)\rangle = \int_{\mathbb{R}} (cwW + w'W' + \beta\partial_x^{-1}w\partial_x^{-1}W + czZ + z'Z' + \gamma\partial_x^{-1}z\partial_x^{-1}Z)\,dx.$$

Mostremos ahora que $I_1 \in C^1(Y,\mathbb{R})$. En efecto, sea $\{(w_n,z_n)\}_n$ una sucesión en Y tal que $(w_n,z_n) \to (w,z)$ en Y, y veamos que

$$\|I_c'(w_n,z_n) - I_c'(w,z)\|_{Y'} \to 0.$$

Sea $(W,Z) \in Y$ tal que $\|(W,Z)\|_Y = 1$. Entonces usando los cálculos anteriores y la desigualdad de Hölder vemos que

$$\begin{aligned}|\langle I_1'(w_n,z_n) - I_1'(w,z),(W,Z)\rangle| &= |\langle I_1'(w_n,z_n),(W,Z)\rangle - \langle I_1'(w,z),(W,Z)\rangle|\\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}} |(w_n-w)W + (z_n-z)Z|dx\\ &\leq 2(\|w_n-w\|_{L^2(\mathbb{R})}\|W\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|z_n-z\|_{L^2(\mathbb{R})}\|Z\|_{L^2(\mathbb{R})})\\ &\leq 2(\|w_n-w\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|z_n-z\|_{L^2(\mathbb{R})})\|(W,Z)\|_Y\\ &\leq 2(\|w_n-w\|_{\mathcal{H}} + \|z_n-z\|_{\mathcal{H}})\\ &= 2\|(w_n,z_n)-(w,z)\|_Y \to 0.\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que el funcional I_1' es continuo. Análogamente se puede ver que I_2' es continuo. Además,

$$\begin{aligned}|\langle I_3'(w_n,z_n) - I_3'(w,z),(W,Z)\rangle| &= |\langle I_3'(w_n,z_n),(W,Z)\rangle - \langle I_3'(w,z),(W,Z)\rangle|\\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}} |(\partial_x^{-1}w_n - \partial_x^{-1}w)\partial_x^{-1}W + (\partial_x^{-1}z_n - \partial_x^{-1}z)\partial_x^{-1}Z|dx\\ &\leq 2(\|w_n-w\|_{\mathcal{H}} + \|z_n-z\|_{\mathcal{H}})\|(W,Z)\|_Y\\ &= 2\|(w_n,z_n)-(w,z)\|_Y \to 0,\end{aligned}$$

de donde se concluye que I_3' es continuo. Por lo tanto I_c' es continuo y esto significa que $I_c \in C^1(Y,\mathbb{R})$. Para el caso del funcional G observemos que

$$
\begin{aligned}
\langle G'(w,z),(W,Z)\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(G((w,z)+t(W,Z))-G(w,z))\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(G(w+tW,z+tZ)-G(w,z))\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}}\bigg(\frac{1}{3}(w+tW)^3+(w+tW)(z+tZ)^2+(w+tW)^2(z+tZ)\\
&+\frac{1}{3}(z+tZ)^3-\frac{1}{3}w^3-wz^2-w^2z-\frac{1}{3}z^3\bigg)dx\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\bigg(w^2W+twW^2+\frac{1}{3}t^2W^3+2wzW+2wzZ+twz^2+z^2W\\
&+2twWZ+2tzWZ+t^2WZ^2+tZw^2+w^2Z+t^2W^2Z+z^2Z+tzZ^2+t^2Z^3)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\bigg((w^2+2wz+z^2)W+(w^2+2wz+z^2)Z\bigg)dx.
\end{aligned}
$$

Mostremos ahora que $G\in C^1(Y,\mathbb{R})$. Para ello consideramos $\{(w_n,z_n)\}_n$ una sucesión en Y tal que $(w_n,z_n)\to(w,z)$ en Y y veamos que

$$
\|G'(w_n,z_n)-G'(w,z)\|_{Y'}\to 0.
$$

En efecto, sea $(W,Z)\in Y$ tal que $\|(W,Z)\|_Y=1$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que la inclusión $\mathcal{H}\hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ es continua para $p\geq 2$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
|\langle G'(w_n,z_n)-G'(w,z),(W,Z)\rangle| &= |\langle G'(w_n,z_n),(W,Z)\rangle-\langle G'(w,z),(W,Z)\rangle|\\
&= \frac{1}{2}\bigg|\int_{\mathbb{R}}\bigg((w_n+z_n)^2(W+Z)-(w+z)^2(W+Z)\bigg)dx\bigg|\\
&= \frac{1}{2}\bigg|\int_{\mathbb{R}}\bigg((w_n^2-w^2)+2(w_nz_n-wz)+(z_n^2-z^2)\bigg)(W+Z)dx\bigg|\\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|(w_n^2-w^2)+2(w_nz_n-wz)+(z_n^2-z^2)||W+Z|dx\\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\bigg(|w_n^2-w^2|+2|w_nz_n-wz|+|z_n^2-z^2|\bigg)|W+Z|dx\\
&\leq (\|w_n^2-w^2\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|w_nz_n-wz\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&+\|z_n^2-z^2\|_{L^2(\mathbb{R})})\|W+Z\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\leq C(\|w_n^2-w^2\|_{\mathcal{H}}+\|w_nz_n-wz\|_{\mathcal{H}}+\|z_n^2-z^2\|_{\mathcal{H}})(\|W\|_{\mathcal{H}}+\|Z\|_{\mathcal{H}})\\
&\leq C(\|w_n^2-w^2\|_{\mathcal{H}}+\|w_nz_n-wz\|_{\mathcal{H}}+\|z_n^2-z^2\|_{\mathcal{H}})\|(W,Z)\|_{Y}.
\end{aligned}
$$

Ahora, dado que $\|(W,Z)\|_Y=1$ y además $w_n\to w$ y $z_n\to z$ en $\mathcal{H}$, concluimos que

$$
|\langle G'(w_n,z_n)-G'(w,z),(W,Z)\rangle|\leq C(\|w_n^2-w^2\|_{\mathcal{H}}+\|w_nz_n-wz\|_{\mathcal{H}}+\|z_n^2-z^2\|_{\mathcal{H}})\to 0.
$$

Con ello hemos demostrado que el funcional G' es continuo, esto es $G \in C^1(Y, \mathbb{R})$.

■

De la prueba del lema anterior vemos que la derivada del funcional J_c en (w, z) en la dirección de (W, Z) está dada por

$$\begin{aligned}
\langle J_c'(w,z), (W,Z)\rangle &= \langle I_c'(w,z), (W,Z)\rangle - \langle G'(w,z), (W,Z)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} (cwW + w'W' + \beta\partial_x^{-1}w\partial_x^{-1}W - \frac{1}{2}w^2W - \frac{1}{2}z^2W - wzW \\
&\qquad + czZ + z'Z' + \gamma\partial_x^{-1}z\partial_x^{-1}Z - \frac{1}{2}w^2Z - \frac{1}{2}z^2Z - wzZ)\, dx,
\end{aligned}$$

y además $J_c \in C^1(Y, \mathbb{R})$. Así observamos, después de usar integración por partes, que si $(w, z) \in Y$ es un punto crítico del funcional J_c, entonces (w, z) es una solución del sistema (1.3) en el espacio Y. Además podemos ver que

$$\langle J_c'(w,z), (w,z)\rangle = 2I_c(w,z) - 3G(w,z) = 2J_c(w,z) - G(w,z).$$

En el siguiente lema $B_r(\zeta)$ denotará la bola en $\mathbb{R}$ de centro ζ y radio $r > 0$.

Lema 2 *Sea $\{(w_n, z_n)\}_n$ una sucesión acotada en Y y supongamos que existe una constante positiva r tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}} \int_{B_r(\zeta)} (w_n^2 + z_n^2)\, dx \right) = 0. \tag{2.6}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} G(w_n, z_n) = 0. \tag{2.7}$$

Demostración. Sean $\zeta \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, entonces usando la desigualdad de Hölder y el hecho de que la inclusión $H^1(B_r(\zeta)) \hookrightarrow L^q(B_r(\zeta))$ es continua para $q \geq 2$, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(\zeta)} |w_n|^3\, dx &= \int_{B_r(\zeta)} |w_n||w_n|^2\, dx \\
&\leq \|w_n\|_{L^2(B_r(\zeta))}\|w_n\|^2_{L^4(B_r(\zeta))} \\
&\leq C\|w_n\|_{L^2(B_r(\zeta))}\|w_n\|^2_{H^1(B_r(\zeta))} \\
&\leq C\|w_n\|^2_{H^1(B_r(\zeta))}\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}} \int_{B_r(\zeta)} |w_n|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|w_n\|^2_{H^1(B_r(\zeta))}\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}} \int_{B_r(\zeta)} (w_n^2 + z_n^2)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ahora, cubriendo a $\mathbb{R}$ por bolas de radio r, de tal forma que cada punto de $\mathbb{R}$ esté contenido a lo más en dos bolas, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |w_n|^3\,dx \le C\|w_n\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\int_{B_r(\zeta)}(w_n^2+z_n^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En consecuencia, bajo las hipótesis del lema, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|w_n|^3\,dx = 0.$$

De forma similar obtenemos que $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|z_n|^3\,dx = 0$. También notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(\zeta)}|w_n||z_n|^2\,dx &\le \|w_n\|_{L^2(B_r(\zeta))}\|z_n\|^2_{L^4(B_r(\zeta))}\\
&\le C\|w_n\|_{L^2(B_r(\zeta))}\|z_n\|^2_{H^1(B_r(\zeta))}\\
&\le C\|z_n\|^2_{H^1(B_r(\zeta)}\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\int_{B_r(\zeta)}|w_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\|z_n\|^2_{H^1(B_r(\zeta)}\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\int_{B_r(\zeta)}(w_n^2+z_n^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, cubriendo a $\mathbb{R}$ por bolas de radio r, de tal forma que cada punto de $\mathbb{R}$ esté contenido a lo más en dos bolas, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}}|w_n||z_n|^2\,dx \le C\|(w_n,z_n)\|^2_Y\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\int_{B_r(\zeta)}(w_n^2+z_n^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En consecuencia, bajo las hipótesis del lema, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|w_n||z_n|^2\,dx = 0.$$

De manera similar se prueba que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|w_n|^2|z_n|\,dx = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}G(w_n,z_n) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{3}w_n^3+w_nz_n^2+w_n^2z_n+\frac{1}{3}z_n^3\right)dx = 0.$$

■

Para demostrar la existencia de un punto crítico no trivial para el funcional J_c utilizaremos el Teorema de Paso de Montaña. En el siguiente resultado verificamos que en efecto el funcional J_c satisface las hipótesis dadas en el Teorema 1.

Lema 3 *Supongamos que $\gamma, \beta, c > 0$. Entonces*

1. *Existe $\rho > 0$ suficientemente pequeño tal que*
$$\vartheta(c) = \inf_{\|(w,z)\|_Y = \rho} J_c(w, z) > 0.$$

2. *Existe $e \in Y$ tal que $\|e\|_Y > \rho$ y $J_c(e) \leq 0$.*

3. *Si $\delta(c)$ se define como*
$$\delta(c) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_c(\gamma(t)), \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], Y) : \gamma(0) = 0, \, \gamma(1) = e\},$$
entonces $\delta(c) \geq \vartheta(c)$ y existe una sucesión $\{(w_n, z_n)\}_n$ en Y tal que
$$J_c(w_n, z_n) \to \delta(c), \quad J_c'(w_n, z_n) \to 0 \quad en \quad Y'. \tag{2.8}$$

Demostración. De las desigualdades (2.2)-(2.3), tenemos que para todo $(w, z) \in Y$
$$I_c(w, z) \geq C_1 \|(w, z)\|_Y^2, \quad G(w, z) \leq C \|(w, z)\|_Y^3.$$
Luego
$$\begin{aligned} J_c(w, z) &= I_c(w, z) - G(w, z) \\ &\geq C_1 \|(w, z)\|_Y^2 - C \|(w, z)\|_Y^3 \\ &\geq (C_1 - C \|(w, z)\|_Y) \|(w, z)\|_Y^2. \end{aligned}$$
Entonces para $\rho > 0$ suficientemente pequeño tal que
$$C_1 - \rho C > 0, \tag{2.9}$$
concluimos para $\|(w, z)\|_Y = \rho$ que
$$J_c(w, z) \geq (C_1 - \rho C)\rho^2 = \epsilon > 0.$$
En particular, también tenemos que
$$\vartheta(c) = \inf_{\|(w,z)\|_Y = \rho} J_c(w, z) \geq \epsilon > 0. \tag{2.10}$$
Además, para cualquier $t \in \mathbb{R}$ vemos que $t(w, z) \in Y$ y
$$\begin{aligned} J_c(t(w, z)) &= I_c(t(w, z)) - G(t(w, z)) \\ &= t^2 I_c(w, z) - t^3 G(w, z) \\ &= t^2 (I_c(w, z) - t G(w, z)). \end{aligned}$$
Ahora, no es difícil probar que existe $(w_0, z_0) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty)(\mathbb{R}) \subset Y$ tal que $G(w_0, z_0) > 0$.

Luego tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} J_c(t(w_0,z_0)) = -\infty.$$

Entonces, existe $t_0 > 0$ tal que $e = t_0(w_0,z_0) \in Y$ satisface

$$t_0\|(w_0,z_0)\|_Y = \|e\|_Y > \rho, \quad J_c(e) \leq J_c(0) = 0.$$

La tercera parte sigue por aplicación directa del Teorema de Paso de Montaña.

■

A continuación tenemos el resultado principal de este capítulo. En la demostración utilizaremos el siguiente resultado de espacios reflexivos. Si X es un espacio reflexivo y $(x_n)_n$ es una sucesión acotada en X, entonces $(x_n)_n$ tiene una subsucesión que converge débilmente (ver Teorema 5.73 en [10]).

Teorema 2 *Supongamos $\gamma, \beta, c > 0$. Entonces el sistema* (1) *admite soluciones de onda viajera no triviales en el espacio Y.*

Demostración. Demostraremos que $\delta(c)$ definido en el Lema 3 es en efecto un valor crítico para el funcional J_c. Para ello sea la sucesión $\{(w_n,z_n)\}_n$ en Y obtenida en la parte (3) del lema anterior. Observemos que a partir de (2.10) se sigue que

$$\delta(c) \geq \vartheta(c) \geq \epsilon > 0. \tag{2.11}$$

Teniendo en cuenta la derivada en (w_n,z_n) en la dirección de (w_n,z_n) y usando la definición de J_c, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle J_c'(w_n,z_n),(w_n,z_n)\right\rangle &= 2I_c(w_n,z_n) - 3G(w_n,z_n) \\ &= 2J_c(w_n,z_n) - G(w_n,z_n). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por ello tenemos que

$$I_c(w_n,z_n) = J_c(w_n,z_n) + G(w_n,z_n) = 3J_c(w_n,z_n) - \left\langle J_c'(w_n,z_n),(w_n,z_n)\right\rangle. \tag{2.13}$$

Ahora bien, como $J_c(w_n,z_n) \to \delta(c)$, entonces para n suficientemente grande vemos que

$$J_c(w_n,z_n) \leq \delta(c) + 1.$$

Similarmente, como $J_c'(w_n,z_n) \to 0$, entonces para n suficientemente grande tenemos que

$$|\left\langle J_c'(w_n,z_n),(w_n,z_n)\right\rangle| \leq \|J_c'(w_n,z_n)\|_{Y'}\|(w_n,z_n)\|_Y \leq \|(w_n,z_n)\|_Y.$$

Luego de (2.2) y (2.13) concluimos que

$$C_1\|(w_n,z_n)\|_Y^2 \leq I_c(w_n,z_n) \leq 3(\delta(c)+1) + \|(w_n,z_n)\|_Y.$$

Entonces

$$C_1\|(w_n,z_n)\|_Y^2-\|(w_n,z_n)\|_Y\leq 3(\delta(c)+1).$$

Ahora, de la desigualdad anterior obtenemos que

$$\left(\sqrt{C_1}\|(w_n,z_n)\|_Y-\frac{1}{2\sqrt{C_1}}\right)^2\leq 3(\delta(c)+1)+\frac{1}{4C_1}.$$

Es decir, la sucesión $\{(w_n,z_n)\}_n$ es acotada en el espacio Y. Afirmamos ahora que

$$\epsilon^*=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\int_{B_1(\zeta)}((w_n)^2+(z_n)^2)\,dx\right)>0.$$

Si suponemos que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\int_{B_1(\zeta)}((w_n)^2+(z_n)^2)\,dx\right)=0,$$

entonces, por el lema 2 concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}G(w_n,z_n)=0.$$

Notemos que de (2.11)-(2.12) se sigue que

$$\begin{aligned}0<\epsilon\leq\delta(c)&=\lim_{n\to\infty}J_c(w_n,z_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(J_c(w_n,z_n)-\frac{1}{2}\left\langle J_c'(w_n,z_n),(w_n,z_n)\right\rangle\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(J_c(w_n,z_n)-\frac{1}{2}\Big(2J_c(w_n,z_n)-G(w_n,z_n)\Big)\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}G(w_n,z_n)\\&=0,\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe una subsucesión de $\{(w_n,z_n)\}_n$, que denotaremos de la misma forma, y una sucesión $\zeta_n\in\mathbb{R}$ tales que

$$\int_{B_1(\zeta_n)}((w_n)^2+(z_n)^2)\,dx\geq\frac{\epsilon^*}{2}. \tag{2.14}$$

Definimos ahora la sucesión $(\tilde{w}_n(x),\tilde{z}_n(x))=(w_n(x+\zeta_n),z_n(x+\zeta_n))$. Para esta sucesión se verifica que

$$\|(\tilde{w}_n,\tilde{z}_n)\|_Y=\|(w_n,z_n)\|_Y,\quad J_c(\tilde{w}_n,\tilde{z}_n)\to\delta\quad\text{y}\quad J_c'(\tilde{w}_n,\tilde{z}_n)\to 0\quad\text{en}\quad Y'.$$

Entonces, $\{(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n)\}_n$ es una sucesión acotada en Y. Por lo tanto, para alguna subsucesión de $\{(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n)\}_n$, denotada de la misma forma, y para algún $(w, z) \in Y$ obtenemos que

$$(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n) \rightharpoonup (w, z), \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad \text{(converge débilmente en } Y).$$

Puesto que la inclusión $\mathcal{H} \hookrightarrow L^2_{loc}(\Omega)$ es compacta entonces vemos que

$$\tilde{w}_n \to w, \quad \tilde{z}_n \to z \quad \text{en} \quad L^2_{loc}(\mathbb{R}).$$

Notemos que los límites de la convergencia débil y la convergencia local son los mismos. Ahora, tenemos que $w \neq 0$ y $z \neq 0$, ya que utilizando la desigualdad (2.14) se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} (w^2 + z^2)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(0)} ((\tilde{w}_n)^2 + (\tilde{z}_n)^2)\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(\zeta_n)} ((w_n)^2 + (z_n)^2)\, dx \\
&\geq \frac{\epsilon^*}{2}.
\end{aligned}$$

También notemos que si $(W, Z) \in (C_0^\infty \times C_0^\infty)(\mathbb{R})$ entonces para $K = Supp\,(W,\, Z)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle I_c'(w, z), (W, Z)\rangle &= \int_K (cwW + w'W' + \beta\partial_x^{-1}w\partial_x^{-1}W + czZ + z'Z' + \gamma\partial_x^{-1}z\partial_x^{-1}Z)\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_K (c\tilde{w}_nW + \tilde{w}_n'W' + \beta\partial_x^{-1}\tilde{w}_n\partial_x^{-1}W + c\tilde{z}_nZ + \tilde{z}_n'Z' + \gamma\partial_x^{-1}\tilde{z}_n\partial_x^{-1}Z)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle I_c'(\tilde{w}_n, \tilde{z}_n), (W, Z)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como consecuencia de esto, sigue que

$$\int_K \tilde{w}_n^2 W\, dx \to \int_K w^2 W\, dx, \quad \int_K \tilde{z}_n^2 Z\, dx \to \int_K z^2 Z\, dx$$

y

$$\int_K \tilde{w}_n\tilde{z}_n W\, dx \to \int_K wzW\, dx, \quad \int_K \tilde{w}_n\tilde{z}_n Z\, dx \to \int_K wzZ\, dx.$$

En efecto, observemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_K \tilde{w}_n^2 W\, dx - \int_K w^2 W\, dx \right| &\leq \int_K |\tilde{w}_n^2 - w^2||W|\, dx \\
&\leq \|\tilde{w}_n^2 - w^2\|_{L^2(K)} \|W\|_{L^2(K)} \to 0.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\left| \int_K \tilde{z}_n^2 Z\, dx - \int_K z^2 Z\, dx \right| &\leq \int_K |\tilde{z}_n^2 - z^2||Z|\, dx \\
&\leq \|\tilde{z}_n^2 - z^2\|_{L^2(K)} \|W\|_{L^2(K)} \to 0.
\end{aligned}$$

De forma similar, tenemos

$$\left| \int_K \tilde{w}_n \tilde{z}_n W \, dx - \int_K wzW \, dx \right| \leq \int_K |\tilde{w}_n \tilde{z}_n - wz||W| \, dx$$
$$\leq \|\tilde{w}_n \tilde{z}_n - wz\|_{L^2(K)} \|W\|_{L^2(K)} \to 0.$$

Por lo tanto hemos demostrado que

$$\big\langle G'(w,z),(W,Z)\big\rangle = \lim_{n\to\infty} \big\langle G'(\tilde{w}_n,\tilde{z}_n),(W,Z)\big\rangle$$

y también que

$$\big\langle J_c'(w,z),(W,Z)\big\rangle = \lim_{n\to\infty} \big\langle J_c'(\tilde{w}_n,\tilde{z}_n),(W,Z)\big\rangle = 0.$$

Ahora, si $(W,Z) \in Y$, usando la densidad de $(C_0^\infty \times C_0^\infty)(\mathbb{R})$ en Y, existe una sucesión $(W_n,Z_n) \in (C_0^\infty \times C_0^\infty)(\mathbb{R})$ tal que $(W_n,Z_n) \to (W,Z)$ en Y. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\big\langle J_c'(w,z),(W,Z)\big\rangle| &\leq |\big\langle J_c'(w,z),(W,Z)-(W_n,Z_n)\big\rangle| + |\big\langle J_c'(w,z),(W_n,Z_n)\big\rangle| \\ &\leq \|J_c'(w,z)\|_{Y'} \|(W,Z)-(W_n,Z_n)\|_Y \\ &\quad + |\big\langle J_c'(w,z),(W_n,Z_n)\big\rangle| \to 0. \end{aligned}$$

Así tenemos que $J_c'(w,z) = 0$. Es decir que $(w,z) \in Y$ es una solución no trivial para el sistema de ecuaciones (1.3).

■

Capítulo 3

Analiticidad de Ondas Viajeras

En este capítulo demostraremos que cualquier solución del sistema (1.3) es una función regular y analítica. Para demostrar esto usaremos que para $k \geq 0$ existen constantes $K_1, K_2 > 0$ tal que para todo $v \in H^k(\mathbb{R})$,

$$K_1 \|v\|_{H^k}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{v}(\xi)|^2 \, d\xi \leq K_2 \|v\|_{H^k}^2,$$

donde la transformada de Fourier de una función f definida en $\mathbb{R}$ está dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) \, dx.$$

Además, utilizaremos el siguiente resultado (ver Proposición 16 (c) en F. H. Soriano [11]).

Proposición 1 *Para $s > 1$ existe una constante $C_3 > 0$ tal que para todo p y $k \in \mathbb{Z}^+$,*

$$\sum_{k_1 + \cdots + k_p = k} \frac{1}{(k_1 + 1)^s \cdots (k_p + 1)^s} \leq \frac{C_3^{p-1}}{(k+1)^s}.$$

Teorema 3 *Supongamos $\beta, \gamma, c > 0$. Si $(w, z) \in Y$ es una solución del sistema (1.3), entonces w, z son funciones analíticas, es decir, para cada $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ existe $R > 0$ tal que las series*

$$\sum_k \frac{D^k w(\zeta_0)}{k!} (x - \zeta_0)^k, \quad \sum_k \frac{D^k z(\zeta_0)}{k!} (x - \zeta_0)^k$$

convergen absolutamente a $w(x)$ y $z(x)$ respectivamente para todo $x \in B_R(\zeta_0)$.

Demostración. Inicialmente estableceremos que $w, z \in H^k(\mathbb{R})$ para cualquier $k \geq 0$, si $(w, z) \in Y$ es una solución del sistema de ecuaciones (1.3). Así, usando que si $f \in H^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1 + l$, entonces $f \in C^l(\mathbb{R})$, concluimos que (w, z) es una solución regular.

En efecto, si $(w,z) \in Y$ y dado que la inclusión $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ es continua, tenemos que las funciones

$$f_1 = \frac{1}{2}w^2, \quad f_2 = wz, \quad f_3 = \frac{1}{2}z^2, \tag{3.1}$$

pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$, puesto que aplicando desigualdad de Hölder se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} (wz)^2\, dx \leq \|w\|_{L^\infty}^2 \|z\|_{L^2}^2 \leq C\|w\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \|z\|_{L^2}^2 \leq C\|(w,z)\|_Y^4.$$

Además

$$\int_{\mathbb{R}} (w)^4\, dx \leq \|w\|_{L^\infty}^2 \|w\|_{L^2}^2 \leq C\|w\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \|w\|_{L^2}^2 \leq C\|(w,z)\|_Y^4,$$

y también que

$$\int_{\mathbb{R}} (z)^4\, dx \leq \|z\|_{L^\infty}^2 \|z\|_{L^2}^2 \leq C\|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \|z\|_{L^2}^2 \leq C\|(w,z)\|_Y^4.$$

Ahora, tomando transformada de Fourier en el sistema (1.3) y usando que

$$\widehat{v^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n\, \widehat{v}(\xi)$$

obtenemos que

$$\left\{ \begin{array}{rl} c\widehat{w} - \frac{1}{2}\widehat{w^2} + \xi^2\widehat{w} - \widehat{wz} - \frac{1}{2}\widehat{z^2} + \beta\xi^{-2}\widehat{w} & = 0, \\ c\widehat{z} - \frac{1}{2}\widehat{z^2} + \xi^2\widehat{z} - \widehat{wz} - \frac{1}{2}\widehat{w^2} + \gamma\xi^{-2}\widehat{z} & = 0. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

En consecuencia vemos que $\widehat{w}$ y $\widehat{z}$ satisfacen

$$\widehat{w}(\xi) = \xi^2\Big(\frac{\widehat{f_1}(\xi) + \widehat{f_2}(\xi) + \widehat{f_3}(\xi)}{\xi^4 + c\xi^2 + \beta}\Big), \quad \widehat{z}(\xi) = \xi^2\Big(\frac{\widehat{f_1}(\xi) + \widehat{f_2}(\xi) + \widehat{f_3}(\xi)}{\xi^4 + c\xi^2 + \gamma}\Big).$$

Por lo tanto, existe una constante $M_1 = M_1(\beta,\gamma,c) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^2|\widehat{w}|^2\, d\xi \leq M_1 \int_{\mathbb{R}} \Big(|\widehat{f_1}|^2 + |\widehat{f_2}|^2 + |\widehat{f_3}|^2\Big)\, d\xi = M_1\Big(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2 + \|f_3\|_{L^2}^2\Big)$$

y además

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^2|\widehat{z}|^2\, d\xi \leq M_1 \int_{\mathbb{R}} \Big(|\widehat{f_1}|^2 + |\widehat{f_2}|^2 + |\widehat{f_3}|^2\Big)\, d\xi = M_1\Big(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2 + \|f_3\|_{L^2}^2\Big).$$

Esto implica que $w, z \in H^2(\mathbb{R})$. Ahora, dado que $H^l(\mathbb{R})$ es una álgebra para $l > 1$, (ver Teorema 3.4 en [7]) vemos que $w^2, z^2, wz \in H^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto $f_1, f_2, f_3 \in H^2(\mathbb{R})$.

Además, podemos probar que existe una constante $M_2 = M_2(\beta,\gamma,c) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^4|\widehat{w}|^2\, d\xi \leq M_2 \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^2\Big(|\widehat{f_1}|^2 + |\widehat{f_2}|^2 + |\widehat{f_3}|^2\Big)\, d\xi \leq M_2\Big(\|f_1\|_{H^2}^2 + \|f_2\|_{H^2}^2 + \|f_3\|_{H^2}^2\Big)$$

y además

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^4|\widehat{z}|^2\,d\xi \le M_2\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^2\Big(|\widehat{f_1}|^2+|\widehat{f_2}|^2+|\widehat{f_3}|^2\Big)\,d\xi \le M_2\Big(\|f_1\|_{H^2}^2+\|f_2\|_{H^2}^2+\|f_3\|_{H^2}^2\Big).$$

De lo anterior, teniendo en cuenta que $f_1, f_2, f_3 \in H^2(\mathbb{R})$, concluimos que $w, z \in H^4(\mathbb{R})$. Como $H^l(\mathbb{R})$ es una álgebra para $l > 1$, vemos que $w^2, z^2, wz \in H^4(\mathbb{R})$. Por lo tanto $f_1, f_2, f_3 \in H^4(\mathbb{R})$. En consecuencia, utilizando sucesivamente los razonamientos anteriores concluimos que $w, z \in H^l(\mathbb{R})$ para todo $l \ge 0$, por lo que $w^2, z^2, wz \in H^l(\mathbb{R})$. Por tanto $f_1, f_2, f_3 \in H^l(\mathbb{R})$. Ahora, probemos la analiticidad de w y z. Primero, establezcamos el resultado bajo la suposición de que existe $R > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\left\|(D^k w, D^k z)\right\|_Y \le C\frac{k!}{(k+1)^2}R^k, \tag{3.3}$$

donde $D^k w = w^{(k)}$ y $D^k z = z^{(k)}$. Si $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, mostraremos que existe $r > 0$ tal que las siguientes expansiones de Taylor de w y z convergen respectivamente en la bola $B_r(\zeta_0)$,

$$w(x) = \sum_k \frac{D^k w(\zeta_0)}{k!}(x-\zeta_0)^k, \quad z(x) = \sum_k \frac{D^k z(\zeta_0)}{k!}(x-\zeta_0)^k.$$

Trabajemos primero con w. Si hacemos $\zeta = x - \zeta_0$, entonces por el Teorema de Taylor (con residuo), tenemos que

$$w(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{D^k w(\zeta_0)}{k!}\zeta^k + \mathcal{E}_N(x), \quad \mathcal{E}_N(x) = \frac{D^N w(\zeta_0+t\zeta)}{N!}\zeta^N.$$

De otro lado, utilizando la desigualdad (3.3) y la inclusión continua $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, tenemos para $k \in \mathbb{N}_0$ que

$$|D^k w(x)| \le \left\|D^k w\right\|_{L^\infty} \le C\left\|D^k w\right\|_{H^1(\mathbb{R})} \le C\left\|(D^k w, D^k z)\right\|_Y \le CR^k\frac{k!}{(k+1)^2}.$$

Si tomamos $r > 0$ de tal manera que $2rR < 1$, entonces concluimos para $|\zeta| < r$ que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_N(x)| &= \left|\frac{D^N w(\zeta_0+t\zeta)}{N!}\zeta^N\right| \\
&\le C\frac{R^N N!|\zeta^N|}{(N+1)^2 N!} \\
&\le C\frac{(rR)^N}{(N+1)^2} \\
&\le C(rR)^N \\
&\le C2^{-N}.
\end{aligned}$$

En otras palabras, la serie de Taylor de w converge en $B_R(\zeta_0)$. De igual manera se prueba que la serie de Taylor de z converge en $B_R(\zeta_0)$.

Para completar la demostración solamente necesitamos demostrar que existe $R > 0$ tal que (3.3) se satisface para todo $k \geq 0$. Para esto, argumentaremos por inducción sobre k. Dado que $w, z \in H^l(\mathbb{R})$, $l \geq 0$, tenemos el resultado para $k = 0, 1$. Ahora, supongamos que la desigualdad (3.3) se verifica para $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo y $R > 0$ (el cual escogeremos después).

Aplicamos ahora el operador D^k a cada una de las ecuaciones del sistema (1.3) y obtenemos que

$$\begin{cases} cD^k(w) - \frac{1}{2}D^k(w^2) - D^{k+2}(w) - D^k(wz) - \frac{1}{2}D^k(z^2) - \beta D^{k-2}w &= 0, \\ \\ cD^k(z) - \frac{1}{2}D^k(z^2) - D^{k+2}(z) - D^k(wz) - \frac{1}{2}D^k(w^2) - \gamma D^{k-2}(z) &= 0. \end{cases}$$

Luego, multiplicando respectivamente el sistema de ecuaciones anterior por $D^k w$ y $D^k z$ e integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left[c(D^k w)^2 + (D^{k+1}w)^2 + \beta(D^{k-1}w)^2 \right] dx \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} D^k(w^2)D^k w\, dx + \int_{\mathbb{R}} D^k(wz)D^k w\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} D^k(z^2)D^k w\, dx, \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left[c(D^k z)^2 + (D^{k+1}z)^2 + \gamma(D^{k-1}z)^2 \right] dx \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} D^k(z^2)D^k z\, dx + \int_{\mathbb{R}} D^k(wz)D^k z\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} D^k(w^2)D^k z\, dx. \end{aligned}$$

Recordando la definición del funcional I_c, vemos de las expresiones anteriores que

$$\begin{aligned} 2I_c(D^k w, D^k z) = &\frac{1}{2}\left\langle D^k(w^2), D^k w \right\rangle_{L^2} + \left\langle D^k(wz), D^k w \right\rangle_{L^2} + \frac{1}{2}\left\langle D^k(z^2), D^k w \right\rangle_{L^2} \\ &+ \frac{1}{2}\left\langle D^k(z^2), D^k z \right\rangle_{L^2} + \left\langle D^k(wz), D^k z \right\rangle_{L^2} + \frac{1}{2}\left\langle D^k(w^2), D^k z \right\rangle_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle D^k(wz), D^k w \right\rangle_{L^2} \right| &\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|D^k w\|_{L^2} \\ &\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|D^k w\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|(D^k w, D^k z)\|_{Y}. \end{aligned}$$

Así como

$$\begin{aligned}
|\left\langle D^k(wz), D^k z\right\rangle_{L^2}| &\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|D^k z\|_{L^2}\\
&\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|D^k z\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|(D^k w, D^k z)\|_Y.
\end{aligned}$$

Además, podemos observar que

$$\begin{aligned}
|\left\langle D^k(w^2), D^k w\right\rangle_{L^2}| &\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2}\|D^k w\|_{L^2}\\
&\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2}\|D^k w\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2}\|(D^k w, D^k z)\|_Y,
\end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned}
|\left\langle D^k(w^2), D^k z\right\rangle_{L^2}| &\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2}\|D^k z\|_{L^2}\\
&\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2}\|D^k w\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2}\|(D^k w, D^k z)\|_Y.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
|\left\langle D^k(z^2), D^k w\right\rangle_{L^2}| &\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|D^k w\|_{L^2}\\
&\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|D^k w\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|(D^k w, D^k z)\|_Y,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|\left\langle D^k(z^2), D^k z\right\rangle_{L^2}| &\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|D^k z\|_{L^2}\\
&\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|D^k z\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|(D^k w, D^k z)\|_Y.
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando en (3.4) los estimativos obtenidos previamente y la desigualdad (2.2) concluimos que

$$\begin{aligned}
\|(D^k w, D^k z)\|_Y &\leq \frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{2}\|D^k(w^2)\|_{L^2} + \|D^k(wz)\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|D^k(z^2)\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|D^k(z^2)\|_{L^2}\\
&\quad + \|D^k(wz)\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|D^k(w^2)\|_{L^2}\Bigg)\\
&\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2} + \|D^k(wz)\|_{L^2} + \|D^k(z^2)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ahora queremos estimar los términos del lado derecho. Notemos que si $u, v \in H^l(\mathbb{R})$ para cualquier $l \geq 1$, tenemos para $k \in \mathbb{Z}^+$ que

$$D^k(uv) = (D^k u)v + \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} D^{k-m} u D^m v + u D^k v.$$

Entonces vemos por ejemplo que

$$D^k(wz) = (D^k w)z + \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} D^{k-m} w D^m z + w D^k z. \tag{3.5}$$

Usando la hipótesis inductiva y la inclusión continua $\mathcal{H} \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(D^k w)z\|_{L^2} &\leq \|D^k w\|_{L^2} \|z\|_{L^\infty} \\
&\leq C_2 \|D^k w\|_{L^2} \|z\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C_2 \|(D^k w, D^k z)\|_Y \|(w, z)\|_Y \\
&\leq C_2 C^2 R^k \frac{k!}{(k+1)^2} \\
&\leq C_2 C^2 R^k \frac{k!}{k^2} \\
&= \left(C \frac{(k+1)!}{(k+2)^2} R^{k+1} \right) \left(C_2 C R^{-1} \frac{(k+2)^2}{k^2(k+1)} \right),
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\|w D^k z\|_{L^2} &\leq \|w\|_{L^\infty} \|D^k z\|_{L^2} \\
&\leq C_2 \|w\|_{\mathcal{H}} \|D^k z\|_{L^2} \\
&\leq C_2 \|(D^k w, D^k z)\|_Y \|(w, z)\|_Y \\
&\leq C_2 C^2 R^k \frac{k!}{(k+1)^2} \\
&\leq C_2 C^2 R^k \frac{k!}{k^2} \\
&= \left(C \frac{(k+1)!}{(k+2)^2} R^{k+1} \right) \left(C_2 C R^{-1} \frac{(k+2)^2}{k^2(k+1)} \right).
\end{aligned}$$

Similarmente obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|D^{k-m} w D^m z\|_{L^2} &\leq \|D^{k-m} w\|_{L^2} \|D^m z\|_{L^\infty} \\
&\leq C_2 \|D^{k-m-1} w\|_{H^1} \|D^m z\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C_2 \|D^{k-m-1} w\|_{\mathcal{H}} \|D^m z\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C_2 \|(D^{k-m-1} w, D^{k-m-1} z)\|_Y \|(D^m w, D^m z)\|_Y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la hipótesis inductiva en el lado derecho y la Proposición 1, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k-1}\binom{k}{m}\left\|D^{k-m}wD^{m}z\right\|_{L^2} &\leq C_2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{k!}{(k-m)!m!}\left\|D^{k-m-1}w\right\|_{\mathcal{H}}\|D^{m}z\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq C_2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{k!}{(k-m)!m!}\times\\
&\quad\left\|(D^{k-m-1}w,D^{k-m-1}z)\right\|_{Y}\|(D^{m}w,D^{m}z)\|_{Y}\\
&\leq C_2C^2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{k!(k-m-1)!m!}{(k-m)!m!(k-m)^2(m+1)^2}R^{k-1}\\
&\leq C_2C^2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{k!}{(k-m)^2(m+1)^2}R^{k-1}\\
&\leq C_2C^2k!R^{k-1}\sum_{k_1+k_2=k-1}\frac{1}{(k_1+1)^2(k_2+1)^2}\\
&\leq C_3C_2C^2k!R^{k-1}k^{-2}\\
&=\left(C\frac{(k+1)!R^{k+1}}{(k+2)^2}\right)\left(C_2C_3CR^{-2}\frac{(k+2)^2}{k^2(k+1)}\right).
\end{aligned}$$

Observemos que existe una constante $M>0$ tal que $\frac{(k+2)^2}{k^2(k+1)}<M$. En consecuencia, para $R>0$ suficientemente grande de tal forma que

$$C_2C_3CMR^{-2}<\frac{1}{9},\quad C_2CMR^{-1}<\frac{1}{9},$$

podemos concluir que

$$\|D^k(wz)\|_{L^2}\leq C\frac{(k+1)!}{3(k+2)^2}R^{k+1}.$$

De manera similar se obtiene que

$$\|D^k(w^2)\|_{L^2}\leq C\frac{(k+1)!}{3(k+2)^2}R^{k+1},\quad \|D^k(z^2)\|_{L^2}\leq C\frac{(k+1)!}{3(k+2)^2}R^{k+1}.$$

En otras palabras, hemos probado para R suficientemente grande que

$$\|D^k(w^2)\|_{L^2}+\|D^k(wz)\|_{L^2}+\|D^k(z^2)\|_{L^2}\leq C\frac{(k+1)!}{(k+2)^2}R^{k+1}. \tag{3.6}$$

Utilizando la desigualdad (3.6), demostraremos que

$$\|(D^{k+1}w,D^{k+1}z)\|_{Y}\leq C\frac{(k+1)!}{(k+2)^2}R^{k+1}.$$

Para hacer esto, aplicamos el operador D^{k+1} a las ecuaciones del sistema (1.3), luego multiplicando respectivamente por $D^{k+1}w$ y $D^{k+1}z$ y usamos integración por partes para obtener

$$
\begin{aligned}
2I_c(D^{k+1}w, D^{k+1}z) = \frac{1}{2}\left\langle D^{k+1}(w^2), D^{k+1}w\right\rangle_{L^2} + \Bigg(\left\langle D^{k+1}(wz), D^{k+1}w\right\rangle_{L^2} \\
+ \frac{1}{2}\left\langle D^{k+1}(z^2), D^{k+1}w\right\rangle_{L^2} + \frac{1}{2}\left\langle D^{k+1}(z^2), D^{k+1}z\right\rangle_{L^2} \\
+ \Bigg(\left\langle D^{k+1}(wz), D^{k+1}z\right\rangle_{L^2} + \frac{1}{2}\left\langle D^{k+1}(w^2), D^{k+1}z\right\rangle_{L^2}\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

A continuación vemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle D^{k+1}(wz), D^{k+1}z\right\rangle_{L^2}\right| &= \left|\left\langle D^{k}(wz), D^{k+2}z\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|D^{k+2}z\|_{L^2} \\
&\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|D^{k+1}z\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|D^k(wz)\|_{L^2}\|(D^{k+1}w, D^{k+1}z)\|_{Y}.
\end{aligned}
$$

De manera similar obtenemos que

$$
\left|\left\langle D^{k+1}(w^2), D^{k+1}w\right\rangle_{L^2}\right| \leq \|D^k(w^2)\|_{L^2}\|(D^{k+1}w, D^{k+1}z)\|_{Y}.
$$

También que

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle D^{k+1}(z^2), D^{k+1}z\right\rangle_{L^2}\right| &= \left|\left\langle D^{k}(z^2), D^{k+2}z\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|D^{k+2}z\|_{L^2} \\
&\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|D^{k+1}z\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|D^k(z^2)\|_{L^2}\|(D^{k+1}w, D^{k+1}z)\|_{Y}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
I_c(D^{k+1}w, D^{k+1}z) \leq \Bigg(\|D^k(w^2)\|_{L^2} + \|D^k(wz)\|_{L^2} + \|D^k(z^2)\|_{L^2}\Bigg)\|(D^{k+1}w, D^{k+1}z)\|_{Y}.
$$

Luego, de las desigualdades (2.2) y (3.6) concluimos que

$$
\begin{aligned}
\|(D^{k+1}w, D^{k+1}z)\|_Y &\leq \|D^k(w^2)\|_{L^2} + \|D^k(wz)\|_{L^2} + \|D^k(z^2)\|_{L^2} \\
&\leq C\frac{(k+1)!}{(k+2)^2}R^{k+1},
\end{aligned}
$$

como deseábamos. Así hemos probado la analiticidad de (w, z).

■

Conclusiones

En este trabajo de investigación, realizamos un estudio teórico sobre soluciones de onda viajera para un sistema de ecuaciones tipo Ostrovsky. Teniendo en cuenta esto, se han alcanzado los objetivos inicialmente planteados, ya que:

- Caracterizamos las soluciones de onda viajera con velocidad c del sistema (1) como puntos críticos de un funcional adecuado J_c.
- Mostramos la existencia de puntos críticos del funcional J_c.
- Probamos que las soluciones de onda viajera obtenidas para el sistema (1) son funciones analíticas.

Bibliografía

[1] A. Alias, Mathematical modelling of nonlinear internal waves in a rotating fluid, Tesis Doctoral, Loughborough University, Reino Unido, 2014.

[2] R. Córdoba, Existencia de ondas viajeras para una ecuación de evolución no lineal, Trabajo de grado. Universidad del Cauca. (2014).

[3] R. Córdoba, Existencia de ondas viajeras para una ecuación de evolución no lineal de Tipo Dispersivo. Universidad del Cauca. (2017).

[4] A. De Bouard, J. C. Saut, Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin, 14 (1997), 211–236.

[5] A. Esfahani, S. Levandosky. Solitary waves of a coupled KdV system with a weak rotation. J. Differential Equations, volume 265, Issue 10, (2018), 4835 - 4872.

[6] S. Levandosky. y. Liu. Stability and weak rotation limit of solitary waves of the Ostrovsky equation. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 7 (2007) 793-806.

[7] F. Linares, G. Ponce, Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Universitex, (2019).

[8] L. A. Ostrovsky, Nonlinear internal waves in a rotating ocean. Oceanology, 18 (1978), 181–191.

[9] J. Quintero, Solitary water waves for a 2D Boussinesq type system, Journal of Partial Differential Equations. 23 (2010), 251-280.

[10] B. Rynne, M. Youngson. Linear Functional Analysis. Springer-Verlag. (2008).

[11] F. Soriano, On the Cauchy Problem for a K.P. Boussinesq-Type System, Journal of Differential Equations. 183 (2002), 79-107.

[12] M. Willem, Minimax Methods, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 24 (1996).