

**IDENTIFICACIÓN DE TIPOS DE PAPEL A PARTIR DEL ANÁLISIS DE LA  
DEFORMACIÓN DEL PERFIL DEL HAZ LÁSER**

**EDWIN ANDRES RODRIGUEZ BURBANO**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA**

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN**

**PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA**

**2012**

**IDENTIFICACIÓN DE TIPOS DE PAPEL A PARTIR DEL ANÁLISIS DE LA  
DEFORMACIÓN DEL PERFIL DEL HAZ LÁSER**

Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar al título de  
Ingeniero Físico

EDWIN ANDRES RODRIGUEZ BURBANO

Director: Ing. MARIO MILVER PATIÑO VELASCO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA

2012

## CONTENIDO

	Pág.
LISTA DE FIGURAS .....	i
LISTA DE TABLAS .....	v
<b>RESUMEN</b> .....	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>2</b>
<b>1. PRINCIPIOS TEÓRICOS</b> .....	<b>4</b>
1.1. CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES Y PROPIEDADES FÍSICAS DEL PAPEL .....	4
1.1.1. Fibras.....	4
1.1.2. Flocculación.....	5
1.1.3. Orientación .....	6
1.1.4. Fracción sólida.....	7
1.1.5. Gramaje .....	9
1.1.6. Atributos y usos del papel.....	9
1.2. PRINCIPIOS BÁSICOS DEL LÁSER .....	10
1.3. TEORÍA DE ESPARCIMIENTO ELECTROMAGNÉTICO, ABSORCIÓN Y EMISIÓN .....	17
1.4. PROCESOS DE ESPARCIMIENTO Y ABSORCIÓN.....	22
1.5. ESPARCIMIENTO RAYLEIGH.....	28
1.6. ESPARCIMIENTO MIE .....	29
1.7. FUNCIONES DE FASE .....	31

<b>2.</b>	<b>SISTEMA IMPLEMENTADO .....</b>	<b>35</b>
2.1.	DISEÑO DEL SISTEMA.....	36
<b>3.</b>	<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>42</b>
3.1.	RESULTADOS .....	42
3.1.1.	Papel Bond .....	455
3.1.2.	Papel Bristol blanco .....	47
3.1.3.	Papel Esmaltado C1S gloss .....	48
3.1.4.	Papel Esmaltado C2S mate.....	52
3.1.5.	Papel Esmaltado C1S SBS.....	56
3.1.6.	Papel Esmaltado C2S gloss .....	59
3.1.7.	Papel Reprograf.....	63
3.1.8.	Parámetros $n$ y $z$ de la función de fase exponencial coseno .....	64
3.1.9.	Establecimiento de relación entre parámetros y gramaje .....	65
3.2.	DISCUSIÓN .....	66
	<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>69</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>70</b>
	<b>ANEXOS.....</b>	<b>74</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1.</b> Imagen microscópica de las fibras de las hojas de papel. ....	4
<b>Figura 1.2.</b> Floculación .....	6
<b>Figura 1.3.</b> Diagrama polar de probabilidad.....	7
<b>Figura 1.4.</b> Orientación de las fibras .....	7
<b>Figura 1.5.</b> Fracción sólida en relación con el contraste.....	8
<b>Figura 1.6.</b> Comportamiento del diámetro del haz Gaussiano.....	12
<b>Figura 1.7.</b> Distribución de intensidad de varios haces Hermite-Gauss. ....	14
<b>Figura 1.8.</b> Modos transversales ( $TEM_{p,l}$ ) para un resonador óptico cilíndrico .....	15
<b>Figura 1.9.</b> Curvas Gaussianas con distintos parámetros. ....	16
<b>Figura 1.10.</b> Comportamiento de un haz de luz al chocar con una partícula, varias partículas, capa de partículas y esparcimiento recibido en una partícula. ....	18
<b>Figura 1.11.</b> Un electrón de carga $q$ iluminado por una onda linealmente polarizada.....	23
<b>Figura 1.12.</b> El flujo $S$ de radiación es disminuido por una cantidad $dS$ al pasar a través de un material espaciador de ancho $dz$ . ....	26
<b>Figura 1.13.</b> Esparcimiento coherente de la radiación por los osciladores atómicos inducidos por el campo excitador en un elemento de volumen del medio.....	27
<b>Figura 1.14.</b> Densidades de probabilidad dadas para la función de fase Henyey-Greenstein parametrizada para diferentes valores de $g$ .....	32
<b>Figura 1.15.</b> Densidades de probabilidad dadas para la función de fase exponencial coseno parametrizada para diferentes valores de $n$ .....	33
<b>Figura 2.1.</b> Montaje experimental para obtención de imágenes con esparcimiento de luz láser en las muestras de papel. ....	37
<b>Figura 2.2.</b> Imagen de luz láser esparcida y perfil de línea de un papel delgado $60 \frac{gr}{m^2}$ .....	39
<b>Figura 2.3.</b> Imagen de luz láser esparcida y perfil de línea de un papel grueso $300 \frac{gr}{m^2}$ .....	40
<b>Figura 3.1.</b> Gráficas de las funciones de fase HG, de fase exp. coseno y exp. Gaussiana. ....	42
<b>Figura 3.2.</b> Diferencia de funciones exponencial Gaussiana y coseno para Bond $60 \left(\frac{gr}{m^2}\right)$ .....	43
<b>Figura 3.3.</b> Imágenes de luz láser esparcida del papel Bond de 60 y 75 $\left(\frac{gr}{m^2}\right)$ .....	45
<b>Figura 3.4.</b> Gráficas Bond $60 \left(\frac{gr}{m^2}\right)$ y función de fase exp. coseno con su desviación estándar. ....	46
<b>Figura 3.5.</b> Gráficas Bond $75 \left(\frac{gr}{m^2}\right)$ y función de fase exp. coseno con su desviación estándar. ....	46

<b>Figura 3.6.</b> Imagen de luz láser esparcida del papel Bristol blanco de $150(\frac{gr}{m^2})$ . .....	47
<b>Figura 3.7.</b> Gráficas Bristol 150 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exp. coseno con su desviación estándar... ..	47
<b>Figura 3.8.</b> Imágenes de luz láser esparcida de papel Esmaltado C1S gloss de 80, 90, 115, 160 y 210 $(\frac{gr}{m^2})$ .....	48
<b>Figura 3.9.</b> Gráficas Esmaltado C1S gloss 80 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	49
<b>Figura 3.10.</b> Gráficas Esmaltado C1S gloss 90 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	49
<b>Figura 3.11.</b> Gráficas Esmaltado C1S gloss 115 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	50
<b>Figura 3.12.</b> Gráficas Esmaltado C1S gloss 160 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	50
<b>Figura 3.13.</b> Gráficas Esmaltado C1S gloss 210 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	51
<b>Figura 3.14.</b> Imágenes de luz láser esparcida del papel Esmaltado C2S mate de 90, 115, 150, 200 y 240 $(\frac{gr}{m^2})$ .....	52
<b>Figura 3.15.</b> Gráficas Esmaltado C2S mate 90 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno. ....	53
<b>Figura 3.16.</b> Gráficas Esmaltado C2S mate 115 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno. ....	53
<b>Figura 3.17.</b> Gráficas Esmaltado C2S mate 150 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno. ....	54
<b>Figura 3.18.</b> Gráficas Esmaltado C2S mate 200 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno. ....	54
<b>Figura 3.19.</b> Gráficas Esmaltado C2S mate 240 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno. ....	55
<b>Figura 3.20.</b> Imágenes de luz láser esparcida del papel Esmaltado C1S SBS de 225, 250 y 280 $(\frac{gr}{m^2})$ . .....	56
<b>Figura 3.21.</b> Gráficas Esmaltado C1S SBS 225 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	57
<b>Figura 3.22.</b> Gráficas Esmaltado C1S SBS 250 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	57
<b>Figura 3.23.</b> Gráficas Esmaltado C1S SBS 280 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	58
<b>Figura 3.24.</b> Imágenes de luz láser esparcida del papel Esmaltado C2S gloss de 90, 115, 150, 200, 240 y 300 $(\frac{gr}{m^2})$ .....	59
<b>Figura 3.25.</b> Gráficas Esmaltado C2S gloss 90 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	60
<b>Figura 3.26.</b> Gráficas Esmaltado C2S gloss 115 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	60
<b>Figura 3.27.</b> Gráficas Esmaltado C2S gloss 150 $(\frac{gr}{m^2})$ y función de fase exponencial coseno.....	61

<b>Figura 3.28.</b> Gráficas Esmaltado C2S gloss 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno.....	61
<b>Figura 3.29.</b> Gráficas Esmaltado C2S gloss 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno.....	62
<b>Figura 3.30.</b> Gráficas Esmaltado C2S gloss 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno.....	62
<b>Figura 3.31.</b> Imágenes de papel Reprograf de 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). .....	63
<b>Figura 3.32.</b> Gráficas Reprograf 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno. ....	63
<b>Figura 3.33.</b> Gráfica del parámetro $n$ de la función de fase exponencial coseno. ....	65
<b>Figura 3.34.</b> Gráfica del parámetro $z$ de la función de fase exponencial coseno. ....	65
<b>Figura 3.35.</b> Desviación estándar para uno de los 23 tipos de papeles blancos. ....	67
<b>Figura A.1.</b> Diferencia de funciones exponencial Gaussiana y coseno para Bond 60 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	75
<b>Figura A.2.</b> Diferencia de funciones exponencial Gaussiana y coseno para Bond 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	75
<b>Figura A.3.</b> Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para Bristol 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	76
<b>Figura A.4.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 80 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	76
<b>Figura A.5.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	76
<b>Figura A.6.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	77
<b>Figura A.7.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 160 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	77
<b>Figura A.8.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 210 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	77
<b>Figura A.9.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	78
<b>Figura A.10.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	78
<b>Figura A.11.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	78
<b>Figura A.12.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	79
<b>Figura A.13.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	79
<b>Figura A.14.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S SBS 225 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	79
<b>Figura A.15.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S SBS 250 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	80
<b>Figura A.16.</b> Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C1S SBS 280 ( $\frac{gr}{m^2}$ ). ....	80

<b>Figura A.17.</b>	Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ )..	80
<b>Figura A.18.</b>	Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )	81
<b>Figura A.19.</b>	Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ )	81
<b>Figura A.20.</b>	Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ )	81
<b>Figura A.21.</b>	Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ )	82
<b>Figura A.22.</b>	Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ )	82
<b>Figura A.23.</b>	Diferencia funciones exp. Gaussiana y coseno para Reprograf 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).....	82



## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 2.1.</b> Diferentes tipos de papel que se usan en el sistema.....	41
<b>Tabla 3.1.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Bond 60 y 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).....	45
<b>Tabla 3.2.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Bristol blanco 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).....	47
<b>Tabla 3.3.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S gloss 80 y 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).....	49
<b>Tabla 3.4.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S gloss 115 y 160 ( $\frac{gr}{m^2}$ )..	50
<b>Tabla 3.5.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S gloss 210 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).....	51
<b>Tabla 3.6.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S mate 90 y 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) ....	53
<b>Tabla 3.7.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S mate 150 y 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) ..	54
<b>Tabla 3.8.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S mate 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) .....	55
<b>Tabla 3.9.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S SBS 225 y 250 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) ...	57
<b>Tabla 3.10.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S SBS 280 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) .....	58
<b>Tabla 3.11.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S gloss 90 y 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )..	60
<b>Tabla 3.12.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S gloss 150 y 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ )	61
<b>Tabla 3.13.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S gloss 240 y 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ )	62
<b>Tabla 3.14.</b> Parámetros de la función Gaussiana del papel Reprograf 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) .....	63
<b>Tabla 3.15.</b> Datos de los parámetros de la función de fase exp. Coseno en 23 tipos de papel .....	64

## RESUMEN

En este trabajo se desarrolla una metodología que permite identificar papeles blancos de diferente gramaje, a partir del estudio de la deformación que sufre el perfil de un haz láser cuando lo atraviesa. El principio básico en el que se fundamenta es que el esparcimiento de la luz se incrementa a medida que el espesor del papel también lo hace, ya que este último está compuesto por fibras que se comportan como elementos dispersores, lo que origina una alteración en el perfil Gaussiano que tiene el haz del láser cuando incide sobre la muestra de papel. A partir de la evaluación del ensanchamiento del perfil y la generación de una función que lo relacione con el espesor, es posible establecer un método de clasificación de papeles por gramaje.

## INTRODUCCIÓN

Las técnicas ópticas de análisis implican la medida de la radiación electromagnética emitida por la materia o que interacciona con ella. Los métodos ópticos de análisis cubren un amplio campo de aplicaciones debido a su rapidez, a la gran gama de instrumentación disponible, sus grandes posibilidades de automatización, su aplicación en tiempo real; son técnicas no invasivas, no destructivas, con incertidumbre baja, de bajo costo, entre otras.

La técnica utilizada en esta investigación se conoce como esparcimiento frontal, en la cual las fibras del papel, que son aproximadamente 10 veces más grandes respecto a la longitud de onda de la luz láser incidente, se iluminan con la luz láser de tal forma que la energía que se esparce está dentro de los  $90^\circ$  alrededor de la dirección de propagación de la onda incidente.

El haz sufre una deformación al pasar por las fibras de papel debido a que se presenta reflexión, absorción y esparcimiento de la luz incidente, y por lo tanto, la transmisión del haz sufrirá un cambio en su perfil. Debido a que la longitud de onda del haz es mucho más pequeña que la separación de las fibras, gran parte de esta luz será transmitida.

Este informe está organizado en tres capítulos. En el primer capítulo se presentan las características del papel y sus propiedades, se brinda información acerca de sus fibras, de la floculación presente en el papel, de la orientación de las fibras, de su fracción sólida, del gramaje, de los atributos y usos del papel que se estudia. También se presenta una breve descripción del perfil Gaussiano del láser, del estudio que se realiza al haz de luz considerándolo de naturaleza oscilatoria armónica, para así obtener los modos del láser. Posteriormente se describen algunos aspectos de la teoría de esparcimiento electromagnético, absorción y emisión del rayo de luz. Una breve descripción acerca de esparcimiento Rayleigh y Mie, y por último se estudian las funciones de fase en la descripción de

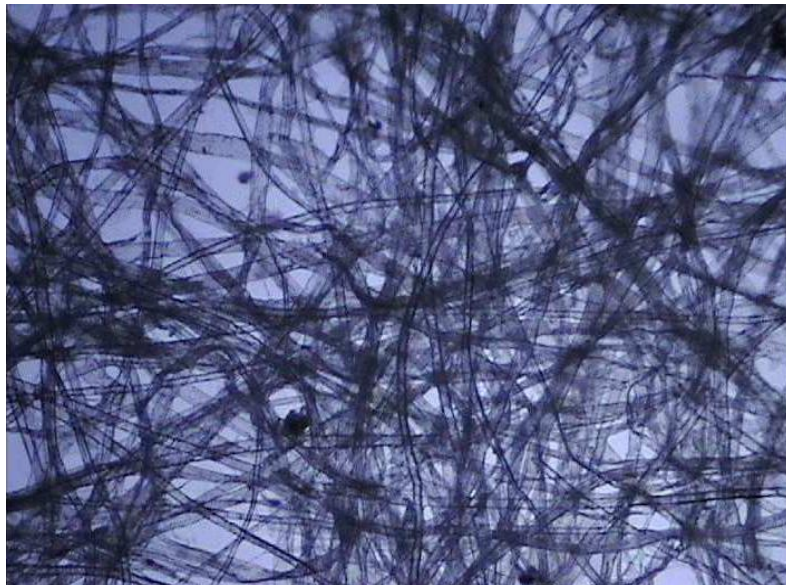
esparcimiento. En el segundo capítulo, se presenta la descripción del sistema implementado, sus especificaciones, el sistema de iluminación, el sistema de captura de imágenes, la descripción de los elementos utilizados, los tipos de papeles que se estudiaron, el procedimiento a seguir para registrar los datos y el método de análisis implementado para evaluar la información obtenida. En el tercer capítulo se muestran los resultados obtenidos, en forma de imágenes y tablas y la función de fase obtenida en cada caso, con su respectiva desviación estándar. Se comparan los resultados experimentales con la función de fase seleccionada, se analiza su concordancia, se extraen los parámetros que permiten relacionar la función de fase con el gramaje del papel y por último se analiza la correlación entre estos parámetros y la característica del papel que los produce, a fin de obtener descriptores de clasificación.

## 1. PRINCIPIOS TEÓRICOS

### 1.1. CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES Y PROPIEDADES FÍSICAS DEL PAPEL

El papel es una capa delgada elaborada con pastas de fibras vegetales que son molidas, blanqueadas, diluidas en agua, secadas y endurecidas para mejorar su desempeño. Las fibras están aglutinadas mediante enlaces por puentes de hidrógeno [1].

#### 1.1.1. Fibras



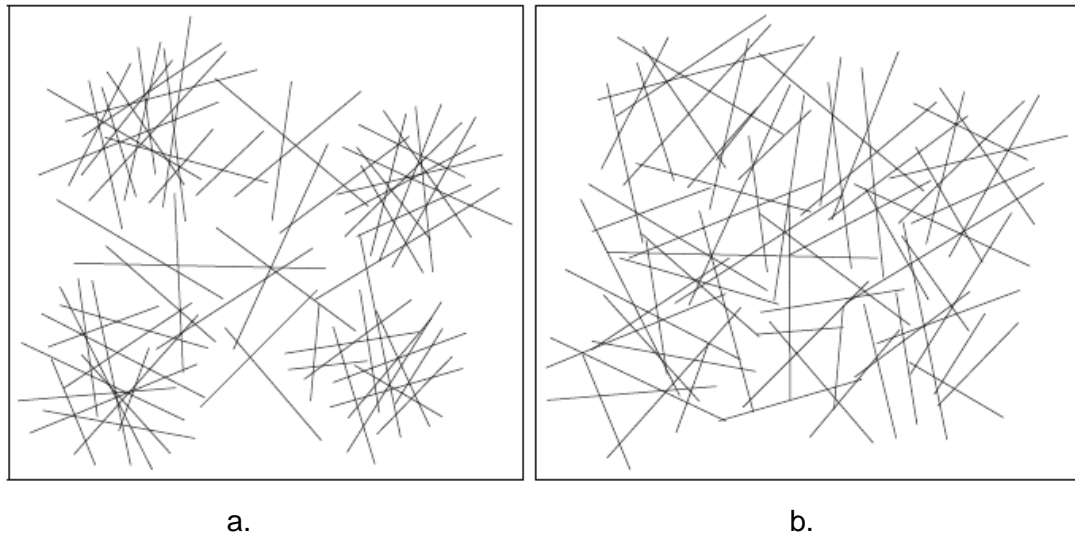
**Figura 1.1.** Imagen microscópica de las fibras de las hojas de papel [2].

Las fibras celulósicas son el compuesto principal del papel [3]. En general, son fibras que presentan una longitud de 1 a 2 mm, con un diámetro de 10 a 40  $\mu\text{m}$ . La figura 1.1 presenta una imagen microscópica del papel, en la cual se pueden apreciar las fibras que conforman el papel.

La celulosa es un polisacárido compuesto exclusivamente de moléculas de glucosa y existe en diferentes grados de pureza [4]. Los fabricantes buscan la mejor pureza por lo que es importante la calidad de la pulpa. Los diferentes tipos de celulosa son determinados empíricamente a través de análisis químicos; son llamadas celulosas Alfa, Beta y Gamma; siendo la celulosa Alfa el componente más “puro”. Alfa, Beta y Gamma son anómeros que se encuentran en isómeros de los monosacáridos de más de 5 átomos de carbono, determinados en una estructura cíclica (hemiacetálica) de acuerdo a la orientación del grupo hidroxilo en una proyección de Haworth [2].

### **1.1.2. Floculación**

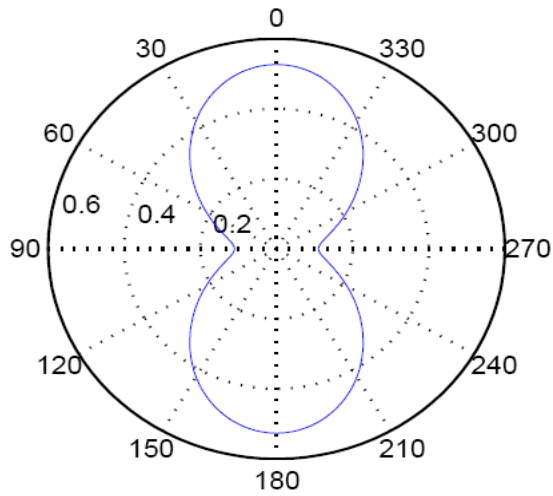
La floculación es un proceso donde algunas sustancias o materiales forman grupos. En el caso del papel, es una aglomeración de centros de fibras que puede ser visto como una distribución no uniforme. En principio esto puede afectar la uniformidad del papel por la conformación de grupos muy localizados, como se presenta en la figura 1.2.a., donde se observa este tipo de aglomeración, formando grupos. En la figura 1.2.b. se observa la formación de líneas sin flocular, es decir uniformemente distribuidas. En general, los fabricantes de papel se esfuerzan por limitar la floculación, buscando producir papeles uniformes [5].



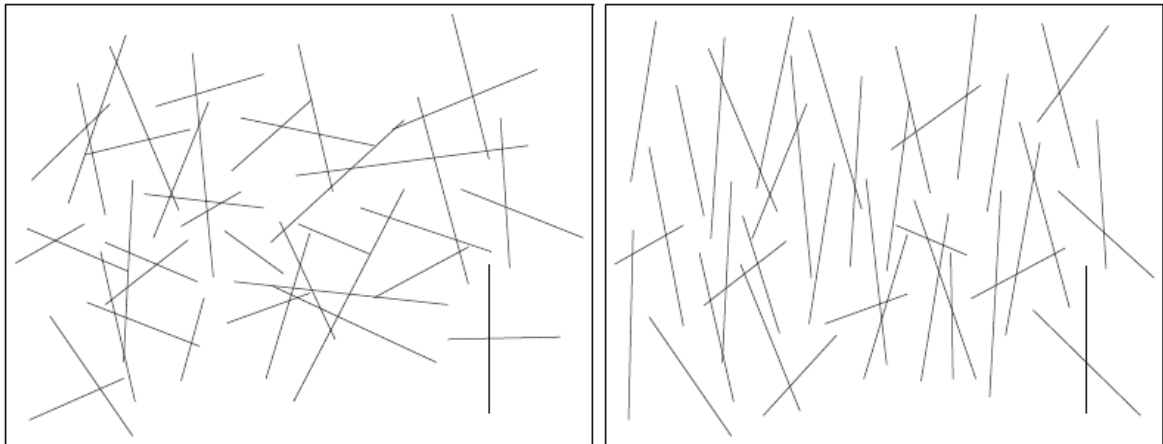
**Figura 1.2.** Flocculación: flocculado de líneas rectas (a). Líneas rectas sin floccular (b).

### 1.1.3. Orientación

La orientación se refiere a la rotación de las fibras. Esto se puede establecer cuando se rasga una hoja de papel, es más fácil romperla en una dirección que en otra, debido a que, generalmente, las fibras se alinean en la dirección de salida de la máquina. En la figura 1.3. se presenta la probabilidad de orientación de las fibras en función de la dirección de cómo éstas se introducen en los rodillos de la máquina. En la figura 1.4.a. se muestra un caso extremo, donde existe una distribución uniforme de líneas rectas, orientadas al azar y en la figura 1.4.b. es el otro límite, donde hay líneas rectas orientadas en una dirección que dan una no uniformidad. Esta diferencia en la orientación puede afectar las propiedades ópticas del papel, ya que cuando la hoja es girada alrededor de su normal, la intensidad de luz observada puede variar. Si esto ocurre, entonces el material se considera anisotrópico; de lo contrario, el papel se considera isotrópico [6].



**Figura 1.3.** Diagrama polar de probabilidad. Distribución de la orientación de las fibras dada por  $p(\theta) = \frac{1}{\pi} + 0.208 \cos(2\theta)$  con  $0^\circ$  grados son la dirección de la máquina [4] (La dirección de la máquina es la dirección de cómo las fibras se introducen en los rodillos durante la fabricación de papel).



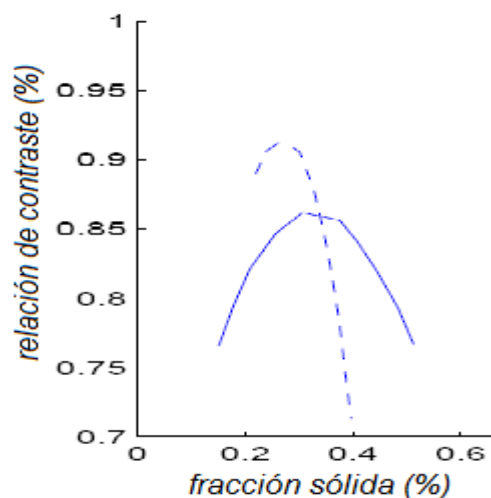
**Figura 1.4.** Orientación de las fibras: líneas rectas orientadas aleatoriamente (isotropía) (a). Líneas rectas orientadas en una dirección (anisotropía) (b).

#### 1.1.4. Fracción sólida

La fracción sólida es el porcentaje del volumen de papel que es ocupado por la composición sólida. Éste valor no es fácil de medir y muchas veces requiere análisis químico o métodos de gas en expansión para obtenerlo [7].



Cuando los factores de floculación y orientación son constantes en el espacio, es cualitativamente difícil predecir si un papel puede ser más o menos transparente, debido a diferencias en la fracción sólida. Cuando un papel tiene una fracción sólida muy baja sus propiedades difieren poco a las del aire, por lo que se observa relativamente transparente. Ahora, si el papel se comprime, entonces es más denso y se vuelve menos transparente. Pero después de un cierto punto la compresión puede resultar en un mayor contacto óptico entre las fibras, disminuyendo la cantidad de interfaces de luz esparcida. En el caso teórico extremo de máxima compresión, el papel se vuelve un bloque puro de celulosa, conteniendo un mínimo de interfaces ópticas. Dado que la celulosa en sí misma es relativamente transparente, el papel comprimido también tiene muy baja opacidad [4]. La figura 1.5 presenta una curva que ilustra este hecho, describiendo medidas físicas de relación de contraste en función de la fracción sólida.



**Figura 1.5.** Fracción sólida en relación con el contraste, para un gramaje de papel de 45 libras (línea continua) y 20 libras (línea discontinua) [8].

### **1.1.5. Gramaje**

El gramaje es el peso en gramos por metro cuadrado de un papel, que indica su grosor. Sin embargo, se debe tener cuidado cuando se usan medidas ópticas para el análisis de gramaje, ya que al estar correlacionado con la fracción sólida, ésta puede incrementar o disminuir la opacidad del papel sin cambiar su grosor.

El gramaje es una propiedad muy importante desde el punto de vista comercial. Aunque se puede establecer la densidad para el papel, este parámetro es poco usado, siendo el gramaje el más común [2].

### **1.1.6. Atributos y usos del papel**

Los papeles usados en el desarrollo de este proyecto, son papeles y cartulinas hechos a partir de la caña de azúcar, materia prima biodegradable, reciclable y atóxica. Son papeles con buena lisura, brillo, mayor calibre, cuyas propiedades permiten soportar una amplia gama de acabados de impresión y un eficiente secado de tintas [9].

Los papeles esmaltados por sus dos caras tienen que cumplir con los atributos anteriormente mencionados. Son papeles diseñados para imprimir policromías en máquinas alimentadas por hojas o rollos, con sistemas de alimentación convencionales. Este papel se usa en la impresión de catálogos finos, plegables, folletos, revistas, libros, tarjetas, material publicitario, afiches, calendarios, carátulas y reproducciones artísticas.

Los papeles esmaltados por una cara cumplen con atributos de alta rigidez, excelente comportamiento en impresión de policromías en los diferentes sistemas de impresión, compatibilidad con adhesivos industriales, apto para estar en contacto con productos alimenticios de consumo humano, adecuada resistencia a

la humedad y buen desempeño en los procesos de etiquetado de alta velocidad. Se usan en etiquetas para envases de alimentos, dulces, productos de tocador y farmacéuticos, autoadhesivos, marquillas para cigarrillos, papel regalo, bolsas finas y papel para la fabricación de empaques flexibles.

Los papeles SBS son cartulinas recubiertas por una sola cara, elaboradas ciento por ciento con pulpa virgen, libres de olores y atóxicas. Brindan mayor permanencia de blancura, alta resistencia al deterioro, óptimo desempeño en maquinas impresoras, troqueladoras y empacadoras. Son cartulinas certificadas para estar en contacto con productos alimenticios para el consumo humano. Se utilizan en la elaboración de cajas plegadizas para la industria farmacéutica, de productos alimenticios secos, cosméticos, perfumería fina y cigarrillos; carátulas para libros y cuadernos, insertos y material publicitario.

Los papeles mencionados anteriormente tienen que cumplir con una serie de requisitos que garanticen los atributos que los deben caracterizar, con el fin de que tengan un óptimo desempeño en el uso asignado [9].

## **1.2. PRINCIPIOS BÁSICOS DEL LÁSER**

El tratamiento ondulatorio es el que permite describir de forma completa las características de un haz de luz, donde el haz se considera como una onda electromagnética que tiene una dirección preferencial de propagación [10].

Cuando se consideran ondas electromagnéticas de naturaleza armónica con una propagación altamente direccional, se hace uso de aproximación paraxial, cuyo acercamiento matemático es la solución de la ecuación de Helmholtz (ecuación 1.1), donde se consideran variaciones muy pequeñas del campo electromagnético en la dirección transversal, comparadas con la dirección de propagación.

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi - i2k \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

Donde  $\Psi$  es la amplitud del campo electromagnético,  $k$  es el número de onda y  $\nabla_{\perp}^2$  representa el Laplaciano transversal. La solución de ésta ecuación produce los llamados haces Gaussianos, dados por

$$\Psi(x, y, z) = \frac{w}{w_0} \exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-ikz + i \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right] \exp\left[\frac{-ikr^2}{2R(z)}\right] \quad (1.2)$$

Donde  $w$  es el diámetro del haz,  $w_0$  es la cintura del haz o diámetro mínimo posible,  $r$  es la coordenada radial del campo electromagnético,  $z$  es el eje de propagación del haz. Cada factor de la ecuación (1.2) corresponde a una propiedad física del haz. El primer factor es la amplitud del campo electromagnético, el segundo es la fase longitudinal (en la dirección de propagación) y el tercero es la fase radial (en el plano transversal) [10].

Los parámetros que describen un haz Gaussiano, y que dependen de la propagación, son el diámetro del haz (tamaño del punto) que esta dado por

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right] \quad (1.3)$$

Por razones básicamente de carácter histórico, se ha denominado  $w$  al diámetro correspondiente, en vez de  $r$ .

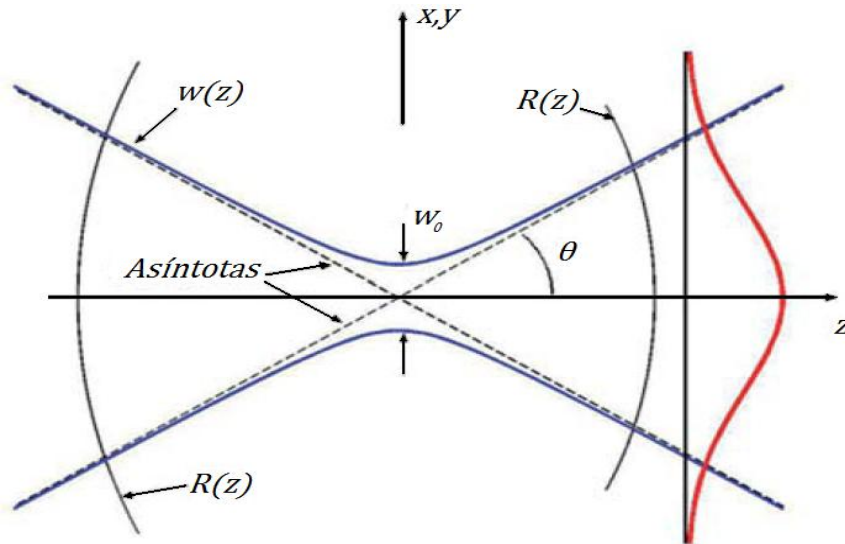
El radio de curvatura del frente de onda esta dado por

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad (1.4)$$

Y la constante de propagación  $z_0$ , que se conoce como rango o distancia Rayleigh, que físicamente es la distancia de propagación durante la cual el haz no cambia su diámetro significativamente, y es medida desde la cintura del haz.

$$z_0 = \frac{k w_0^2}{4} \quad (1.5)$$

Con  $w_0$  que es llamado la cintura del haz, medida que es el diámetro del haz en el punto donde éste diámetro es el mínimo posible [10]. En la figura 1.6 se observa el comportamiento del haz Gaussiano.



**Figura 1.6.** Comportamiento del diámetro del haz Gaussiano, de los frentes de onda y del perfil de intensidad.

Los haces Gaussianos no son la única solución en forma de haz de la ecuación paraxial de Helmholtz. Existen muchas otras soluciones, de las cuales, los haces con frentes de onda parabólicos son de particular importancia, puesto que se ajustan a los espejos esféricos con gran radio y, por ello, pueden ser reflejados por los dos espejos esféricos que forman un resonador sin ser alterados. Dichas ondas que se autoreproducen se denominan modos del resonador, y pueden ser los haces de salida de los láseres [11].

En el láser existe una cavidad resonante donde se forman modos de tipo transversal y longitudinal. Dentro del resonador se forma una onda estacionaria que se origina debido a las reflexiones que se producen en los espejos. Las distintas configuraciones que puede adoptar una onda estacionaria en una cavidad resonante se denominan modos.

El modo longitudinal o axial es aquel que puede resonar en la dirección del eje. Esto es posible únicamente para aquellas longitudes de onda que en un recorrido completo del resonador  $2L$  avancen un número entero  $n$  de longitudes de onda  $\lambda$ . Cada modo longitudinal corresponde a una longitud de onda.

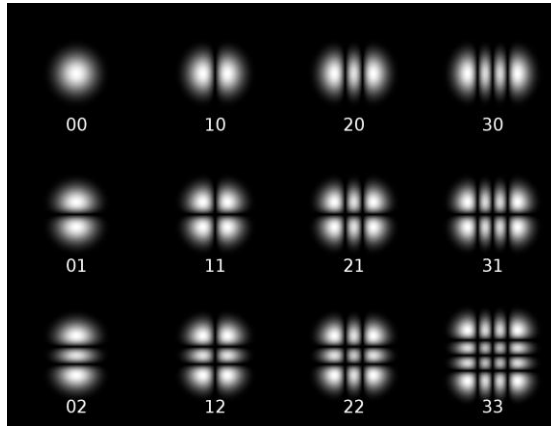
Por ejemplo, se pueden presentar dos diferentes modos longitudinales viajando en la misma dirección pero con diferentes valores de frecuencia. Para escoger un tipo de frecuencia para un modo determinado, se usan dispositivos para sintonizar el láser, tal como redes de difracción, prismas, dispositivos de polarización o sistemas interferométricos [11].

Los modos transversales son los que determinan la distribución de potencia del haz. Suponiendo que se hace un corte perpendicular del haz de salida del resonador y analizando la distribución de potencia del mismo, se observa que no tiene una distribución uniforme, sino que responde a unas configuraciones establecidas, denominadas modos transversales o simplemente modos espaciales del haz. Las distintas configuraciones del haz son el fiel reflejo de la onda estacionaria que se está generándose dentro del resonador, por lo tanto el modo que se obtenga es una de las posibles soluciones de una onda estacionaria confinada dentro del resonador.

Los haces Hermite-Gauss son otra de las soluciones de la ecuación paraxial de Helmholtz. La intensidad de los modos resulta ser

$$I_{l,m}(x, y, z) = |A_{l,m}|^2 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 G_l^2 \left[ \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] G_m^2 \left[ \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \quad (1.6)$$

Donde  $|A_{l,m}|^2$  es un haz Gaussiano, una solución de la ecuación de Helmholtz y,  $G_l^2$ ,  $G_m^2$  son funciones de Hermite-Gauss. En la figura 1.7 se presenta una distribución de intensidades de los haces Hermite-Gauss.



**Figura 1.7.** Distribución de intensidad de varios haces Hermite-Gauss de bajo orden en el plano transversal [12].

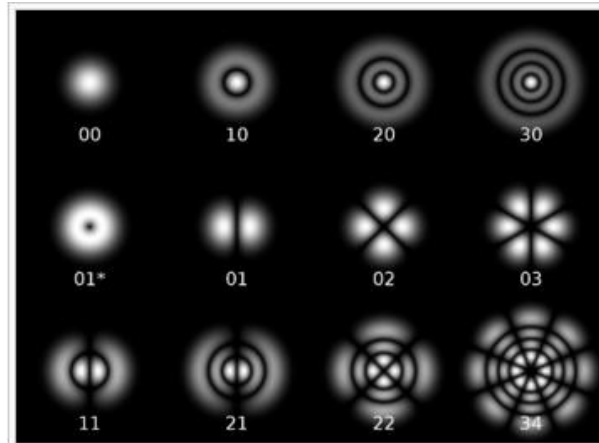
Cualquier otra solución se puede escribir como una superposición de éstos haces. Existen otros conjuntos completos de soluciones tal como los haces Laguerre-Gauss que se obtienen escribiendo la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas, es decir, se tiene un resonador láser con simetría cilíndrica y sus modos transversales son descritos matemáticamente como la combinación de un perfil Gaussiano con un polinomio de Laguerre.

Los modos transversales en un polinomio de Laguerre se representan como  $TEM_{pl}$ , donde  $p$  y  $l$  son enteros que indican los órdenes radial y angular para cada modo. La intensidad en un punto  $r, \psi$  (en coordenadas polares), cuyo origen de coordenadas está en el centro del modo, está dada por

$$I_{pl}(\rho, \varphi) = I_0 \cdot \left[ \rho^l e^{-\rho} \left( L_p^l(\rho) \right)^2 \right] \cdot \cos^2(l\varphi) \quad (1.7)$$

donde  $\rho = \frac{2r^2}{\omega^2}$  es la coordenada radial reescalada,  $\omega$  es el tamaño del lóbulo central del modo correspondiente al radio del haz Gaussiano,  $I_0$  es la intensidad inicial,  $L_p^l(\rho)$  es el polinomio de Laguerre asociado de orden  $p$  y de índice  $l$ . Con  $p = l = 0$ , el modo  $TEM_{00}$  es el de menor orden (modo transversal fundamental) del resonador láser y tiene la misma forma de un haz Gaussiano. El perfil transversal

tiene forma de campana, y su fase es constante a través del modo. A medida que  $p$  aumenta los modos exhiben anillos de intensidad concéntricos, y a medida que aumenta  $l$  se exhiben lóbulos de intensidad distribuidos angularmente. En la figura 1.8 se observa los modos transversales para los haces Laguerre-Gauss.



**Figura 1.8.** Modos transversales ( $TEM_{pl}$ ) para un resonador óptico cilíndrico [12].

El modo fundamental espacial  $TEM_{00}$  tiene su máxima intensidad coincidente con el eje del láser. Posee una distribución de intensidad Gaussiana y presenta menos pérdidas por difracción en su confinamiento dentro del resonador. Además, es el que tiene mayor densidad de energía, así como una menor divergencia [12].

Este modo que es el que se usa en el láser He-Ne y puede ser descrito como la función Gaussiana (en honor a Karl Friedrich Gauss), una función definida por la expresión

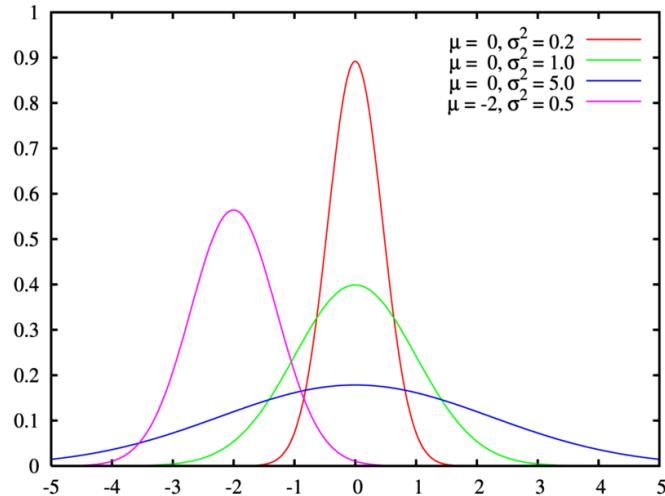
$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}} \quad (1.8)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales ( $a > 0$ ).

La gráfica de la función es simétrica con forma de campana, conocida como campana de Gauss. El parámetro  $a$  es la altura de la campana centrada en el



punto  $b$ , determinando  $c$  el ancho de la misma. En estadística  $a = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}}$ , media  $\mu=b$  y varianza  $\sigma^2=c^2$ . (Ver Fig. 1.9) [13].



**Figura 1.9.** Curvas Gaussianas con distintos parámetros.

El modo  $TEM_{00}$  que usa el láser He-Ne de baja potencia (5mW) tiene un diámetro aproximado de 0.8 mm cerca de su salida. Aunque los haces  $TEM_{00}$  se comportan como si se originaran en una fuente puntual y estuvieran bien colimados, su luz experimenta una pequeña dispersión lateral, es decir, el haz muestra una débil divergencia debida a la difracción. Cerca del haz de salida y efectivamente dentro de él, las variaciones del diámetro son un poco complicadas y dependen de los tipos de espejos que se usen en la cavidad resonante [12].

Esto se observa en la ecuación mencionada anteriormente (ecuación 1.3).

Ésta ecuación se reduce, cuando  $z$  es algo mayor que unos metros, ya que alcanza un valor muy superior a la unidad.

$$w_z = w_0 kz \quad (1.10)$$

La relación  $\frac{w_z}{z}$  no es otra cosa que el semi ángulo de divergencia

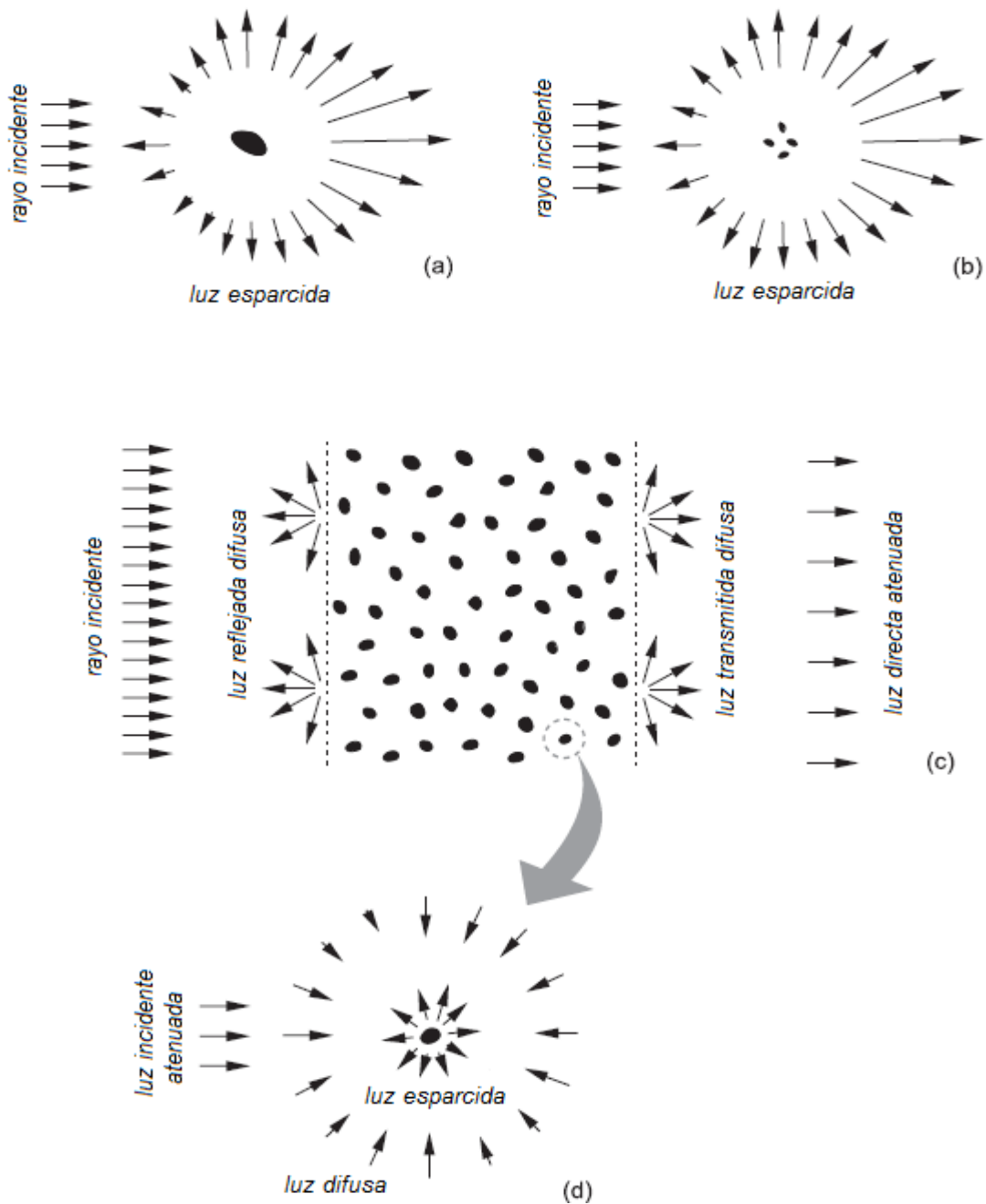
$$\theta = kw_0 \quad (1.11)$$

El diámetro de 0.8 mm crece hasta un valor de 1.28 mm en un metro de trayectoria. La solución a este problema es utilizar un expansor de haz que disminuye su divergencia [12].

### **1.3. TEORÍA DE ESPARCIMIENTO ELECTROMAGNÉTICO, ABSORCIÓN Y EMISIÓN**

Un rayo de luz paralelo monocromático se propaga en el vacío sin ningún cambio en su intensidad o estado de polarización. Sin embargo, la interposición de una pequeña partícula en su trayectoria, como se ilustra en la figura 1.10.a, puede causar distintos efectos. Primero, la partícula puede convertir parte de la energía contenida en el haz, en otras formas de energía como calor. Este fenómeno es llamado absorción. Segundo, se extrae algo de la energía incidente y se esparce en todas las direcciones a la frecuencia del rayo incidente. Este fenómeno es llamado esparcimiento elástico y, en general, da lugar a luz con estado de polarización diferente al del rayo incidente. Tercero, puede presentarse que una pequeña fracción de luz (aproximadamente 1 en  $10^7$  fotones) sea dispersado de forma inelástica a frecuencias en su mayoría inferiores que la frecuencia de los fotones incidentes. A esto se lo llama efecto o dispersión Raman. Cuarto, la partícula puede absorber radiaciones electromagnéticas y luego emitir parte de esa energía con una longitud de onda más larga. La diferencia entre ambas es disipada en forma de calor. Éste fenómeno es llamado fluorescencia [14].

Como resultado de absorción y esparcimiento, la energía del rayo incidente es reducida por una cantidad igual a la suma de la energía absorbida y esparcida. Esta reducción es llamada extinción. La tasas de extinción para diferentes componentes de polarización del rayo incidente pueden ser distintas. Este fenómeno es llamado dicroísmo y puede causar un cambio en el estado de polarización del rayo después que pasa la partícula.



**Figura 1.10.** En (a), (b) y (c) un rayo paralelo de luz incide desde la izquierda. (a) campo lejano electromagnético de esparcimiento para una partícula individual en la forma de un solo cuerpo o un grupo fijo. (b) campo lejano esparcido para un elemento de volumen pequeño compuesto de posiciones aleatorias, partículas separadas ampliamente. (c) múltiple esparcimiento por una capa de partículas distribuidas aleatoriamente y esparcidas. En la izquierda de la capa, se refleja luz difusa, en la derecha de la capa, se transmite luz difusa. En el extremo derecho, el rayo incidente atenuado. (d) cada partícula individual en la capa recibe y esparce la luz tanto del rayo incidente, algo atenuado y luz difusa esparcida de otras partículas.

Además, si la temperatura absoluta de la partícula no es igual a cero, entonces la partícula también emite radiación en todas direcciones y en todas las frecuencias, la distribución por frecuencias es dependiente de la temperatura. Este fenómeno es llamado emisión térmica.

En términos electromagnéticos, el haz de luz paralelo monocromático es una onda electromagnética oscilando en un plano, mientras la partícula es una agregación de un gran número de cargas eléctricas elementales discretas. El campo electromagnético oscilante de la onda incidente excita las cargas para oscilar con la misma frecuencia y así radiar ondas electromagnéticas secundarias.

La elasticidad total del campo esparcido depende de la forma como se superponen las ondas secundarias generadas. Si las cargas no oscilan exactamente en fase o exactamente en anti-fase con el campo incidente entonces hay disipación de energía electromagnética en el objeto. Esto significa que el objeto está absorbiendo y esparciendo parte de la energía que se extrae de la onda incidente. El efecto combinado de esparcimiento y absorción es reducir la cantidad de energía contenida en la onda después de interactuar con el obstáculo. Si la temperatura absoluta de la partícula difiere de cero, las transiciones electrónicas de alto a bajo nivel de energía causan emisión térmica de energía electromagnética a frecuencias específicas. Además, para sistemas complejos de moléculas con un gran número de grados de libertad, muchas transiciones diferentes producen líneas de emisión espectral poco espaciadas, resultando un espectro de radiación continuo que incluye energía emitida en todas las frecuencias.

El esparcimiento electromagnético es un fenómeno complejo debido a la contribución de las ondas secundarias, generadas por cada carga oscilante estimulada por las oscilaciones de las otras cargas que forman las moléculas. Además, el cálculo total del campo esparcido por la superposición de las ondas secundarias debe tener en cuenta las diferencias de fase, que cambian cada vez

que la dirección de incidencia y/o esparcimiento cambia. Por lo tanto, el total de radiación esparcida depende del sentido de las cargas que están ordenadas para formar la partícula, con respecto a las direcciones incidente y esparcida [14].

Ya que el número de cargas elementales formando una partícula de tamaño micrométrico es muy grande, la solución del problema de esparcimiento por cálculo y superposición de todas las ondas secundarias es imposible, incluso con la ayuda de las computadoras modernas. Afortunadamente, el mismo problema puede ser resuelto usando los conceptos de electromagnetismo macroscópico, que tratan grandes colecciones de cargas como un cuerpo macroscópico con una distribución específica del índice de refracción. En éste caso, el campo esparcido puede ser calculado resolviendo las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos macroscópicos con condiciones de frontera apropiadas. Éste enfoque parece ser bastante manejable y forma las bases de la teoría moderna de esparcimiento electromagnético para partículas pequeñas.

En el esparcimiento de ondas electromagnéticas se deben asumir algunas consideraciones para poder abordar su estudio, dentro de las que se encuentran las siguientes:

- Se asume esparcimiento de luz monocromática.
- La luz esparcida tiene la misma frecuencia que la luz incidente.
- Se considera sólo esparcimiento por partículas de tamaño finito.
- El medio que rodea el dispersor es homogéneo, lineal, isotrópico y no absorbente.
- Sólo se estudia esparcimiento en el campo lejano.
- El vector del campo eléctrico vibra en el plano perpendicular a la dirección de propagación.
- La amplitud del campo dispersor decae inversamente con la distancia de la partícula.

Resolviendo las ecuaciones de Maxwell, se puede encontrar el campo de esparcimiento generado por un objeto en la forma de un solo cuerpo o un grupo fijo que conste de un número limitado de componentes. Sin embargo, a menudo se encuentran situaciones en que la luz es esparcida por un gran grupo de partículas formando una configuración espacial de variación constante, como por ejemplo, en las nubes o cristales de hielo.

Un camino lógico para modelar las medidas de luz esparcida por una colección de partículas aleatorias es resolviendo las ecuaciones de Maxwell para un rango representado estadísticamente de grupos fijos y luego tomar el promedio. Esto no se cumple para grandes grupos de partículas.

La suposición de esparcimiento independiente simplifica el cálculo del problema de luz esparcida por grupos posicionados aleatoriamente, donde las partículas están ampliamente separadas. Se considera primero la situación cuando una onda plana ilumina un elemento de pequeño volumen conteniendo una colección de pocas partículas, esto se puede observar en la figura 1.10.b. Cada partícula es excitada por el campo externo y los campos secundarios esparcidos por todas las otras partículas. Sin embargo, si el número de partículas es suficientemente pequeño y su separación es suficientemente grande, entonces la contribución de las ondas secundarias para el campo excitado de cada partícula es más pequeño que el campo externo; por lo tanto, el total del campo esparcido puede ser aproximado por la suma de los campos generados por partículas individuales. Éste enfoque es llamado aproximación única de esparcimiento. Esto no es válido para muchas partículas.

Cuando cada partícula es iluminada por luz esparcida por otras partículas, luz atenuada incidente, quiere decir que cada partícula esparce luz que ha sido esparcida por otras partículas, como se presenta en la figura 1.10.c, de modo que la luz dentro del medio de esparcimiento y la luz que sale del medio tienen una multiplicación significativa del componente de esparcimiento (o difusión). Un

enfoque tradicional en éste caso es encontrar la intensidad y otros parámetros Stokes de la luz difusa para resolver la llamada ecuación de transferencia radiativa. Esta técnica aún asume que las partículas que conforman el medio de esparcimiento son posicionadas aleatoriamente y separadas ampliamente y que las matrices de extinción y fase de cada elemento de volumen pequeño pueden ser obtenidas por formas incoherentes de las respectivas características de partículas constituyentes.

Cuando un grupo de partículas es iluminado por luz láser monocromática, la variación de la interferencia constructiva y destructiva de la luz esparcida por partículas individuales genera en la zona del campo lejano un patrón speckle que fluctúa en el tiempo y el espacio. Muchas veces se elimina el efecto de las fluctuaciones asumiendo que los parámetros Stokes de la luz esparcida son promediados durante un período de tiempo mucho más largo que el período típico de las fluctuaciones, ocupándose con el promedio, de componentes estáticos de patrones de esparcimiento (esparcimiento de luz estática) [14].

#### 1.4. PROCESOS DE ESPARCIMIENTO Y ABSORCIÓN

El campo electromagnético asociado a un haz de luz interactúa con los electrones a través de la fuerza de Lorentz (ecuación 1.12)

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v}_p \times \vec{B} \quad (1.12)$$

donde  $e$  es la carga del electrón,  $\vec{E}$  es el campo eléctrico,  $\vec{v}_p$  es la velocidad de la partícula y  $\vec{B}$  es el campo magnético. En el caso del átomo, se tiene que al incidir la onda sobre él, inducirá oscilaciones de los electrones en la dirección del campo eléctrico. Estas oscilaciones serán armónicas y de la misma frecuencia que el

campo incidente, de manera que la posición de la partícula,  $\vec{r}_p$ , cambiará con el tiempo de la forma

$$\vec{r}_p = r_0 \cos(2\pi\nu t) \hat{u} \quad (1.13)$$

donde  $\hat{u}$  es el vector unitario en la dirección de vibración del campo externo,  $r_0$  es la posición inicial y  $\nu$  es la frecuencia de oscilación de la partícula [16].

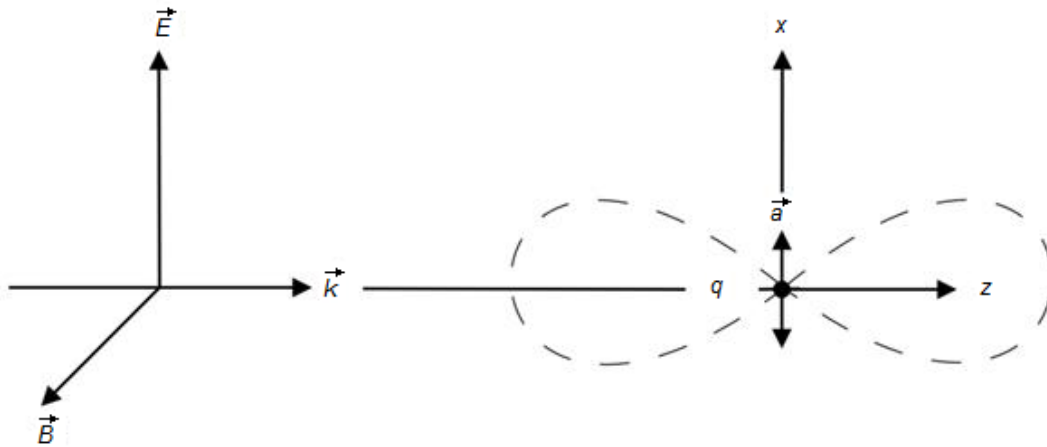
Para calcular la luz esparcida, se considera un solo electrón de carga  $q$  y masa  $m$ , que es estacionario (en ausencia de onda incidente no hay movimiento) excepto en la medida en que vibra bajo la influencia de una onda plana monocromática, cuyo campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{z}) \quad (1.14)$$

Si se considera la carga ubicada en el origen  $z = 0$ , experimenta una aceleración dada por

$$\vec{a}_x = \frac{q}{m} \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad (1.15)$$

En la figura 1.11 se ilustra la radiación de una carga  $q$  cuando es iluminada por una onda plana linealmente polarizada.



**Figura 1.11.** Un electrón de carga  $q$  iluminado por una onda linealmente polarizada



Es importante notar que solo se considera la fuerza eléctrica. La amplitud  $E_0$  de la onda incidente es tomada tal que sea lo suficientemente pequeña para que la carga nunca tenga velocidades relativistas [16].

La potencia total radiada en todas las direcciones por una partícula cargada, acelerada, no relativista es obtenida por la integración del flujo de Poynting sobre el área de una esfera cuyo origen coincide con la posición instantánea de  $q$ , así:

$$P(t) = \int_0^\pi |S(r, t)| 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (1.16)$$

donde

$$|S(r, t)| = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \quad (1.17)$$

es el llamado flujo de Poynting, con  $r$  siendo el radio de la partícula,  $c$  es la velocidad de la luz y  $\theta$  es el ángulo de radiación. Así se obtiene la potencia esparcida:

$$P(t) = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad W \quad (1.18)$$

donde  $a$  es la aceleración de la partícula y  $q$  es la carga. Esta ecuación se conoce como formula de Larmor (ecuación 1.18), donde se observa que la potencia es independiente del radio de la esfera.

Teniendo en cuenta  $\vec{a}_x$  para un electrón, se tiene que la potencia esparcida es:

$$P(t) = \frac{q^4}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} E_0^2 \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (1.19)$$

El promedio temporal de la potencia esparcida sobre un período de oscilación, esta dado por

$$\langle P(t) \rangle = \frac{q^4 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \quad W \quad (1.20)$$

Para encontrar la fracción de luz total que es esparcida, es conveniente escribir el valor promedio de esparcimiento en función del flujo de la radiación de luz incidente, para lograr esto se coloca la amplitud  $E_0^2$  en términos del flujo de Poynting  $S$ , el cual está relacionado con  $E$  a través de la ecuación

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{W}{m^2} \quad (1.21)$$

Así se tiene

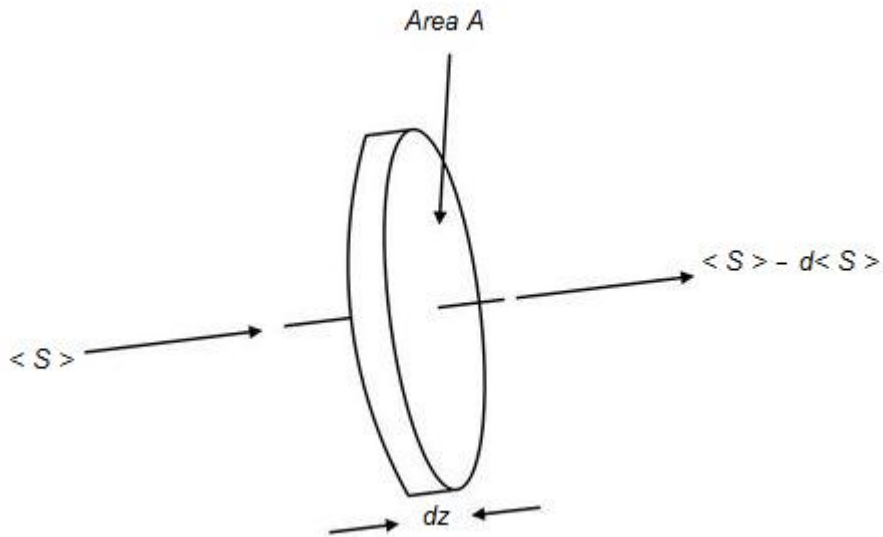
$$\langle P(t)_{esparcido} \rangle = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \right)^2 \langle S \rangle_{incidente} \quad (1.22)$$

Ya que la potencia total esparcida esta en  $W$ , y la onda incidente está caracterizada por la densidad de flujo que está en  $(\frac{W}{m^2})$ , la relación entre  $\langle P \rangle$  y  $\langle S \rangle$  involucra una cantidad que tiene dimensiones de área. Ésta es conocida como sección transversal de esparcimiento de Thomson y se denota por  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \right)^2 m^2 \quad (1.23)$$

Para un electrón  $\sigma = 6.65 \times 10^{-29} m^2$

La sección transversal  $\sigma$  permite saber cómo un rayo de luz pierde energía en su camino a través del material. En una porción de materia (Ver Fig. 1.12), la potencia incidente es  $\langle S \rangle A$  la cual es reducida por una cantidad  $Ad\langle S \rangle$  al pasar a través de una capa  $dz$ . La reducción  $Ad\langle S \rangle$  es debida al esparcimiento combinado de todos los esparsos contenidos en la rebanada o trozo de materia [16].

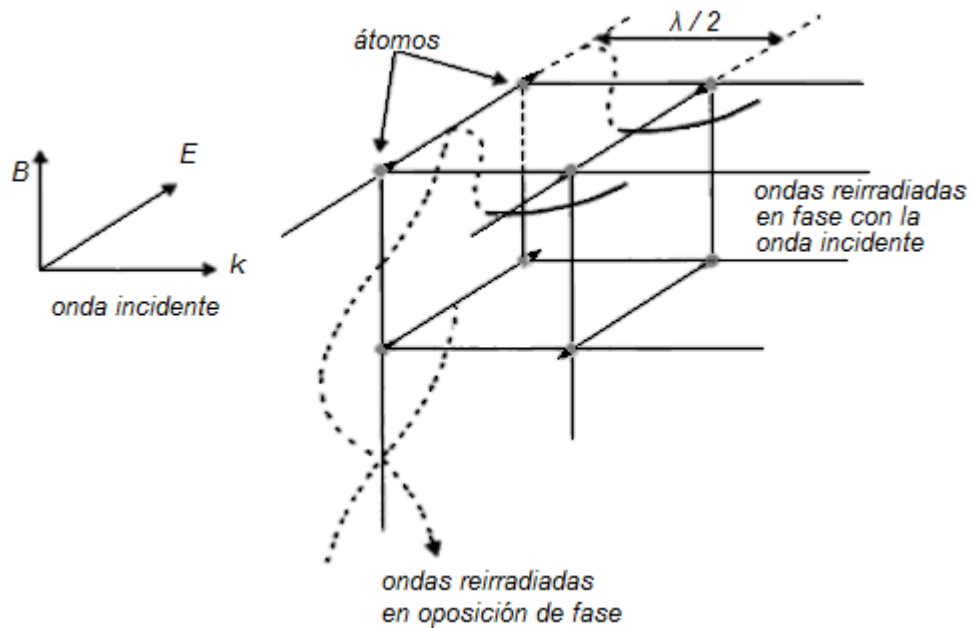


**Figura 1.12.** El flujo  $S$  de radiación es disminuido por una cantidad  $d\langle S \rangle$  al pasar a través de un material espaciador de ancho  $dz$ .

Cuando se tiene una colección de átomos suficientemente grande, se debe tener en cuenta la frecuencia de la onda incidente y la distancia entre átomos en comparación con la longitud de onda de la radiación incidente [17].

Las fases de las ondas radiadas debido a la cercanía de los emisores atómicos, mantienen relaciones estables que dan lugar a los fenómenos de reflexión, refracción y absorción.

La radiación esparcida por dos átomos adyacentes en la dirección de propagación de la onda estará en fase (Ver Fig. 1.13); sin embargo, en la dirección perpendicular al avance de la onda, las ondas radiadas por dos átomos vecinos están en oposición de fase. Si los elementos de volumen contienen exactamente el mismo número de átomos, la cancelación de la onda será total a  $90^\circ$ . Además de la proximidad entre los osciladores atómicos, se necesita una uniformidad en la distribución, así como la ausencia de fluctuaciones para que haya cancelación.



**Figura 1.13.** Esparcimiento coherente de la radiación por los osciladores atómicos inducidos por el campo excitador en un elemento de volumen del medio.

Puede vislumbrarse el origen de la onda refractada como resultado de la superposición de la onda incidente y las ondas secundarias radiadas por todos los osciladores atómicos. Al superponer las ondas radiadas por todos los átomos, aparece un desfase neto que se aproxima a  $\pi/2$ . De esta manera el campo resultante será la superposición del campo incidente y del campo radiado por todos los átomos, con lo cual la onda resultante se retrasa una cierta cantidad respecto a la onda incidente y equivalentemente, la velocidad de la onda resultante es menor que  $c$ , a pesar de que las ondas radiadas por cada átomo individualmente se propague con velocidad  $c$ : este es justamente el origen microscópico del índice de refracción [17].

La solución general al problema del esparcimiento para medios densos es complicada, puesto que es necesario tener en cuenta la interacción (acoplamiento) entre todas las cargas presentes en el trozo de materia considerado (cuyo número de átomos será superior a  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ) a través de las ondas secundarias emitidas por cada una de ellas [18].

## 1.5. ESPARCIMIENTO RAYLEIGH

Si un haz de radiación de baja energía como la luz visible, interacciona con los átomos de una molécula, la mayoría de los fotones son dispersos en todas direcciones a consecuencia de un choque elástico sin pérdida de energía. A este fenómeno se le conoce como esparcimiento Rayleigh. Este fenómeno ocurre cuando el dispersor es más pequeño que la longitud de la onda de la luz [19].

El grado de esparcimiento Rayleigh que sufre un rayo de luz depende del tamaño de las partículas y de la longitud de onda de la luz, por tanto, el coeficiente de esparcimiento y la intensidad de luz depende inversamente de la cuarta potencia de la longitud de onda ( $\sim\lambda^{-4}$ ), relación conocida como Ley de Rayleigh. Al integrar el área de la esfera que rodea una partícula, se obtiene la sección de esparcimiento Rayleigh,  $\sigma_s$ :

$$\sigma_s = \frac{2\pi^5 d^6}{3 \lambda^4} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \quad (1.24)$$

Mientras que la expresión para la ley de Rayleigh es la siguiente:

$$I = I_0 \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2R^2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \left( \frac{d}{2} \right)^6 \quad (1.25)$$

donde  $I$  es la intensidad de la luz esparcida por una pequeña partícula en un haz de longitud de onda  $\lambda$  e intensidad  $I_0$ ,  $R$  es la distancia a la partícula,  $\theta$  es el ángulo de esparcimiento,  $\lambda$  es la longitud de onda del haz,  $n$  es el índice de refracción de la partícula y  $d$  es el diámetro de la partícula.

## 1.6. ESPARCIMIENTO MIE

Este tipo de esparcimiento ocurre cuando la luz es esparcida por partículas mayores o iguales a la longitud de onda de la radiación electromagnética incidente. El esparcimiento Mie es una solución completamente analítica a las ecuaciones de Maxwell para la interacción de la radiación electromagnética con partículas esféricas.

Si la luz interactúa con una partícula grande, no se genera el esparcimiento Rayleigh, ya que el tamaño de estas partículas no lo permite; sin embargo, estas partículas absorben una parte de la luz y reflejan otra. En algunos casos el color de la luz reflejada depende directamente de los compuestos químicos de la partícula reflejante, este efecto es conocido como difusión de Mie.

En la teoría de Mie se estudia la interacción de una onda electromagnética con cargas eléctricas, en el caso de una partícula formada por varias moléculas hay que considerar un conjunto de multidipolos que originan ondas parciales. Se pueden originar diferencias de fase, espaciales y temporales debido a que el tamaño de las partículas es comparable a la longitud de onda de la luz incidente. Cuando estas ondas parciales se superponen para formar una onda secundaria esparcida, aparecen interferencias debidas a estas diferencias de fase. Estas interferencias dependen de la longitud de onda de la radiación incidente, del tamaño, del índice de refracción de la partícula y de la posición angular del observador.

A cada partícula se le asocia una sección eficaz angular de esparcimiento, donde se puede determinar el coeficiente angular de volumen y el flujo de energía total dispersada en todas las direcciones.

La teoría de Mie se aplica en forma rigurosa en esferas isótropas. Entonces, la relación entre el tamaño de la partícula y la longitud de onda se expresa por el parámetro de tamaño  $\alpha = 2\pi r/\lambda$ , que es el factor fundamental que interviene en el

esparcimiento Mie. También es de importancia en ésta teoría el índice de refracción relativo. Si la absorción es despreciable, el índice de refracción es dado por  $n(\lambda)$ , y si es relevante la absorción, el índice de refracción se expresa como  $m(\lambda) = n(\lambda) - i n_i(\lambda)$ , donde la parte imaginaria es idéntica al índice de absorción del material.

Las características angulares del esparcimiento Mie se expresan mediante dos funciones de distribución de intensidades ( $I_1$  e  $I_2$ ), que corresponden a las intensidades de luz polarizada en las direcciones perpendicular y paralela del plano de observación. Estas son funciones que constituyen el fundamento de la teoría de Mie [20].

De esta forma, la función de distribución angular de la intensidad de radiación esparcida es:

$$\Phi(\alpha, n, \phi) = \left( \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right) \left( \frac{I_1 + I_2}{2} \right) \quad (1.26)$$

Donde  $I_1$  e  $I_2$  se expresan:

$$I_1(\alpha, m, \phi) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n) \right|^2 \quad (1.27)$$

$$I_2(\alpha, m, \phi) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n) \right|^2 \quad (1.28)$$

Donde  $\alpha = 2\pi r/\lambda$  es el parámetro de tamaño,  $m(\lambda)$  es el índice de refracción complejo,  $\phi$  es el ángulo de incidencia primaria,  $a_n, \tau_n, b_n$  y  $\pi_n$  son parámetros que varían en función de  $\alpha, m$  y  $\phi$ .

## 1.7. FUNCIONES DE FASE

Cuando la luz encuentra una interface óptica, es esparcida y la dirección del camino óptico es modificado. Una función de fase,  $\Gamma(\theta, \Phi)$ , puede ser usada para cuantificar la cantidad de luz que es esparcida en una cierta dirección a un ángulo polar  $\theta \in (0, \pi)$  y un ángulo acimutal  $\Phi \in (0, 2\pi)$ . Se usa  $\theta = 0$  para denotar la dirección original de la luz antes de esparcirse. En este caso, la función de fase es usada para describir el comportamiento de un evento de esparcimiento simple.

Sin embargo, las funciones de fase han sido usadas extensivamente para describir múltiples o grandes cantidades de esparcimiento. En este contexto, las funciones de fase son usadas como funciones de densidad de probabilidad para describir el comportamiento de la luz después de interacciones con múltiples interfaces ópticas. Por tanto, dada una función de fase, la integral sobre todas las direcciones será igual a la unidad [21].

Hay que tener en cuenta, primero, el término “función de fase” es algo engañoso, este no tiene ninguna conexión con la fase de la onda electromagnética (luz). Este término, tuvo sus orígenes en astronomía, más específicamente en el estudio de las fases lunares. Segundo, las funciones de fase son usualmente usadas mientras se asume simetría acimutal, es decir, el esparcimiento es uniforme en la dirección acimutal. Así, se omite la componente acimutal de la función de fase y se escribe  $\Gamma(\theta)$  para representar  $\Gamma(\theta, \Phi)$ . [23]

Se tienen dos tipos de funciones, la función de fase Henyey-Greenstein y la función de fase exponencial coseno.

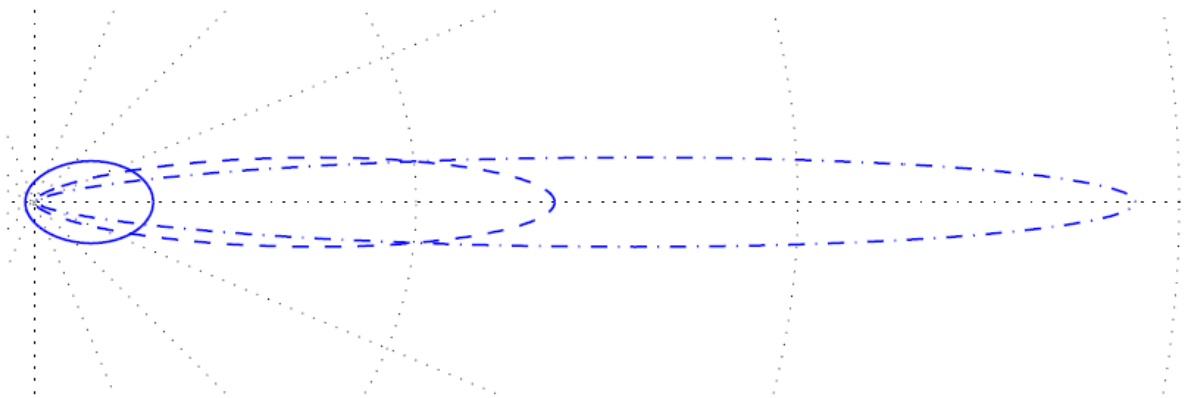
La función de fase Henyey-Greenstein es definida como [24]

$$\Gamma_{HG}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cdot \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.29)$$



Donde  $g$  es un factor asimétrico de -1 a 1. Y para valores negativos de  $g$ , la función simula esparcimiento hacia atrás; 0, esparcimiento simétrico; y valores positivos, esparcimiento hacia adelante.

El comportamiento de la función de fase Henyey-Greenstein, dada en densidades de probabilidad, se puede observar en la figura 1.14.



**Figura 1.14.** Densidades de probabilidad dadas para la función de fase Henyey-Greenstein parametrizada para diferentes valores de  $g$ . Los valores de  $g$  de menos a más esparcimiento frontal son 0.4 (línea sólida), 0.8 (línea corrida) y 0.9 (línea-punto).

Esta función de fase Henyey-Greenstein fue empleada para aproximar el esparcimiento Mie en el estudio de difusión de radiación en galaxias. No tiene ninguna base física y fue introducida para ajustarse a los datos de esparcimiento de la radiación estelar [26].

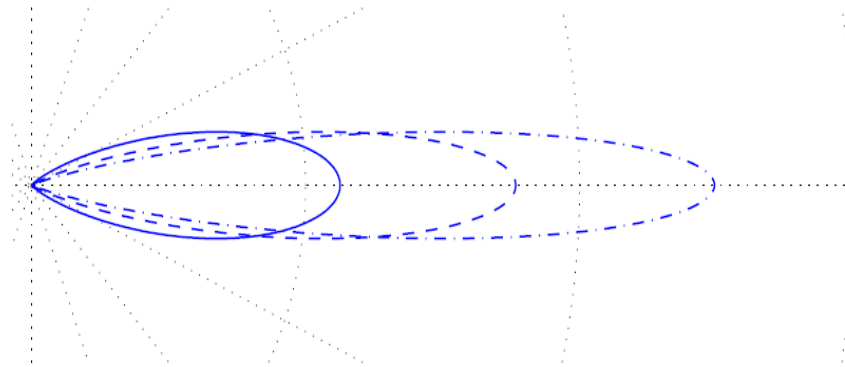
La función de fase exponencial coseno es definida como [25]

$$\Gamma_{EC}(\theta) = \frac{n + 1}{2\pi} \cos^n \theta \quad (1.30)$$

donde  $n$  es la dirección exponencial (dirección especular). La función de la ecuación coseno fue originalmente diseñada para describir la propagación de la

luz en la dirección hacia adelante, y fue definida solo en los dominios  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  y  $n \in (0, \infty)$ .

El comportamiento de esta función de fase exponencial coseno, dada en densidades de probabilidad, se puede observar en la figura 1.15.



**Figura 1.15.** Densidades de probabilidad dadas para la función de fase exponencial coseno parametrizada para diferentes valores de  $n$ . Los valores de  $n$  de menos a más esparcimiento frontal son 20 (línea sólida), 50 (línea corrida) y 100 (línea-punto).

En la figura 1.15 se observa que a medida que  $n$  aumenta, su esparcimiento hacia adelante es más significativo, es decir, la intensidad de luz se incrementa a medida que  $n$  también aumenta. En el papel se presentan interfaces ópticas que irán en aumento a medida que el gramaje aumente y por tanto será inversamente proporcional a  $n$ , ya que  $n$  será una medida indirecta de la intensidad.

Esta función de fase exponencial coseno, así como la función de fase Henyey-Greenstein no tiene ninguna base física. Son empleadas a menudo en simulaciones Montecarlo para describir el comportamiento de diferentes materiales como tejidos de piel y papel. Su simulación se basa en los ángulos polares, donde se puede variar el valor de cada parámetro de acuerdo a cada función [26].

Para la función de fase Henyey-Greenstein se tiene el ángulo polar de propagación de rayos

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2g}\left(1 + g^2 - \left(\frac{1 - g^2}{1 + g - 2g\xi_1}\right)^2\right)\right) \quad (1.31)$$

Para la función de fase exponencial coseno se tiene se tiene el ángulo polar de propagación de rayos

$$\theta = \arccos\left((1 - \xi_1)^{\frac{1}{n+1}}\right) \quad (1.32)$$

Simetría acimutal es generalmente asumida usando estas funciones de fase. Por lo tanto, el ángulo acimutal de propagación de rayos para ambas funciones es definido como

$$\phi = 2\pi\xi_2 \quad (1.33)$$

Estas funciones de fase se emplearon para describir el cambio del perfil del haz láser a medida que cambia el gramaje en el papel. Se eligió la función que mejor se ajuste a estos cambios del perfil del haz láser.

## 2. SISTEMA IMPLEMENTADO

Para el desarrollo de este proyecto se requería iluminar la muestra con luz de alta coherencia espacial y temporal, es decir que cumpla con correlaciones de fase de energía estables en puntos distintos en una sección transversal del haz, en el caso espacial, y en un mismo punto en dos instantes de tiempo diferentes, para el caso temporal. Este tipo de luz es importante debido a que la onda que se mueve en el espacio de forma estable, y al chocar con algún medio dispersor producen patrones de esparcimiento que son más fáciles de estudiar, que cuando se producen luz natural. La iluminación debe ser expandida para que abarque una mayor área de estudio en las muestras, generando patrones que brinden información más completa de la muestra. Debido a que los papeles tienen una amplia superficie de estudio, es importante abarcar la mayor área posible con este tipo de luz y que la cámara tome imágenes que comprendan la totalidad del área iluminada, a fin de poder evaluar el cambio en el perfil.

Como la cantidad de luz que llega a las muestras de papel es alta, se debe atenuar esta intensidad para que en la toma de imágenes no haya saturación. Esto depende del tipo de cámara que se use, ya que las cámaras trabajan con un nivel de sensibilidad de luz diferente. Entonces se debe ajustar la intensidad para que abarque el rango dinámico de la cámara, es decir que la imagen registrada presente un alto brillo, pero sin que haya saturación.

Se requiere que todo el sistema este montado sobre una superficie horizontal firme, permitiendo que todos los elementos del sistema estén lo más estables posible. Esto permite una mejor medida de la iluminación que transmiten las muestras. También un soporte fijo en el sistema permitirá calibrar o alinear con mayor facilidad todos los elementos presentes.

También es necesario que el montaje este en un lugar oscuro, ya que la presencia de cualquier otro tipo de luz puede originar ruido en las imágenes capturadas por la cámara.

## **2.1. DISEÑO DEL SISTEMA**

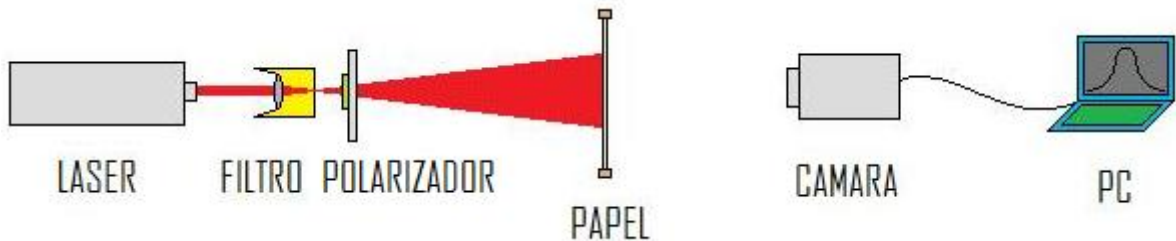
De acuerdo al tipo de iluminación requerida, se utilizó de un láser rojo He-Ne de 632.8 nm, con una potencia de 5 mW, una divergencia de  $\theta = 0.0306^\circ$ , que cumple con las características antes expuestas, es decir es un tipo de luz cuasi – monocromática, altamente coherente. El láser debía estar completamente horizontal para facilitar los cálculos y las medidas en las imágenes capturadas y la alineación del sistema. Los demás dispositivos usados en el sistema se alinearon con respecto al eje de propagación del rayo láser.

Para realizar el filtrado del haz se utilizó un objetivo de 40X y un pinhole de 20 micrómetros de diámetro. Al hacer pasar el haz por este sistema se eliminan las altas frecuencias, correspondientes al ruido. Estos elementos se colocaron en el sistema, alineados con respecto al láser.

Para que las imágenes no se presenten saturadas en la cámara, se manejó un polarizador lineal, el cual reduce la cantidad de iluminación que le llega a cada una de las muestras en función de su ángulo de giro, como lo establece la Ley de Malus  $I=I_0\cos^2\theta$ . Este fue el tercer instrumento que se introdujo en el sistema y toda la luz que sale del pinhole debía pasar él.

Se colocó la muestra de papel perpendicular a la dirección a la propagación del haz, a una distancia donde toda la superficie de estudio del papel fue capturada por la cámara SONY XC750.

Por último se alineó y calibró la cámara para obtener una imagen con un buen contraste y que abarque toda la zona iluminada por el láser en la muestra de papel. La cámara se conectó a un computador que realizó el respectivo análisis de las imágenes capturadas. La figura 2.1. muestra el orden de los dispositivos usados en el sistema.



**Figura 2.1.** Montaje experimental para obtención de imágenes con esparcimiento de luz láser en las muestras de papel.

Lo primero que se tuvo en cuenta al desarrollar las pruebas es que el sitio donde se monte el sistema debe ser muy oscuro, preferiblemente rodeado de superficies no reflectivas. El sistema estuvo sobre una superficie horizontal firme y cada uno de los instrumentos estuvieron sujetos por bases fijas que permitieron ajustar la horizontalidad y alineación de cada uno de ellos. Se debió verificar que todos los instrumentos a usar estuvieran alineados. El montaje como tal necesita una superficie aproximada de 2 metros de longitud por 50 centímetros de ancho.

Usando un marco cuadrado de madera de dimensiones  $L=30$  cm y de 2 cm de ancho, se instaló la muestra de menor gramaje para calibrar el sistema, ya que a medida que aumenta el gramaje la cantidad de luz que atraviesa el papel disminuye, lo que reduce el riesgo de que se sature la cámara. Se ubicaron las muestras sobre el marco lo mas tensionadas posible para evitar la formación de arrugas o pliegues que distorsionen las medidas.

Por último se colocó la cámara que estuvo alineada y horizontal mediante el uso de un nivel y soportes ajustables. En este punto se ajustó la distancia entre el polarizador lineal, el marco de madera y la cámara. Se calibró el polarizador a un

ángulo que no sature las imágenes es decir que sea una intensidad que este dentro del rango dinámico de la cámara. La cámara estuvo a una distancia de tal forma que abarco toda la luz láser en la muestra y además la imagen fue centrada, con un buen contraste ajustado con la óptica de la cámara.

El computador que estuvo adquiriendo todas las imágenes debía estar lo más alejado posible del sistema, para que la luz del monitor no interfiriera en las medidas.

Para registrar la información se capturaron 10 imágenes por cada muestra de papel. Para lograrlo se movió el marco de madera sobre una guía que indicaba 10 posiciones diferentes para cada una de las pruebas. Este procedimiento se realizó para cada uno de los 23 tipos de papel analizados.

Para el análisis de las imágenes se extrajo el plano rojo de cada una de ellas y se promediaron las diez imágenes correspondientes a cada tipo de papel, esto con el fin de obtener una imagen que represente el comportamiento promedio de la muestra analizada.

Para analizar el perfil del láser cuando sale de la muestra se registraron dos perfiles de línea, uno vertical y otro horizontal, para cada imagen promediada. Para disminuir el ruido en los perfiles registrados, debido al *speckle* que se presenta por utilizar luz coherente, se realizó un filtrado reemplazando el valor de cada pixel por el promedio de los 10 pixeles anteriores y posteriores a él. Así se obtuvo una curva más suave, sin la presencia de tantos picos o ruido. Estos datos se los almacenaron en una carpeta.

Se desarrolló una rutina que tomó los datos obtenidos anteriormente y los graficó para observar su perfil. Estos datos suministraron una curva o función exponencial Gaussiana. Este programa permitió realizar un acercamiento a esta curva y suministró los parámetros de la función exponencial Gaussiana que

describe esta curva, es decir los parámetros **A**, **B**, **d** y **c** como se ve en la siguiente función:

$$F(x) = A + B e^{-2\left(\frac{x-d}{c}\right)^2} \quad (2.1)$$

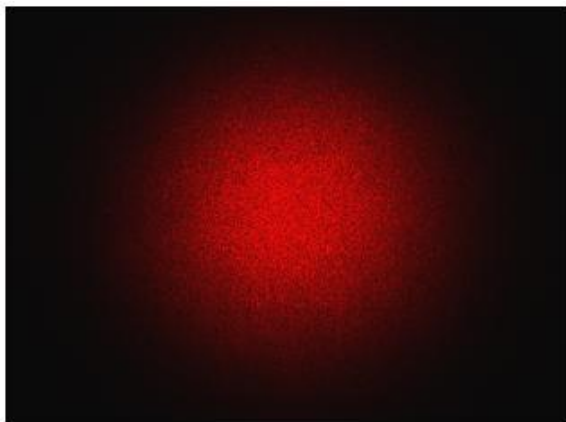
Estos parámetros son los que se consignaron en las tablas.

Se emplearon las funciones de fase Henyey-Greenstein y de fase exponencial coseno para determinar qué función es la más adecuada para describir la función exponencial Gaussiana (función 2.1), para cada uno de los 23 tipos de papel.

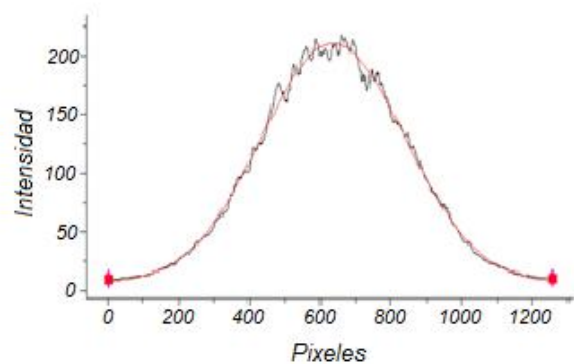
Al obtener la función, se graficaron sus parámetros a medida que cambia el gramaje para observar si éste método es una buena descripción para diferenciar los diferentes tipos de papel.

Con esta función y mediante un programa se analizó que tan bueno es el acercamiento de la función de fase exponencial coseno respecto a la función exponencial Gaussiana.

A continuación se muestra el cambio del perfil del haz láser con un papel delgado y otro grueso. En las figuras 2.2 y 2.3 se observa dos imágenes capturadas por la cámara para un papel delgado de  $60 \frac{gr}{m^2}$  y un papel grueso de  $300 \frac{gr}{m^2}$ , con su respectivo perfil de línea.



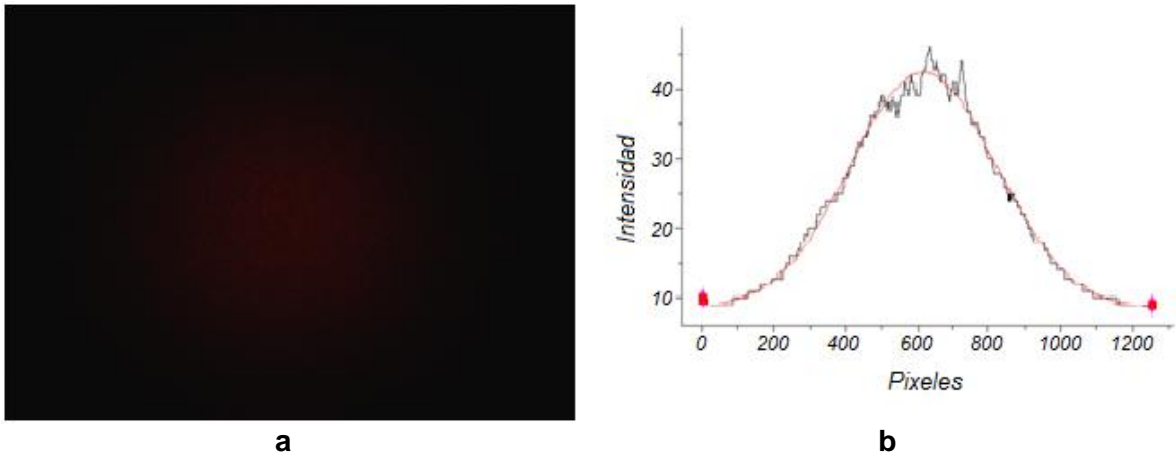
**a**



**b**

**Figura 2.2. a.** Imagen de luz láser esparcida. **b.** Perfil de línea\* de un papel delgado  $60 \frac{gr}{m^2}$





**Figura 2.3. a.** Imagen de luz láser esparcida. **b.** Perfil de línea\* de un papel grueso  $300 \frac{gr}{m^2}$

\* En las gráficas **(b)** se observa una línea de color negro, que son los datos suministrados al realizar el perfil de línea sobre la imagen, y una línea de color rojo, que es una función aproximada a estos datos.

En las figuras anteriores se puede observar que al realizar un perfil de línea por la parte central de la imagen, esta última va cambiando su intensidad de niveles de gris entre 0 a 256 a medida que se recorren los 1280 píxeles de izquierda a derecha en la imagen de luz esparcida para los dos tipos de papel.

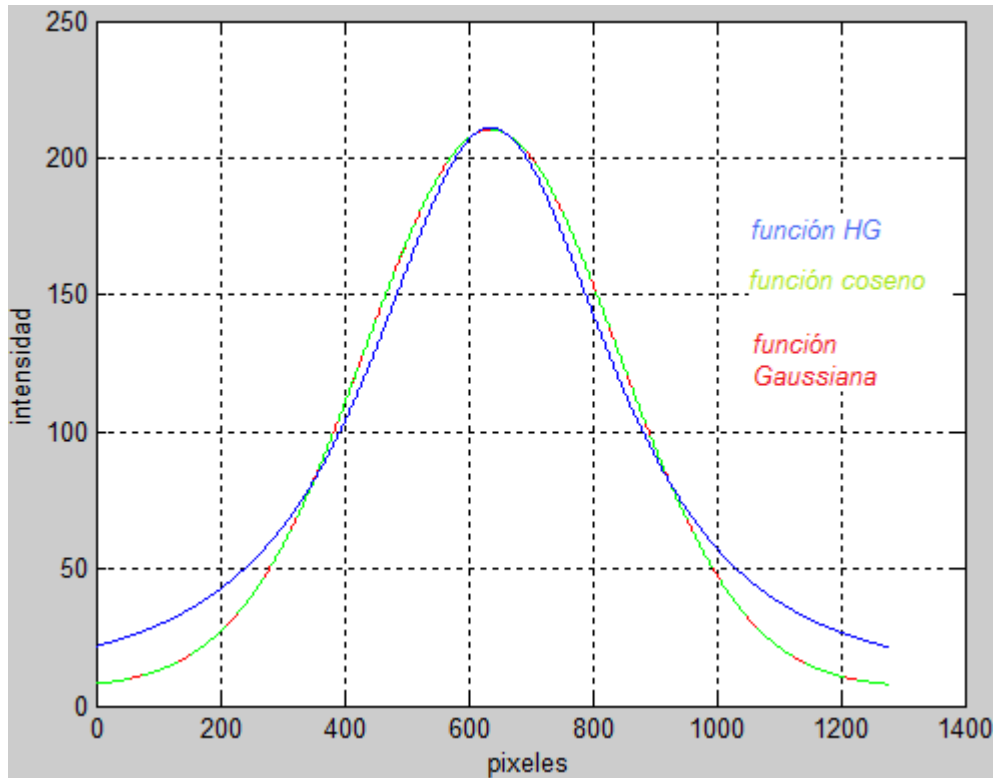
A continuación se describen las características de los 23 tipos de papel utilizados en éste trabajo.

<b>PAPEL</b>	<b>GRAMAJE (<math>\frac{gr}{m^2}</math>)</b>	<b>CARACTERISTICA</b>
Bond	60, 75	Papel sin recubrimiento.
Bristol blanco	150	Cartulina sin recubrimiento.
Esmaltado C1S gloss	80, 90, 115, 160, 210	Papeles y cartulinas recubiertos por una cara.
Esmaltado C2S color mate	90, 115, 150, 200, 240	Papeles y cartulinas esmaltados por dos caras.
Esmaltado C1S SBS	225, 250, 280	Cartulinas recubiertas por una cara.
Esmaltado C2S gloss	90, 115, 150, 200, 240, 300	Papeles y cartulinas esmaltados por dos caras.
Reprograf	75	Papeles multipropósito de alto desempeño.

**Tabla 2.1.** Diferentes tipos de papel que se usan en el sistema.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

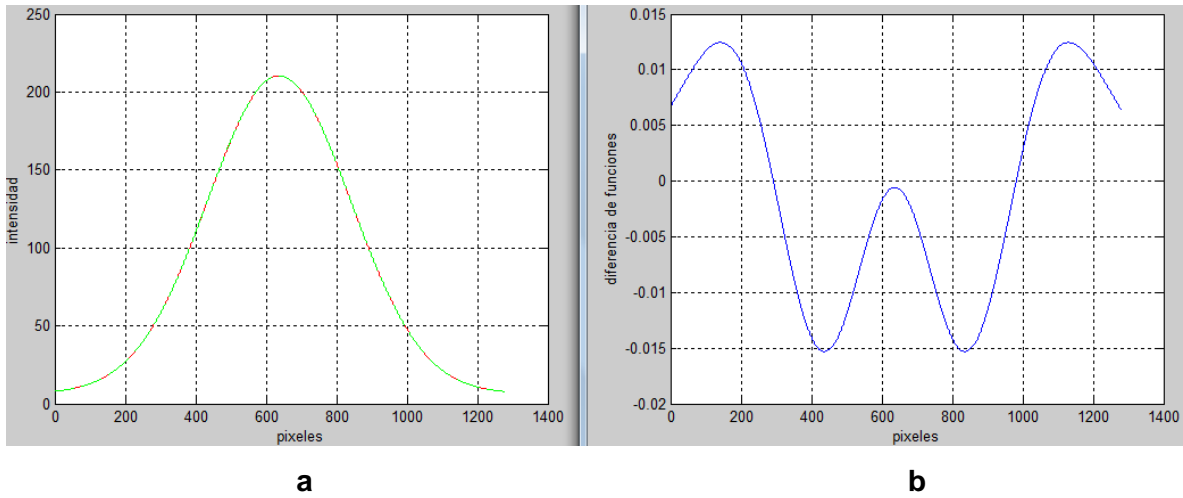
#### 3.1. RESULTADOS



**Figura 3.1.** Gráficas de las funciones de fase Henyey-Greenstein (HG), de fase exponencial coseno (EC) y exponencial Gaussiana (EG).

La figura 3.1 proporciona información del comportamiento de las funciones de fase HG y EC con respecto a la función exponencial Gaussiana.

La función de fase EC y la función exponencial Gaussiana prácticamente son las mismas y por esta razón a la primera se la escoge como la mejor descriptora de los perfiles de línea de cada papel.



**Figura 3.2.** Diferencia de funciones exponencial Gaussiana y de fase exponencial coseno para un papel Bond de  $60 \left(\frac{gr}{m^2}\right)$ .

En la figura 3.2.a se aprecia la superposición de dos funciones, la función exponencial Gaussiana y la función de fase exponencial coseno. Su diferencia se observa en la figura 3.2.b, donde se observa que los niveles de gris varían entre +0.015 y -0.015, es decir con un error aproximado de 0.025%. Esta diferencia también se puede ver en los otros papeles (ver Anexo).

A continuación se muestra:

1. Las imágenes de luz láser esparcida para cada uno de los 23 tipos de papel.
2. Tablas con los diferentes parámetros **A**, **B**, **c**, y **d**, de la función exponencial Gaussiana. (ver función 3.1).
  - Promedio 1: calculado para los 10 datos de cada parámetro.
  - Desviación estándar: calculada para los 10 datos de cada parámetro.
  - Promedio 2: calculado por el programa.

$$F(x) = A + B e^{-2\left(\frac{x-d}{c}\right)^2} \quad (3.1)$$

con  $B = \frac{b}{c\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ , siendo  $b$  y  $c$  parámetros de amplitud y ancho en la función, respectivamente.

3. Las gráficas de los datos promedios de cada imagen de luz esparcida por cada tipo de papel con la mejor aproximación de la función exponencial Gaussiana y con la respectiva función de fase exponencial coseno (3.2) para cada tipo de papel.

$$F_{EC}(n, \theta) = A + \frac{n+1}{2\pi} \cos^n\left(\frac{x-d}{z}\right) \quad (3.2)$$

donde  $n$  es la dirección exponencial (especular),  $\theta = \frac{x-d}{z}$  es el ángulo sólido de propagación y  $z$  es el ancho de la campana.  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  y  $n \in (0, \infty)$ .

4. Tabla de los parámetros **n** y **z** de los 23 tipos de papel.
5. Dos gráficos de los parámetros **n** y **z** de la función de fase exponencial coseno con respecto al gramaje

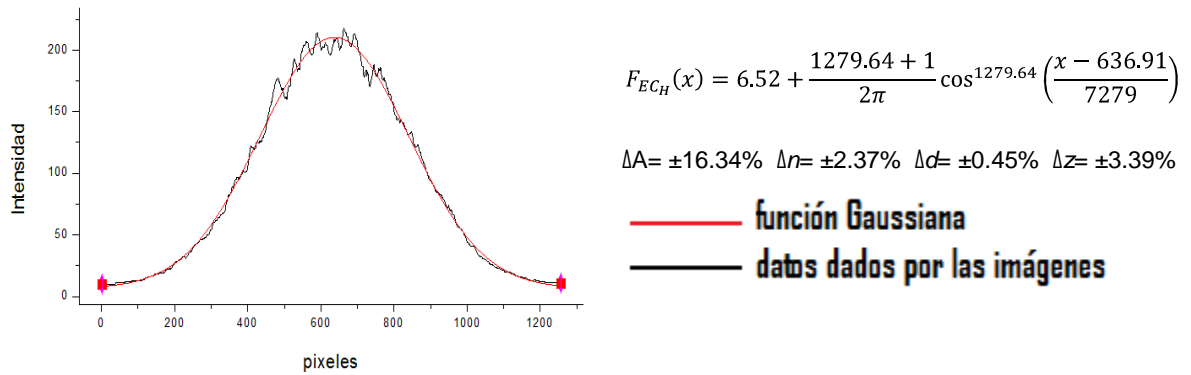
### 3.1.1. Papel Bond



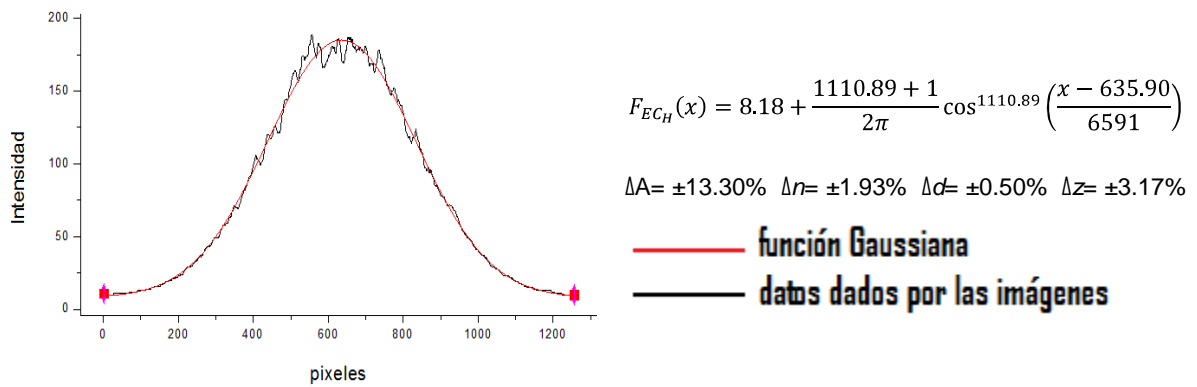
**Figura 3.3.** Imágenes luz láser esparcida del papel Bond de 60 y 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	BOND 60 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				BOND 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	8.11	192.96	408.30	636.91	8.75	179.04	392.31	636.30
2	9.25	206.79	391.40	639.82	6.86	168.71	414.86	636.69
3	6.60	203.66	412.67	638.26	10.72	177.80	386.17	641.42
4	6.86	207.22	408.93	630.78	7.08	176.00	410.83	641.05
5	8.46	206.00	400.54	639.09	9.42	171.67	398.12	637.11
6	7.67	209.71	398.63	632.45	8.83	175.85	396.87	636.10
7	8.34	206.20	400.63	635.93	9.62	178.31	392.77	634.07
8	6.49	206.36	410.05	637.78	9.20	172.67	399.73	643.22
9	9.61	207.78	389.56	636.88	8.04	176.72	397.10	635.00
10	5.75	200.41	415.95	637.03	8.68	178.36	393.63	634.55
<b>Promedio 1</b>	<b>7.71</b>	<b>204.71</b>	<b>403.66</b>	<b>636.49</b>	<b>8.72</b>	<b>175.51</b>	<b>398.24</b>	<b>637.55</b>
Desv. Estándar (%)	16.34	2.36	2.21	0.45	13.30	1.94	2.17	0.50
<b>Promedio 2</b>	<b>6.52</b>	<b>203.82</b>	<b>406.89</b>	<b>636.91</b>	<b>8.18</b>	<b>176.96</b>	<b>395.46</b>	<b>635.90</b>

**Tabla 3.1.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Bond de 60 y 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



**Figura 3.4.** Gráficas del papel Bond de 60 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



**Figura 3.5.** Gráficas del papel Bond de 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

### 3.1.2. Papel Bristol blanco

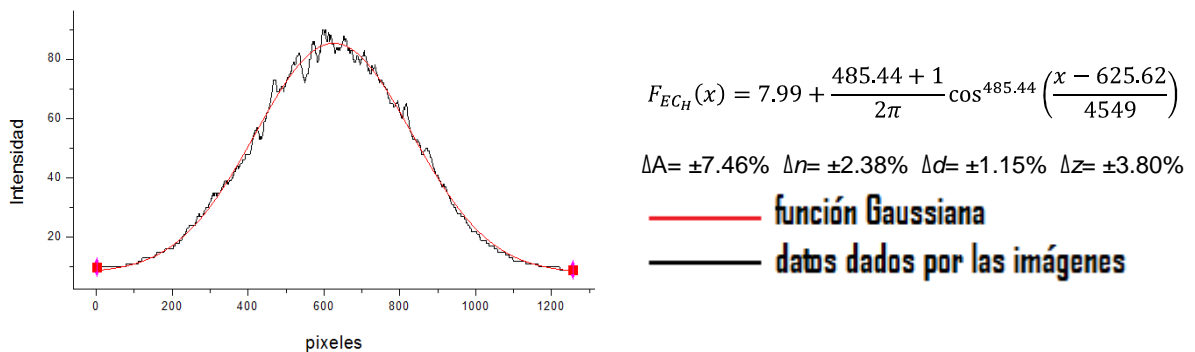


Bristol 150

**Figura 3.6.** Imagen de luz láser esparcida del papel Bristol blanco de  $150(\frac{gr}{m^2})$ .

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA				
Dato	BRISTOL BLANCO 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d
1	9.16	76.32	400.19	634.02
2	8.59	74.12	410.18	630.36
3	9.14	74.34	408.37	618.48
4	8.54	75.48	410.19	629.02
5	9.23	76.17	399.71	619.41
6	8.50	75.36	412.12	612.05
7	9.65	75.78	394.81	618.02
8	8.23	72.72	420.99	620.04
9	9.78	77.69	390.51	630.41
10	7.67	79.25	423.30	626.77
<b>Promedio 1</b>	<b>8.85</b>	<b>75.72</b>	<b>407.04</b>	<b>623.86</b>
Desv. Estándar (%)	7.46	2.43	2.63	1.15
<b>Promedio 2</b>	<b>7.99</b>	<b>77.42</b>	<b>412.74</b>	<b>625.62</b>

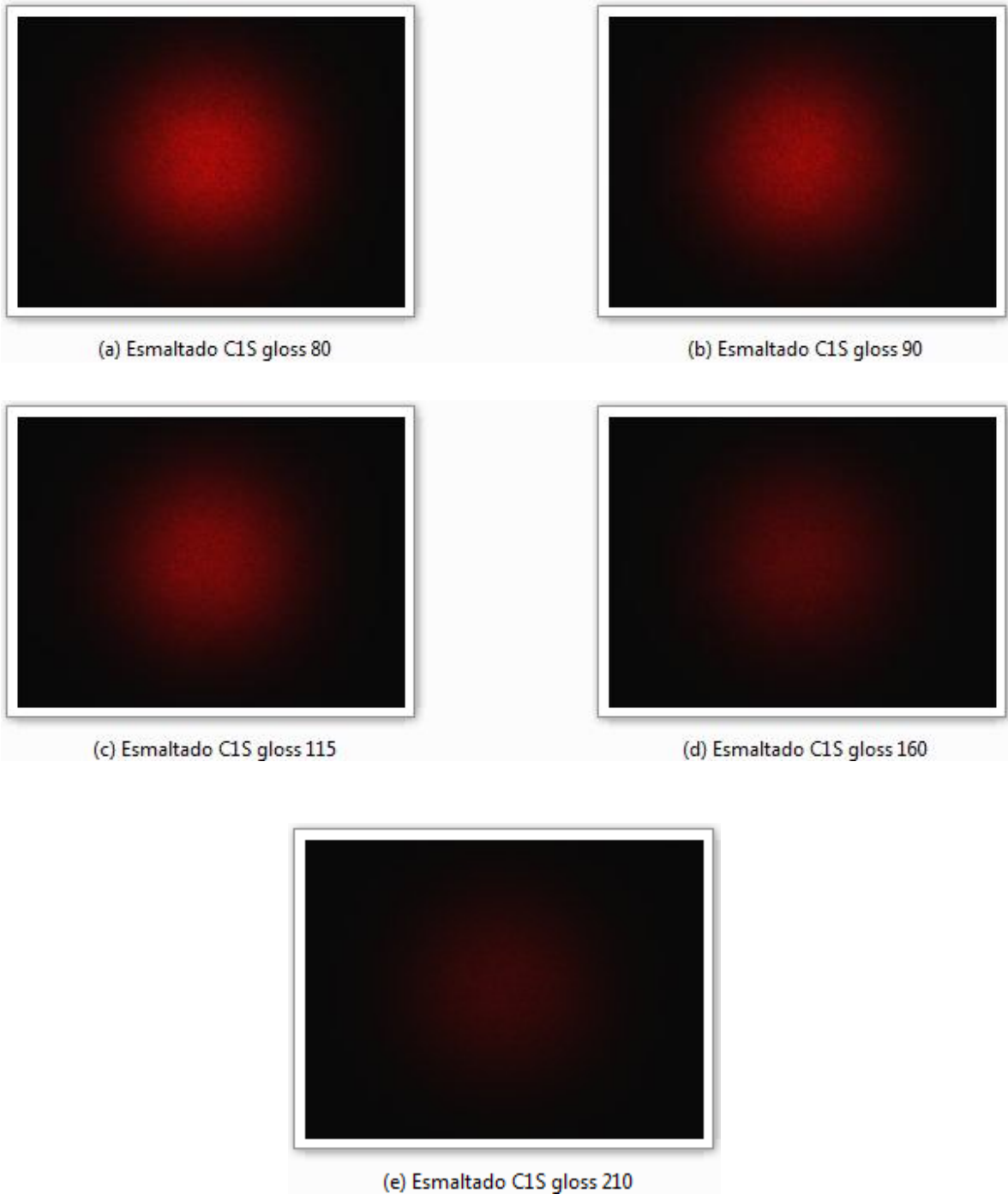
**Tabla 3.2.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Bristol blanco  $150(\frac{gr}{m^2})$



**Figura 3.7.** Gráficas del papel Bristol de  $150(\frac{gr}{m^2})$  y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



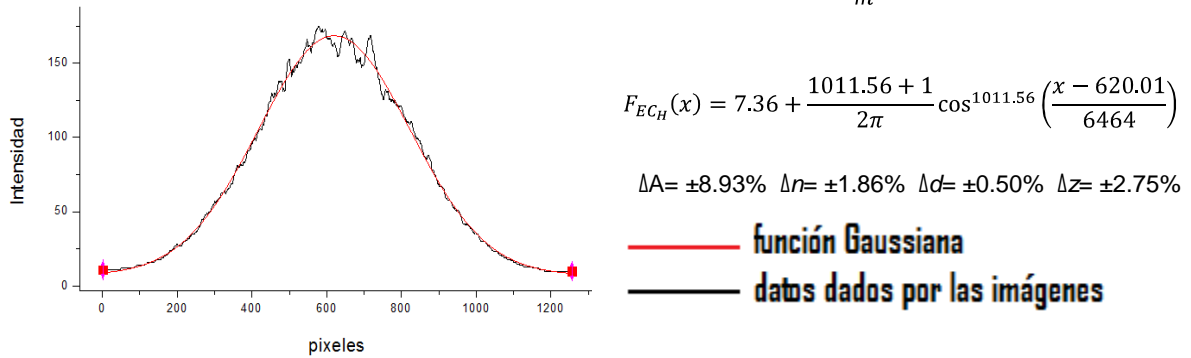
### 3.1.3. Papel Esmaltado C1S gloss



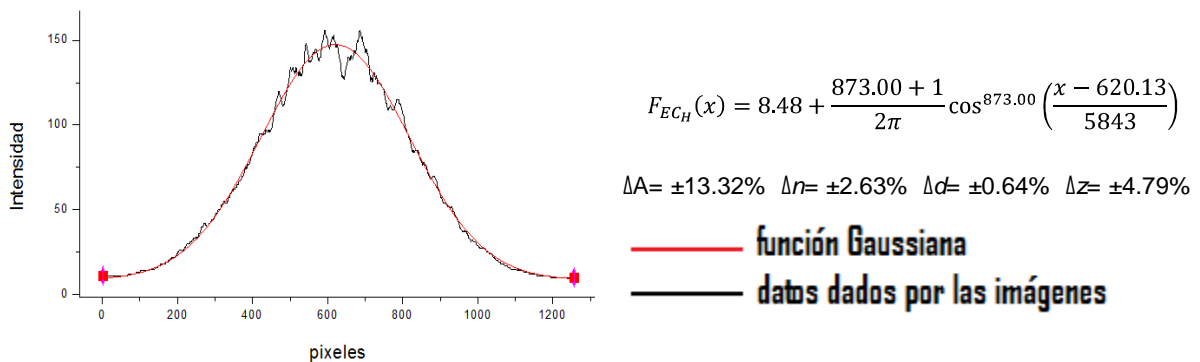
**Figura 3.8.** Imágenes de luz láser esparcida del papel Esmaltado C1S gloss de 80, 90, 115, 160 y 210 ( $\frac{gr}{m^2}$ )

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C1S GLOSS 80 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C1S GLOSS 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	7.13	153.36	419.49	622.38	7.16	131.92	423.28	621.86
2	7.24	159.86	414.95	625.44	8.25	136.56	407.58	627.24
3	7.46	155.92	413.50	625.61	7.62	136.73	414.95	626.49
4	8.10	162.47	403.28	625.00	6.38	134.87	429.32	621.34
5	8.58	157.59	403.52	618.89	7.09	131.74	422.08	618.62
6	7.99	160.68	403.91	620.57	7.90	134.05	409.62	614.40
7	9.20	159.22	399.26	623.33	8.36	131.06	411.70	625.36
8	7.36	157.15	414.74	626.73	6.90	135.06	416.44	623.39
9	7.09	161.20	414.81	619.45	7.52	136.20	412.85	620.52
10	8.23	162.70	400.80	618.22	10.10	143.79	379.19	619.20
<b>Promedio 1</b>	<b>7.84</b>	<b>159.02</b>	<b>408.83</b>	<b>622.56</b>	<b>7.73</b>	<b>135.20</b>	<b>412.70</b>	<b>621.84</b>
Desv. Estándar (%)	8.93	1.88	1.79	0.50	13.32	2.70	3.29	0.64
<b>Promedio 2</b>	<b>7.36</b>	<b>161.15</b>	<b>406.42</b>	<b>620.01</b>	<b>8.48</b>	<b>139.10</b>	<b>395.44</b>	<b>620.13</b>

**Tabla 3.3.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S gloss de 80 y 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



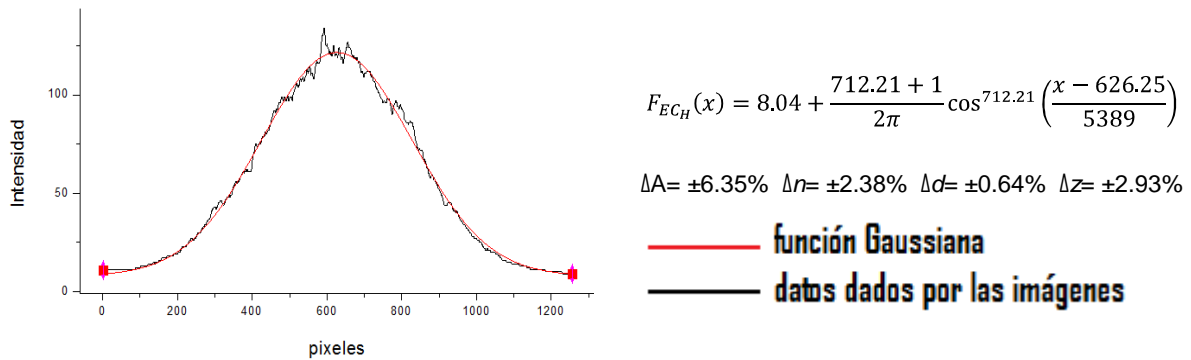
**Figura 3.9.** Gráficas del papel Esmaltado C1S gloss 80 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



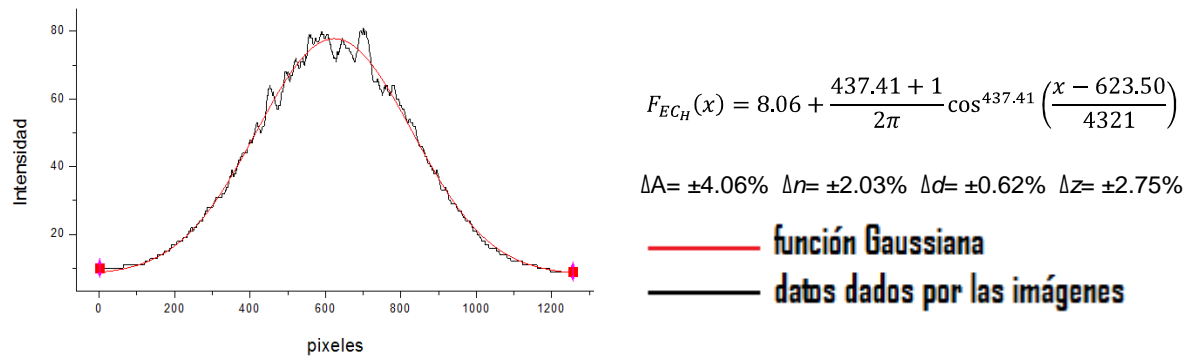
**Figura 3.10.** Gráficas del papel Esmaltado C1S gloss 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C1S GLOSS 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C1S GLOSS 160 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	8.07	109.28	416.86	619.96	9.28	71.18	400.62	623.15
2	8.40	109.32	410.36	630.84	8.75	68.13	412.86	618.34
3	8.00	109.00	416.26	623.35	8.87	69.11	407.79	628.18
4	9.44	109.40	400.45	624.40	9.31	71.23	396.32	620.84
5	8.00	109.23	412.26	625.58	8.77	71.42	411.77	630.79
6	8.82	109.05	404.73	625.99	8.89	72.25	401.61	619.54
7	8.06	108.26	417.23	617.50	9.33	70.09	401.59	620.45
8	8.22	108.98	410.65	622.25	8.26	68.46	417.19	623.23
9	7.66	110.79	413.35	629.00	8.49	68.79	413.15	624.39
10	8.81	117.56	396.98	626.91	8.65	70.27	413.78	623.16
<b>Promedio 1</b>	<b>8.35</b>	<b>110.09</b>	<b>409.91</b>	<b>624.58</b>	<b>8.86</b>	<b>70.09</b>	<b>407.67</b>	<b>623.21</b>
Desv. Estándar (%)	6.35	2.45	1.71	0.64	4.06	2.02	1.74	0.62
<b>Promedio 2</b>	<b>8.04</b>	<b>113.51</b>	<b>403.73</b>	<b>626.25</b>	<b>8.06</b>	<b>69.77</b>	<b>413.04</b>	<b>623.50</b>

**Tabla 3.4.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S gloss de 115 y 160 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



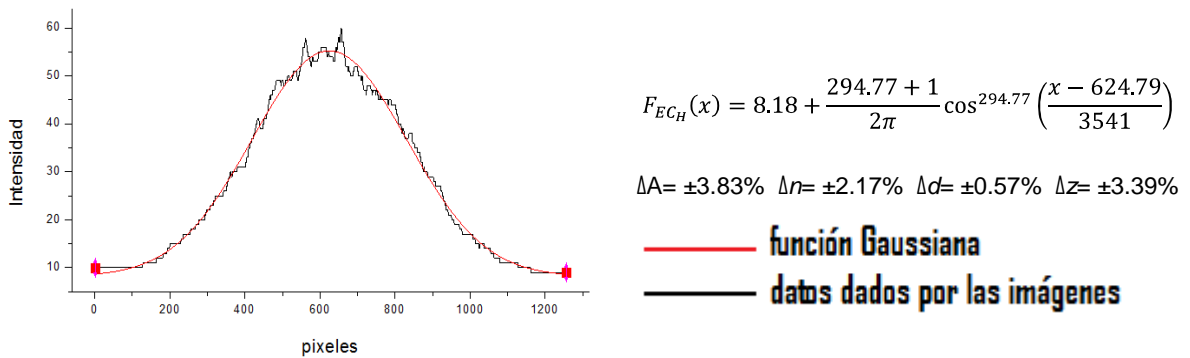
**Figura 3.11.** Gráficas del papel Esmaltado C1S gloss 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



**Figura 3.12.** Gráficas del papel Esmaltado C1S gloss 160 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA				
Dato	ESMALTADO C1S GLOSS 210 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d
1	8.38	45.88	426.00	620.52
2	9.11	47.71	401.93	619.78
3	9.34	47.57	396.46	620.39
4	9.28	46.79	399.75	621.19
5	9.15	46.85	404.03	627.56
6	8.86	48.22	406.16	622.24
7	8.84	47.05	412.50	622.99
8	8.84	47.81	403.23	616.65
9	8.63	45.03	420.42	627.68
10	8.42	48.14	413.93	625.28
<b>Promedio 1</b>	<b>8.88</b>	<b>47.10</b>	<b>408.44</b>	<b>622.43</b>
Desv. Estándar (%)	3.83	2.16	2.32	0.57
<b>Promedio 2</b>	<b>8.18</b>	<b>47.07</b>	<b>412.17</b>	<b>624.79</b>

**Tabla 3.5.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S gloss de 210 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



**Figura 3.13.** Gráficas del papel Esmaltado C1S gloss 210 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

### 3.1.4. Papel Esmaltado C2S mate



(a) Esmaltado C2S mate 90



(b) Esmaltado C2S mate 115



(c) Esmaltado C2S mate 150



(d) Esmaltado C2S mate 200

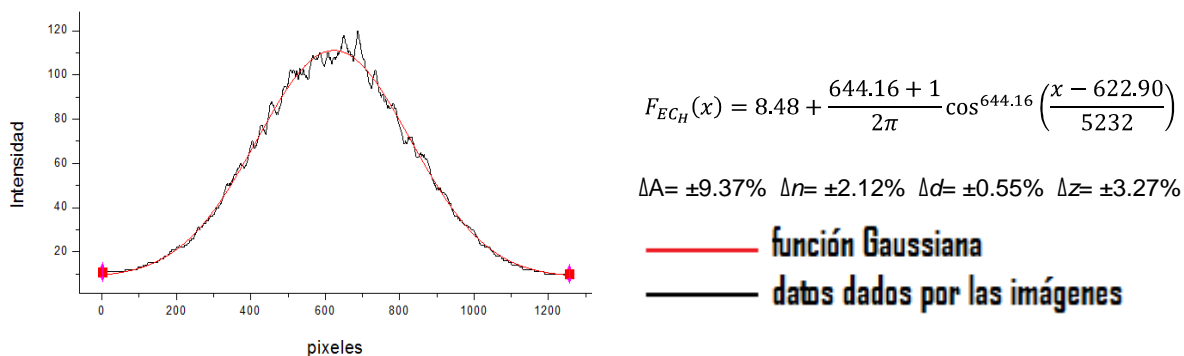


(e) Esmaltado C2S mate 240

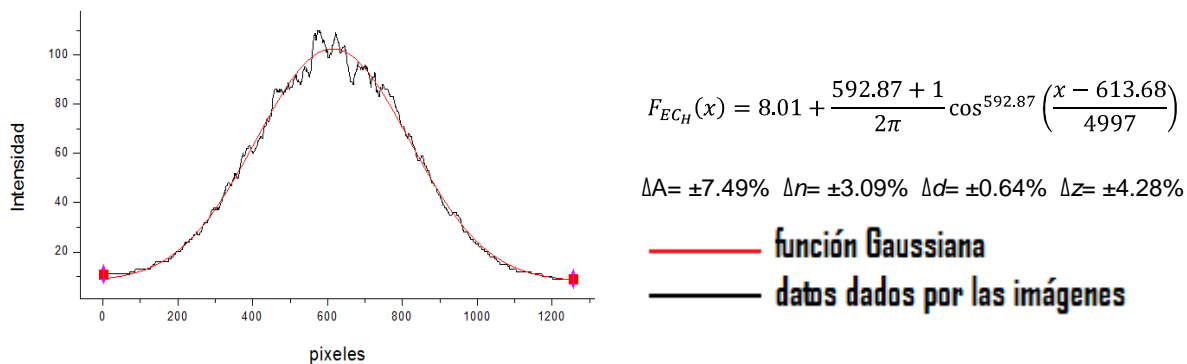
**Figura 3.14.** Imágenes de luz láser esparcida del papel Esmaltado C2S mate de 90, 115, 150, 200 y 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C2S MATE 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C2S MATE 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	8.80	100.35	416.48	622.69	9.03	94.07	411.34	613.94
2	6.92	103.04	436.15	632.15	9.89	93.87	398.31	617.61
3	9.15	105.16	406.49	622.47	7.90	90.47	427.98	611.76
4	7.71	100.53	427.84	623.82	7.94	89.81	428.35	612.69
5	7.83	103.79	423.26	621.98	8.60	91.74	417.94	617.74
6	7.82	102.71	424.27	623.05	8.52	99.66	402.76	603.56
7	7.45	107.49	421.93	628.31	8.82	93.49	406.66	613.35
8	8.64	103.84	412.50	621.90	8.73	93.92	405.30	613.66
9	8.79	101.23	415.47	621.34	7.69	91.67	425.99	614.74
10	9.11	102.79	409.53	623.57	8.40	96.42	407.16	613.33
<b>Promedio 1</b>	<b>8.22</b>	<b>103.09</b>	<b>419.39</b>	<b>624.13</b>	<b>8.55</b>	<b>93.51</b>	<b>413.18</b>	<b>613.24</b>
Desv. Estándar (%)	9.37	2.11	2.15	0.55	7.49	3.11	2.69	0.64
<b>Promedio 2</b>	<b>8.48</b>	<b>102.68</b>	<b>412.18</b>	<b>622.90</b>	<b>8.01</b>	<b>94.52</b>	<b>410.31</b>	<b>613.68</b>

**Tabla 3.6.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S mate de 90 y 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



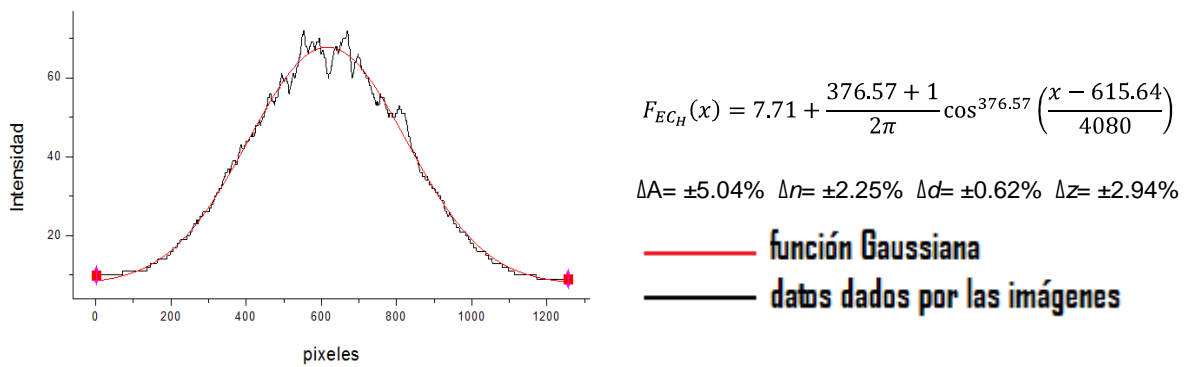
**Figura 3.15.** Gráficas del papel Esmaltado C2S mate 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



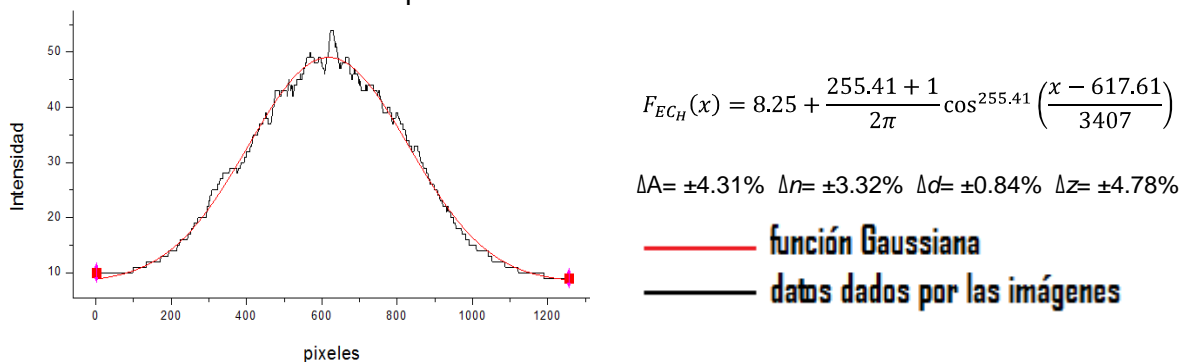
**Figura 3.16.** Gráficas del papel Esmaltado C2S mate 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C2S MATE 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C2S MATE 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	8.96	62.30	407.42	607.62	8.22	42.13	433.69	606.23
2	8.64	61.07	415.64	612.56	9.15	42.08	405.46	614.53
3	9.01	58.29	414.62	615.24	8.91	40.08	421.03	610.28
4	9.10	58.37	408.07	612.14	9.45	43.93	397.58	616.12
5	8.66	59.00	419.44	618.37	9.01	40.34	420.20	609.14
6	9.48	60.84	397.43	615.23	8.71	42.10	409.14	608.81
7	8.50	61.57	413.71	612.26	8.67	40.31	424.75	612.48
8	8.36	60.47	417.60	616.27	9.10	43.28	401.35	614.22
9	8.69	60.46	413.07	621.28	8.40	40.60	430.38	608.88
10	7.91	59.71	425.06	612.53	8.50	40.73	431.39	624.19
<b>Promedio 1</b>	<b>8.73</b>	<b>60.21</b>	<b>413.21</b>	<b>614.35</b>	<b>8.81</b>	<b>41.56</b>	<b>417.50</b>	<b>612.49</b>
Desv. Estándar (%)	5.04	2.23	1.83	0.62	4.31	3.24	3.16	0.84
<b>Promedio 2</b>	<b>7.71</b>	<b>60.09</b>	<b>420.23</b>	<b>615.64</b>	<b>8.25</b>	<b>40.81</b>	<b>425.98</b>	<b>617.61</b>

**Tabla 3.7.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S mate de 150 y 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



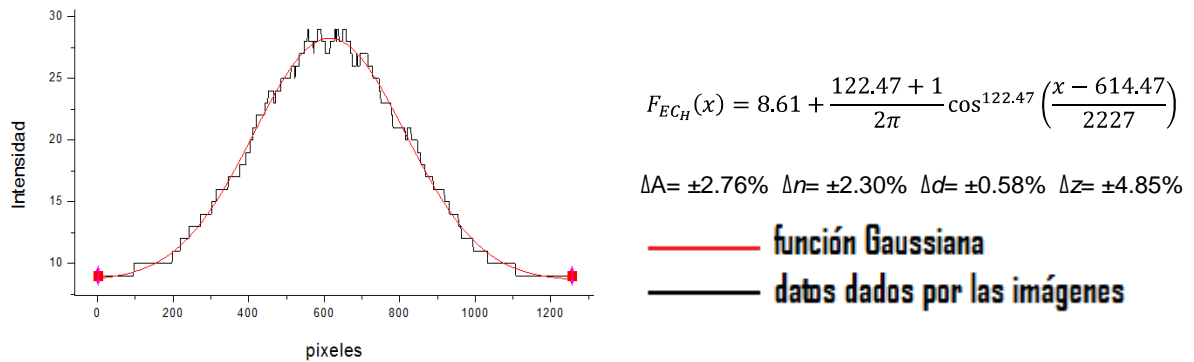
**Figura 3.17.** Gráficas del papel Esmaltado C2S mate 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



**Figura 3.18.** Gráficas del papel Esmaltado C2S mate 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA				
Dato	ESMALTADO C2S MATE 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d
1	9.41	19.77	395.36	618.37
2	9.00	19.24	421.00	612.27
3	9.27	19.56	405.45	612.82
4	8.86	18.87	423.67	617.25
5	9.31	19.75	398.31	612.40
6	8.83	19.73	421.72	606.05
7	9.00	18.66	424.43	612.03
8	9.25	19.86	389.24	616.36
9	8.62	20.02	425.89	610.97
10	9.15	19.63	395.98	613.89
<b>Promedio 1</b>	<b>9.07</b>	<b>19.51</b>	<b>410.11</b>	<b>613.24</b>
Desv. Estándar (%)	2.76	2.28	3.55	0.58
<b>Promedio 2</b>	<b>8.61</b>	<b>19.65</b>	<b>401.82</b>	<b>614.47</b>

**Tabla 3.8.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S mate de 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



**Figura 3.19.** Gráficas del papel Esmaltado C2S mate 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



### 3.1.5. Papel Esmaltado C1S SBS



(a) Esmaltado C1S SBS 225



(b) Esmaltado C1S SBS 250

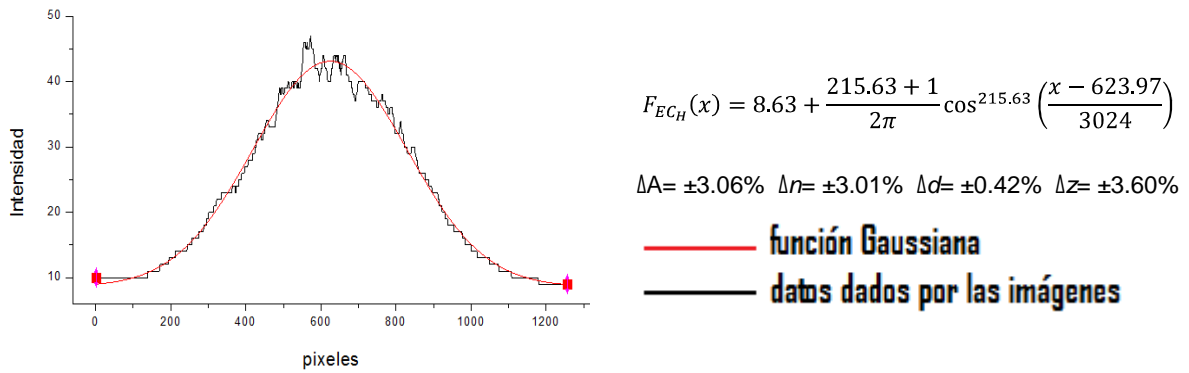


(c) Esmaltado C1S SBS 280

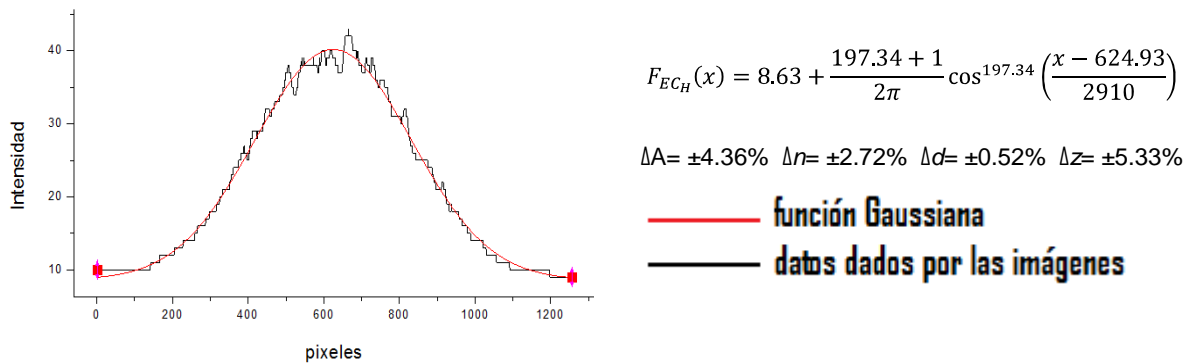
**Figura 3.20.** Imágenes de luz láser esparcida del papel Esmaltado C1S SBS de 225, 250 y 280 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C1S SBS 225 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C1S SBS 250 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	9.04	34.80	413.43	629.97	8.85	31.36	418.56	623.93
2	8.68	35.10	421.68	626.05	8.31	30.62	440.12	618.81
3	8.88	34.08	417.64	624.67	9.78	33.21	379.43	627.43
4	8.74	35.02	421.57	627.08	8.90	31.62	415.43	620.44
5	8.59	36.73	416.18	622.34	8.77	31.32	423.86	624.13
6	8.87	37.14	407.98	623.50	9.22	32.98	402.35	627.10
7	8.48	35.64	425.84	622.73	9.14	32.73	404.80	620.59
8	9.39	35.07	399.00	624.64	8.76	31.55	420.02	625.40
9	8.62	34.07	426.54	620.80	8.71	31.22	425.20	621.68
10	9.01	34.48	410.72	626.05	8.94	32.01	414.59	627.76
<b>Promedio 1</b>	<b>8.83</b>	<b>35.21</b>	<b>416.06</b>	<b>624.78</b>	<b>8.94</b>	<b>31.86</b>	<b>414.44</b>	<b>623.73</b>
Desv. Estándar (%)	3.06	2.92	2.06	0.42	4.36	2.67	3.92	0.52
<b>Promedio 2</b>	<b>8.63</b>	<b>34.48</b>	<b>411.47</b>	<b>623.97</b>	<b>8.63</b>	<b>31.57</b>	<b>413.84</b>	<b>624.93</b>

**Tabla 3.9.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S SBS de 225 y 250 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



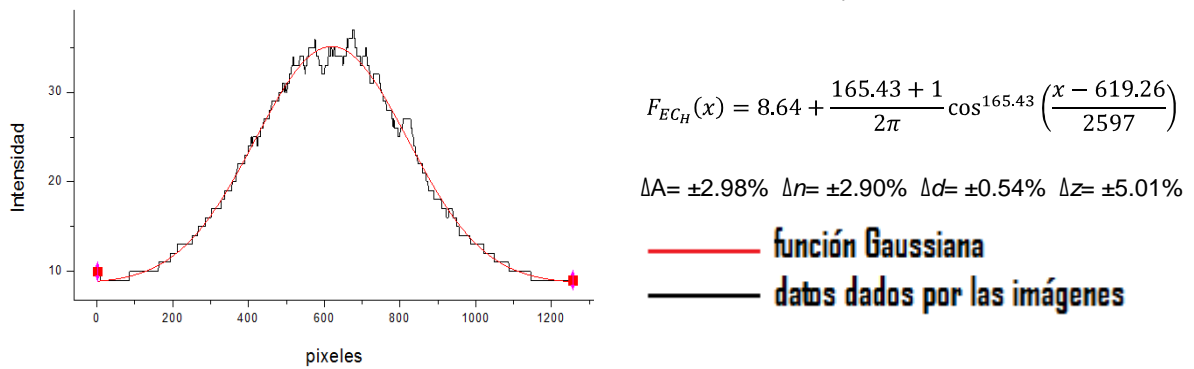
**Figura 3.21.** Gráficas del papel Esmaltado C1S SBS 225 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar



**Figura 3.22.** Gráficas del papel Esmaltado C1S SBS 250 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA				
Dato	ESMALTADO C1S SBS 280 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d
1	8.84	25.43	418.56	620.58
2	8.76	25.77	423.84	625.78
3	9.19	26.26	401.46	623.26
4	9.17	25.42	414.75	621.84
5	9.31	25.81	400.46	618.54
6	8.77	25.83	423.47	624.05
7	9.09	26.51	405.51	627.43
8	9.33	28.04	385.11	621.48
9	8.70	26.35	424.86	618.92
10	9.44	26.17	391.74	616.77
<b>Promedio 1</b>	<b>9.06</b>	<b>26.16</b>	<b>408.98</b>	<b>621.86</b>
Desv. Estándar (%)	2.98	2.89	3.47	0.54
<b>Promedio 2</b>	<b>8.64</b>	<b>26.49</b>	<b>403.23</b>	<b>619.26</b>

**Tabla 3.10.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C1S SBS de 280 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



**Figura 3.23.** Gráficas del papel Esmaltado C1S SBS 280 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

### 3.1.6. Papel Esmaltado C2S gloss



(a) Esmaltado C2S gloss 90



(b) Esmaltado C2S gloss 115



(c) Esmaltado C2S gloss 150



(d) Esmaltado C2S gloss 200



(e) Esmaltado C2S gloss 240

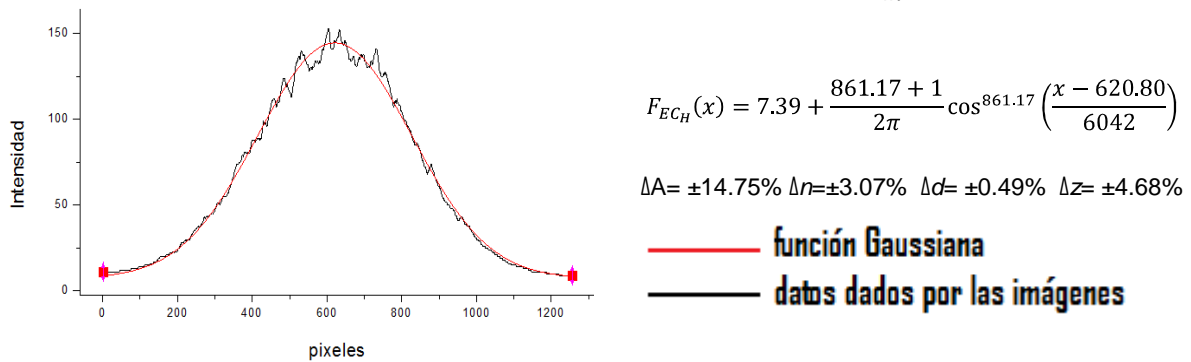


(f) Esmaltado C2S gloss 300

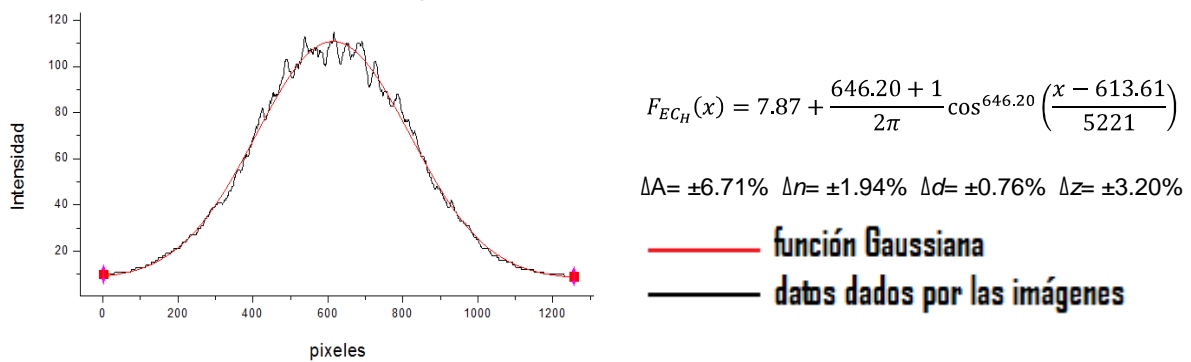
**Figura 3.24.** Imágenes de luz láser esparcida del papel Esmaltado C2S gloss de 90, 115, 150, 200, 240 y 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C2S GLOSS 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C2S GLOSS 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	8.72	127.20	416.12	618.69	8.18	100.03	421.25	613.94
2	8.50	130.38	417.10	617.02	8.54	99.52	413.84	616.77
3	6.49	129.26	434.85	615.92	7.45	99.62	427.40	617.73
4	7.87	129.51	421.64	618.26	8.26	99.23	419.59	607.12
5	8.07	129.91	419.15	616.73	7.28	98.51	430.12	618.66
6	9.27	137.41	399.89	613.26	8.45	102.72	408.23	611.63
7	5.69	131.04	437.10	616.16	7.70	99.54	425.11	622.66
8	9.42	135.11	397.65	621.86	8.41	101.49	412.52	615.64
9	7.39	135.06	416.87	616.88	7.41	101.25	425.15	608.86
10	7.91	140.26	408.89	623.67	8.77	105.11	401.95	614.39
<b>Promedio 1</b>	<b>7.93</b>	<b>132.52</b>	<b>416.93</b>	<b>617.84</b>	<b>8.05</b>	<b>100.70</b>	<b>418.52</b>	<b>614.74</b>
Desv. Estándar (%)	14.75	3.17	3.08	0.49	6.71	1.98	2.18	0.76
<b>Promedio 2</b>	<b>7.39</b>	<b>137.22</b>	<b>411.65</b>	<b>620.80</b>	<b>7.87</b>	<b>103.01</b>	<b>410.61</b>	<b>613.61</b>

**Tabla 3.11.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S gloss de 90 y 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



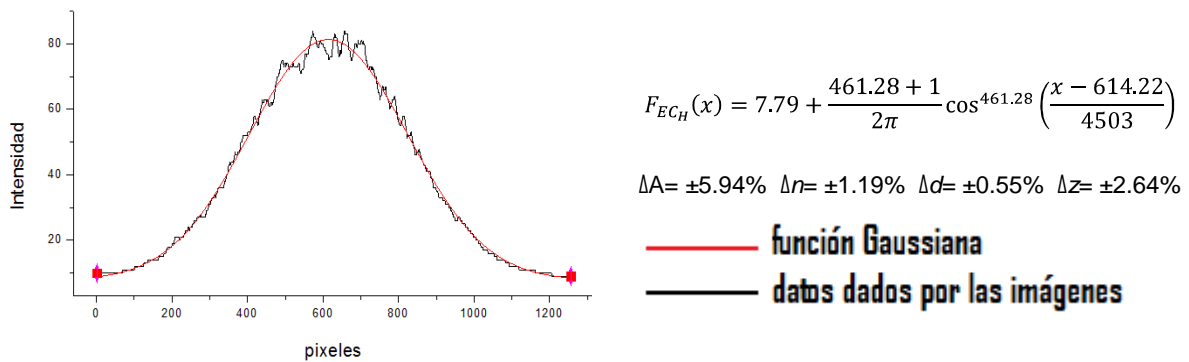
**Figura 3.25.** Gráficas del papel Esmaltado C2S gloss 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



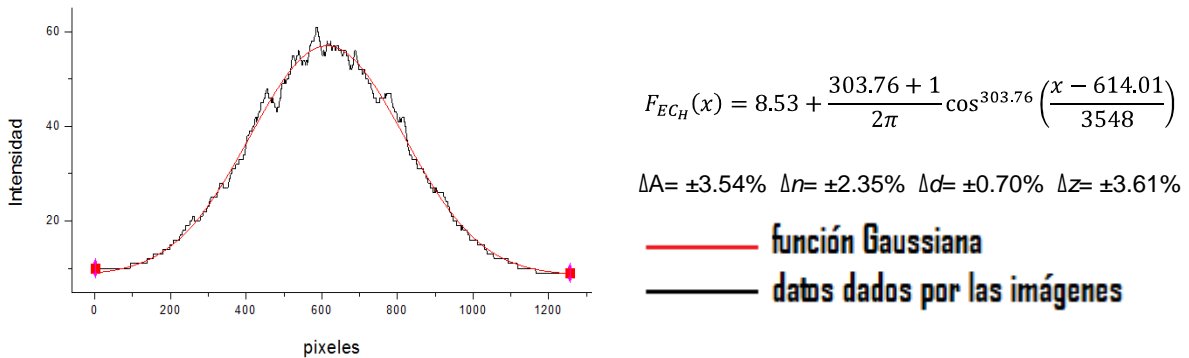
**Figura 3.26.** Gráficas del papel Esmaltado C2S gloss 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C2S GLOSS 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C2S GLOSS 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	9.31	73.32	406.95	613.42	8.61	48.03	418.76	620.78
2	8.95	71.61	408.44	614.51	9.04	48.65	406.21	612.13
3	9.29	73.55	403.89	615.78	8.31	45.72	430.86	614.47
4	8.62	72.95	414.53	621.97	8.63	46.92	415.93	610.88
5	8.69	74.04	412.93	614.80	8.86	46.76	415.87	608.91
6	8.64	74.51	413.45	611.17	8.51	48.18	420.65	619.72
7	8.23	74.22	415.98	619.97	9.06	47.52	410.57	608.69
8	8.55	74.16	411.63	612.64	8.31	46.67	426.49	616.30
9	9.45	74.22	398.12	616.22	9.04	47.86	402.95	617.08
10	7.76	73.06	430.42	612.86	9.11	49.67	400.82	612.13
<b>Promedio 1</b>	<b>8.75</b>	<b>73.56</b>	<b>411.63</b>	<b>615.33</b>	<b>8.75</b>	<b>47.60</b>	<b>414.91</b>	<b>614.11</b>
Desv. Estándar (%)	5.94	1.19	2.08	0.55	3.54	2.38	2.38	0.70
<b>Promedio 2</b>	<b>7.79</b>	<b>73.58</b>	<b>419.10</b>	<b>614.22</b>	<b>8.53</b>	<b>48.50</b>	<b>406.84</b>	<b>614.01</b>

**Tabla 3.12.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S gloss de 150 y 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



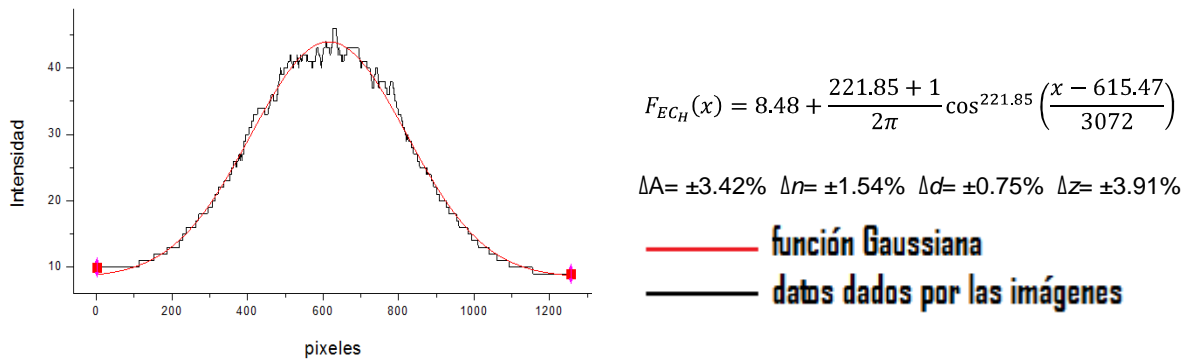
**Figura 3.27.** Gráficas del papel Esmaltado C2S gloss 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



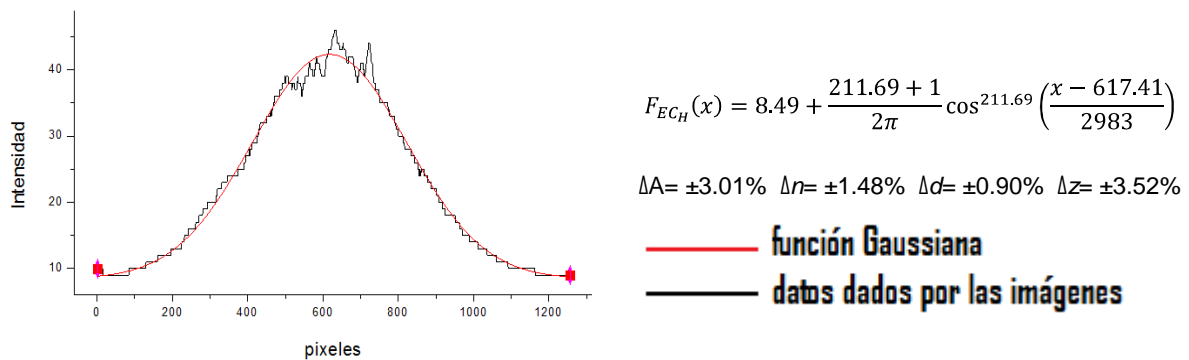
**Figura 3.28.** Gráficas del papel Esmaltado C2S gloss 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA								
Dato	ESMALTADO C2S GLOSS 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ )				ESMALTADO C2S GLOSS 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ )			
	A	B	c	d	A	B	c	d
1	8.38	34.98	430.53	616.84	9.27	33.10	399.51	619.52
2	9.07	34.97	413.32	620.42	9.02	32.77	418.69	626.05
3	9.04	35.63	411.99	615.03	8.95	33.90	415.32	618.34
4	8.50	35.05	431.88	614.82	9.21	33.68	405.30	608.33
5	8.52	35.30	428.21	614.38	8.46	32.94	435.54	611.92
6	9.01	36.09	400.57	611.38	8.77	34.03	417.35	610.51
7	9.08	35.85	401.58	615.71	9.29	34.08	397.30	619.70
8	9.05	35.63	400.95	620.31	8.66	33.44	418.82	617.51
9	8.39	34.70	429.10	604.97	9.09	34.04	408.92	610.90
10	8.73	36.34	412.36	619.03	9.09	34.00	406.06	619.22
<b>Promedio 1</b>	<b>8.78</b>	<b>35.45</b>	<b>416.05</b>	<b>615.29</b>	<b>8.98</b>	<b>33.60</b>	<b>412.28</b>	<b>616.20</b>
Desv. Estándar (%)	3.42	1.53	3.10	0.75	3.01	1.49	2.74	0.90
<b>Promedio 2</b>	<b>8.48</b>	<b>35.47</b>	<b>412.11</b>	<b>615.47</b>	<b>8.49</b>	<b>33.85</b>	<b>409.68</b>	<b>617.41</b>

**Tabla 3.13.** Parámetros de la función Gaussiana del papel Esmaltado C2S gloss de 240 y 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ )

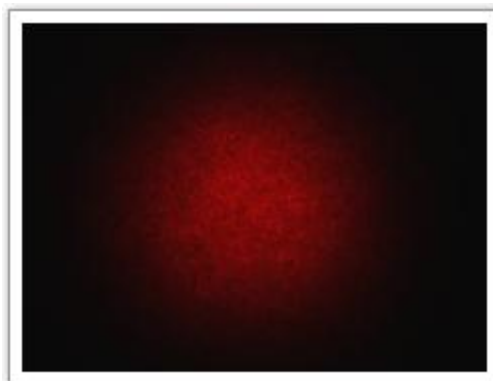


**Figura 3.29.** Gráficas del papel Esmaltado C2S gloss 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.



**Figura 3.30.** Gráficas del papel Esmaltado C2S gloss 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ ) y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

### 3.1.7. Papel Reprograf



Reprograf 75

Figura 3.31. Imagen de luz láser esparcida del papel Reprograf de  $75 \left(\frac{gr}{m^2}\right)$ .

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN GAUSSIANA				
Dato	REPROGRAF 75 $\left(\frac{gr}{m^2}\right)$			
	A	B	c	d
1	8.79	140.11	406.00	625.34
2	8.09	146.94	409.41	613.66
3	9.26	142.96	405.08	600.84
4	9.03	134.58	412.59	611.08
5	6.19	127.69	437.92	610.20
6	8.58	134.02	406.89	605.69
7	8.52	129.14	413.75	616.17
8	8.57	134.22	406.25	615.73
9	9.15	131.29	404.09	607.26
10	6.22	126.59	439.46	618.83
<b>Promedio 1</b>	<b>8.24</b>	<b>134.75</b>	<b>414.14</b>	<b>612.48</b>
Dev. Estándar (%)	13.71	4.98	3.22	1.15
<b>Promedio 2</b>	<b>7.13</b>	<b>129.01</b>	<b>423.32</b>	<b>614.82</b>

Tabla 3.14. Parámetros de la función Gaussiana del papel Reprograf de  $75 \left(\frac{gr}{m^2}\right)$

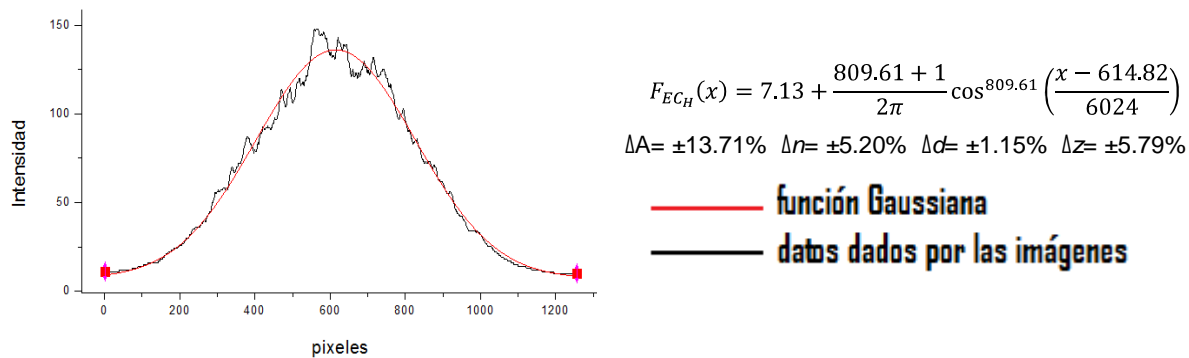


Figura 3.32. Gráficas del papel Reprograf  $75 \left(\frac{gr}{m^2}\right)$  y función de fase exponencial coseno con su desviación estándar.

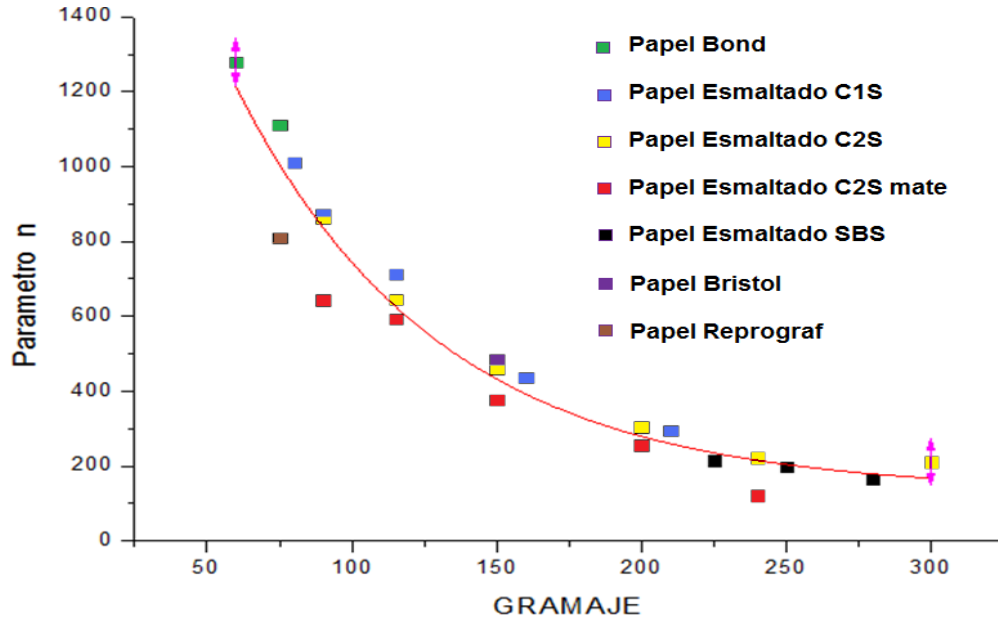


### 3.1.8. Parámetros $n$ y $z$ de la función de fase exponencial coseno

TIPO DE PAPEL	GRAMAJE ( $\frac{gr}{m^2}$ )	PARAMETRO $n$	$\Delta n(\%)$	PARAMETRO $z$	$\Delta z(\%)$
Bond	60	1279.64	$\pm 2.37$	7279	$\pm 3.39$
Bond	75	1110.89	$\pm 1.93$	6591	$\pm 3.17$
Reprograf	75	809.61	$\pm 5.20$	6024	$\pm 5.79$
Esmaltado C1S gloss	80	1011.56	$\pm 1.86$	6464	$\pm 2.75$
Esmaltado C1S gloss	90	873	$\pm 2.63$	5843	$\pm 4.79$
Esmaltado C2S mate	90	644.16	$\pm 2.12$	5232	$\pm 3.27$
Esmaltado C2S gloss	90	861.17	$\pm 3.07$	6042	$\pm 4.68$
Esmaltado C1S gloss	115	712.21	$\pm 2.38$	5389	$\pm 2.93$
Esmaltado C2S mate	115	592.87	$\pm 3.09$	4997	$\pm 4.28$
Esmaltado C2S gloss	115	646.2	$\pm 1.94$	5221	$\pm 3.20$
Bristol blanco	150	485.44	$\pm 2.38$	4549	$\pm 3.80$
Esmaltado C2S mate	150	376.57	$\pm 2.25$	4080	$\pm 2.94$
Esmaltado C2S gloss	150	461.28	$\pm 1.19$	4503	$\pm 2.64$
Esmaltado C1S gloss	160	437.41	$\pm 2.03$	4321	$\pm 2.75$
Esmaltado C2S mate	200	255.41	$\pm 3.32$	3407	$\pm 4.78$
Esmaltado C2S gloss	200	303.76	$\pm 2.35$	3548	$\pm 3.61$
Esmaltado C1S gloss	210	294.77	$\pm 2.17$	3541	$\pm 3.39$
Esmaltado C1S SBS	225	215.63	$\pm 3.01$	3024	$\pm 3.60$
Esmaltado C2S mate	240	122.47	$\pm 2.30$	2227	$\pm 4.85$
Esmaltado C2S gloss	240	221.85	$\pm 1.54$	3072	$\pm 3.91$
Esmaltado C1S SBS	250	197.34	$\pm 2.72$	2910	$\pm 5.33$
Esmaltado C1S SBS	280	165.43	$\pm 2.90$	2597	$\pm 5.01$
Esmaltado C2S gloss	300	211.69	$\pm 1.48$	2983	$\pm 3.52$

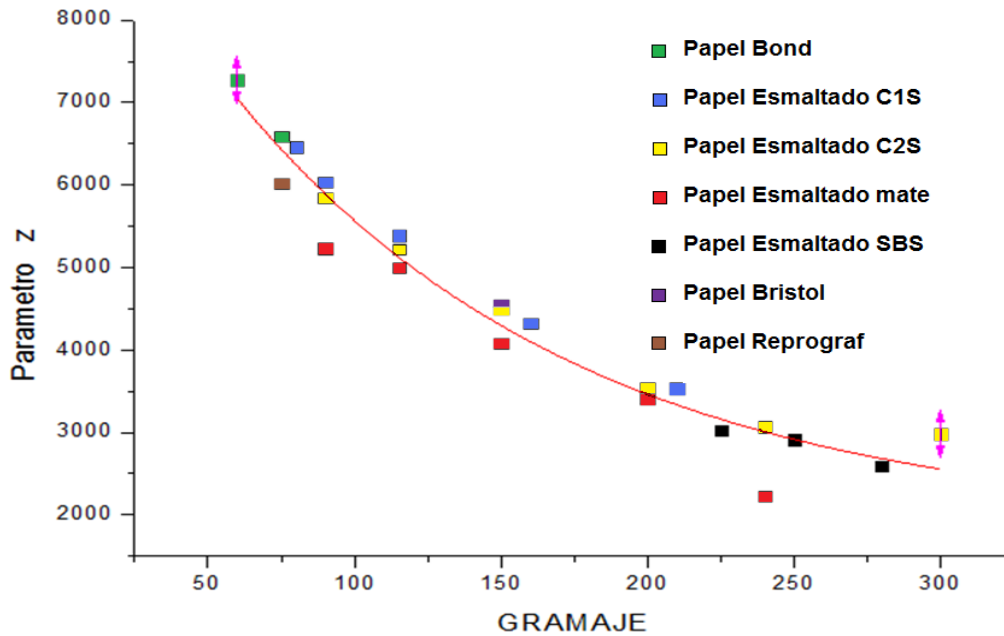
**Tabla 3.15.** Datos de los parámetros de la función de fase exponencial coseno para los 23 tipos de papel.

### 3.1.9. Establecimiento de relación entre parámetros y gramaje



**Figura 3.33.** Gráfica del parámetro  $n$  de la función de fase exponencial coseno con respecto al gramaje.

$$Y_n = 131.74 + 2540.22e^{\left(\frac{-x}{70.30}\right)} \quad (3.3)$$



**Figura 3.34.** Gráfica del parámetro  $z$  de la función de fase exponencial coseno con respecto al gramaje.

$$Y_z = 1869.68 + 8584.92e^{\left(\frac{-x}{118.81}\right)} \quad (3.4)$$

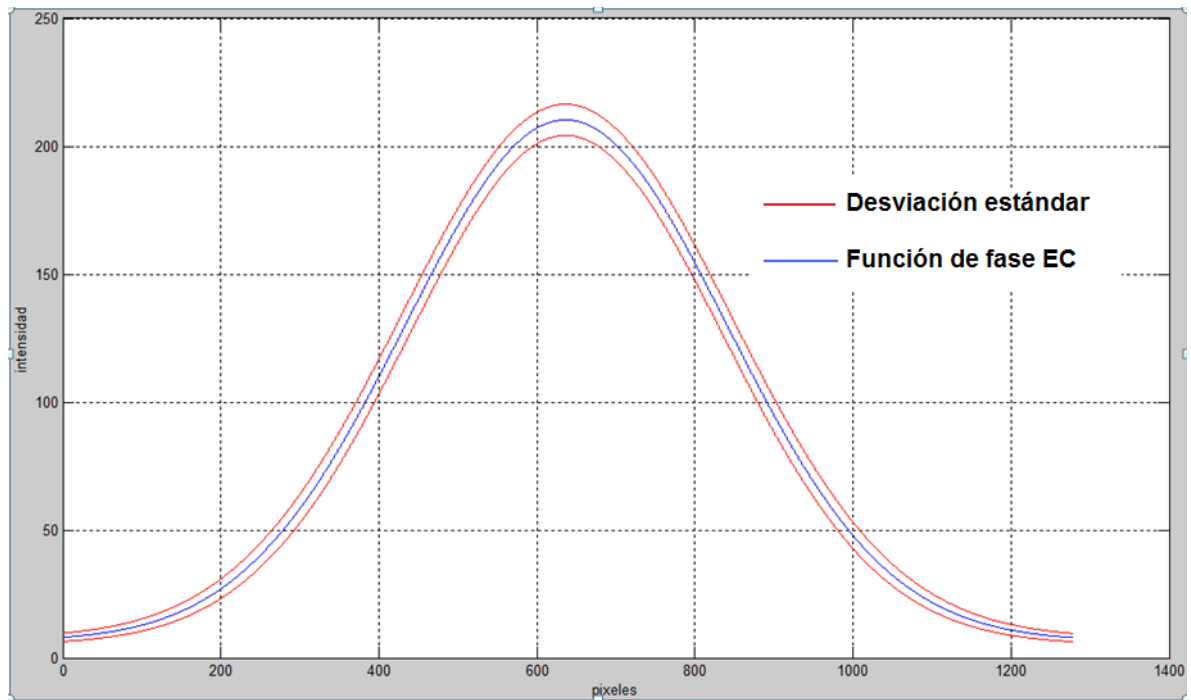
### 3.2. DISCUSIÓN

En la comparación que se realiza de las dos funciones Henyey-Greenstein y de fase exponencial coseno se observa el acercamiento a la función exponencial Gaussiana (figura 3.1). La función de fase exponencial coseno es la que más se acerca a la función exponencial Gaussiana y por esta razón se trabaja con ella. A pesar de que las dos funciones son aplicadas para describir el esparcimiento de este tipo de materiales, en este caso se escoge una, ya que la otra no se ajusta al esparcimiento del haz de luz láser. La función de fase exponencial coseno se aplica para cada uno de los diferentes tipos de papel y se muestra su acercamiento en las figuras (ver Anexo). Entonces cada tipo de papel se lo describe con base en la función de fase exponencial coseno y su respectiva desviación estándar.

En cada una de las tablas para cada tipo y gramaje de papel se observan los parámetros de la función exponencial Gaussiana. Cada imagen que se obtiene se le realiza un perfil de línea horizontal y así se obtienen diez datos para cada tipo y gramaje de papel. Estos datos son necesarios para observar la repetitividad que existe en las diez imágenes. En este punto se calcula la desviación estándar y como se puede ver en las tablas, es muy baja, debido a que existe un alto grado de repetitividad. Esta última es importante ya que garantiza que bajo las mismas condiciones, el mismo procedimiento de medida y el mismo sistema, se obtendrá los mismos resultados. Para un mismo tipo y gramaje de papel, se puede inferir que el papel es homogéneo debido a la baja desviación estándar que se obtiene. Entonces el papel puede considerarse como si tuviera la misma estructura en toda la superficie de estudio.

En la figura 3.57 se puede observar que la función de fase exponencial coseno tiene asociada una desviación estándar, ésta última se la puede interpretar como un intervalo en el cual caen la mayoría de los datos suministrados por cada imagen de luz láser esparcida por cada papel, y por tanto una gran cantidad de

curvas Gaussianas o funciones de fase exponencial coseno están dentro de este intervalo para un mismo tipo y gramaje de papel.



**Figura 3.35.** Desviación estándar para uno de los 23 tipos de papeles blancos.

Este intervalo es muy estrecho y esto es una buena indicación del alto grado de repetitividad que existe para cada uno de los 23 tipos de papel.

Las curvas que se obtienen para cada imagen de luz láser esparcida de cada papel son de bajo ruido y la aproximación es una curva o función exponencial Gaussiana. Esta aproximación es muy cercana debido al filtrado que se realiza, a la uniformidad del papel y a las características Gaussianas que presenta el haz de luz láser.

En las gráficas de los parámetros  $n$  y  $z$  (figuras 3.32 y 3.33) se observa la diferencia que existe entre los tipos de papel a medida que cambia su gramaje. En estas gráficas es posible diferenciar los tipos de papel y más aún si su grado de repetitividad es alto. Es viable diferenciarlos ya que los parámetros no

coinciden para un mismo de tipo de papel y su desviación estándar es baja. Cuando estos parámetros son algo cercanos para diferentes tipos y gramajes de papel, se tienen que tener en cuenta ambos parámetros y debido a que la desviación estándar es baja, es posible diferenciar los papeles. El comportamiento de estos parámetros es muy parecido, por tanto se puede usar cualquiera de los dos para identificar el tipo y gramaje de papel, o también se los puede usar al tiempo para mayor seguridad.

Por último se muestra (ver Anexos), que tanto se acerca la función de fase exponencial coseno a la función Gaussiana. Su acercamiento es muy alto y por tanto su error es muy bajo, de aproximadamente 0.025%. Aquí se confirma que de verdad la función de fase exponencial coseno es una excelente descriptora de cada uno de los 23 tipos de papel usados.

Los dos parámetros,  $n$  y  $z$  permiten diferenciar los tipos de papel con su respectivo gramaje, y también se puede observar que de acuerdo a la desviación estándar para cada función de fase exponencial coseno, se obtiene un intervalo en el cual es válida la función de fase exponencial coseno, se puede asociar este rango con la calidad de cada papel, en otras palabras, dentro de este rango cada tipo de papel cumple en un buen porcentaje con las características de calidad.

Los problemas que se tienen en la industria papelera, es que en la actualidad la forma de realizar el estudio de las características de calidad del papel son usando técnicas mecánicas, por ejemplo usando un peso determinado para asegurar que el papel se sigue rasgando al colocarle este peso de forma longitudinal y transversal. Otra forma de observar una característica de calidad como la homogeneidad del papel es a contra luz.

Este proyecto puede ser implementado en la industria papelera, no solo para identificación de papel, sino también en el estudio de la homogeneidad y rigidez del papel al aplicarle fuerzas longitudinales y transversales. Al implementarlo se podrá identificar el papel y controlar la calidad del mismo, en tiempo real.

## CONCLUSIONES

La función de fase exponencial coseno es una buena aproximación para describir el ensanchamiento que sufre el perfil Gaussiano del haz cuando atraviesa la muestra de papel. Esto se puede observar cuando se hace el acercamiento de la función exponencial Gaussiana obtenida experimentalmente a la función de fase exponencial coseno con un error aproximado que oscila entre  $\pm 0.025\%$ .

El análisis de perfiles de línea sirve para establecer el ensanchamiento del haz, ya que al realizar el análisis se obtiene una función de fase exponencial coseno y ésta varía sus parámetros a medida que cambia el gramaje de cada tipo de papel.

Existe una relación entre el cambio en el perfil del haz láser que ilumina una muestra de papel blanco y el gramaje del papel que la produce, por lo que es posible diferenciar cada tipo de papel descrito por su gramaje con respecto a los parámetros de la función de fase exponencial coseno.

Se determinaron dos coeficientes que permiten relacionar el cambio en el perfil del haz láser con el gramaje de los 23 tipos de papel. Estos coeficientes permiten diferenciar a qué tipo de gramaje de papel pertenece cada función, en un rango determinado por la desviación estándar.

Es viable la implementación de este sistema en la industria papelera, ya que permite determinar si cada tipo de papel cumple con los estándares de calidad, en cuanto al gramaje, exigidos por la industria papelera colombiana o mundial.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] García Hortal, José A. (2007). Fibras Papeleras. Barcelona. Ediciones UPC.
- [2] Tenn Francis Chen, Waterloo, Ontario, Canada, 2009. Bulk scattering approximations for collimated light transmitted through paper.
- [3] Deng, M., and Dodson, C. T. J. Paper: an engineered stochastic structure. TAPPI Press, 1994.
- [4] Casey, J., Pulp and Paper, second edition, volume 1, Interscience Publishers, Inc. New York, 1961.
- [5] Corte, H., and Kallmes, O. J. Statistical geometry of a fibrous network. In the formation and structure of paper, F. Bolam, Ed., vol. 1. Technical section of the British Paper and Board Makers' Association, 1962.
- [6] Granberg, H., Jensen, J., and Mattsson, L. Forward scattering of fibercontaining surfaces studied by 3-D reflectance distribution simulations and measurements. Optical Engineering 42, 8 (2003), 2384–2390.
- [7] Baird, P.K., Irubesky, 1930. The determination of the volumetric composition of paper.
- [8] Doughty, R. H. The relation of sheet properties and fiber properties in paper. Paper Trade Journal 95, 10 (September 1932), 111–118.
- [9] Presentación de Propal. Productos Propal. Ing. Dora E. Pariente Peña. Gestora Comercial para Republica Dominicana.
- [10] Gustavo Rodríguez Morales, Fausto Sánchez Cruz, Simón Martínez Martínez. Ingeniería de haces láser: propiedades, manipulación y aplicaciones. Julio – Septiembre 2009. Vol XII, N° 44.

- [11] Bachs L, Cuesta J, Carles N, Aplicaciones Industriales del Láser, Marcombo, 1988.
- [12] Orazio Svelto, "Principles of Lasers", 4<sup>th</sup> edition, New York, Plenum Press, 1998, chapter 8;
- [13] Jagdish K. Patel, Campbell B. Read, Handbook of the normal distribution, second edition, revised and expanded, volume 150, 1991.
- [14] Michael I. Mishchenko, Larry D. Travis, Andrew A. Lacis. Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles. Cambridge University Press, 2002.
- [15] Jordi Cepa. Cosmología Física. Ediciones Akal. Madrid, España, 2007.
- [16] Daniel Malacara, Optica Basica, 2004.
- [17] Fernando Carreño, Miguel Angel Antón, Prentice Hall. Óptica Física, Problemas y ejercicios resueltos, Pearson Education, S.A. Madrid 2001.
- [18] J. M. Cabrera, F.J. López, F. Agulló López. Óptica electromagnética. Volumen 1: Fundamentos. Segunda edición. Departamento de Física de Materiales. Universidad Autónoma de Madrid, 1998.
- [19] Ferraco J. y Nakamoto K. (1994). Introductory Raman spectroscopy, Academic Press, San Diego, California
- [20] Douglas A. Skoog, F. James Holler, Stanley R. Crouch. Principios de análisis instrumental. Cengage Learning. Sexta edición. 2008.
- [21] Edström, P. Fast and stable solution method for angle-resolved light scattering simulation. Tech. Rep. R-02 35, Mid Sweden University, 2002.



- [22] Kim Green, Lars Lamberg, and Kari Lumme. September 2000. Stochastic modeling of paper structure and Monte Carlo simulation of light scattering. *Applied Optics*.
- [23] J. Carlsson, P. Hellentín, L. Malmqvist, A. Persson, and C-G. Wahlström. March 1995. Time-resolved studies of light propagation in paper. *Applied Optics*.
- [24] Henyey, L., and Greenstein, J. Diffuse radiation in the galaxy. *Astrophysics Journal* 93 (1941), 70–83.
- [25] Baranoski, G., and Rokne, J. *Light Interaction with Plants: A Computer Graphics Perspective*. Horwood Publishing, Chichester, UK, 2004.
- [26] Ishimaru, A. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, 2nd ed., vol. 1. Academic Press, 1978.
- [27] Marie-Claude Béland and Jean M. Bennett. June 2000. Effect of local microroughness on the gloss uniformity of printed paper surfaces. *Applied Optics*.
- [28] Eugene Hecht *Optics*.. Copyright 2002 Pearson Education.
- [29] Tenn F. Chen, Gladimir V.G. Baranoski, and K. Frank Lin. 2008 Bulk scattering approximations for He-Ne laser transmitted through paper. *Optical Society of America*.
- [30] Geroge Chryssolouris, "Laser Machining", New, Springer-Verlag, 1991;
- [31] William M. Steen, "Laser Material Processing", London, Spring-Verlag, 2<sup>nd</sup> Printing 1994;
- [32] Wenchuan Li, Jiangcheng Bao, Y. L. Yao, " Dimensional characteristics and mechanical properties of laser-formed parts", *High Temperature Material Processes*, invited paper;

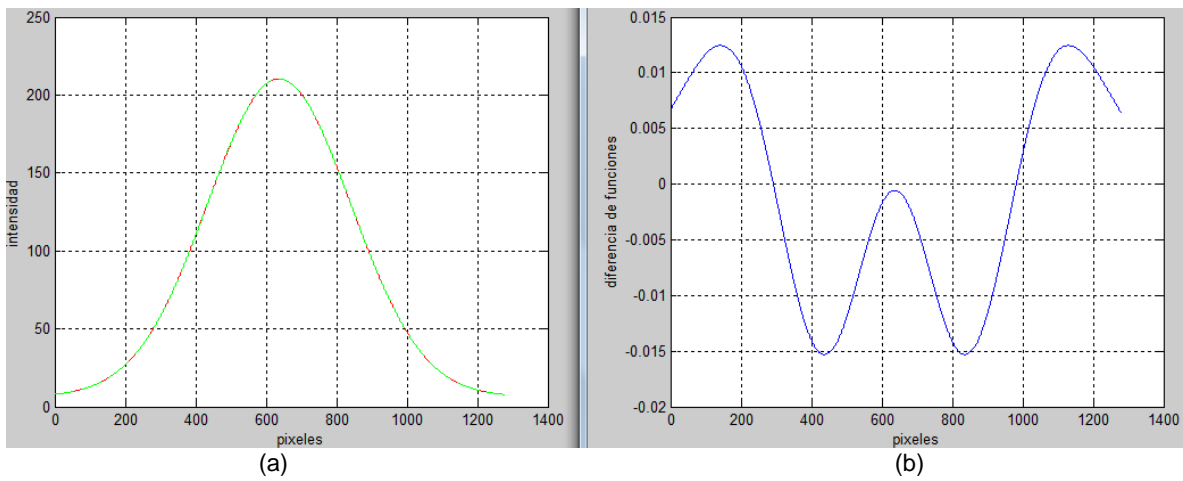
- [33] X. Liu, D. Du and G. Mourou, "Laser Ablation and Micromachining with Ultrashort Laser Pulses", IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 33, NO. 10, Oct., 1997, p1706-1716
- [34] B. N. Chichkov et al., "Femtosecond, picosecond and nanosecond laser ablation of solids", Appl. Phys. A63, 109-115 (1996);
- [35] Igor S. Grigoriev, Handbook of Physical Quantities, CRC press;
- [36] R. Srinivasan, Bodil Braren, "Ultraviolet Laser Ablation of Organic Polymers", Chem. Rev. 1989, 89, 1303-1316;
- [37] M. Soto Thompson. Photodynamic therapy utilizing interstitial light delivery combined with spectroscopic methods doctoral thesis. Lund Institute of Technology Swenden, 2004.
- [38] J.C. Ramirez San Juan, R. Ramos Garcia, G. Ramirez Niconoff and B. Choi. Comparison of Lorentzian and Gaussian based equations for láser speckle imaging sent for revision to Optics Express.
- [39] F. L. Pedrotti, L. S. Pedrotti, "Introduction to Optics" (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993)
- [40] R. Guenther, "Modern Optics" (John Wiley & Sons, New York, 1990)
- [41] Bruls, W., and van der Leun, J. Forward scattering properties of human epidermal layers. Photochemistry and Photobiology 40, 2 (1984), 231–242.
- [42] Prahl, S., Keijzer, M., Jacques, S., and Welch, A. A Monte Carlo model of light propagation in tissue. SPIE Institute Series IS 5 (1989), 102–111.

## **ANEXOS**

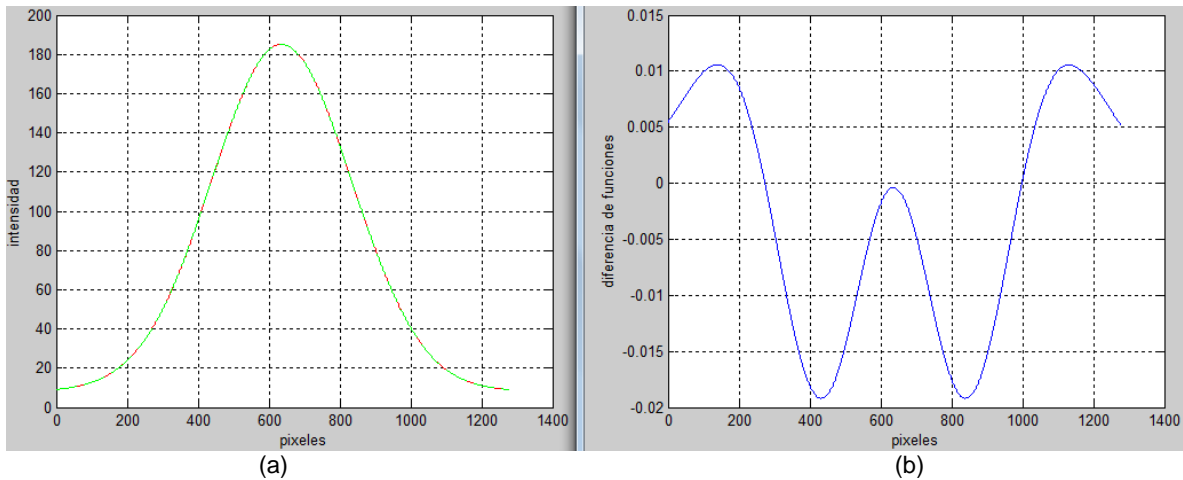
## ANEXO 1

### DIFERENCIA DE FUNCIONES EXPONENCIAL Y COSENO

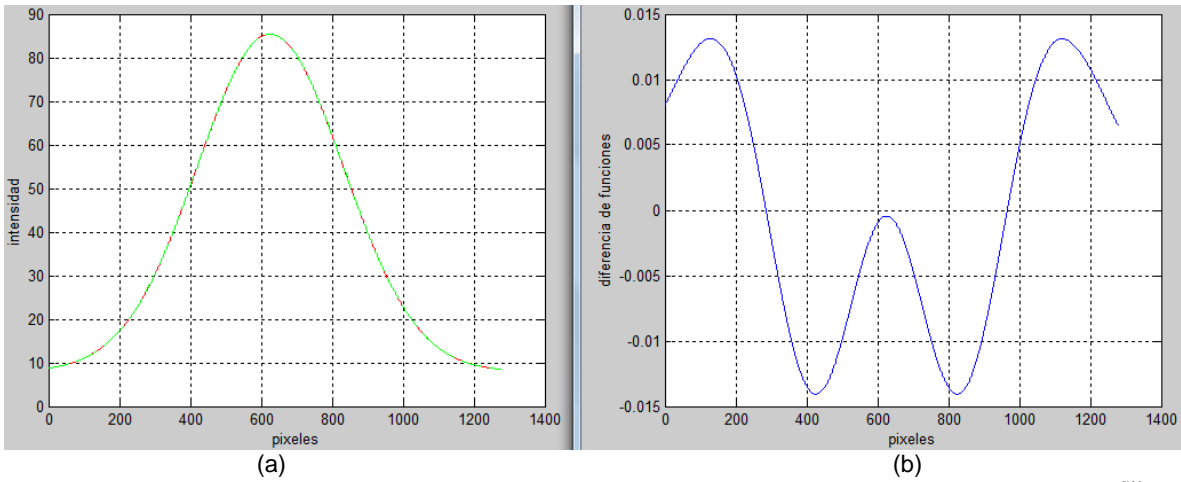
A continuación se muestran gráficos de (a) superposición de funciones exponencial Gaussiana y de fase exponencial coseno y (b) su diferencia que oscila en casi todas entre +0.015 y -0.015, es decir con un error de 0.025%.



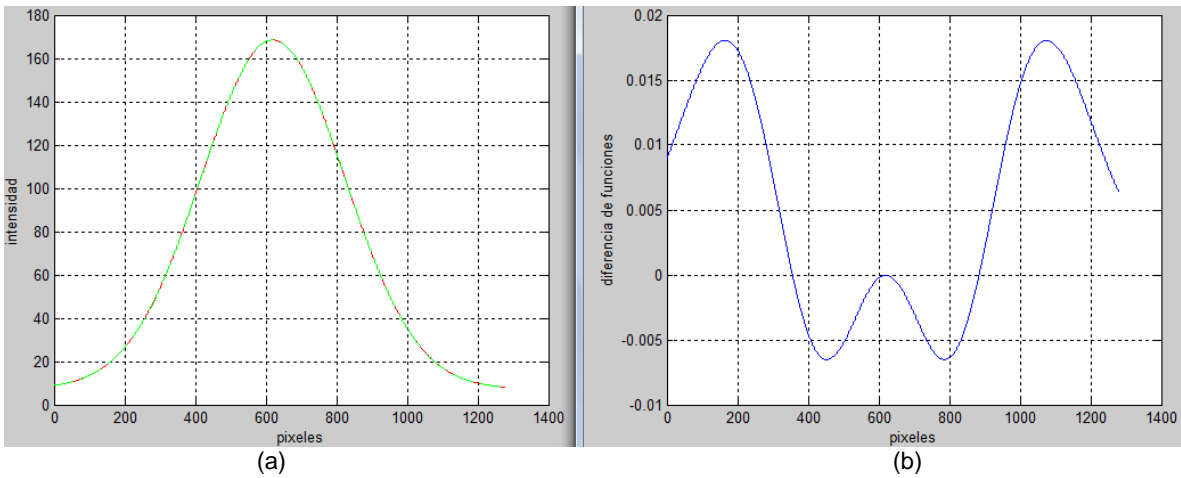
**Figura A.1.** Diferencia de funciones exponencial Gaussiana y coseno para Bond 60 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



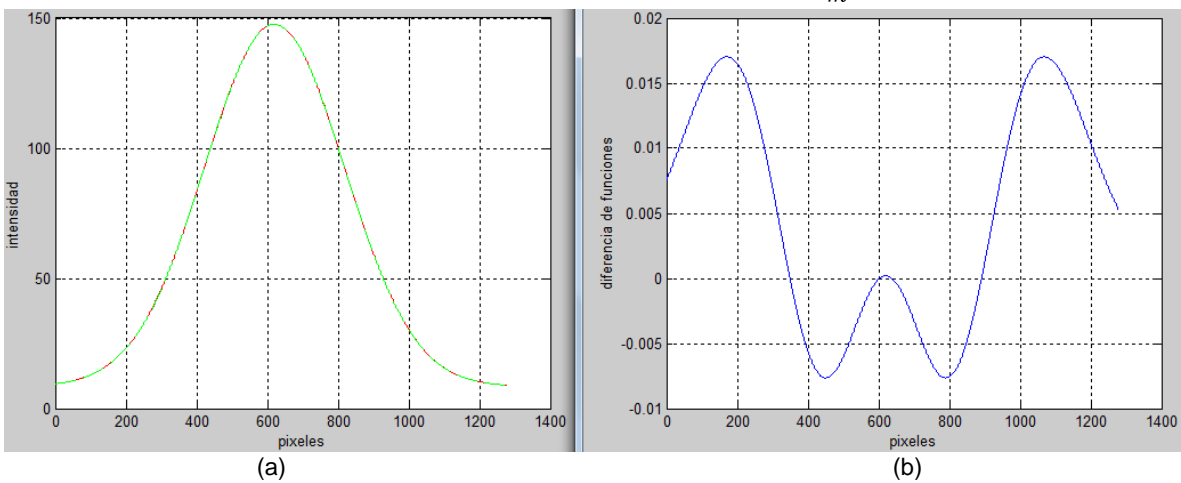
**Figura A.2.** Diferencia de funciones exponencial Gaussiana y coseno para Bond 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



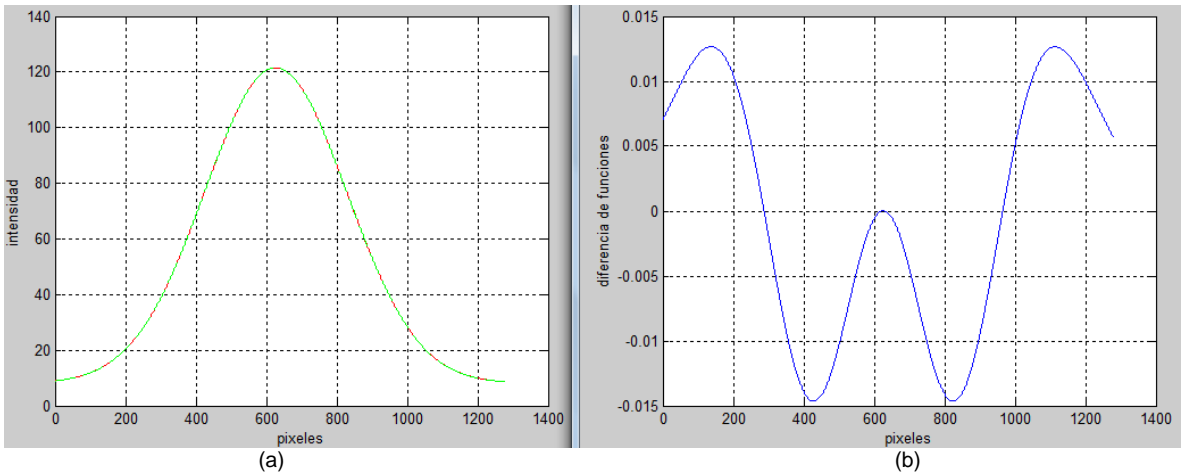
**Figura A.3.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para Bristol 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



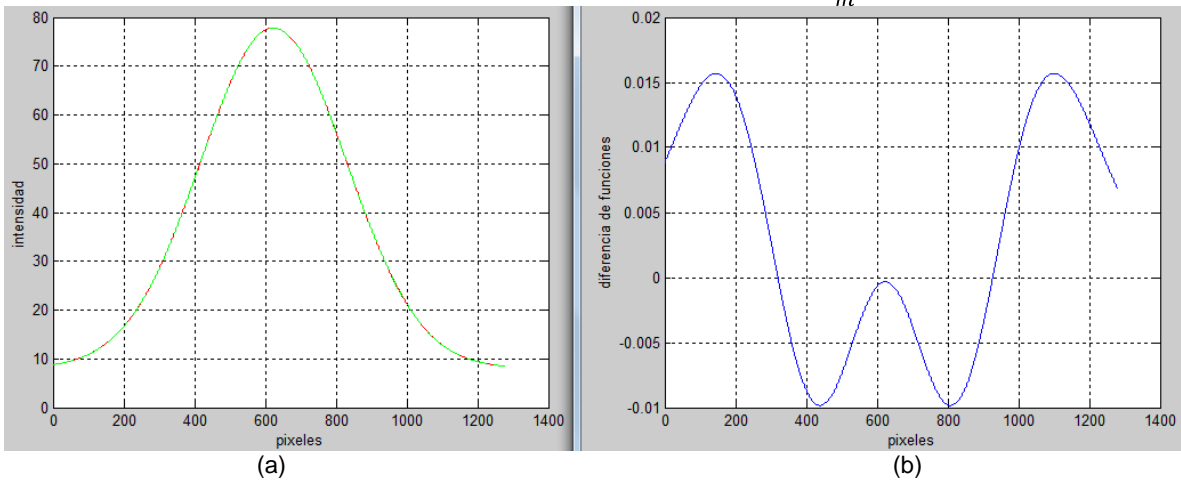
**Figura A.4.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 80 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



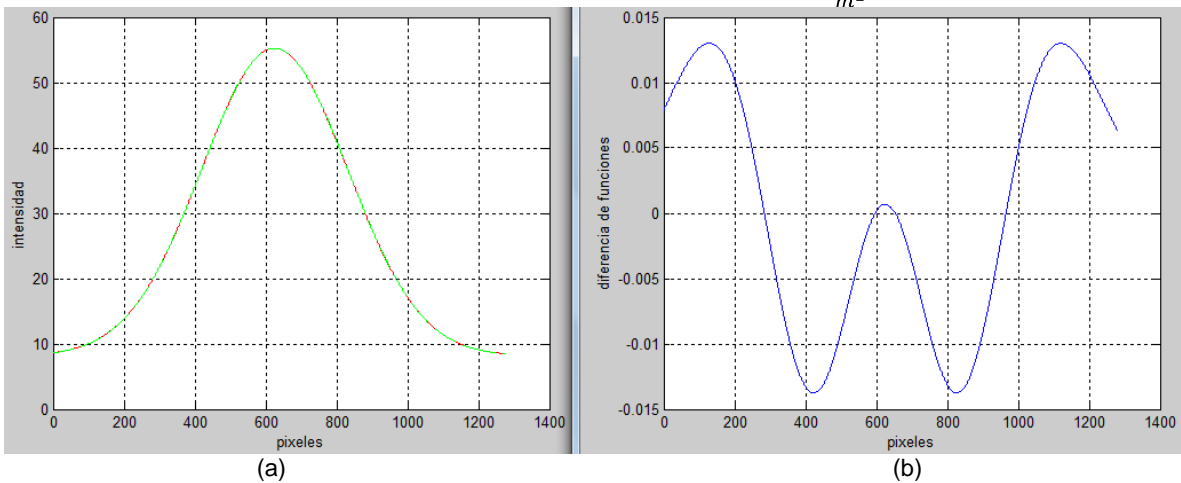
**Figura A.5.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



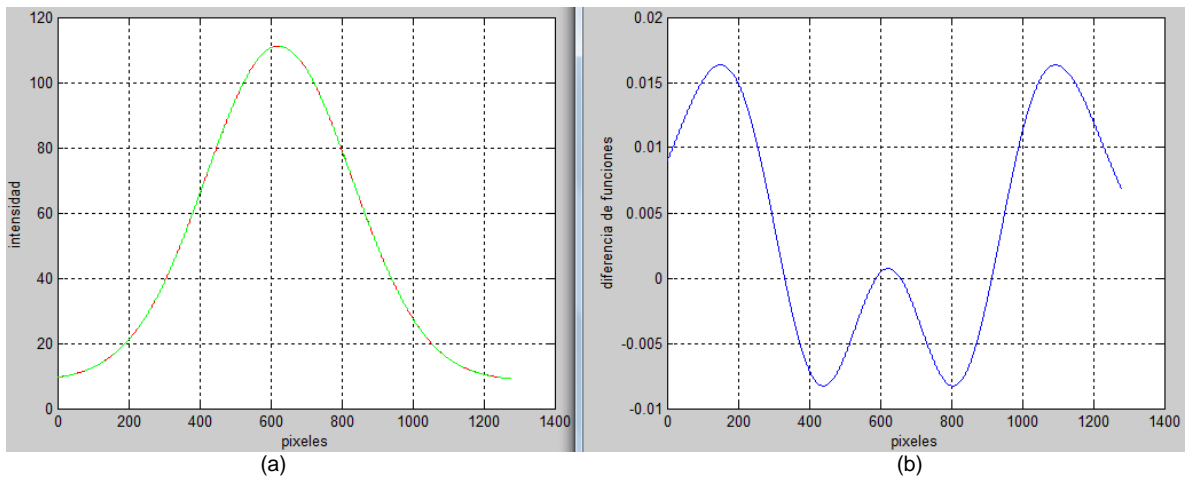
**Figura A.6.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



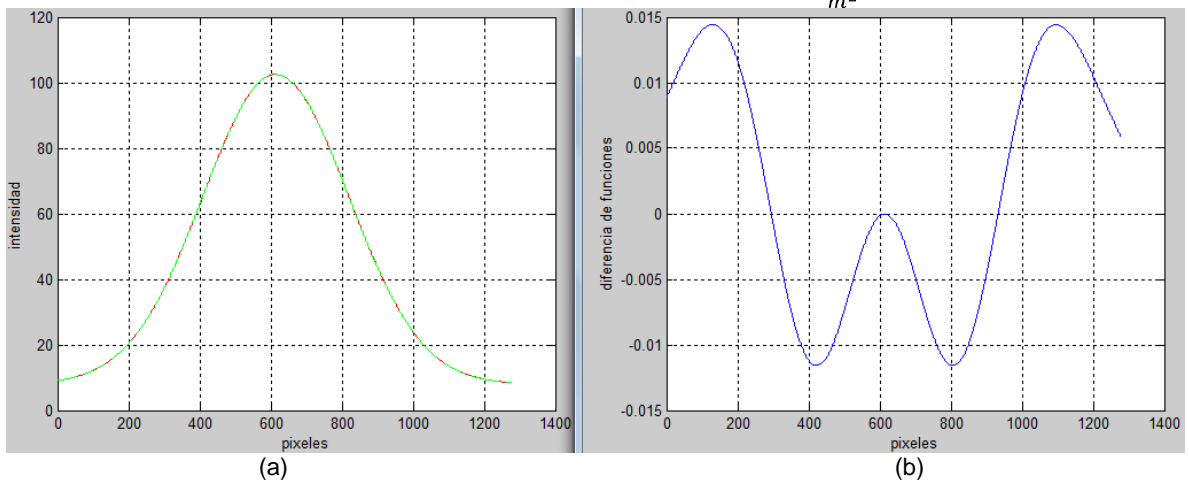
**Figura A.7.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 160 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



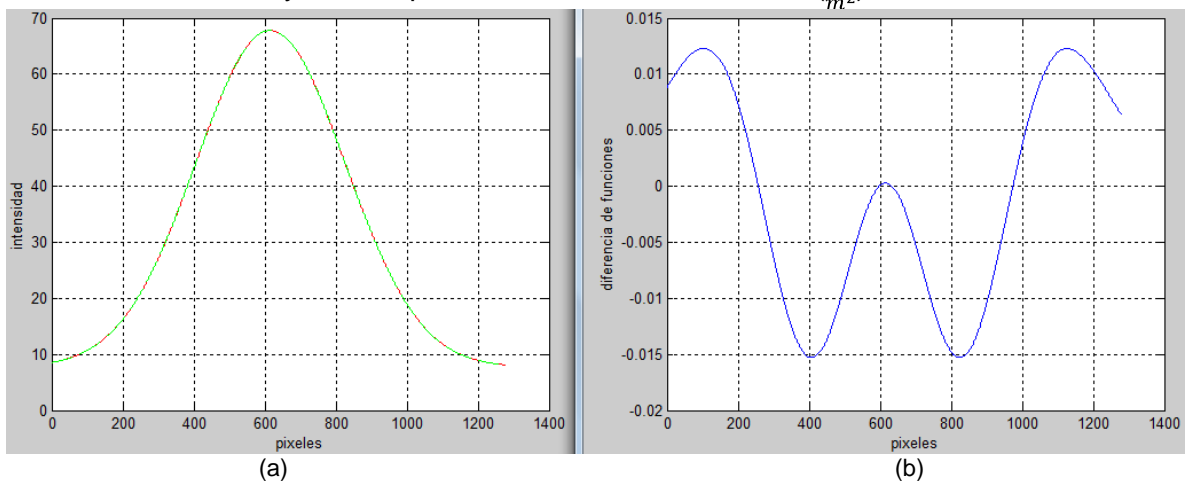
**Figura A.8.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C1S gloss 210 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



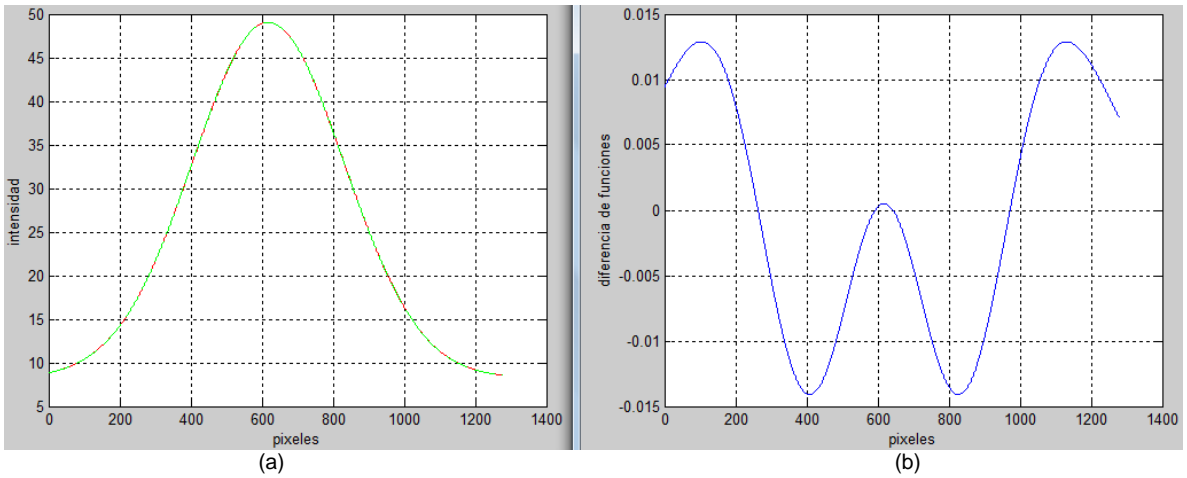
**Figura A.9.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



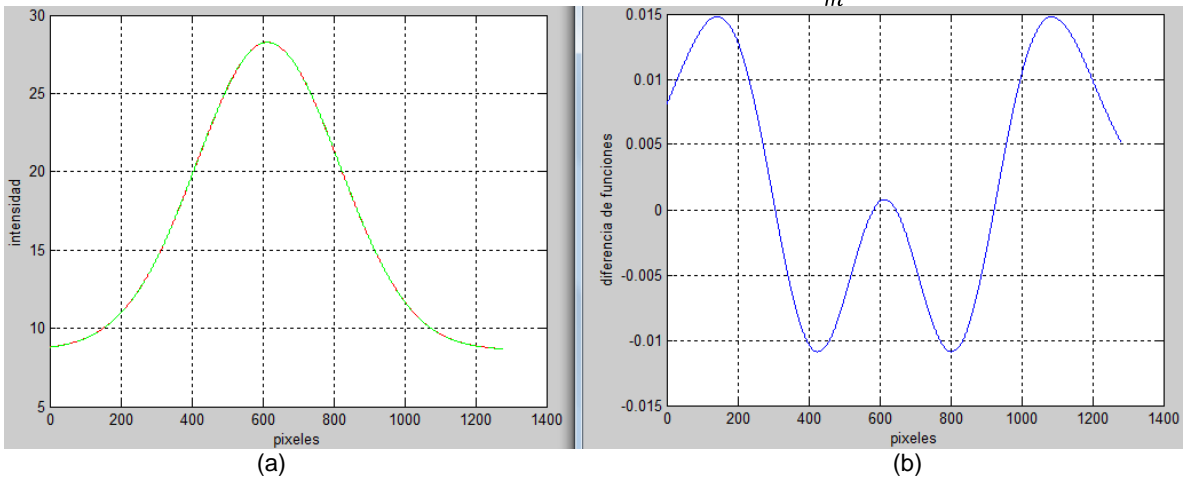
**Figura A.10.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



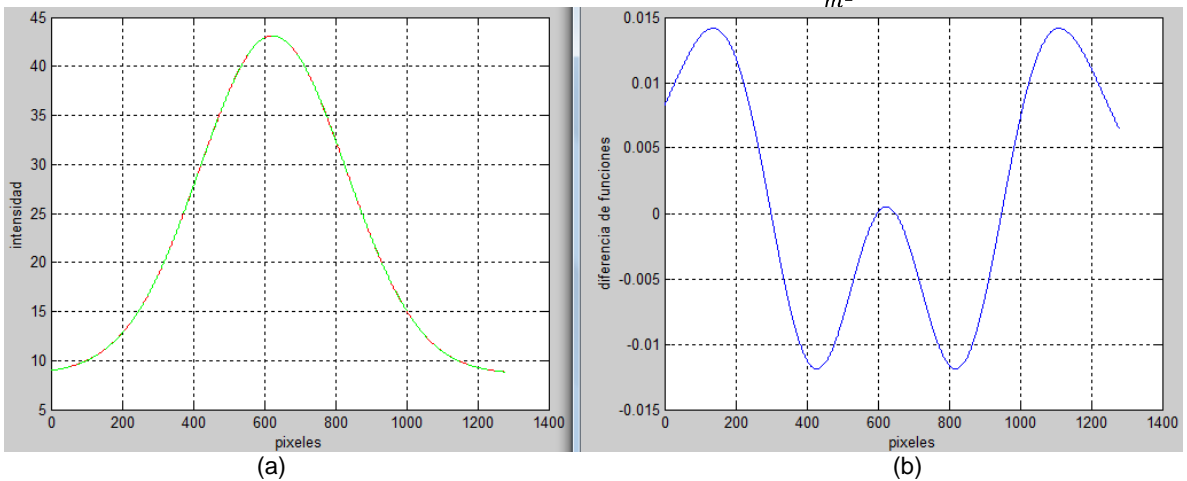
**Figura A.11.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



**Figura A.12.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).

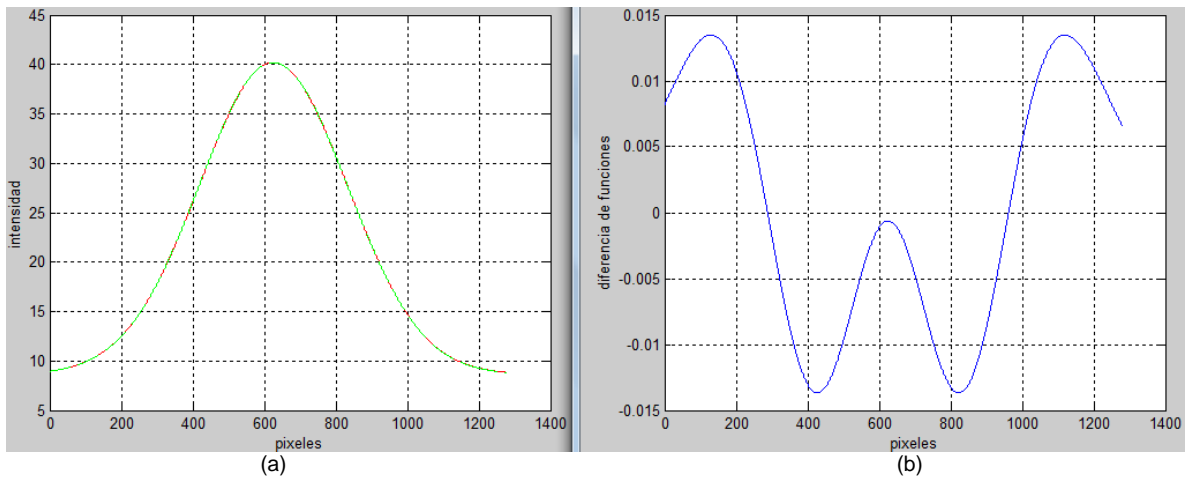


**Figura A.13.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C2S mate 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).

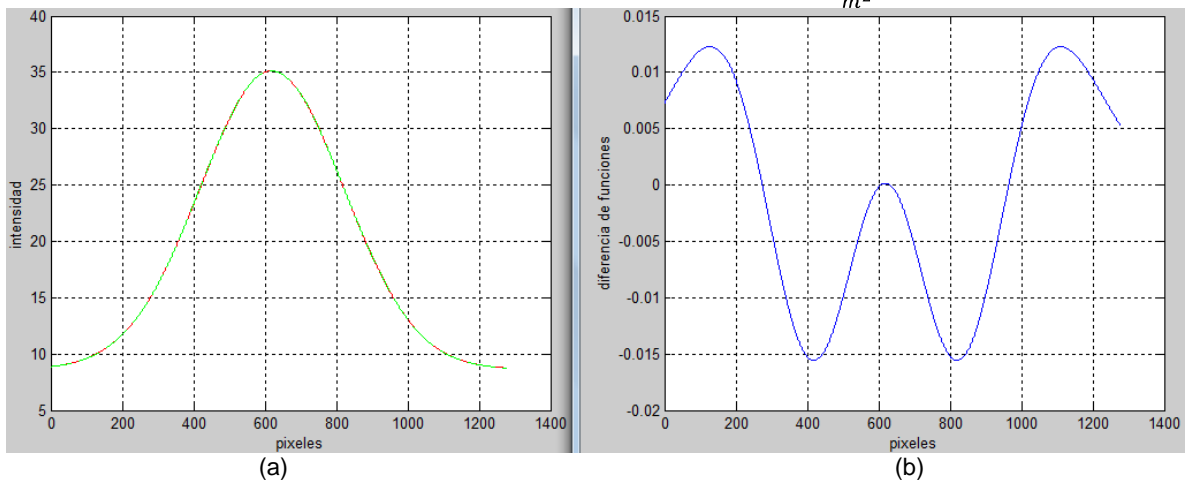


**Figura A.14.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C1S SBS 225 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).

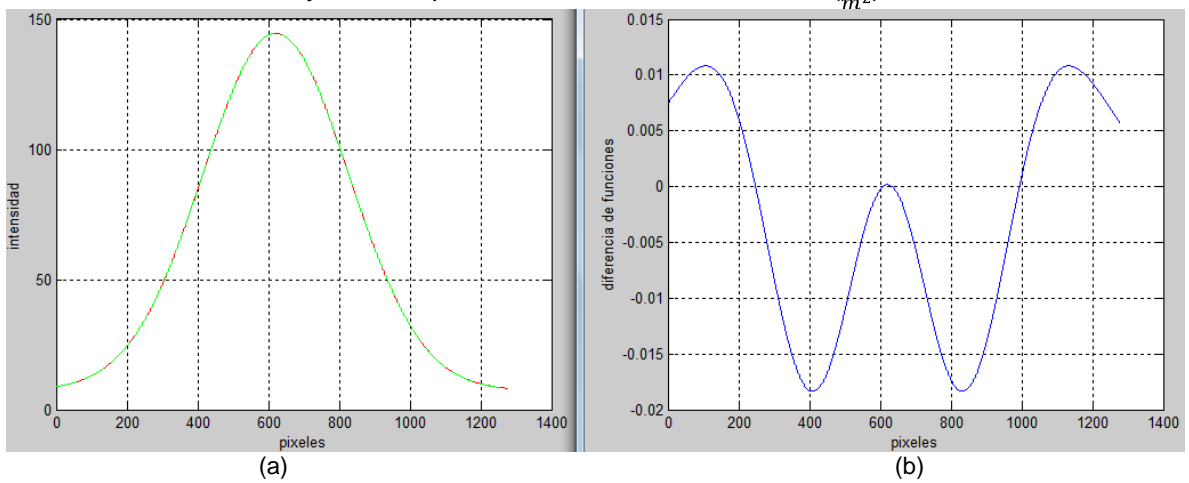




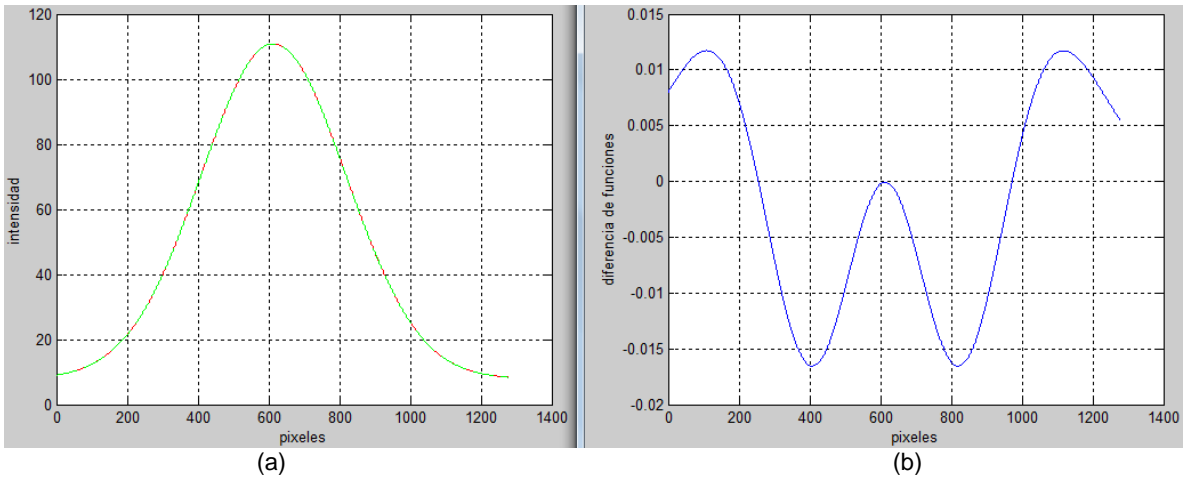
**Figura A.15.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmalto C1S SBS 250 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



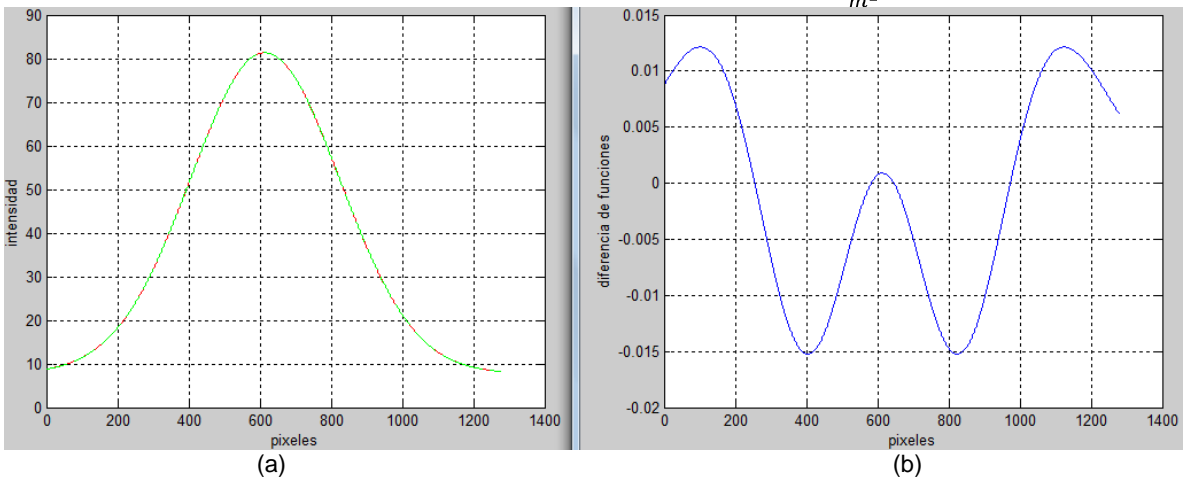
**Figura A.16.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmalto C1S SBS 280 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



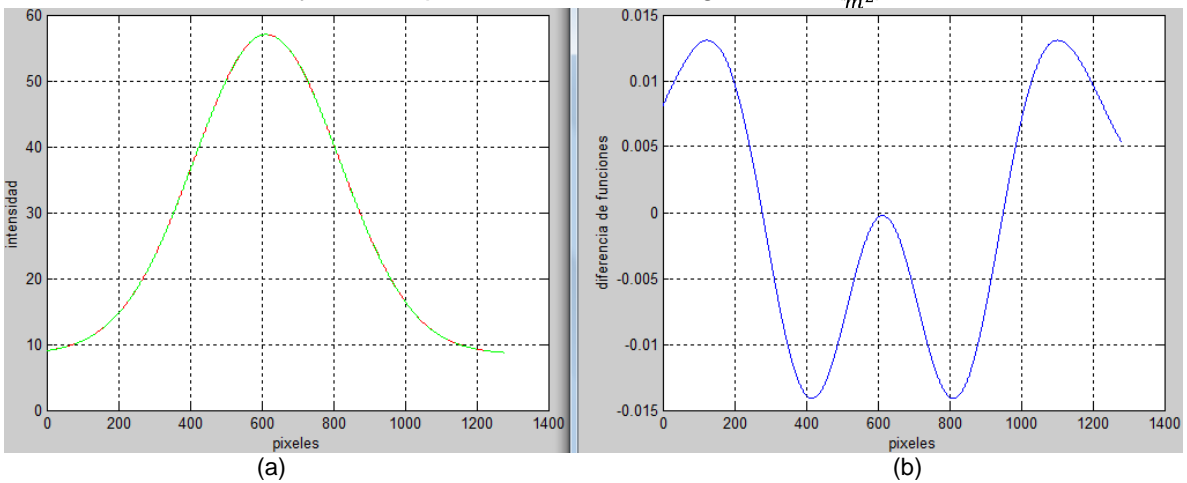
**Figura A.17.** Diferencia de funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmalto C2S gloss 90 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



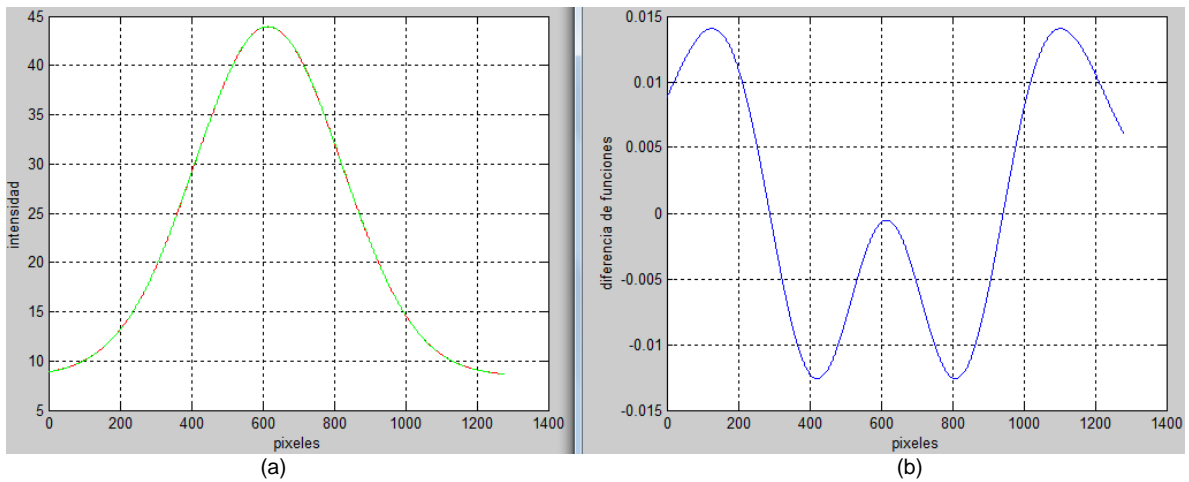
**Figura A.18.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmalto C2S gloss 115 ( $\frac{gr}{m^2}$ )



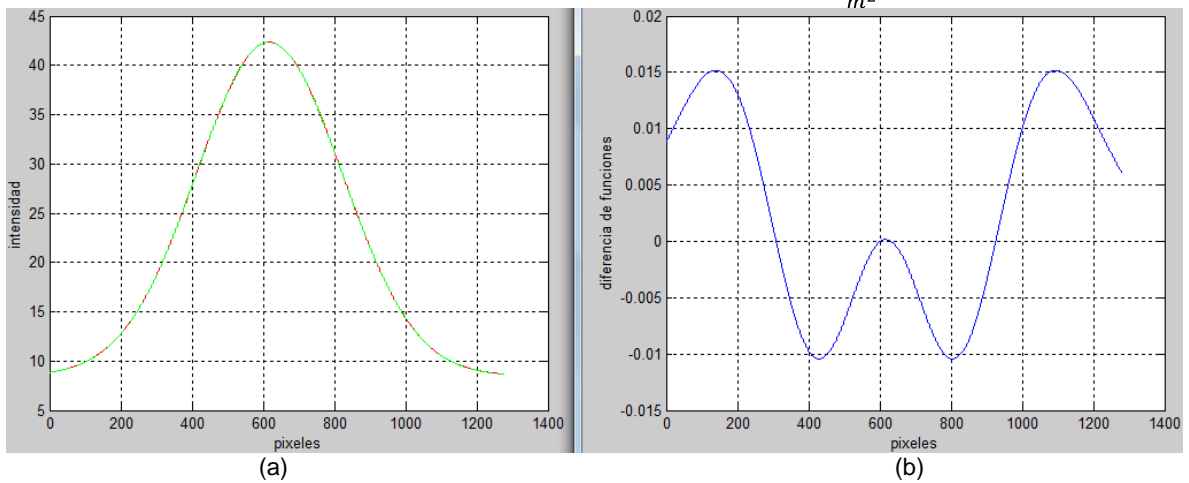
**Figura A.19.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmalto C2S gloss 150 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



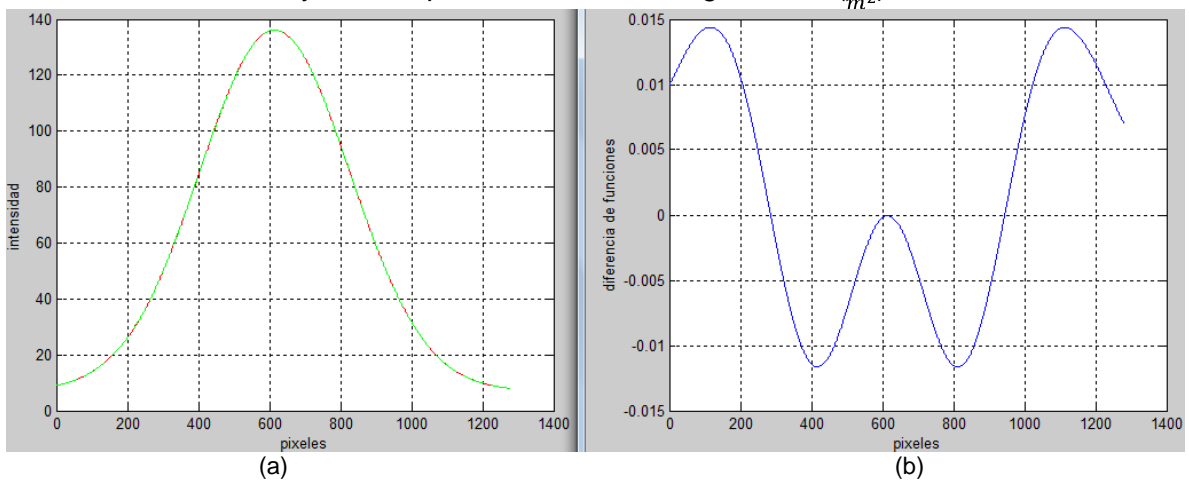
**Figura A.20.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmalto C2S gloss 200 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



**Figura A.21.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 240 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



**Figura A.22.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para esmaltado C2S gloss 300 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).



**Figura A.23.** Diferencia funciones exponencial Gaussiana y coseno para Reprograf 75 ( $\frac{gr}{m^2}$ ).