

**EFFECTOS DE POLARIZACIÓN EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN  
DE TELECOMUNICACIONES ÓPTICAS**



**HEVER YAMIT MONCAYO LASSO  
JUAN CARLOS ARTEAGA CÓRDOBA**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
GRUPO DE ÓPTICA Y LÁSER  
POPAYÁN  
2003**

**EFFECTOS DE POLARIZACIÓN EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN  
DE TELECOMUNICACIONES ÓPTICAS**

**HEVER YAMIT MONCAYO LASSO  
JUAN CARLOS ARTEAGA CÓRDOBA**

**Proyecto de grado presentado como  
requisito para optar al título de Ingeniero  
Físico.**

**DIRECTOR Msc. JUARY LEÓN TÉLLEZ**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
GRUPO DE ÓPTICA Y LÁSER  
POPAYÁN  
2003**

Nota de aceptación

---

---

---

---

Jurado

---

Jurado

Ciudad y fecha (día, mes, año) \_\_\_\_\_

*A Dios, mi familia y mis maestros que me ayudaron a construir este tesoro y junto a quienes confiaron y creyeron en mí e hicieron posible esta realidad .....*

*..... que los sentimientos que me embargan los llenen a todos como muestra de mi eterna gratitud.*

*Hevert Y. Moncayo L.*

*Definitiva y exclusivamente a DIOS, mis PADRES y HERMANOS, por su gran AMOR, CONFIANZA Y APOYO INCONDICIONAL .....*

*..... fuentes de mis más preciados valores.*

*Juan Carlos Arteaga C.*

## AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a :

Jaury León Téllez, Magíster en Física, área de trabajo: Óptica – Láser, jefe del Departamento de Física de la Universidad del Cauca, por su labor de dirección y orientación en el desarrollo del proyecto.

Yilton Riascos Forero, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, por su colaboración en la parte de conceptualización matemática del proyecto.

El Grupo de Óptica y Láser de la Universidad del Cauca por su apreciable colaboración y gran acogida durante la ejecución del proyecto.

Los profesores del Departamento de Física por su vital y tan valioso apoyo durante la formación, tanto académica como humana, de nuestro perfil profesional como ingenieros físicos.

## TABLA DE CONTENIDO

LISTADO DE TABLAS .....	VIII
LISTADO DE FIGURAS .....	IX
INTRODUCCIÓN .....	12
1. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO .....	16
CAPÍTULO 1 .....	17
TEORÍA DE LA POLARIZACIÓN .....	17
1.1 FORMALISMOS DE LA POLARIZACIÓN .....	18
1.1.1 CÁLCULO DE STOKES .....	18
1.1.2 MATRICES DE MUELLER .....	22
1.1.3 REPRESENTACIÓN DE LA LUZ POR CUATERNIONES .....	23
1.1.3.1 Cuaterniones complejos .....	23
1.1.3.2 Cuaternión asociado a una onda óptica .....	25
1.1.3.3 Cuaternión asociado a un operador de polarización .....	27
1.1.3.4 Interés de la representación de la luz por los cuaterniones .....	28
1.2 OPERADOR DE UN MEDIO DICROICO .....	29
1.2.1 ECUACIÓN DE UN MEDIO DICROICO .....	30
1.2.1.1 Caso general de una onda parcialmente polarizada .....	30
1.2.1.2 Caso particular de una onda polarizada .....	34
1.2.1.3 Ecuación diferencial de un medio dicroico .....	36
CAPÍTULO 2 .....	39
MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN ÓPTICA .....	39
2.1 FACTOR DE CALIDAD Q EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN ÓPTICA .....	40
2.2 MODELAMIENTO DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN .....	43
2.2.1 EFECTO DE LA DISPERSIÓN POR POLARIZACIÓN (PMD) .....	44
2.2.1.1 Caso de la penalidad máxima .....	45
2.2.1.2 Caso de la penalidad media .....	47

2.2.2 EFECTOS DE LA PDG Y DE LA PDL .....	54
2.2.2.1 Modelo de Cuaterniones .....	54
A. Representación de la señal en el enlace .....	56
1. La señal .....	56
2. El ruido .....	57
B. Modelamiento de los amplificadores ópticos .....	59
1. Generación de ruido .....	59
2. Ganancia .....	61
3. Perdidas por polarización (PDL) .....	62
4. Ganancia por polarización (PDG) .....	63
C. Modelamiento de un tramo de fibra .....	66
2.2.2.2 Modelo de Parámetros de Stokes .....	68
A. Dispersión por Polarización (PMD) .....	70
B. Pérdidas por Polarización (PDL) .....	72
C. Ganancias por Polarización (PDG) .....	73
D. Ruido de Emisión Espontánea ASE .....	74
2.2.3 CÁLCULO DEL FACTOR DE CALIDAD Q .....	76
2.3 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN .....	79
2.3.1 EFECTO DE LA PDL .....	80
2.3.2 EFECTO DE LA PDG .....	82
2.3.3 EFECTO COMBINADO DE LA PDG Y PDL .....	84
2.4 EFECTOS DE POLARIZACIÓN EN SISTEMAS WDM .....	88
2.5 MODULACIÓN POR POLARIZACIÓN .....	92
2.6 REPOLARIZACIÓN DE UNA SEÑAL MODULADA POR POLARIZACIÓN .....	99
CAPÍTULO 3 .....	106
METODO DE COMPENSACIÓN DE LA REPOLARIZACIÓN .....	106
3.1 MODELO GENERALIZADO .....	107
3.2 CÁLCULO DEL COMPENSADOR PARA LA REPOLARIZACIÓN .....	109
3.2.1 COMPENSADOR CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME A LA SALIDA .....	110
3.2.2 COMPENSADOR CON DISTRIBUCIÓN NORMAL A LA SALIDA .....	120
3.2.2.1 Compensador con rango restringido .....	128
3.2.2.2 Compensador con rango amplio .....	131
CONCLUSIONES .....	134
BIBLIOGRAFÍA .....	

**¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.**

## LISTADO DE TABLAS

### CAPITULO 3

Tabla 3.1	Valores del parámetro $\varphi$ para diferentes valores de $r$ .	117
-----------	--	-----



# LISTADO DE FIGURAS

## CAPITULO 1

- Fig. 1.1 Representación en la esfera de Poincaré de los estados de polarización. 20
- Fig. 1.2 Representación sobre la esfera de Poincaré del efecto de varios retardadores dispuestos en serie, sobre un haz monocromático de luz completamente polarizado. El punto  $P_d$  representa el resultado final. 21

## CAPITULO 2

- Fig. 2.1a Diagrama del ojo y factor Q 41
- Fig. 2.1b Relación entre el factor Q y la tasa de error de bits 42
- Fig. 2.2 Densidad de probabilidad de la penalidad sobre el factor Q en función de la dispersión por polarización (diferencia de tiempos de grupo medio) para el caso de la penalidad máxima (señal inyectada a  $45^\circ$  de los estados principales) 47
- Fig. 2.3 Definición del ángulo  $2\theta$  sobre la esfera de Poincaré entre la polarización inyectada dentro del enlace y el eje de los estados principales. 49
- Fig. 2.4 Densidad de probabilidad de la penalidad sobre el factor Q debido a la dispersión por polarización. Caso de la penalidad media (los estados de polarización inyectados dentro del enlace son aleatorios) 52
- Fig. 2.5 Penalidades media y máxima de las fluctuaciones del factor Q en función de la dispersión por polarización 53
- Fig. 2.6 Probabilidad acumulada de la penalidad sobre el factor Q debido a la dispersión por polarización. Las líneas continuas corresponden al caso de la penalidad máxima (los estados de polarización inyectados dentro del enlace están a  $45^\circ$  de los estados principales). Las líneas punteadas corresponden al caso de la penalidad media (el estado de polarización inyectado dentro del enlace es aleatorio). 54
- Fig. 2.7 Modelo de los efectos de polarización en un sistema de amplificación óptica 55

Fig. 2.8	Diagrama esquemático del procedimiento para resolver el modelo de Stokes. Se muestra solo una interacción entre cada amplificador.	77
Fig. 2.9	a) Penalidad media sobre el factor Q debido a la PDL para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con (PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ , PDG = 0 dB). b) Desviación estándar de la penalidad sobre el factor Q.	81
Fig. 2.10	a) Degradación del factor Q debido a la PDG para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con (PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ , PDL = 0 dB). b) Desviación estándar del factor Q.	83
Fig. 2.11	a) Degradación del factor Q debido al efecto combinado de la PDG y la PDL para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con (PDL = 0.1 dB, PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ ). b) Desviación estándar del factor Q.	85
Fig. 2.12	Evolución del grado de polarización de la luz (dpol), las potencias de la señal ( $S_0$ ) y del ruido ( $b_0$ ) para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con (PDG = 0.12 dB, PDL = 0.1 dB y PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ ) a una velocidad de transmisión de 10 Gbits/s.	87
Fig. 2.13	a) Degradación del factor Q debido a la PDG en un sistema WDM de 8 canales constituido por 272 amplificadores, espaciados por una distancia de aproximadamente 33 Km para un enlace total de cerca de 9000 Km. (PDL = 0.1dB y PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ ). b) Fluctuaciones del factor Q	89
Fig. 2.14	a) Degradación del factor Q debido a la PDG y la PDL en un sistema WDM de 8 canales constituido por 272 amplificadores, espaciados por una distancia de aproximadamente 33 Km para un enlace total de cerca de 9000 Km. (PDL = 0.1dB y PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ ). b) Fluctuaciones del factor Q	90
Fig. 2.15	a) Degradación del factor Q en función del número de canales en un sistema WDM constituido por 272 amplificadores, espaciados por una distancia de aproximadamente 33 Km para un enlace total de cerca de 9000 Km. (PDG = 0.06dB y PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ ).	91
Fig. 2.16	Representación de la modulación de polarización sobre la esfera de Poincaré.	94
Fig. 2.17	Grado de polarización de la señal modulada en polarización (dpol) en función de $\Delta\varphi_m$ y $\theta_0$ .	96
Fig. 2.18	Valores de $\Delta\varphi_m$ y $\theta_0$ para que el grado de polarización de la señal modulada (dpol) sea igual o inferior al 10%.	97
Fig. 2.19	Variación de el grado de polarización de la señal modulada en polarización en función de $\Delta\varphi_m$ para $\theta_0 = \pi/4$ .	98

Fig. 2.20	Variación de el grado de polarización de la señal modulada en polarización en función de $\theta_0$ para $\Delta\varphi_m = 2\pi$ .	98
Fig. 2.21	Ilustración esquemática de la configuración del enlace de transmisión.	100
Fig. 2.22	Función de distribución PDF (dpol) obtenida a partir de las ecuaciones (2.91) y (2.92) calculadas teóricamente. Para PDL = 0.1dB, con $n = 100$ y $n = 300$ .	104
Fig. 2.23	Comparación de resultados de la simulación numérica y el modelo teórico para la repolarización debida a la PDL.	105

### CAPITULO 3

Fig. 3.1	Esquema del compensador de la repolarización.	109
Fig. 3.2	Distribución de densidad de probabilidad uniforme.	110
Fig. 3.3	Función de transferencia de un compensador uniforme para diferentes valores de desviación estándar (a) Desviación estándar del orden de $10^{-3}$ , (b) Desviación estándar del orden de $10^{-4}$ .	113 114
Fig. 3.4	Variación del grado de polarización en función de la longitud total del enlace para un valor de $r = 1$ .	117
Fig. 3.5	Curva característica de un compensador uniforme para un enlace de telecomunicaciones ( $T_0 = 0.98\%$ ).	119
Fig. 3.6	Curva característica de un compensador uniforme para un enlace de telecomunicaciones ( $T_0 = 1.02\%$ ).	120
Fig. 3.7	Distribución de probabilidad normal.	121
Fig. 3.8	Función $\text{erf}^{-1}(z)$ .	123
Fig. 3.9	Corrección a la distribución de probabilidad normal.	126
Fig. 3.10	Desviación estándar Vs. valor medio a la salida del compensador.	127
Fig. 3.11	Factor de calidad Vs. desviación estándar a la salida del compensador.	128
Fig. 3.12	Función de transferencia del compensador con rango restringido.	130
Fig. 3.13	Función de transferencia del compensador con rango amplio.	132

## INTRODUCCIÓN

“El hombre encuentra a Dios detrás de cada puerta que  
la ciencia logra abrir”

**Albert Einstein**

En estos momentos se despliegan por todo el mundo sistemas de comunicación capaces de afrontar el gran incremento producido por las telecomunicaciones en los últimos años. La evolución de los sistemas de información exigen día a día una gran demanda de ancho de banda, las actualizaciones continuas de soporte para la red, demandan grandes inversiones tanto en actualización de equipos como en el medio de transmisión, de tal forma que las redes de transporte deben ser proyectados para satisfacer las necesidades presentes y futuras. Estas necesidades sumadas con la globalización de la información y del mercado, exigen que los sistemas de comunicación entre países proporcionen soluciones adecuadas. Desde éste punto de vista, los sistemas de comunicación internacional por cable interoceánico deben ser planeados cuidadosamente para garantizar funcionalidad por un largo período.

Indudablemente la fibra óptica es el medio de transmisión que más se acomoda a las exigencias del mundo de hoy, esto es, el transporte de información que requiere gran ancho de banda como es el caso de los servicios multimediales. La fibra óptica se ha convertido en una necesidad para los servicios que sobrepasan velocidades de unos pocos Mbit/s. Si bien es cierto se debe pensar también en las tecnologías asociadas a los sistemas de comunicaciones ópticos, tal es el caso de SONET (Red Óptica

Síncrona) y SDH (Jerarquía Digital Síncrona) las tecnologías de punta que utilizan WDM (Múltiplexación por División de Longitud de Onda), con las cuales es posible sacar mejor provecho de este recurso.

En las últimas décadas TDM (Multiplexación por División de Tiempo) ha sido la base fundamental para el incremento de la capacidad en las redes de telecomunicaciones digitales. Sin embargo para satisfacer esta demanda, los proveedores de redes interoceánicas usan ahora la tecnología WDM para diseñar sus redes con capacidades inimaginables. Hace algunos años, esta técnica proporcionó a las redes dos mejoras fundamentales, el incremento de la capacidad y la flexibilidad de la red, ambos son ahora explotados por la evolución de las redes de transporte de datos marítimos, desde conexiones punto a punto, hasta grandes y sofisticadas redes, que proveen ramificaciones que conectan un gran número de países, y además ofrecen mecanismos de seguridad en caso de un corte accidental del cable.

Los nuevos sistemas de transmisión ópticos trabajan a velocidades por canal del orden de los Gbit/s. A nivel intercontinental, este enorme tráfico solo puede ser transportado por los cables submarinos de fibra óptica, ya que la capacidad de los antiguos cables coaxiales o de los enlaces por satélite es muy reducida frente a la demanda y al ancho de banda óptico.

Todos estos proyectos se basan en la transmisión totalmente óptica, donde los complejos repetidores de los antiguos sistemas llamados híbridos (que interrumpen la propagación en la fibra para regenerar electrónicamente el pulso), han sido sustituidos por amplificadores ópticos tales como fibras dopadas con Erbium (EDFA). Estos últimos consiguen superar el cuello de botella que la regeneración electrónica impone en la capacidad de transmisión, además de reducir notablemente los costos de la red. Sin embargo, el diseño del sistema debe ser estudiado desde un punto de vista

totalmente diferente: los efectos que limitan principalmente la propagación en la fibra como el ruido de emisión estimulada (ASE) de los EDFA's , la dispersión, la no linealidad y los efectos de polarización, entre otros, se acumulan ahora con la distancia y el incremento de la velocidad.

Particularmente, los efectos de polarización se han convertido en un tema de gran interés y cuidado en el estudio y diseño de comunicaciones ópticas modernas, debido a que pueden causar atenuaciones, las cuales degradan el desempeño y restringen el aprovechamiento de la capacidad total que los sistemas de telecomunicaciones pueden brindar. Existen tres tipos de efectos de polarización: Dispersión por polarización (PMD), pérdidas por polarización (PDL) y ganancia por polarización (PDG), que pueden combinarse para generar distorsión sobre la señal de transmisión en enlaces de fibra monomodo de largas distancias. La PMD es debida a la variación aleatoria de la birrefringencia en fibras ópticas, la PDL es causada por la fuerte dependencia existente en los componentes ópticos pasivos respecto a la polarización de la señal y la PDG ocasionada por el exceso de ruido generado por la saturación de ganancia en sistemas de amplificación óptica.

En sistemas modernos, donde se alcanzan grandes velocidades de transmisión, la PMD, PDL y PDG constituyen temas de investigación para una gran comunidad técnica y científica. Los efectos de polarización son considerados en general como una de las mayores limitaciones en sistemas de transmisión óptica basados en estándares de fibras monomodo. Por lo tanto, formas para reducir o compensar estos efectos se hacen necesarios.

En el diseño de nuevas fibras y dispositivos ópticos, los fenómenos dependientes de la polarización han sido parámetros de especial cuidado durante los procesos de manufactura. Esto permite una mayor tasa de transmisión en más sistemas. Sin embargo, si la velocidad está aún

incrementando, entonces, los efectos de polarización podrán ser cada vez más significantes.

Un elemento clave para mantener bajo control estos efectos y situarlos por debajo de niveles aceptables, es la habilidad para caracterizarlos y medir sus impactos. Esto permitirá un mayor control de calidad y la introducción de mejoras en los procesos de construcción de fibras y componentes ópticos. Además permitirá evaluar los enlaces instalados e investigar los cuidados especiales necesarios para el diseño de dispositivos y técnicas de instalación. Todo esto finalmente conllevará a que el rendimiento, costo y desempeño de los sistemas de comunicaciones se mantengan sobre los niveles óptimos requeridos.

Un análisis de la dispersión por polarización PMD se llevó a cabo en la Universidad del Cauca en conjunto con la Université de Bretagne-Sud (Francia) y tuvo como objetivo principal, el desarrollo de métodos de compensación para dicho fenómeno. La primera parte de este estudio fue realizada por el Dr. Frank Bruyere en la Université de París Sud U.F.R. Scientifique D'orsay (Francia). En una segunda etapa, se desarrollaron métodos de compensación teórico-sistémicos de la PMD a primer orden, apoyada en métodos de simulación numérica. Finalmente se abordó la síntesis de estos métodos de compensación, soportados igualmente en métodos de simulación numérica.

Como una tercera etapa y como objetivo principal de este trabajo, se presenta un estudio tanto teórico como de modelamiento de los efectos PDL y PDG presentes en un sistema de transmisión por fibra óptica. Así mismo se evalúa el grado de impacto que tienen estos efectos sobre la transmisión de la señal en sistemas de un solo canal y en sistemas WDM.

## **1. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO**

---

En el presente documento se estudia el impacto de los efectos de polarización, PDG y PDL, sobre un sistema de amplificación de telecomunicaciones ópticas y al final se propone un método teórico de compensación para dichos efectos. El documento se ha estructurado de la siguiente manera:

### **CAPITULO 1. TEORÍA DE LA POLARIZACIÓN**

En este capítulo se definen los conceptos de la polarización basados en los formalismos de Stokes y cuaterniones. Además, se establecen las ecuaciones características de evolución de una onda parcialmente polarizada en un medio dicróico.

### **CAPITULO 2. MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN ÓPTICA**

Este capítulo analiza la incidencia de los efectos de polarización en el desempeño de sistemas de transmisión con amplificación óptica, monocanal y WDM, a partir de pruebas de simulación numérica los modelos de Stokes y cuaterniones. Además, se describe la modulación por polarización como método de compensación para este tipo de efectos. Finalmente se introduce el concepto de repolarización experimentada por una señal debido a la PDL.

### **CAPITULO 3. METODO DE COMPENSACIÓN PARA LA REPOLARIZACIÓN**

Este capítulo describe un cálculo estadístico a partir del cual se determina el comportamiento de un método de compensación para la repolarización debida a los efectos de la PDL.



## CAPÍTULO 1

### TEORÍA DE LA POLARIZACIÓN

---

#### 1.1 FORMALISMOS DE LA POLARIZACIÓN

#### 1.2 OPERADOR DE UN MEDIO DICROICO

---

En este capítulo se describe, en una primera parte, definiciones asociadas al concepto de polarización y se presenta una síntesis de diferentes formalismos utilizados para representar la polarización de la luz. Los formalismos matriciales de Mueller-Stokes no serán objeto de un tratamiento detallado [1], sin embargo la representación de la luz por cuaterniones será un poco mas explícita. Este formalismo constituye un importante análisis tanto para los cálculos como para las simulaciones numéricas de los capítulos siguientes.

En la segunda parte de este capítulo, se establecen las ecuaciones características de evolución de una onda parcialmente polarizada dentro de un medio lineal. Es de nuestro interés el caso de un medio dicroico. Las ecuaciones obtenidas serán utilizadas en el capítulo 2, en los cálculos analíticos relacionados con el impacto de los efectos de polarización sobre el desempeño de un sistema de amplificación óptica y en las simulaciones numéricas.

## 1.1 FORMALISMOS DE LA POLARIZACIÓN

Los diferentes formalismos matemáticos concernientes a la polarización de la luz reposan todos sobre un modo de representación del estado de polarización del campo eléctrico (variable) y de las acciones posibles del medio de propagación sobre el estado de polarización (operadores).

### 1.1.1 CÁLCULO DE STOKES

La variable utilizada para representar la polarización de un campo óptico es un cuadrivector real, llamado cuadrivector de Stokes  $\mathbf{S}$  [1]-[2]. Las componentes de  $\mathbf{S}$  llamadas parámetros de Stokes están definidas a partir de la expresión (1.1) para el campo eléctrico de una onda cuasi-monocromática.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle |E_x(t)|^2 + |E_y(t)|^2 \rangle \\ \langle |E_x(t)|^2 - |E_y(t)|^2 \rangle \\ 2 \langle |E_x(t)||E_y(t)|\cos(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \rangle \\ 2 \langle |E_x(t)||E_y(t)|\sin(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \rangle \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

donde  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$ ,  $\delta_x(t)$  y  $\delta_y(t)$  designan las amplitudes y los desfases del campo eléctrico a lo largo de los ejes “x” y “y”, y  $\langle \rangle$  define la media temporal:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.2)$$

sobre un intervalo de tiempo T correspondiente a los tiempos de observación experimental.

Los parámetros de Stokes tienen una interpretación física directa:  $S_0$  corresponde a la intensidad óptica.  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  representan la diferencia de intensidad de las componentes del campo eléctrico respectivamente sobre las polarizaciones lineales “x” y “y”, sobre las polarizaciones lineales a  $\pm 45^\circ$  de “x” y sobre las polarizaciones circulares izquierda y derecha. Además cumplen la relación:  $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ .

El cuadrivector de Stokes, puede ser representado en función de los ángulos elíptico  $\varepsilon$  y azimutal  $\theta$  asociados a la esfera de Poincaré (nota 1.1):

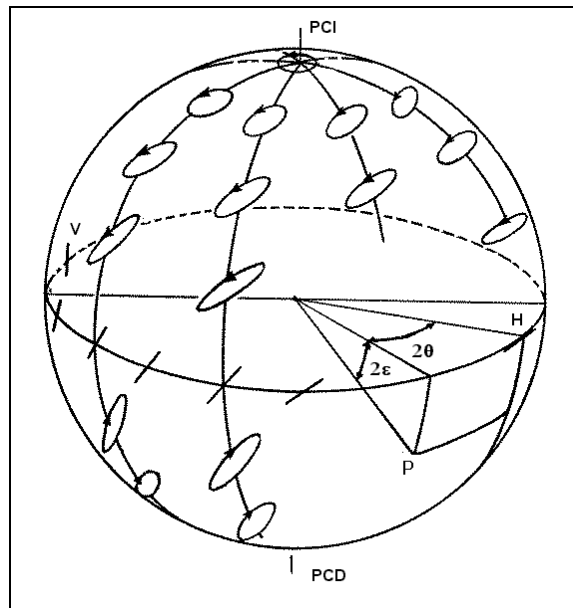
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_0 \cos(2\theta) \cos(2\varepsilon) \\ S_0 \sin(2\theta) \cos(2\varepsilon) \\ S_0 \sin(2\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Estos ángulos se expresan recíprocamente en función de los parámetros de Stokes :

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{S_2}{S_1} \right) \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{S_3}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \right) \quad (1.4)$$

**Nota 1.1 : Definición de la Esfera de Poincaré [1].**

*La representación de la esfera de Poincaré para una señal polarizada es una superficie esférica de radio 1, tal que cada uno de sus puntos corresponde a un estado de polarización (Figura 1.1).*



**Figura 1.1 :** Representación en la esfera de Poincaré de los estados de polarización.

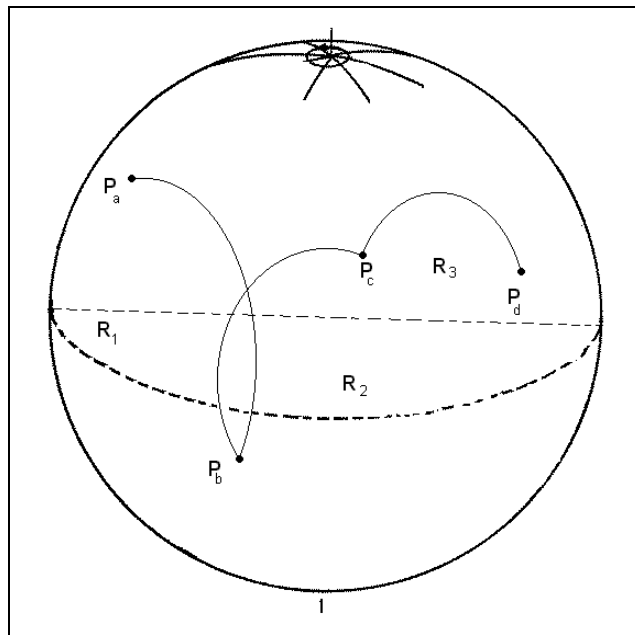
Donde  $\epsilon$  representa el ángulo elíptico y se refiere como la mitad de la latitud y  $\theta$ , representa el ángulo azimutal y se refiere a la mitad de la longitud.  $\theta$  es positivo si se avanza en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo  $\epsilon$  es positivo si se mide hacia abajo.

Los polos norte y sur representan la polarización circular izquierda y derecha. Cada punto del ecuador representa una forma de polarización lineal, es decir, diferentes direcciones de vibración. Los puntos comprendidos entre el ecuador y el polo sur representan la polarización elíptica derecha. Mientras que los puntos entre el ecuador y el polo norte representan la polarización elíptica izquierda.

El punto más importante es el punto H sobre el ecuador, que representa la luz linealmente polarizada cuya vibración eléctrica tiene la dirección horizontal. La latitud y la longitud se miden a partir de allí. El punto V, diametralmente opuesto a H, representa la luz linealmente polarizada en dirección vertical. Dos puntos diametralmente opuestos, representan una pareja ortogonal de polarización.

La esfera de Poincaré, proporciona un método rápido para hallar el efecto de cualquier retardador en cualquier haz monocromático de luz completamente polarizada. Se halla marcando el punto P, que indica la forma de polarización del haz incidente, marcando enseguida el punto R, que designa al vector característico rápido del retardado y trazando el arco apropiado. El eje del arco es el radio vector que parte del centro de la esfera al punto R y el punto inicial de arco es el punto P. La longitud del arco, en grados, es simplemente la retardancia  $\delta$  del retardador. El arco se traza siempre en sentido de las manecillas del reloj, visto por un observador que estuviese fuera de la esfera, sobre la prolongación del radio vector que pasa por el punto R. El punto final del arco da la respuesta.

Cuando existen varios retardadores en serie; en ese caso, el punto final de un arco sirve como el punto inicial del siguiente (figura 1.2).



**Figura 1.2 :** Representación sobre la esfera de Poincaré del efecto de varios retardadores dispuestos en serie, sobre un haz monocromático de luz completamente polarizado. El punto  $P_d$  representa el resultado final.

Por otra parte, el grado de polarización  $dpol$  de una onda esta definido por la relación :

$$dpol = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (1.5)$$

donde, para una onda polarizada el  $dpol = 1$ , para una onda depolarizada  $dpol = 0$  y para una onda parcialmente polarizada  $0 < dpol < 1$ .

De esta forma, el cuadvivector de Stokes de una onda parcialmente polarizada puede ser expresada como :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ dpol S_0 \cos(2\theta) \cos(2\varepsilon) \\ dpol S_0 \sin(2\theta) \cos(2\varepsilon) \\ dpol S_0 \sin(2\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

En este caso, los parámetros de Stokes  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  verifican la relación :

$$S_0^2 > S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

### 1.1.2 MATRICES DE MUELLER

En el caso del formalismo de Mueller [1]-[2], los operadores son matrices 4x4 con coeficientes reales (matrices de Mueller). Estas matrices están diseñadas para operar con los vectores de Stokes y funcionan igual que las matrices de Jones. Además, se aplican a ondas total, parcial y no polarizadas y permiten la acción de todos los medios lineales ya sean depolarizantes o no.

Algunos ejemplos son :

$$\text{➤ Medio birrefringente : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ 0 & 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix}$$

( $\delta = \delta_y - \delta_x$  : desfase entre las componentes “x” y “y” del campo eléctrico)

$$\text{➤ Medio dicroico : } e^{-\alpha} \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) & 0 & 0 \\ \text{sh}(\alpha) & \text{ch}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

( $e^{-\alpha}$  denota la absorción de la componente del campo eléctrico sobre “y”,  $\alpha > 0$ )

### 1.1.3 REPRESENTACIÓN DE LA LUZ POR CUATERNIONES

Este nuevo formalismo de la polarización es desarrollado en el plan general de la teoría geométrica de la luz propuesta por P. Pellat-Finet [1]. Se puede considerar como una versión analítica del calculo de Mueller-Stokes

#### 1.1.3.1 Cuaterniones complejos

Siendo  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la base canónica de  $\mathbf{C}^4$  considerada como espacio vectorial de dimensión 4 :

$$\mathbf{e}_0 = (1,0,0,0), \mathbf{e}_1 = (0,1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,0,1,0) \text{ y } \mathbf{e}_3 = (0,0,0,1) \quad (1.7)$$

se designan como cuaterniones complejos el arreglo de cuádruplas de  $\mathbf{C}^4$  :

$$h = h_0 \mathbf{e}_0 + h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathbf{e}_3 \quad (h_i \in \mathbf{C}) \quad (1.8)$$

con la multiplicación definimos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_i & i &= 0, 1, 2, 3 \\ (\mathbf{e}_i)^2 &= -(\mathbf{e}_0)^2 = -\mathbf{e}_0 & i &= 1, 2, 3 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 & & \end{aligned} \quad (1.9)$$

las demás relaciones se deducen por permutaciones circulares de índices 1, 2, y 3. La multiplicación así definida confiere a  $\mathbf{C}^4$  una estructura de álgebra no conmutativa.

Un cuaternión  $h$  es real si  $h_i$  es real ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), se dice escalar si  $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ , se dice puro si  $h_0 = 0$ .

Un cuaternión puro y real es similar a un vector de espacio euclidiano usual en tres dimensiones. La forma polar bilineal definida aplicada a dos cuaterniones puros y reales es similar al producto escalar usual. Se puede igualmente definir para todo par de cuaterniones puros un producto vectorial notado  $(\wedge)$  quien coincide con el producto vectorial usual en el caso de cuaterniones puros y reales :

$$\mathbf{P} \wedge \mathbf{P}' = \mathbf{P}\mathbf{P}' - \mathbf{P}'\mathbf{P} \quad (1.10)$$

Si  $N(\mathbf{u}) = 1$  (norma de  $\mathbf{u}$ ) el cuaternión  $\mathbf{u}$  se llama unitario. Si además  $\mathbf{u}$  no es un cuaternión escalar, entonces  $\mathbf{u}$  puede ser puesto de la forma :

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_0 \cos \theta + \mathbf{e}_u \sin \theta = \exp(\mathbf{e}_u \theta) \quad (1.11)$$



donde  $\theta$  designa un número complejo y  $\mathbf{e}_u$  un cuaternión puro y unitario ( $(\mathbf{e}_u)^2 = -\mathbf{e}_0$ ).

### 1.1.3.2 Cuaternión asociado a una onda óptica

Siendo  $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$  el cuatrivector de Stokes asociado a una onda óptica (campo óptico), el cuaternión  $\mathbf{S}$  asociado al cuatrivector  $\mathbf{S}$  esta definido por :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= S_0 \mathbf{e}_0 + j(S_1 \mathbf{e}_1 + S_2 \mathbf{e}_2 + S_3 \mathbf{e}_3) & (j = \sqrt{-1}, S_i \in \mathbf{R}) \\ &= S_0 \mathbf{e}_0 + jS_p \mathbf{e}_p\end{aligned}\tag{1.12}$$

donde  $S_p = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$  y  $\mathbf{e}_p$  es un cuaternión puro y real.

El cuaternión  $\mathbf{S}$  puede descomponerse en dos partes :

- una parte escalar  $S_0 \mathbf{e}_0$  directamente ligada a la intensidad  $S_0$  de la onda óptica
- y una parte pura  $S_p \mathbf{e}_p$  que comprende :
  - ✓ el cuaternión puro y real  $\mathbf{e}_p$  con coordenadas en la base canónica de  $\mathbf{C}^4$  identifica las coordenadas del vector de Stokes unitario definiendo la polarización de la onda considerada
  - ✓ el real  $S_p = \text{dpol} \cdot S_0$  donde dpol designa el grado de polarización ( $0 \leq \text{dpol} \leq 1$ )

Recíprocamente, se muestra que el cuaternión  $\mathbf{X}$  puede representar físicamente una onda óptica si y solamente si :

$$\begin{aligned} \text{i) } \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^* &\iff \mathbf{X} = X_0\mathbf{e}_0 + j(X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3) \quad (X_i \in \mathbf{R}) \\ \text{ii) } X_0 &\geq 0 \\ \text{iii) } (X_0)^2 - (X_1)^2 - (X_2)^2 - (X_3)^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde  $\bar{\mathbf{X}}$  define el conjugado hamiltoniano del cuaternión  $\mathbf{X}$  y se define como:

$$\bar{\mathbf{X}} = X_0\mathbf{e}_0 - X_1\mathbf{e}_1 - X_2\mathbf{e}_2 - X_3\mathbf{e}_3 \quad (1.14)$$

Es conveniente llamar cuaternión óptico al conjunto de cuaterniones que verifican las propiedades (1.13).

Para nombrar un cuaternión óptico con los parámetros de Stokes, se utiliza la notación escalar/vectorial :

$$\mathbf{S} = [S_0, S_p, \mathbf{s}] \quad (1.15)$$

donde  $S_0$  y  $S_p$  son definidos por (1.12) y  $\mathbf{s}$  designa el vector de Stokes unitario asociado a la polarización preferencial de la onda óptica.

Una onda polarizada es representada por un cuaternión de la forma  $\mathbf{S} = S_0(\mathbf{e}_0 + j\mathbf{e}_p)$ . Una onda parcialmente polarizada es asociada al cuaternión  $\mathbf{S} = S_0(\mathbf{e}_0 + j\text{dpol}\mathbf{e}_p)$ . Una onda totalmente depolarizada se representa por un cuaternión escalar :  $\mathbf{S} = S_0\mathbf{e}_0$ .

Dos ondas polarizadas :  $\mathbf{S} = S_0(\mathbf{e}_0 + j \mathbf{e}_p)$  y  $\mathbf{S}' = S'_0(\mathbf{e}_0 + j \mathbf{e}'_p)$  poseen polarizaciones ortogonales si  $\mathbf{e}_p = -\mathbf{e}'_p$  de igual manera si el producto escalar entre los cuaterniones es nulo.

Como en el caso de vectores de Stokes, la adición de cuaterniones representan las ondas luminosas correspondientes a una suma incoherente.

### 1.1.3.3 Cuaternión asociado a un operador de polarización

Sea  $U$  un operador representado por la matriz  $2 \times 2$  con coeficientes complejos  $M_U = [a_{ij}]$ , representa entonces la base  $(x,y)$  :

$$\begin{aligned} E'_x &= a_{11} E_x + a_{12} E_y \\ E'_y &= a_{21} E_x + a_{22} E_y \end{aligned} \quad (1.16)$$

Se muestra aquí la aplicación con la matriz  $M_U$  asociada al cuaternión  $\mathbf{u}$  definido por :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}[(a_{11} + a_{22}) \mathbf{e}_0 + j(a_{11} - a_{22}) \mathbf{e}_2 + j(a_{12} + a_{21}) \mathbf{e}_2 + j(a_{12} - a_{21}) \mathbf{e}_3] \quad (1.17)$$

Esto establece un isomorfismo entre el álgebra de las matrices  $2 \times 2$  con coeficientes complejos y el álgebra de los cuaterniones. El cuaternión  $\mathbf{u}$  definido representa el operador  $U$  en el formalismo de cuaterniones.

La acción del operador de polarización  $U$  sobre el campo óptico representado por el cuaternión  $\mathbf{X}$  definido en la ec. (1.13) está determinado por la relación :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{uX}\bar{\mathbf{u}}^* \quad (1.18)$$

El cuaternión  $\mathbf{u}$  permite a priori describir las interacciones entre una onda totalmente polarizada y un medio no depolarizante. En efecto una onda parcialmente polarizada puede siempre estar considerada como una suma de ondas totalmente polarizadas más incoherencia entre ellas. La linealidad de la relación (1.18) asegura entonces su validez en el caso de cuaterniones representando los campos ópticos parcialmente polarizados.

La acción de  $n$  varios operadores en serie  $U_1, U_2, \dots, U_n$  es determinado por la relación :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{u}_n \dots \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{X} \bar{\mathbf{u}}_1^* \bar{\mathbf{u}}_2^* \dots \bar{\mathbf{u}}_n^* \quad (1.19)$$

Algunos ejemplos de operadores son :

- ✓ medio birrefringente representando un desfase  $\delta = \delta_y - \delta_x$  entre las componentes “x” y “y” del campo eléctrico :

$$\mathbf{u} = \cos(\delta/2)\mathbf{e}_0 + \sin(\delta/2)\mathbf{e}_1 = \exp(\mathbf{e}_1 \delta/2) \quad (1.20)$$

- ✓ medio dicróico representando una absorción  $e^{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) en la componente del campo eléctrico sobre y :

$$\mathbf{u} = e^{-\alpha/2} (\text{ch}(\alpha/2)\mathbf{e}_0 + j \text{sh}(\alpha/2)\mathbf{e}_1) = \exp(j\mathbf{e}_1 \alpha/2) \quad (1.21)$$

#### 1.1.3.4 Interés de la representación de la luz por los cuaterniones

La introducción de un tercer formalismo para la representación de la luz además del cálculo de Jones y de Mueller-Stokes puede parecer relevante de una matemática compleja con poca utilidad.

La representación de la luz mediante cuaterniones es de particular interés ya que permite tratar el caso general de la luz parcialmente polarizada que se propaga en un medio no depolarizante. Es interesante añadir dos ventajas determinantes de los cuaterniones comparados con formalismos matriciales :

- Ellos permiten una representación intrínseca de fenómenos físicos ligados a la polarización sin necesidad de proyectarlas sobre una base arbitraria como si lo necesitan los formalismos matriciales.
- Ellos constituyen una herramienta analítica – a diferencia de las matrices – que permiten establecer entre los fenómenos físicos intrínsecos relaciones de recurrencia o ecuaciones diferenciales.

## 1.2 OPERADOR DE UN MEDIO DICROICO

---

En este párrafo se establecen las ecuaciones de evolución de un campo óptico parcialmente polarizado a través de un elemento dicroico. De igual forma se pueden ampliar a otros medios tales como el birrefringente [4].

Se considera el caso general de un campo óptico parcialmente polarizado de intensidad  $S^0$ , de grado de polarización  $dpol_s = S^p/S^0$  y de polarización preferencial representada por el vector de Jones unitario  $\mathbf{e}_s$ .

Para el campo óptico considerado se asocia al cuaternión  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S} = S^0 \mathbf{e}_0 + j S^p \mathbf{e}_s \quad (1.22)$$

el cuadrivector de Stokes  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^p \mathbf{s}_s] \quad (1.23)$$

la acción de un elemento dicroico, birrefringente o de un polarizador sobre un campo óptico es descrita de una manera general por la ecuación (1.18) :

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{u} \mathbf{S}_{n-1} \bar{\mathbf{u}}^* \quad (1.24)$$

Donde  $\mathbf{u}$  designa el cuaternión asociado al operador de polarización y  $\mathbf{S}_{n-1}$  y  $\mathbf{S}_n$  los cuaterniones asociados al campo óptico en la entrada y la salida del elemento considerado.

## 1.2.1 ECUACIÓN DE UN MEDIO DICROICO

### 1.2.1.1 Caso general de una onda parcialmente polarizada

Consideremos un elemento dicroico característico con atenuación diferencial  $e^{-2\Delta\alpha}$  (en intensidad) entre sus modos propios de polarización representados por los vectores de Jones unitarios y ortogonales  $\mathbf{e}_u$  y  $\mathbf{e}_{u_\perp}$ . Para representar un medio dicroico sin ganancia, se considerara una atenuación nula para la polarización  $\mathbf{e}_u$  y una atenuación  $e^{-2\Delta\alpha}$  para la polarización  $\mathbf{e}_{u_\perp}$ . En el caso de una ganancia o de una atenuación suplementaria, los resultados pueden generalizarse sin dificultad considerando el operador isotrópico correspondiente.

El cuaternión  $\mathbf{u}$  asociado al elemento dióptico considerado está definido por :

$$\mathbf{u} = e^{-\Delta\alpha/2} \exp[(j\Delta\alpha/2)\mathbf{e}_u] \quad (1.25)$$

La onda óptica de salida del medio dióptico estará dada por la expresión (1.24) :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= e^{-\Delta\alpha/2} \exp[(j\Delta\alpha/2)\mathbf{e}_u] (\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_0 + j\mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_{sn-1}) e^{-\Delta\alpha/2} \exp[(j\Delta\alpha/2)\mathbf{e}_u] \\ &= e^{-\Delta\alpha} [\text{ch}(\Delta\alpha/2)\mathbf{e}_0 + \text{jsh}(\Delta\alpha/2)\mathbf{e}_u] (\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_0 + j\mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_{sn-1}) [\text{ch}(\Delta\alpha/2)\mathbf{e}_0 + \text{jsh}(\Delta\alpha/2)\mathbf{e}_u] \\ &= e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{ch}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_0 + \text{jsh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_u - \text{sh}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_u^2 \right. \\ &\quad \left. + \text{jch}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_{sn-1} - \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^p \frac{1}{2} [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_{sn-1} + \mathbf{e}_{sn-1} \mathbf{e}_u] \right. \\ &\quad \left. - \text{jsh}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_u \mathbf{e}_{sn-1} \mathbf{e}_u \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

utilizando las reglas de cálculo definidas en las relaciones (1.9), se muestran las tres igualdades siguientes :

$$\mathbf{e}_u^2 = -\mathbf{e}_0 \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u \mathbf{e}_{sn-1} + \mathbf{e}_{sn-1} \mathbf{e}_u &= \\ &= [\mathbf{e}_u \wedge \mathbf{e}_{sn-1} - (\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{sn-1})\mathbf{e}_0] + [\mathbf{e}_{sn-1} \wedge \mathbf{e}_u - (\mathbf{e}_{sn-1} \cdot \mathbf{e}_u)\mathbf{e}_0] = -2(\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{sn-1})\mathbf{e}_0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{e}_u \mathbf{e}_{sn-1} \mathbf{e}_u = [\mathbf{e}_u \wedge \mathbf{e}_{sn-1} - (\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{sn-1})\mathbf{e}_0] \mathbf{e}_u = -2(\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{sn-1})\mathbf{e}_u + \mathbf{e}_{sn-1} \quad (1.29)$$

de donde se deduce :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= e^{-\Delta\alpha} [\text{ch}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_0 + \text{jsh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_u + j\mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_{sn-1} \\ &\quad + \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^p (\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{sn-1})\mathbf{e}_0 + j2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^p (\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{sn-1})\mathbf{e}_u ] \end{aligned} \quad (1.30)$$

identificando miembro a miembro :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= \mathbf{s}_n^0 + j\mathbf{s}_n^p \\ \mathbf{S}_n &= e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{ch}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 + \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^p(\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{s_{n-1}}) \right] \mathbf{e}_0 \\ &\quad + j e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_u + \mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_{s_{n-1}} + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^p(\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{s_{n-1}})\mathbf{e}_u \right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

se obtiene finalmente las ecuaciones características de un elemento dicroico:

$$\mathbf{S}_n^0 = e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{ch}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 + \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^p(\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{s_{n-1}}) \right] \quad (1.32.a)$$

$$\mathbf{S}_n^p \mathbf{e}_{s_n} = e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{e}_u + \mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{e}_{s_{n-1}} + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^p(\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{s_{n-1}})\mathbf{e}_u \right] \quad (1.32.b)$$

utilizando las relaciones de correspondencia (1.22) y (1.23) entre la representación de un campo óptico por un cuaternión y un cuadrivector de Stokes, se deducen las ecuaciones equivalentes a (1.32.a) y (1.32.b) donde intervienen los parámetros de Stokes :

$$\mathbf{S}_n^0 = e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{ch}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 + \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{s}_u \right] \quad (1.33.a)$$

$$\mathbf{S}_n^p = e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_{n-1}^p + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2)(\mathbf{S}_{n-1}^p \cdot \mathbf{s}_u)\mathbf{s}_u \right] \quad (1.33.b)$$

donde  $\mathbf{s}_u$  es el vector de Stokes unitario asociado a  $\mathbf{e}_u$ .

Se puede escribir de forma general las ecuaciones (1.33.a) y (1.33.b) donde explícitamente aparezca el vector de Stokes  $\mathbf{s}_{n-1}$  que indica la polarización del campo óptico :

$$\mathbf{S}_n^0 = e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{ch}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 + \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^p(\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u) \right] \quad (1.34.a)$$

$$\mathbf{S}_n^p \mathbf{s}_n = e^{-\Delta\alpha} \left[ \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{S}_{n-1}^0 \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_{n-1}^p \mathbf{s}_{n-1} + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2)\mathbf{S}_{n-1}^p(\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u)\mathbf{s}_u \right] \quad (1.34.b)$$



Las ecuaciones (1.34.a) y (1.34.b) registran las variaciones de la intensidad  $S_n^0$  y del vector  $\mathbf{S}_n^p = \text{dpol}_n S_n^0 \mathbf{s}_n$  al atravesar el medio dicroico. Para un cálculo secuencial, se puede pues calcular la intensidad de la onda a partir de (1.34.a) y deducir a continuación el grado de polarización y la polarización de la onda a partir de (1.34.b).

El producto escalar  $\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u$  se interpreta simplemente sobre la esfera de Poincaré, que corresponde al coseno del ángulo formado por los vectores  $\mathbf{s}_{n-1}$  y  $\mathbf{s}_u$  representando respectivamente sobre la esfera de Poincaré la polarización de la onda incidente y la polarización propia atenuada del medio dicroico.

La ecuación (1.34.b) permite mostrar que un medio dicroico no conserva la polarización relativa de una onda. El ángulo  $\theta$  sobre la esfera de Poincaré entre las polarizaciones preferenciales de dos ondas es modificado a través del medio dicroico. Se reitera en particular que un medio dicroico por tanto no conserva la ortogonalidad y no conserva el grado de polarización de una onda parcialmente polarizada.

Las ecuaciones características de un medio dicroico de atenuación diferencial  $e^{-2\Delta\alpha}$  que presenta una ganancia  $e^\gamma$  ( $\gamma > 0$ ) o una atenuación ( $\gamma < 0$ )

sobre la polarización  $\mathbf{e}_{u_\perp}$  se calculan a partir de la relación:

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{v} \mathbf{u} \mathbf{S}_{n-1} \bar{\mathbf{u}}^* \bar{\mathbf{v}}^* \quad (1.35)$$

donde  $\mathbf{v}$  designa un operador isotrópico de ganancia  $\mathbf{v} = e^{\gamma/2} \mathbf{e}_0$ .

Se obtiene :

$$S_n^0 = e^\gamma e^{-\Delta\alpha} [\text{ch}(\Delta\alpha) S_{n-1}^0 + \text{sh}(\Delta\alpha) S_{n-1}^p (\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u) ] \quad (1.36.a)$$

$$S_n^p \mathbf{s}_n = e^\gamma e^{-\Delta\alpha} [ \text{sh}(\Delta\alpha) S_{n-1}^0 \mathbf{s}_u + S_{n-1}^p \mathbf{s}_{n-1} + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2) S_{n-1}^p (\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u) \mathbf{s}_u ] \quad (1.36.b)$$

las ecuaciones (1.36.a) y (1.36.b) no difieren de las (1.34.a) y (1.34.b) más que por un termino multiplicativo en los miembros izquierdos de la ecuación.

### 1.2.1.2 Caso particular de una onda polarizada

En el caso donde la onda esta totalmente polarizada a la entrada del medio dicroico :

$$S_{n-1}^0 = S_{n-1}^p \quad (1.37)$$

las ecuaciones (1.34.a) y (1.34.b) se simplifican :

$$S_n^0 = S_{n-1}^0 e^{-\Delta\alpha} [\text{ch}(\Delta\alpha) + \text{sh}(\Delta\alpha) (\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u) ] \quad (1.38.a)$$

$$S_n^p \mathbf{s}_n = S_{n-1}^0 e^{-\Delta\alpha} [ \text{sh}(\Delta\alpha) \mathbf{s}_u + \mathbf{s}_{n-1} + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2) (\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u) \mathbf{s}_u ] \quad (1.38.b)$$

A partir de las ecuaciones (1.38.a) y (1.38.b), se puede mostrar que  $S_n^0 = S_n^p$ . Este resultado significa que un medio dicroico no depolariza una onda totalmente polarizada.

Se muestra igualmente que las ecuaciones describen la evolución de la intensidad y de la polarización de una onda polarizada al atravesar un medio dicroico mediante la expresión :

$$S_n^0 = S_{n-1}^0 e^{-\Delta\alpha} [\text{ch}(\Delta\alpha) + \text{sh}(\Delta\alpha)(\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u)] \quad (1.39.a)$$

$$\mathbf{s}_n = \frac{[\text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{s}_u + \mathbf{s}_{n-1} + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2)S_{n-1}^p(\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u)\mathbf{s}_u]}{[\text{ch}(\Delta\alpha) + \text{sh}(\Delta\alpha)(\mathbf{s}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_u)]} \quad (1.39.b)$$

en el caso donde la polarización de la onda corresponde a una polarización propia del medio dicroico se obtiene :

a)  $\mathbf{s}_{n-1} = \mathbf{s}_u$  :

➤ la intensidad residual no cambia :  $S_n^0 = S_{n-1}^0$  (1.40.a)

➤ la polarización residual no cambia :  $\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_u$  (1.40.b)

b)  $\mathbf{s}_{n-1} = -\mathbf{s}_u$  :

➤ la intensidad sufre una atenuación en una relación  $e^{-2\Delta\alpha}$  :

$$S_n^0 = S_{n-1}^0 e^{-2\Delta\alpha} \quad (1.41.a)$$

➤ la polarización residual no cambia:  $\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_u$  (1.42.b)

### 1.2.1.3 Ecuación diferencial de un medio dicroico

La ecuación diferencial de un medio dicroico puede obtenerse a partir del desarrollo de primer orden para  $\Delta\alpha$  de la ecuación (1.25) :

$$\begin{aligned} u &\approx \left(1 - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)(\mathbf{e}_0 + j\frac{\Delta\alpha}{2}\mathbf{e}_u) \\ &\approx \mathbf{e}_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}(-\mathbf{e}_0 + j\mathbf{e}_u) \end{aligned} \quad (1.43)$$

en este caso, el cuaternión  $\mathbf{S}_n$  esta dado por la expresión :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= u \mathbf{S}_{n-1} \bar{u}^* \\ &= \left[ \mathbf{e}_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}(-\mathbf{e}_0 + j\mathbf{e}_u) \right] \mathbf{S}_{n-1} \left[ \mathbf{e}_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}(-\mathbf{e}_0 + j\mathbf{e}_u) \right] \\ &= \mathbf{S}_{n-1} - \Delta\alpha \mathbf{S}_{n-1} + j\frac{\Delta\alpha}{2} [\mathbf{e}_u \mathbf{S}_{n-1} + \mathbf{S}_{n-1} \mathbf{e}_u] \end{aligned} \quad (1.44)$$

de (1.22) y (1.28) se deduce:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u \mathbf{S}_{n-1} + \mathbf{S}_{n-1} \mathbf{e}_u &= 2S_n^0 \mathbf{e}_u + jS_n^p [\mathbf{e}_u \mathbf{S}_{n-1} + \mathbf{S}_{n-1} \mathbf{e}_u] \\ &= 2S_n^0 \mathbf{e}_u - 2jS_n^p [\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{n-1}] \mathbf{e}_0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= u \mathbf{S}_{n-1} \bar{u}^* \\ &= \mathbf{S}_{n-1} - \Delta\alpha \mathbf{S}_{n-1} + j\Delta\alpha \{S_n^0 \mathbf{e}_u - jS_n^p [\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_{n-1}] \mathbf{e}_0\} \\ &= \mathbf{S}_{n-1} - \Delta\alpha \mathbf{S}_{n-1} + j\Delta\alpha \mathbf{e}_u \mathbf{S}_{n-1}^* \end{aligned} \quad (1.46)$$

si se identifican  $\mathbf{S}_{n-1}$  y  $\mathbf{S}_n$  como los cuaterniones del campo óptico con abscisa  $z$  y  $z+dz$  respectivamente, se obtiene :

$$\mathbf{S}(z+dz) = \mathbf{S}(z) - \Delta\alpha dz \mathbf{S}(z) + j \Delta\alpha dz \mathbf{e}_u \mathbf{S}^*(z) \quad (1.47)$$

donde  $\Delta\alpha$  corresponde al dicroísmo lineal.

Realizando el desarrollo en series de Taylor de  $\mathbf{S}(z+dz)$  e identificando términos con (1.47) :

$$\mathbf{S}(z+dz) = \mathbf{S}(z) + \frac{\partial \mathbf{S}(z)}{\partial z} dz + \dots \quad (1.48)$$

Se obtiene la ecuación diferencial siguiente :

$$\frac{\partial \mathbf{S}(z)}{\partial z} = j\Delta\alpha \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{S}^*(z) - \Delta\alpha \mathbf{S}(z) \quad (1.49)$$

La ecuación (1.49) es equivalente a las ecuaciones donde intervienen la intensidad  $S_0$  y el vector de Stokes  $\mathbf{S}_p(z) = S_p(z)\mathbf{s}_p(z) = [S_1(z), S_2(z), S_3(z)]$ :

$$\frac{\partial S_0(z)}{\partial z} = \Delta\alpha \mathbf{s}_u \cdot \mathbf{S}_p(z) - \Delta\alpha S_0(z) \quad (1.50.a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_p(z)}{\partial z} = \Delta\alpha \mathbf{s}_u S_0(z) - \Delta\alpha \mathbf{S}_p(z) \quad (1.50.b)$$

Estas dos ecuaciones son las versiones diferenciales de las ecuaciones (1.34.a) y (1.34.b). En el caso de un mismo medio dicroico lineal  $\Delta\alpha$  pero de una ganancia o de una atenuación  $\gamma$  isotrópica, las ecuaciones (1.50.a) y

(1.50.b) contienen respectivamente los términos aditivos  $\gamma S_0(z)$  y  $\gamma \mathbf{S}_p(z)$  en los miembros izquierdos.

En el caso de una onda totalmente polarizada :

$$\mathbf{S}_p(z) = S_0(z) \quad (1.51)$$

y las ecuaciones (1.50.a) y (1.50.b) se reducen a dos ecuaciones que describen respectivamente la evolución de la intensidad  $S_0(z)$  y la polarización característica para el vector de Stokes unitario  $\mathbf{s}_p(z)$  :

$$\partial \frac{S_0(z)}{\partial z} = -\Delta\alpha [1 - \mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_p(z)] S_0(z) \quad (1.52.a)$$

$$\partial \frac{\mathbf{S}_p(z)}{\partial z} = \Delta\alpha [ \mathbf{s}_u - (\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_p(z)) \mathbf{s}_p(z) ] \quad (1.52.b)$$

finalmente se denota el vector dicroico  $\mathbf{D}$  por la expresión:

$$\mathbf{D} = \Delta\alpha \mathbf{s}_u \quad (1.53)$$

que permite caracterizar completamente un elemento dicroico.

## CAPÍTULO 2

### MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN ÓPTICA

---

- 2.1 FACTOR DE CALIDAD Q EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN ÓPTICA
  - 2.2 MODELAMIENTO DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN
  - 2.3 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN
  - 2.4 EFECTOS DE POLARIZACION EN SISTEMAS WDM
  - 2.5 MODULACION POR POLARIZACIÓN
  - 2.6 REPOLARIZACIÓN DE UNA SEÑAL MODULADA EN POLARIZACIÓN
- 

El interés suscitado en el desarrollo de sistemas de amplificación óptica para realizar transmisiones transoceánicas de muy alta velocidad reposa sobre tres avances tecnológicos que constituyen:

- i) la muy baja atenuación de las fibras de tipo germano-silice (0,2 dB/Km) a 1,55  $\mu\text{m}$ ,
- ii) El gran ancho de banda que ofrecen estas fibras (del orden de decenas de Terahertz) y
- iii) Transparencia a la tasa de bits de los amplificadores ópticos en fibras dopadas.

Las limitaciones principales de estos sistemas provienen de:

- i) La acumulación de ruido producido por los amplificadores ópticos,
- ii) de la dispersión cromática,
- iii) de los efectos no lineales y
- iv) los efectos de polarización.

Para minimizar la acumulación de ruido y los efectos no lineales, en los sistemas de amplificación óptica se ponen en práctica técnicas de auto filtraje y de optimización de la etapa amplificadora. La dispersión cromática es igualmente ajustada de forma periódica para minimizar las interacciones no lineales entre el ruido y la señal y así mantenerlas en un valor medio próximo a cero.

Dentro de este capítulo, se analizará la incidencia de los efectos de polarización en el desempeño de un sistema de transmisión con amplificación óptica. Antes de ello es esencial entender el concepto del factor de calidad Q el cual permite obtener gran información acerca del comportamiento de este tipo de sistemas.

## **2.1 FACTOR DE CALIDAD Q EN SISTEMAS DE AMPLIFICACIÓN ÓPTICA**

En sistemas de transmisión digital, la tasa de error de bits (BER) constituye el último parámetro para evaluar el desempeño de la transmisión. En los sistemas de transmisión óptica digital con regeneración electrónica, la tasa de error de una cascada de N secciones regeneradoras (fibra + regenerador) corresponde simplemente a la suma de N tasas de error asociadas a cada una de las secciones regeneradoras. Para calcular una tasa de error global,

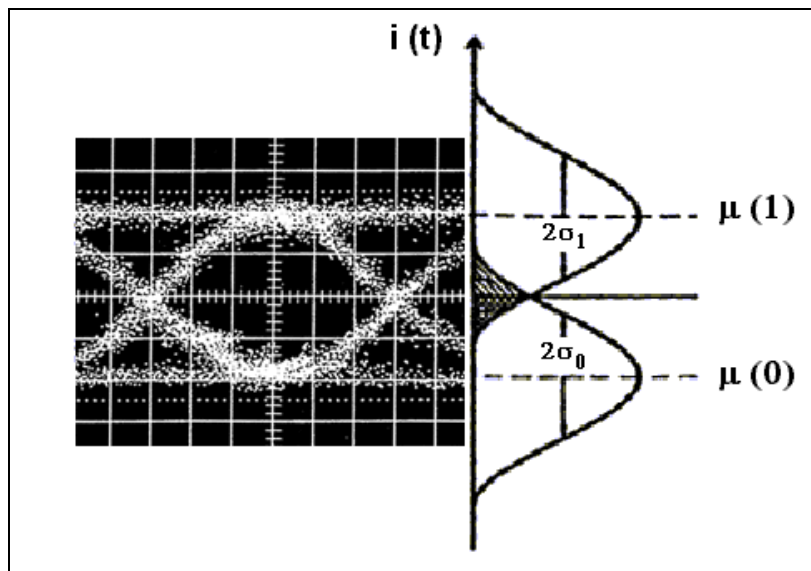


se especifica una tasa de error por cada sección en términos de la potencia umbral y de la potencia de salida para los regeneradores electrónicos.

Dentro de los sistemas de amplificación óptica, la calidad de una transmisión está ligada a la tasa de degradación sufrida por la señal óptica (distorsiones, acumulación de emisión espontánea amplificada ... ) sobre la totalidad de la línea de transmisión (miles de kilómetros). La potencia de la señal incidente sobre un amplificador no constituye un parámetro muy predictivo, por lo tanto, el desempeño de estos sistemas se mide en función del factor de calidad Q definido a partir del diagrama del ojo en el sitio de recepción:

$$Q = \frac{\mu(1) - \mu(0)}{\sigma(1) + \sigma(0)} \quad (2.1)$$

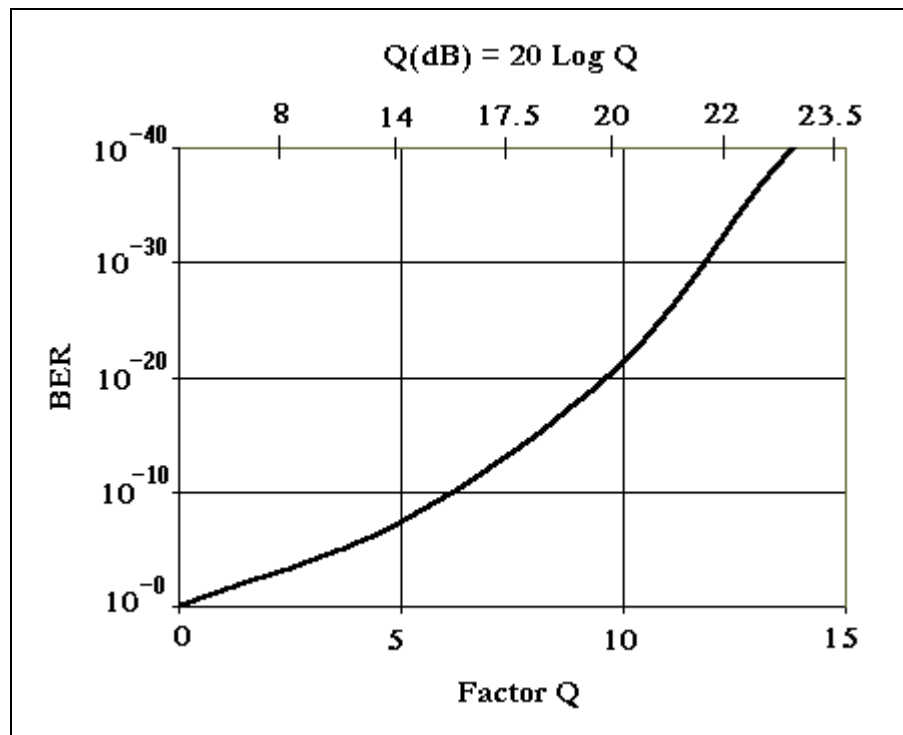
donde  $\mu(1)$ ,  $\mu(0)$ ,  $\sigma(1)$  y  $\sigma(0)$  designan los valores medios y las desviaciones estándar de las fotocorrientes inducidas sobre el detector en el sitio de recepción para los "0" y "1".



**Figura 2.1a** : Diagrama del ojo y factor Q

Para el caso de un sistema con recepción óptima y con la aproximación de ruido gaussiano, la teoría de transmisión digital relaciona directamente el factor Q con la tasa de error de bits BER:

$$\text{BER} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.2)$$



**Figura 2.1b** : Relación entre el factor Q y la tasa de error de bits

La figura 2.1b indica la relación entre el factor Q y la tasa de error binaria. Por ejemplo, para una tasa de error de 10<sup>-9</sup>, es necesario un factor Q superior a 6 (15,6 dB)\*.

(\*) El valor de BER de 10<sup>-9</sup> es adecuado para muchas instalaciones, incluyendo las comunicaciones por voz. Para los sistemas de fibra óptica de alta calidad, un valor de BER de 10<sup>-11</sup> es de uso común .

## 2.2 MODELAMIENTO DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN

---

Los efectos de polarización en sistemas de amplificación óptica se pueden definir de manera general de la siguiente forma :

- **Dispersión Por Polarización (PMD)** : Este efecto se origina en la birrefringencia residual de las fibras ópticas y de los amplificadores ópticos (fibras dopadas con erbio y aisladores ópticos).
- **Pérdidas en función de la Polarización (PDL)** : Ligado al dicroísmo residual de ciertos componentes pasivos de los amplificadores ópticos, principalmente de aisladores. Este efecto se mide mediante el parámetro PDL de la siguiente manera :

$$\text{PDL(dB)} = 20 \text{ Log}(T_{\text{max}}/T_{\text{min}}) \quad (2.3)$$

donde  $T_{\text{max}}$  y  $T_{\text{min}}$  corresponden a las transmitancias (en potencia óptica) máximas y mínimas en función de la polarización incidente. Este efecto es del orden de 0,06 a 0,1 dB por amplificador óptico.

- **Ganancia de los amplificadores ópticos en función de la Polarización (PDG)**: Este efecto está ligado a una saturación anisotrópica de la ganancia producida por una señal saturante. En régimen de saturación del amplificador, la ganancia decrece más rápidamente, según la polarización ortogonal. Esta ganancia diferencial está caracterizada por el parámetro PDG:

$$\text{PDG(dB)} = 20 \text{ Log}(G_{\perp}/G_{\parallel}) \quad (2.4)$$

donde  $G_{\perp}$  y  $G_{\parallel}$  corresponde respectivamente a los valores de ganancia diferencial según la polarización ortogonal y paralela a la señal. Este efecto, proporcional a la tasa de compresión de los amplificadores ópticos, es del orden de 0,14 dB para un amplificador saturado a 7dB.

La PDL y la PDG son dos efectos muy despreciables a escala de un solo amplificador. Sin embargo, para el caso de enlaces de grandes distancias que comprenden cientos de amplificadores, se mostrará que estos efectos pueden llegar a producir un impacto considerable sobre el desempeño global del sistema.

### **2.2.1 EFECTO DE LA DISPERSIÓN POR POLARIZACIÓN (PMD)**

En este párrafo, se estudiará el impacto de las distorsiones producidas por la dispersión por polarización sobre el desempeño de un sistema de amplificación óptica. Para analizar este efecto se utiliza una relación que asocia a la dispersión por polarización con la penalidad sobre el factor Q [2]. A partir de allí se derivarán las expresiones analíticas para la densidad de probabilidad asociada a la dispersión por polarización.

Para analizar el efecto de la dispersión por polarización, se determinará las penalidades sobre el factor Q mediante la expresión:

$$P = -20\text{Log}(Q_m / Q_0) \quad (2.5)$$

donde  $Q_m$  corresponde el valor medio del factor Q y  $Q_0$  designa el valor de Q en ausencia de dispersión por polarización.

### 2.2.1.1 Caso de la penalidad máxima

Para este caso uno supone que la señal es inyectada a  $45^\circ$  de los estados principales del enlace de fibra óptica. Este caso particular determina la penalidad máxima que se puede observar para una diferencia de tiempos de grupo dada en función de todos los estados de polarización posibles a la entrada del enlace [4].

Para representar la dependencia de la penalidad  $P$  en función de la dispersión por polarización  $\Delta\tau$ , se hace uso de una relación analítica entre los dos parámetros [2]. La función polinomial  $f$  constituye una representación analítica satisfactoria de esta dependencia:

$$\Delta\tau^2 = f(P) = (2030,4)P - (121,65)P^2 + (8,1659)P^3 \quad (2.6)$$

A partir de aquí y conociendo la estadística de  $\Delta\tau$  es posible determinar la estadística de  $P$ .

Recordando que la diferencia de tiempos de grupo  $\Delta\tau$  está asociada a una densidad de probabilidad Maxwelliana :

$$\text{PDF}(\Delta\tau) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} \Delta\tau^2 \exp(-\beta \cdot \Delta\tau^2) \quad (2.7)$$

donde  $\beta = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\langle \Delta\tau \rangle^2}$  es un coeficiente determinado por el valor medio de la diferencia de tiempos de grupo  $\langle \Delta\tau \rangle$ , parámetro característico de la dispersión por polarización.

Las variables  $P$  y  $\Delta\tau$  están relacionadas por (2.6), y es posible definir el cambio de variable. Las densidades de probabilidad asociadas a  $P$  y  $\Delta\tau$  verifican la ecuación:

$$\text{PDF}(P)dP = \text{PDF}(\Delta\tau)\left|\frac{\partial\Delta\tau}{\partial P}\right|d\Delta\tau \quad (2.8)$$

de la relación (2.6), se deduce que  $\left|\frac{\partial\Delta\tau}{\partial P}\right| = \frac{1}{2} \frac{f'(P)}{f^{1/2}(P)}$  y finalmente la expresión

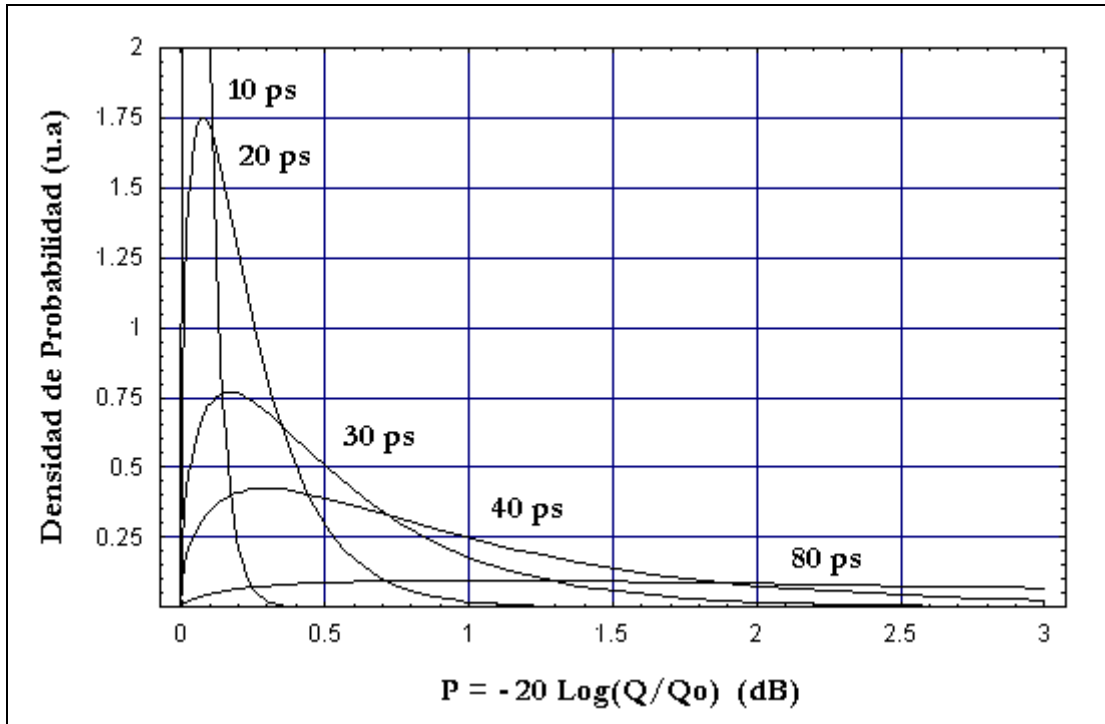
de la densidad de probabilidad asociada a la penalidad es :

$$\text{PDF}(P) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} f^{1/2}(P) f'(P) \exp[-\beta \cdot f(P)] \quad (2.9)$$

La probabilidad acumulada asociada a la penalidad se puede deducir simplemente afirmando que la probabilidad de que la penalidad  $P$  sea superior a  $p_0$  es igual a la probabilidad de que la diferencia de tiempos de grupo  $\Delta\tau$  sea superior a  $[f(p_0)]^{1/2}$ :

$$\begin{aligned} \Pr(P > p_0) &= \int_{p_0}^{+\infty} \text{PDF}(P)dP = \int_{f(p_0)^{1/2}}^{+\infty} \text{PDF}(\Delta\tau)d\Delta\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\beta} f^{1/2}(p_0) \cdot \exp[-\beta \cdot f(p_0)] + \text{erfc}\left[\sqrt{\beta} \cdot f^{1/2}(p_0)\right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

La figura 2.2 indica las densidades de probabilidad del factor  $Q$  normalizadas en función de la dispersión por polarización para el caso de un penalidad máxima. Se puede observar que estas densidades de probabilidad presentan una fuerte asimetría a medida que la dispersión por polarización es superior a 30 ps.



**Figura 2.2** : Densidad de probabilidad de la penalidad sobre el factor  $Q$  en función de la dispersión por polarización (diferencia de tiempos de grupo medio) para el caso de la penalidad máxima (señal inyectada a  $45^\circ$  de los estados principales)

### 2.2.1.2 Caso de la penalidad media

Para un enlace amplificado de diferencia de tiempos de grupo  $\Delta\tau$ , la penalidad del sistema no sólo se determina por  $\Delta\tau$ , sino también por la polarización de la señal inyectada dentro del enlace. Para este caso general donde la polarización de la señal no está a  $45^\circ$  de los estados principales a la entrada del enlace, la penalidad es inferior al caso precedente. En este párrafo se estudiará el caso general donde la estadística de la penalidad  $P$  resulta de la combinación de la estadística de la diferencia de tiempos de grupo  $\Delta\tau$  y del estado de polarización inyectado.

Para proceder de manera análoga al caso anterior es útil determinar una relación entre P y otros dos parámetros, el uno asociado a la diferencia de tiempos de grupo ( $\Delta\tau$ ) y el otro al estado de polarización inyectado. Esta relación puede ser determinada a partir del análisis del ensanchamiento experimentado por un impulso gaussiano dentro de un enlace que presenta una diferencia de tiempos de grupo  $\Delta\tau$ . Se puede mostrar que si  $\sigma_e$  es la desviación estándar temporal del impulso a la entrada y  $2\theta$  el ángulo entre el estado de polarización y el eje de los estados principales, el ensanchamiento sufrido  $\Delta\sigma$  se describe por la expresión:

$$\Delta\sigma = [\sigma_s^2 - \sigma_e^2]^{1/2} = \frac{1}{2} \Delta\tau [\sin 2\theta] \quad (2.11)$$

donde  $\sigma_s$  designa la desviación estándar temporal del impulso al final del enlace [4].

El ensanchamiento  $\Delta\sigma$  es igual a  $\Delta\tau/2$  para el caso de una inyección a  $45^\circ$  de los estados principales. La expresión (2.11) sugiere la búsqueda de una relación entre la penalidad y el factor  $\Delta\tau[\sin 2\theta]$ .

La relación analítica determinada entre la penalidad P y la diferencia de tiempos de grupo  $\Delta\tau$  para el caso particular de un estado de polarización inyectado a  $45^\circ$  de los estados principales se generaliza para el caso de un estado de polarización de entrada cualquiera de la siguiente forma [2]:

$$\Delta\tau^2 \sin^2 2\theta = f(P) = (2030,4)P - (121,65)P^2 + (8,1659)P^3 \quad (2.12)$$

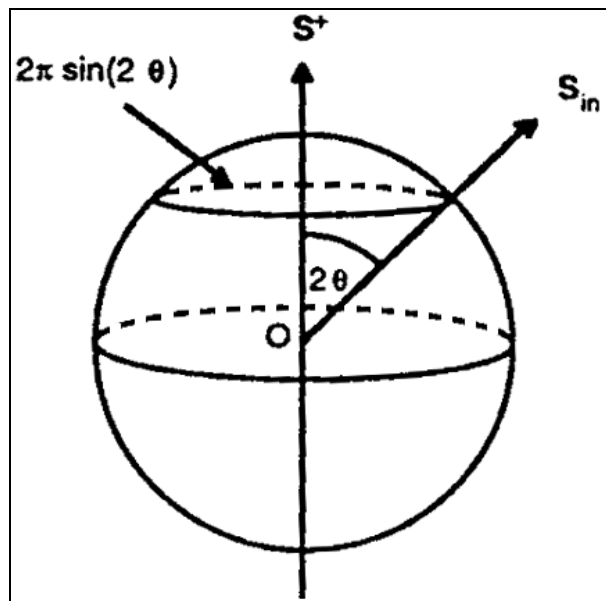


La penalidad P aparece como una función de dos términos estadísticos  $\Delta\tau$  y  $\theta$ :

$$P = \Phi(\Delta\tau, \theta) \quad (2.13)$$

donde las densidades de probabilidad son calculables.  $\Delta\tau$  sigue una ley maxwelliana y  $\theta$  una ley que se puede determinar suponiendo que todos los estados de polarización son equiprobables a la entrada del enlace. Para el caso de una distribución uniforme sobre la esfera de Poincaré, la densidad de probabilidad de  $\theta$  ( $\theta \in [0, \pi/2]$ ) es proporcional al número de estados de polarización que forman un ángulo  $2\theta$  con el estado principal positivo. Este número está directamente ligado al parámetro  $2\pi \sin(2\theta)$  del círculo de latitud  $\pi/2 - 2\theta$  (figura 2.3). De la condición de normalización se deduce que:

$$\text{PDF}(\theta) = \sin(2\theta) \quad \theta \in [0, \pi/2] \quad (2.14)$$



**Figura 2.3 :** Definición del ángulo  $2\theta$  sobre la esfera de Poincaré entre la polarización inyectada dentro del enlace y el eje de los estados principales.

Para calcular la densidad de probabilidad asociada al factor  $\Delta\tau \sin(2\theta)$ , se considera el cambio de variables siguiente:  $(x_1, x_2) \rightarrow (z_1, z_2)$ :

$$\begin{aligned} x_1 = \theta & & \theta \in [0, \pi/2] & & z_1 = \sin(2\theta) \Delta\tau \\ x_2 = \Delta\tau & & \Delta\tau \in [0, +\infty] & & z_2 = \theta \end{aligned} \quad (2.15)$$

La densidad de probabilidad combinada de  $z_1$  y  $z_2$  está determinada por la relación:

$$\text{PDF}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \text{PDF}(x_1, x_2) \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(z_1, z_2)} \right| dx_1 dx_2 \quad (2.16)$$

donde  $\left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(z_1, z_2)} \right| = \frac{1}{\sin(2\theta)}$  designa el jacobiano de las variables  $x$  en función de las variables  $z$ .

Las variables  $\theta$  y  $\Delta\tau$  son independientes, la densidad de probabilidad combinada está dada por la expresión:

$$\text{PDF}(z_1, z_2 = \theta) = \frac{1}{\sin(2\theta)} \text{PDF}(\theta) \text{PDF}(\Delta\tau(z_1)) \quad (2.17)$$

donde

$$\text{PDF}(z_1, \theta) = \frac{16}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} \frac{z_1^2}{\sin^2(2\theta)} \exp\left[-4\beta \frac{z_1^2}{\sin^2(2\theta)}\right] \quad (2.18)$$

de la expresión (2.18) se deduce la densidad de probabilidad asociada a  $z_1$ :

$$\text{PDF}(z_1) = \int_0^{\pi/2} \text{PDF}(z_1, \theta) d\theta = 2\beta z_1 \exp[-\beta z_1^2] \quad (2.19)$$

La penalidad P se encuentra ahora en función de una sola variable  $z_1 = \sin(2\theta) \Delta\tau$ , se puede por lo tanto calcular la probabilidad asociada a P de la misma manera que en (Cf §3.2.1.1). Efectuando el paso de la variable  $z_1$  a P para encontrar la densidad de probabilidad se cumple que :

$$\text{PDF}(P)dP = \text{PDF}(z_1) \left| \frac{\partial z_1}{\partial P} \right| dz_1 \quad (2.20)$$

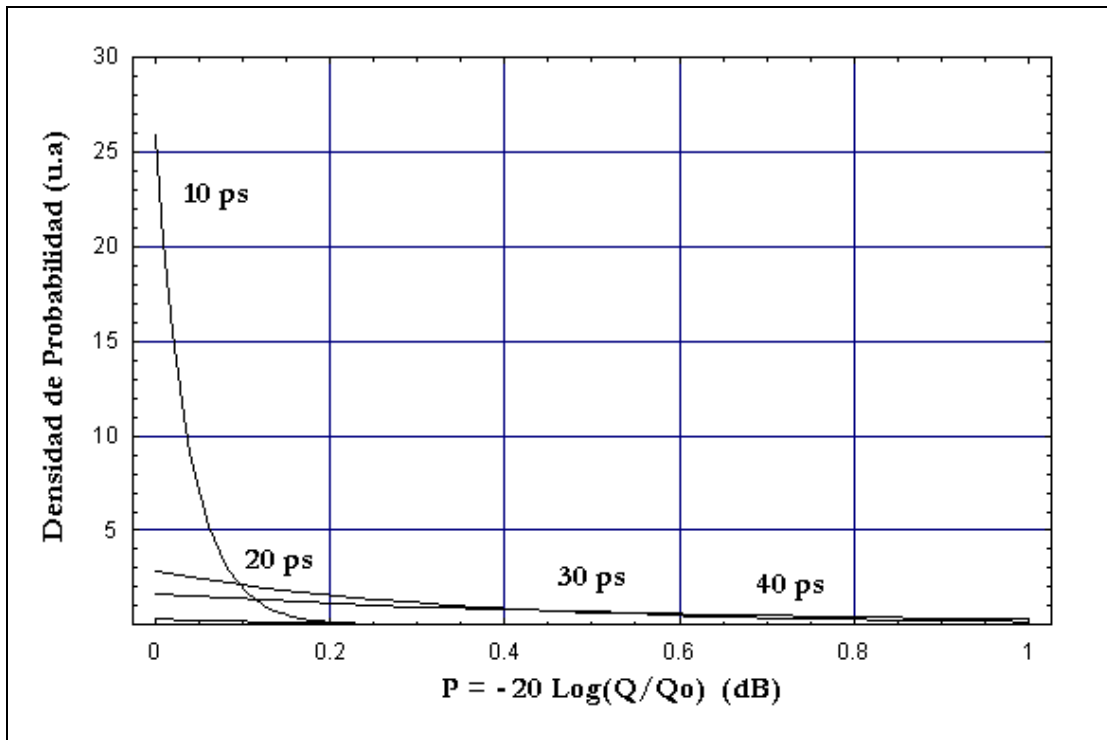
de  $\left| \frac{\partial z_1}{\partial P} \right| = \frac{1}{2} \frac{f'(P)}{f^{1/2}(P)}$ , se deduce que:

$$\text{PDF}(P) = \beta \cdot f'(P) \cdot \exp[-\beta \cdot f(p_o)] \quad (2.21)$$

La probabilidad acumulada de la penalidad  $P_{Q_o}$  está dada por la expresión:

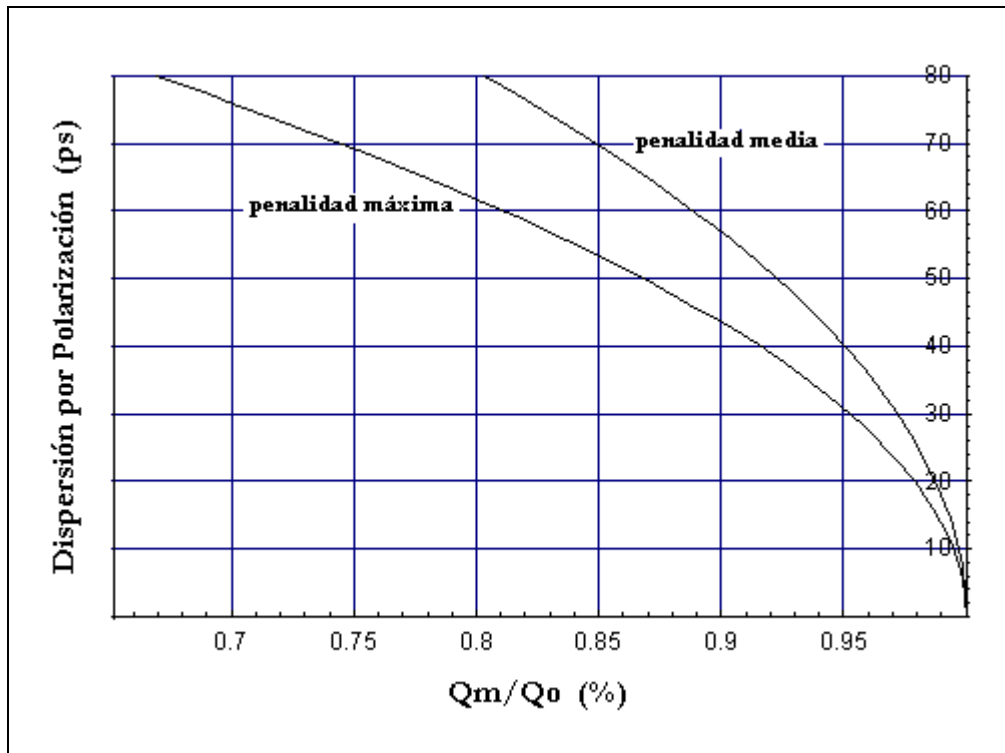
$$\Pr(P > p_o) = \int_{p_o}^{+\infty} \text{PDF}(P)dP = \exp[-\beta \cdot f(p_o)] \quad (2.22)$$

La figura 2.4 indica las densidades de probabilidad de la penalidad sobre el factor Q en función de la dispersión por polarización para el caso en el que se tiene en cuenta las variaciones aleatorias de la polarización inyectada dentro del enlace amplificado. Se puede observar una modificación radical de la altura de las densidades de probabilidad cuando la dispersión por polarización varía de 10 a 30 ps. Para una dispersión por polarización de 10 ps, la densidad de probabilidad media sobre el factor Q de las fluctuaciones de esta penalidad son muy despreciables. Para una dispersión por polarización de 30 ps, las fluctuaciones del factor Q se vuelven muy significativas.



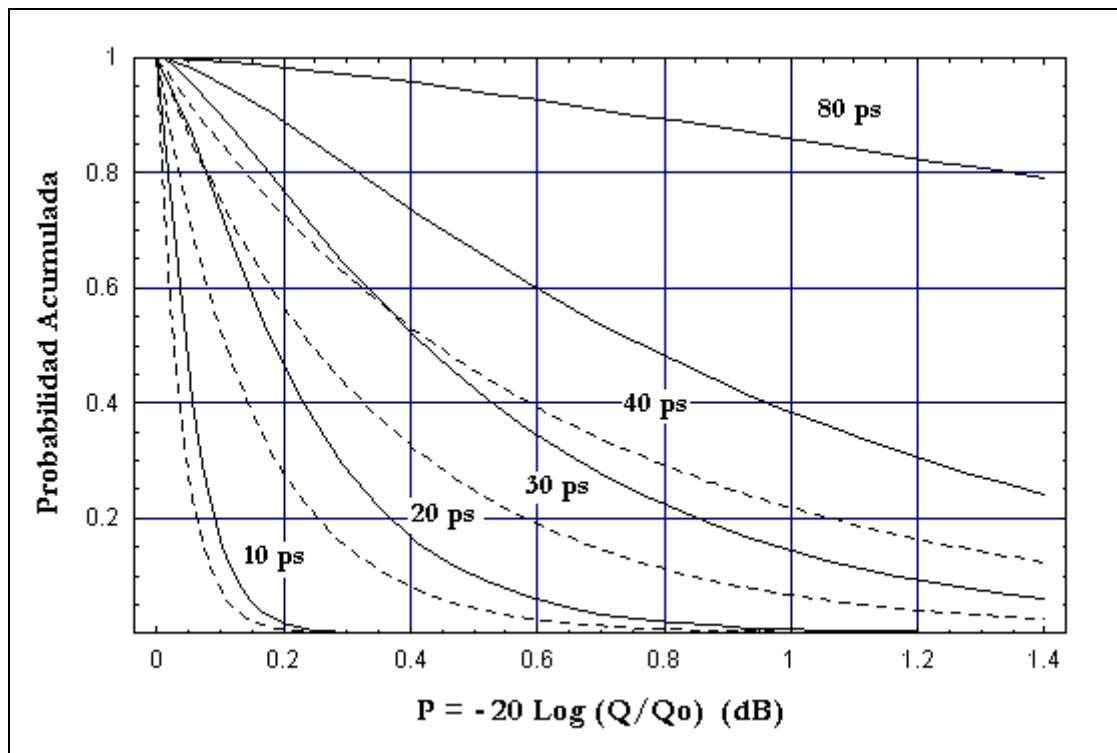
**Figura 2.4 :** Densidad de probabilidad de la penalidad sobre el factor Q debido a la dispersión por polarización. Caso de la penalidad media (los estados de polarización inyectados dentro del enlace son aleatorios)

La figura 2.5 indica las variaciones de la penalidad media y de la penalidad máxima de las fluctuaciones del factor Q en función de la dispersión por polarización. Para una dispersión por polarización de 10 ps, tanto la penalidad media como la penalidad máxima son casi despreciables ( $Q_m/Q_o = 99,6\%$ ). Para una dispersión por polarización de 30 ps, ambos tipos de penalidades, la máxima y la media, se vuelven más significativas ( $Q_m/Q_o = 95\%$  para la penalidad máxima y de  $Q_m/Q_o = 97\%$  para la penalidad media).



**Figura 2.5 :** Penalidades media y máxima de las fluctuaciones del factor  $Q$  en función de la dispersión por polarización

Sobre la figura 2.6 se indican las probabilidades acumuladas de la penalidad sobre el factor  $Q$  para diferentes valores de la dispersión por polarización. Se puede observar que las curvas correspondientes al caso de la penalidad media son muy parecidas a aquellas que representan la penalidad máxima, sobre todo para valores de la dispersión por polarización menores a 30 ps aproximadamente. Este resultado se debe a que los estados de polarización a  $45^\circ$  de los estados principales son mucho más numerosos que los estados de polarización coincidentes con los estados principales.

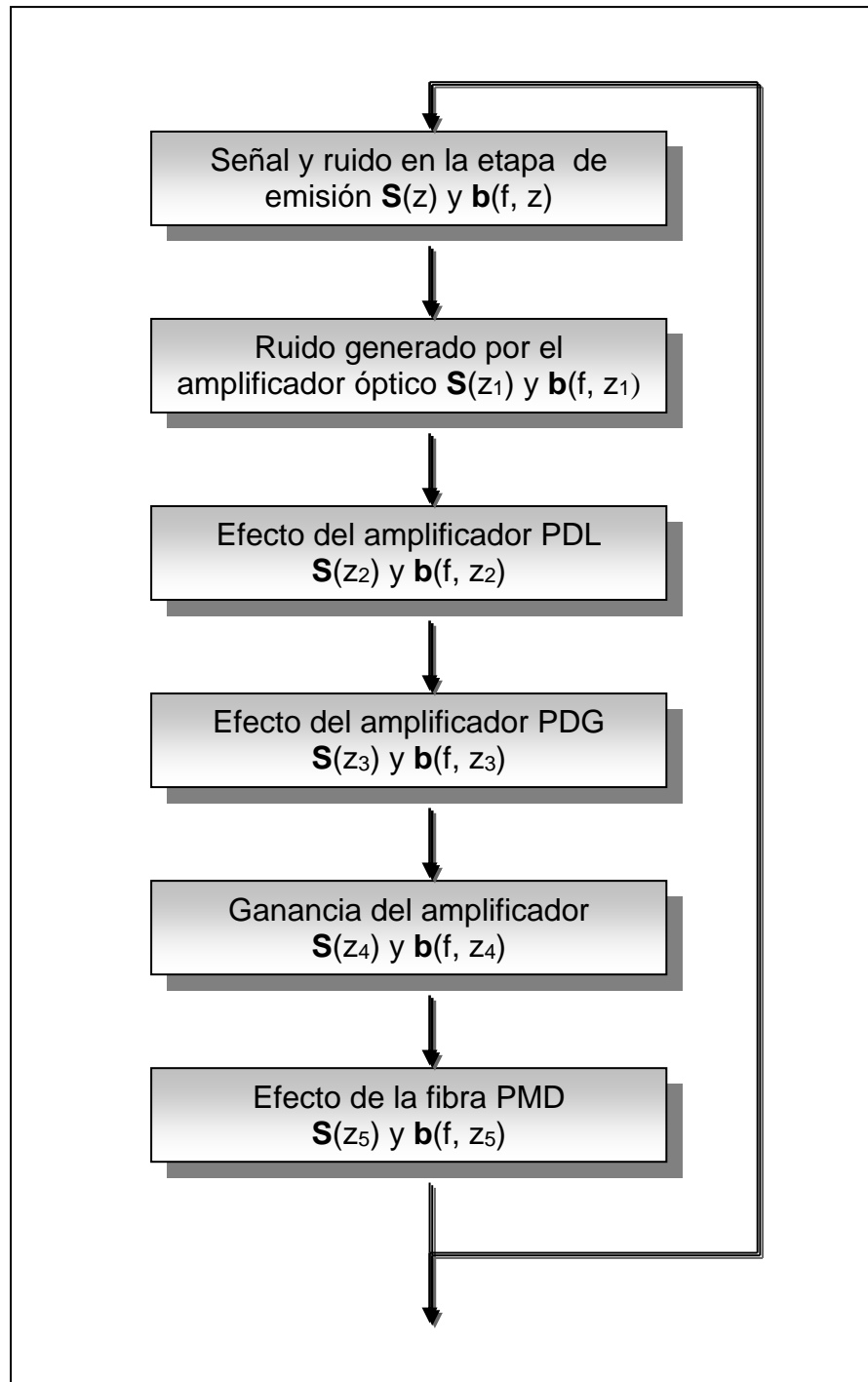


**Figura 2.6 :** Probabilidad acumulada de la penalización sobre el factor Q debido a la dispersión por polarización. Las líneas continuas corresponden al caso de la penalización máxima (los estados de polarización inyectados dentro del enlace están a 45° de los estados principales). Las líneas punteadas corresponden al caso de la penalización media (el estado de polarización inyectado dentro del enlace es aleatorio)

## 2.2.2 EFECTOS DE LA PDG Y DE LA PDL

### 2.2.2.1 Modelo de Cuaterniones

Para estudiar los efectos de la PDL y de la PDG, un sistema de transmisión puede ser modelado como se indica en la figura 2.7. Primero se estudia la representación de la señal en el enlace, luego se modelan los amplificadores ópticos, la sección de fibra y por último se calcula el factor Q.



**Figura 2.7 :** Modelo de los efectos de polarización en un sistema de amplificación óptica

## A. Representación de la señal en el enlace

### 1. La señal

La señal es considerada como monocromática de frecuencia  $f_0$  y de potencia  $S_0(z)$  en un punto  $z$ . El cuadvectores de Stokes asociado a la señal es dado por la expresión :

$$\mathbf{S}(z) = \begin{bmatrix} S_0(z) \\ S_1(z) \\ S_2(z) \\ S_3(z) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Se denota  $\mathbf{S}_p(z)$  al vector de Stokes asociado a la señal y definido por :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p(z) &= S_1(z) + S_2(z) + S_3(z) \\ &= S_p(z)\mathbf{s}(z) \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{s}(z)$  es el vector de Stokes unitario asociado a la señal.

En este párrafo, se considera el caso de una señal totalmente polarizada, verificando así :

$$d_{pol_s} = 1 \quad \text{y} \quad S_0 = S_p = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad (2.25)$$



## 2. El ruido

El ruido es considerado como una superposición de componentes monocromáticas de intensidad  $b_0(f,z)df$  a la frecuencia  $f$  y de vectores de Stokes unitarios  $\mathbf{s}_p(f,z)$ . El termino  $b_0(f,z)$  designa la densidad espectral del ruido y el cuadrivector de Stokes asociado a la componente de ruido a la frecuencia  $f$  se da por la expresión :

$$\mathbf{b}(f,z) = \begin{bmatrix} b_0(f,z) \\ b_1(f,z) \\ b_2(f,z) \\ b_3(f,z) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

se denota  $\mathbf{b}_p(f,z)$  al vector de Stokes asociado al cuadrivector  $\mathbf{b}(f,z)$  y definido por :

$$\mathbf{b}_p(f,z) = b_p(f,z)\mathbf{s}_p(f,z) \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{s}_p(f,z)$  designa el vector de Stokes unitario que describe la polarización preferencial de la componente  $\mathbf{b}(f,z)$  del ruido.

La componente espectral del ruido  $\mathbf{b}(f,z)$  está en el caso general parcialmente polarizada. Ella corresponde a la emisión espontánea amplificada en la frecuencia  $f$ , la cual está depolarizada en la emisión y se polariza parcialmente en el curso de la propagación debido a los efectos de polarización (PDL y PDG).

El cuadrivector de Stokes asociado al ruido total se expresa :

$$\mathbf{B}(z) = \begin{bmatrix} B_0(z) \\ B_1(z) \\ B_2(z) \\ B_3(z) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{B}_i(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_i(f, z) df \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

El vector de Stokes asociado al ruido se expresa :

$$\mathbf{B}_p(z) = \begin{bmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \\ B_3(z) \end{bmatrix} = B_p(z) \mathbf{s}_p(z) \quad (2.29)$$

El grado de polarización  $dpol_B(z)$  asociado a este ruido en el caso mas general :

$$dpol_B(z) = \frac{B_p(z)}{B_0(z)} \quad (2.30)$$

El campo óptico global (señal + ruido) que se propaga en el sistema resulta de la suma incoherente de los términos de señal y ruido. Es pues representada por la suma de los cuadrivectores de Stokes de las diferentes componentes espectrales :

$$\mathbf{S}(z, f) + \mathbf{B}(z, f) = \begin{bmatrix} S_0(z, f) + B_0(z, f) \\ S_1(z, f) + B_1(z, f) \\ S_2(z, f) + B_2(z, f) \\ S_3(z, f) + B_3(z, f) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

## B. Modelamiento de los amplificadores ópticos

Cada amplificador óptico es modelado para cuatro funciones :

- Generación de ruido
- Ganancia
- PDL
- PDG

### 1. Generación de ruido

El espectro de emisión espontánea amplificada (ASE) en un amplificador óptico presenta dos picos a 1532,5 nm y 1558,0 nm [5]. Sin embargo para tratar los problemas de acumulación del ruido ASE en una cascada de amplificadores en configuración de auto filtraje (caso donde la frecuencia de la señal  $f_0$  coincide con la frecuencia  $f_c$  del pico de ganancia principal), se puede asimilar la densidad espectral de la emisión espontánea amplificada  $N_{ASE}(f)$  como una lorentziana centrada sobre  $f_0$ :

$$N_{ASE}(f) = N_{ASE}(f_0)H(f - f_0) \quad (2.32)$$

el valor de la densidad espectral a la frecuencia de señal  $f_0$ , se da por el valor:

$$N_{ASE}(f_0) = 2N_{sp} \left( \frac{G}{C_1 \cdot C_2} - 1 \right) C_2 B_0 h f_0 \quad (2.33)$$

donde  $N_{sp}$  es el factor de emisión espontánea ( $N_{sp} = 1$  para un amplificador ideal y  $N_{sp} > 1$  para los amplificadores ópticos reales),  $G$  es la ganancia de la

fibra para  $f = f_0$ ,  $B_0$  el ancho de banda del canal óptico,  $C_1$  y  $C_2$  los coeficientes de acople respectivamente a la entrada y salida del amplificador óptico y  $h$  la constante de Plank.

El coeficiente 2 corresponde a dos modos de polarización. La lorentziana  $H(f - f_0)$  esta definida por :

$$H(f - f_0) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2(f - f_0)}{B_{ASE}}\right)^2} \quad (2.34)$$

donde  $B_{ASE}$  es el ancho espectral equivalente a 3 dB (en Hz).

El cuadrivector de Stokes  $\delta\mathbf{b}(f)$  asociado a la densidad de ruido generado es:

$$\delta\mathbf{b}(z) = \begin{bmatrix} N_{ASE}(f) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

por lo tanto, la ecuación que traduce el ruido generado por el amplificador óptico se expresa por :

$$\mathbf{b}(z_1, f) = \mathbf{b}(z_0, f) + \delta\mathbf{b}(f) \quad (2.36)$$

## 2. Ganancia

El amplificador óptico presenta una ganancia en la que el perfil espectral puede estar considerado como lorentziana en las condiciones precisadas en el párrafo precedente :

$$G(f - f_0) = GH(f - f_0) \quad (2.37)$$

de otra parte, el amplificador es utilizado en régimen de saturación, por lo tanto su potencia de salida total  $P_0$  es constante :

$$S_0(z_4) + B_0(z_4) = P_0 \quad (2.38)$$

y la ganancia  $G$  al final del amplificador es pues determinada por la ecuación:

$$GS_0(z_3) + G \int_{-\infty}^{+\infty} H(f - f_0) b_0(f, z_3) df = P_0 \quad (2.39)$$

donde las ecuaciones para la señal y el ruido son :

Señal

$$S(z_4) = GS(z_3) \quad (2.40)$$

Ruido

$$\mathbf{b}(z_4, f) = GH(f - f_0) \mathbf{b}(z_3, f) \quad (2.41)$$

### 3. Perdidas por polarización (PDL)

La PDL puede ser representada por un elemento dicroico de atenuación diferencial  $e^{-2\Delta\alpha}$ . La PDL (en dB) para un amplificador está definida a partir de la relación con  $\Delta\alpha$  de la siguiente manera:

$$\text{PDL} = \frac{20}{\ln 10} \Delta\alpha \quad (2.42)$$

Se denota  $\mathbf{s}_u$  al vector de Stokes unitario asociado a la polarización propia que no sufre atenuación y  $-\mathbf{s}_u$  al vector de Stokes unitario asociado a la polarización propia de atenuación  $e^{-2\Delta\alpha}$ .

En notación cuaterniónica, el operador de polarización para la PDL se expresa como :

$$\mathbf{U}_{\text{PDL}} = \exp\left(\frac{-\Delta\alpha}{2}\right) \exp\left(j\frac{\Delta\alpha}{2} \mathbf{e}_n\right) \quad (2.43)$$

La evolución del campo óptico en un medio dicroico mediante el uso de cuaterniones se establecieron en el capítulo 1. La descripción de dicha evolución se traduce en las siguientes ecuaciones características tanto para la señal como para el ruido:

Señal :

La señal es considerada como polarizada, la evolución del cuadrivector de Stokes es enteramente determinado por la ecuación :

$$\mathbf{S}_0(z_2)\mathbf{s}(z_2) = \mathbf{S}_0(z_1)e^{-\Delta\alpha} \{\mathbf{s}(z_1) + \text{sh}(\Delta\alpha)\mathbf{s}_u + 2\text{sh}^2(\Delta\alpha/2)(\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}(z_1))\mathbf{s}_u\} \quad (2.44)$$

Ruido :

La componente de la densidad espectral del ruido a la frecuencia  $f$  no está parcialmente polarizada, su ecuación de evolución está dada por :

$$\begin{aligned} b_0(z_2, f) &= e^{-\Delta\alpha} \{ch(\Delta\alpha)b_0(z_1, f) + sh(\Delta\alpha)\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{b}_p(z_1, f)\} \\ \mathbf{b}_p(z_2, f) &= e^{-\Delta\alpha} \{\mathbf{b}_p(z_1, f) + sh(\Delta\alpha)b_0(z_1, f)\mathbf{s}_u + 2sh^2(\Delta\alpha/2)[\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{b}_p(z_1, f)]\mathbf{s}_u\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Las polarizaciones propias de un medio dicroico  $\mathbf{s}_u$  y  $-\mathbf{s}_u$  (vector de Stokes unitario asociado a la polarización) se comporta de manera aleatoria, de modo que los estados de polarización respectivos de la señal y las componentes del ruido evolucionan aleatoriamente debido a la birrefringencia de las fibras del enlace (fibra normal, fibra dopada) y de ciertos componentes ópticos (aislantes). Para modelar este efecto, se considera que la polarización propia definida por  $\mathbf{s}_u$  presenta una densidad de probabilidad uniforme sobre la esfera de Poincaré.

Se advierte que la PDL modifica las polarizaciones de las componentes espectrales del ruido introduciendo un acople de modos entre las potencias de ruido polarizadas paralela y ortogonalmente a la señal.

#### 4. Ganancia por polarización PDG

La PDG esta ligada a la saturación anisotrópica de ganancia de los amplificadores ópticos, ella puede estar representada por un elemento dicroico particular para el cual las polarizaciones propias corresponden a la polarización preferencial de la potencia óptica propagada (señal + ruido) y a

su polarización ortogonal. Se deduce además la hipótesis de que el dicroísmo es proporcional al grado de polarización de la potencia óptica total.

El vector de dicroísmo correspondiente se da por la expresión (1.53) :

$$\mathbf{D}(z) = \Delta g_0 \frac{\mathbf{S}_p(z) + \mathbf{B}_p(z)}{S_0(z) + B_0(z)} \quad (2.46)$$

La expresión (2.46) puede ser mostrada de la forma :

$$\mathbf{D}(z) = \Delta g_0 \text{dpol}_p(z) \mathbf{s}_p(z) \quad (2.47)$$

donde :

- ✓  $\text{dpol}_p(z)$  designa el grado de polarización de la potencia óptica total (señal + ruido) :

$$\text{dpol}_p(z) = \frac{\sqrt{(S_1(z) + B_1(z))^2 + (S_2(z) + B_2(z))^2 + (S_3(z) + B_3(z))^2}}{S_0(z) + B_0(z)} \quad (2.48)$$

- ✓  $\mathbf{s}_p(z)$  el vector de Stokes unitario asociado a la polarización preferencial de la potencia óptica total :

$$\mathbf{s}_p(z) = \frac{\mathbf{S}_p(z) + \mathbf{B}_p(z)}{|\mathbf{S}_p(z) + \mathbf{B}_p(z)|} \quad (2.49)$$

- ✓  $\Delta g_0$  es la atenuación diferencial máxima  $e^{-2\Delta g_0}$ , correspondiente al caso donde la potencia óptica total está polarizada ( $\text{dpol}_p = 1$ ).



Se denota  $\Delta g(z)$  a la atenuación diferencial :

$$\Delta g(z) = \Delta g_0 \text{dpol}(z) \quad (2.50)$$

La PDG (en dB) será representada por un elemento dielectrico de transmitancia  $e^{-2\Delta g(z)}$  siguiendo la polarización saturada (del vector de Stokes unitario  $\mathbf{s}_p$ ) y de transmitancia unitaria siguiendo la polarización ortogonal a la polarización saturada ( $-\mathbf{s}_p$ ).

El factor de atenuación  $\Delta g_0$  está pues relacionado al valor de la PDG por :

$$\text{PDG} = \frac{20}{\ln 10} \Delta g_0 \quad (2.51)$$

En notación cuaterniónica el operador de polarización PDG es:

$$U_{\text{PDG}} = e^{\frac{-\Delta g(z)}{2}} \exp\left(-j \frac{\Delta g(z)}{2} \mathbf{e}_p(z)\right) \quad (2.52)$$

Aplicando los resultados del capítulo 1 en el caso de la señal y el ruido, se obtienen las siguientes ecuaciones de evolución :

Señal :

$$\begin{aligned} S_0(z_3)\mathbf{s}(z_3) = S_0(z_2)e^{-\Delta g(z_2)} \{ \mathbf{s}(z_2) - \text{sh}(\Delta g(z_2))\mathbf{s}_p(z_2) + \\ + 2\text{sh}^2(\Delta g(z_2)/2)(\mathbf{s}_p(z_2) \cdot \mathbf{s}(z_2))\mathbf{s}_p(z_2) \} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ruido :

$$b_0(z_3, f) = e^{-\Delta g(z)} \{ \text{ch}(\Delta g(z))b_0(z_2, f) - \text{sh}(\Delta g(z))\mathbf{b}_p(z_2) \cdot \mathbf{b}_p(z_2, f) \}$$

$$\mathbf{b}_p(z_3, f) = e^{-\Delta g(z)} \{ \mathbf{b}_p(z_2, f) - \text{sh}(\Delta g(z)) \mathbf{b}_0(z_2, f) \mathbf{b}_p(z_2) + 2\text{sh}^2(\Delta g(z)/2) [\mathbf{b}_p(z_2) \cdot \mathbf{b}_p(z_2, f)] \mathbf{b}_p(z_2) \} \quad (2.54)$$

$\mathbf{s}_p(z)$ ,  $\mathbf{b}_p(z)$  designan los vectores de Stokes unitarios asociados a la polarización preferencial de la potencia óptica tanto para la señal como para el ruido así :

$$\mathbf{b}_p(z) = \mathbf{s}_p(z) = \frac{\mathbf{S}_p(z) + \mathbf{B}_p(z)}{|\mathbf{S}_p(z) + \mathbf{B}_p(z)|} \quad (2.55)$$

### C. Modelamiento de un tramo de fibra

En este estudio de los efectos de la PDL y de la PDG, solo los efectos activos sobre las potencias de ruido y de señal son tomados en consideración. Se considera pues la atenuación de la fibra (0,25 dB/km). No se considera ni el ensanchamiento ni la depolarización de señal inducida por la dispersión por polarización, pero se toma en consideración en cambio :

- la birrefringencia de fibras y de componentes ópticos que hacen evolucionar de manera aleatoria la polarización absoluta de la señal y del ruido
- la dispersión por polarización como dependencia del estado de polarización en función de la frecuencia óptica en un punto z del enlace.

El operador de polarización en notación cuaterniónica para la dispersión por polarización se expresa así [1], [4]:

$$U_{\text{PMD}} = \exp\left(\frac{\Delta\tau 2\pi(f - f_0)}{2} \mathbf{e}_u\right) \quad (2.56)$$

donde  $\Delta\tau$  es la diferencia de tiempos de grupo asociados a una sección de fibra óptica y  $\pm \mathbf{s}_u$  los vectores de Stokes unitarios asociados a los estados principales y  $f_0$  es la frecuencia de la señal que es tomada como referencia.

El vector  $\mathbf{s}_u$  corresponde a una densidad de probabilidad uniforme sobre la esfera de Poincaré y  $\Delta\tau$  es una variable estadística en la que la densidad de probabilidad es maxweliana [4] :

$$\text{PDF}(\Delta\tau) = \alpha\Delta\tau^2 \exp(-\beta\Delta\tau^2) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{32}{\pi^2 \text{PMD}^3} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{4}{\pi \text{PMD}^2} \quad (2.57)$$

donde PMD designa el valor medio de  $\Delta\tau$ .

Señal :

La dispersión por polarización deja invariante la intensidad y la polarización de la señal es tomada como referencia.

$$S_0(z_5) = S_0(z_4) \quad (2.58)$$

Ruido :

La dispersión por polarización deja invariante la intensidad de cada componente espectral del ruido.

$$b_0(z_5, f) = b_0(z_4, f) \quad (2.59)$$

La dispersión por polarización modifica la polarización de las componentes de la señal y el ruido a frecuencias diferentes de  $f_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p(z_5) = & \{\cos[\Delta\tau 2\pi(f_0)]\mathbf{S}_p(z_4) + \sin[\Delta\tau 2\pi(f_0)]\mathbf{s}_u \times \mathbf{S}_p(z_4) \\ & + 2\sin^2[\Delta\tau\pi(f_0)](\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{S}_p(z_4))\mathbf{s}_u\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_p(z_5, f) = & \{\cos[\Delta\tau 2\pi(f - f_0)]\mathbf{b}_p(z_4, f) + \sin[\Delta\tau 2\pi(f - f_0)]\mathbf{s}_u \times \mathbf{b}_p(z_4, f) \\ & + 2\sin^2[\Delta\tau\pi(f - f_0)](\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{b}_p(z_4, f))\mathbf{s}_u\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Se modifican las polarizaciones relativas de diferentes componentes espectrales del ruido, la dispersión por polarización inducen el acople entre las potencias de ruido paralela y ortogonal a la polarización de la señal.

### 2.2.2.2 MODELO DE PARÁMETROS DE STOKES

En esta sección, se desarrollará el modelo basado en los parámetros de Stokes para calcular las penalidades sobre el factor Q debido a la combinación de la dispersión (PMD) por polarización, las pérdidas por polarización (PDL) y las ganancias por polarización (PDG) en enlaces de fibra óptica de larga distancia [6].

Como estamos interesados en la evolución de la polarización de un canal de comunicación total, debemos enfocarnos en la evolución del promedio de los parámetros de Stokes para cada canal "m" por separado en un sistema WDM. Se define primero  $\mathbf{U}(z, t)$  como el vector de Jones en el dominio del tiempo. Se puede escribir  $\mathbf{U}$  como una suma de las contribuciones de  $n$  canales, obteniendo:

$$\mathbf{U} = \sum_{m=1}^n \mathbf{U}^{(m)} \exp[j(k^{(m)}z - \omega^{(m)}t)] \quad (2.62)$$

donde  $k^{(m)}$  y  $\omega^{(m)}$  son el número de onda y frecuencia central del  $m$  - ésimo canal medido con respecto al número de onda y frecuencia central de  $\mathbf{U}$ . La  $\mathbf{U}^{(m)}$  es la correspondiente onda envolvente. La definición de los parámetros de Stokes para cada canal es:

$$\begin{aligned}
 S_0^{(m)} &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \left[ |u_x^{(m)}(t)|^2 + |u_y^{(m)}(t)|^2 \right] dt \\
 S_1^{(m)} &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \left[ |u_x^{(m)}(t)|^2 - |u_y^{(m)}(t)|^2 \right] dt \\
 S_2^{(m)} &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \text{Re}[u_x^{(m)}(t) \cdot u_y^{(m)}(t)] dt \\
 S_3^{(m)} &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \text{Im}[u_x^{(m)}(t) \cdot u_y^{(m)}(t)] dt
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Donde  $T = t_1 - t_2$ , mientras  $u_x^{(m)}(t)$  y  $u_y^{(m)}(t)$  son las ondas envolventes en dos polarizaciones ortogonales. Se asume que  $T$  es mucho más grande que el período de bits y que el canal se vuelve estadísticamente estacionario cuando  $T$  sea grande. Se puede tomar los tres últimos parámetros de Stokes como las tres componentes de un vector de Stokes a una sola frecuencia  $\omega = \omega^{(m)}$ , igual a la frecuencia central del canal  $m$ .

Puesto que se tomará un conjunto de parámetros de Stokes para describir la evolución de la señal y otro conjunto para describir la evolución del ruido en cada canal, se debe convertir de la representación de Jones a la representación de Stokes para tratar con canales parcialmente polarizados.

## A. Dispersión por Polarización (PMD)

La PMD en la fibra óptica causará que los estados de polarización de diferentes canales evolucionen de forma diferente. Sin embargo, cuando la PMD es muy pequeña como para causar distorsión en un solo canal, los estados de polarización en ese canal evolucionan de manera uniforme. Para este modelo, simplemente se calcula la evolución debido a la PMD de los últimos tres parámetros de Stokes,  $S_1^{(m)}$ ,  $S_2^{(m)}$  y  $S_3^{(m)}$ , en cada canal como si ellos correspondieran a un simple vector de Stokes a la frecuencia central  $\omega^{(m)}$  del canal. Esta aproximación es razonable mientras el retraso de grupo diferencial acumulado en cada canal no sea más grande que la duración del pulso.

Puesto que no hay pérdidas y ganancias por polarización (PDL y PDG) en la fibra óptica, se puede asumir que  $S_0^{(m)}$  no es afectado.

Se calcula la evolución de los parámetros de Stokes, denotando el tamaño de paso a lo largo de la línea de transmisión entre amplificadores como  $\zeta$ , el cual típicamente se toma como 1 Km, se encuentra que:

$$S_0^{(m)}(z + \zeta) = S_0^{(m)}(z) \quad (2.64)$$

en esta expresión,  $z = z_0 + i\zeta$ , donde  $z_0$  es la localización de un amplificador y  $i = 1, \dots, N$ , donde  $N$  es el número total de pasos al siguiente amplificador, para la simulación numérica a  $N$  se ha dado un valor de 33.

Por otra parte, se encuentra que el vector de Stokes como parte de los parámetros de Stokes  $\mathbf{S}_p^{(m)} = (S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, S_3^{(m)})^t$  se transforma en el  $i$ -ésimo paso de acuerdo a la relación:

$$\mathbf{S}_p^{(m)}(z + \zeta) = M_R^{(m)} M_i(z) \mathbf{S}_p^{(m)}(z) \quad (2.65)$$

donde la forma de  $M_R^{(m)}$  y  $M_i$  se muestra como sigue:

$$M_R^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Delta\beta' \cdot \omega^{(m)} \cdot \zeta) & -\sin(\Delta\beta' \cdot \omega^{(m)} \cdot \zeta) \\ 0 & \sin(\Delta\beta' \cdot \omega^{(m)} \cdot \zeta) & \cos(\Delta\beta' \cdot \omega^{(m)} \cdot \zeta) \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cdot \cos \psi_i & -\sin \theta_i \cdot \sin \psi_i \\ -\sin \theta_i \cdot \cos \phi_i & \cos \theta_i \cdot \cos \phi_i \cdot \cos \psi_i - \sin \phi_i \cdot \sin \psi_i & -\cos \theta_i \cdot \cos \phi_i \cdot \sin \psi_i - \sin \phi_i \cdot \cos \psi_i \\ -\sin \theta_i \cdot \sin \phi_i & \cos \theta_i \cdot \sin \phi_i \cdot \cos \psi_i + \cos \phi_i \cdot \sin \psi_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \phi_i \cdot \sin \psi_i + \cos \phi_i \cdot \cos \psi_i \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

La cantidad  $\Delta\beta'$  es proporcional al promedio inverso de la diferencia de la velocidad de grupo a lo largo de dos ejes de polarización debido a la birrefringencia. Se puede escoger de tal forma que si  $\langle \tau \rangle$  es el valor esperado del retraso de grupo diferencial debido a la PMD en un tramo de longitud  $Z = N\zeta$ , entonces  $\Delta\beta' = (3\pi/32\zeta Z)^{1/2} \langle \tau \rangle$ .  $\phi_i$  y  $\psi_i$  en la expresión 2.67, son variables aleatorias que se escogen independientemente para cada  $i$ , de una distribución uniforme en el rango  $[0, 2\pi]$ , mientras que  $\theta_i$  es una variable aleatoria que se escoge independientemente para cada  $i$  tal que el  $\cos(\theta_i)$  esté uniformemente distribuido en el rango  $[-1, 1]$ . Esta escogencia corresponde a una rotación aleatoria con una distribución de probabilidad uniforme sobre la esfera de Poincaré. Se puede tomar los mismos  $\theta_i$ ,  $\phi_i$  y  $\psi_i$  para todos los canales.

## B. Pérdidas por Polarización (PDL)

La PDL es debida a la polarización dependiente de la transmisión en algunos dispositivos, notablemente en los acopladores WDM de los amplificadores. Valores típicos son menores a 0.1 dB en un solo amplificador, y es muy importante mantener muy bajo este valor. El efecto de un elemento con pérdidas por polarización (PDL) es causar exceso de pérdidas en una de las dos polarizaciones ortogonales. Usando la notación del vector de Jones, donde se toma la segunda componente como la dirección de máxima pérdida, se escribe :

$$\begin{pmatrix} u_x(t)^{(m)} \\ u_y(t)^{(m)} \end{pmatrix}_{\text{después}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x(t)^{(m)} \\ u_y(t)^{(m)} \end{pmatrix}_{\text{antes}} \quad (2.68)$$

donde  $\alpha$  está relacionado con  $\chi_{\text{PDL}}$  (la medida de PDL en dB) a través de la relación,  $\chi_{\text{PDL}}(\text{dB}) = -20\text{Log}_{10}(\alpha)$ . De (2.63) y (2.68) se encuentra :

$$\begin{aligned} S_{0,\text{después}}^{(m)} &= \frac{1 + \alpha^2}{2} S_{0,\text{antes}}^{(m)} + \frac{1 - \alpha^2}{2} S_{1,\text{antes}}^{(m)} \\ S_{1,\text{después}}^{(m)} &= \frac{1 - \alpha^2}{2} S_{0,\text{antes}}^{(m)} + \frac{1 + \alpha^2}{2} S_{1,\text{antes}}^{(m)} \\ (S_2 + jS_3)_{\text{después}}^{(m)} &= \alpha \cdot (S_2 + jS_3)_{\text{antes}}^{(m)} \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde se ha utilizado los parámetros de Stokes como promedios con respecto al tiempo.



### C. Ganancias por Polarización (PDG)

La PDG es debida a la “Polarization Hole burning” inducida por la señal de entrada a un amplificador de fibra óptica dopada con erbio (EDFA) [7]. La ganancia en la polarización ortogonal a la señal de entrada es mayor que la ganancia en la polarización paralela. La cantidad de PDG en un amplificador está alrededor de 0.07dB para un EDFA con 3dB de compresión de ganancia y de 0,14 dB para un amplificador saturado a 7dB. La magnitud de la ganancia por polarización PDG es proporcional al grado de polarización,  $d_{pol}$ , de la señal de entrada.

La PDG puede ser modelada de la misma forma que la PDL. Si ignoramos por el momento la contribución de ruido, se escribe :

$$\mathbf{S}_0^{total} = \sum_{m=1}^n \mathbf{S}_0^{(m)} \quad \mathbf{S}_p^{total} = \sum_{m=1}^n \mathbf{S}_p^{(m)} \quad (2.70)$$

El grado de polarización y el estado de polarización respectivamente:

$$d_{pol} = \frac{|\mathbf{S}_p^{total}|}{\mathbf{S}_0^{total}} , \quad \mathbf{s}_p = \frac{\mathbf{S}_p^{total}}{|\mathbf{S}_p^{total}|} \quad (2.71)$$

Se escribe ahora en representación de Jones:

$$\begin{pmatrix} u_x(t)^{(m)} \\ u_y(t)^{(m)} \end{pmatrix}_{después} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} u_x(t)^{(m)} \\ u_y(t)^{(m)} \end{pmatrix}_{antes} \quad (2.72)$$

donde  $g$  es la ganancia dependiente de la polarización, normalizada para la ganancia en la polarización de la señal de entrada. El valor  $g$  está relacionado con  $\chi_{\text{PDG}}$  (la PDG medida en dB) a través de la relación:

$$\chi_{\text{PDG}} \text{dpol} = 20 \text{Log}_{10}(g) \quad (2.73)$$

La matriz de rotación  $R$  está determinada por el estado de polarización total de la señal y el ruido, puesto que la orientación de la PDG está determinada por el estado de polarización, mientras  $R^{-1}$  es el inverso de  $R$ :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \exp[-j(\psi + \phi)/2] & -\sin(\varphi/2) \exp[j(\psi - \phi)/2] \\ \sin(\varphi/2) \exp[-j(\psi - \phi)/2] & \cos(\varphi/2) \exp[j(\psi + \phi)/2] \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Se transforma nuevamente de la representación de Jones a la de Stokes usando (2.63), haciendo el promedio en el tiempo para cada canal. Así se obtiene:

$$\begin{aligned} S_{0,\text{after}}^{(m)} &= \frac{1+g^2}{2} S_{0,\text{before}}^{(m)} - \frac{g^2-1}{2} \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{S}_{p,\text{before}}^{(m)} \\ \mathbf{S}_{p,\text{after}}^{(m)} &= -\frac{g^2-1}{2} S_{0,\text{before}}^{(m)} \mathbf{s}_p + \frac{g^2+1}{2} \mathbf{S}_{p,\text{before}}^{(m)} + \frac{(g-1)^2}{2} \mathbf{s}_p \times (\mathbf{s}_p \times \mathbf{S}_{p,\text{before}}^{(m)}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

#### D. Ruido de Emisión Espontánea ASE

Se debe tener en cuenta el ruido ASE dentro de los amplificadores, por consiguiente asignamos un conjunto de parámetros de Stokes para este tipo de ruido  $(S_{0,\text{ruido}}^{(m)}, \mathbf{S}_{p,\text{ruido}}^{(m)})$  correspondiente a cada canal  $m$ . Puesto que el ruido

ASE es no polarizado, cada amplificador causará el siguiente cambio en los parámetros de Stokes :

$$S_{0,\text{ruido,después}}^{(m)} = S_{0,\text{ruido,antes}}^{(m)} + 2N_{\text{sp}}(G-1)B^{(m)}h\nu$$

$$\mathbf{s}_{\text{P ruido,después}}^{(m)} = \mathbf{s}_{\text{P ruido,antes}}^{(m)} \quad (2.76)$$

donde  $N_{\text{sp}}$  es el factor de emisión espontánea,  $G$  la ganancia del amplificador,  $h\nu$  la energía de un solo fotón y  $B^{(m)}$  el ancho de banda óptico del  $m$  - ésimo canal.

Estos parámetros de Stokes son afectados por la PMD, la PDL y la PDG de la misma forma que los parámetros de Stokes de la señal y se tienen en cuenta en la determinación del grado de polarización y los parámetros de Stokes total.

Se puede ahora escribir finalmente:

$$S_0^{\text{total}} = \sum_{m=1}^n S_0^{(m)} + \sum_{m=1}^n S_{0,\text{ruido}}^{(m)}$$

$$\mathbf{s}_{\text{p}}^{\text{total}} = \sum_{m=1}^n \mathbf{s}_{\text{p}}^{(m)} + \sum_{m=1}^n \mathbf{s}_{\text{p ruido}}^{(m)} \quad (2.77)$$

el grado de polarización se puede escribir ahora como:

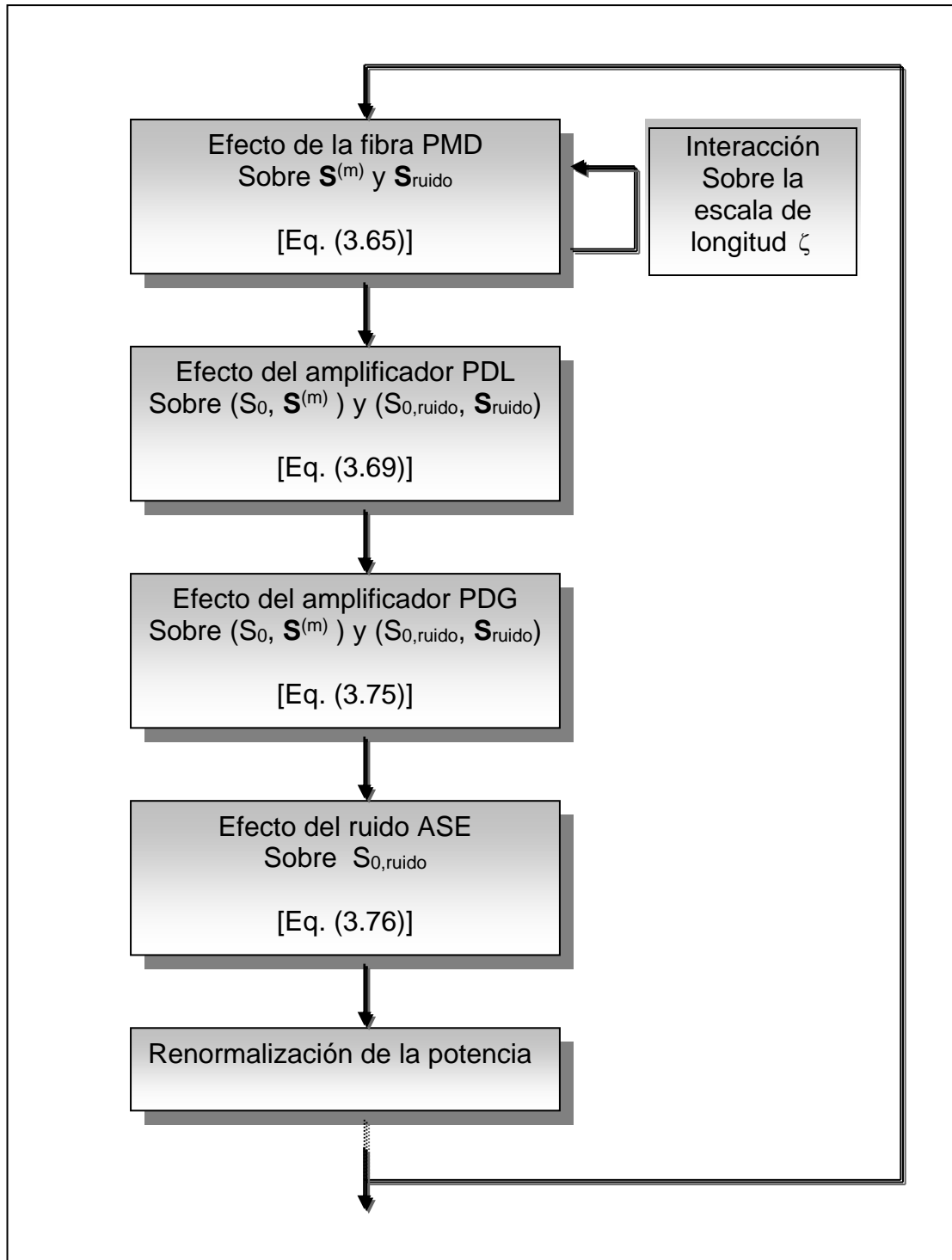
$$d_{\text{pol}} = \frac{|\mathbf{s}_{\text{p}}^{\text{total}}|}{S_0^{\text{total}}} \quad (2.78)$$

El paso final en el procedimiento es tener en cuenta el efecto de la ganancia de saturación asumiendo que la potencia total a la salida del amplificador está fijada a un valor  $\bar{S}$ . Se renormaliza por lo tanto  $S_0^{(m)}$ ,  $S_p^{(m)}$ ,  $S_{0,ruido}^{(m)}$ ,  $S_{Pruido}^{(m)}$  por el factor  $\bar{S}/S_0^{total}$  el cual tiene en cuenta la renormalización de la potencia total que ocurre en sistemas reales debido a la saturación de ganancia en los amplificadores.

En la figura 2.8 se resume esquemáticamente el procedimiento para resolver de manera numérica el modelo de parámetros de Stokes. Este procedimiento se repite iterativamente de amplificador a amplificador.

### 2.2.3 CÁLCULO DEL FACTOR DE CALIDAD Q

Existe en la literatura una expresión analítica muy útil del factor Q establecida por N. A. Olsson en el caso de sistemas ópticos [7], con la cual, partiendo del cálculo de cuaterniones y los parámetros de Stokes para la señal y el ruido, es posible determinar el factor de calidad Q y así determinar la penalidad debido a los efectos de la PDL y la PDG. Para esta penalidad, se debe primero notar que la expresión para el factor Q no tiene en cuenta la degradación debido a la no linealidad y la dispersión. Sin embargo, lo más importante es la diferencia entre los valores del factor Q cuando están presentes y ausentes los fenómenos de la PDL y la PDG para un valor siempre fijo de la PMD.



**Figura 2.8 :** Diagrama esquemático del procedimiento para resolver el modelo de Stokes. Se muestra solo una interacción entre cada amplificador.

Para calcular  $Q$  teniendo en cuenta una escogencia particular de PMD, PDL y PDG, primero se debe obtener la relación señal – ruido (SNR) del canal de transmisión la cual es igual a:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{máximo}}}{P_{\text{medio}}} \frac{S_{0,\text{señal}}}{S_{0,\text{ruido}}} \quad (2.79)$$

donde  $P_{\text{máximo}}/P_{\text{medio}}$  es la razón entre la potencia máxima y la potencia media de la señal en un canal de transmisión. Para el formato de pulso no-retorno a cero (NRZ), esta razón es de dos y para el formato estándar retorno a cero (RZ), esta razón es de cuatro. En principio, estos valores son un poco más bajos debido a los filtros eléctricos situados en el receptor; sin embargo, encontramos que nuestros resultados son insensibles a estas correcciones.

Se puede ahora usar la fórmula que relaciona el factor  $Q$  con la relación señal – ruido (SNR) asumiendo un ruido con una distribución gaussiana [7]:

$$Q^{(m)} = \frac{\text{SNR}^{(m)}}{\sqrt{2\text{SNR}^{(m)} + 1} + 1} \sqrt{\frac{2B_{\text{opt}}}{B_{\text{elect}}}} \quad (2.80)$$

donde  $B_{\text{opt}}$  es el ancho de banda óptico y  $B_{\text{elect}}$  es el ancho de banda eléctrico. Cabe anotar que esta expresión incluye las contribuciones tanto del ruido de batido espontáneo-espontáneo como del ruido de batido señal-espontáneo [3].

### **2.3 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS EFECTOS DE POLARIZACIÓN**

---

Para estudiar el impacto de los efectos de polarización usando los modelos desarrollados en el párrafo anterior, se han usado métodos de simulación numérica como herramienta para comparar y validar dichos modelos teniendo en cuenta resultados obtenidos en [3] y [6], donde se describen de manera detallada las características y consideraciones que se han tenido en cuenta para la implementación de otros modelos de tipo experimentales.

Así, con la ayuda de estos modelos teóricos analizaremos el desempeño de un sistema de amplificación por fibra óptica teniendo en cuenta el efecto de la PDL, el efecto de la PDG y el efecto combinado de la PDL y la PDG. Para ello se ha considerado un enlace amplificado de tipo transoceánico de 9000 Km de longitud que comprende 272 amplificadores ópticos espaciados a 33 Km cada uno, con una dispersión por polarización constante ( $PMD = 0.1 \text{ ps}/\sqrt{\text{Km}}$ ) para cada tramo de fibra. Las siguientes comparaciones muestran un excelente comportamiento entre el modelo de Stokes, el modelo de Cuaterniones y los resultados experimentales.

### 2.3.1 EFECTO DE LA PDL

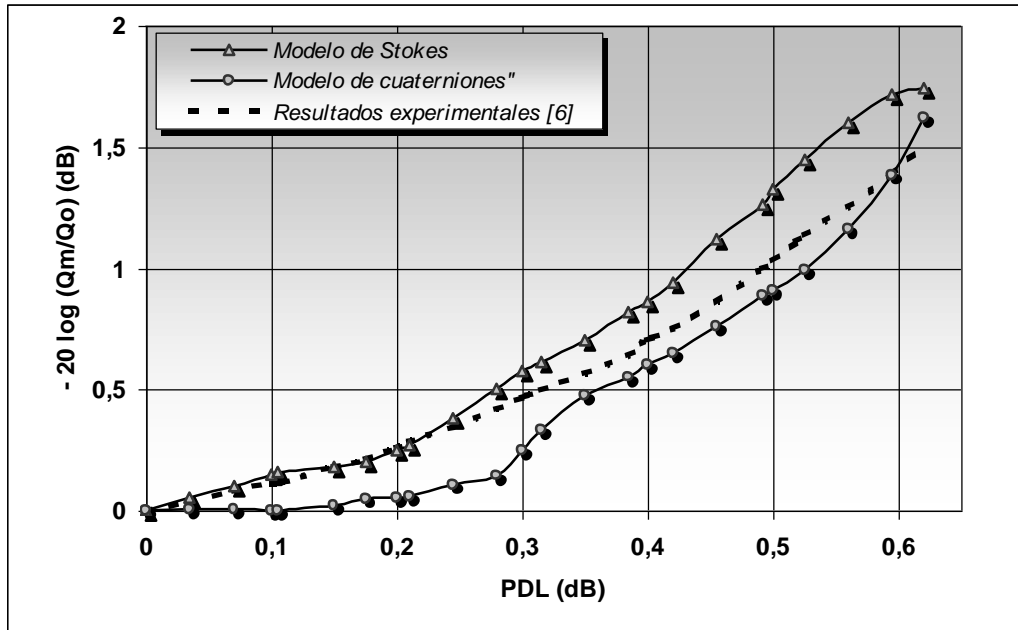
En la figura 2.9 se muestran los resultados de la simulación numérica de los efectos de las pérdidas por polarización para un enlace con las siguientes características :

➤ Velocidad de Trasmisión	10 Gbits/s
➤ Longitud del enlace	9000 Km
➤ Número de repetidores	272
➤ Grado de polarización de la señal	100%
➤ Ancho de banda óptico $B_{opt}$	125 GHz
➤ Ancho de banda eléctrico $B_{elec}$	4.41 GHz
➤ Formato del pulso	Non return zero (NRZ)
➤ Ventana de transmisión	1550 nm
➤ Ganancia del EDFA*	30 dB
➤ Potencia de saturación	12.5 dBm
➤ $B_{ASE}$	25nm
➤ $N_{sp}$	2.6
➤ Coeficiente de acople C1	0.85 dB
➤ Coeficiente de acople C2	1.80 dB
➤ Ganancia por polarización PDG	0 dB
➤ Dispersión por polarización PMD	0.1 ps/ $\sqrt{Km}$

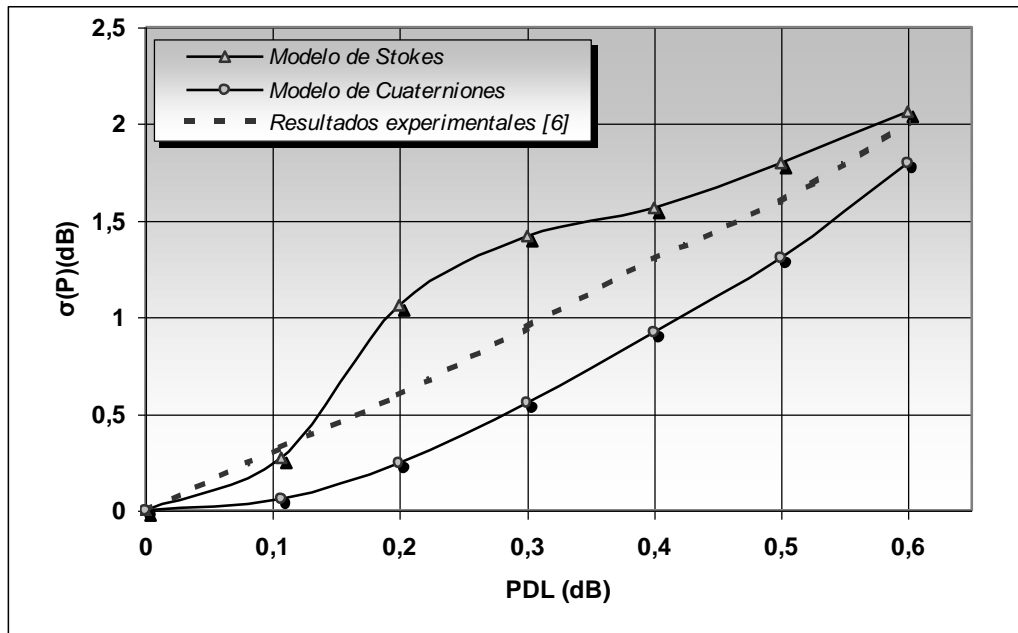
---

(\*) Un amplificador EDFA posee una región de ganancia entre 1525 nm y 1560 nm para un ancho de banda de ganancia de 35 nm y una ganancia entre 25 dB y 51 dB [5].





(a)



(b)

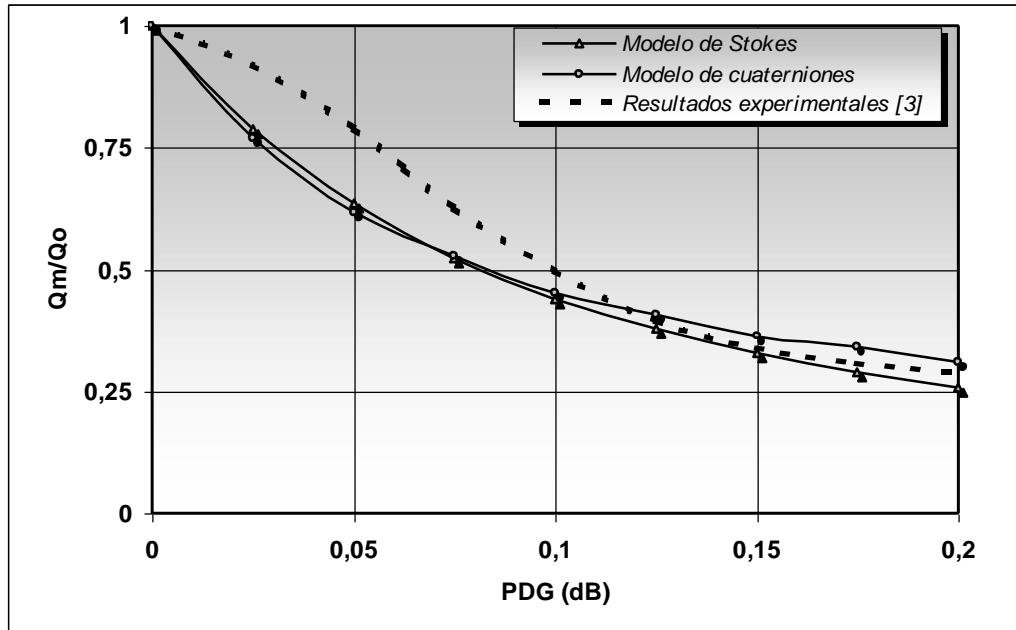
**Figura 2.9 :** a) Penalidad media sobre el factor Q debido a la PDL para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con  $(PMD = 0.1 \text{ ps}/\sqrt{\text{Km}}, PDG = 0 \text{ dB})$ . b) Desviación estándar de la penalidad sobre el factor Q.

Es claro, como se ve en la figura 2.9, que los dos modelos desarrollados corresponden muy bien a los resultados experimentales obtenidos en [6]. Además se aprecia que para grandes valores de PDL el efecto conjugado de la saturación, la dispersión por polarización y de la PDL produce penalidades medias significativas sobre el factor Q.

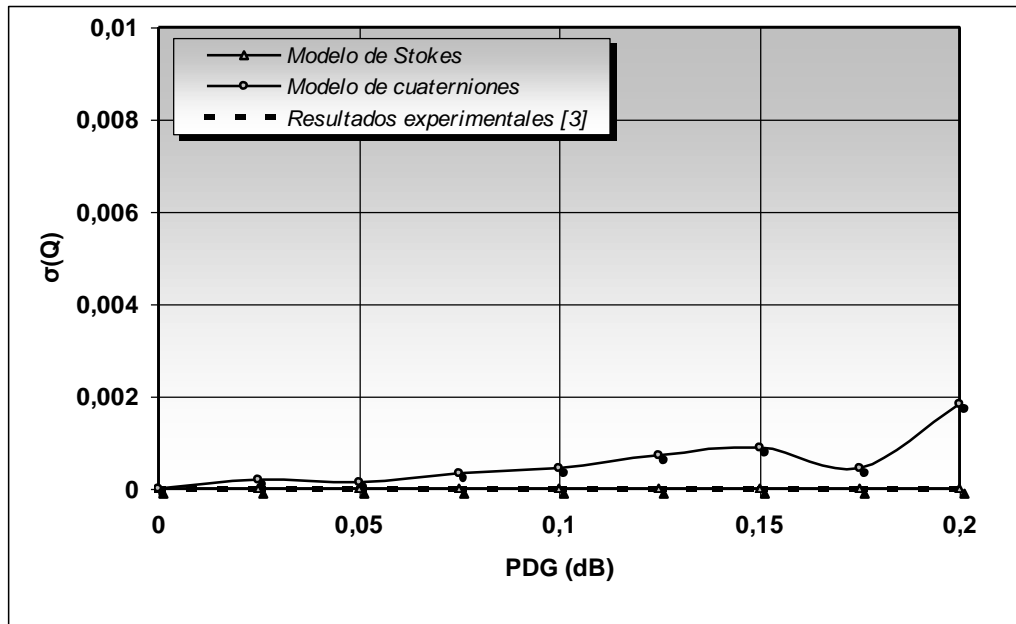
### 2.3.2 EFECTO DE LA PDG

En la figura 2.10 se muestran los resultados de la simulación numérica de los efectos de las ganancias por polarización para un enlace con las siguientes características:

➤ Velocidad de Transmisión	5 Gbits/s
➤ Longitud del enlace	9000 Km
➤ Número de repetidores	272
➤ Grado de polarización de la señal	100%
➤ Ancho de banda óptico $B_{opt}$	125 GHz
➤ Ancho de banda eléctrico $B_{elec}$	3.25 GHz
➤ Formato del pulso	Non return zero (NRZ)
➤ Ventana de transmisión	1550 nm
➤ Ganancia del EDFA no saturada	30 dB
➤ Potencia de saturación local	11 dBm
➤ $B_{ASE}$	25nm
➤ $N_{sp}$	2.6
➤ Coeficiente de acople C1	0.85 dB
➤ Coeficiente de acople C2	1.80 dB
➤ Perdidas por polarización PDL	0 dB
➤ Dispersión por polarización PMD	0.1 ps/ $\sqrt{Km}$



(a)



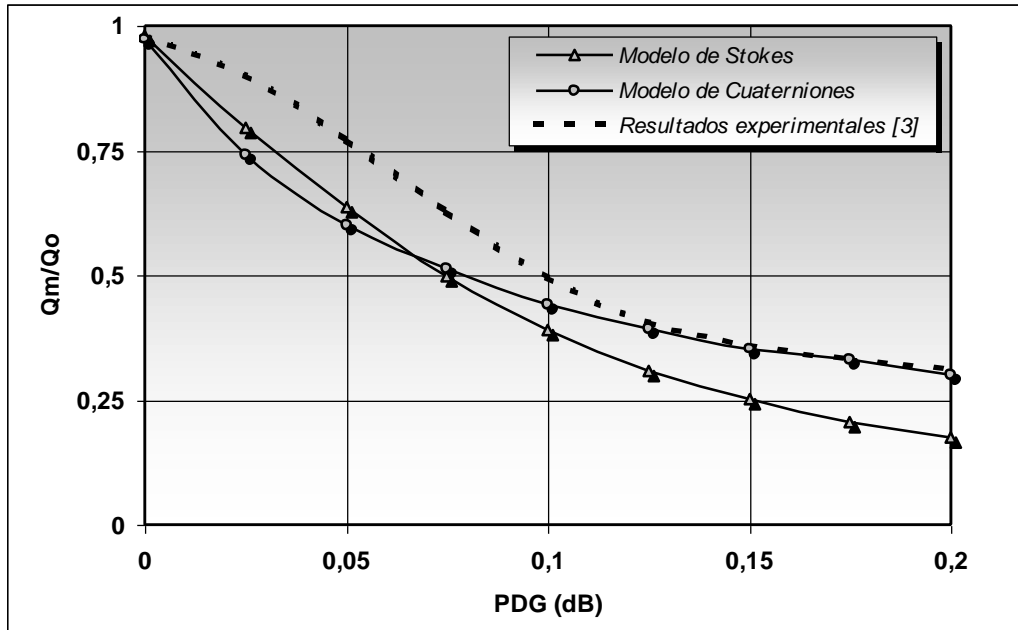
(b)

**Figura 2.10 :** a) Degradación del factor Q debido a la PDG para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con ( $PMD = 0.1 \text{ ps}/\sqrt{\text{Km}}$ ,  $PDL = 0 \text{ dB}$ ). b) Desviación estándar del factor Q.

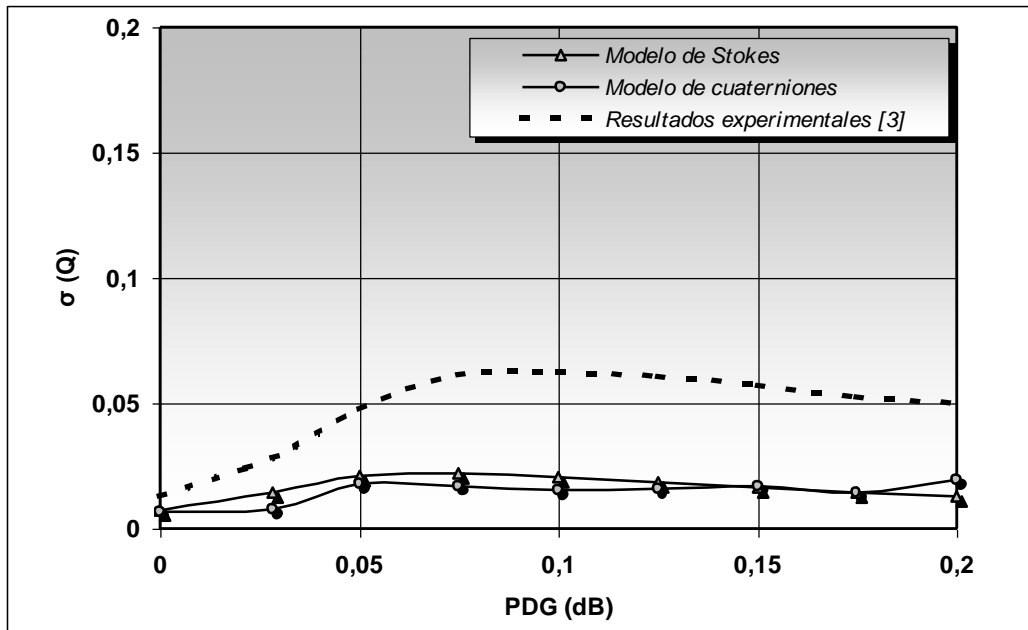
### 2.3.3 EFECTO COMBINADO DE LA PDG Y PDL

En la figura 2.11 se muestran los resultados de la simulación numérica de los efectos combinados de las ganancias y pérdidas por polarización para un enlace con las siguientes características :

➤ Velocidad de Transmisión	5 Gbits/s
➤ Longitud del enlace	9000 Km
➤ Número de repetidores	272
➤ Grado de polarización de la señal	100%
➤ Ancho de banda óptico $B_{opt}$	125 GHz
➤ Ancho de banda eléctrico $B_{elec}$	3.25 GHz
➤ Formato del pulso	Non return zero (NRZ)
➤ Ventana de transmisión	1550 nm
➤ Ganancia del EDFA no saturada	30 dB
➤ Potencia de saturación local	11 dBm
➤ $B_{ASE}$	25nm
➤ $N_{sp}$	2.6
➤ Coeficiente de acople C1	0.85 dB
➤ Coeficiente de acople C2	1.80 dB
➤ Ganancia por polarización PDG	0.1 dB
➤ Dispersión por polarización PMD	0.1 ps/ $\sqrt{Km}$



(a)



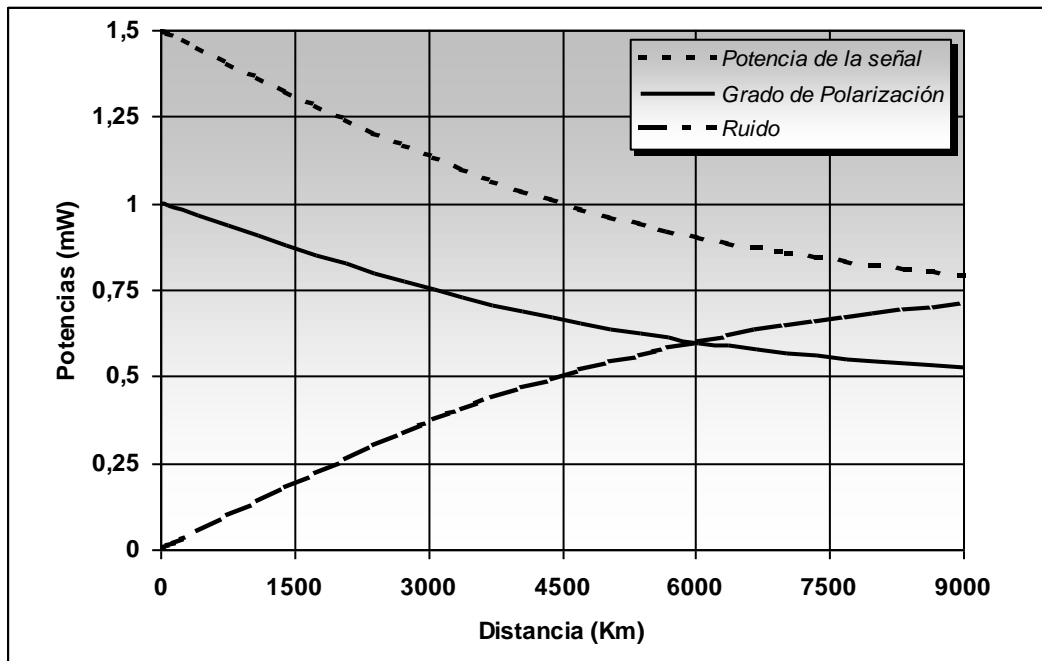
(b)

**Figura 2.11 :** a) Degradación del factor Q debido al efecto combinado de la PDG y la PDL para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con ( $PDL = 0.1$  dB,  $PMD = 0.1$  ps/ $\sqrt{Km}$ ). b) Desviación estándar del factor Q.

Se puede observar, por comparación de las gráficas 2.10 y 2.11, que para valores típicos de PDL en sistemas con amplificación óptica ( $PDL < 0.2$  dB), la penalidad media esta enteramente determinada por la PDG.

Las fluctuaciones del factor Q por el contrario aumentan considerablemente cuando la PDG es combinada con la PDL dentro de un enlace amplificado (figura (2.11a)). La PDG tiende a aumentar de alguna forma las fluctuaciones inducidas por la PDL : así para una PDL de 0.1 dB, las fluctuaciones relativas del factor Q son de 0.8%. Para un sistema que presenta simultáneamente PDG y PDL de 0.1 dB las fluctuaciones relativas del factor Q alcanzan hasta un 2.5%. Este efecto combinado de la PDG y la PDL explica las fuertes fluctuaciones del factor Q observadas experimentalmente en los sistemas reales de transmisión por fibra óptica.

La figura 2.12 presenta la evolución de la potencia de la señal óptica y del ruido en un enlace amplificado de 9000 Km que comprende 272 amplificadores ópticos, a una velocidad de transmisión de 10 Gbits/s, una PDL de 0.1 dB y una PDG de 0.12 dB, en ausencia de PMD. Los demás parámetros de transmisión pueden tomarse como en (Cf §2.3.1). Se puede observar el decrecimiento progresivo de la señal y el fuerte crecimiento del ruido. La acumulación de ruido dentro del enlace debido a los amplificadores ópticos y acentuada por la PDG produce un decaimiento importante del grado de polarización de la luz que alcanza hasta un 52% al final del enlace.



**Figura 2.12 :** Evolución del grado de polarización de la luz ( $d_{pol}$ ), las potencias de la señal ( $S_0$ ) y del ruido ( $b_0$ ) para un enlace amplificado de 9000 Km comprendido de 272 amplificadores (espaciados a 33 Km cada uno) con ( $PDG = 0.12$  dB,  $PDL = 0.1$  dB y  $PMD = 0.1$  ps/ $\sqrt{Km}$ ) a una velocidad de transmisión de 10 Gbits/s.

Por otra parte cabe destacar, que cuando el espaciado entre amplificadores se incrementa, la penalidad sobre el factor Q debido a los efectos de polarización disminuye, debido a que si el número de amplificadores en la línea de transmisión es pequeña, el efecto de la PDL y la PDG también lo será. Sin embargo, esto conlleva a que la degradación de la señal se vuelva más significativa, debido a la ausencia de amplificadores. Este es un aspecto muy importante que se debe tener en cuenta para el diseño de este tipo de sistemas.

## **2.4 EFECTOS DE POLARIZACIÓN EN SISTEMAS WDM**

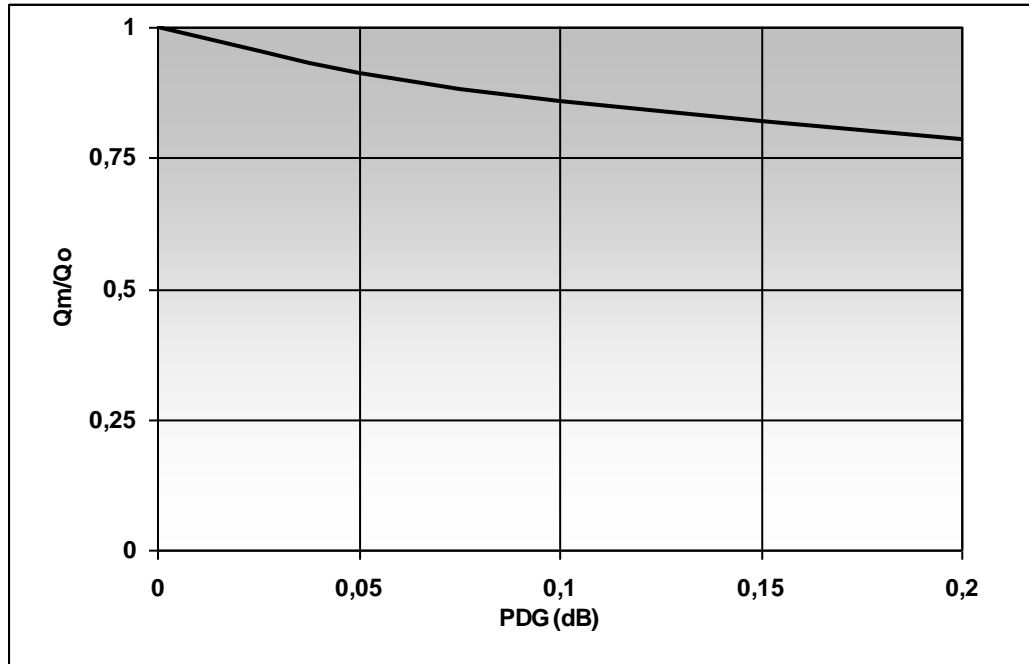
---

Debido al rápido incremento en la demanda del ancho de banda, los sistemas de multiplexación por división de longitud de onda (WDM) han sido grandemente empleados en enlaces trans-oceánicos al igual que en redes continentales y metropolitanas. En este párrafo se hará uso del modelo general de parámetros de Stokes descrito en (Cf § 2.2.2.2.) para calcular el desempeño debido a la combinación de los efectos de polarización en sistemas multicanal WDM.

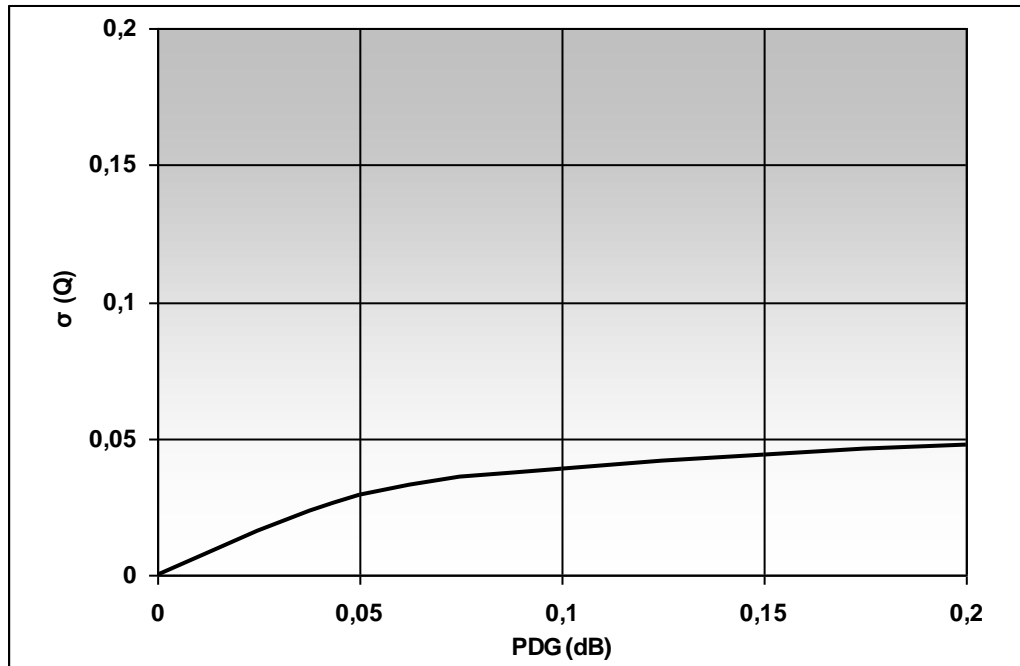
Se discutirá un sistema con un ancho de banda óptico total  $B_o$  igual a 2000GHz, constituido por ocho canales para los que se usa un formato de pulso NRZ, con un espaciado de canal de 2nm (250GHz) y una velocidad de transmisión por canal de 10Gbit/s, para una capacidad del sistema total de 80Gbits/s en la tercera ventana de transmisión. El sistema está constituido por 272 amplificadores, espaciados por una distancia de aproximadamente 33 Km para un enlace total de cerca de 9000 Km. Los demás parámetros de transmisión pueden tomarse como en (Cf §2.3.1).

Los resultados de la simulación numérica se muestran en la figura 2.13 para una PDL = 0 dB y una PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{km}}$ . En ella se puede apreciar, por comparación con la figura 2.10, que el efecto de la PDG sobre el factor  $Q^{(m)}$  en este tipo de sistemas es casi despreciable con respecto a su efecto en sistemas de un solo canal. Sin embargo, la desviación estándar aumenta levemente. Con la PDL incluida, los resultados se muestran en la figura 2.14 donde se aprecia que el efecto de la PDG no deja de ser importante, en contraste con la PDL. La desviación estándar aumenta levemente con respecto a sistemas de un solo canal.



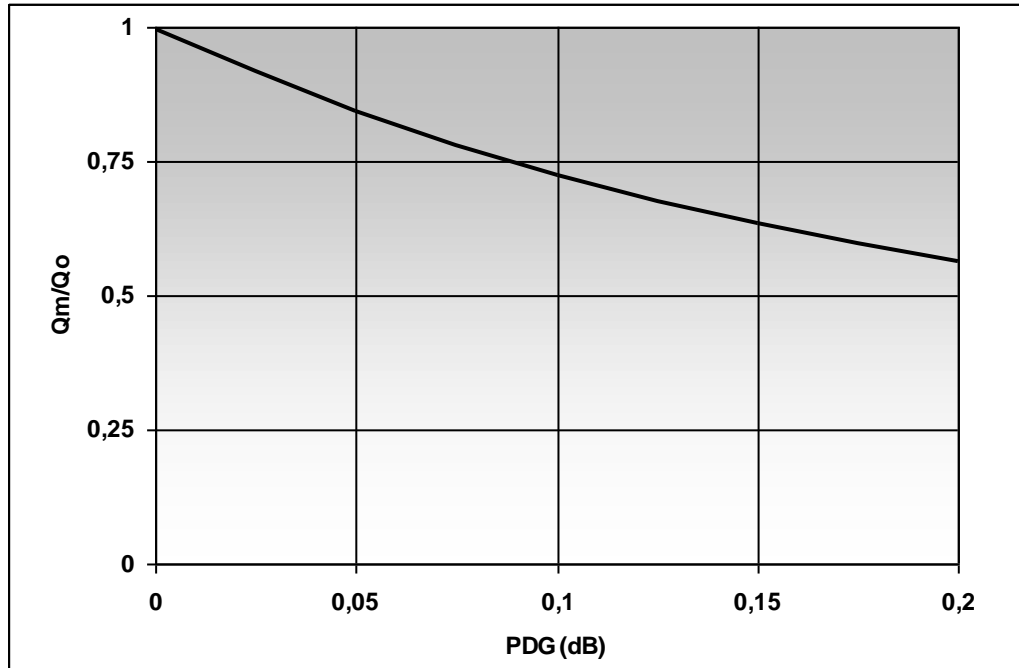


(a)

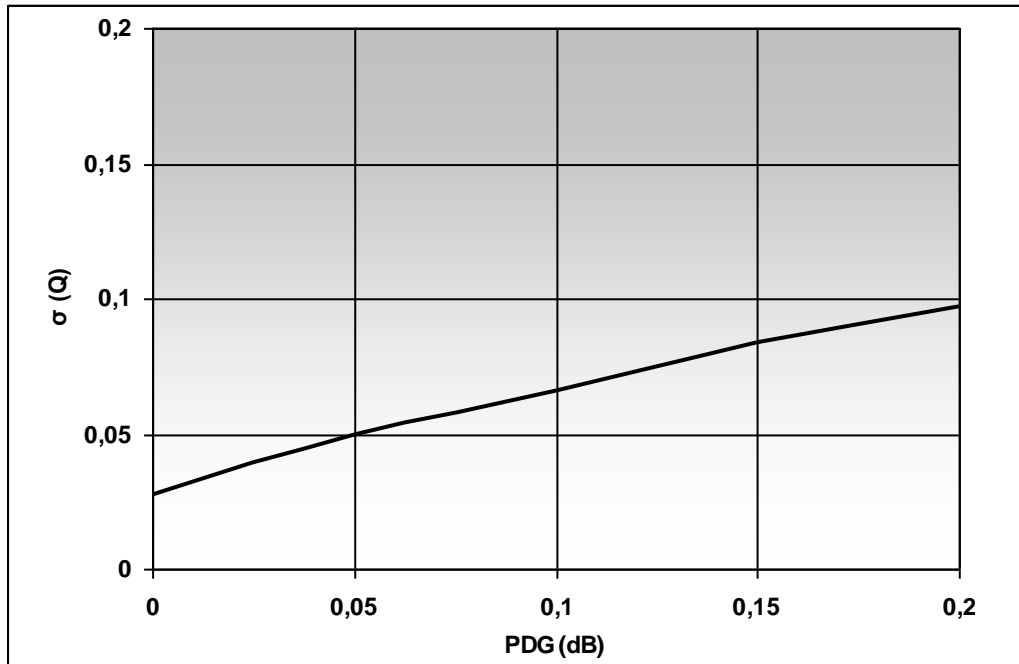


(b)

**Figura 2.13 :** a) Degradación del factor Q debido a la PDG en un sistema WDM de 8 canales constituido por 272 amplificadores, espaciados por una distancia de aproximadamente 33 Km para un enlace total de cerca de 9000 Km. (PDL = 0.1dB y PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$  ). b) Fluctuaciones del factor Q



(a)

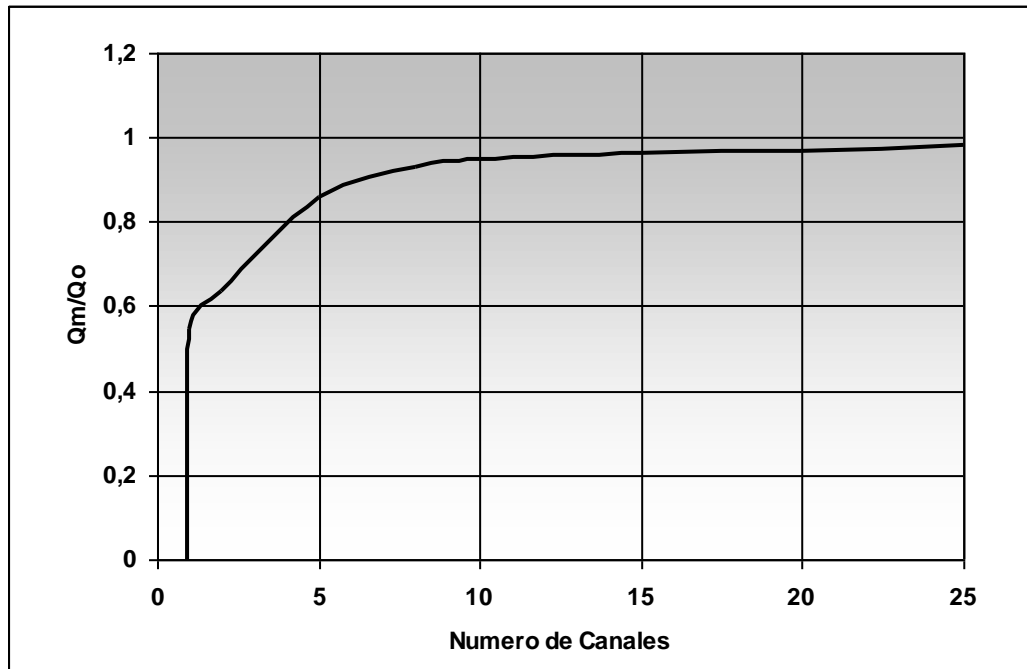


(b)

**Figura 2.14 :** a) Degradación del factor Q debido a la PDG y la PDL en un sistema WDM de 8 canales constituido por 272 amplificadores, espaciados por una distancia de aproximadamente 33 Km para un enlace total de cerca de 9000 Km. (PDL = 0.1dB y PMD = 0.1 ps/ $\sqrt{\text{Km}}$ ). b) Fluctuaciones del factor Q

Para investigar un poco más el efecto de la PDG en función del número de canales en un sistema WDM, consideremos un sistema con un ancho de banda óptico total  $B_o$  igual a 2000GHz, un espaciado de canal de 0.6 nm (cerca de 75 GHz) a una velocidad de transmisión por canal de 10 Gbits/s,. Los demás parámetros pueden tomarse como en (Cf §2.3.1).

En la figura 2.15 se puede apreciar que este efecto se hace insignificante cuando hay aproximadamente más de 10 canales. Esto se debe a que si el sistema presenta PMD, ésta cambia los estados de polarización de los diferentes canales respecto a unos y otros. En otras palabras, la PMD cambia la separación angular de los canales sobre la esfera de Poincaré. Este efecto hace que el grado de polarización total del sistema sea cercano a cero y por ende la PDG será despreciable.



**Figura 2.15 :** a) Degradación del factor Q en función del número de canales en un sistema WDM constituido por 272 amplificadores, espaciados por una distancia de aproximadamente 33 Km para un enlace total de cerca de 9000 Km. ( $PDG = 0.06$  dB y  $PMD = 0.1$  ps/ $\sqrt{Km}$  ).

## 2.5 MODULACIÓN POR POLARIZACIÓN

---

Existen muchas publicaciones alrededor del efecto de la PDG dentro de los sistemas de amplificación óptica; para reducir este efecto en algunos se propone depolarizar la señal en el lugar de emisión. En efecto, si la señal presenta un grado de polarización muy inferior a la unidad, para tiempos característicos inferiores a los tiempos de la emisión espontánea, el efecto de la PDG desaparecerá. Para depolarizar la señal en la emisión, son posibles diferentes técnicas. Una de ellas por ejemplo es modular la polarización de un láser emisor a una frecuencia superior al inverso del tiempo de vida de los iones de erbio en el nivel excitado ( $f_m \gg 1/\tau_{sat}$ ,  $\tau_{sat} \approx 11\text{ms}$ ).

En este párrafo, se describe el principio de la modulación por polarización y cómo con ella es posible depolarizar la señal en el lugar de emisión para un sistema de amplificación óptica. Además se estudia en particular la incidencia de diferentes parámetros sobre el desempeño del modulador de polarización.

El principio de la modulación por polarización parte del establecimiento de una modulación de fase entre dos componentes ortogonales del campo eléctrico de la señal con la ayuda de un modulador electroóptico. En la aproximación monocromática, el campo eléctrico  $\mathbf{E}_{s0}(t)$  de la señal modulada en polarización en el lugar de emisión está dada por:

$$\mathbf{E}_{s0}(t) = E_{s0}^x \cdot \exp[j(2\pi f_0 t + \varphi_{xs0})] \mathbf{e}_u + E_{s0}^y \cdot \exp[j(2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t) + \varphi_{ys0})] \mathbf{e}_u^\perp \quad (3.81)$$

Donde  $f_0$  designa la frecuencia óptica,  $\mathbf{e}_u$  y  $\mathbf{e}_u^\perp$  son dos vectores de Jones unitarios y ortogonales y  $\Delta\varphi(t)$  es una fase de período  $2t_m$  y de expresión:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= 2\pi f_m t & \text{para } t \in [(2k)t_m, (2k+1)t_m] & \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &= 2\pi - 2\pi f_m (t - t_m) & \text{para } t \in [(2k+1)t_m, (2k+2)t_m] & \end{aligned} \quad (2.82)$$

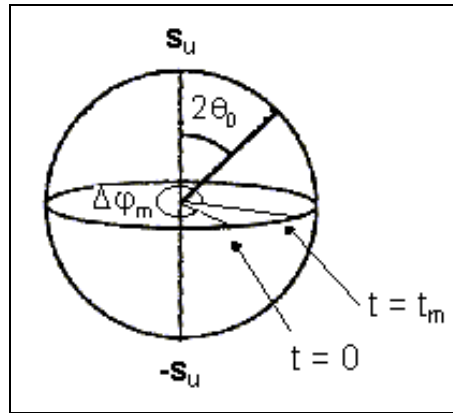
Teniendo en cuenta el referencial de Stokes ligado a los vectores  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u^\perp)$ , la polarización instantánea en la salida del modulador sufre una rotación de la siguiente forma [4] :

$$\mathbf{S}_p(t) = \cos[\Delta\varphi(t)]\mathbf{s}_0 + \sin[\Delta\varphi(t)] \mathbf{s}_u \wedge \mathbf{s}_0 + 2 \sin^2[\Delta\varphi(t)/2] (\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_0) \mathbf{s}_u \quad (2.83)$$

donde  $\mathbf{S}_p(t)$  designa el vector de Stokes unitario asociado a la polarización instantánea,  $\mathbf{s}_0$  el valor inicial de  $\mathbf{S}_p(t)$  y  $\mathbf{s}_u$  el vector de Stokes unitario asociado a  $\mathbf{e}_u$ .

Se puede tomar un referencial de forma que las coordenadas de los vectores  $\mathbf{s}_u$  y  $\mathbf{s}_0$  cumplan con (ver figura 2.16):

$$\mathbf{s}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta_0) \\ \sin(2\theta_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$



**Figura 2.16 :** Representación de la modulación de polarización sobre la esfera de Poincaré.

De (2.83) y (2.84), se deduce las coordenadas de  $\mathbf{S}_p(t)$  :

$$\mathbf{S}_p(t) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta_0) \\ \cos[\Delta\varphi(t)]\sin(2\theta_0) \\ \sin[\Delta\varphi(t)]\sin(2\theta_0) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

El cuadrivector de Stokes asociado a (2.84) viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{S}(t) = P_s \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta_0) \\ \cos[\Delta\varphi(t)]\sin(2\theta_0) \\ \sin[\Delta\varphi(t)]\sin(2\theta_0) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Donde  $P_s$  designa la potencia media de la señal.

A una escala de tiempos muy superiores al período de la modulación de polarización, la señal aparece parcialmente polarizada y su cuadrivector de Stokes está dado por la expresión:

$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = P_s \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta_0) \\ \langle \cos[\Delta\varphi(t)] \rangle \sin(2\theta_0) \\ \langle \sin[\Delta\varphi(t)] \rangle \sin(2\theta_0) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Los valores medios de  $\cos[\Delta\varphi(t)]$  y  $\sin[\Delta\varphi(t)]$  se especifican de la siguiente manera:

$$\langle \cos[\Delta\varphi(t)] \rangle = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \cos(2\pi f_m t) dt = \text{sinc}(\Delta\varphi_m) / \Delta\varphi_m(t) \quad (2.88)$$

$$\langle \sin[\Delta\varphi(t)] \rangle = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \sin(2\pi f_m t) dt = [1 - \cos(\Delta\varphi_m)] / \Delta\varphi_m(t) \quad (2.89)$$

donde  $\Delta\varphi_m$  está dado por el valor  $2\pi f_m t_m$ .

El cuadrivector de Stokes de la señal modulada en polarización se define mediante la siguiente expresión:

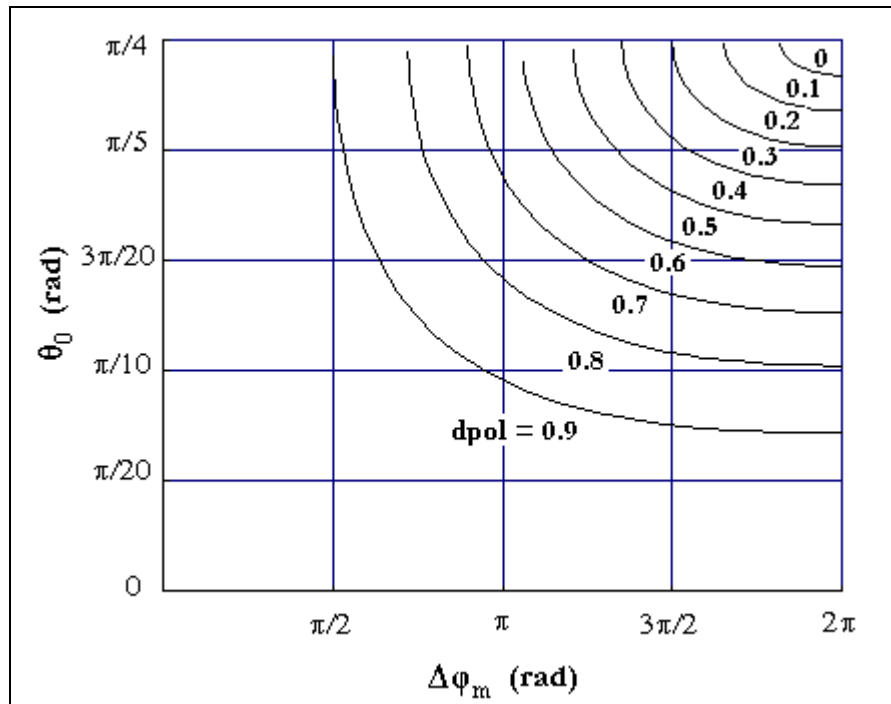
$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = P_s \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta_0) \\ \text{sinc}(\Delta\varphi_m) \sin(2\theta_0) \\ \frac{[1 - \cos(\Delta\varphi_m)]}{\Delta\varphi_m} \sin(2\theta_0) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Finalmente el grado de polarización de la señal de emisión se expresa en función de:

- i) El ángulo  $2\theta_0$  entre la polarización inyectada dentro del cristal birrefringente, por ejemplo  $\text{LiNbO}_3$ , y los ejes propios del cristal.
- ii) El desfase máximo  $\Delta\varphi_m$  (alrededor de  $2\pi$ ) producido por la tensión lineal aplicado al cristal:

$$\begin{aligned} \text{dpols} &= [\langle s_1(t) \rangle^2 + \langle s_2(t) \rangle^2 + \langle s_3(t) \rangle^2]^{1/2} \\ &= [1 - \sin^2(2\theta_0)(1 - \text{sinc}^2(\Delta\varphi_m/2))]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.91)$$

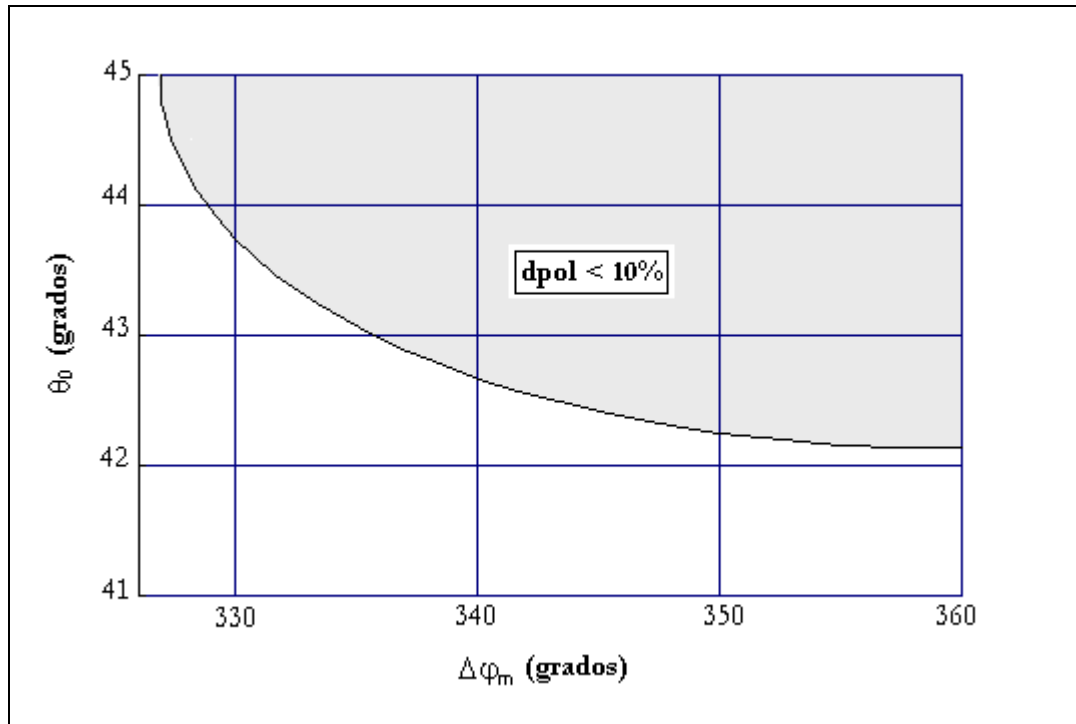
Para estudiar la sensibilidad del modulador respecto a los parámetros  $\Delta\varphi_m$  y  $\theta_0$ , se presenta la figura 2.17 en la que se aprecia el grado de polarización en función de  $\Delta\varphi_m$  y  $\theta_0$ .



**Figura 2.17** : Grado de polarización de la señal modulada en polarización (dpol) en función de  $\Delta\varphi_m$  y  $\theta_0$ .

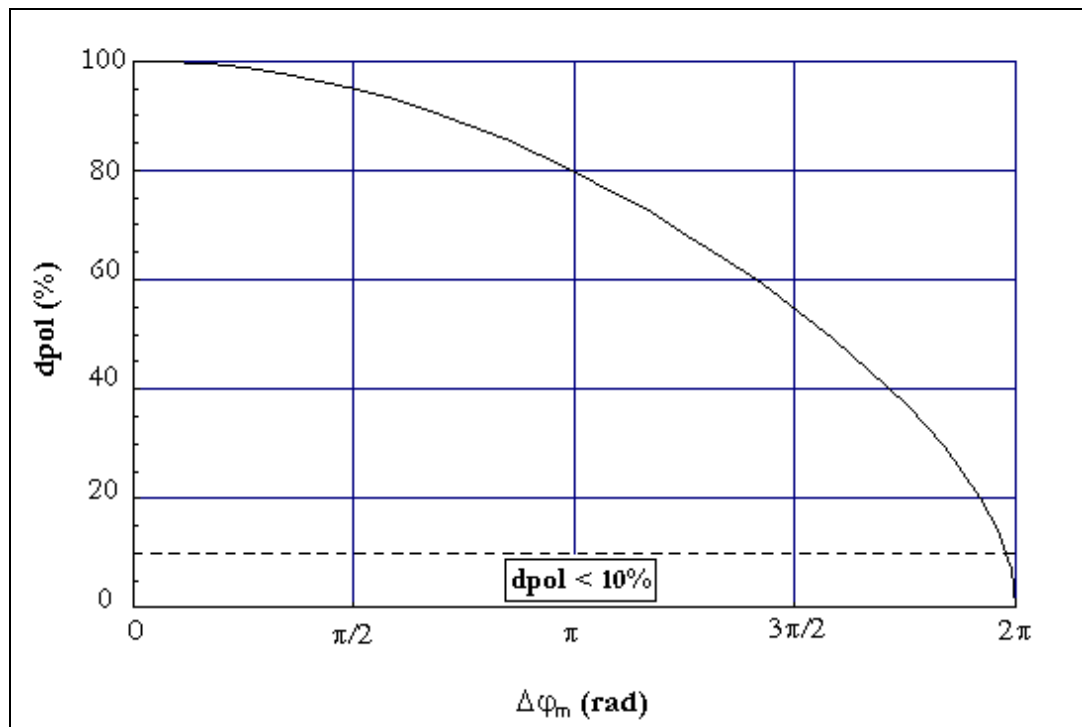


La figura 2.18 indica el acoplamiento de los parámetros  $\Delta\varphi_m$  y  $\theta_0$  para los cuales el grado de polarización de la señal emitida es inferior a 10 %.

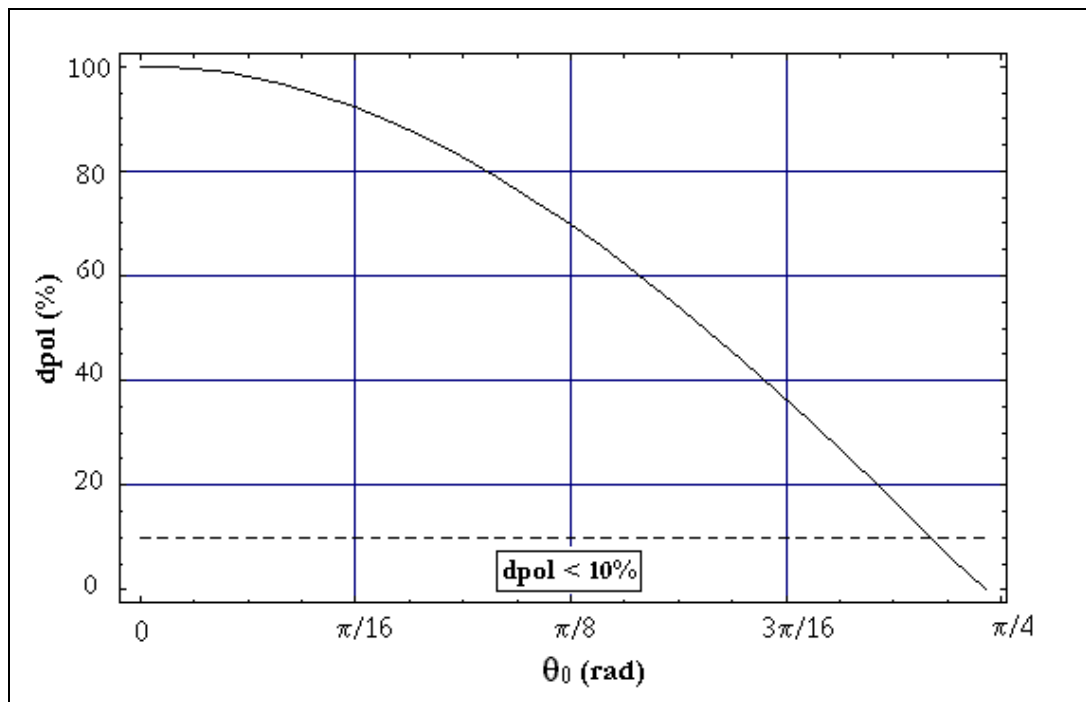


**Figura 2.18 :** Valores de  $\Delta\varphi_m$  y  $\theta_0$  para que el grado de polarización de la señal modulada (*dpol*) sea igual o inferior al 10%.

Las figuras 2.19 y 2.20 representan las variaciones del grado de polarización de la señal modulada en polarización en función de los valores óptimos para los dos parámetros ( $\Delta\varphi_m = 2\pi$  y  $\theta_0 = \pi/4$ ). Es evidente la gran sensibilidad del grado de polarización de la señal respecto al parámetro  $\Delta\varphi_m$ , puesto que una variación del 8% de  $\Delta\varphi_m$  respecto a su valor óptimo  $2\pi$  es suficiente para aumentar el grado de polarización de 0% a 10%.



**Figura 2.19** : Variación de el grado de polarización de la señal modulada en polarización en función de  $\Delta\varphi_m$  para  $\theta_0 = \pi/4$ .



**Figura 2.20** : Variación de el grado de polarización de la señal modulada en polarización en función de  $\theta_0$  para  $\Delta\varphi_m = 2\pi$ .

Las curvas teóricas de la dependencia del grado de polarización en función de los parámetros  $\Delta\varphi_m$  y  $\theta_0$  pueden ser verificables experimentalmente [8].

## **2.6 REPOLARIZACIÓN DE UNA SEÑAL MODULADA POR POLARIZACIÓN**

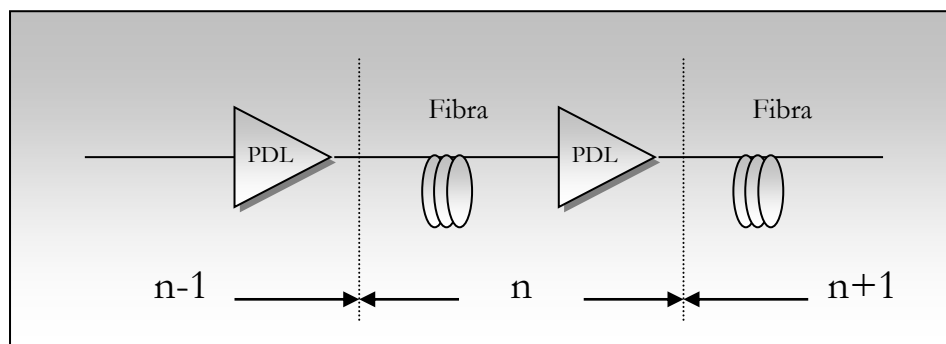
---

La combinación de las pérdidas por polarización, la ganancia dependiente de la polarización y la dispersión por polarización puede causar grandes pérdidas, las cuales degradan el desempeño de los sistemas de comunicación de largas distancias y altas velocidades. La dispersión por polarización tiende a depolarizar una señal (disminuir el grado de polarización) como se mencionó en el párrafo anterior, y en principio, al igual que la ganancia por polarización, tendrá poco o nada de efecto si la señal de entrada está depolarizada. Es así como una de las técnicas para depolarizar una señal de entrada es la modulación por polarización en la cual, como ya se estudió anteriormente, todos los parámetros de Stokes se promedian a cero sobre una escala de tiempo que es corta comparada con la respuesta en el tiempo de los amplificadores de fibra dopada con erbio EDFA.

Ahora bien, existe un inconveniente cuando se pone en práctica la técnica de depolarizar una señal de emisión: las pérdidas por polarización PDL tienden a repolarizar una señal (aumentar el grado de polarización). Así, la PDL no degrada directamente una señal de comunicación, sino que, por repolarización de una señal inicialmente modulada por polarización, las degradaciones de la PDG y hasta de la PMD se vuelven muy importantes.

Para el presente párrafo, se ha considerado el simple caso de sistemas constituidos por un solo canal, en los cuales los elementos con pérdidas por polarización se localizan en amplificadores alternados con longitudes de fibra

óptica, como se muestra esquemáticamente en la figura 2.21 [9]. En primer lugar, se parte del análisis para la determinación de una función de probabilidad para el grado de polarización de una señal inicialmente modulada por polarización y luego se compara los resultados con los del simulador numérico desarrollado en el párrafo 2.2.2 partiendo del modelo de Stokes. Además se muestra que si cada amplificador tiene una PDL de 0.1 dB, el cual es un valor típico para sistemas corrientes, entonces puede ocurrir en el enlace una cantidad significativa de repolarización. Finalmente se discute la escala de la repolarización con PDL y las implicaciones para los sistemas de comunicación.



**Figura 2.21** : Ilustración esquemática de la configuración del enlace de transmisión.

Usando el modelo de parámetros de Stokes, el efecto de las pérdidas por polarización se describe mediante la ecuación (2.69), como ya se había calculado en el párrafo 2.2.2.2.

Ahora bien, el efecto de la fibra entre los elementos de las pérdidas por polarización es una rotación aleatoria del vector de Stokes  $\mathbf{S}_p = (S_1, S_2, S_3)$  sobre la esfera de Poincaré. Se obtiene entonces las siguientes ecuaciones :

$$S_0^{(n+1)} = \frac{1+\alpha^2}{2} S_0^{(n)} + \frac{1-\alpha^2}{2} S_p \cos \theta^{(n)} \quad (2.92a)$$

$$S_1^{(n+1)} = \frac{1-\alpha^2}{2} S_0^{(n)} + \frac{1+\alpha^2}{2} S_p \cos \theta^{(n)} \quad (2.92b)$$

$$(S_2 + jS_3)^{(n+1)} = \alpha \cdot S_p^{(n)} \sin \theta^{(n)} \exp(j\phi^{(n)}) \quad (2.92c)$$

donde 
$$(S_p^{(n)})^2 = (S_1^{(n)})^2 + (S_2^{(n)})^2 + (S_3^{(n)})^2 \quad (2.93)$$

El  $\cos \theta^{(n)}$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el rango  $[-1,1]$ . Similarmente, el  $\Phi^{(n)}$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el rango  $[0, 2\pi]$ . Las ecuaciones (2.92) y (2.93) constituyen juntas un proceso aleatorio, y deben ser resueltas simultáneamente en orden a determinar la PDF(dpól), la función de distribución de probabilidad para  $dpól^{(n)} = S_p^{(n)} / S_0^{(n)}$ .

Para el presente caso se toma  $S_0^{(0)} = 1$  y  $S_p^{(0)} = 0$ , el cual es equivalente a asumir que  $dpól^{(0)} = 0$ , así que el canal está inicialmente modulado en polarización.

Con el fin de efectuar una simplificación en las ecuaciones (2.92) y (2.93), eliminamos de ellas el  $\cos \theta^{(n)}$  y  $\Phi^{(n)}$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} (S_0^{(n+1)})^2 - (S_p^{(n+1)})^2 &= \alpha^2 [(S_0^{(n)})^2 - (S_p^{(n)})^2] \\ &= \alpha^{2(n+1)} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Esta relación sugiere reemplazar  $S_0^{(n)}$  y  $S_p^{(n)}$  con las nuevas variables  $x^{(n)} = S_0^{(n)} / \alpha^{(n)}$  y  $y^{(n)} = S_p^{(n)} / \alpha^{(n)}$ , con las cuales se obtienen ahora:

$$x^{(n+1)} = \frac{1+\alpha^2}{2} x^{(n)} + \frac{1-\alpha^2}{2} y^{(n)} \cos \theta^{(n)} \quad (2.95)$$

$$(x^{(n)})^2 - (y^{(n)})^2 = 1 \quad (2.96)$$

donde  $\text{dpol}^{(n)} = y^{(n)} / x^{(n)}$ . Combinando (2.95) y (2.96) se obtiene:

$$x^{(n+1)} = \frac{1+\alpha^2}{2} x^{(n)} + \frac{1-\alpha^2}{2} [(x^{(n)})^2 - 1]^{1/2} \cos \theta^{(n)} \quad (2.97)$$

La ecuación (2.97), representa una ecuación diferencial que involucra variables aleatorias, por lo tanto, para solucionar esta ecuación es necesario asociarla a una ecuación diferencial estocástica y recurrir al formalismo estadístico. Un profundo análisis requerirá el concepto de ecuación de Fokker-Planck y el cálculo de Ito [9].

La solución a la ecuación diferencial (2.97) se escribe de la siguiente forma :

$$\text{PDF}(\gamma) = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\gamma^2}{(2\sigma_\zeta^2 n)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_\zeta^2 n}\right) \quad (2.98)$$

donde  $\sigma_\zeta^2 = (1 - \alpha^2)^2 / 12 \alpha^2$ ,  $n$  corresponde al número de amplificadores que constituyen el enlace y  $\gamma$  está relacionado con el grado de polarización de la siguiente manera :

$$\text{dpol} = \tanh \gamma \quad (2.99)$$

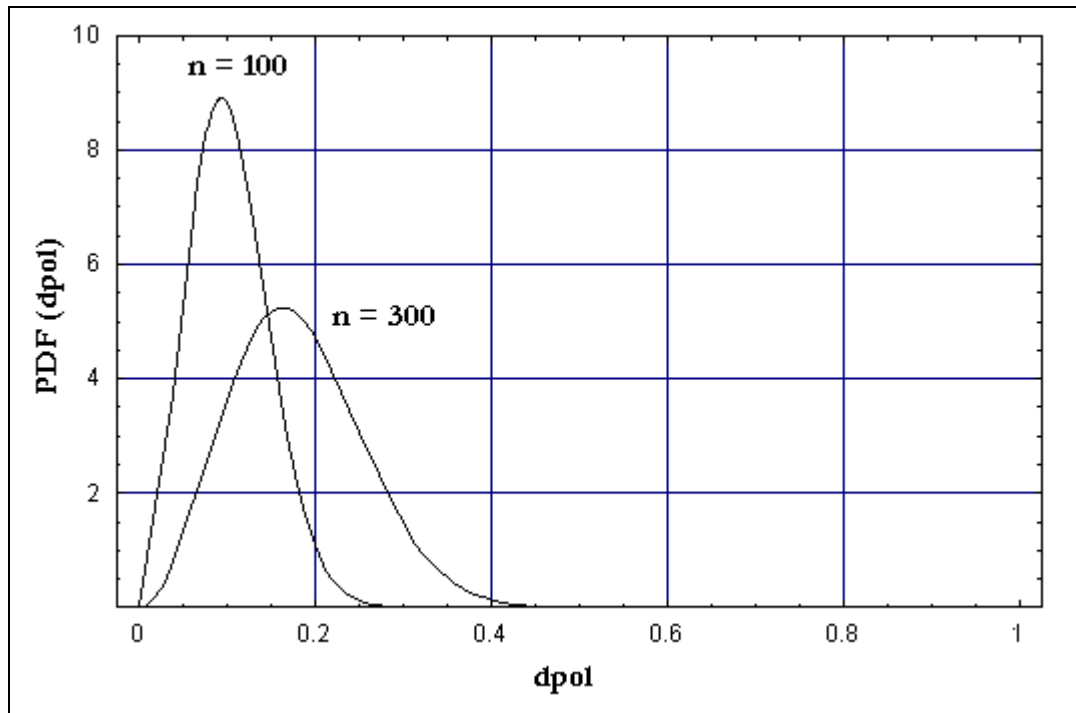
Finalmente se puede obtener la función de distribución de probabilidad del grado de polarización mediante la siguiente relación, tal como se mencionó en el parágrafo 2.2.1 :

$$\text{PDF}(\text{dpol})d(\text{dpol}) = \text{PDF}(\gamma) \left| \frac{\partial \gamma}{\partial (\text{dpol})} \right| d\gamma \quad (2.100)$$

De este modo, la función de distribución de probabilidad asociada al grado de polarización de una señal inicialmente modulada en polarización se expresa como:

$$\text{PDF}(\text{dpol}) = \left[ \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\text{ArcTanh}^2(\text{dpol})}{(2\sigma_\zeta^2 n)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\text{ArcTanh}^2(\text{dpol})}{2\sigma_\zeta^2 n}\right) \right] \left[ \frac{1}{1-(\text{dpol})^2} \right] \quad (2.101)$$

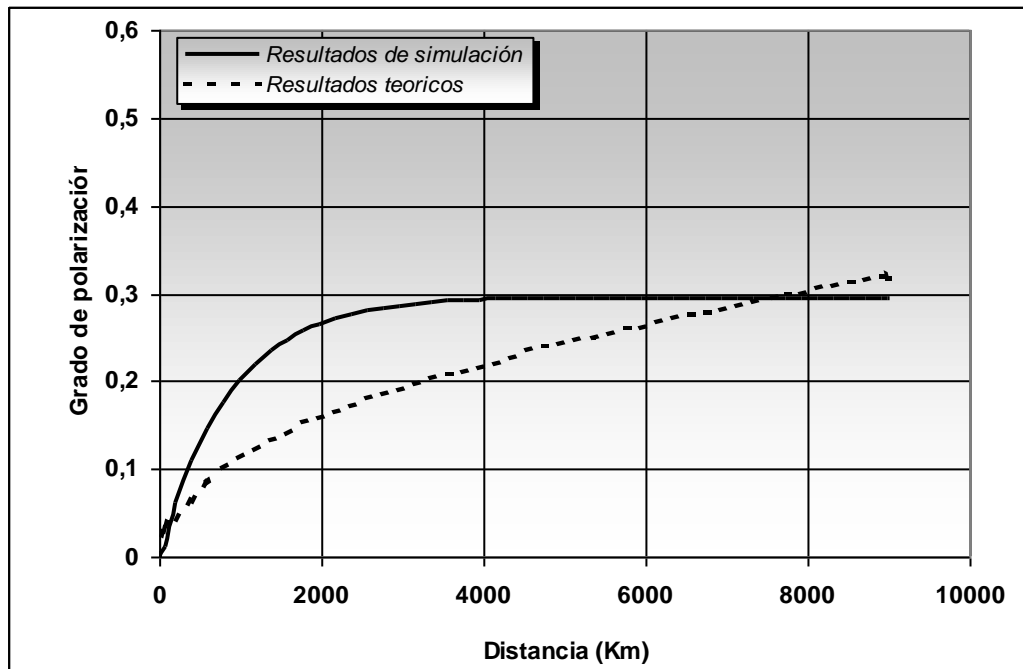
En la figura 2.22 se muestra la forma de PDF(dpol) para diferentes valores de n y con una PDL = 0.1 dB. Es claro que para n = 300, correspondiente a distancias transoceánicas, una gran cantidad de repolarización ocurre en el enlace.



**Figura 2.22** : Función de distribución PDF (dpol) obtenida a partir de las ecuaciones (2.92) y (2.93) calculadas teóricamente. Para  $PDL = 0.1dB$ , con  $n = 100$  y  $n = 300$ .

Es útil calcular la función de probabilidad acumulada de la PDF(dpol) y a partir de allí desarrollar una simulación que permita obtener de forma directa la variación del grado de polarización en función de la distancia del enlace de transmisión. Para ello fue usado el método de simulación de Montecarlo. En la figura 2.23 se hace una comparación entre los resultados de esta simulación y los resultados del simulador numérico desarrollado en el parágrafo 2.2.2 para una  $PDL = 0.2$  dB, una velocidad de transmisión de 10 Gbits/s y una señal de inyección con grado de polarización de cero (modulada en polarización). Los demás parámetros de transmisión pueden tomarse como en (Cf §2.3.1). Es claro que la teoría y la simulación son muy parecidas, teniendo en cuenta que en la simulación numérica se manejan muchos más parámetros que los que se manejan en el modelo teórico.





**Figura 2.23** : Comparación de resultados de la simulación numérica y el modelo teórico para la repolarización debida a la PDL

De este estudio, es útil mencionar un importante resultado para el diseño de sistemas. Primero, las pérdidas por polarización PDL pueden originar una importante repolarización en una señal inicialmente modulada en polarización. Esta repolarización puede entonces producir la degradación de la señal debido a la incidencia directa de las ganancias por polarización PDG y a la dispersión por polarización PMD sobre el enlace de transmisión; así que existe una clara motivación para reducir tanto como sea posible la repolarización producida por la PDL en una señal óptica, este será el objetivo del siguiente capítulo.

## CAPÍTULO 3

### METODO DE COMPENSACIÓN DE LA REPOLARIZACIÓN

---

#### 3.1 MODELO GENERALIZADO

#### 3.2 CALCULO DEL COMPENSADOR PARA LA REPOLARIZACIÓN

---

En el capítulo anterior se realizó un estudio general de los efectos de polarización sobre enlaces de transmisión por fibra óptica, se hizo una introducción al mecanismo de la modulación por polarización para reducir el efecto de la PDG y al final se introdujo el concepto de repolarización efectuado por la PDL sobre una señal modulada en polarización.

Cuando en un sistema se pone en práctica el método de modulación de polarización, es decir, disminuir a un valor cercano a cero el grado de polarización de la señal de entrada, se consigue que el efecto de la PDG se vuelva despreciable, siendo el grado de polarización directamente proporcional al efecto de la PDG. Por otra parte, cuando en el mismo sistema existe algún elemento de PDL, la señal sufrirá un efecto de repolarización como se mostró en el párrafo 2.6, lo que lleva a establecer que el grado de polarización de la señal aumentará y la PDG dejará de ser despreciable. Así que la modulación de polarización se convertirá en un método poco efectivo.

Teniendo en cuenta lo anterior es posible, en teoría, calcular un compensador tal que permita conservar el grado de polarización de la señal de entrada lo más bajo posible a medida que se transmite por el enlace. De este modo se conseguirá que el método de modulación por polarización se convierta en una fórmula más efectiva! y por ende el efecto de la PDG se mantendrá despreciable.

En el presente capítulo se buscará calcular el mejor compensador que reúna en términos generales las características antes mencionadas. Para ello se implementará un método muy práctico desarrollado en [4], donde se calcula un compensador para el ensanchamiento sufrido por un pulso óptico a causa de la dispersión por polarización.

### 3.1 MODELO GENERALIZADO

Recordando del capítulo anterior que el fenómeno de repolarización es un fenómeno aleatorio, se describe a continuación la función de distribución de probabilidad asociada al grado de polarización :

$$\text{PDF}(\text{dpol}) = \left[ \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\text{ArcTanh}^2(\text{dpol})}{(2\sigma_{\zeta}^2 n)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\text{ArcTanh}^2(\text{dpol})}{2\sigma_{\zeta}^2 n}\right) \right] \left[ \frac{1}{1-(\text{dpol})^2} \right] \quad (3.1)$$

donde  $\sigma_{\zeta}^2 = (1 - \alpha^2)^2 / 12 \alpha^2$ ,  $\alpha$  el factor de atenuación del elemento PDL y  $n$  corresponde al número de amplificadores que constituyen el enlace.

La base teórica del compensador es tratar de conservar o disminuir el grado de polarización a un valor lo más próximo posible al grado de polarización en

el sitio de transmisión, por lo tanto, suponemos un sistema que realiza cierto procesamiento a la señal de entrada (función de transferencia); si se conoce esta función de transferencia se puede predecir la salida cuando una señal pase a través de él.

Adaptando esto a señales aleatorias en el tiempo, se considerará que la señal de entrada tiene una determinada función de densidad a la entrada del compensador y a la salida de éste se obtiene una señal con una distribución de densidad de probabilidad diferente, tal que los parámetros que determinan su desviación estándar y su valor medio garanticen que el grado de polarización sea pequeño o menor que el de la señal de entrada (figura 3.1).

Suponga que la función de transferencia del sistema está dado por la ecuación :

$$T = G(\xi) \quad (3.2)$$

donde  $\xi \equiv \text{dpol}$ . Esta función se supone continua e invertible en  $\xi$ , su función inversa es también continua en el dominio de  $\xi$  y está dada por :

$$\xi = g(T) \quad (3.3)$$

Para el sistema anteriormente descrito, la función de distribución de probabilidad PDF a la salida del mismo está dada por:

$$\text{PDF}(T) = \text{PDF}[g(T)] \frac{dg(T)}{dT} \quad (3.4)$$

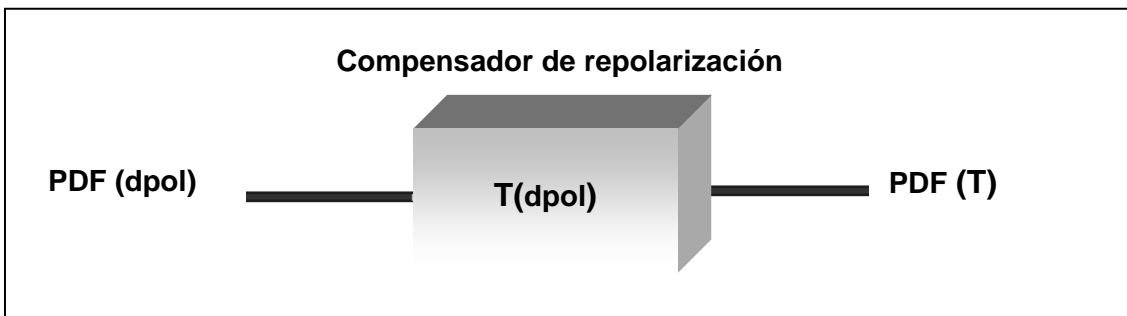
$g(T)$  representa la función de transferencia inversa del compensador. Para resolver  $T$ , que corresponde a la función de transferencia del compensador,

es necesario resolver la ecuación diferencial por el método de separación de variables:

$$\text{PDF}(T)dT = \text{PDF}[g(T)]dg(T) \quad (3.5)$$

Reemplazando la función de probabilidad (3.1) y cambiando  $\xi$  por  $g(T)$  según (3.3), se obtiene:

$$\text{PDF}(T)dT = \left[ \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{(2\sigma_\xi^2 n)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{2\sigma_\xi^2 n}\right) \right] \left[ \frac{1}{1-(g)^2} \right] dg \quad (3.6)$$



**Figura 3.1 :** Esquema del compensador de la repolarización

De esta manera es posible determinar la función de transferencia del compensador para la repolarización de una señal provocada por la PDL. La salida del sistema será una señal cuyo grado de polarización será igual que la señal original.

### **3.2 CÁLCULO DEL COMPENSADOR PARA LA REPOLARIZACIÓN**

En este párrafo se calculan dos tipos de compensadores considerando dos distribuciones de probabilidad a la salida del compensador respectivamente.

### 3.2.1 COMPENSADOR CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME A LA SALIDA

La distribución uniforme tiene las siguientes características :

- Función de densidad:

$$\text{PDF}(T) = \frac{1}{\beta - \delta} \quad \text{Para } \delta \leq T \leq \beta$$

$$\text{PDF}(T) = 0$$

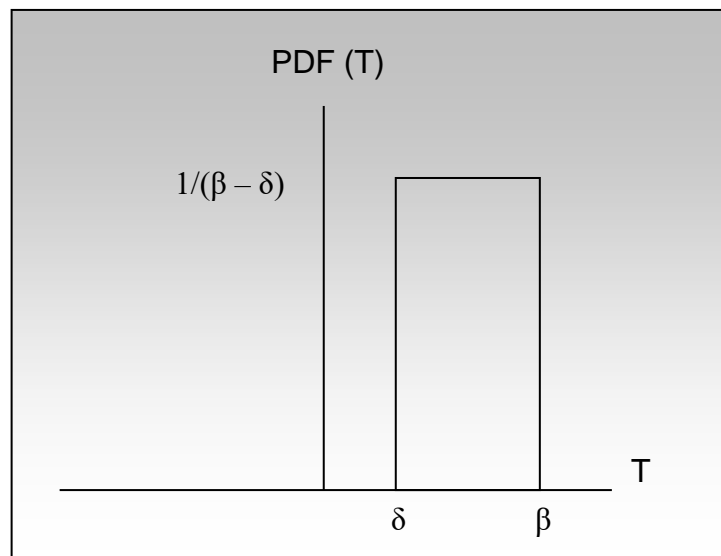
- Valor medio

$$E(T) = \frac{\beta + \delta}{2}$$

- Desviación estándar:

$$\sigma(T) = \frac{(\beta - \delta)^2}{12}$$

En la figura 3.2 se presenta la gráfica de esta distribución.



**Figura 3.2** : Distribución de densidad de probabilidad uniforme.

Para el diseño del compensador con distribución uniforme a la salida se resuelve la ecuación (3.6) entre el rango de valores  $\delta$  y  $\beta$ , esto se expresa como:

$$\frac{1}{\beta - \delta} dT = \left[ \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{(2\sigma_\zeta^2 n)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{2\sigma_\zeta^2 n}\right) \right] \left[ \frac{1}{1-(g)^2} \right] dg \quad (3.7)$$

Integrando a ambos lados se tiene:

$$\frac{T}{\beta - \delta} = \frac{-\sqrt{2/\pi}}{\sigma_\zeta \sqrt{n}} \text{ArcTanh}(g) \exp\left(-\frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{2\sigma_\zeta^2 n}\right) + \text{erf}\left(\frac{\text{ArcTanh}(g)}{\sigma_\zeta \sqrt{2n}}\right) + C \quad (3.8)$$

teniendo en cuenta que  $g(T) = \text{dpol} \equiv \xi$ , la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{T}{\beta - \delta} = \frac{-\sqrt{2/\pi}}{\sigma_\zeta \sqrt{n}} \text{ArcTanh}(\text{dpol}) \exp\left(-\frac{\text{ArcTanh}^2(\text{dpol})}{2\sigma_\zeta^2 n}\right) + \text{erf}\left(\frac{\text{ArcTanh}(\text{dpol})}{\sigma_\zeta \sqrt{2n}}\right) + C \quad (3.9)$$

Simplificando mediante la siguiente sustitución :

$$\varphi = \frac{\text{ArcTanh}(\text{dpol})}{\sigma_\zeta \sqrt{2n}} \quad (3.10)$$

se obtiene:

$$\frac{T}{\beta - \delta} = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \varphi \exp(-\varphi^2) + \text{erf}(\varphi) + C \quad (3.11)$$

Para el estudio subsiguiente se tomará la ecuación (3.11) en el diseño del compensador. Resolviendo para T en (3.11) se obtiene la función de transferencia del compensador:

$$T = (\beta - \delta) \left( \operatorname{erf}(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varphi \exp(-\varphi^2) + C \right) \quad (3.12)$$

En dependencia de la desviación estándar, la función de transferencia toma la forma :

$$T = 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma} \left( \operatorname{erf}(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varphi \exp(-\varphi^2) + C \right) \quad (3.13)$$

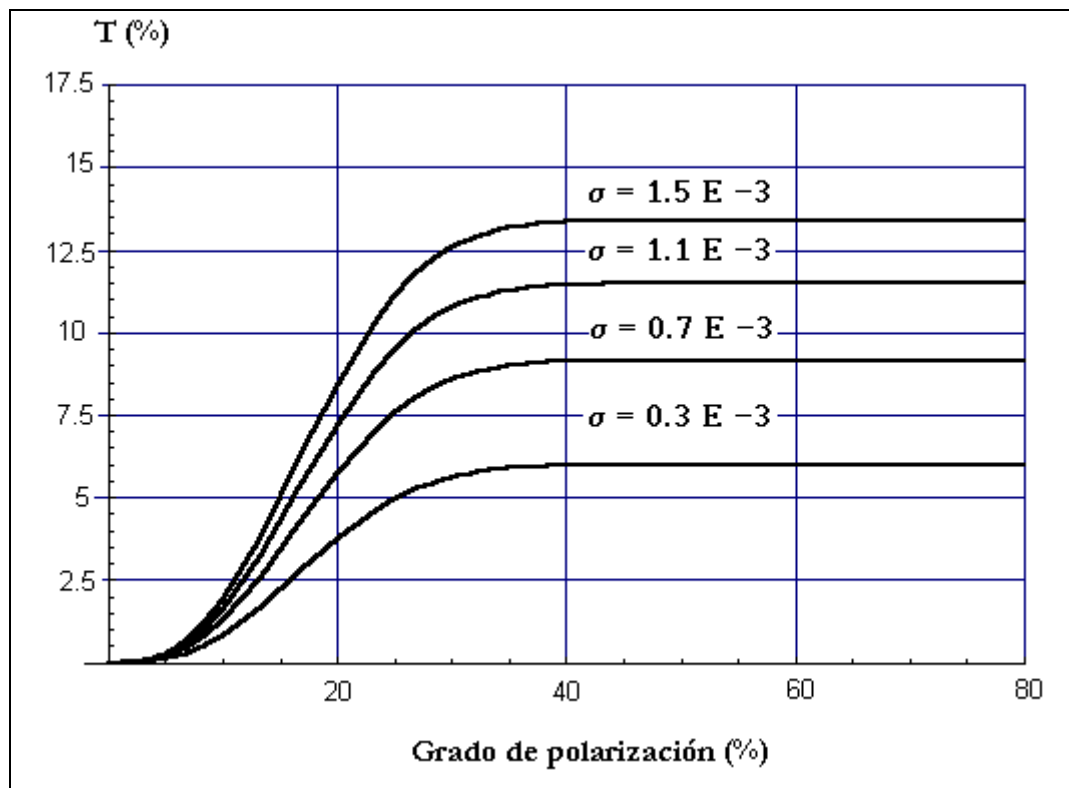
Ahora es necesario establecer las condiciones de diseño del compensador. Se puede realizar de dos maneras:

- Se pueden elegir los valores de  $\delta$  y  $\beta$  como el rango de valores del grado de polarización a la salida del compensador. A partir de estos valores se determinan la desviación estándar y el valor medio del grado de polarización a la salida.
- Elegir el valor promedio y la desviación estándar del compensador que sean los más apropiados para el enlace y de esta manera determinar el rango de valores para el grado de polarización a la salida del compensador.

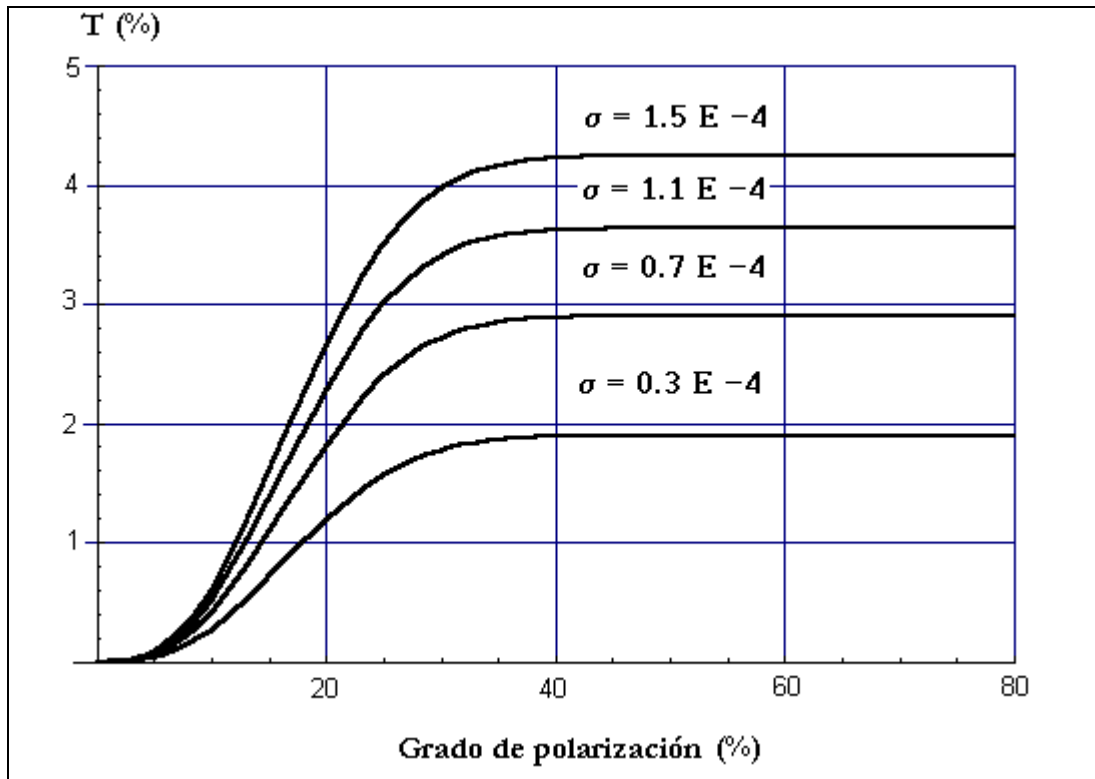


En la figura 3.3 se presenta una gráfica del comportamiento del compensador con distribución uniforme para diferentes valores de desviación estándar, para un enlace de telecomunicaciones con las siguientes características:

- Longitud del enlace: 9900 Km
- Número de repetidores: 300
- Pérdidas por polarización PDL para cada amplificador en el enlace: 0.1 dB



(a)



(b)

**Figura 3.3 :** Función de transferencia de un compensador uniforme para diferentes valores de desviación estándar (a) Desviación estándar del orden de  $10^{-3}$ , (b) Desviación estándar del orden de  $10^{-4}$ .

Para elegir el valor de desviación estándar, se puede determinar el valor máximo según las condiciones del enlace de transmisión, esto es, si el enlace es capaz de trabajar sin errores hasta un cierto porcentaje de repolarización  $d\text{pol}_0 + \Omega$ , donde  $\Omega$  es una fracción de  $d\text{pol}_0$ , antes de que los efectos de polarización se vuelvan significativos.

Se puede establecer las siguientes relaciones para el máximo valor del grado de polarización esperado en el enlace afectado por la PDL,  $d\text{pol}_a$ . Partiendo de la función de transferencia del compensador (3.13) :

$$T = 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma}(f(\varphi) + C) \quad (3.14)$$

donde, 
$$f(\varphi) = \operatorname{erf}(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varphi \exp(-\varphi^2) \quad (3.15)$$

Entonces para un grado de polarización de salida máximo del enlace  $\text{dpol}_M$  el compensador debe producir una salida que sea la deseada. Esto se expresa cuantitativamente como:

$$T \ll \text{dpol}_0 + \Omega \quad (3.16)$$

Reemplazando el valor de T se obtiene:

$$\text{dpol}_0 + \Omega \gg 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma}(\text{f}(\varphi_M) + C) \quad (3.17)$$

donde 
$$\varphi_M = \frac{\operatorname{ArcTanh}(\text{dpol}_M)}{\sigma_\zeta \sqrt{2n}} \quad (3.18)$$

Resolviendo para la desviación estándar en (3.17) se obtiene :

$$\sigma \ll \frac{(\text{dpol}_0 + \Omega)^2}{12[\text{f}(\varphi_M) + C]^2} \quad (3.19)$$

Se concluye de manera directa de la figura 3.3 que el orden de  $\sigma$  debe ser mucho menor que el grado de polarización al principio del enlace considerando que éste tiene un valor aproximadamente de cero, mas no exacto, en el sitio de transmisión.

Partiendo de la ecuación (3.13) es necesario determinar el valor de la constante C. Se puede obtener particularmente de la respuesta del compensador, esto es, establecer un grado de polarización deseado a la

salida del compensador, suponiendo un valor para la desviación estándar. Cuantitativamente, suponga que se desea un grado de polarización de salida  $T_0$  del compensador, cuando el grado de polarización con PDL tome un valor  $\varepsilon$ , así:

$$T_0 = 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma}(f(\varphi(\varepsilon)) + C) \quad (3.20)$$

resolviendo para C:

$$C = \frac{T_0\sqrt{3}}{6\sqrt{\sigma}} - f(\varphi(\varepsilon)) \quad (3.21)$$

con

$$\varphi_0 = \varphi(\varepsilon) \quad (3.22)$$

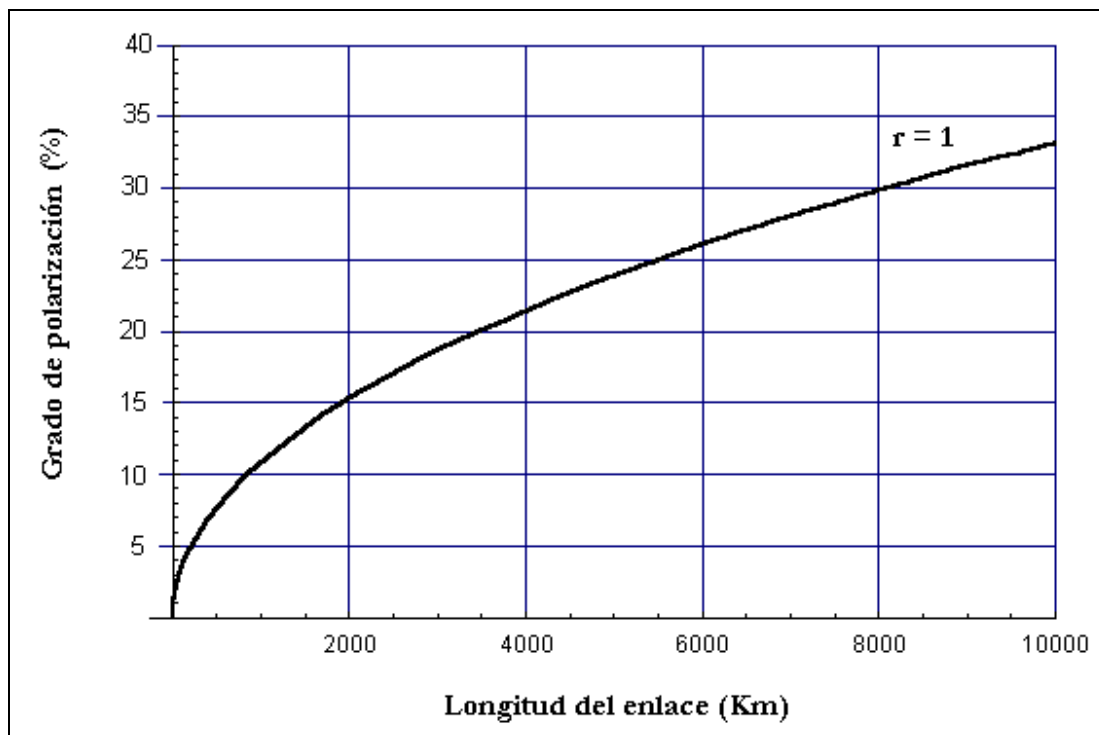
Para la determinación del rango de valores del grado de polarización a la salida del enlace para una determinada configuración del sistema se utiliza el conjunto de ecuaciones :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \text{erf}(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varphi \exp(-\varphi^2) \\ \text{dpol} = \text{Tanh}(\varphi\sigma_\zeta\sqrt{2}\sqrt{n}) \end{array} \right. \quad (3.23)$$

donde  $r$  es un número aleatorio distribuido uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ . En la tabla 3.1 se presentan los valores de  $\varphi$  asociados a los valores de  $r$  y en la figura 3.4 se presenta una gráfica del rango de valores para el grado de polarización a la salida del enlace afectado por una PDL = 0.1dB.

**Tabla 3.1** : Valores del parámetro  $\varphi$  para diferentes valores de  $r$ .

$r$	$\varphi$
0	0.00791461
0.1	0.540543
0.2	0.708934
0.3	0.843698
0.4	0.966739
0.5	1.08765
0.6	1.21371
0.7	1.35367
0.8	1.52342
0.9	1.76796
$\approx 1.0$	$\approx 2.11509$

**Figura 3.4** : Variación del grado de polarización en función de la longitud total del enlace para un valor de  $r = 1$ , para 33 Km entre cada amplificador, con  $PDL = 0.2\text{dB}$ .

Un método complementario para la elección de la desviación estándar y de la constante C del compensador, es retomar las ecuaciones (3.17) y (3.21) y resolver simultáneamente para C y  $\sigma$ . Esto se expresa como el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{dpol}_0 + \Omega = 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma}(f(\varphi_M) + C) \\ T_0 = 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma}(f(\varphi(\varepsilon)) + C) \end{cases} \quad (3.24)$$

resolviendo se encuentra

$$\begin{cases} \sigma = \frac{T_0^2 - 2T_0\Omega + \Omega^2 - 2T_0\text{dpol}_0 + 2\Omega\text{dpol}_0 + \text{dpol}_0^2}{12[f(\varepsilon) - f(\varphi_M)]^2} \\ C = \frac{f(\varepsilon)(\text{dpol}_0 + \Omega) - f(\varphi_M)T_0}{T_0 - \Omega - \text{dpol}_0} \end{cases} \quad (3.25)$$

Considérese ahora el caso de diseño de un compensador para un enlace de telecomunicaciones con las siguientes características

- Longitud del enlace : 9900 Km
- Número de repetidores : 300
- PDL para cada amplificador : 0.2 dB
- $\Omega$  : 0
- $\text{dpol}_0$  : 1%
- $\text{dpol}_M$  : 40 %

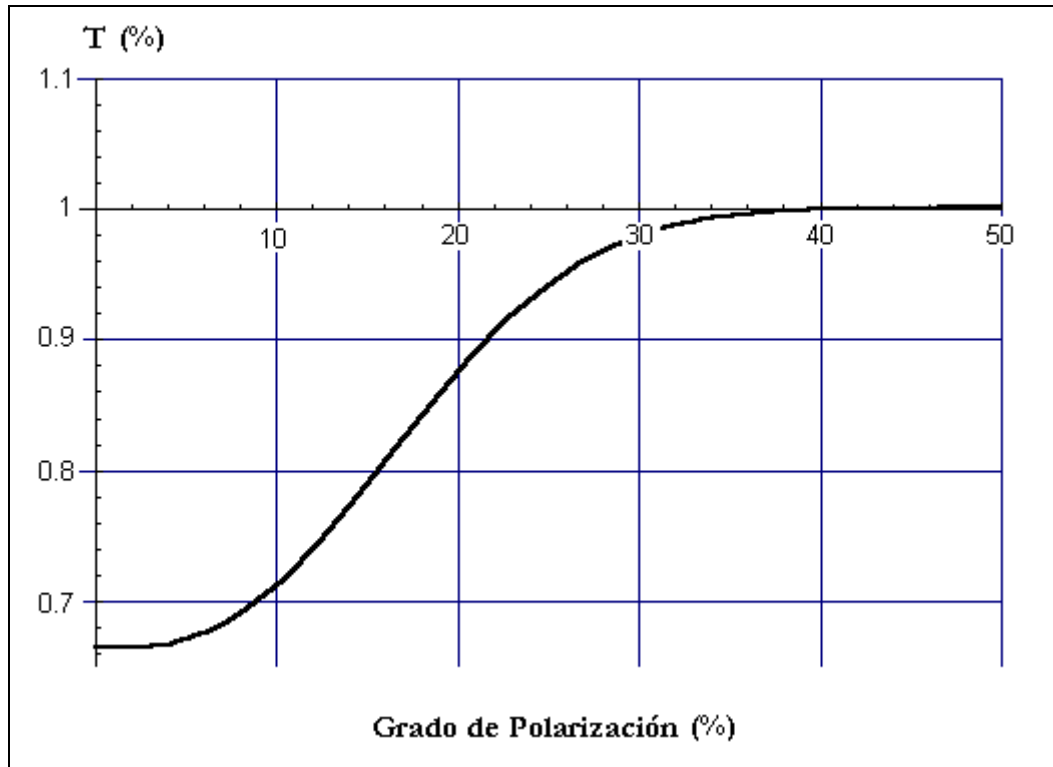
Que tenga una salida de grado de polarización aproximadamente igual a 1% cuando el pulso a la entrada del compensador (salida del enlace) tenga un grado de polarización igual a 30%. Se debe además determinar el valor más apropiado para la desviación estándar  $\sigma$  y la constante C. Debe aclararse

que no es apropiado dar un valor de salida del compensador  $T_0 = 1\%$  para este ejemplo con  $\Omega = 0$  porque  $C$  tendería hacia infinito y no sería un valor práctico para la síntesis, por esta razón se toma un valor ligeramente menor ( $T_0 = 0.98\%$ ).

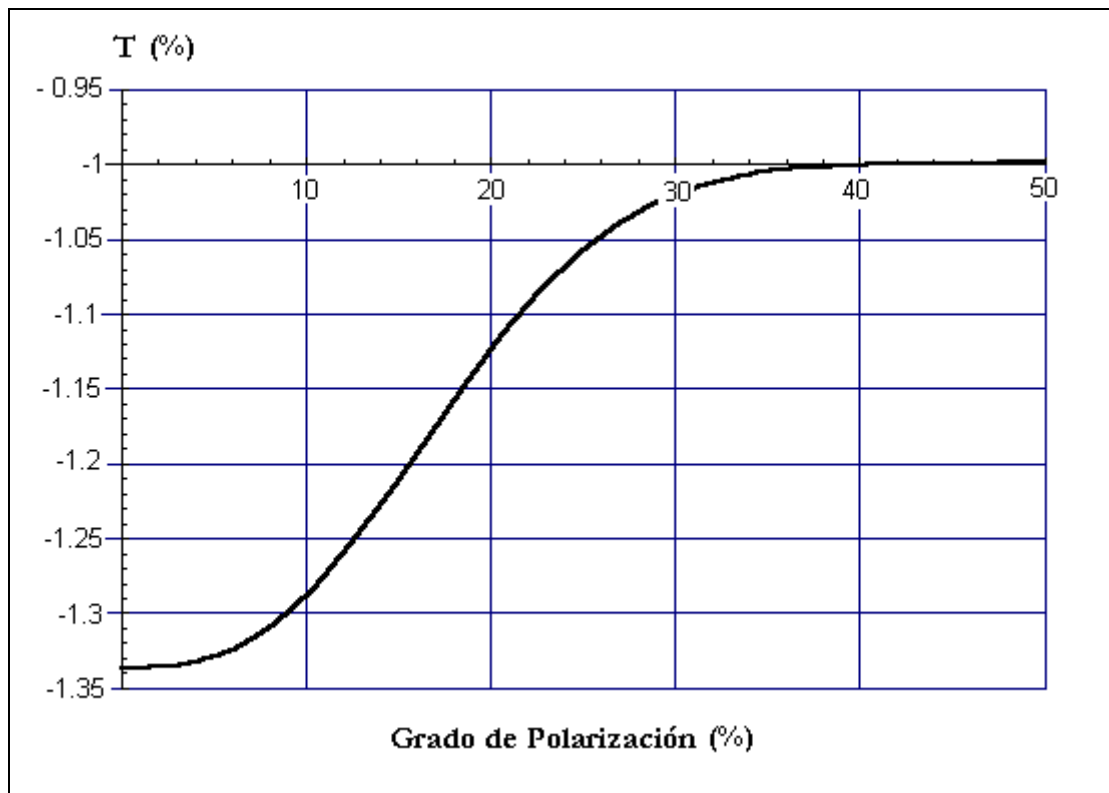
Reemplazando los valores antes mencionados para el enlace se encuentra:

$$\sigma = 9.4899 \text{ E } -7 \quad \text{y} \quad C = 1.96667$$

En la figura 3.5 se presenta una gráfica del ajuste del compensador. No se deben colocar valores para  $T_0$  superiores al grado de polarización del pulso de Tx. debido a que la curva de transferencia del compensador es no sintetizable debido a que  $T_0$  tomará valores negativos (figura 3.6)



**Figura 3.5 :** Curva característica de un compensador uniforme para un enlace de telecomunicaciones ( $T_0 = 0.98\%$ ).



**Figura 3.6 :** Curva característica de un compensador uniforme para un enlace de telecomunicaciones ( $T_0 = 1.02\%$ ).

### 3.2.2 COMPENSADOR CON DISTRIBUCIÓN NORMAL A LA SALIDA

La distribución exponencial tiene las siguientes características en su estadística :

- Función de densidad :

$$\text{PDF}(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ para } -\infty < y < \infty$$



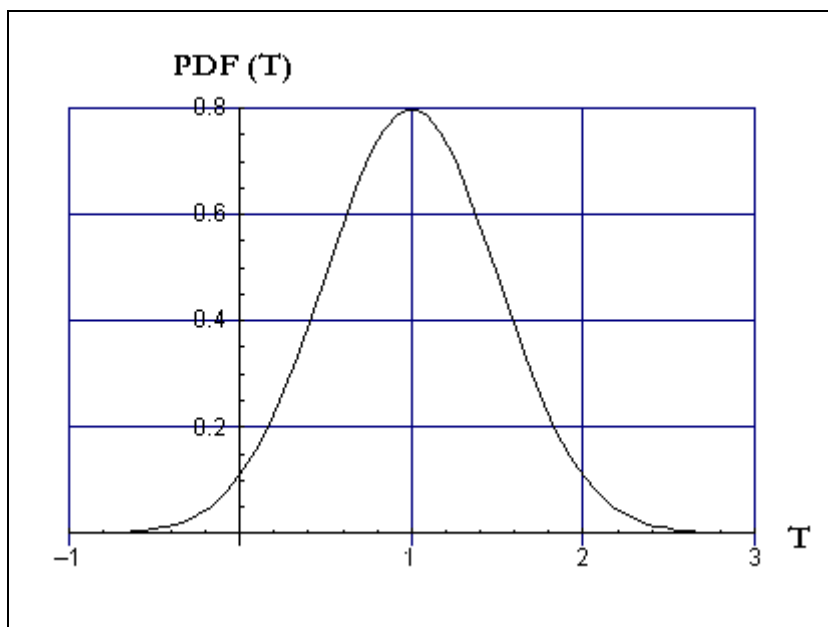
➤ Valor medio :

$$E(T) = \mu$$

➤ Desviación estándar :

$$V(T) = \sigma$$

En la Figura 3.7 se muestra esta distribución de probabilidad para  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0.5$ .



**Figura 3.7 :** Distribución de probabilidad normal

Para el diseño de este compensador, nuevamente se resuelve la ecuación (3.6) suponiendo una distribución normal del grado de polarización de salida de éste.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^2} dT = \left[ \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{(2\sigma_\zeta^2 \eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{2\sigma_\zeta^2 \eta}\right) \right] \left[ \frac{1}{1-(g)^2} \right] dg \quad (3.26)$$

integrando en ambos extremos se obtiene :

$$\frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{T-\mu}{\sqrt{2\sigma}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(\eta\sigma_\zeta^2)^{3/2}} \text{ArcTanh}(g) \exp\left[\frac{\text{ArcTanh}^2(g)}{2\eta\sigma_\zeta^2}\right] + \text{erf}\left[\frac{\text{ArcTanh}(g)}{\sqrt{2\eta\sigma_\zeta}}\right] + C \quad (3.27)$$

como en el caso del compensador uniforme, teniendo en cuenta que  $g(T) = \text{dpol}$  , la ecuación anterior toma la forma :

$$\frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{T-\mu}{\sqrt{2\sigma}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(\eta\sigma_\zeta^2)^{3/2}} \text{ArcTanh}(\text{dpol}) \exp\left[\frac{\text{ArcTanh}^2(\text{dpol})}{2\eta\sigma_\zeta^2}\right] + \text{erf}\left[\frac{\text{ArcTanh}(\text{dpol})}{\sqrt{2\eta\sigma_\zeta}}\right] + C \quad (3.28)$$

haciendo la siguiente sustitución :

$$\varphi = \frac{\text{Arc tanh}(\text{dpol})}{\sigma_\zeta \sqrt{2\sqrt{\eta}}} \quad (3.29)$$

Tenemos :

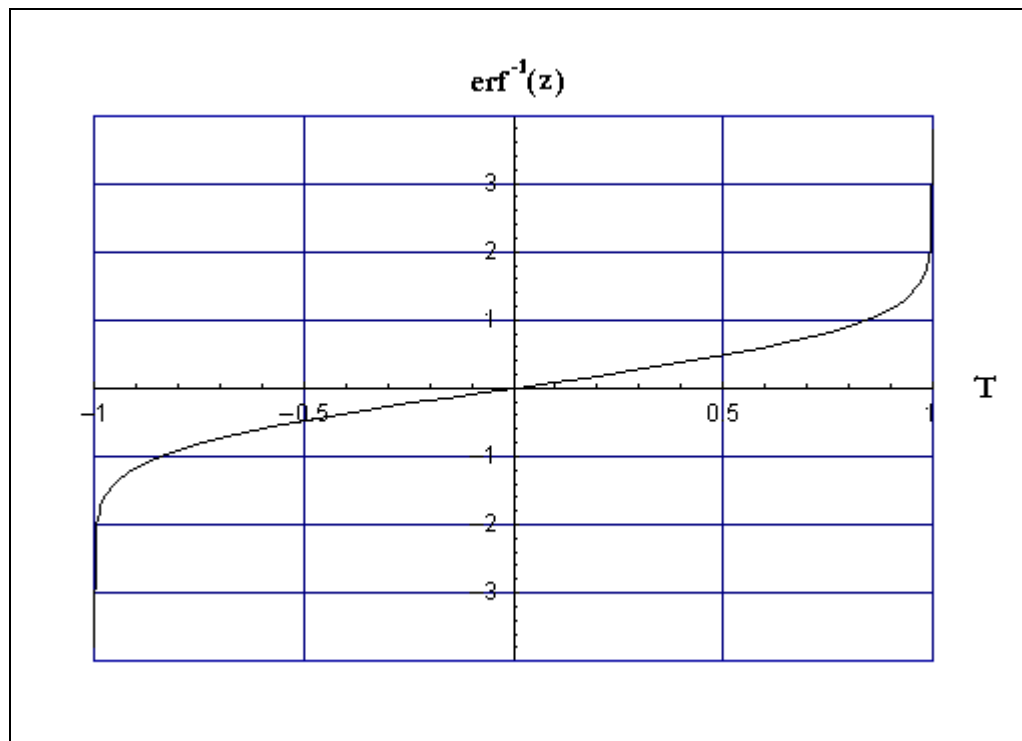
$$\frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{T-\mu}{\sqrt{2\sigma}}\right) = \frac{-2\varphi}{\sqrt{\pi}} \exp[-\varphi^2] + \text{erf}[\varphi] + C \quad (3.30)$$

resolviendo para T en (3.30), se obtiene la función de transferencia del compensador con distribución normal a la salida :

$$T = \mu + \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}^{-1} \left\{ 2 \left[ \frac{-2\varphi^2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\varphi^2) \operatorname{erf}(\varphi) + C \right] \right\} \quad (3.31)$$

Como se puede observar de esta ecuación, la función de transferencia de este compensador se encuentra en términos de la desviación estándar y el valor medio de la distribución de salida para el grado de polarización compensado.

Es importante considerar el dominio de los valores de la función  $\operatorname{erf}^{-1}(z)$ . Como se puede observar en la figura 3.8,  $\operatorname{erf}^{-1}(z)$  solo está definida en el rango de valores para  $-1 \leq z \leq 1$ .



**Figura 3.8 :** Función  $\operatorname{erf}^{-1}(z)$ .

Esta consideración, limita el rango de valores del argumento de esta función en la ecuación (3.31), además, deberá considerarse que la función de transferencia del compensador solo toma valores positivos. Esto limita un poco las condiciones de diseño de este tipo de compensadores como se verá más adelante.

Para el diseño del compensador deberá colocarse el valor medio de éste igual o muy próximo al valor del grado de polarización de Tx ( $d_{pol0}$ ) y el valor de la desviación estándar sea lo más pequeña posible. Este proceso se puede realizar de varias formas, dependiendo de los criterios del diseñador.

Antes de continuar con el proceso de diseño se necesita establecer relaciones para la desviación estándar  $\sigma$ , el valor medio  $\mu$  y la constante C del compensador. La ecuación (3.31) se puede escribir de una manera más compacta como :

$$T = \mu + \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}^{-1}\{[2f(\varphi) + k]\} \quad (3.32)$$

donde  $k = 2C$  y  $f(\varphi)$  esta definida como se indico anteriormente. Ahora el valor de  $k$  se puede establecer por condiciones de diseño, es decir, tomando un grado de polarización de salida del compensador  $T_0$  cuando el grado de polarización a la salida del enlace sea  $\varepsilon$ , reemplazando esto en la ecuación (3.32) se tiene :

$$T_0 = \mu + \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}^{-1}\{[2f(\varphi_\varepsilon) + k]\} \quad (3.33)$$

resolviendo para k:

$$k = \operatorname{erf} \left[ \frac{\sqrt{2}(T_0 - \mu)}{2\sigma} \right] - 2f(\varphi_\varepsilon) \quad (3.34)$$

El valor medio del compensador se puede obtener considerando condiciones límites de funcionamiento de éste; para un grado de polarización máximo, se puede asumir que el argumento de la función de error (erf) en la ecuación (3.32) tome un valor cercano a uno (1), este valor es elegido por el diseñador, y la salida del compensador sea  $d\text{pol}_0 + \Omega$ , que corresponde al límite de funcionamiento sin errores del enlace.

$$d\text{pol}_0 + \Omega = \mu + \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}^{-1}(\tau) \quad (3.35)$$

$$\tau = 2f(\varphi_M) + k < 1 \quad (3.36)$$

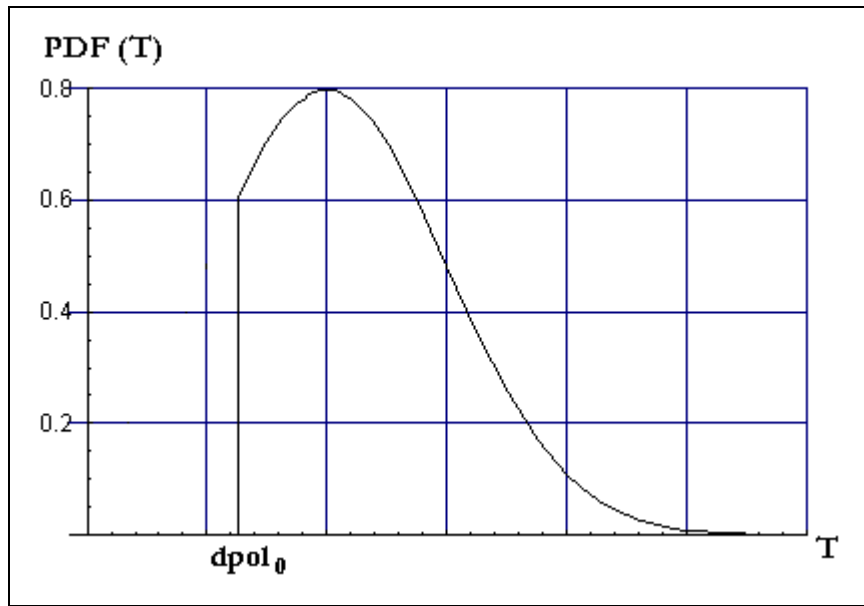
resolviendo para  $\mu$  se encuentra:

$$\mu = d\text{pol}_0 + \Omega - \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}^{-1}(\tau) \quad (3.37)$$

Una consideración bastante importante es recordar que la función de distribución de probabilidad normal tiene un dominio de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pero los valores de grado de polarización de salida del compensador se encuentran en  $T \in [d\text{pol}_0, +\infty)$ , esto se muestra en la figura 3.9.

La función de densidad de salida para el compensador cumple la condición :

$$\int_T \text{PDF}(T) dT < 1 \quad (3.38)$$



**Figura 3.9 :** Corrección a la distribución de probabilidad normal.

Se define el factor de degradación  $q$  del compensador como :

$$q = \int_{dpol_0}^{+\infty} PDF(T) dT = \int_{dpol_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^2} dT \quad (3.39)$$

resolviendo la integral se encuentra :

$$q = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{dpol_0 - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (3.40)$$

bajo la condición  $dpol_0 > \mu$ . A partir de la ecuación (3.40) se puede obtener la expresión para la desviación estándar, y está dada por :

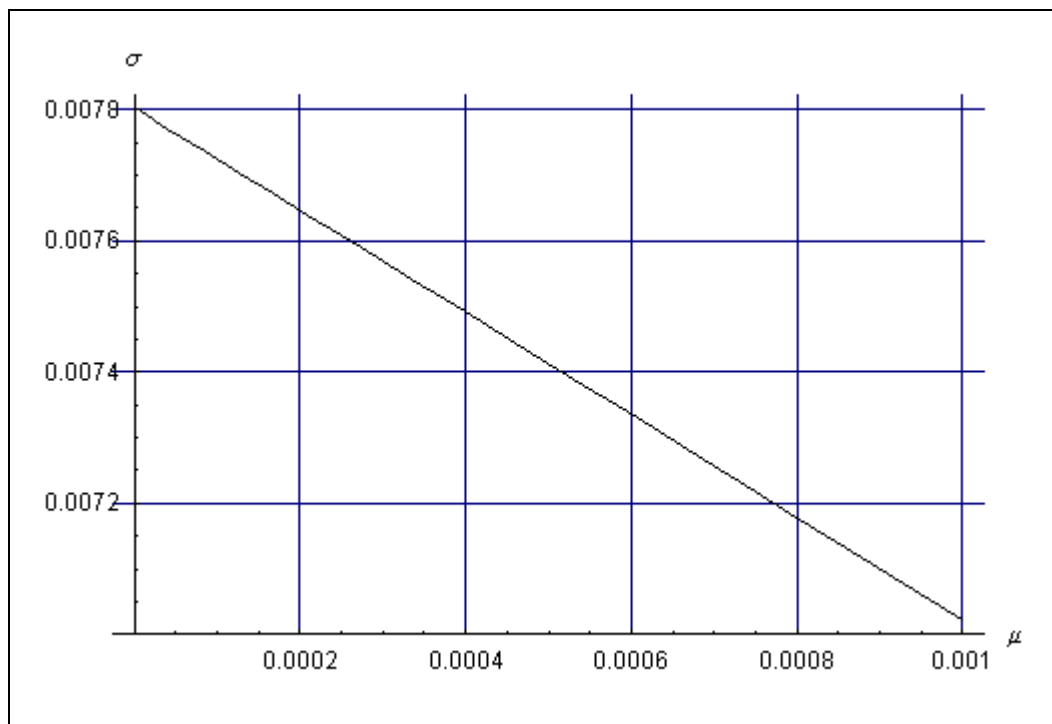
$$\sigma = \frac{\sqrt{2}(dpol_0 - \mu)}{2\operatorname{erfc}^{-1}(2q)} \quad (3.41)$$

Para garantizar que la desviación estándar  $\sigma$  no tome valores negativos, el nuevo intervalo de variación de  $q$  debe cumplir con :

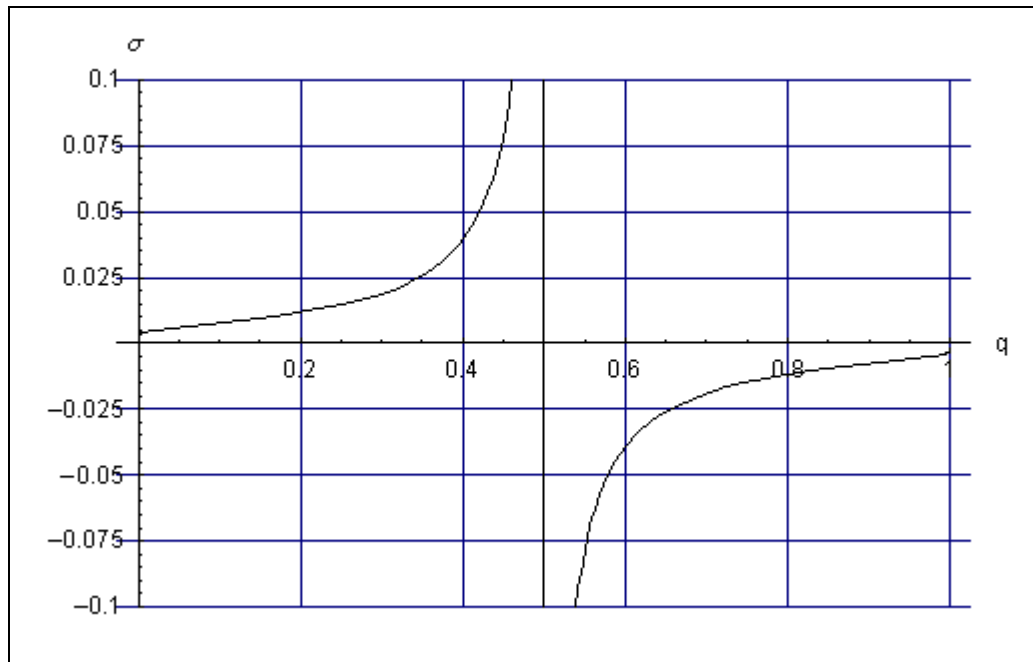
$$2q < 1 \quad (3.42)$$

$$q < \frac{1}{2} \quad (3.43)$$

En las figuras 3.10 y 3.11 se presenta el comportamiento de la desviación estándar con la variación del valor medio  $\mu$  y el factor de degradación  $q$  según la ecuación (3.41) para un valor de  $dpol_0 = 1\%$ .



**Figura 3.10 :** Desviación estándar Vs. valor medio a la salida del compensador



**Figura 3.11 :** Factor de calidad Vs. desviación estándar a la salida del compensador

En concordancia con el conjunto de ecuaciones establecidas para el diseño, se pueden considerar dos maneras de realizarlo :

- ✓ Compensador con rango restringido.
- ✓ Compensador con rango amplio.

### 3.2.2.1 Compensador con rango restringido

Para esta clase de compensador se asume un valor de  $\tau \in [0,1)$ , y se resuelve de manera simultánea las ecuaciones (3.37) y (3.41) resultando los valores para la desviación estándar y el valor medio de la distribución de salida como :

$$\sigma = \frac{\Omega}{\sqrt{2}[\operatorname{erf}^{-1}(\tau) - \operatorname{erfc}^{-1}(2q)]} \quad (3.44)$$



$$\mu = \frac{\text{dpol}_0 [\text{erf}^{-1}(\tau) - \text{erfc}^{-1}(2q)] - \Omega \text{erfc}^{-1}(2q)}{[\text{erf}^{-1}(\tau) - \text{erfc}^{-1}(2q)]} \quad (3.45)$$

con estos valores de  $\sigma$  y  $\mu$  se halla el valor de  $k$  para una determinada condición de entrada ( $\epsilon$ ,  $T_0$ ) como se ha establecido en las secciones anteriormente. Después de hallar los valores ( $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $k$ ) se verifica el rango del compensador utilizando la ecuación (3.36) resolviendo para  $\varphi_M$  por medio de métodos numéricos y posteriormente hallando el límite superior de funcionamiento del compensador  $\text{dpol}_M$ .

Considerando un enlace de telecomunicaciones con las siguientes características :

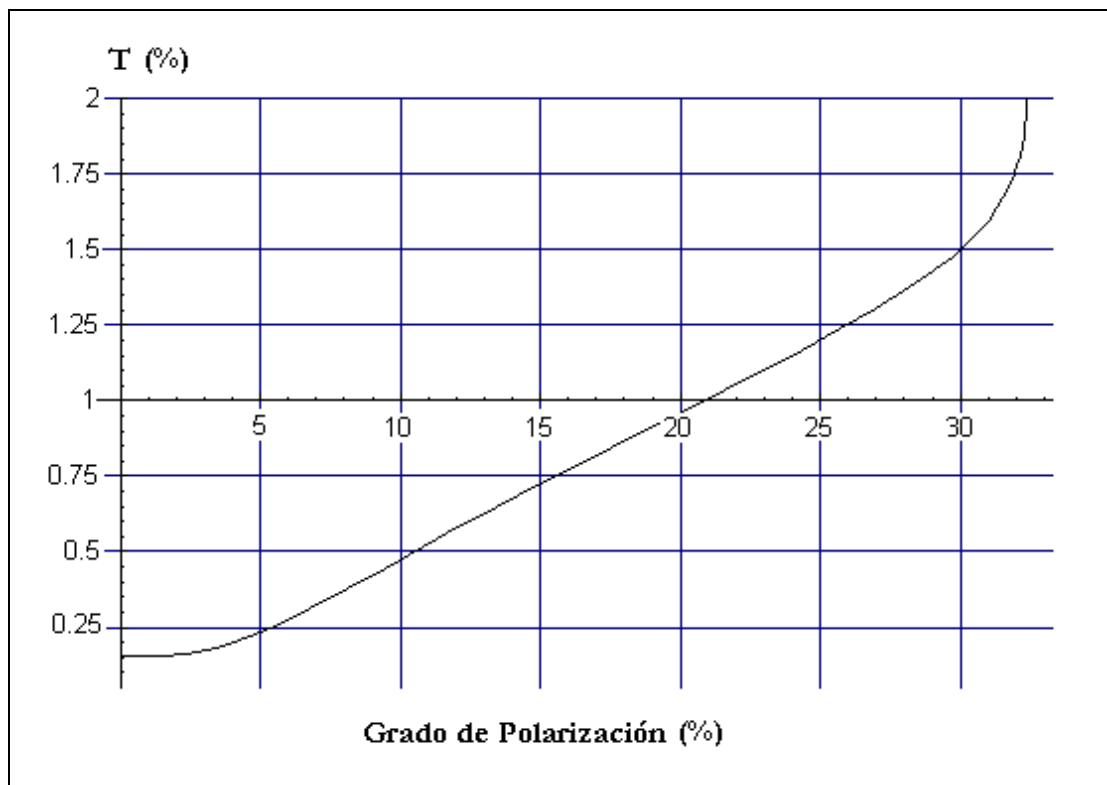
- Longitud del enlace : 9900 Km
- Número de repetidores : 300
- PDL : 0.2 dB
- $\text{dpol}_0$  : 1%

Estableciendo las condiciones de operación :

- $T_0$  : 1.5%
- $\epsilon$  : 30%
- $\tau$  : 0.999
- $q$  : 0.3
- $\Omega$  : 1%

y aplicando el procedimiento anteriormente descrito se determinan los siguientes valores del compensador y su función de transferencia, ver figura 3.12 :

- $\sigma$  : 0.00361516
- $\mu$  : 0.00810421
- $k$  : -0.931231
- $dpol_M$  : 0.324434 (32%)



**Figura 3.12 :** Función de transferencia del compensador con rango restringido.

### 3.2.2.2 Compensador con rango amplio

Se puede diseñar el compensador de tal forma que el rango de respuesta de éste corresponda a todo el rango de grado de polarización de salida del enlace de telecomunicaciones, para una cierta configuración del mismo.

Para realizar esto se puede proceder asumiendo un valor de  $\tau$  y se calcula el valor de  $k$  según la ecuación :

$$k = \tau - 2f(\varphi_M) \quad (3.46)$$

o a partir de un valor  $k$  que se asume, hallar el valor de  $\tau$  resolviendo para esta variable en la expresión anterior :

$$\tau = 2f(\varphi_M) + k \quad (3.47)$$

Asumiendo un valor para  $\sigma$  se calcula el valor medio y el factor de calidad  $q$  de la distribución de salida por medio de las ecuaciones :

$$\mu = \text{dpol}_0 + \Omega - \sqrt{2}\sigma \text{erf}^{-1}(\tau) \quad (3.48)$$

$$q = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\text{dpol}_0 - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (3.49)$$

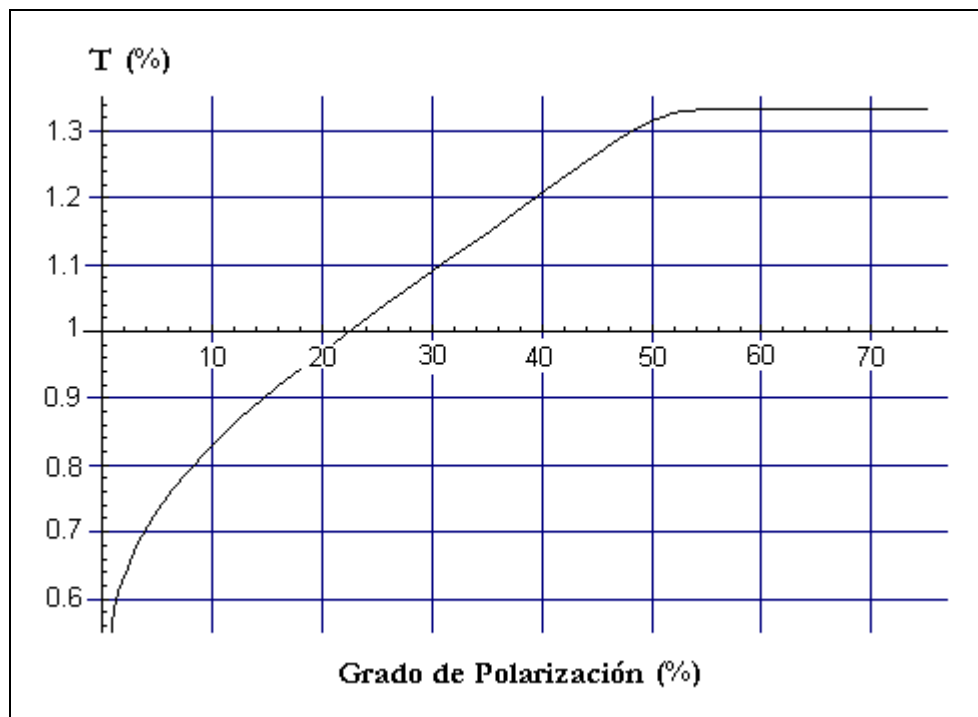
como parte final del proceso de diseño, se determina la función de transferencia para el compensador y se varia el  $\sigma$  si es el caso y se repite el procedimiento anteriormente descrito.

En la figura 3.13 se muestra el comportamiento de un compensador de rango amplio para un enlace de las características anteriores, y las siguientes especificaciones :

- $\sigma$  : 0.001
- $\tau$  : 0.8747
- $\Omega$  : 0.0009 (0.09%)

Para lo que se obtuvo los siguientes valores del compensador :

- $k$  : -1.00007
- $\mu$  : 0.0093671
- $q$  : 0.263399
- $d_{pol_{min}}$  : 0.00158879 (0.158879%)



**Figura 3.13** : Función de transferencia del compensador con rango amplio.

Se puede observar que este compensador es más preciso para el rango de grados de polarización de salida que con el compensador de rango restringido.

Es claro, como se puede ver en las graficas, que ambos tipos de compensadores, tanto el de rango amplio como el de rango restringido, ofrecen una buena respuesta y pueden diseñarse dependiendo de las condiciones del enlace y de las características del sistema de transmisión. Sin embargo, el compensador de rango restringido impone una cierta limitación en cuanto a su rango de funcionamiento, teniendo en cuenta la cantidad de repolarización que puede presentarse en un enlace óptico de transmisión. Por otra parte, el compensador de rango amplio ofrece un mejor desempeño sobre un extenso rango de grados de polarización.

En términos generales, los dos tipos de compensadores estudiados en este capítulo, son bastante aceptables y pueden implementarse de dos maneras diferentes en cuanto a su posición física en el enlace de transmisión: ya sea como un dispositivo físico autónomo colocado en el enlace de telecomunicaciones, con sus parámetros ajustados a éste o como un compensador distribuido a lo largo de la toda la fibra, donde los parámetros de ella se ajustan de acuerdo a las características de funcionamiento óptimas del compensador. Esto queda a criterio del diseñador.

## CONCLUSIONES GENERALES

Al finalizar el estudio acerca de los efectos de polarización y luego de analizar el impacto que tiene éstos sobre el desempeño de redes ópticas en telecomunicaciones, es posible destacar los siguientes aspectos relevantes:

- El uso de formalismos de cuaterniones y de Stokes permiten desarrollar una modelación completa de los efectos de polarización, reduciendo la labor del cálculo sin perder precisión en los resultados. Por otra parte, se muestra que los dos modelos son equivalentes con una muy buena aproximación a los resultados reales o experimentales.
- Con la ayuda de simulaciones numéricas se ha mostrado, que los efectos de distorsión ligados a la dispersión por polarización pueden considerarse despreciables si ésta es inferior a 20 ps. (ver por ejemplo figura 2.5). Igualmente se puede evidenciar que la PDG produce una penalidad media importante sobre el factor de calidad de un enlace amplificado y que la combinación de los tres efectos de polarización PDG, PDL y PMD inducen fuertes fluctuaciones de este factor de calidad (ver por ejemplo figura 2.11). Esto se traduce en una gran limitante en el desarrollo de nuevas redes ópticas de alta capacidad y larga distancia.
- Se ha encontrado que la PDG y la PMD juegan un papel muy importante en sistemas de transmisión de un solo canal, pero su importancia decrece a medida que el número de canales incrementa, volviéndose despreciable a partir de 10 canales (ver figura 2.15). Esto permite considerar los

sistemas WDM como un medio para compensar estos dos efectos. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que las fluctuaciones del factor  $Q$  incrementan respecto a las de un solo canal y por ende pueden limitar considerablemente el desempeño y confiabilidad del sistema de transmisión.

- La técnica de modulación por polarización, desarrollada para disminuir la penalidad media ligada a la PDG, puede considerarse inefectiva si el enlace presenta elementos asociados con la PDL. Como se ha mostrado en la figura 2.23, la PDL puede generar un alto porcentaje de repolarización haciendo que la PDG y la PMD sea vuelvan una importante fuente de distorsión para la señal. De esta forma puede considerarse la compensación de la repolarización como una solución a los efectos de polarización.
- El desempeño del compensador para los efectos de polarización descrito en este trabajo puede ser apreciado de la siguiente manera: cuando una señal es modulada en polarización, el grado de polarización residual máxima está alrededor del 15%; así que, es razonable asumir que si la repolarización adicional sufrida por la señal está por debajo del 15%, el efecto de la PDL y por ende los demás efectos de polarización serán despreciables. Teniendo en cuenta lo anterior se puede afirmar que el comportamiento teórico de los compensadores es bastante bueno puesto que presentan a su salida un grado de polarización por debajo del 2%.
- Se ha propuesto un método teórico efectivo de compensación para un problema tecnológico que afecta directamente la capacidad real que un sistema de transmisión óptico puede brindar. Además se ha presentado su comportamiento y los parámetros más importantes que se deben tener

en cuenta para su diseño y posterior implementación, y que pueden ser optimizados dependiendo de las características del enlace de transmisión.

- Este trabajo junto al ya realizado alrededor de la dispersión por polarización dentro del mismo grupo de investigación, podrán servir como herramienta esencial para el desarrollo de nuevos trabajos de investigación en el campo de las telecomunicaciones ópticas, brindando información para el diseño de nuevas redes de comunicaciones y mejoramiento del desempeño de las ya existentes.



## GLOSARIO DE TÉRMINOS

- ASE (Amplified Spontaneous Emission). Ruido característico de los amplificadores ópticos generado a partir de la amplificación de fotones emitidos espontáneamente en el proceso de amplificación.
- BER (Bit Error Rate) Relación de bits recibidos con error respecto a los bits enviados. Es normal un BER de  $10^{-9}$  (un bit de error recibido sobre mil millones de bits enviados).
- BW (Bandwidth) Rango de frecuencias que la fibra óptica puede transportar con distorsión mínima. Indica la capacidad de información de una fibra óptica o de otros medios de transmisión.
- EDFA (Erbium Doped Fiber Amplifier). Amplificadores ópticos basados en una fibra óptica monomodo convenientemente dopada con iones de erbio y que constituyen el elemento óptico activo para lograr la amplificación mediante emisión estimulada de radiación.
- NRZ (Non Return to Zero). Código digital en el que el nivel de la señal está alto para un bit 1, bajo para un bit 0 y no retorna a nivel bajo para sucesivos bits 1.
- OSI (Open Systems Interconnection). Sistema de interconexión abierta (OSI) con modelo de protocolo de siete niveles desarrollado por la Asociación Internacional de Estándares.

- PDG** (Polarization Dependent Gain). Efecto que se origina cuando la ganancia de los amplificadores ópticos usados depende de la polarización de la señal. Una frecuente PDG se presenta en amplificadores de semiconductores y EDFAs.
- PDL** (Polarization Dependent Loss). Efecto que se origina cuando algunos dispositivos del enlace de transmisión introducen pérdidas dependientes del campo de polarización. La PDL puede presentarse en filtros ópticos, empalmes imperfectos, y cuando el acoplamiento entre los dispositivos y la fibra no es perfecto.
- PHB** (Polarization Hole Burning). La PHB es debida al hecho de que el nivel de valencia del amplificador es dividida en dos bandas, generando una ganancia de saturación asimétrica respecto a los estados de polarización de la señal.
- PMD** (Polarization Mode Dispersion). Efecto que se origina en la birrefringencia residual de las fibras ópticas y de los amplificadores ópticos (EDFAs y aisladores ópticos).
- RZ** (Return to Zero). Código digital en el que el nivel de la señal está alto para un bit 1 en la primera mitad del intervalo de bit y entonces pasa a bajo para la segunda mitad de dicho intervalo de bit. El nivel permanece bajo para todo el intervalo de un bit 0.
- SDH** (Synchronous Digital Hierarchy). Protocolo estándar definido en el nivel de transporte del modelo OSI. Hace posible la transmisión de grandes volúmenes de información y permite la conciliación de diferentes jerarquía a al tas velocidades.
- SNR** (Signal to Noise Ratio). Razón entre la señal y el ruido medido en el sitio de recepción y que permite caracterizar qué tanto se ha degradado la señal al propagarse por el enlace de transmisión.

SONET	(Synchronous Optical NETwork). Protocolo estándar de comunicación sobre fibra óptica definido en el Nivel 1 (nivel físico) del modelo OSI.
TDM	(Time División Multiplexing). Tecnología que permite la combinación de dos o más señales de comunicación a diferentes tiempos preestablecidos por el sistema de transmisión.
WDM	(Wavelength División Multiplexing) Combinación de dos o mas señales ópticas de diferentes longitudes de onda

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. Pellat – Finet. Représentation des états et des operateurs de polarisation de la lumière par des quaternions. *Optica Acta*, 31, pp. 415 – 434, 1984.
- [2] F. Bruyere, O. Audouin. Assessment of systems penalties induces by polarization mode dispersion in a 5 Gb/s optically amplified transoceanic link. *IEEE Photonics Technology Letters*. Vol. 6. pp. 443 – 445. Mar. 1994.
- [3] F. Bruyere, O. Audouin. Penalties in long – haul optical systems due to polarization dependent loss and gain. *IEEE Photonics Technology Letters*, mar 1994.
- [4] C. E, Pérez, J. León. *Dispersión por polarización en fibras ópticas*. Grupo de Óptica y Láser , Universidad del Cauca, 2000.
- [5] G. Patricia, R. Carlos. *Estudio y proyección de la técnica WDM en el desarrollo de redes de comunicaciones ópticas*. Universidad del Cauca, 2000.
- [6] D. Wang, Menyuk. Calculation of penalties due to polarization effects in a long – haul system. *Journal of Lightwave Technology*. Vol 19, No. 4. pp. 487 – 494, April 2001.
- [7] E. Lannone, F. Matera, A. Mecozzi, M. Settembre. *Nonlinear optical communication networks*. John Wiley & Sons, Inc. 1998.
- [8] F. Bruyere, O. Audouin, V. Letellier, G. Bassier, P. Marmier. Demonstration of an optimal polarization scrambler for long – haul optical amplifier systems. *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 6, pp. 1153 – 1155, 1994.

- [9] C. R. Menyuk, D. Wang. Repolarization of polarization-scrambled optical signal due to polarization dependent loss. IEEE Photonics Technology Letters, Vol. 9, No. 9, september 1997.
- [10] W.A., Schurcliff. Polarized Light. Harvard University Press, 1962.
- [11] E. L, O'Neill. Introduction to Statiustical optics. Dover publication, 1963.