



Universidad
del Cauca

FOTONES, PUNTOS CUANTICOS ACOPLADOS Y QUBITS

JHON ALEJANDRO ANDRADE HOYOS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INGENIERÍA FÍSICA

POPAYÁN

2009

FOTONES, PUNTOS CUANTICOS ACOPLADOS Y QUBITS

JHON ALEJANDRO ANDRADE HOYOS

Trabajo de grado en la modalidad de trabajo de investigación presentado como
requisito parcial para optar al título de Ingeniero Físico

Director

Ph.D. SERVIO TULIO PÉREZ MERCHANCANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INGENIERÍA FÍSICA

POPAYÁN

2009

Nota de aceptación

Director: _____
SERVIO TULIO PEREZ
Ph.D en Ciencias-Físicas

Jurado: _____
JOHN HENRY REINA
Ph.D en Física

Jurado: _____
LUIS FERNANDO ECHEVERRI
Ms. en Física

Fecha de sustentación: Popayán, 23 de septiembre de 2009

AGRADECIMIENTOS

- Al creador, por permitir la evolución de la naturaleza; su imagen.
- Mis padres, abuela y a toda mi familia, por su apoyo incondicional.
- Mi novia Clairen Muñoz que siempre estuvo en toda ocasión.
- Mi primer maestro, Eiser Portilla.
- Mi mejor amiga y prima, Lina Jaller.
- Mi compañero y mejor amigo, Jesús Ernesto.
- A todos mis compañeros de estudio.
- Mis profesores de universidad, por su enseñanza y sobre todo, por ofrecerme su amistad.
- A la Universidad del Cauca, grupo SENUMA y director de grupo Ph. Servio Pérez.

CONTENIDO

INTRODUCCION

CAPITULO 1: MARCO TEORICO	11
1.1. OPERADOR DENSIDAD	11
1.2. ENTROPIA COMO MEDIO DE MEDICION DE ENTRELAZAMIENTO CUANTICO	12
1.3. MODELOS Y PARAMETROS DE ESTUDIO	15
1.3.1. MODELO DE DECOHERENCIA (Ecuación Master)	16
1.3.2. MODELOS Y PARAMETROS PARA EXCITONES	17
1.3.3. MODELOS Y PARAMETROS PARA ESPINES DE QDs	19
RESULTADOS.....	22
CAPITULO 2: EXCITONES DE QDS CON CAMPO COHERENTE.....	23
CAPITULO 3: EXCITONES DE QDS EN CAMPO VACÍO	31
3.1. EN UN MEDIO DISIPATIVO.....	31
3.2. EN MEDIOS NO DISIPATIVOS	42
CAPITULO 4: ESPIN ELECTRONICO DE QDS EN CAMPO VACIO	47
4.1. EN UN MEDIO DISIPATIVO.....	47
4.2. ESPINES EN MEDIOS NO DISIPATIVOS	55
4.3. POSIBLE APLICACIÓN DE LOS RESULTADOS	59
CONCLUSIONES.....	61
APENDICA A: PUNTOS CUANTICOS Y CAVIDADES	63
A.1. PUNTOS CUANTICOS (QDs, del inglés Quantum Dots).....	63
A.1.2. REGLAS DE TRANCION DEBIDO AL ACOPLAMIENTO ESPIN-ORBITA.....	64
A.2. CAVIDADES.....	66
APENDICE B: ENTRELAZAMIENTO CUANTICO	70

APENDICE C: MODOS EN UNA CAVIDAD, CUANTIZACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO, Y SU INTERACCION CON LA MATERIA.....	76
C.1. MODOS EN UNA CAVIDAD CERRADA PERFECTAMENTE CONDUCTORA	76
C.2. CAMPO ELECTROMAGNETICO E INTERACCION DE LA LUZ CON LA MATERIA	82
C.2.1. CUANTIZACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO EN UNA CAVIDAD.....	82
C.2.2. INTERACCION DE UN PARTICULA CON UN CAMPO CUANTIZADO (modelo de Jaynes-Cummings)	86
C.2.3. CAMPO ELECTROMAGNETICO COHERENTE	90
APENDICE D: ECUACION MASTER	93
BIBLIOGRAFIA	103

INTRODUCCION

Actualmente existen ordenadores con gran capacidad de cálculo a velocidades y fidelidad muy alta. Desde que se hacen los microchips, se han hecho mucho esfuerzo en descubrir materiales con propiedades tales que permitan reducir el tamaño y amplificar la capacidad de cómputo de los dispositivos. Para aumentar la capacidad se tiene que colocar más y más transistores en áreas que lo permitan (idealmente más pequeñas), esto implica mayor consumo de energía ya que el flujo de calor es mayor. Como es de esperar, la miniaturización de los transistores tendrá un límite, y al sobrepasar este límite, los efectos cuánticos se harán notorios, y como consecuencia se obtendrán resultados no deseados. Debido a esto, la única opción para seguir aumentando la capacidad de cálculo, es trabajar con una forma de cómputo que tenga en cuenta los estados cuánticos de la materia, a esto es lo que se le llama Computación Cuántica. Este tipo de computación tiene muchas ventajas en comparación con la computación clásica, una de ellas es la operación en paralelo de qubits (bits cuánticos), reversibilidad de las operaciones, e infinitos estados de almacenamiento de la información entre estados 1 y 0 del computador clásico [1]; de hecho la ventaja principal de las propiedades de la mecánica cuántica es el entrelazamiento cuántico, la cual es esencial para la computación porque posibilita la colocación de mayor información en los bits cuánticos que lo que es posible con los bits actuales. Este se manifiesta de un hecho absurdo en el mundo clásico, donde la dinámica de dos partículas entrelazadas no pueden ser separadas entre sí. En otras palabras, lo que a una partícula le suceda, la otra lo sentirá instantáneamente, sin importar la magnitud de la distancia espacial que las separe (mayor formalismo en el apéndice B). Esta propiedad puede ser utilizada en aplicaciones tecnológicas tales como la tele-portación cuántica (un estado cuántico puede ser transportado de un lugar a otro sin necesidad de un medio de transmisión), la criptografía cuántica (encripta la información con un 100% de seguridad de no ser perturbado, ya que este se basa en la imposibilidad de medir un estado cuántico sin destruirlo), la computación cuántica (el entrelazamiento permite mayor colocación de información en los bits cuánticos que lo que es posible con los bits actuales y además se posibilita las operaciones en paralelo).

Las herramientas necesarias para hacer operaciones sobre los estados, son las compuertas cuánticas la cual pueden ser de uno, dos o más qubits. El mayor impedimento para realizar este tipo de cómputo, es la decoherencia de los estados de la materia. Aquí se hace necesario que la coherencia de los estados del material que se está utilizando sea mayor al tiempo de operación de una operación de cómputo cuántico. Un buen candidato son los puntos cuánticos (QDs), la cual es un nanocrystal semiconductor o material de estado sólido crecidos en laboratorio, del orden de los nanómetros y la cual presentan altos tiempos de coherencia y características útiles para la fabricación de dispositivos. Los QDs son llamados también “átomos artificiales”, ya que estos tienen un comportamiento similar por los niveles discretos que en ellos aparecen, y debido a ello, los portadores de carga son confinados en las tres dimensiones. Esto hace que los QDs tengan altos tiempos de coherencia, sumado a que por su dimensionalidad, son más aislados del medio ambiente. Por eso este trabajo de grado se hace un estudio teórico de este posible candidato para ser aplicado al campo de la información cuántica.

Dado que uno de los objetivos es encontrar entrelazamiento entre QDs, la interacción con un campo electromagnético posibilita esta propiedad. Esto se llevará a cabo al colocar los QDs en una cavidad de electrodinámica cuántica (QEDc), la cual confina la luz electromagnética a frecuencias cercanas a las de transición (de la banda de valencia a la de conducción) de algún QD. Por eso, estas facilitan enormemente el acoplamiento entre el campo electromagnético y los QDs, posicionados en algún máximo del campo. Los parámetros que comúnmente se utilizan para el acoplamiento, son los excitones de QDs (cuasi-partícula par electrón-hueco formada por la transición de un electrón de la banda de valencia a la de conducción, ver apéndice A) y espín electrónico (momento angular intrínseco del electrón), ya que estos tienen grandes tiempos de coherencia, especialmente el espín. Por otra parte, cabe resaltar que hay diferentes formas de cavidades como las de micro discos, micro pilares, cristales fotónicos, donde esta última se tendrá más en cuenta en este proyecto por su alto factor de calidad (descripción física de la cavidad, ver apéndice A).

Hoy en día se han hecho estudios sobre sistemas cuánticos que involucran la interacción de la luz con la materia por medio de una QEDc, o simplemente la luz, con el objetivo de implementarlos en los sistemas de información cuántica. Entre ellos se encuentran estudios recientes de excitones coherentes de puntos cuánticos embebidos en una QED, resultados experimentales de acoplamiento en cavidades de cristales fotónicos y espín, la manipulación de espín nuclear por medio de una QED, control de un solo fotón por medio de una guía de onda y una cavidad de cristales fotónicos, multi qubits en cavidades QED superconductoras, experimentaciones de redes cuánticas con cavidades de cristales fotónicos, QDs y fotones, etc [26-31]. En fin, hay cantidad de trabajos que incluyen la interacción de la luz con la materia, con el propósito de conformar compuertas cuánticas de sistemas de qubits en los medios de información cuántica; y claro está, es indispensable el entrelazamiento cuántico.

En este trabajo, los sistemas a considerar para producir entrelazamiento son: dos excitones de QDs de InAs/GaAs con campo coherente y promedio de fotones igual a cinco, dos excitones de QDs de InAs/GaAs con campo vacío, y dos espines de QDs de AlGaAs con campo vacío. El hamiltoniano utilizado para describir la interacción de la luz con los excitones es el de Jaynes-Cummings, mientras que con los espines se usa la descripción hamiltoniana producida por el acoplamiento Raman entre la banda de valencia y conducción teniendo en cuenta el modo de la cavidad y un campo externo, ambos debidamente polarizados. En este último juega un papel muy importante las reglas de transición debido a la conservación del momento angular y el acoplamiento espín-orbita (ver apéndice A). Para tener en cuenta los términos disipativos de los QDs y los fotones de la cavidad, se hace uso la ecuación Máster (ecuación de movimiento del operador densidad con decoherencia), y dado que esta ecuación por lo general no tiene una solución exacta, se usaran métodos de aproximación o numéricos para poder resolverla. En nuestro caso se aplica el método numérico de Euler en un software implementado en Dev-C++, la cual hace uso de las condiciones iniciales del sistema, y este reproduce datos de las oscilaciones de Rabí (probabilidad en el tiempo de los estados del sistema) y con ello los elementos de matriz del operador densidad. Estos datos son exportados al lenguaje de programación Mathematica, con lo que se calcula los valores y vectores

propios del operador densidad; esto nos da razón de los estados mezclados del sistema. Con todo esto, se hacen graficas de las oscilaciones y posteriormente se analiza la dinámica de entrelazamiento de los dos excitones y espín en el tiempo. Para esto se involucra conceptos de entropía estadística como la de Von Neumann y Rényi. Estas entropías dan el grado de mezcla del sistema y de entrelazamiento cuántico. Estas también, junto con las oscilaciones de Rabí, suministran información del tiempo para la cual puede ser manipulado el sistema, antes que los estados se destruyan por la decoherencia del sistema.

Este trabajo se basa en el modelo de la interacción de la mecánica cuántica, y tiene como parámetro principal de análisis, el operador densidad del sistema. Por esto, el capítulo 1 (marco teórico), facilita al entendimiento de la dinámica del operador densidad en medios disipativos, e igualmente permite identificar el entrelazamiento y el grado de mezcla del sistema. Así mismo se presentan nociones básicas del hamiltoniano de cada sistema, el cual muestra la dinámica del operador densidad. En el capítulo 2 (excitones de QDs con campo coherente) se ve un intervalo de tiempo en la cual el sistema presenta entrelazamiento. En los capítulos 3 y 4 (excitones y espín con campo vacío), se encontraran estados máximamente entrelazados para ciertos tiempos. Dado esto, se podría implementar compuertas cuánticas que cambien los estados iniciales (qubits entrantes) a uno entrelazado, y la transmisión de esta información por medio de la luz, ya que esta presenta un grado de entrelazamiento con los QDs.

CAPITULO 1: MARCO TEORICO

1.1. OPERADOR DENSIDAD

Dado que los estados que se van a tratar en este trabajo son mezclados y no puros (por la interacción con el ambiente), es indispensable definir el operador densidad, la cual permite tratar este tipo de estados. Primero que todo, un estado puro es un estado máximamente determinado, mientras que un estado no puro (o mezclado) no tiene certeza del estado en que se encuentra el sistema y por lo tanto es tratado como una mezcla estadística. En mecánica cuántica el operador densidad para un estado puro expandido en una base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$,

$$|\Psi\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle \quad (1.1)$$

esta dado de la siguiente forma:

$$\rho = \alpha^2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \alpha^* \beta^*|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + \alpha^* \beta|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1| + \beta^2|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \quad (1.2)$$

y su representación matricial es:

	$\langle\varphi_1 $	$\langle\varphi_2 $
$ \varphi_1\rangle$	α^2	$\alpha^* \beta^*$
$ \varphi_2\rangle$	$\alpha^* \beta$	β^2

Tabla 1.1: Operador densidad de un estado puro $|\Psi\rangle$ en la base de $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$.

Donde los elementos diagonales representan la probabilidad de que al hacer una medida, el sistema se encuentre en uno de los estados de la base, y los elementos no diagonales dan la coherencia o interferencia producida por la superposición de estos.

El operador densidad para un estado mezclado esta dado por:

$$\rho = \sum_{k=1}^n p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| = \sum_{k=1}^n p_k \rho_k \quad (1.3)$$

donde $\rho_k = |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$ es el operador densidad para el estado puro $|\psi_k\rangle$ participe de la mezcla, y p_k es la probabilidad de que el sistema se encuentre en este estado. Su representación matricial es diagonal conformado por los p_k , y dado esto, es importante diagonalizar este operador, hallando sus vectores propios (estados participes en la mezcla) y valores propios (probabilidad del sistema de estar en uno de estos estados) para saber si se está tratando con estados puros o mezclados. En caso de ser un estado puro, la diagonalización da un único vector propio con un valor propio igual a la unidad.

Por otra parte es importante mencionar las siguientes relaciones para estados puros y mezclados.

Estados puros	Estados mezclados
$\rho^+(t) = \rho(t)$	$\rho^+(t) = \rho(t)$
$\rho^2(t) = \rho(t)$	$\rho^2(t) \neq \rho(t)$
$Tr[\rho(t)] = 1$	$Tr[\rho(t)] = 1$
$Tr[\rho^2(t)] = 1$	$Tr[\rho^2(t)] < 1$

Tabla 1.2: propiedades del operador densidad para estados puros y mezclados [16].

Aquí se ve una forma fácil de identificación de estados puros y mezclados, entre más alejada sea la traza del operador densidad al cuadrado por debajo de la unidad, más mezclado es el sistema, mientras que si se acerca a la unidad más puro es. Esto va a ser de mucha utilidad a la hora de analizar los estados del sistema que nos compete.

1.2. ENTROPIA COMO MEDIO DE MEDICION DE ENTRELAZAMIENTO CUANTICO

La entropía es considerada en termodinámica como el grado de desorden de un sistema, pero en sí, esta también acoge otras definiciones, como el grado de incertidumbre o información que se tiene en un sistema. Para lo que nos compete, se

van a utilizar dos clases de entropía, la entropía de Von Neumann y la de Rényi. La entropía de Von Neumann se define como en termodinámica a acepción de una constante:

$$S = \langle -\ln|\rho| \rangle = Tr[-\rho \ln|\rho|] \quad (1.4)$$

Mientras que la de Rényi tiene la siguiente forma [1, 17]:

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \ln Tr[\rho^\alpha] \quad (1.5)$$

Para medir el grado de entrelazamiento para estados puros, se utiliza un la correlación cuántica, la cual desde el punto de vista clásico, esta es una medición de la intersección o la cantidad de información que comparten ciertos sistemas. Para dos sistemas A y B, la correlación cuántica es:

$$I = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{A,B}) \quad (1.6)$$

donde $S(\rho_A)$ es la entropía del sistema A conformado por el operador densidad reducido sobre el sistema B, $S(\rho_B)$ es la entropía del sistema B conformado por el operador densidad reducido sobre el sistema A, y $S(\rho_{A,B})$ es la entropía de los dos sistemas en común, conformado por el operador densidad total. Debido a la desigualdad triangular de Araki-Lieb [1] (producto de las propiedades de la mecánica cuántica como la superposición y el entrelazamiento cuántico) la correlación cuántica varía:

$$0 \leq I \leq 2\min\{S(\rho_A), S(\rho_B)\} \quad (1.7)$$

La cual intuye una súper correlación (debido al entrelazamiento del sistema), ya que en la correlación clásica, el 2 en el límite superior, no aparece. La interpretación para identificar el entrelazamiento de un estado puro con la correlación cuántica es como sigue: primero cabe resaltar que un sistema puro de dos partes, esta entrelazado

cuando su operador densidad no se puede factorizar en ninguna de sus dos partes, es decir, no se puede expresar como un producto tensorial dado por $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$. Ahora, si el estado total es puro, entonces su entropía es nula y se puede definir la llamada entropía de entrelazamiento, $E_E = S(A) = S(B) = I/2$ que es una medida del mismo. Si los estados reducidos son ambos puros, entonces el estado total es factorizable y su entropía es igual a $S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$, la cual da una correlación $I = 0$, tal que no existe entrelazamiento alguno (entropía de entrelazamiento nula). Si $I > 0$, entonces los estados reducidos no son puros y el estado total es entrelazado (entropía de entrelazamiento mayor que cero). En el caso de estado total puro, éste es un criterio sencillo para distinguir ambos tipos de estados.

Si el estado total es mezcla, y su operador densidad es factorizable $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$, la entropía total es igual a la suma de las entropías de los estados reducidos, y el índice de correlación es nulo. Pero en el caso $I > 0$ no es posible distinguir con solo este dato si el estado es mezcla separable o no. Esto ha llevado a estudiar el comportamiento de otras entropías, como la de Rényi.

Antes de pasar al formalismo de identificación del entrelazamiento para estados mezclados con la entropía de Rényi, se debe definir la forma del operador densidad de un estado mezclado y no entrelazado por medio del concepto de separabilidad. Se dice que un estado (no puro en general) es separable [1, 17] si su operador densidad puede expresarse como combinación lineal convexa de productos de operadores densidad para cada uno de los dos sistemas,

$$\rho = \sum_k c_k \rho_k^{A,B} = \sum_k c_k \rho_A \otimes \rho_B, \quad \sum_k c_k = 1 \quad (1.8)$$

La cual, Werner llamo *clásicamente correlacionados* a estos estados, por oposición a los cuánticamente correlacionados (entrelazados). En particular, si el estado total es puro, la suma anterior tiene un solo término, y se recupera la condición de factorización.

Para sistemas clásicos discretos las entropías condicionales son positivas [1, 17]. Esta entropía está dada por:

$$S_\alpha(A|B) = S_\alpha(\rho_{AB}) - S_\alpha(\rho_B) \quad (1.9)$$

Esto sugiere que sus correspondientes expresiones cuánticas serán positivas si el estado es separable. Ello equivale a que para todo $\alpha \geq 1$ se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$S_\alpha(\rho) \geq \max\{S_\alpha(\rho_A), S_\alpha(\rho_B)\} \quad (1.10)$$

Para $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ y $\alpha = \infty$ puede probarse que en espacios de Hilbert de dimensión finita la desigualdad anterior se satisface para cualquier estado separable ρ [17], de lo contrario, se habla de un sistema mezclado (si $Tr[\rho_{AB}^2] < 1$) y entrelazado. Para $\alpha = 2$ la desigualdad (1.10) equivale a:

$$Tr[\rho_{AB}^2] \leq \min\{Tr[\rho_A^2], Tr[\rho_B^2]\} \quad (1.11)$$

Solo que ρ_A^2 y ρ_B^2 en descomposición de Schmidt [1] son equivalentes. Cualquier violación de la desigualdad anterior, es un estado entrelazado, y entre mayor sea $Tr[\rho_{AB}^2]$ de $\min\{Tr[\rho_A^2], Tr[\rho_B^2]\}$, más grado de entrelazamiento hay.

1.3. MODELOS Y PARAMETROS DE ESTUDIO

Para poder llevar a cabo los objetivos de este proyecto, es necesario introducir los términos que van a ser participes en la dinámica de nuestro sistema. Como en mecánica clásica, uno de estos términos es el hamiltoniano (predice la evolución normal) y la ecuación que va a describir los términos de decoherencia.

La forma general que tiene el hamiltoniano es:

$$\hat{H} = \hat{H}_{part} + \hat{H}_{campo} + \hat{H}^{(I)} \quad (1.12)$$

Donde el primer término es la energía de los estados de los QDs, el segundo la energía del campo electromagnético, y el tercero es el hamiltoniano de interacción entre el campo electromagnético y los QDs.

1.3.1. MODELO DE DECOHERENCIA (Ecuación Máster)

Para describir el amortiguamiento irreversible y decoherencia en mecánica cuántica, se tiene que considerar el acoplamiento de un pequeño sistema (sistema bajo estudio) y uno grande, la cual tiene un ancho de banda en frecuencia que permanece en equilibrio térmico y es llamado reservorio. Debido al acoplamiento del pequeño sistema con el grande, existe la decoherencia, y en el caso de un átomo, esta se manifiesta en la emisión espontánea, ya que el átomo esta intercambiando constantemente energía con un gran reservorio que es el ambiente. Una de las formas de describir este fenómeno de decoherencia es por medio de la ecuación Máster en el modelo de Schrödinger, la cual comprende la evolución del operador densidad. Esta ecuación tiene la siguiente forma para temperatura de cero Kelvin:

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \frac{g}{2} [2a\rho(t)a^+ - a^+a\rho(t) - \rho(t)a^+a] \quad (1.13)$$

Aquí $\dot{\rho}(t)$ es la evolución del operador densidad en el tiempo, H es el hamiltoniano del sistema, g es el factor de decoherencia, \hat{a}^+ y \hat{a} son los operadores de construcción y destrucción del sistema que sufre la decoherencia (puede ser excitones o fotones).

Ya que el sistema se encuentra a temperatura de cero Kelvin, la decoherencia es solo producida por las fluctuaciones de vacío, dadas solamente en el tratamiento mecánico- cuántico. Esta decoherencia produce una destrucción de los elementos de matriz no diagonales del operador densidad (ver figura 1.1), en otras palabras,

destruye la coherencia entre los estados superpuestos de un sistema, quedando finalmente en un estado de relajación.

$$\rho \rightarrow \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* e^{-gt} \\ a^* b e^{-gt} & |a|^2 \end{pmatrix}$$

Fig. 1.1: efectos de la decoherencia en un sistema. Los elementos no diagonales se van desvaneciendo debido a la decoherencia del sistema, manifestado en la exponencial decreciente real.

Para mayor información de la obtención de la ecuación Máster, el lector debe remitirse al apéndice D.

1.3.2. MODELOS Y PARAMETROS PARA EXCITONES

El hamiltoniano utilizado para describir este sistema es el de Jaynes-Cummings (deducción en el apéndice C) la cual está dada en términos de los operadores de creación y destrucción de excitones y fotones de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar\omega[\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_0] + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + i\hbar\lambda(\hat{\sigma}_0\hat{a}^+ - \hat{\sigma}_1\hat{a}) \quad (1.14)$$

donde,

$$\hat{\sigma}_1 = |1\rangle\langle 0|, \quad \hat{\sigma}_0 = |0\rangle\langle 1| = \hat{\sigma}_1^\dagger \quad (1.15)$$

Aquí $|1\rangle$ es el vector de estado excitado (en la banda de conducción de un QD), $|0\rangle$ es el vector de estado base (en la banda de valencia de un QD), $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_0$ son los operadores de construcción y destrucción de un excitón respectivamente, \hat{a}^+ y \hat{a} son los operadores de construcción y destrucción de un fotón respectivamente. El primer término del hamiltoniano dado por el conmutador de $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_0$ es la energía de los estados $|1\rangle$ y $|0\rangle$ de un QD con energía de transición dado por $\hbar\omega$ (\hbar =constante de Planck, ω =frecuencia angular). El segundo término del hamiltoniano total es el hamiltoniano del campo electromagnético con energía $\hbar\omega$, y el tercer término es el

hamiltoniano de interacción entre el excitón y el campo electromagnético. El primer término del hamiltoniano de interacción representa la construcción o emisión de un fotón, destruyendo a la vez un excitón, ya que el electrón pasa de la banda de conducción a la de valencia, el segundo término es el proceso contrario. Aquí λ es el factor de acoplamiento, y está determinado por la intensidad del campo eléctrico.

Una de las interacciones que van a ser tratadas es la de excitones de QDs con campo coherente, por ello, el estado que describe el campo coherente es:

$$|\alpha\rangle = e^{\left(\frac{-1}{2}|\alpha|^2\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.16)$$

Aquí $|n\rangle$ es el vector número de fotones o estado de Fock para fotones, el cual representa el número de fotones que se encuentran interaccionando. α es el valor propio de $|\alpha\rangle$ dado por el operador de destrucción del fotón. Este campo coherente permite tratar el valor medio del campo electromagnético cuantizado, con las ecuaciones de Maxwell. Para mayor formalismo físico y matemático sobre la cuantización del campo electromagnético y el campo coherente, el lector debe remitirse al apéndice C.

Por otra parte, para un sistema de dos puntos cuánticos de InAs/GaAs embebidos en una cavidad de cristales ópticos característico de [21, 22] y el apéndice A, se tienen los siguientes parámetros, según [21].

EXCITONES DE QDs DE InAs/GaAs			CAVIDAD DE CRISTAL FOTONICO		
ω_{QD} (GHz)	g (GHz)	λ (GHz)	ω_{C} (GHz)	Q (GHz)	g_{C} (GHz)
$3.33 \cdot 10^5$	2	315	$3.33 \cdot 10^5$	45000	23

Tabla 1.3: parámetros del modelo excitónico.

Aquí ω_{QD} es la frecuencia de transición de un excitón, g el factor de decoherencia, λ es el factor de acoplamiento con el campo electromagnético, ω_c es la frecuencia del campo en la cavidad, Q es el factor de calidad de la cavidad, y g_c es el factor de decoherencia de la cavidad debido a la pérdida de fotones.

1.3.3. MODELOS Y PARAMETROS PARA ESPINES DE QDs

Teniendo en cuenta las reglas de transición debido a la conservación del momento angular presentado en el apéndice A, el esquema que sigue estará basado esencialmente en la transición Raman óptica (TRO) para acoplar los dos estados de espín en la banda de conducción [24, 25]. En QDs dopados de tal forma que cada QD tenga un solo electrón en la banda de conducción, será introducido un estado de hueco virtual, que ayudara a que se de la TRO. Aquí los estados que van a participar en la dinámica del sistema son $|\uparrow\rangle, m_z = 1/2$ y $|\downarrow\rangle, m_z = -1/2$ del electrón en la banda de conducción. Para lograr un acoplamiento Raman, es necesario introducir un campo extra y así introducir un nivel virtual. Aplicando un campo magnético constante en el eje z para desdoblar los niveles de energía de espín a lo largo de este eje, el sistema está representado de la siguiente forma:

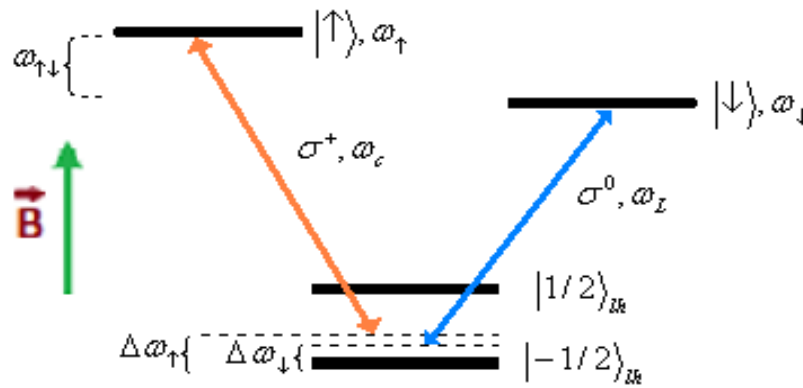


Fig 1.2: esquema de transición Raman en espín de QDs

En la figura anterior, $|-1/2\rangle_{hv}$ es el estado de espín $m_z = -1/2$ del hueco liviano en la banda de valencia. $\omega_{\uparrow\downarrow}$ es la frecuencia de transición entre espines en la banda de conducción. ω_{\uparrow} y ω_{\downarrow} son las frecuencias de los respectivos espines en la banda de

conducción con respecto a la banda de valencia. ω_c es la frecuencia del modo de la cavidad con polarización σ^+ (circular derecha). ω_L es la frecuencia del campo extra polarizado en σ^0 (lineal), tal que se pueda dar las respectivas transiciones virtuales cerca al estado $|-1/2\rangle_{lh}$. $\Delta\omega_\uparrow$ y $\Delta\omega_\downarrow$ son desfases.

La figura anterior describe una situación en la cual la transición entre dos niveles está dada por la absorción o emisión simultanea de dos fotones. Este proceso toma lugar si la diferencia de las dos frecuencias aplicadas ($|\omega_c - \omega_L|$) es justamente la frecuencia de transición de los dos niveles ($\omega_{\uparrow\downarrow}$), teniendo un elemento de matriz bipolar diferente de cero. Esto conlleva a que $|\Delta\omega_\uparrow - \Delta\omega_\downarrow|$ sea muy pequeño. Si se tiene que $\lambda_c \ll \Delta\omega_\uparrow$ y $\lambda_L \ll \Delta\omega_\downarrow$ (λ_c y λ_L son los factores de acoplamiento del fotón en la cavidad y el fotón extra), se garantiza que no haya resonancia entre el electrón en el estado $|-1/2\rangle_{lh}$ a $|\uparrow\rangle$ tal como de $|-1/2\rangle_{lh}$ a $|\downarrow\rangle$. Dadas estas condiciones, se puede resolver las ecuaciones de Heisenberg por el método de perturbaciones, siendo $\lambda_c / \Delta\omega_\uparrow$ y $\lambda_L / \Delta\omega_\downarrow$ los parámetros de perturbación. Para órdenes más bajos de perturbación, los tres niveles son reducidos a dos niveles efectivos cuyo hamiltoniano está dado por:

$$H_{eff} = \omega_c a^\dagger a + \omega_L b^\dagger b + \sum_i \left[\frac{\omega_{\uparrow\downarrow}^i}{2} [\sigma_{\uparrow\downarrow}^i, \sigma_{\downarrow\uparrow}^i] + \frac{\lambda_c^2}{\Delta\omega_\uparrow^i} \sigma_{\uparrow\uparrow}^i a a^\dagger + \frac{(\lambda_L^i)^2}{\Delta\omega_\downarrow^i} \sigma_{\downarrow\downarrow}^i b b^\dagger \right] + i\lambda_{eff}^i [a^\dagger \sigma_{\downarrow\uparrow}^i b - a \sigma_{\uparrow\downarrow}^i b^\dagger] \quad (1.17)$$

$$\lambda_{eff}^i = \frac{\lambda_c * \lambda_L}{2} \left(\frac{1}{\Delta\omega_\uparrow^i} + \frac{1}{\Delta\omega_\downarrow^i} \right) \quad (1.18)$$

Aquí $a^\dagger \sigma_{\uparrow\downarrow}^i e^{-i\omega_L t}$ describe una transición desde el estado $|\downarrow\rangle$ a $|\uparrow\rangle$, emitiendo un fotón de frecuencia ω_L y simultáneamente absorbe un fotón de frecuencia ω_c .

$a \sigma_{\downarrow\uparrow}^i e^{i\omega_L t}$ describe el proceso contrario. $\frac{\omega_{\uparrow\downarrow}^i}{2} [\sigma_{\uparrow\downarrow}^i, \sigma_{\downarrow\uparrow}^i]$ y $\omega_c a^\dagger a$ son la energía de los niveles de los QDs y del modo de la cavidad respectivamente. El desfase

energético de los niveles la cual les compete el resto de términos, se llama el desfase Lamb. Como se ve, esto solo depende de la intensidad del campo o acoplamiento. Este desfase surge debido a la transición virtual a $|-1/2\rangle_{lh}$. Aquí $|\uparrow\rangle$ puede hacer una transición virtual por la emisión y absorción simultánea de un fotón de frecuencia ω_c . Este proceso es representado por $\frac{\lambda_c^2}{\Delta\omega_{\uparrow}^i} \sigma_{\uparrow\uparrow}^i aa^+$ donde el electrón vuelve a quedar en el mismo estado. Análogamente para $\frac{(\lambda_L^i)^2}{\Delta\omega_{\downarrow}^i} \sigma_{\downarrow\downarrow}^i bb^+$.

Por otra parte, para un sistema de puntos cuánticos de AlGaAs embebidos en una cavidad de cristales ópticos característico de [21, 22] y el apéndice A, se tienen los siguientes parámetros, según [21, 27].

ESPIN DE QDs DE AlGaAs [27]			CAVIDAD DE CRISTAL FOTONICO [21]		
$\omega_{\uparrow\downarrow}$ (GHz)	g (MHz)	λ_{eff} (GHz)	ω_c (GHz)	Q (GHz)	gc (GHz)
$2.418 \cdot 10^5$	10	24.18	$2.418 \cdot 10^5$	45000	23

Tabla 1.4: parámetros del modelo de espín.

Dado λ_{eff} , la transición Raman obtiene una probabilidad de 0.01. Esto conlleva a que el tiempo de vida del fotón, que antes era de 10ps, ahora sea de 1ns, y si el tiempo de vida espín-hueco era de 1ns, ahora es de 100ns [27]. Cabe resaltar que la frecuencia del fotón externo es aproximadamente igual a la del fotón de la cavidad y de la de un excitón del QD AlGaAs, con el propósito de que se dé la transición Raman.

RESULTADOS

Finalmente, ya descritos todos los modelos y parámetros que se van a utilizar para describir la dinámica del sistema se procede a presentar los resultados del proyecto. En el transcurso de los siguientes capítulos, se va a tener de manifiesto los elementos de matriz del operador densidad calculados mediante la ecuación Máster, el cual fue desarrollado con la ayuda de un software implementado en Dev-C++. Estos elementos de matriz nos posibilita ver la evolución de las oscilaciones de Rabí, la cual son solamente la probabilidad que el sistema produzca una cierta transición, y además de ello, por medio de la diagonalización de este operador, se sabrán los estados mezclados que conforma el sistema. Con esto se hace posible cálculos de la entropía y por ende la evolución en el tiempo del grado de entrelazamiento y mezcla. Se tendrá intuición en que tiempos el sistema está mayoritariamente entrelazado y que estado es. En el caso del siguiente capítulo 2, donde la interacción es dada por excitones y campo coherente, solo se tendrá en cuenta las oscilaciones de Rabí, el grado de mezcla, y el grado de entrelazamiento cuántico, pero no los estados del sistema. Para las otras interacciones de excitones y espín con campo vacío, si se tendrá en cuenta los estados, ya que solo se cuenta con dos estados de número de fotón, el $|0\rangle$ y el $|1\rangle$. Por otra parte, en el capítulo 3 y 4 se hará una comparación del sistema con decoherencia y sin decoherencia.

CAPITULO 2: EXCITONES DE QDs CON CAMPO COHERENTE

Excitones de dos puntos cuánticos de InAs/GaAs, denotados como punto A y punto B, se van a considerar como sistemas de dos niveles descrito por la ecuación (1.4), despreciando la interacción electrón-hueco (si la distancia entre niveles es lo suficiente grande) y haciendo la suposición que en cada QD solo se produce un excitón, ya que las dimensiones son muy pequeñas. Todo esto con el objetivo de enfatizar solo en la dinámica de un sistema de dos niveles y teniendo en cuenta que estas interacciones solo desfasan la energía del sistema. El hamiltoniano de interacción total de los QDs con un modo de la cavidad según (1.4), esta dado por:

$$H = \frac{\omega_{qd}^A}{2} [\sigma_1^A, \sigma_0^A] + \frac{\omega_{qd}^B}{2} [\sigma_1^B, \sigma_0^B] + \omega_c a^\dagger a + i\lambda^A (a^\dagger \sigma_0^A - a \sigma_1^A) + i\lambda^B (a^\dagger \sigma_0^B - a \sigma_1^B) \quad (2.1)$$

Donde se ha denotado $\hbar = 1$. Los superíndices en las frecuencias, el factor de acoplamiento y los operadores de los QDs hacen referencia si se trata del QD A o B, y los subíndices en las frecuencias indican si son de un QD o de la cavidad.

Para tener en cuenta términos que disipan la energía es necesario introducir la ecuación Máster extendida para los QDs y la cavidad. Esta extensión es de la siguiente forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + L_{qd}^A + L_{qd}^B + L_c \quad (2.2)$$

$$L_{qd}^A = \frac{g_A}{2} (2\sigma_0^A \rho \sigma_1^A - \sigma_1^A \sigma_0^A \rho - \rho \sigma_1^A \sigma_0^A) \quad (2.3)$$

$$L_{qd}^B = \frac{g_B}{2} (2\sigma_0^B \rho \sigma_1^B - \sigma_1^B \sigma_0^B \rho - \rho \sigma_1^B \sigma_0^B) \quad (2.4)$$

$$L_c = g_c (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \quad (2.5)$$

Aquí (2.3-2.5) son los operadores de disipación de los QDs A y B, y la cavidad respectivamente.

Para nuestro propósito, se va a considerar que los QDs son iguales en todos sus aspectos y están puestos en cierto sitio de la cavidad de tal forma que: $\lambda^A = \lambda^B = \lambda$, $g_A = g_B = g$ y $\omega^A = \omega^B = \omega_{qd}$ y sus valores están dados por la tabla 1.3. Estos van a interactuar en un tiempo inicial $t=0$ con un campo coherente dado por (1.16). El elemento de matriz del campo para este tiempo y en la base de número de fotones es:

$$\langle n|\alpha(0)\rangle\langle\alpha(0)|m\rangle = {}_n\rho_m(0) = \left(e^{-|\alpha|^2}\right) \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \quad (2.6)$$

Y con respecto al estado de los QDs para este tiempo se va a considerar que:

$$|\psi_{qd}(0)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \quad (2.7)$$

$$|\psi_{qd}(0)\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B + |1\rangle_B) \quad (2.8)$$

De tal forma que el elemento de matriz densidad para los QDs es:

$$\begin{aligned} \rho_{\beta_B, \beta_A}^{\alpha_A, \alpha_B}(0) &= \frac{1}{4} [(1-\alpha_A)(1-\beta_A) + (1-\alpha_A)\beta_A + \alpha_A(1-\beta_A) + \alpha_A\beta_A] \\ & * [(1-\alpha_B)(1-\beta_B) + (1-\alpha_B)\beta_B + \alpha_B(1-\beta_B) + \alpha_B\beta_B] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Y el elemento de matriz densidad del sistema completo (QDs y campo) es el producto tensorial entre ellos:

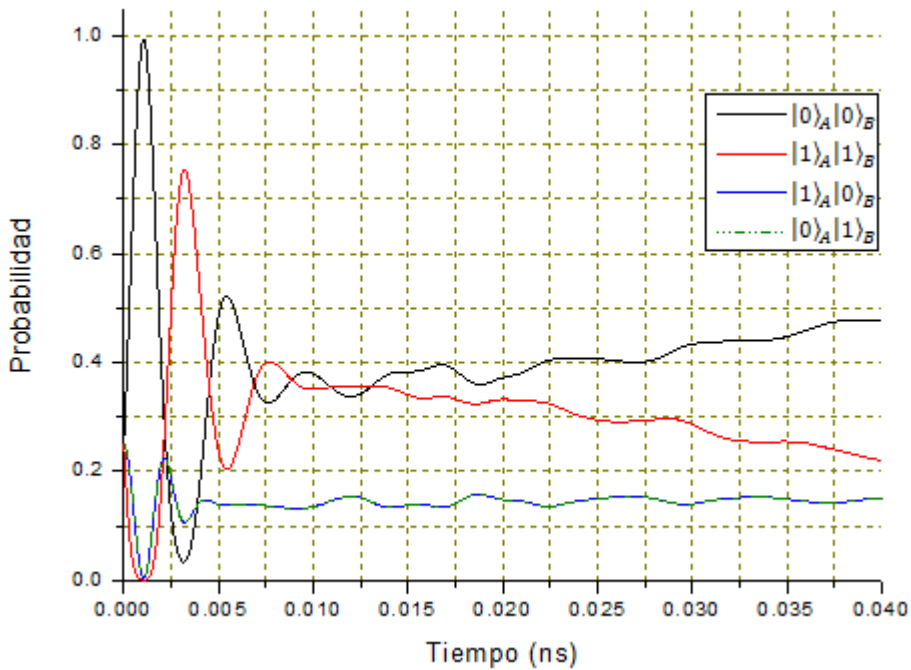
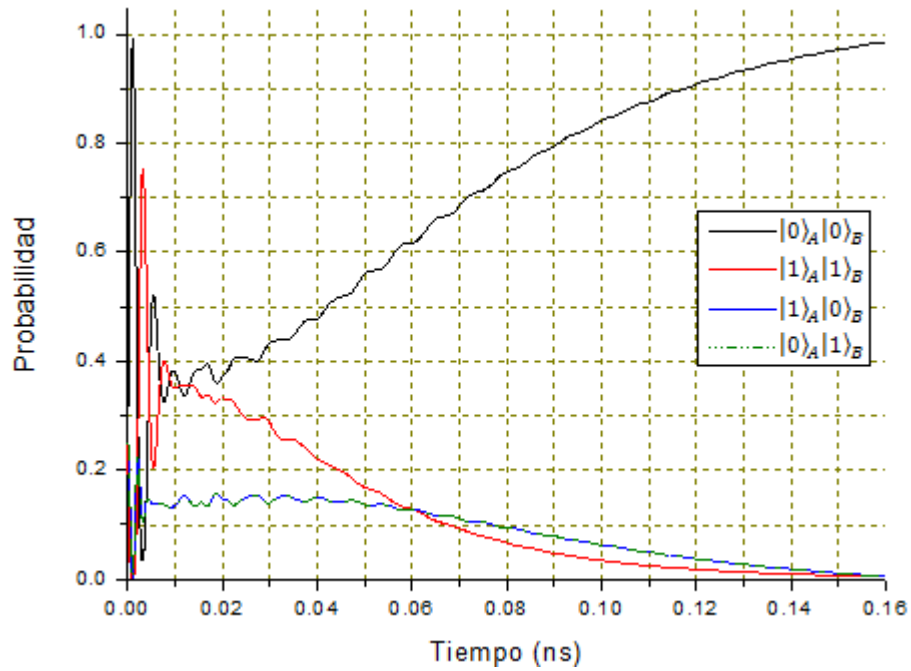
$$\begin{aligned}
{}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m}(0) &= \frac{1}{4} [(1-\alpha_A)(1-\beta_A) + (1-\alpha_A)\beta_A + \alpha_A(1-\beta_A) + \alpha_A\beta_A] \\
&* [(1-\alpha_B)(1-\beta_B) + (1-\alpha_B)\beta_B + \alpha_B(1-\beta_B) + \alpha_B\beta_B] \left(e^{-|\alpha|^2} \right) \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!m!}}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Aquí, ${}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m} = \langle n\alpha_A\alpha_B | \rho | \beta_B\beta_A m \rangle$, $\alpha_A, \alpha_B, \beta_B, \beta_A$ son estados de los QDs A y B, y pueden tomar los valores 0 o 1; n, m toma valores desde cero hasta infinito.

El elemento de matriz de la ecuación Máster llega a ser de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d({}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m})}{dt} &= - \left[g_c(n+m) + \frac{g}{2}(\alpha_A + \beta_A + \alpha_B + \beta_B) \right] {}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m} \\
&- \lambda \sqrt{n} (1-\alpha_A) {}_{n-1,1-\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m} - \lambda \sqrt{m} (1-\beta_A) {}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,1-\beta_A,m-1} + \lambda \alpha_A \sqrt{n+1} {}_{n+1,1-\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m} \\
&+ \lambda \beta_A \sqrt{m+1} {}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,1-\beta_A,m+1} + g(1-\alpha_A)(1-\beta_A) {}_{n,1-\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,1-\beta_A,m} - \lambda \sqrt{n} (1-\alpha_B) {}_{n-1,\alpha_A,1-\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m} \\
&- \lambda \sqrt{m} (1-\beta_B) {}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{1-\beta_B,\beta_A,m-1} + \lambda \alpha_B \sqrt{n+1} {}_{n+1,\alpha_A,1-\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m} + \lambda \beta_B \sqrt{m+1} {}_{n,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{1-\beta_B,\beta_A,m+1} \\
&+ g(1-\alpha_B)(1-\beta_B) {}_{n,\alpha_A,1-\alpha_B} \rho_{1-\beta_B,\beta_A,m} + 2g_c \sqrt{(n+1)(m+1)} {}_{n+1,\alpha_A,\alpha_B} \rho_{\beta_B,\beta_A,m+1}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Al desarrollar esta ecuación, se obtuvieron las siguientes oscilaciones de Rabí para el sistema de QDs A y B.

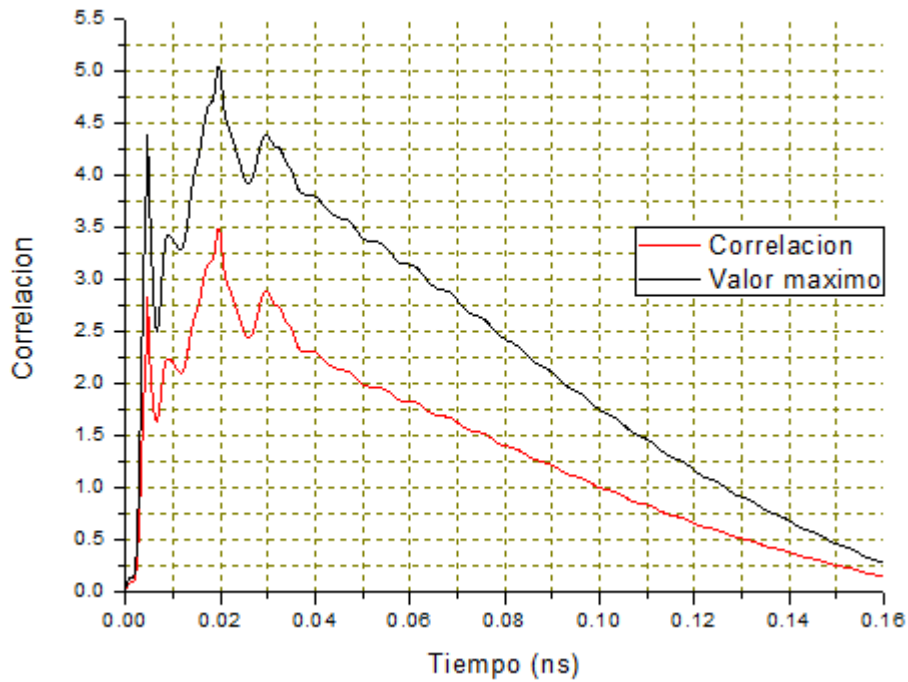


Gráfica 2.1: Oscilaciones de Rabí para dos puntos cuánticos A y B interactuando con una campo coherente. Las líneas negra, roja, azul y verde representan la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado $|0\rangle_A|0\rangle_B$, $|1\rangle_A|1\rangle_B$, $|1\rangle_A|0\rangle_B$, $|0\rangle_A|1\rangle_B$, respectivamente.

Estas dan información de la probabilidad de posibles transiciones o probabilidad de permanencia en un estado en el tiempo. Como se puede ver, todo el sistema comienza en un estado inicial tal como se definió en la ecuación (2.10). La evolución es oscilatoria y amortiguada. La decoherencia provocada por la

interacción del medio con los fotones y los QDs, ocasiona que las oscilaciones sean amortiguadas de tal forma que a partir de 0.013ns empieza a destruirse la coherencia entre estados, haciendo que el sistema finalmente quede en un estado de relajación, la cual es $|0\rangle_A|0\rangle_B$. Estas oscilaciones son muy parecidas a un sistema de dos niveles interactuando con un campo coherente sin disipación [19, 20]; aquí existe una amortiguación adicional del sistema, provocada por la superposición de estados de Fock de número de fotones junto con los QDs, ya que la función de onda para cada superposición, oscila con frecuencias proporcionales a este número. Como el número de fotones es entero, en ciertos tiempos va a ver superposición constructiva, y en otros destructiva. Este amortiguamiento es reversible, pero en la grafica 2.1, no se puede notar este comportamiento porque el amortiguamiento provocado por la decoherencia del sistema, no es reversible [20].

Para ver en qué estado se encuentra el sistema, si hay presencia de entrelazamiento o no, es necesario hacer un análisis de la correlación que existe entre los estados y sobre todo la comprobación de la desigualdad de Rényi para la traza de los operadores densidad al cuadrado dada por la ecuación (1.11). Con la ayuda del software se pudieron sacar los elementos de matriz del operador densidad reducido para los QDs (entre ellos los coeficientes diagonales la cual son las oscilaciones de Rabí presentadas anteriormente). Con la ayuda de un segundo software hecho en mathematica, se diagonalizó la matriz densidad, la cual da información de los valores probabilísticos de los vectores propios mezclados. Con estos se pudo calcular $S(\rho_{A,B})$ (entropía del sistema compuesto por los QDs) dado por (1.4). Con los vectores propios, se pudieron calcular los coeficientes de Schmidt [1] y a la vez $S(\rho_A)$ y $S(\rho_B)$ (entropía del QD A reducido y de B) la cual tienen los mismos valores ya que los coeficientes de Schmidt son iguales para ambos. Ya con estos datos se puede deducir el coeficiente de correlación en el tiempo según (1.6).



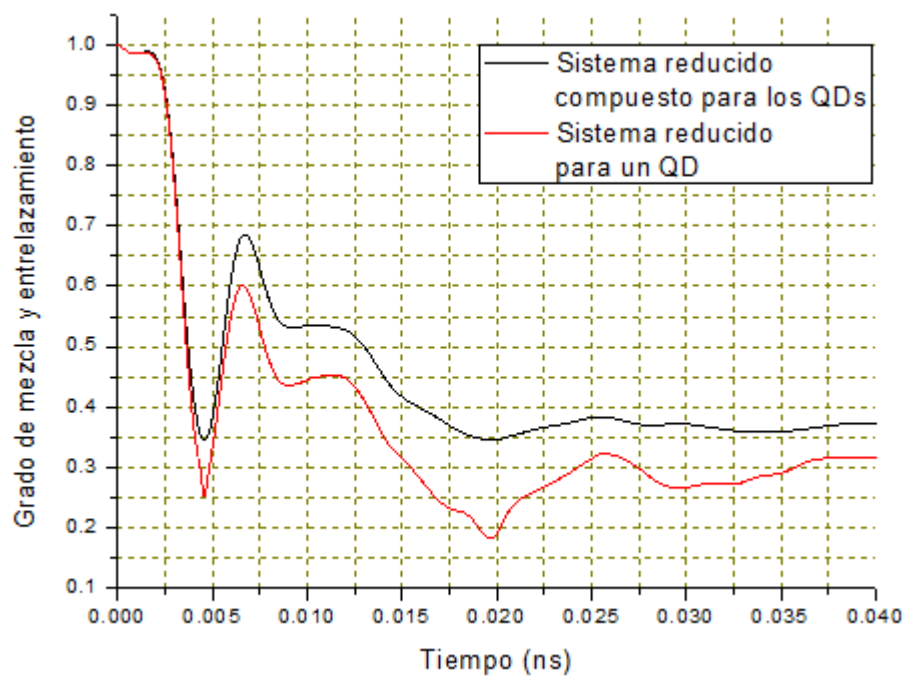
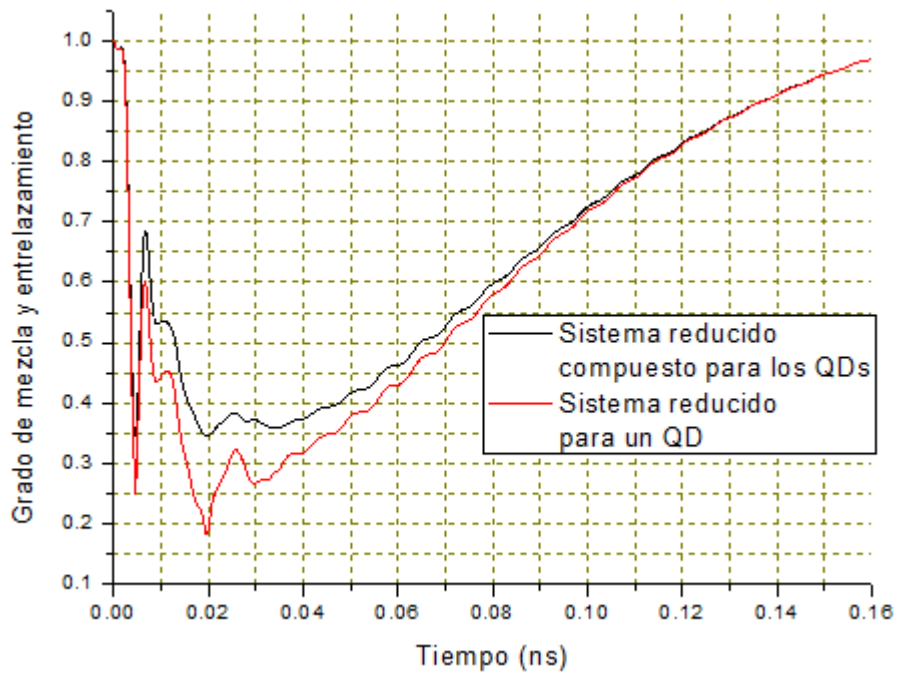
Gráfica 2.2: Correlación del sistema excitónico. La grafica negra corresponde al valor máximo que puede alcanzar la correlación en determinado tiempo $I = 2\min\{S(\rho_A), S(\rho_B)\}$.

Esta grafica presenta la existencia del coeficiente de correlación I . Se ve que en el tiempo inicial I es cero y dado que el estado inicial es puro, la entropía del sistema compuesto por los QDs es cero. Como no hay distinguibilidad en los dos QDs sus entropías son iguales y son cero. El hecho de que estas entropías sean cero, quiere decir que los estados de los subsistemas dados para cada QD son puros, y el estado total es factorizable en cada subsistema. Esto se puede ver claramente en la definición del estado inicial.

Para tiempos grandes, se observa que I tiende a cero lo que nos hace intuir las mismas conclusiones con respecto al estado inicial. Según la grafica de las oscilaciones de Rabí, el estado final tiende a $|0\rangle_A |0\rangle_B$ la cual es puro y factorizable.

Para tiempos intermedios, se aprecia que I es diferente de cero y nunca alcanza su valor máximo la cual lo único que nos dice es que las entropías son diferentes de cero y por lo tanto el sistema está en un estado mezclado al igual que los subsistemas reducidos de los QDs. Aquí yace la incertidumbre si el sistema está en un estado separable (clásicamente correlacionados) o no separable (mezcla de

estados con estados entrelazados). Para saber esto nos remitimos al análisis de la traza del operador densidad al cuadrado dado en por la ecuación 1.11.



Gráfica 2.3: Densidad al cuadrado del sistema compuesto por los QDs (línea negra) y para un QD reducido (línea roja). Valores menores a uno, implica un sistema mezclado. Entre mayor sea la diferencia entre la grafica negra con la roja, mayor grado de entrelazamiento.

Como se puede observar la traza del operador densidad al cuadrado de todo el sistema (o sistema compuesto por los QDs) es siempre mayor que el del sistema reducido de un QD en los intervalos de tiempo de 0.001415ns a 0.12ns con mayor pronunciamiento en 0.0046ns, 0.0066ns y 0.0197ns. Entre más alejado este, mayor es el comportamiento cuántico del sistema, o sea hay más estados entrelazados en la mezcla. Por otra parte, como se explico en la sección (1.1), entre más alejado este la traza del operador densidad al cuadrado del valor 1, mayor es la mezcla y por lo tanto mayor es la entropía tal como se puede evidenciar en los picos de la grafica de correlación; de hecho la grafica (2.3) parece la grafica de correlación invertida. Para los otros tiempos el sistema es separable y por lo tanto no hay entrelazamiento según la desigualdad (1.11).

En aplicaciones desde el punto de vista de la información cuántica y de obtención de entrelazamiento, este sistema puede ser un candidato ya que la existencia del entrelazamiento es hasta 0.12ns, y el tiempo promedio de operación en cómputo cuántico es de por lo menos 0.04ns [23], pero la destrucción del sistema empieza en 0.013ns lo que lo puede ser poco favorable en este tipo de aplicaciones.

CAPITULO 3: EXCITONES DE QDs EN CAMPO VACÍO

3.1. EN UN MEDIO DISIPATIVO

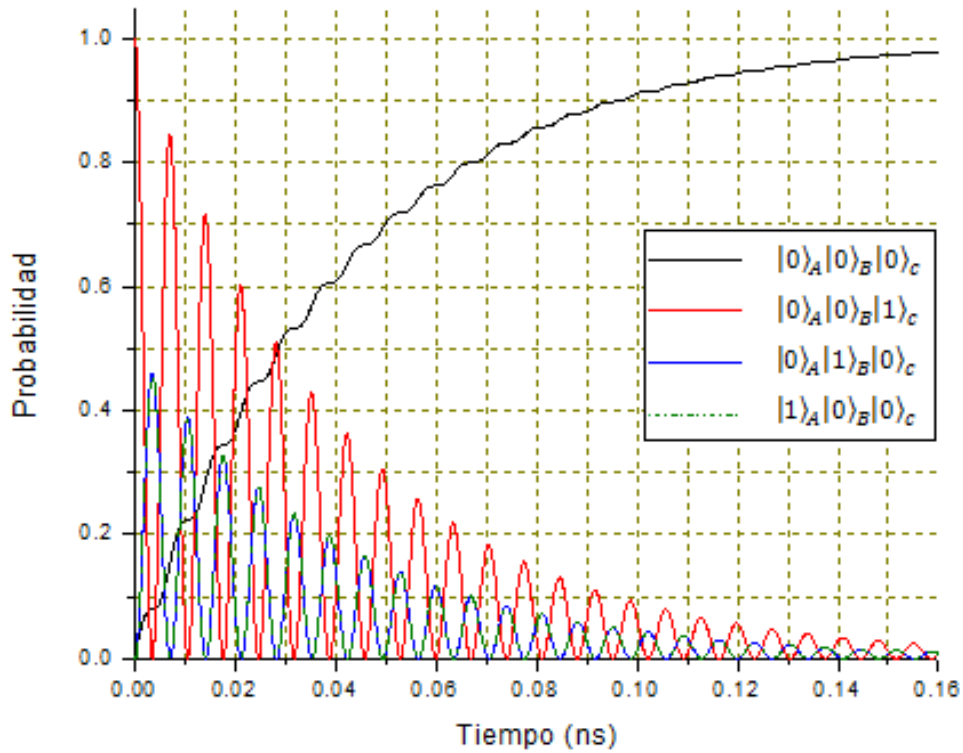
Aquí se va a considerar un solo fotón dentro de la cavidad, se escogerá que para $t=0$, los estados de los QDs están en el estado base, de tal forma que el estado inicial de todo el sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \otimes |1\rangle_c = |001\rangle \quad (3.1)$$

Donde $|0\rangle_A$ es el estado no excitado del QD A, $|0\rangle_B$ es el estado no excitado de B, $|1\rangle_c$ es el estado de Fock que representa la presencia de un fotón. El elemento de matriz densidad es:

$$\rho_{\beta_B, \beta_A, m}^{n, \alpha_A, \alpha_B}(0) = (1 - \alpha_A)(1 - \beta_A)(1 - \alpha_B)(1 - \beta_B)n^*m \quad (3.2)$$

La ecuación Máster se desarrolla numéricamente de igual forma a la sección anterior dada la ecuación (2.11), solo que cambian las condiciones iniciales. Aquí se escoge una cavidad con QDs como en el capítulo anterior, solo que n y m toman valores de cero o uno. Esto produce las siguientes oscilaciones de Rabí.



Gráfica 3.1: Oscilaciones de Rabi para dos puntos cuánticos A y B interactuando con campo vacío. Las líneas, roja, azul y verde representan la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado $|0\rangle_A|0\rangle_B$, $|1\rangle_A|0\rangle_B$, $|0\rangle_A|1\rangle_B$, con ningún fotón dentro de la cavidad $|0\rangle_c$ respectivamente, y la línea negra representa el estado $|0\rangle_A|0\rangle_B$ con un fotón dentro la cavidad $|1\rangle_c$.

Todo el sistema comienza en un estado inicial tal como se definió en (3.2). La evolución es oscilatoria y amortiguada debido a la decoherencia del sistema. A partir de 0.0286ns empieza a destruirse la coherencia ya que para este tiempo el estado $|0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_c$ prevalece del resto de estados. Al calcular la matriz densidad de todo el sistema (incluyendo los estados de Fock), es de esperar que sea una matriz cuadrada de $8*8$ ya que hay posibilidad de ocho estados diferentes (estados de los QDs y Fock, con dos grados de libertad cada uno, cero o uno). La matriz densidad es:

	$\langle 0 _A \langle 0 _B \langle 0 _c$	$\langle 0 _A \langle 0 _B \langle 1 _c$	$\langle 0 _A \langle 1 _B \langle 0 _c$	$\langle 0 _A \langle 1 _B \langle 1 _c$	$\langle 1 _A \langle 0 _B \langle 0 _c$	$\langle 1 _A \langle 0 _B \langle 1 _c$	$\langle 1 _A \langle 1 _B \langle 0 _c$	$\langle 1 _A \langle 1 _B \langle 1 _c$
$ 0\rangle_A 0\rangle_B 0\rangle_c$	$a(t)$	0	0	0	0	0	0	0
$ 0\rangle_A 0\rangle_B 1\rangle_c$	0	$b(t)$	$d(t)$	0	$d(t)$	0	0	0
$ 0\rangle_A 1\rangle_B 0\rangle_c$	0	$d(t)$	$c(t)$	0	$c(t)$	0	0	0
$ 0\rangle_A 1\rangle_B 1\rangle_c$	0	0	0	0	0	0	0	0
$ 1\rangle_A 0\rangle_B 0\rangle_c$	0	$d(t)$	$c(t)$	0	$c(t)$	0	0	0
$ 1\rangle_A 0\rangle_B 1\rangle_c$	0	0	0	0	0	0	0	0
$ 1\rangle_A 1\rangle_B 0\rangle_c$	0	0	0	0	0	0	0	0
$ 1\rangle_A 1\rangle_B 1\rangle_c$	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3.1: matriz densidad de todos los grados de libertad de los QDs y el fotón en la cavidad.

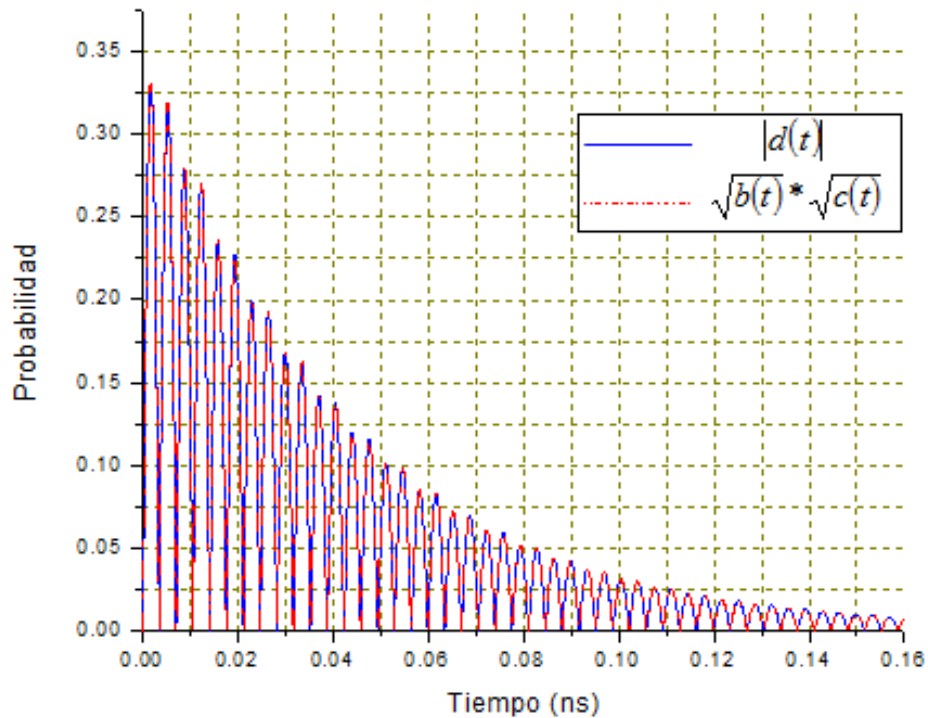
Según la tabla 3.1, hay cuatro estados de la diagonal que tienen probabilidad cero, la cual es lógico que suceda ya que estos estados nunca pueden darse. La razón es porque en la mayoría de ellos hay presencia de por lo menos un excitón en un QD con un fotón en la cavidad, y esto es solo posible si inicialmente hubieran dos fotones en la cavidad. Partiendo del estado inicial se concluye que la existencia de un excitón implica que no haya fotones en la cavidad, y la existencia de un fotón implica que no haya excitones en ninguno de los QDs. Con esto la matriz densidad se reduce a:

	$\langle 0 _A \langle 0 _B \langle 0 _c$	$\langle 0 _A \langle 0 _B \langle 1 _c$	$\langle 0 _A \langle 1 _B \langle 0 _c$	$\langle 1 _A \langle 0 _B \langle 0 _c$
$ 0\rangle_A 0\rangle_B 0\rangle_c$	$a(t)$	0	0	0
$ 0\rangle_A 0\rangle_B 1\rangle_c$	0	$b(t)$	$d(t)$	$d(t)$
$ 0\rangle_A 1\rangle_B 0\rangle_c$	0	$d(t)$	$c(t)$	$c(t)$
$ 1\rangle_A 0\rangle_B 0\rangle_c$	0	$d(t)$	$c(t)$	$c(t)$

Tabla 3.2: matriz densidad de los QDs y el fotón en la cavidad.

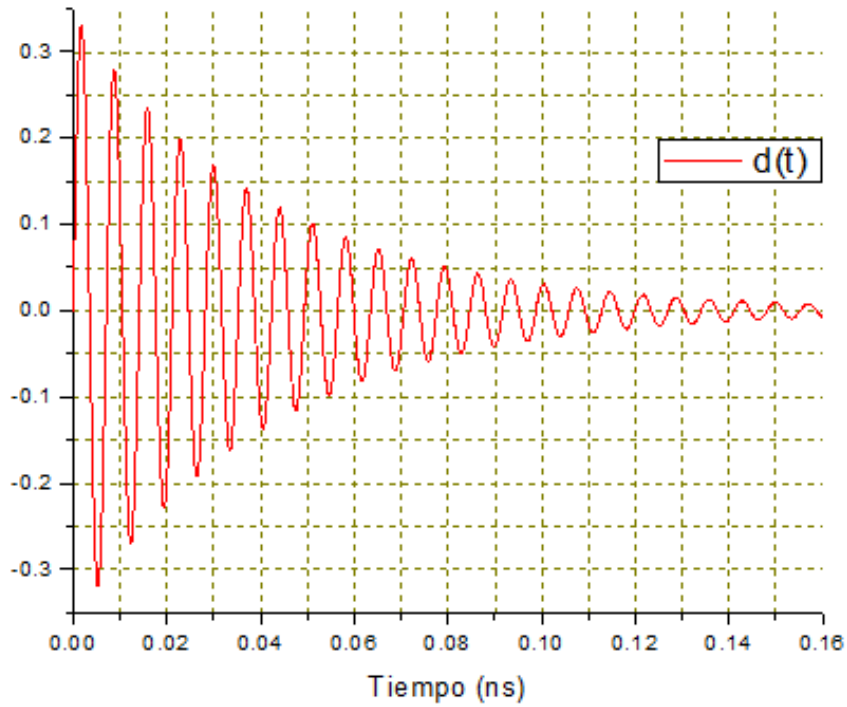
Los estados coherentes (coeficientes no diagonales) de la matriz densidad con el estado $|0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_c$ son cero, la cual quiere decir que no hay interferencia de este estado con los otros y por tal motivo no está superpuesto con estos. Esto hace concluir que el estado $|0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_c$ está mezclado con los otros.

Cálculos computacionales arrojaron la siguiente relación: $d(t) = \pm \sqrt{b(t)} * \sqrt{c(t)}$, ya que la siguiente grafica da una superposición entre graficas de $|d(t)|$ y $\sqrt{b(t)} * \sqrt{c(t)}$.



Grafica 3.2: comparación entre los coeficientes $|d(t)|$ y $\sqrt{b(t)} * \sqrt{c(t)}$

Esto da garantía de que solo existe un estado en la superposición de los estados $|0\rangle_A |0\rangle_B |1\rangle_c, |0\rangle_A |1\rangle_B |0\rangle_c, |1\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_c$ (superposición dado que los elementos de matriz son diferentes de cero), y no mezcla de estados con esta cierta superposición, según la sección (1.1). Para ver en qué tiempos $d(t)$ toma signo negativo, se reprodujo la grafica de este.



Grafica 3.3: estado coherente de la matriz densidad, $d(t)$ en el tiempo.

Según este resultado, $d(t)$ cambia de signo después de un intervalo de tiempo dado por la mitad del periodo.

Finalmente los estados mezclados son los vectores propios del operador densidad, dados por:

$$|\phi_1\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_c \quad (3.3)$$

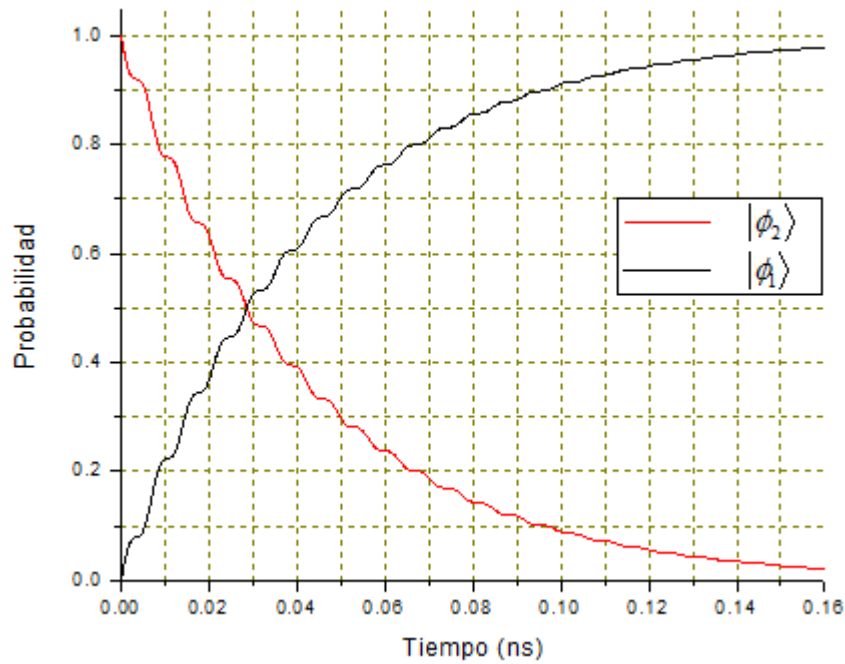
$$|\phi_2\rangle = \frac{\pm \sqrt{b(t)} |0\rangle_A |0\rangle_B |1\rangle_c + \sqrt{c(t)} (|0\rangle_A |1\rangle_B |0\rangle_c + |1\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_c)}{\sqrt{b(t) + 2c(t)}} \quad (3.4)$$

Donde $|\phi_1\rangle$ aparece explícitamente por la decoherencia del sistema. Aquí el signo del primer coeficiente depende de la grafica (3.3). Cada vector propio tiene una probabilidad de suceder según los valores propios del operador densidad. Estos valores propios están dados por los siguientes coeficientes diagonales:

	$\langle \phi_1 $	$\langle \phi_2 $
$ \phi_1\rangle$	$a(t)$	0
$ \phi_2\rangle$	0	$b(t)+2c(t)$

Tabla 3.3: coeficientes de probabilidad para los vectores propios mezclados del operador densidad.

La cual su evolución obedece a la siguiente grafica:

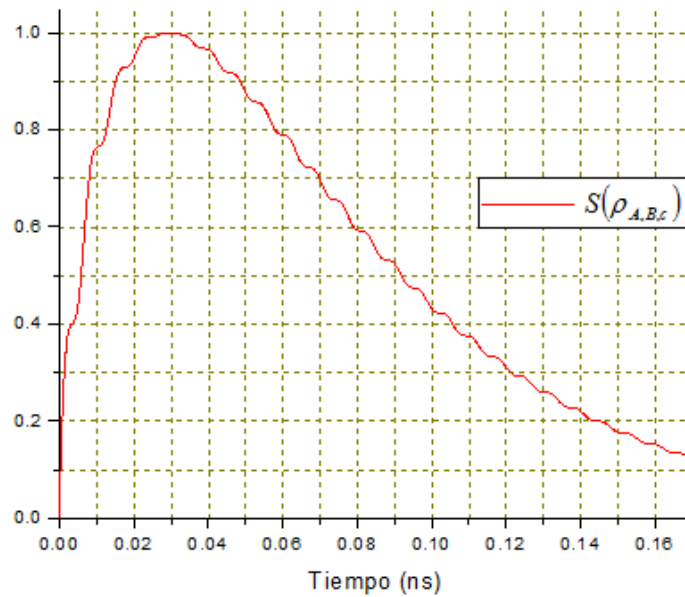


Grafica 3.4: Evolución probabilística de los coeficientes de los vectores propios del operador densidad.

Aquí el estado de relajación toma valores más altos para un tiempo mayor a los $0.0286ns$. De lo anterior, la entropía del sistema es:

$$S(\rho_{A,B,C}) = -(a(t)\ln[a(t)] + (b(t)+2c(t))\ln[b(t)+2c(t)]) / \ln[2] \quad (3.5)$$

Que gráficamente es:



Gráfica 3.5: entropía del sistema completo.

Aquí se puede ver que en 0.0286ns hay un máximo en la entropía (mayor desorden) la cual coincide con el tiempo en que empieza a destruirse el estado $|\phi_2\rangle$. Esto implica que para este tiempo $a(0.0286) = b(0.0286) + 2c(0.0286) = 0.5$ tal como se ve en la gráfica (3.4). Esto se interpreta, que para tiempos menores y mayores a este, el sistema se encontrara en un estado más puro. De hecho para tiempos menores, prevalece el estado puro $|\phi_2\rangle$, y para tiempos mayores el estado puro $|\phi_1\rangle$ como era de esperarse.

La razón de que el sistema total se encuentre, para tiempos intermedios, en una mezcla de estados, es porque este sistema esta interaccionando con un gran ensamble que es el medio en que se encuentra, dando surgimiento al estado de relajación $|\phi_1\rangle$. Dada esta interacción, el sistema está constantemente cambiando. Para entender mejor esto, considere el universo que es un sistema aislado. Su entropía es cero ya que no puede haber más de un universo posible (en el sentido clásico) o algún agente externo que lo haga cambiar de estado. Mientras que si se escoge una pequeña parte de este universo, la entropía de esta parte es diferente de cero, ya que esta interaccionando con otras partes del universo. Cabe resaltar que un sistema (gas, líquido o sólido) a temperatura cero tiene una entropía nula ya que no

hay agentes externos (fotones, fonones, choques, etc) que cambien su energía cinética y por ende su temperatura y entropía. Así, el sistema que nos compete incluyendo el ensamble, se encuentra en un estado puro con entropía cero, mientras que al considerar un subsistema como el desarrollado anteriormente (cavidad y QDs), tiene una entropía diferente de cero por estar interaccionando con el ensamble.

Definiendo los siguientes vectores:

$$|\Phi_1\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B \quad (3.6)$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) \quad (3.7)$$

donde $|\Phi_2\rangle$ coincide con el estado de Bell (estado máximamente entrelazado) según el apéndice B. Se puede reescribir las ecuaciones 3.3 y 3.4 en términos de una descomposición de Schmidt:

$$|\phi_1\rangle = |\Phi_1\rangle |0\rangle_c \quad (3.8)$$

$$|\phi_2\rangle = \frac{\pm \sqrt{b(t)} |\Phi_1\rangle |1\rangle_c + \sqrt{2c(t)} |\Phi_2\rangle |0\rangle_c}{\sqrt{b(t) + 2c(t)}} \quad (3.9)$$

Se puede notar que el estado $|\phi_2\rangle$ presenta entrelazamiento entre el sistema de QDs y el fotón de la cavidad, ya que la medida de uno en común afecta al otro; por ejemplo, el hecho de que al realizar una medida en el fotón y aparezca el estado $|1\rangle_c$ implica 100% de encontrar el sistema de QDs en el estado $|0\rangle_A |0\rangle_B$, y si el estado de fotón es $|0\rangle_c$, se tendrá 100% de seguridad que el estado de QDs es el estado de Bell dado por $|\Phi_2\rangle$, esto garantiza que el estado $|\phi_2\rangle$ sea no factorizable, claro, para tiempos donde $b(t)$ y $c(t)$ sean diferentes de cero. El operador densidad reducido del sistema compuesto de los QDs, diferentes de cero (sin consideración de fotones), es el valor propio de $|\phi_1\rangle$ multiplicado por la traza de este mismo en los estados Fock

para el fotón, sumado con el valor propio de $|\phi_2\rangle$ multiplicado por la traza de este mismo en los estados de Fock, tal como sigue.

$$\hat{\rho}_{A,B} = a(t)_c \langle 0|\phi_1\rangle\langle\phi_1|0\rangle_c + (b(t) + 2c(t)) \left[{}_c\langle 0|\phi_2\rangle\langle\phi_2|0\rangle_c + {}_c\langle 1|\phi_2\rangle\langle\phi_2|1\rangle_c \right] \quad (3.10)$$

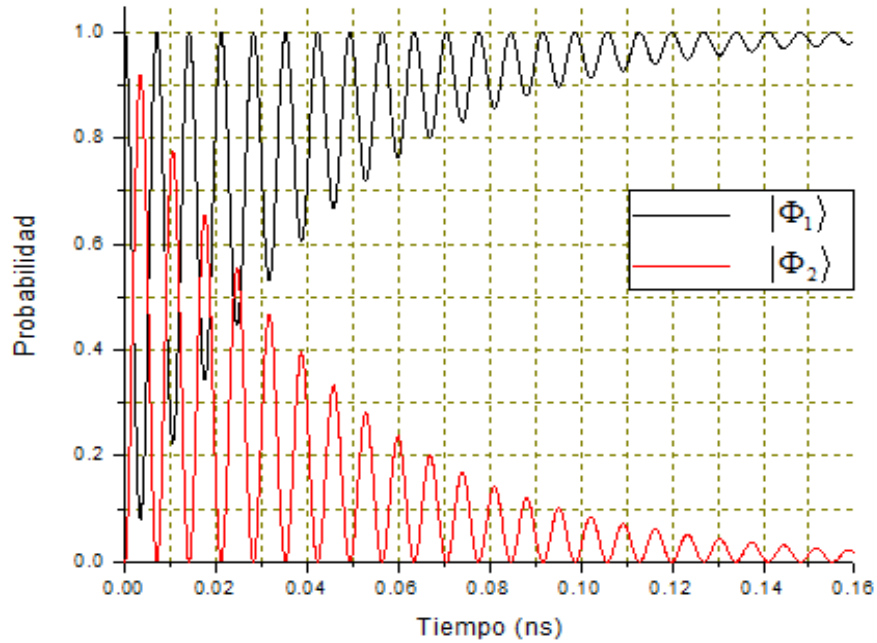
$$\hat{\rho}_{A,B} = (a(t) + b(t)) |\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| + 2c(t) |\Phi_2\rangle\langle\Phi_2| \quad (3.11)$$

En forma matricial, $\rho_{A,B}$ es:

	$\langle\Phi_1 $	$\langle\Phi_2 $
$ \Phi_1\rangle$	$a(t) + b(t)$	0
$ \Phi_2\rangle$	0	$2c(t)$

Tabla 3.4: coeficientes de probabilidad para los vectores propios mezclados del operador densidad reducido y compuesto de los QDs.

La cual cumplen con la siguiente evolución temporal:



Gráfica 3.6: evolución probabilística de los coeficientes de los vectores propios del operador densidad reducido y compuesto de los QDs.

Según la tabla 3.4, hay dos estados mezclados en los estados excitónico. El estado base que es $|\Phi_1\rangle$, y el estado máximamente entrelazado $|\Phi_2\rangle$. Con esto, definitivamente se concluye que los estados excitónico son mezclados y no son separables. Para ver mejor esto, se reproduce la grafica de densidad al cuadrado con el objetivo de analizar la desigualdad (1.11) o la verificación de la entropía de Rényi:

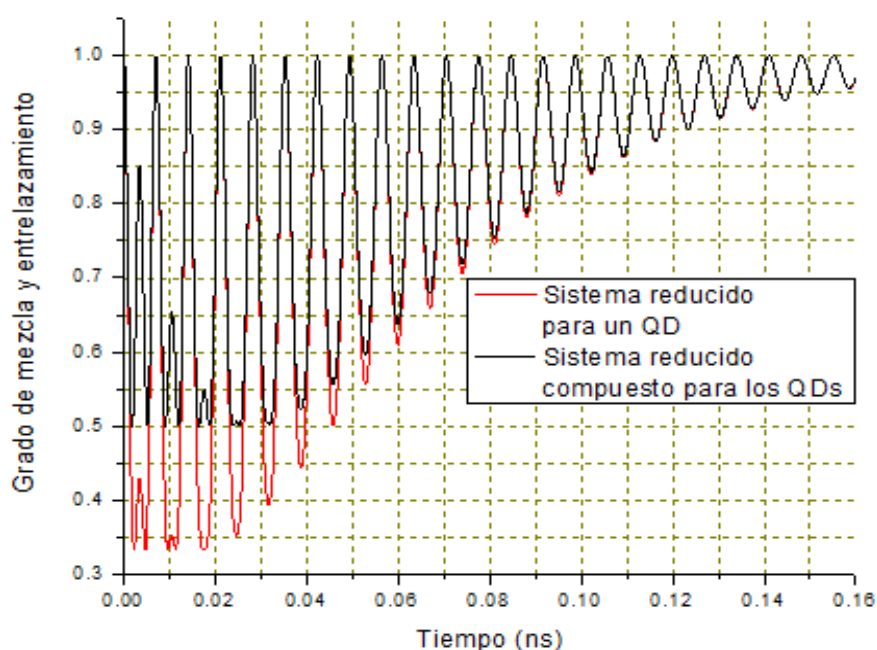


Figura 3.7: Densidad al cuadrado del sistema compuesto por los QDs (línea negra) y para un QD reducido (línea roja). Valores menores a uno, implica un sistema mezclado. Entre mayor sea la diferencia entre la grafica negra con la roja, mayor grado de entrelazamiento.

Aquí se puede apreciar que la mayor violación de la desigualdad (1.11), ocurre para tiempos donde el estado de Bell prevalece. Solo el hecho de que el estado máximamente entrelazado exista, hace que el estado total excitónico sea no separable. Para los tiempos donde las graficas se superponen, el sistema no se encuentra entrelazado; además si el valor es diferente de uno, los estados son separables y para el caso especial donde es igual a uno, el estado es factorizable, la cual le corresponde al estado puro $|\Phi_1\rangle$.

El solo hecho que exista mezcla de estados, y uno de esos estados mezcla, es el estado de Bell, hace que el sistema se encuentre entrelazado; pero para aplicaciones,

esto no es del todo suficiente ya que el tiempo de destrucción de los estados predomina a partir de $0.0286ns$, en comparación al tiempo de operación en computo cuántico que es alrededor de $0.04ns$.

Con la tabla 3.3 se puede calcular $S(\rho_{A,B})$, y calculando los coeficientes de Schmidt para ρ_A y ρ_B , se reprodujo las cantidades $S(\rho_A)$ y $S(\rho_B)$. Ya con esto el coeficiente de correlación en el tiempo es:

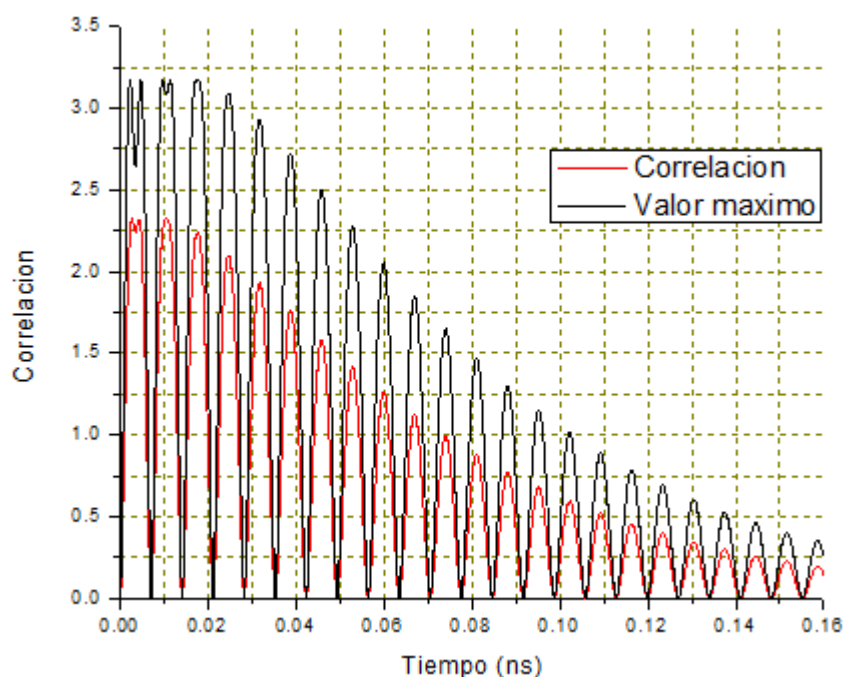


Figura 3.8: Correlación del sistema excitónico. La grafica negra corresponde al valor máximo que puede alcanzar la correlación en determinado tiempo $I_{max} = 2min\{S(\rho_A), S(\rho_B)\}$.

Aquí, los picos que más se acercan al valor máximo, están dados en los tiempos en que mayoritariamente subsiste el estado de Bell. La correlación nunca alcanza su valor máximo ya que la probabilidad de que suceda $|\Phi_1\rangle$ nunca es cero para estos tiempos. Finalmente, haciendo un seguimiento de las graficas (3.6-3.8), para grandes tiempos, el estado excitónico queda en el estado factorizable $|\Phi_1\rangle$ que es $|0\rangle_A|0\rangle_B$, cero excitones.

3.2. EN MEDIOS NO DISIPATIVOS

En este t3pico se procede a desarrollar la ecuaci3n de evoluci3n normal del operador densidad sin t3rminos disipativos o la misma ecuaci3n 2.2 pero sin los operadores de disipaci3n. No teniendo en cuenta estos t3rminos, y usando la misma notaci3n como en la tabla 3.2, las ecuaciones diferenciales a resolver son las siguientes:

$$\frac{d(a(t))}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{d(b(t))}{dt} = -4\lambda d(t) \quad (3.11)$$

$$\frac{d(c(t))}{dt} = 2\lambda d(t) \quad (3.12)$$

$$\frac{d(d(t))}{dt} = \lambda(b(t) - 2c(t)) \quad (3.13)$$

Derivando (3.11) y (3.12) con respecto al tiempo y reemplazando en estas ecuaciones $\frac{d(a(t))}{dt}$ por la ecuaci3n (3.13) se tiene:

$$\ddot{b}(t) = -4\lambda \dot{d}(t) = -4\lambda(b(t) - 2c(t)) \quad (3.14)$$

$$\ddot{c}(t) = 2\lambda \dot{d}(t) = 2\lambda(b(t) - 2c(t)). \quad (3.15)$$

Aqu3 los puntos superiores significan el orden de la derivada con respecto al tiempo. Multiplicando la ecuaci3n (3.15) por 2 y rest3ndola con (3.14), da:

$$\frac{d^2(b(t) - 2c(t))}{d(t)^2} = -8\lambda(b(t) - 2c(t)) \quad (3.16)$$

Esta es la ecuaci3n diferencial de un oscilador arm3nico simple. La soluci3n m3s conveniente para nuestro caso es:

$$b(t) - 2c(t) = \cos(2\sqrt{2}\lambda t) \quad (3.17)$$

Ya que la única descomposición que tiene $\cos(2\sqrt{2}\lambda t)$ es $\cos^2(\sqrt{2}\lambda t) - \sin^2(\sqrt{2}\lambda t)$. La solución para $b(t)$ y $c(t)$ es:

$$b(t) = \cos^2(\sqrt{2}\lambda t) \quad (3.18)$$

$$c(t) = \frac{1}{2} \sin^2(\sqrt{2}\lambda t) \quad (3.19)$$

Al solucionar las ecuaciones (3.10) y (3.13)

$$a(t) = \text{constante} \quad (3.20)$$

$$d(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\lambda t) \cos(\sqrt{2}\lambda t) \quad (3.21)$$

Aquí $d(t)$ concuerda con $\sqrt{b(t)c(t)}$. La traza de la matriz densidad debe ser igual a la unidad, entonces:

$$a(t) + b(t) + 2c(t) = 1 \quad (3.22)$$

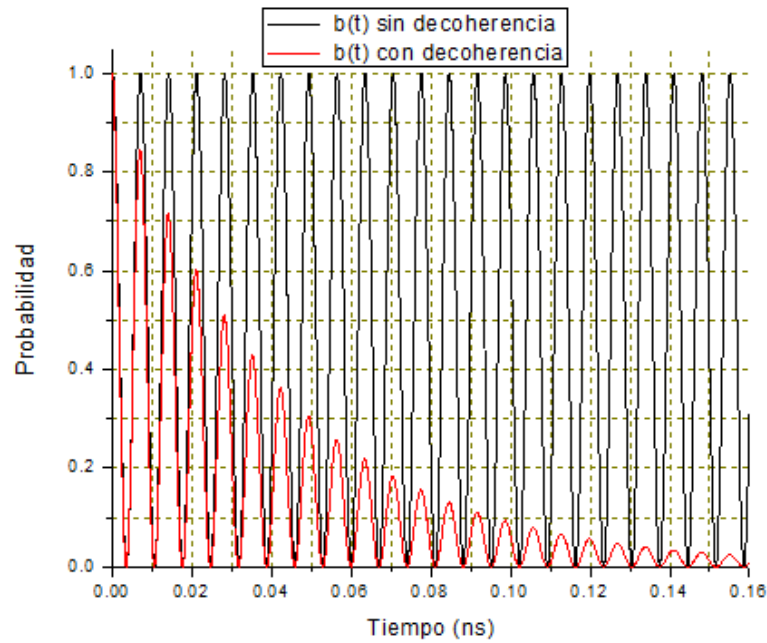
Y reemplazando:

$$\text{constante} + \cos^2(\sqrt{2}\lambda t) + \sin^2(\sqrt{2}\lambda t) = \text{constante} + 1 = 1 \quad (3.23)$$

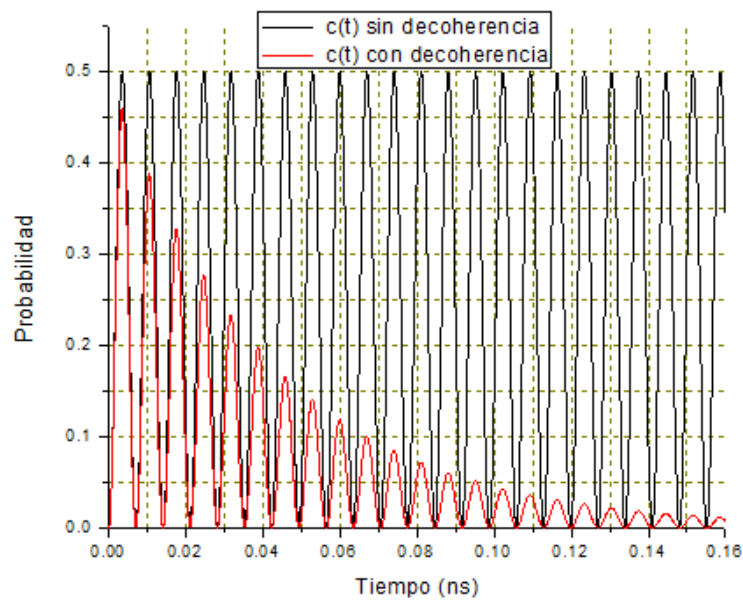
Entonces $\text{constante} = 0$ y por ende $a(t)$ es igual a cero. Esto era de esperarse ya que no hay un medio disipativo, y por lo tanto un estado que surja como consecuencia de la interacción con este medio.

Como fácilmente se puede ver las soluciones para los elementos de matriz, cumplen con las condiciones iniciales del sistema, y cualquier otra solución no cumpliría con estas condiciones.

A continuación se presenta una comparación en las oscilaciones de Rabí del sistema con decoherencia y sin decoherencia.



Grafica 3.9: comparación de las oscilaciones del coeficiente diagonal $b(t)$ con decoherencia y sin decoherencia.



Grafica 3.10: comparación de las oscilaciones del coeficiente diagonal $c(t)$ con decoherencia y sin decoherencia.

Las oscilaciones de Rabí oscilan indefinidamente sin atenuarse en el sistema sin decoherencia. Por otra parte se ha verificado que el método numérico utilizado es

bastante aproximado, ya que la frecuencia de oscilación es casi la misma para ambos sistemas. En este caso el sistema oscila con una frecuencia de $\sqrt{2}\lambda$ tal que esta frecuencia se le llama frecuencia de Rabí.

Sin embargo el tratamiento mecánico-cuántico para obtener la matriz reducida para los QDs es el mismo que en apartado anterior, solo que se toma $\alpha(t)$ igual a cero. Así para todo el sistema se tiene la siguiente matriz densidad:

	$\langle 0 _a \langle 0 _b \langle 1 _c$	$\langle 0 _a \langle 1 _b \langle 0 _c$	$\langle 1 _a \langle 0 _b \langle 0 _c$
$ 0\rangle_a 0\rangle_b 1\rangle_c$	$b(t)$	$d(t)$	$d(t)$
$ 0\rangle_a 1\rangle_b 0\rangle_c$	$d(t)$	$c(t)$	$c(t)$
$ 1\rangle_a 0\rangle_b 0\rangle_c$	$d(t)$	$c(t)$	$c(t)$

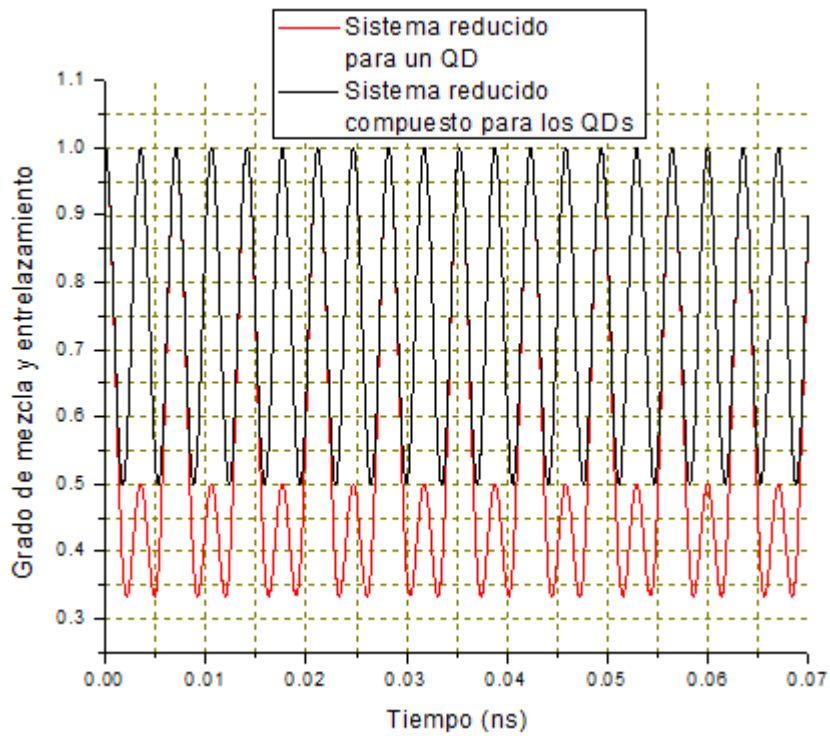
Tabla 3.5: coeficientes del operador densidad sin decoherencia.

Y para la matriz densidad reducida de los QDs se tiene:

	$\langle \Phi_1 $	$\langle \Phi_2 $
$ \Phi_1\rangle$	$b(t)$	0
$ \Phi_2\rangle$	0	$2c(t)$

Tabla 3.6: coeficientes de probabilidad para los vectores propios mezclados del operador densidad reducido compuesto por los QDs sin decoherencia.

Ya que el estado no es puro para los QDs según la tabla 3.6, se tiene que analizar la dinámica de entrelazamiento con la entropía de Rényi o lo que es equivalente la desigualdad de matrices cuadráticas del operador densidad (1.11), tal como sigue:



Gráfica 3.11: Densidad al cuadrado del sistema compuesto por los QDs (línea negra) y para un QD reducido (línea roja). Valores menores a uno, implica un sistema mezclado. Entre mayor sea la diferencia entre la grafica negra con la roja, mayor grado de entrelazamiento.

Al comparar los tiempos de los picos negros con la grafica 3.10, se ve que estos coinciden con los tiempos de la mayor probabilidad de los estados máximamente entrelazados de Bell, y además de ello tienen el valor de uno, lo cual significa que el sistema se encuentra en un estado puro. De hecho la garantía de que sea máximamente entrelazado yace en que para estos tiempos se viola máximamente la desigualdad (1.11), tal como se ve en la grafica. Para otros tiempos diferentes al mencionado, el sistema se encuentra mezclado y no separable justo donde las graficas no se superponen. Es importante destacar que los tiempos en la cual existe el estado de Bell como un estado puro, es un número semi-entero por π sobre la frecuencia de Rabí.

CAPITULO 4: ESPIN ELECTRONICO DE QDs EN CAMPO VACIO

4.1. EN UN MEDIO DISIPATIVO

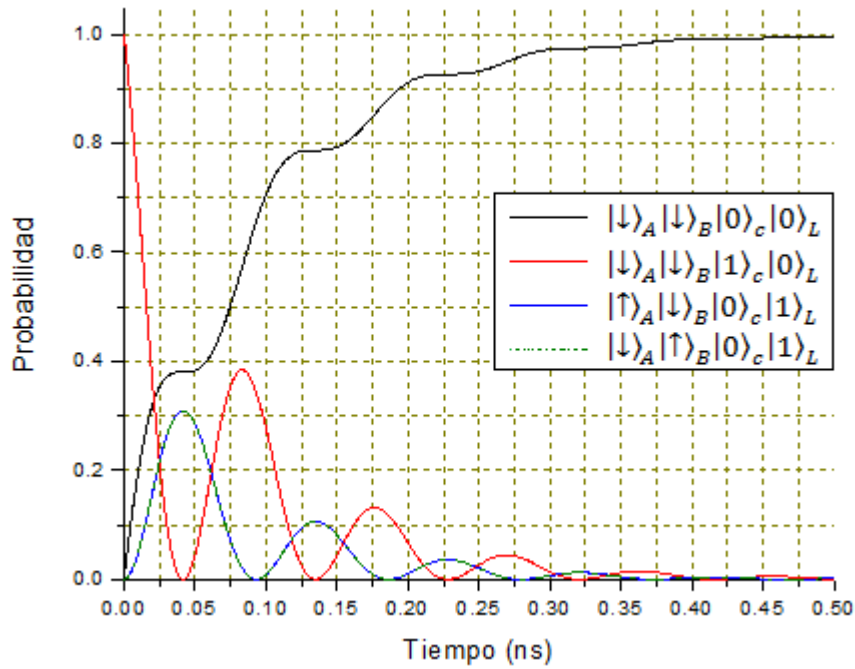
Para analizar la dinámica del sistema con un fotón dentro de la cavidad y los espines, se introduce el hamiltoniano (1.17) en la ecuación Máster (2.2), la cual brinda la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\rho_{n_1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1})}{dt} = & - \left[g_c (n_1 + m_1) + \frac{g_{qd}}{2} (\alpha_A + \beta_A + \alpha_B + \beta_B) \right] \rho_{n_1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1} \\
 & - \lambda_{eff} \sqrt{n_1} (1 - \alpha_A) \sqrt{n_2 + 1} \rho_{n_1-1, n_2+1, 1-\alpha_A, \alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1} - \lambda_{eff} \sqrt{m_1} (1 - \beta_A) \sqrt{m_2 + 1} \rho_{n_1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, 1-\beta_A, m_2+1, m_1} \\
 & + \lambda_{eff} \alpha_A \sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2} \rho_{n_1+1, n_2-1, 1-\alpha_A, \alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1} + \lambda_{eff} \beta_A \sqrt{m_1 + 1} \sqrt{m_2} \rho_{n_1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, 1-\beta_A, m_2-1, m_1+1} \\
 & + g_{qd} (1 - \alpha_A) (1 - \beta_A) \rho_{n_1, n_2, 1-\alpha_A, \alpha_B, \beta_B, 1-\beta_A, m_2, m_1} - \lambda_{eff} \sqrt{n_1} (1 - \alpha_B) \sqrt{n_2 + 1} \rho_{n_1-1, n_2+1, \alpha_A, 1-\alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1} \\
 & - \lambda_{eff} \sqrt{m_1} (1 - \beta_B) \sqrt{m_2 + 1} \rho_{n_1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, 1-\beta_B, \beta_A, m_2+1, m_1-1} + \lambda_{eff} \alpha_B \sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2} \rho_{n_1+1, n_2-1, \alpha_A, 1-\alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1} \\
 & + \lambda_{eff} \beta_B \sqrt{m_1 + 1} \sqrt{m_2} \rho_{n_1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, 1-\beta_B, \beta_A, m_2-1, m_1+1} + g_{qd} (1 - \alpha_B) (1 - \beta_B) \rho_{n_1, n_2, \alpha_A, 1-\alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1} \\
 & + g_c \sqrt{(n_1 + 1)(m_1 + 1)} \rho_{n_1+1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_2, m_1+1}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aquí $\alpha_A, \beta_A, \alpha_B, \beta_B, n_1$ y m_1 son como en los capítulos 2 y 3, n_2 y m_2 son los grados de libertad del elemento de matriz del fotón extra y toma valores de 0 o 1. Teniendo en cuenta los parámetros de la tabla 1.4, se procedió a desarrollar la ecuación Máster (4.1) por métodos computacionales donde el estado inicial esta dado por:

$$\rho_{n_1, n_2, \alpha_A, \alpha_B, \beta_B, \beta_A, m_1, m_2}(0) = (1 - \alpha_A) (1 - \beta_A) (1 - \alpha_B) (1 - \beta_B) n_1 * m_1 * (1 - n_2) (1 - m_2) \tag{4.2}$$

Esto produjo las siguientes oscilaciones de Rabí.



Gráfica 4.1: Oscilaciones de Rabí para dos puntos cuánticos A y B interactuando con campo vacío. Las líneas, negra, azul y verde representan la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado $|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$, $|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$, $|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$, con ningún fotón dentro de la cavidad $|0\rangle_c$, cero campo externo $|0\rangle_L$ para la línea negra y un fotón externo $|1\rangle_L$ para las otras, respectivamente. La línea roja representa la probabilidad del estado $|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$, con un fotón dentro la cavidad $|1\rangle_c$ y campo externo cero $|0\rangle_L$.

Estas oscilaciones son muy parecidas al sistema excitónico de la sección anterior, solo que aquí los tiempos de coherencia son más altos. Según la grafica (4.1), el estado de relajación toma valores dominantes a partir de $0.0210ns$, sin embargo taca saber los estados reales del sistema para poder concluir definitivamente en que tiempo se empieza a destruir los estados.

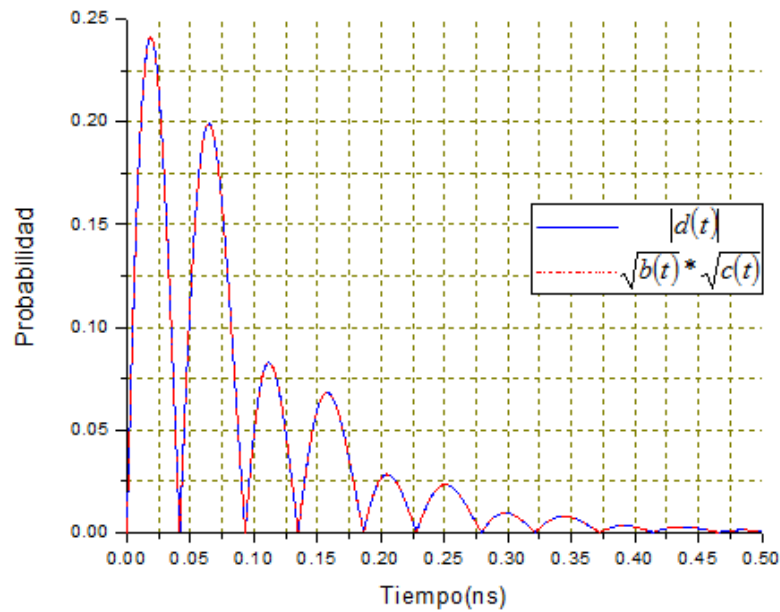
La matriz densidad de todo el sistema está dada de la siguiente forma:

	$\langle\downarrow _A\langle\downarrow _B\langle 0 _c\langle 0 _L$	$\langle\downarrow _A\langle\downarrow _B\langle 1 _c\langle 0 _L$	$\langle\uparrow _A\langle\downarrow _B\langle 0 _c\langle 1 _L$	$\langle\downarrow _A\langle\uparrow _B\langle 0 _c\langle 1 _L$
$ \downarrow\rangle_A \downarrow\rangle_B 0\rangle_c 0\rangle_L$	$a(t)$	0	0	0
$ \downarrow\rangle_A \downarrow\rangle_B 1\rangle_c 0\rangle_L$	0	$b(t)$	$d(t)$	$d(t)$
$ \uparrow\rangle_A \downarrow\rangle_B 0\rangle_c 1\rangle_L$	0	$d(t)$	$c(t)$	$c(t)$
$ \downarrow\rangle_A \uparrow\rangle_B 0\rangle_c 1\rangle_L$	0	$d(t)$	$c(t)$	$c(t)$

Tabla 4.1: matriz densidad de los espines de los QDs y el fotón en la cavidad.

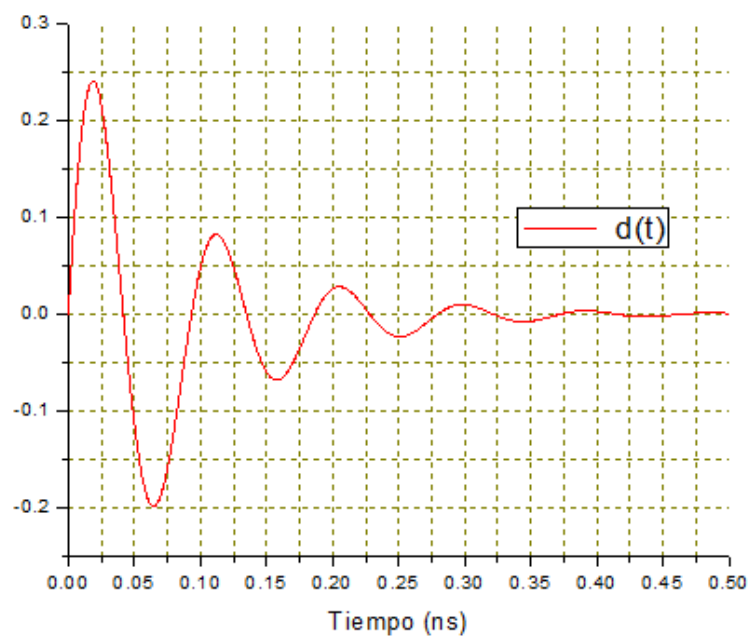
Esta tabla es similar a la tabla (3.2) y por lo tanto se puede concluir de igual forma como en el sistema excitónico del capítulo 3. Incluso se cumple la relación

$d(t) = \pm \sqrt{b(t)} * \sqrt{c(t)}$ tal como lo muestra la siguiente grafica:



Grafica 4.2: comparación entre los coeficientes $|d(t)|$ y $\sqrt{b(t)} * \sqrt{c(t)}$

$d(t)$ cambia de signo cada mitad de periodo como se muestra a continuación



Grafica 4.3: estado coherente de la matriz densidad, $d(t)$ en el tiempo.

Finalmente los estados mezclados son los vectores propios del operador densidad, de igual forma que en las ecuaciones 3.3 y 3.4 para el sistema excitónico.

$$|\phi_1\rangle = |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B |0\rangle_c |0\rangle_L \quad (4.3)$$

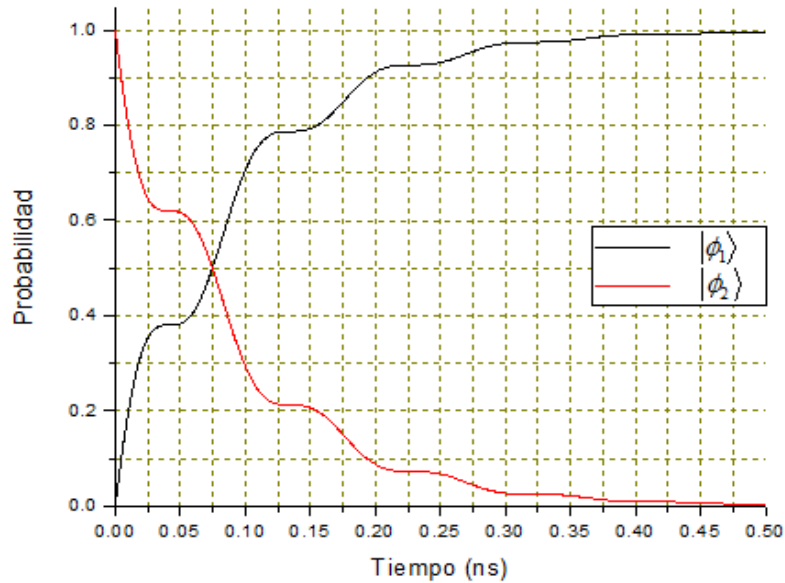
$$|\phi_2\rangle = \frac{\pm \sqrt{b(t)} |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B |1\rangle_c |0\rangle_L + \sqrt{c(t)} (|\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B |0\rangle_c |1\rangle_L + |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B |0\rangle_c |1\rangle_L)}{\sqrt{b(t) + 2c(t)}} \quad (4.4)$$

Donde el signo del primer coeficiente depende de la grafica (4.3). Cada vector propio tiene una probabilidad de suceder según los valores propios del operador densidad. Estos valores están dados por los siguientes coeficientes diagonales:

	$\langle \phi_1 $	$\langle \phi_2 $
$ \phi_1\rangle$	$a(t)$	0
$ \phi_2\rangle$	0	$b(t) + 2c(t)$

Tabla 4.2: coeficientes de probabilidad para los vectores propios mezclados del operador densidad.

Y su evolución obedece a la siguiente grafica:

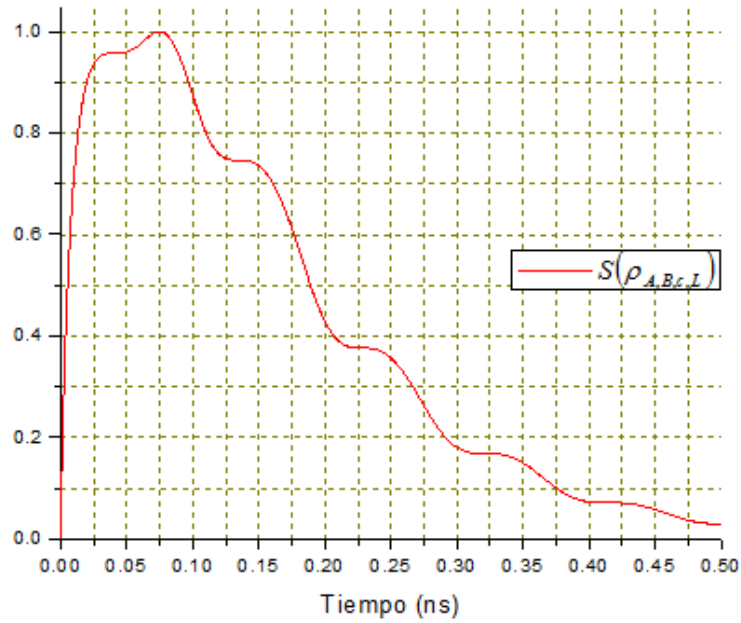


Grafica 4.4: Evolución probabilística de los coeficientes de los vectores propios del operador densidad de espín.

Aquí el estado que produce la decoherencia toma valores más altos para un tiempo mayor a los $0.075ns$. De lo anterior, la entropía del sistema es:

$$S(\rho_{A,B,c,L}) = -(a(t)\ln[a(t)] + (b(t) + 2c(t))\ln[b(t) + 2c(t)]) / \ln[2] \quad (4.5)$$

Que gráficamente es:



Grafica 4.5: entropía del sistema completo. Se considera todos los grados de libertad tanto de los fotones como de los espines.

Aquí se puede ver que en $0.075ns$ hay un máximo en la entropía (mayor desorden) la cual coincide con el tiempo en la cual empieza a destruirse el estado $|\phi_2\rangle$. Esto quiere decir que para este tiempo $a(0.075) = b(0.075) + 2c(0.075) = 0.5$ tal como se ve en la grafica (4.4). Con esto, se puede decir que para tiempos menores y mayores a este, el sistema se encontrara en un estado más puro. De hecho para tiempos menores, prevalece el estado puro $|\phi_2\rangle$, y para tiempos mayores el estado puro $|\phi_1\rangle$ como era de esperarse.

Como en el capitulo anterior, se definen los siguientes vectores:

$$|\Phi_1\rangle = |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \quad (4.6)$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \right) \quad (4.7)$$

Donde $|\Phi_2\rangle$ coincide con el estado de Bell según el apéndice B. Se puede reescribir las ecuaciones 4.3 y 4.4 en términos de una descomposición de Schmidt:

$$|\phi_1\rangle = |\Phi_1\rangle |0\rangle_c |0\rangle_L \quad (4.8)$$

$$|\phi_2\rangle = \frac{\pm \sqrt{b(t)} |\Phi_1\rangle |1\rangle_c |0\rangle_L + \sqrt{2c(t)} |\Phi_2\rangle |0\rangle_c |1\rangle_L}{\sqrt{b(t) + 2c(t)}} \quad (4.9)$$

Como en el caso excitónico, se ve entrelazamiento entre el fotón y el sistema de QDs. El operador densidad reducido del sistema de los QDs, diferentes de cero (sin consideración de fotones), es el valor propio de $|\phi_1\rangle$ multiplicado por la traza de este mismo en los estados Fock de los dos fotones, sumado con el valor propio de $|\phi_2\rangle$ multiplicado por la traza de este mismo en los estados de Fock de los dos fotones, tal como sigue.

$$\hat{\rho}_{A,B} = a(t)_L \langle 0|_c \langle 0|\phi_1\rangle \langle \phi_1|0\rangle_c |0\rangle_L + (b(t) + 2c(t)) \left[{}_L \langle 1|_c \langle 0|\phi_2\rangle \langle \phi_2|0\rangle_c |1\rangle_L + {}_L \langle 0|_c \langle 1|\phi_2\rangle \langle \phi_2|1\rangle_c \right] |0\rangle_L \quad (4.10)$$

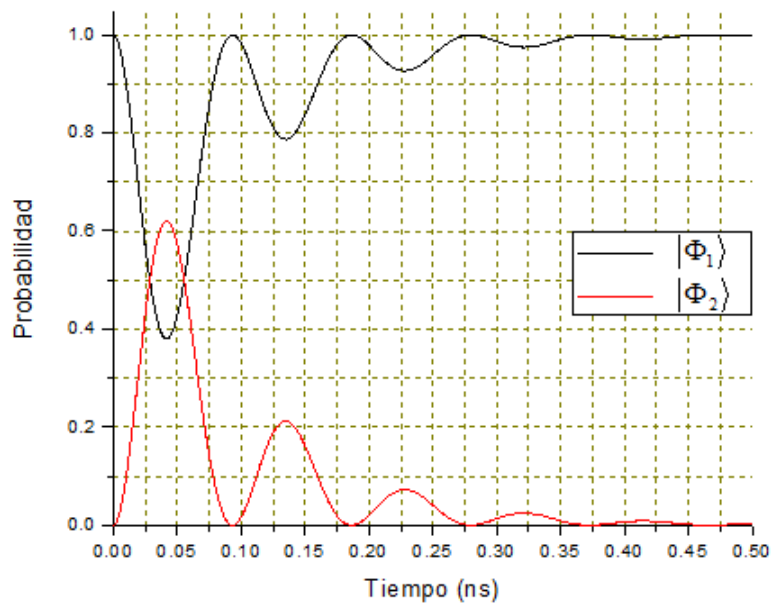
$$\hat{\rho}_{A,B} = (a(t) + b(t)) |\Phi_1\rangle \langle \Phi_1| + 2c(t) |\Phi_2\rangle \langle \Phi_2| \quad (4.11)$$

En forma matricial, $\rho_{A,B}$ es:

	$\langle \Phi_1 $	$\langle \Phi_2 $
$ \Phi_1\rangle$	$a(t) + b(t)$	0
$ \Phi_2\rangle$	0	$2c(t)$

Tabla 4.3: coeficientes de probabilidad para los vectores propios mezclados del operador densidad reducido y compuesto de los espines de los QDs.

Y cumplen con la siguiente evolución temporal:



Gráfica 4.6: Evolución probabilística de los coeficientes de los vectores propios del operador densidad reducido y compuesto de los espines de los QDs.

Según la tabla 4.3, hay dos estados mezclados en los estados de espín. El estado base que es $|\Phi_1\rangle$, y el estado máximamente entrelazado $|\Phi_2\rangle$. Con esto, definitivamente se concluye que los estados de espín son mezclados y no separables. Para ver mejor esto, se reproduce la grafica de densidad al cuadrado:

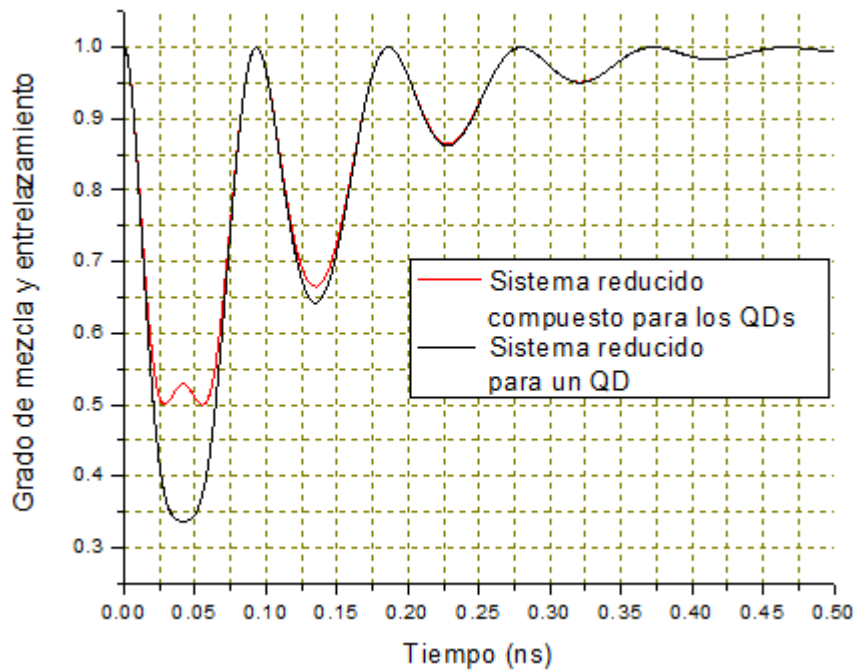


Figura 4.7: Densidad al cuadrado del sistema compuesto por los espines de los QDs (línea negra) y para un espín para un QD reducido (línea roja). Valores menores a uno, implica un sistema mezclado. Entre mayor sea la diferencia entre la grafica negra con la roja, mayor grado de entrelazamiento.

Aquí se puede apreciar que la mayor diferencia entre densidades cuadráticas, ocurre para tiempos donde el estado de Bell prevalece. Solo el hecho de que el estado máximamente entrelazado exista, hace que el estado total de spin sea no separable. Dado esto, este sistema es un muy buen candidato para aplicaciones ya que la destrucción de los estados empieza en 0.075ns, en comparación al tiempo de operación en cómputo cuántico mencionado en el capítulo 3.

Con la tabla 4.3 se puede calcular $S(\rho_{A,B})$, y calculando los coeficientes de Schmidt para ρ_A y ρ_B , se reprodujo las cantidades $S(\rho_A)$ y $S(\rho_B)$. Ya con esto el coeficiente de correlación en el tiempo es:

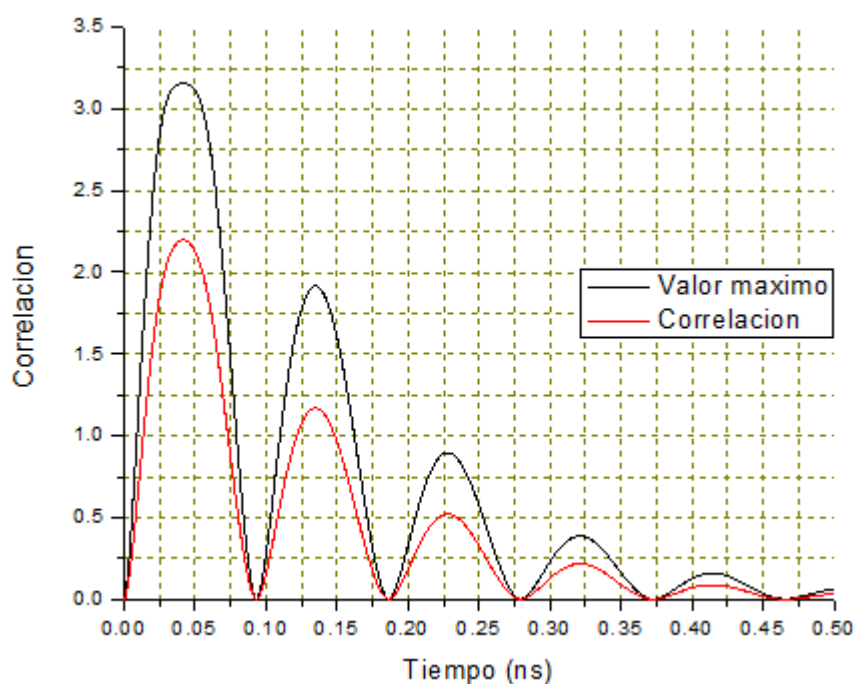


Figura 4.8: Correlación del sistema de espines. La grafica negra corresponde al valor máximo que puede alcanzar la correlación en determinado tiempo $I_{max} = 2\min\{S(\rho_A), S(\rho_B)\}$.

Aquí, los picos que más se acercan al valor máximo, están dados en los tiempos en que mayoritariamente subsiste el estado de Bell. La correlación nunca alcanza su valor máximo ya que la probabilidad de que suceda $|\Phi_1\rangle$ nunca es cero para estos tiempos. Finalmente, haciendo un seguimiento de las graficas 4.6-4.8, para grandes tiempos, el estado de espín queda en el estado factorizable $|\Phi_1\rangle$ que es $|\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$.

4.2. ESPINES EN MEDIOS NO DISIPATIVOS

En este t3pico se procede a desarrollar la ecuaci3n la ecuaci3n de Schr3dinger para el operador densidad o la misma ecuaci3n 2.2, pero sin los operadores de disipaci3n. No teniendo en cuenta estos t3rminos, y usando la misma notaci3n como en la tabla 4.1, las ecuaciones diferenciales a resolver son las siguientes:

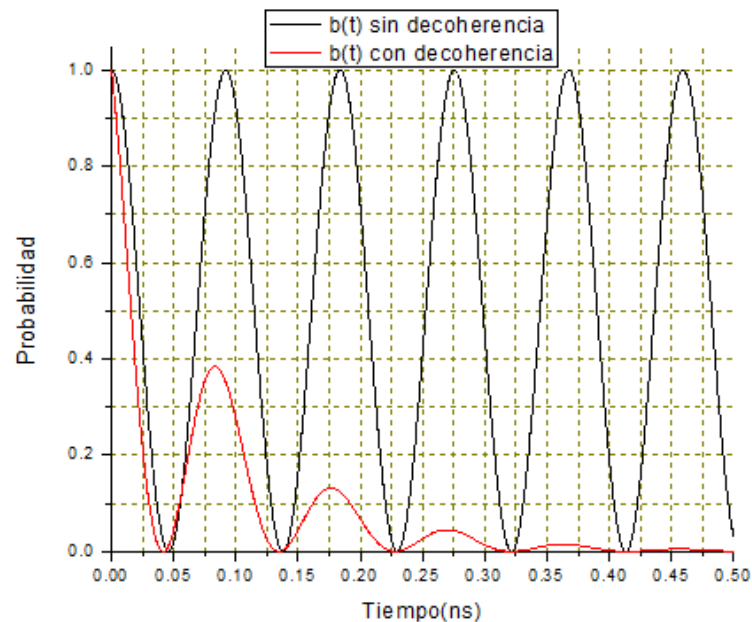
$$\frac{d(a(t))}{dt} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{d(b(t))}{dt} = -4\lambda d(t) \quad (4.13)$$

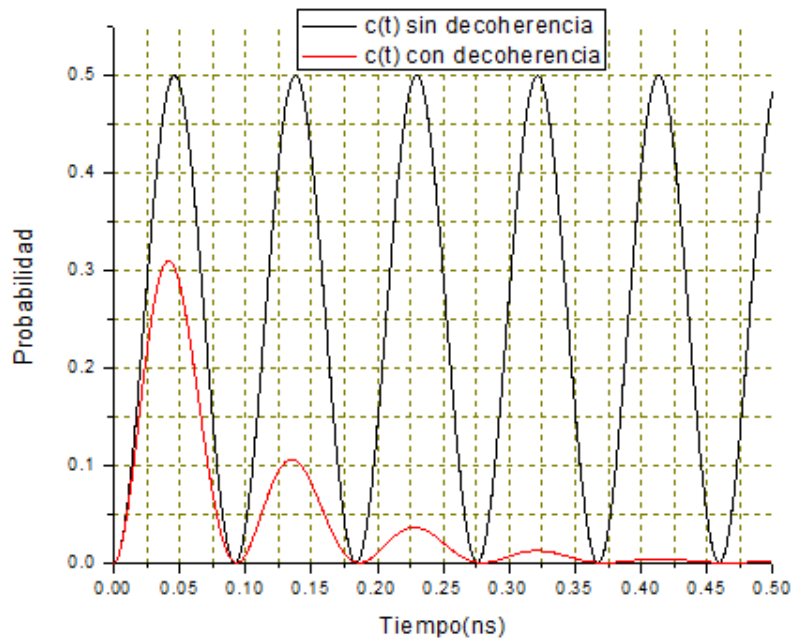
$$\frac{d(c(t))}{dt} = 2\lambda d(t) \quad (4.14)$$

$$\frac{d(d(t))}{dt} = \lambda(b(t) - 2c(t)) \quad (4.15)$$

Estas ecuaciones son iguales a las ecuaciones 3.10-3.13 y por lo tanto las soluciones tienen la forma de las ecuaciones 3.18-3.21. A continuaci3n se presenta una comparaci3n en las oscilaciones de Rab3 del sistema con decoherencia y sin decoherencia.



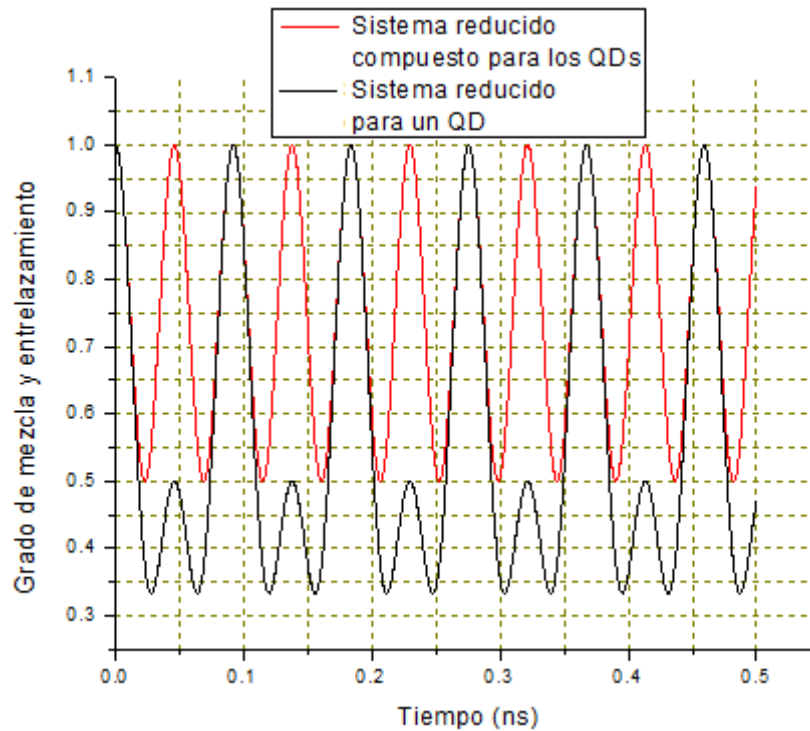
Gráfica 4.9: Comparación de las oscilaciones del coeficiente diagonal $b(t)$ con decoherencia y sin decoherencia.



Grafica 4.10: Comparación de las oscilaciones del coeficiente diagonal $c(t)$ con decoherencia y sin decoherencia.

Las oscilaciones de Rabí oscilan indefinidamente sin atenuarse en el sistema sin decoherencia. Por otra parte se ha verificado que el método numérico utilizado es bastante aproximado, ya que la frecuencia de oscilación es casi la misma para ambos sistemas. En este caso el sistema oscila con una frecuencia de $\sqrt{2}\lambda_{eff}$ la cual es llamada frecuencia de Rabí.

Siendo este sistema análogo al excitónico de la sección 3.2, se procede a analizar la dinámica de entrelazamiento, con la entropía de Rényi o lo que es equivalente la desigualdad de matrices cuadráticas del operador densidad, tal como sigue:



Grafica 4.11: Densidad al cuadrado del sistema compuesto por los QDs (línea negra) y para un QD reducido (línea roja). Valores menores a uno, implica un sistema mezclado. Entre mayor sea la diferencia entre la grafica negra con la roja, mayor grado de entrelazamiento.

Al comparar los tiempos de los picos negros con la grafica de $c(t)$, se ve que estos coinciden con los tiempos de la mayor probabilidad de los estados máximamente entrelazados de Bell, y además de ello tienen el valor de uno, lo cual significa que el sistema se encuentra en un estado puro. De hecho la garantía de que sea máximamente entrelazado yace en que para estos tiempos se viola máximamente la desigualdad (1.11), tal como se ve en la grafica 4.11. Cabe resaltar que para otros tiempos diferentes al mencionado, el sistema se encuentra mezclado y no separable justo donde las graficas no se superponen.

Ya que el estado de Bell hace parte de un estado mezclado e independiente, puede evolucionar en el tiempo según la ecuación de Schrödinger. Con esto se han logrado diseñar compuertas cuánticas según [24, 25].

El modelo de Espín, es el que predomina por encima del excitónico ya que el tiempo de coherencia, supera al tiempo de operación para un cierto cómputo (0.04ns) [23].

En el caso de oscilaciones de Rabí de un solo punto cuántico embebido en la cavidad QED, se puede intuir que para campo vacío, las ecuaciones (4.13-4.15) cambiarían de la siguiente forma:

$$\frac{d(b(t))}{dt} = -2\lambda d(t) \quad (4.16)$$

$$\frac{d(c(t))}{dt} = 2\lambda d(t) \quad (4.17)$$

$$\frac{d(a(t))}{dt} = \lambda(b(t) - c(t)) \quad (4.18)$$

Con los elementos de matriz dados por:

	$ \downarrow\rangle_{QD} 1\rangle_c$	$ \uparrow\rangle_{QD} 0\rangle_c$
$ \downarrow\rangle_{QD} 1\rangle_c$	$b(t)$	$d(t)$
$ \uparrow\rangle_{QD} 0\rangle_c$	$d(t)$	$c(t)$

Tabla 4.4: coeficientes del operador densidad para un punto cuántico en una cavidad QED sin decoherencia.

Y cuya solución está dado por:

$$b(t) = \cos^2(\lambda t) \quad (4.19)$$

$$c(t) = \sin^2(\lambda t) \quad (4.20)$$

$$d(t) = \sin(\lambda t) * \cos(\lambda t) \quad (4.21)$$

En este sistema lo único que se observa es un cambio de estado $|\downarrow\rangle_{QD}|1\rangle_c$ a $|\uparrow\rangle_{QD}|0\rangle_c$ y viceversa. Esto sucede en tiempos proporcionales a un número entero o semi-entero por π sobre la frecuencia de Rabí (en este caso es λ). Aquí se puede ver fácilmente la construcción de una compuerta cuántica de un solo qubit, ya que lo único que hace esta es cambiar de estado un cierto sistema, ya sea a el estado opuesto o a una superposición de estos.

En el caso de un solo QD interaccionando con campo coherente, se obtendrían cambios del estado inicial, solo que con menos definición, ya que la evolución es similar al caso de dos QDs. Esto se puede ver más claro en [19].

4.3. POSIBLE APLICACIÓN DE LOS RESULTADOS

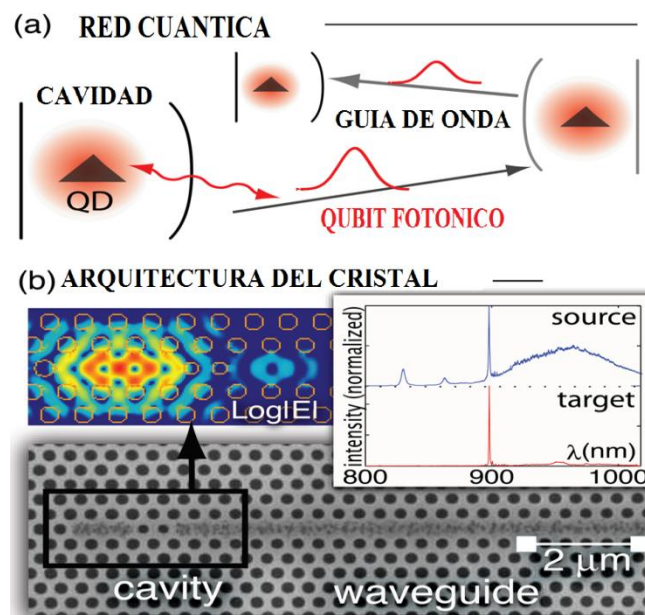


Fig. 4.1. a) conformación de una red cuántica de información por medio de cavidades QED, QDs y fotones. b) arquitectura de la cavidad [31].

Tal como se aprecia en la figura anterior, se puede realizar una red cuántica de información por medio de cavidades, QDs y fotones. Como se ve en (a) de la figura 4.1, la cavidad junto con los QDs conformaría una compuerta cuántica, donde los estados del sistema pueden ser cambiados según la dinámica del sistema. El medio de transmisión, sería producido por un fotón de la cavidad, ya que el hecho de que este entrelazado con los QDs, como se vio en los resultados, tiene la información completa de la operación de la compuerta cuántica. Este puede transmitir esta información a otro sistema de cavidades, y así formar una red cuántica aplicable en la ciencia de la computación e información. La parte (b) de la figura 4.1, representa la arquitectura del cristal fotónico, donde se ve la intensidad del campo electromagnético, y el medio de transmisión de fotones a otras cavidades, por medio

de guías de onda. También se presenta espectros de fotoluminiscencia para la fuente (source→cavidad emisora) y el receptor (target→cavidad receptora). De hecho todo esto se ha hecho experimentalmente en [31].

CONCLUSIONES

1. Se logro implementar un software que lograrse solucionar una ecuación diferencial de primer orden (ecuación máster), y con ello los elementos de matriz del operador densidad del sistema compuesto por los puntos cuánticos y el modo de la cavidad.
2. Se verifico la buena aproximación del software utilizado, al desarrollar la ecuación máster, ya que al solucionar matemáticamente el mismo problema sin decoherencia, las frecuencias coincidieron en un valor dado por la frecuencia de Rabí, o sea, la raíz de dos veces el factor de acoplamiento entre los QDs y la cavidad.
3. En la interacción de excitones de punto cuántico con un campo coherente, el estado entrelazado no es tan definido, pero el intervalo de entrelazamiento fue predominante en el transcurso de la dinámica del sistema.
4. En la interacción de excitones y espín de punto cuántico con un campo vacío, en tiempos proporcionales a un número semi-entero por π sobre la frecuencia de Rabí, se obtuvieron estados máximamente entrelazados como los estados de Bell, útiles en la ciencia de la computación e información cuántica.
5. En la interacción de espines de punto cuántico con un campo vacío, la dinámica fue análoga a la de excitones con campo vacío, solo que en este modelo, la frecuencia de Rabí y los tiempos de coherencia eran mayores, dadas las condiciones del modelo.
6. Como en la conclusión cuatro, el sistema con excitones y espines en campo vacío, está mayoritariamente entrelazado, a excepción en los tiempos dado por un número entero de π sobre la frecuencia de Rabí.
7. Solo el modelo de espín, arrojo resultados favorables para el desarrollo de nuevas tecnologías basadas en la mecánica cuántica, ya que los tiempos de coherencia son mayores a los tiempos de operación de un cierto cómputo.
8. Con los resultados de este proyecto, se pueden formar compuertas cuánticas de dos qubits, solo al cambiar sus estados, y transmitir esta información a través del fotón de la cavidad.

9. Si se analiza la dinámica de un solo punto cuántico (de excitón u espín) interaccionando con los diferentes campos en la cavidad, se obtendrían compuertas cuánticas de un solo qubit, ya que en estas solo cambia el sistema de dos niveles a una superposición de ellos o uno en común.
10. Finalmente se lograron todos los objetivos del anteproyecto y con ello la obtención de estados entrelazados en medios disipativos, fenómeno altamente potencial en diversas aplicaciones.

APENDICA A: PUNTOS CUANTICOS Y CAVIDADES

En este apéndice se da un concepto global de los elementos indispensables para desarrollar este proyecto. En primera instancia se define lo que es un punto cuántico y algunas de sus propiedades entre las que se destaca, el estudio de estados excitónicos y aquellos que se generan debido al acoplamiento espín-órbita. En este sentido se responde porque el modelo aquí implementado es un buen candidato para modelar dispositivos de cómputo cuántico. A su vez, se definen las cavidades como elementos de confinamiento de luz, y su importancia en el modelo que nos compete.

A.1. PUNTOS CUANTICOS (QDs, del inglés *Quantums Dots*)

El termino punto cuántico (QD) es usado para describir nano-cristales semiconductores. Las fronteras físicas de los QDs confinan, en las tres coordenadas espaciales, portadores de carga dentro del material. Este confinamiento produce propiedades que no son observadas en el material en bloque. Por ejemplo, el silicio en bloque no es un buen emisor de luz, ya que este tiene un gap indirecto, mientras que cuando es confinado como QD, se convierte en un emisor de luz [2].

Típicamente el diámetro (D) de un QD, y así el nivel de confinamiento que este produce, es caracterizado por su relación con el radio de Bohr (a_B) de un excitón. Fuerte confinamiento ocurre cuando $D < 2a_B$, confinamiento parcial cuando $D \approx 2a_B$, y confinamiento débil cuando $D > 2a_B$ [3].

Los QDs son preparados usando muchas técnicas como: litografía, epitaxia de haz molecular, y métodos coloidales [4].

Los puntos cuánticos, debido a su dimensionalidad, son más aislados del ambiente y tienen menos grados internos de libertad que sistemas con más dimensiones. Estas dos características incrementan los tiempos de coherencia de los estados cuánticos del QD. Aquí las grandes aplicaciones que los QDs tienen para la computación e

información cuántica de estado sólido, ya que la dinámica del sistema debe perdurar sin destruirse hasta un tiempo considerable para hacer las operaciones necesarias.

Entre las propiedades que los QDs, están los excitones, la cual se forman cuando fotones son bombeados dentro de este, de modo que los electrones de la banda de valencia son excitados a la banda de conducción dejando atrás huecos. Los electrones con sus huecos complementarios da como resultado un enlace de tipo Coulombiano par electrón-hueco, o lo que comúnmente se llama excitón [2]. Estos en sí, se consideran cuasi- partículas la cual pueden transportar momentum y energía dentro de una red cristalina en un semiconductor o aislante.

Los bits cuánticos (qubits) es el estado lógico de la computación cuántica, y está conformado de dos niveles como en computación clásica 0 o 1, solo que los qubits pueden tener infinitos grados de libertad, al superponer sus dos niveles base. Los excitones son buenos candidatos para ser qubits, ya que en el caso ideal, estos tienen dos niveles, uno es el estado base (estado no excitado) y el otro es el estado excitónico (estado excitado), y por ser estos estados tratados cuánticamente, pueden subsistir en una superposición de estados.

A.1.2. REGLAS DE TRANCION DEBIDO AL ACOPLAMIENTO ESPIN-ORBITA

La banda de valencia en semiconductores III-V está compuesta por orbitales tipo p, produciendo seis estados cuánticos para cada cuasi momento k . Debido a la considerable interacción espín-orbita, el momento orbital angular y espín no son números cuánticos separados, y los estados de la banda de valencia de un cristal en bloque debe ser clasificado por su momento angular total y su proyección sobre un eje seleccionado. Así, la banda de valencia está compuesta de tres sub-bandas correspondiente a dos diferentes representaciones del momento angular total J . Fuera de estos, los dos estados con $j=1/2$ forma una sub- banda la cual está dividida por la interacción espín-orbita. Los otros cuatro estados con $j=3/2$ son degenerados en bloque para $k=0$ (vector de onda), pero esta degeneración es elevada por el tamaño y tensión en una estructura QD, con la sub-bandas de huecos pesados (hh,

del inglés heavy hole) (proyección del momento angular sobre la abscisa simétrica $m = \pm 3/2$), y por encima de los hh, la sub-banda de huecos livianos (lh, del inglés light hole) ($m = \pm 1/2$) en toda la estructura conocida.

En un QD se pueden formar excitones ya sean livianos (excitón lh) o pesados (excitón hh). Las reglas de selección del momento angular restringen las transiciones permitidas para una dirección de propagación dada (en caso de no isotropía del QD) y una polarización del rayo de luz, como se ve en la figura A.1a. Por ejemplo, de acuerdo a las reglas de transición representadas en la figura. A.1b, un rayo láser polarizado en σ^+ (momento angular = +1 o polarización circular a la derecha) puede solamente crear un excitón con momento total +1, referido como “excitón σ^+ ” de acuerdo con la conservación del momento angular (quitar un electrón con momento angular m es equivalente a crear un hueco con momento angular $-m$); entonces las únicas transiciones posibles son en las que la diferencia de momento angular en el QD sea el del rayo polarizado. Un rayo polarizado σ^- (momento angular = -1 o polarización circular a la izquierda) crea solamente un “excitón σ^- ” con momento angular -1. Similarmente, un rayo polarizado como π_z (momento angular=0 o polarización lineal) crea un “excitón π_z ” con momento angular igual a cero.

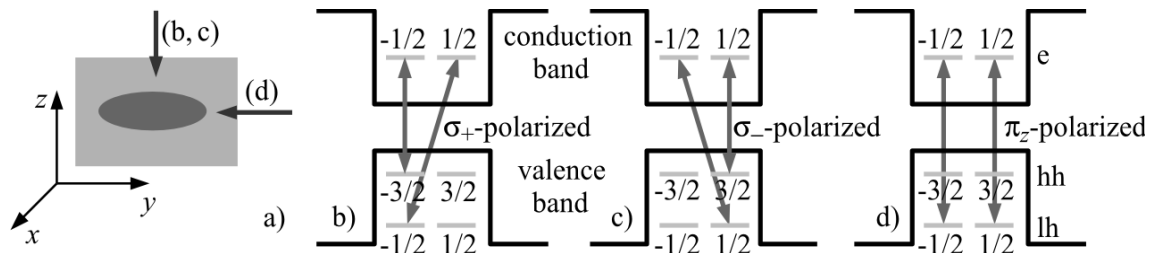


Fig. A.1: reglas de transición en puntos cuánticos entre bandas de conducción y valencia, debido al acoplamiento spin-orbita [5]. Aquí se tiene en cuenta la conservación del momento angular total del sistema, y como consecuencia, el QD en un estado dado, solo puede absorber ciertos fotones con cierta polarización. a) el plano xy es el plano de la estructura, mientras z es la dirección de crecimiento y corresponde al eje de simetría de la estructura. Las flechas presentan la incidencia de la luz correspondiente a los 3 diagramas b-d. b) polarización circular a la derecha, c) polarización circular a la izquierda, d) polarización lineal.

En estructuras apropiadamente dopadas, QDs tienen la banda de valencia completamente llena y un electrón libre en la banda de conducción. Una transición

óptica en este caso corresponde a una transición entre un solo estado de electrón a un estado de trión (“excitón cargado”) negativo, por ejemplo, el estado de dos electrones y un hueco confinado en QD. Del principio de exclusión de Pauli, es claro que esta transición solamente se da si el estado para la cual va a ser ocupado por el foto-electrón, está libre. En la situación de la fig. A.1b, un trión de hueco pesado puede ser creado si el electrón en la banda de conducción está inicialmente ocupado por un estado “spin up” (+1/2), pero no si el electrón está en el estado “spin down” (-1/2) [5]. El obstáculo de una transición óptica que depende del espín del electrón libre en el QD es llamado “bloqueo de Pauli” (Pauli blocking) [5, 24]. Se puede utilizar esta propiedad para crear estados de espín (down y up) como herramienta para crear qubits tal como se menciona en [5].

A.2. CAVIDADES

En óptica cuántica, la palabra cavidad es un resonador de radiación electromagnética. Ampliamente hablando, un resonador es un dispositivo que resuena solamente para ciertas frecuencias, cuyos campos de vibración para estas, forman patrones espaciales llamados *modos del resonador*. Una cuerda extendida con sus extremos fijos es un resonador unidimensional cerrado. El cuerpo de un violín es un resonador acústico tridimensional abierto. El campo vibracional de la cuerda es el desplazamiento vertical para cada punto a lo largo de esta. En el violín, el campo vibracional es la pequeña variación de la presión del aire para cada punto dentro del violín. Un patrón bidimensional de un modo del violín puede ser obtenido al esparcir polvo en la parte trasera y hacer sonar una de sus resonancias. El polvo se aloja en los nodos del modo ya que este es el lugar de la superficie que no vibra [6]. Lo anterior fueron ejemplos de resonancia, pero la importancia de utilizar resonadores ópticos en este proyecto, es lograr un acoplamiento entre los QDs y un solo modo de la luz, para que se dé una dinámica en el sistema

Las cavidades de electrodinámica cuántica (QEDc, del inglés Quantum Electrodinamic cavities) son sistemas confinadores de luz, tal que dentro de ellas se pueden formar ondas estacionarias de radiación para ciertas frecuencias. Lo más

importante de esta es que es un medio de alto acoplamiento de un modo de la luz con la materia, lo cual es imposible en el espacio libre ya que existirían infinitos modos de interacción.

Una de las formas de construir cavidades QED es por medio de cristales fotónicos, la cual son el tema principal a tratar en este apéndice. Estos son nuevos materiales nano-estructurados que presentan propiedades exclusivas [7, 9], las cuales ya han sido aplicadas en fibras ópticas [8, 9], en fabricación de nuevos dispositivos optoelectrónicos más rápidos, más eficaces y más pequeños para las telecomunicaciones fotónicas y la computación óptica.

Los cristales fotónicos con defectos, presentan una banda prohibida para fotones (o *photonic bandgap*, PBG), donde los defectos están constituidos por variaciones periódicas en el índice de refracción o constante dieléctrica del material que lo constituye. En analogía con las bandas electrónicas de sólidos ordenados (como los materiales semiconductores) donde la periodicidad atómica origina bandas o niveles de energía para los electrones, la distribución espacial de la constante dieléctrica en el caso de los cristales fotónicos origina una estructura de bandas para fotones. Estas bandas pueden diseñarse a voluntad (de forma análoga a la *ingeniería de bandas* en los materiales semiconductores), por lo que estas estructuras pueden impedir o favorecer la propagación de fotones con determinadas energías [9].

Tanto la periodicidad como las dimensiones físicas de las zonas de variación de la constante dieléctrica están relacionadas con la longitud de onda de los fotones que se propagan, exigiendo para estas zonas dimensiones en la escala de nanómetros para fotones con energías dentro del espectro visible e infrarrojo cercano.

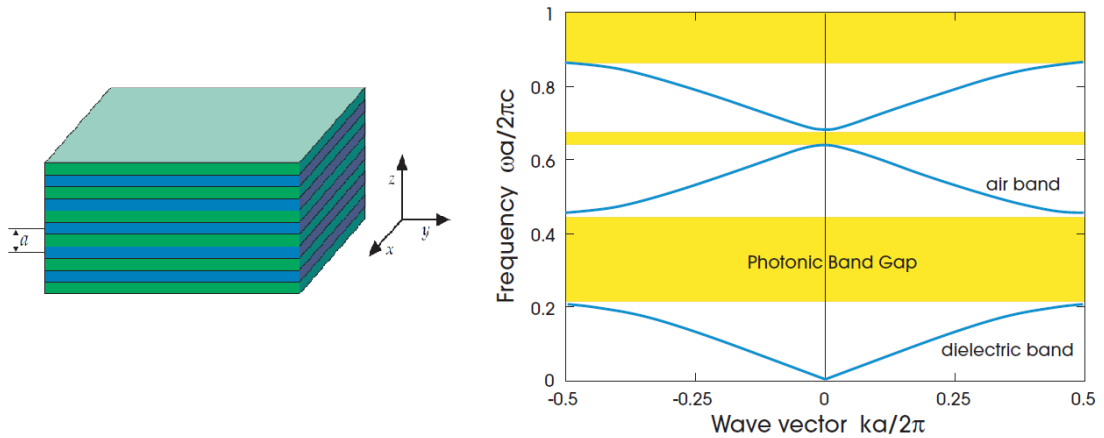


Fig A.2: cristal fotónico unidimensional de multicapas con constante de periodicidad a y alternancia de capas de constante dieléctrica de 13 y longitud $0.2a$, y constante dieléctrica de 1 con longitud $0.8a$ respectivamente; posee una distribución (en el espacio recíproco) con bandas de energías y zonas donde no existen estados permitidos (energías prohibidas para fotones) [9].

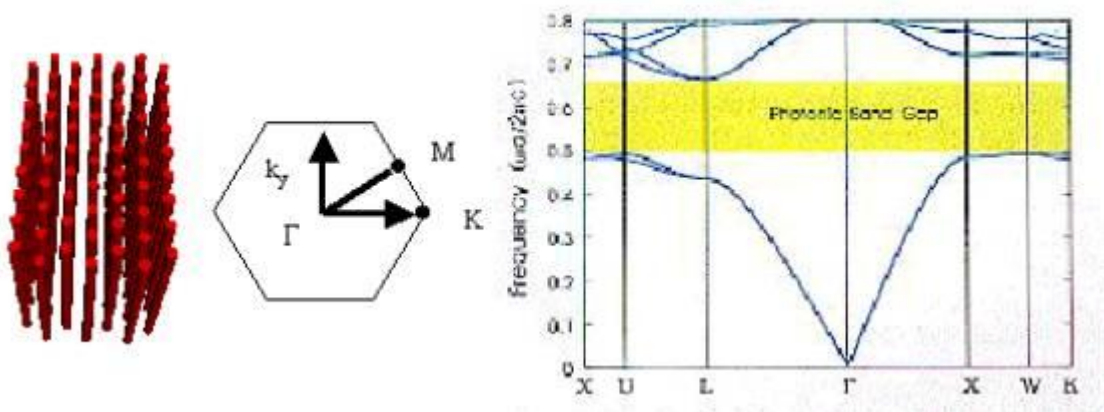


Fig A.3: una distribución periódica de diferente constante dieléctrica (en este ejemplo cilindros de semiconductor separados por aire) posee una distribución (en el espacio recíproco) con bandas de energías y zonas donde no existen estados permitidos (energías prohibidas para fotones) [10]; aquí las letras mayúsculas indican diferentes puntos de la primera zona de Brillouin.

En la fig. A.2 se ve representado un cristal fotónico unidimensional con longitud y constante dieléctrica variables. Al resolver las ecuaciones de Maxwell, se obtiene bandas de energía para fotones, la cual presenta un “gap” de energía donde fotones de cierta frecuencia no pueden propagarse por el cristal. Una situación análoga sucede en el cristal fotónico bidimensional presentado en la figura A.3, donde la periodicidad está dada por cilindros de aire en el semiconductor y presenta una estructura de bandas dentro de la primera zona de Brillouin.

Para formar una cavidad en un cristal fotónico, es suficiente modificar la forma, área o constante dieléctrica de un solo defecto de la red (un cilindro en el caso bidimensional, o una capa en el caso unidimensional), así se pone un nivel energético dentro del gap en una posición espacial localizada en el defecto modificado, tal como se muestra en la figura A.4.

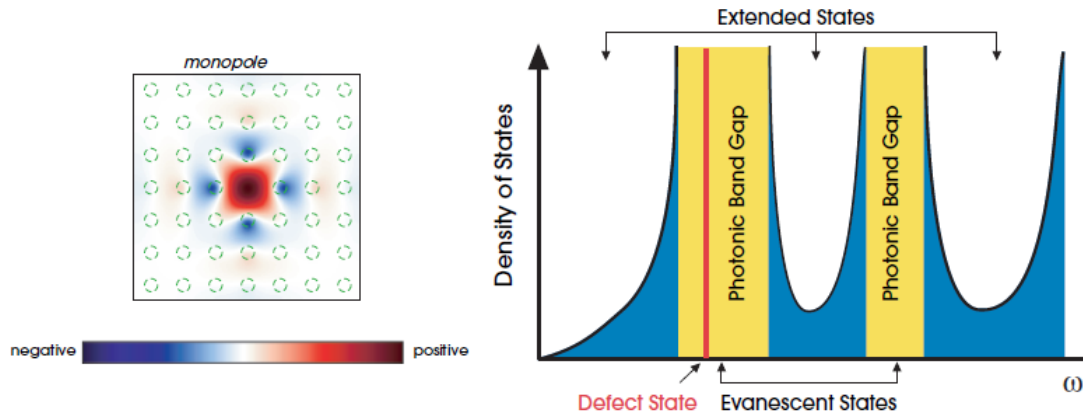


Fig A.4: la figura de la izquierda representa la intensidad de un monopolo de campo eléctrico localizado en el defecto modificado. La figura de la derecha es la densidad de estados (numero de modos permitidos por unidad de frecuencia) dentro de estados extendidos y estados que se desvanecen o atenúan. Esta es cero en la banda del gap (amarillo); los modos pueden existir en esta región solo si se atenúan o si la simetría traslacional es interrumpida por una modificación en un defecto (línea roja) [9].

En esta figura se ve representado la intensidad de un monopolo de campo eléctrico dentro de un defecto de uno de los cilindros representados por los círculos verdes; este modo solo existe en el defecto y alrededor de él, dada la atenuación que sufre al extenderse por la periodicidad dieléctrica del cristal. En la grafica derecha, se nota un estado permitido dentro del gap de energía que sirve como un modo confinado dentro del cristal.

Para acoplar una cavidad con un punto cuántico es necesario localizar el QD en el defecto modificado o en la parte donde hay mayor intensidad de campo, ya que el acoplamiento depende de este. En el caso de dos puntos cuánticos con un solo modo de la cavidad, se debe localizar los QDs en dos defectos modificados diferentes y comunicarlos con una guía de onda, la cual se puede hacer, cambiando una cadena lineal de defectos [9].

APENDICE B: ENTRELAZAMIENTO CUANTICO

En el mundo actual se ha considerado que cualquier objeto se encuentre en un solo lugar con un determinado estado, mientras que en el mundo cuántico, esto no es siempre cierto, aquí se puede obtener varios estados a la vez (superposición de estados), y además de eso un sistema compuesto de dos partes, puede obtener estados superpuestos, donde el estado total no se puede factorizar en estados de ninguna de sus dos partes; a esto es lo que se le llama entrelazamiento cuántico, donde una medida en una parte, afectará a la otra y viceversa. Esta propiedad puede ser aprovechada en posibles aplicaciones tecnológicas de la información, tal como se verá en este apéndice de forma breve.

Erwin Schrödinger usó el término *Verschränkung* para designar la superposición lineal de estados en sistemas de varias partículas. En la actualidad se utiliza la palabra inglesa “*entanglement*”, que puede traducirse al español por enredo, entrelazamiento, entrecruzamiento, enmarañamiento, embrollo, etc. Con estos términos se denota la propiedad de aquellos estados de un sistema compuesto (calificados como *verwickelten* en alemán, *entangled* en inglés, enredados, entrelazados, etc. en español) que contienen correlaciones cuánticas clásicamente inalcanzables.

Si el sistema total se encuentra en un estado puro (es decir, máximamente determinado), el *entrelazamiento* se manifiesta en que el estado total no puede expresarse como producto de estados para cada una de sus partes (no factorizable), y en que ninguna de dichas partes por separado se encuentra en un estado puro (desde el punto de vista físico) [1]. Por ejemplo el estado singlete de dos partículas de espín dado por:

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle^{(1)} \otimes |\downarrow\rangle^{(2)} - |\downarrow\rangle^{(1)} \otimes |\uparrow\rangle^{(2)}) \quad (\text{B.1})$$

Donde $|\uparrow\rangle^{(j)}, |\downarrow\rangle^{(j)}$, representa los estados de spin de la partícula j , con componente, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ respectivamente en una dirección z dada; este estado es puro ya que no es un estado que se pueda factorizar como producto tensorial del estado de la partícula 1 y 2. Esto quiere decir que la dinámica del espín de la partícula 1 está influenciada altamente de la partícula 2, y viceversa y no puede estar separado. En otras palabras, lo que le suceda a la partícula 1 lo sentirá la 2 y lo que le suceda a la 2, lo sentirá la 1. La ecuación B.1 cumple estas propiedades, por ejemplo si hacemos una medida de espín en la partícula 1 y el resultado es espín $\frac{1}{2}$, entonces inmediatamente el espín de la partícula 2 va a ser $-\frac{1}{2}$, y si la medida del espín de la partícula 1 resultara ser $-\frac{1}{2}$, entonces el espín de la partícula 2 será $\frac{1}{2}$. Como se ve estos dos espines están altamente correlacionados y la dinámica de una depende de la otra.

Hoy en día existen ciertos estados que son máximamente entrelazados, entre ellos están los estados de Bell [1], la cual son expresados de la siguiente forma:

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (\text{B.2})$$

$$|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (\text{B.3})$$

Estos estados, son orto-normales, forman una base útil para describir sistemas bipartitos en un número de situaciones de interés en la ciencia de información cuántica, como la tele-portación, criptografía y computación cuántica.

La tele-portación se refiere al transporte de un objeto o materia de un lugar a una determinada ubicación. En tele-portación cuántica, las propiedades del sistema de origen cuántico se recrean en el sistema cuántico de destino, incluso si los dos sistemas cuánticos no tienen contacto físico [1, 19].

La mayoría de las personas, sin embargo, mantienen la creencia de que tele-portación permanecerá para siempre en la ficción, con el principio de incertidumbre

de Heisenberg como el principal obstáculo para la tele-transporte de convertirse en una realidad.

En 1993, un equipo de investigadores de IBM, dirigido por el físico Charles Bennet, confirmó teóricamente que la tele-portación cuántica era posible sólo si el material original fuera destruido [13]. Los científicos de IBM descubrieron como dar la vuelta al razonamiento lógico de Heisenberg, usando el entrelazamiento. Estos encontraron una manera de escanear la información del objeto A, el cual querían tele-transportar, con la ayuda de un estado extra (estado no escaneado). La parte no escaneada era pasada a través del efecto EPR [12] (donde esta última surge de un experimento mental por Einstein la cual predice el entrelazamiento debido a las leyes de la mecánica cuántica, y sobre todo lo absurdo de obtener información instantánea en la medición de una de las partículas entrelazadas) a otro objeto C que nunca había estado en contacto con A. Más tarde aplicando a C un tratamiento, dependiendo de la información escaneada, vieron que era posible modificar C a la manera exacta de cómo era A antes de ser escaneada. El objeto A a la vez no conserva su estado original, siendo destruido en el proceso de escaneo ya que ha sido archivado como información. Cabe resaltar que la tele-portación no es posible en el mundo clásico.

En criptografía cuántica se utiliza principios de la mecánica cuántica para garantizar la absoluta confidencialidad de la información transmitida [1, 19]. Las actuales técnicas de la criptografía cuántica permiten a dos personas crear, de forma segura, una clave secreta compartida que puede ser usada como llave para cifrar y descifrar mensajes usando métodos de criptografía simétrica.

Una de las propiedades más importantes de la criptografía cuántica es que si un tercero intenta descifrar código durante la creación de la clave secreta, el proceso se altera detectándose al intruso antes de que se transmita información privada. Esto es una consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg, que nos dice que el proceso de medir en un sistema cuántico perturba dicho sistema.

La seguridad de la criptografía cuántica descansa en las bases de la mecánica cuántica, a diferencia de la criptografía de clave pública tradicional la cual descansa en supuestos de complejidad computacional no demostrada de ciertas funciones matemáticas.

En criptografía clásica, se utiliza códigos difícilmente factorizables con un algoritmo clásico, pero si se da la computación cuántica, esto pasa a ser cosa fácil hacer un algoritmo que revele el código en cuestión de segundos, dejando prácticamente inutilizada la criptografía clásica.

Para mayor profundización, el lector se puede remitir a [1, 14].

La computación cuántica es un paradigma de computación distinto al de la computación clásica [1, 19]. Se basa en el uso de qubits (bits cuánticos) en lugar de bits, y da lugar a nuevas puertas lógicas que hacen posibles nuevos algoritmos. Una misma tarea puede tener diferente complejidad en computación clásica y en computación cuántica, lo que ha dado lugar a un gran interés en este tipo de computación, ya que algunos problemas intratables en el computador clásico pasan a ser tratables en el cuántico. Mientras un computador clásico equivale a una máquina de Turing [1], un computador cuántico equivale a una máquina de Turing indeterminista.

A medida que evoluciona la tecnología, aumenta la escala de integración y caben más transistores en un espacio, así se fabrican microchips cada vez más pequeños, y es que cuanto más pequeño es, mayor velocidad de proceso alcanza el chip. Sin embargo, no se puede hacer los chips infinitamente pequeños. Hay un límite en el cual dejan de funcionar correctamente. Cuando se llega a la escala de nanómetros, los electrones se escapan de los canales por donde deben circular. A esto se le llama efecto túnel. Una partícula, si se encuentra con un obstáculo, no puede atravesarlo y rebota. Pero con los electrones, que son partículas cuánticas y se comportan como ondas, existe la posibilidad que una parte de ellos pueda atravesar las paredes si son demasiado finas; de esta manera la señal puede pasar por canales donde no debería circular. Por ello, el chip deja de funcionar correctamente. En consecuencia, la computación digital tradicional no tardaría en llegar a su límite, puesto que ya se han

llegado a escalas de sólo algunas decenas de nanómetros. Surge entonces la necesidad de descubrir nuevas tecnologías y es ahí donde entra la computación cuántica.

La idea de computación cuántica surge en 1981, cuando el Dr. Richard Feynman, físico del California Institute of Technology en California (EE.UU.) y ganador del premio Nobel en 1965 realizó una ponencia durante el “First Conference on the Physics of Computation” realizado en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (EE.UU.) Su charla, bajo el título de “Simulating Physics With Computers” [15]. Proponía el uso de fenómenos cuánticos para realizar cálculos computacionales y exponía que dada su naturaleza algunos cálculos de gran complejidad se realizarían más rápidamente en un ordenador cuántico. Para aprovechar las leyes cuánticas en el entorno de la computación, en vez de trabajar a nivel de voltajes eléctricos, se trabaja a nivel de cuántos. En la computación digital, un bit sólo puede tomar dos valores: 0 ó 1. En cambio, en la computación cuántica, intervienen las leyes de la mecánica cuántica, y la partícula puede estar en superposición coherente: puede ser 0, 1 y puede ser 0 y 1 a la vez (dos estados ortogonales de una partícula subatómica). Eso permite que se puedan realizar varias operaciones a la vez, según el número de qubits.

El número de qubits indica la cantidad de bits que pueden estar en superposición. Con los bits convencionales, si se tiene un registro de tres bits, hay ocho valores posibles tal que el registro sólo puede tomar uno de esos valores, como se ve en la siguiente ecuación.

$$|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle \text{ o } |111\rangle \quad \text{B.4}$$

En cambio, si se tiene un vector de estado en mecánica cuántica de tres qubits, la partícula puede tomar ocho valores distintos a la vez gracias a la superposición cuántica y el entrelazamiento cuántico que la posibilita. Así un vector de tres qubits permitiría un total de ocho operaciones paralelas como se ve en la siguiente ecuación.

$$|\psi\rangle = |000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle \quad \text{B.5}$$

Como cabe esperar, el número de operaciones es exponencial con respecto al número de qubits del orden de 2^n , donde n es el número de qubits.

Para hacerse una idea del gran avance, un computador cuántico de 30 qubits equivaldría a un procesador convencional de 10 teraflops (millones de millones de operaciones en punto flotante por segundo) cuando actualmente las computadoras trabajan en el orden de gigaflops (miles de millones de operaciones).

"El entrelazamiento es esencial para la computación cuántica porque posibilita la colocación de mayor información en los bits cuánticos que lo que es posible con los bits actuales", dijo Berkeley, ya que gracias al entrelazamiento, un número n de qubits se pueden expresar como una superposición de diferentes cadenas binarias tal que se puede hacer operaciones en paralelo. A esto es lo que se le llama paralelismo cuántico.

APENDICE C: MODOS EN UNA CAVIDAD, CUANTIZACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO, Y SU INTERACCION CON LA MATERIA.

C.1. MODOS EN UNA CAVIDAD CERRADA PERFECTAMENTE CONDUCTORA

Cuando ondas electromagnéticas son confinadas en una cavidad, dicha cavidad subsiste ciertos arreglos de la onda, con ciertas frecuencias, cada uno de estos arreglos se les llama modos resonantes. La frecuencia de resonancia de cada modo puede ser calculada resolviendo las ecuaciones de maxwell para el campo eléctrico y magnético en la cavidad, estas ecuaciones son:

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (C.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (C.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (C.3)$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (C.4)$$

En primera instancia, permitamos considerar las paredes de la cavidad como un conductor perfecto, entonces, los campos deben satisfacer las condiciones de frontera:

$$n \times E|_s = 0, \quad n \cdot B|_s = 0 \quad (C.5)$$

Donde “n” es la normal de la superficie de la cavidad. Jugando con las ecuaciones de Maxwell anteriormente mencionadas, se puede llegar a:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (C.6)$$

Si se utiliza el método de separación de variables para desarrollar esta ecuación diferencial, se tiene:

$$E(r, t) = X(r)T(t) \quad (C.7)$$

Reemplazando (C.7) en (C.6) se llega a:

$$\frac{\nabla^2 X(r)}{X(r)} = \frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} \quad (C.8)$$

La matemática nos dice que en la igualdad de variables independientes, se deben asignar una constante n , y por lo tanto la ecuación anterior queda separada de la siguiente forma:

$$\nabla^2 X(r) = nX(r) \quad (C.9)$$

$$\ddot{T}(t) = c^2 nT(t) \quad (C.10)$$

Se puede demostrar que en este caso “ n ” es un número real y negativo, entonces:

$$n = -k^2 \quad (C.11)$$

Por otro lado las funciones $X(r)$ son ortogonales. Para ver esto, se tiene que por la ecuación (C.1) $\nabla \cdot X = 0$, y por lo tanto $\nabla^2 X = -\nabla \times (\nabla \times X)$, entonces la ecuación (C.9) se transforma en:

$$\nabla \times (\nabla \times X_{k^2}) = k^2 X_{k^2} \quad (C.12)$$

Donde k^2 y X_{k^2} son el valor propio y vector propio del operador $\nabla \times (\nabla \times)$ respectivamente. Si se denota $\widehat{K} = \nabla \times (\nabla \times)$, entonces:

$$\langle X_{\hat{k}^2} | \widehat{K} | X_{k^2} \rangle - (\langle X_{\hat{k}^2} | \widehat{K} \rangle | X_{k^2} \rangle) = k^2 \langle X_{\hat{k}^2} | X_{k^2} \rangle - \hat{k}^2 \langle X_{\hat{k}^2} | X_{k^2} \rangle = (k^2 - \hat{k}^2) \langle X_{\hat{k}^2} | X_{k^2} \rangle \quad (C.13)$$

Como \widehat{K} es hermítico, puede actuar sobre $|X_{k^2}\rangle$ o $\langle X_{\hat{k}^2}|$, entonces la ecuación del lado izquierdo de (C.13) es cero, así que:

$$(k^2 - \hat{k}^2)\langle X_{\hat{k}^2}|X_{k^2}\rangle = 0 \quad (C.14)$$

De aquí se ve que $\langle X_{\hat{k}^2}|X_{k^2}\rangle = 0$ si $k^2 \neq \hat{k}^2$ y $\langle X_{\hat{k}^2}|X_{k^2}\rangle \neq 0$ si $k^2 = \hat{k}^2$, entonces fácilmente se ve la ortogonalidad de X_{k^2} . k^2 es una cantidad discreta ya que el confinamiento en la cavidad perfecta, hace que no todos los k^2 subsistan en esta. Dadas las tres componentes espaciales, k^2 depende de tres valores propios discretos asociados con las tres ecuaciones de variables separables en la ecuación (C.9); estas también cumplen con la condición de ortogonalidad. A estos tres valores propios se denotaran por n , donde $n=1,2,3$. De (C.1) la divergencia de los modos se desvanece, entonces solamente hay dos direcciones independientes en el espacio tridimensional; estas dos direcciones se denotaran como $s=1,2$. De este modo, la condición de ortogonalidad queda:

$$\langle X_{n',s'}(r')|X_{n,s}(r)\rangle = \delta_{n',n}\delta_{s',s} \quad (C.15)$$

Donde $\delta_{i,j}$ es la función delta de Kronecker.

Para el campo magnético se utiliza un procedimiento análogo al anterior, donde sale la ecuación:

$$\nabla^2 B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (C.16)$$

Entonces por separación de variables se tiene:

$$B(r, t) = \Phi(r)M(t) \quad (C.17)$$

Usando (C.7) en (C.3) y (C.4) se encuentra que:

$$(C.18)$$

$$\begin{aligned}\dot{M}(t)\Phi(r) &= -cT(t)\nabla \times X(r) \\ M(t)\nabla \times \Phi(r) &= \frac{1}{c}\dot{T}(t)X(r)\end{aligned}\tag{C.19}$$

Diferenciando (C.19) en el tiempo, tomando el rotacional, y al usar (C.10) y (C.2), se obtiene:

$$\nabla^2\Phi(r) + k^2\Phi(r) = 0\tag{C.20}$$

Después, tomando la derivada con respecto al tiempo y el rotacional de (C.18), y usando (C.9) y (C.19), se obtiene:

$$\ddot{M}(t) + c^2k^2M(t) = 0\tag{C.21}$$

Φ es una solución de la ecuación de Helmholtz, y por lo tanto X también lo es; M es una solución de la ecuación del oscilador armónico, y por lo tanto T también lo es. Sin embargo, estos tienen el mismo valor propio $-k^2$.

Se puede colocar Φ y M en términos de X y T; si aplicamos la separación de variables en (18), entonces se puede escribir:

$$\Phi(r) = \zeta\nabla \times X(r)\tag{C.22}$$

$$T(t) = -\frac{\zeta}{c}\dot{M}(t)\tag{C.23}$$

Diferenciando (C.23) en el tiempo y usando (C.21) se llega:

$$M(t) = \frac{1}{\zeta ck^2}\dot{T}(t)\tag{C.24}$$

Dada la normalización de Φ y X, ζ está restringida a ser una fase, veamos cómo se obtiene:

$$\langle\Phi(r)|\Phi(r)\rangle = 1\tag{C.25}$$

Usando (C.22) en (C.25) y despejando $\frac{1}{\zeta^2}$:

$$\frac{1}{\zeta^2} = \langle \nabla \times X(r) | \nabla \times X(r) \rangle = \int dV \{ \nabla \times X^*(r) \} \cdot \{ \nabla \times X(r) \} \quad (C.26)$$

Usando la identidad

$$(\nabla \times X^*) \cdot (\nabla \times X) = \nabla \cdot \{ X^* \times (\nabla \times X) \} + X^* \cdot \{ \nabla \times (\nabla \times X) \} \quad (C.27)$$

y teniendo en cuenta el teorema de la divergencia para el primer término, y que para el segundo término $\nabla \times (\nabla \times X) = -\nabla^2 X = k^2 X$, se obtiene que:

$$\frac{1}{\zeta^2} = \oint dS \cdot \{ X^* \times (\nabla \times X) \} + k^2 \int dV X^*(r) \cdot X(r) \quad (C.28)$$

La primera integral se desvanece ya que $dS \cdot \{ X^* \times (\nabla \times X) \} = (\nabla \times X) \cdot (dS \times X^*)$ y la ecuación de frontera (C.5) para el campo eléctrico, implica que $dS \times X^* = 0$. Ya que X es normalizado, la ecuación (C.28) queda de la siguiente forma:

$$\zeta^2 = \frac{1}{k^2} \quad (C.29)$$

Por conveniencia se escoge que ζ sea real y que coincide con el inverso de k.

$$\zeta = \frac{1}{k} \quad (C.30)$$

Φ obedece a la condición de frontera de (C.5) para el campo magnético, entonces $n \cdot \Phi]_s = 0$. al demostrar esto se tiene:

$$n \cdot (\nabla \times X)]_s = \nabla \cdot \underbrace{(X \times n)]_s}_{\text{se desvanece}} + X \cdot (\nabla \times n)]_s \quad (C.31)$$

Ahora, aplicando el teorema integral de Stokes, para n sobre un área infinitesimal de la superficie,

$$\int dS (\nabla \times n) \cdot n = \oint n \cdot dl \quad (C.32)$$

Se nota que n es perpendicular a dl , entonces se concluye que $\nabla \times n]_s$ debe ser tangente a la superficie. Como X no tiene componente tangencial a la superficie por las condiciones de frontera, entonces $X \cdot (\nabla \times n)]_s = 0$. Usando estos resultados en (C.31), se concluye la condición de frontera para el campo magnético, dado que $n \cdot \dot{\Phi}]_s = 0$.

Ahora, como los campos eléctricos y magnéticos tienen modos en la cavidad, entonces estos serán la suma de todos los modos que subsisten dentro de la cavidad. La transformada de Fourier es:

$$e_{n,s} = \int dV X_{n,s}^* \cdot E = \langle X_{n,s} | E \rangle \quad (C.33)$$

$$b_{n,s} = \int dV \frac{1}{k_n} (\nabla \times X_{n,s}^*) \cdot B = \frac{1}{k_n} \langle \nabla \times X_{n,s} | B \rangle \quad (C.34)$$

Haciendo la transformada inversa, se tiene:

$$E = \sum_{n,s} X_{n,s} e_{n,s} \quad (C.35)$$

$$B = \sum_{n,s} \frac{1}{k_n} (\nabla \times X_{n,s}) b_{n,s} \quad (C.36)$$

De las ecuaciones de Maxwell (C.3) y (C.4) se deduce que:

$$\dot{b}_{n,s} = -ck_n e_{n,s} \quad (C.37)$$

$$\dot{e}_{n,s} = ck_n b_{n,s} \quad (C.38)$$

Diferenciando (C.37) con el tiempo y reemplazando en (C.38), y viceversa, produce la ecuación del oscilador armónico para los campos magnéticos y eléctricos.

$$\ddot{e}_{n,s} + c^2 k_n^2 e_{n,s} = 0 \quad (C.39)$$

$$\ddot{b}_{n,s} + c^2 k_n^2 b_{n,s} = 0 \quad (\text{C.40})$$

Este apéndice está basado en [6].

C.2. CAMPO ELECTROMAGNETICO E INTERACCION DE LA LUZ CON LA MATERIA

En esta sección, se tratan temas relacionados al cálculo de la cuantización del campo, la interacción de una partícula con este y una noción sobre el campo electromagnético coherente. Tratar la interacción con el campo cuantizado es importante ya que da una perspectiva detallada sobre las partículas que componen la luz (fotones) a un nivel cuántico, mientras que con un campo electromagnético en estado coherente, se refleja más la interacción de la materia con campos cuasi-clásicos, como por ejemplo un haz láser. Cabe destacar que el papel que efectúa una cavidad de electrodinámica cuántica, es confinar un modo de luz para que esta se acople con la materia dentro de esta. Este acoplamiento se va a ver reflejado en el hamiltoniano.

C.2.1. CUANTIZACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO EN UNA CAVIDAD

Si se definen las nuevas variables,

$$q_{n,s} = \frac{\gamma}{ck_n} b_{n,s} \quad (\text{C.41})$$

$$p_{n,s} = -Y e_{n,s} \quad (\text{C.42})$$

donde γ es una constante arbitraria. Estas adquieren, de las ecuaciones C.37 y C.38, un conjunto de osciladores armónicos no acoplados.

$$\dot{q}_{n,s} = p_{n,s} \quad (\text{C.43})$$

$$\dot{p}_{n,s} = -c^2 k_n^2 q_{n,s} \quad (\text{C.44})$$

Cuyo Hamiltoniano es:

$$H = \sum_{n,s} H_{n,s} \quad (\text{C.45})$$

con

$$H_{n,s} = \frac{1}{2} p_{n,s}^2 + \frac{c^2 k_n^2}{2} q_{n,s}^2 \quad (\text{C.46})$$

Entonces $q_{n,s}$ es la variable de posición del oscilador n,s , y $p_{n,s}$ es su momentum canónico conjugado. Se puede especificar \mathcal{Y} para la energía de la radiación de campo:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (E^2 + B^2) \quad (\text{C.47})$$

Y al usar (C.41) y (C.42) se encuentra que:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \sum_{n,s} \left\{ \frac{p_{n,s}^2}{\gamma^2} + \frac{c^2 k_n^2}{\gamma^2} q_{n,s}^2 \right\} \quad (\text{C.48})$$

De este modo, para quedar en acuerdo con (C.46), se tiene que gamma debe ser igual a $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Este es un tratamiento clásico donde se puede tener una relación del campo de radiación con el oscilador armónico. Pero el campo puede ser cuantizado simplemente reemplazando el corchete de Poisson de $q_{n,s}$ y $p_{n,s}$ por el conmutador cuántico. Los osciladores cuantizados, con posición $\hat{q}_{n,s}$ y momentum $\hat{p}_{n,s}$ tienen la siguiente conmutación:

$$[\hat{q}_{n,s}, \hat{p}_{n',s'}] = i\hbar \delta_{n,n'} \delta_{s,s'} \quad (\text{C.49})$$

Es conveniente definir los siguientes operadores:

$$\hat{a}_{n,s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar ck_n}} (ck_n \hat{q}_{n,s} + i\hat{p}_{n,s}) \quad (\text{C.50})$$

$$\hat{a}_{n,s}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar ck_n}} (ck_n \hat{q}_{n,s} - i\hat{p}_{n,s}) \quad (\text{C.51})$$

Cuyo conmutadores son:

$$[\hat{a}_{n,s}, \hat{a}_{n',s'}^+] = \delta_{n,n'} \delta_{s,s'} \quad (\text{C.52})$$

$$[\hat{a}_{n,s}, \hat{a}_{n',s'}] = 0 \quad (\text{C.53})$$

El campo cuantizado en términos de estos operadores es:

$$\hat{E} = i \sum_{n,s} \sqrt{2\pi\hbar ck_n} (\hat{a}_{n,s} - \hat{a}_{n,s}^+) X_{n,s} \quad (\text{C.54})$$

$$\hat{B} = \sum_{n,s} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_n}} (\hat{a}_{n,s} + \hat{a}_{n,s}^+) \nabla \times X_{n,s} \quad (\text{C.55})$$

Y el Hamiltoniano está dado por:

$$\hat{H} = \sum_{n,s} \frac{\hbar ck_n}{2} (\hat{a}_{n,s}^+ \hat{a}_{n,s} + \hat{a}_{n,s} \hat{a}_{n,s}^+) \quad (\text{C.56})$$

Como cada oscilador es independiente uno del otro, se les puede tratar de forma individual. Por simplicidad se obviara los subíndices n, s ; entonces el Hamiltoniano del oscilador de frecuencia $\omega = ck$ es dado por:

$$\hat{H}_{osc} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) \quad (\text{C.57})$$

Utilizando las reglas de conmutación se tiene:

$$\hat{H}_{osc} = \hbar\omega (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (\text{C.58})$$

Como se puede ver esto tiene la forma de un hamiltoniano de un oscilador cuántico. Dado esto se tiene que los vectores propios del operador a^+a dados por $|n\rangle$, son las mismas que las del hamiltoniano, produciendo un valor propio de n .

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle \text{ con } n = 0,1,2,\dots \quad (\text{C.59})$$

Donde $|n\rangle$ se le llama número de estado de fotones o estado de Fock de fotones. Otro de los resultados del oscilador armónico cuántico es que $\hat{a}^+|n\rangle$ y $\hat{a}|n\rangle$ son vectores propios de \hat{H} con valores propios $(E_n + \hbar\omega)$ y $(E_n - \hbar\omega)$ respectivamente. \hat{a}^+ es llamado operador de creación ya que este crea un cuanto de energía $\hbar\omega$, y análogamente \hat{a} es llamado el operador de destrucción ya que destruye un cuanto de energía $\hbar\omega$.

La acción de \hat{a}^+ y \hat{a} sobre $|n\rangle$ es la siguiente:

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \text{ y } \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (\text{C.60})$$

Y como no hay energías negativas se tiene que $\hat{a}|0\rangle = 0$ y la energía de punto cero o de vacío es:

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \quad (\text{C.61})$$

También se puede expandir $|n\rangle$ en términos de $|0\rangle$ de la siguiente forma:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (\text{C.62})$$

Dado que \hat{H} y $\hat{a}^+\hat{a}$ son hermíticos, los estados de diferentes números son ortogonales $\langle n'|n\rangle = \delta_{nn'}$, entonces los números de estados pueden formar una base y cumplen con la condición de completos:

$$\sum_0^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \quad (\text{C.63})$$

Si se quiere obtener los operadores de creación y destrucción dependiente del tiempo se puede partir de la siguiente relación:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] = -i\omega\hat{a} \quad (\text{C.64})$$

Y resolviendo esta ecuación se tiene que:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \quad (\text{C.65})$$

Y análogamente:

$$\hat{a}^+(t) = \hat{a}^+(0)e^{i\omega t} \quad (\text{C.66})$$

Profundización y demostraciones de los apartados anteriores, se pueden encontrar en la siguiente referencia [6, 16, 19].

C.2.2. INTERACCION DE UN PARTICULA CON UN CAMPO CUANTIZADO (modelo de Jaynes-Cummings)

Considere una partícula de dos niveles denotados por $|g\rangle$ (estado base) y $|e\rangle$ (estado excitado). El hamiltoniano involucra lo siguiente:

$$\hat{H} = \hat{H}_{part} + \hat{H}_{campo} + \hat{H}^{(I)} \quad (\text{C.67})$$

Donde \hat{H}_{part} es el hamiltoniano de la partícula libre, \hat{H}_{campo} es el hamiltoniano del campo electromagnético libre, y $\hat{H}^{(I)}$ es el hamiltoniano de la interacción de la partícula y el campo.

Para obtener $\hat{H}^{(I)}$ es necesario escribir el hamiltoniano que involucra tanto la partícula como el campo:

$$\hat{H}^{\prime} = \frac{1}{2m} (\hat{P} + eA(r, t))^2 - e\Phi(r, t) + V(r) \quad (C.68)$$

$\Phi(r, t)$ es el potencial escalar y $V(r)$ es el potencial coulombiano de la partícula. Si se aplica el cambio de variables que deja invariante los campos, se tiene:

$$\Phi'(r, t) = \Phi(r, t) + \frac{\partial A(t)}{\partial t} \cdot r \quad (C.69)$$

$$A'(r, t) = A(r, t) - \nabla(A(t) \cdot r) \quad (C.70)$$

Entonces el nuevo hamiltoniano, que es con el que se trabaja tomando $\Phi(r, t) = 0$ (ya que el campo electromagnético es viajero), se reduce a:

$$\hat{H}^{\prime\prime} = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + V(r) - \hat{d} \cdot \hat{E} = \hat{H}_{part} - \hat{d} \cdot \hat{E} = \hat{H}_{part} + \hat{H}^{(I)} \quad (C.71)$$

Donde $\hat{d} = -e\hat{r}$ es el momento dipolar de la partícula, y $E = \frac{\partial A(t)}{\partial t}$ es el campo eléctrico. Para llegar a la ecuación anterior se ha utilizado el hecho de que $A(r, t) \approx A(t)$, ya que para las dimensiones en que se trabajan (atómicas), A no tiene cambios considerables en el espacio. Dado esto se tiene que $A'(r, t)$ es cero.

Ya se conoce que $\hat{H}_{campo} = \hbar\omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$, pero por simplicidad se despreciara la energía de punto cero, debido a que esta no aporta en la dinámica del sistema. Entonces:

$$\hat{H}_{campo} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}) \quad (C.72)$$

Ahora el estudio se centra en deducir $\hat{H}^{(I)}$.

$$\hat{H}^{(I)} = -\hat{d} \cdot \hat{E} \quad (C.73)$$

Sustituyendo (C.54) en (C.73):

$$\hat{H}^{(I)} = ig\hat{d}(\hat{a}^+ - \hat{a}) \quad (C.74)$$

donde $g = \sqrt{2\pi\hbar ck} \cdot X$.

Es conveniente introducir los llamados operadores de transición atómica, definidos por:

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| = \hat{\sigma}_+^\dagger \quad (C.75)$$

y el operador inversión:

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (C.76)$$

Estos operadores obedecen al algebra de spin de Pauli:

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_3, \quad [\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_\pm] = 2\hat{\sigma}_\pm \quad (C.77)$$

Los elementos que estén por fuera de la diagonal del operador dipolo no son cero, ya que esto garantiza que exista una transición. Dado que el sistema no tiene una polarización permanente, los elementos de matriz de la diagonal son cero $\langle e|\hat{d}|e\rangle = \langle g|\hat{d}|g\rangle = 0$. De aquí se escribe el operador dipolar como:

$$\hat{d} = d|g\rangle\langle e| + d^*|e\rangle\langle g| = d(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \quad (C.78)$$

Donde $d = \langle e | \hat{d} | g \rangle$, y se ha asumido que este elemento de matriz es real. De esta forma la interacción hamiltoniana es:

$$\hat{H}^{(I)} = i\hbar\lambda(\hat{a}^+ - \hat{a})(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \quad (\text{C.79})$$

donde $\lambda = \frac{dg}{\hbar}$

Si se define que la energía es cero en la mitad entre las energías del estado $|g\rangle$ y $|e\rangle$ tal que la energía para el estado $|g\rangle$ es $E_g = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0$, y para $|e\rangle$ es $E_e = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, el hamiltoniano para la partícula es:

$$\hat{H}_{part} = \frac{1}{2}(E_e - E_g)\hat{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 \quad (\text{C.80})$$

Sustituyendo (C.80), (C.79) y (C.72) en (C.67)

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + i\hbar\lambda(\hat{a}^+ - \hat{a})(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \quad (\text{C.81})$$

Cuando hay dependencia del tiempo, de una forma análoga con que se obtuvieron las ecuaciones (C.65) y (C.66), se tiene:

$$\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t} \quad (\text{C.82})$$

Los términos de la multiplicación de (C.79) quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_+ \hat{a} &\sim e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\ \hat{\sigma}_- \hat{a}^+ &\sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \\ \hat{\sigma}_+ \hat{a}^+ &\sim e^{i(\omega_0 + \omega)t} \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a} \sim e^{-i(\omega_0 + \omega)t}$$

Para $\omega_0 \approx \omega$ los 2 últimos términos varían mucho más rápido que los dos primeros. Además los últimos términos no conservan la energía en contraste con los dos primeros. El término $\hat{\sigma}_- \hat{a}^+$ corresponde a la emisión de un fotón, cuando la partícula va del estado excitado al estado base, mientras que $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ corresponde a la absorción de un fotón, cuando la partícula pasa del estado base al excitado. Al integrar la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo como en teoría de perturbaciones, aparecerán en el denominador de los dos últimos términos de (C.83) $(\omega_0 + \omega)$ y en los dos primeros aparece $(\omega_0 - \omega)$ [19], de este modo para frecuencias de la radiación muy cercanas a ω_0 prevalece los dos primeros, entonces se pueden excluir los dos últimos. El hamiltoniano, en esta aproximación es llamado el hamiltoniano de Jaynes-Cummings, y es de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] + \hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + i \hbar \lambda (\hat{\sigma}_- \hat{a}^+ - \hat{\sigma}_+ \hat{a}) \quad (\text{C.84})$$

C.2.3. CAMPO ELECTROMAGNETICO COHERENTE

Cuando se hace pasar un haz de luz por un plano de doble rendija, se observa patrones de interferencia en formar de franjas brillantes y oscuras. Como interpretación de esto, el campo electromagnético de la primera rendija interfiere con el de la segunda. Pero cabe la siguiente pregunta, ¿qué es exactamente lo que interfiere?. Como se ha visto en la sesión anterior, no deben ser fotones individuales ya que el campo electromagnético está compuesto de una sumatoria entre los operadores de creación y destrucción, y además el estado de número de fotones no son vectores propios de estos operadores y por lo tanto no podría describirlo en el proceso de interferencia; esto se puede ver mejor en el cálculo del valor esperado del campo eléctrico sobre el estado número de fotones, la cual es cero. La respuesta a la pregunta inicial es que lo que interfiere es una superposición lineal de muchos fotones, donde el limite clásico del campo cuantizado es el límite en la cual el

número de fotones es bastante grande tal que el número de operadores llegan a ser continuos. Ahora cabe hacerse la siguiente pregunta: ¿se encuentra un estado en el límite de la mecánica cuántica, que describa los fenómenos de interferencia clásica con las ecuaciones de Maxwell?. Si estos existen, deben ser vectores propios del operador de creación y destrucción para que también sea vectores propios del campo electromagnético, y su valor esperado no se desvanezca. Por otra parte este valor esperado tendría que tener una forma ondulatoria clásica. Claramente se ve que si se reemplaza los operadores de creación y destrucción por variables continuas en (C.54) y (C.55), se produce un campo clásico. Primero se definirá el vector propio del operador \hat{a} .

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \text{y} \quad \langle\alpha|\hat{a}^+ = \alpha^*\langle\alpha| \quad (\text{C.85})$$

Donde α es complejo ya que \hat{a} no es hermético. $|\alpha\rangle$ es el vector propio por la derecha de \hat{a} , y $\langle\alpha|$ es el vector propio por la izquierda de \hat{a}^+ .

Como los estados $|n\rangle$ forman una base, entonces $|\alpha\rangle$ se puede expandir en términos de este, tal que:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (\text{C.86})$$

donde los coeficientes están dados de la siguiente forma [19]:

$$C_n = e^{\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (\text{C.87})$$

que al reemplazar en (C.86)

$$|\alpha\rangle = e^{\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{C.88})$$

Ahora al calcular el valor esperado del operador de campo eléctrico, reemplazando los operadores por su evolución en el tiempo en (C.54), se tiene:

$$\langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = i\sqrt{2\pi\hbar\omega} \left(e^{-i\omega t} \langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle - e^{i\omega t} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle \right) X(r) = i\sqrt{2\pi\hbar\omega} \left(e^{-i\omega t} \alpha - e^{i\omega t} \alpha^* \right) X(r) \quad (\text{C.89})$$

Si $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ y teniendo en cuenta que los modos pueden ser escritos como $X(r) = \text{sen}(k.r)$, entonces (C.89) queda:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle &= i\sqrt{2\pi\hbar\omega} |\alpha| \left(e^{-i(\omega t - \theta)} - e^{i(\omega t - \theta)} \right) \text{sen}(k.r) \\ &= \sqrt{8\pi\hbar\omega} \text{sen}(k.r) \text{sen}(\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

Claramente (C.90) representa un campo clásico, como era de esperarse.

APENDICE D: ECUACION MASTER

Para describir el amortiguamiento irreversible y decoherencia en mecánica cuántica, se tiene que considerar el acoplamiento de un pequeño sistema (sistema bajo estudio) y uno grande, la cual tiene un ancho de banda en frecuencia que permanece en equilibrio térmico y es llamado reservorio. Debido al acoplamiento del pequeño sistema con el grande, existe la decoherencia, y en el caso de un átomo, esta se manifiesta en la emisión espontánea, ya que el átomo esta intercambiando constantemente energía con un gran reservorio que es el ambiente. En este capítulo se deducirá la ecuación, que describe la dinámica del operador densidad para un sistema que está gobernado por un hamiltoniano compuesto de operadores de creación y destrucción. Dado lo anterior el hamiltoniano del sistema total esta dado por:

$$H = H_s + H_r + V \quad (D.1)$$

donde

$$H_s = \hbar\Omega a^\dagger a \quad (D.2)$$

Es el hamiltoniano no perturbado del pequeño sistema, tal que el subíndice denota la referencia de este.

$$H_r = \sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j \quad (D.3)$$

Es el hamiltoniano no perturbado del reservorio que consiste de un número muy grande de osciladores armónicos. r denota la referencia al reservorio, y

$$V = \hbar \sum_j (g_j a^\dagger b_j + g_j^* b_j^\dagger a) \quad (D.4)$$

Es el hamiltoniano de interacción del sistema-reservorio. El intercambio de energía entre el sistema y el reservorio consiste de la creación simultánea de un quantum de excitación del sistema con aniquilación de un quantum del j-esimo modo del reservorio.

El modelo específico definido anteriormente, es un buen modelo de acoplamiento a los modos continuos del campo electromagnético, de fonones en un cristal, etc., la cual es una razón para escogerlo. La otra razón es que los osciladores armónicos son los sistemas más simples de tratar.

Se supondrá que para el tiempo inicial t_0 , el pequeño sistema esta descrito por el operador densidad $\rho_s(t_0)$. De hecho $Tr_s\{\rho_s(t_0)\}=1$, donde Tr_s significa “traza sobre el sistema”. En contraste, se supondrá que el reservorio es demasiado grande con un inmenso número de grados de libertad. Usualmente este es descrito por un operador densidad independiente del tiempo ρ_r en equilibrio térmico a una temperatura T. Dado estas características, ρ_r esta dado por [18]:

$$\rho_r(H_r) = \frac{e^{-\beta H_r}}{Tr_r\{e^{-\beta H_r}\}} \quad (D.5)$$

donde $\beta = 1/kT$.

Para el tiempo inicial t_0 , el reservorio y el sistema no están correlacionados y por lo tanto el estado inicial de todo el sistema es descrito por el operador densidad factorizado.

$$\rho_{sr}(t_0) = \rho_s(t_0)\rho_r(H_r) \quad (D.6)$$

Para deducir la dinámica del operador densidad se tendrá en cuenta el modelo de Schrödinger al tratar de resolver la siguiente ecuación.

$$\dot{\rho}_{sr} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{sr}] \quad (\text{D.7})$$

Aquí no estamos interesados en la dinámica del reservorio, y de hecho para computar el valor esperado de un observable O solo se necesita $\rho_s(t)$ la cual fácilmente se puede ver de lo siguiente.

$$\langle O \rangle = \text{Tr}_{sr} \{ O \rho_{sr}(t) \} = \text{Tr}_s \{ O \text{Tr}_r \rho_{sr} \} = \text{Tr}_s \{ O \rho_s \} \quad (\text{D.8})$$

La traza sobre el reservorio no afecta al operador O . El operador $\rho_s(t)$, la cual es la traza sobre el reservorio del operador densidad total, es llamado el operador densidad reducido del sistema. Aquí la ecuación de movimiento de $\rho_s(t)$ es llamada la ecuación Máster.

En el modelo de interacción, donde no interesa la dinámica con energía no perturbada, se reescribe el hamiltoniano

$$H = H_0 + V \quad (\text{D.9})$$

donde

$$H_0 = H_s + H_r \quad (\text{D.10})$$

El operador densidad $P_{sr}(t)$ en el modelo de interacción es obtenido del operador densidad en el modelo de Schödinger vía la transformación unitaria

$$\rho_{sr}(t) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} P_{sr}(t) e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (\text{D.11})$$

Haciendo uso de la ecuación de movimiento de $\rho_{sr}(t)$ se puede llegar a la ecuación de movimiento de $P_{sr}(t)$ en el modelo de la interacción:

$$\frac{\partial P_{sr}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar} [V_I(t-t_0), P_{sr}(t)] \quad (\text{D.12})$$

donde

$$V_I(t-t_0) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} V e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (\text{D.13})$$

Es el hamiltoniano de interacción en el modelo de interacción. Usando las ecuaciones (D.2-D.4) se obtiene inmediatamente

$$V_I(t) = \hbar \sum_j g_j a^+ e^{i\Omega(t-t_0)} b_j e^{-i\omega_j(t-t_0)} + adj \quad (\text{D.14})$$

Aquí se ha hecho uso de la evolución del operador de creación ($a^+ e^{i\Omega(t-t_0)}$) y aniquilación ($a e^{-i\Omega(t-t_0)}$) y también el hecho que el sistema y el reservorio conmutan para tiempos iguales.

Finalmente se introduce el operador densidad reducido en el modelo de interacción para el sistema

$$\rho(t) = Tr_r \{ P_{sr}(t) \} \quad (\text{D.15})$$

Este está relacionado con el operador densidad reducido en el modelo de Schödinger por medio de la transformación unitaria

$$\rho_s(t) = e^{-iH_s(t-t_0)/\hbar} \rho(t) e^{iH_s(t-t_0)/\hbar} \quad (\text{D.16})$$

Diferenciando la anterior con respecto al tiempo

$$\frac{\partial \rho_s(t)}{\partial t} = e^{-iH_s(t-t_0)/\hbar} \left[[H_s, \rho(t)] + i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \right] e^{iH_s(t-t_0)/\hbar} \quad (\text{D.17})$$

Teniendo todo el formalismo requerido, se puede proceder a la solución del problema. En general el problema del acoplamiento sistema –reservorio no es dócil a una solución exacta. Dado esto, se utilizará la forma iterativa para resolver el problema de segundo orden en la teoría de perturbaciones. Integrando (D.12) desde t_0 a t y tomando $P_{sr}(t) \approx P_{sr}(t_0)$ se obtiene la solución de $P_{sr}(t)$ de primer orden. Usando este valor en (D.12) e integrando de nuevo, se obtiene la solución de $P_{sr}(t)$ de segundo orden. Esto es:

$$P_{sr}(t) = P_{sr}(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' [V_I(t'-t_0), P_{sr}(t_0)] \quad (D.18)$$

$$- \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [V_I(t'-t_0), [V_I(t''-t_0), P_{sr}(t_0)]] + \dots$$

Haciendo la traza sobre el reservorio se produce la evolución del operador densidad reducido $\rho(t)$. A continuación, se hará uso de la siguiente aproximación:

$$\dot{\rho}(t) \approx \frac{\rho(t) - \rho(t-\tau)}{\tau} \quad (D.19)$$

Donde el intervalo de tiempo $\tau = t - t_0$ es un tiempo largo comparado al tiempo de memoria del reservorio τ_c (inversa del ancho de banda del reservorio), pero corto comparado a los tiempos que producen cambios significantes en las variables del sistema. Es conveniente desfazar el tiempo en τ de tal forma que se obtiene:

$$\dot{\rho}(t+\tau) \approx \frac{\rho(t+\tau) - \rho(t)}{\tau} \quad (D.20)$$

Aquí se asumirá que $\rho(t)$ no varía significativamente en el tiempo τ , y que $\dot{\rho}(t)$ esta dado por la expresión (D.19). Se ve que el conmutador de (D.18) es

$$[V', [V'', P_{sr}]] = V'V''P_{sr} - V'P_{sr}V'' + adj. \quad (D.21)$$

Dadas estas observaciones, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) \approx & -\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau d\tau' \text{Tr}_r \{V_I(\tau') P_{sr}(t)\} \\ & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \text{Tr}_r \{V_I(\tau') V_I(\tau'') P_{sr}(t) - V_I(\tau') P_{sr}(t) V_I(\tau'')\} + adj. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Aquí el operador depende de τ y t . Sin embargo, se verá que τ está asociado a solamente los operadores del reservorio, y su dependencia desaparece en caso de reservorios estacionarios, con memoria infinitamente corta. Se puede simplificar el algebra para V_I de (D.14) escribiendo la ecuación en una forma más compacta

$$V_I(\tau) = \hbar a^+ F(\tau) + \hbar a F^+(\tau) \quad (\text{D.23})$$

donde el operador

$$F(\tau) = -i \sum_j g_j b_j e^{i(\Omega - \omega_j)\tau} \quad (\text{D.24})$$

La anterior actúa solamente en el espacio de Hilbert del reservorio. En la aproximación de Heisenberg, el operador $F(\tau)$ es identificado como operadores de ruido.

Cuando se hace la traza sobre el reservorio, se encuentran términos del tipo:

$$\text{Tr}_r \{a^+ F(\tau) P_{sr}(t)\} = a^+ \rho(t) \text{Tr}_r \{F(\tau) \rho_r(H_r)\} \quad (\text{D.25})$$

Donde se ha usado (D.6) y el hecho que para t_0 el modelo de la interacción y las matrices densidad de Schödinger son idénticas. La segunda traza en esta ecuación es solo el valor esperado F_r del operador reservorio $F(\tau)$. Este es cero ya que el

operador densidad del reservorio es diagonal, como se ve en (D.5). Sustituyendo (D.23) en (D.22) se encuentra que:

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2 \tau} \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \left[\begin{aligned} & a^+ a \rho(t) \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r - a \rho(t) a^+ \langle F(\tau'') F^+(\tau') \rangle_r \\ & + a a^+ \rho(t) \langle F^+(\tau') F(\tau'') \rangle_r - a^+ \rho(t) a \langle F^+(\tau'') F(\tau') \rangle_r \\ & + a a \rho(t) \langle F^+(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r - a \rho(t) a \langle F^+(\tau'') F^+(\tau') \rangle_r \\ & + a^+ a^+ \rho(t) \langle F(\tau') F(\tau'') \rangle_r - a^+ \rho(t) a^+ \langle F(\tau'') F(\tau') \rangle_r \end{aligned} \right] + adj. \quad (D.26)$$

Usando (D.24), se encuentra que los términos en el promedio del reservorio tienen valores como:

$$\begin{aligned} \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r &= \sum_{i,j} g_i g_j^* \langle b_i b_j^+ \rangle_r e^{i\Omega(\tau' - \tau'')} e^{i(\omega_j \tau'' - \omega_i \tau')} \\ \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r &= \sum_i |g_i|^2 \langle b_i b_i^+ \rangle_r e^{i(\Omega - \omega_i)(\tau' - \tau'')} \end{aligned} \quad (D.27)$$

Este último sale del hecho de que ρ_r es diagonal. Promedios como $\langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r$ son identificados como funciones de correlación de primer orden del reservorio, a sea, da el nivel de interferencia en el reservorio. Estos dependen solo de $T = \tau' - \tau''$, la cual el reservorio es estacionario que es consecuencia directa del equilibrio térmico. La ecuación (D.27) nos dice la rapidez con que las correlaciones decaen. A continuación se utilizara la aproximación de Markoff [20] la cual asume que el tiempo de correlación es infinitamente corto comparado a todos los tiempos de mayor interés para el sistema.

$$\int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r = \int_0^\tau d\tau' \sum_i |g_i|^2 \langle b_i b_i^+ \rangle_r \int_0^{\tau'} dT e^{i(\Omega - \omega_i)T} \quad (D.28)$$

Para modos continuos, la sumatoria de todos los modos i se reemplazan por una integral donde se tiene en cuenta la densidad de estados del reservorio [20]. Esto es:

$$\int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r = \tag{D.29}$$

$$- \frac{\mathcal{V}}{(2\pi c)^3} \int_0^{\tau} d\tau' \int d\omega \omega^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times |g(\omega)| \langle b_i(\omega) b_i^+(\omega) \rangle_r \int_0^{\tau'} dT e^{i(\Omega - \omega)T}$$

Con la densidad de estados igual a:

$$D(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \tag{D.30}$$

Si se considera que el reservorio tiene suficiente ancho de banda, entonces la integral sobre la exponencial se puede aproximar a una función delta. Teniendo en cuenta esto se encuentra que (D.28) llega a ser igual a:

$$\int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r = \frac{\gamma\tau}{2} \langle b(\Omega) b^+(\Omega) \rangle_r \tag{D.31}$$

donde se introduce la tasa de decaída,

$$\gamma = 2\pi D(\Omega) |g(\Omega)|^2 \tag{D.32}$$

Aquí $|g(\omega)|^2 \langle b(\omega) b^+(\omega) \rangle_r$ es una medida de la intensidad de acoplamiento del simple oscilador armónico con el modo del reservorio de frecuencia ω .

Cuando se extiende el límite superior de la integral en T al infinito en (D.28), donde implícitamente se asume que el tiempo de correlación del reservorio τ_c es suficientemente pequeño que el integrando se desvanece después de mucho tiempo, la teoría de perturbación de segundo orden permanece válida. Así la aproximación (D.32) es válida para tiempos cortos comparado a la decaída del sistema, pero grandes comparado al tiempo de correlación del reservorio.

El valor medio del operador número b^+b en la distribución térmica está dada por:

$$Tr_r \{b^+(\Omega)b(\Omega)\rho_r(H_r)\} = \langle b^+(\Omega)b(\Omega) \rangle_r = \bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega} - 1} \quad (D.33)$$

Similarmente,

$$\langle b(\Omega)b^+(\Omega) \rangle_r = \bar{n} + 1 \quad (D.34)$$

Sustituyendo (D.31-D.34) en (D.26) se encuentra la ecuación máster en el modelo de la interacción.

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)[a^+a\rho(t) - a\rho(t)a^+] - \frac{\gamma}{2}\bar{n}[\rho(t)aa^+ - a^+\rho(t)a] + adj. \quad (D.35)$$

Aquí se han despreciado términos que contienen promedios como $\langle F(\tau')F(\tau'') \rangle$ y $\langle F^+(\tau')F^+(\tau'') \rangle$, la cual es válida si el reservorio es térmico y su operador densidad es diagonal en la representación de energía. Si el reservorio esta a temperatura cero, entonces $\bar{n} = 0$, y los términos que permanecen en la ecuación, son debido a las fluctuaciones de vacío. Así se tiene.

$$\dot{\rho}(t) = \frac{\gamma}{2}[2a\rho(t)a^+ - a^+a\rho(t) - \rho(t)a^+a]. \quad (D.36)$$

Reemplazando (D.36) en (D.17) y utilizando (D.16), se obtiene la ecuación máster en el modelo de Schödinger:

$$\dot{\rho}_s(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_s, \rho_s(t)] + \frac{\gamma}{2}[2a\rho_s(t)a^+ - a^+a\rho_s(t) - \rho_s(t)a^+a] \quad (D.37)$$

En esta ecuación, el conmutador representa la evolución libre del sistema, mientras que los términos que contienen γ , son los términos que producen disipación de energía en el sistema.

BIBLIOGRAFIA

1. Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. "*Quantum computation and quantum information*". Cambridge University Press 2000.
2. L Pavesi, L Dal Negro, C Mazzoleni, G Franzò, and F Priolo. "*Optical gain in silicon nanocrystals*". *Nature*, 408:440–444, November 2000.
3. The Strouse Group. University of California Santa Barbara: Chemistry Department. "*The basics of quantum dots*". <http://www.chem.fsu.edu/~strouse/learning.html>.
4. "*Como hacer puntos cuanticos*". http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_dot
5. P. Machnikowski, A. Grodecka, C. Weber, A. Knorr. "*Optical control and decoherence of spin qubits in quantum dots*". *Materials Science-Poland*, Vol. 26, No. 4, 2008.
6. Sergio M. Dutra. "*Cavity quantum electrodynamics*" Wiley-Interscience, 2005.
7. E. Yablonovitch and T.J. Gmitter, "*Photonic Band Structure: The face-centered-cubic case*", *Phys. Rev. Lett.* vol. 63, 1950-1953 (1989).
8. J. C. Knight, J. Broeng, T. A. Birks, P. St. J. Russell, "*Photonic Band Gap guidance in optical fibers*", *Science* vol. 282, 1476-1478 (1998).
9. John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, Robert D. Meade. "*Photonic Crystals*". Copyright 2008, Princeton University press.
10. Pablo Aitor Postigo. "*Linea de cristales fonicos de semiconductores III-V en el instituto de microelectronica de madrid*" http://www.imm.cnm.csic.es/cristalfonico/cristalesfonicos1.htm#_edn1
11. Rafael González Farfán. "*Un acercamiento a un inquietante aspecto de la mecánica cuántica*". Diciembre 2000.
12. Guillermo García Alcaine. "*Einstein y la Mecánica Cuántica*". Universidad Complutense, Madrid 26 de mayo de 2005.
13. C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. Wootters, "*Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and EPR Channels*". *Phys. Rev. Lett.* vol. **70**, pp 1895-1899 (1993).
14. Joonwoo Bae. "*Entanglement and quantum cryptography*". Barcelona, January, 2007.

15. Richard P. Feynman. “*Simulating Physics with Computers*”. International Journal of Theoretical Physics, Vol 21, Nos. 6/7, 1982.
16. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe. “*Quantum mechanics*”, vol. 1.
17. Guillermo García Alcaine. “*Enredo Cuántico*”. Universidad Complutense, Madrid, 2000.
18. Walter Greiner, Ludwig Neise, Horst Stöcker. “*Thermodynamics and statistical mechanics*”. Springer, 1997.
19. Christopher Gerry, Peter Knight. “*Introductory quantum optics*”. Cambridge University Press, 2004.
20. Pierre Meystre, Murray Sargent III. “*Elements of quantum optics*”. Springer, 2007.
21. Jelena Vuckovic and Yoshihisa Yamamoto. “*Photonic crystal microcavities for cavity quantum electrodynamics with a single quantum dot*”. Applied physics letters volume 82, number 15, 14 april 2003.
22. Jelena Vuckovic, Marko Loncar, Hideo Mabuchi, and Axel Scherer. “*Design of photonic crystal microcavities for cavity QED*”. arXiv:quant-ph/0208101v1, 15 Aug 2002.
23. Joon Ho Baek, Happy Hsin, Joshua LaForge, Daniel Nedelcu. “*Quantum Computing with Quantum Dots*”. <http://unjobs.org/tags/quantum-dots>, August 13, 2004.
24. Mang Feng, Irene D’Amico, Paolo Zanardi and Fausto Rossi. “*Spin-based quantum information processing with semiconductor quantum dots and cavity QED*”. arXiv:quant-ph/0209070v1, 10 Sep 2002.
25. A. Imamoglu, D. D. Awschalom, G. Burkard, D. P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin, A. Small. “*Quantum information processing using quantum dot spins and cavity-QED*”. arXiv:quant-ph/9904096v2, 15 Sep 1999.
26. Yu-xi Liu, Sahin Kaya, Ozdemir, Masato Koashi, and Nobuyuki Imoto. “*Dynamics of entanglement for coherent excitonic states in a system of two coupled quantum dots and cavity QED*”. arXiv:quant-ph/0211055v1 11 Nov 2002.
27. Prof. Atac Imamoglu (ETH Zürich). “*Cavity-QED and spin based quantum information processing*”. <http://nccr-qp.epfl.ch>, March 2007.

28. Makoto Takeuchi, Nobuyuki Takei, Peng Zhang, Masahito Ueda, and Mikio Kozuma. “*Single Nuclear Spin Cavity QED*”. arXiv:0907.0336v1 [quant-ph] 2 Jul 2009.
29. Peijun Yao and S. Hughes. “*Controlled cavity-QED using a photonic crystal waveguide-cavity system*”. arXiv:0904.4469v3 [physics.optics] 27 Aug 2009.
30. Ferdinand Helmer¹ and Florian Marquardt. “*Measurement-based Synthesis of multi-qubit Entangled States in Superconducting Cavity QED*”. arXiv:0902.0341v2 [cond-mat.mes-hall] 3 Feb 2009.
31. Dirk Englund, Andrei Faraon, Ilya Fushman, and Jelena Vuckovic. “*Quantum information processing on photonic crystal chips*”. 15 April 2008, SPIE Newsroom. DOI: 10.1117/2.1200801.0986