

**GRUPOS DE LIE CON APLICACIONES A FÍSICA DE PARTÍCULAS**

**MAICOL ANDRES PACHECO PEÑA**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA  
EDUCACIÓN  
INGENIERÍA FÍSICA  
POPAYÁN  
2023**

**GRUPOS DE LIE CON APLICACIONES A FÍSICA DE PARTÍCULAS**

**MAICOL ANDRES PACHECO PEÑA**

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de  
Ingeniero Físico

Director

**SERVIO TULIO PEREZ MERCHANCANO Ph.D.**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA  
EDUCACIÓN  
INGENIERÍA FÍSICA  
POPAYÁN  
2023**

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

---

---

Jurado: Msc. Jorge W. Coronel G.

---

Jurado: Msc. Jhon Mario Córdoba P.

---

Director: Dr. Servio Tulio Pérez M.

Popayán, 21 de Febrero de 2023

# ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Centro de masa de un sistema de partículas [8]. . . . .	16
2.2.	Vectores que intervienen en el cambio de punto de referencia para el momento angular [8]. . . . .	17
2.3.	Camino del punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones [8]. . . . .	23
4.1.	La desintegración beta del $^{60}\text{Co}$ polarizado. A la izquierda, se emite un electrón en una dirección determinada. A la derecha se muestra el equivalente con paridad invertida. [3]. . . . .	68
4.2.	Helicidad. En (a) el espín y la velocidad son paralelos (helicidad +1); en (b) son antiparalelos (helicidad -1) [3]. . . . .	69
4.3.	Desintegración de $\pi^-$ en reposo [3]. . . . .	70

# Índice de cuadros

1.1. Leptones [4, 6]. . . . .	7
1.2. Familia de Quarks [4, 5]. . . . .	9
1.3. Partículas Mediadoras [4, 5]. . . . .	10
3.1. Grupos de Lie notables [1]. . . . .	50
4.1. Clasificación de partículas por espín [29] . . . . .	63

# CONTENIDO

<b>Resumen</b>	<b>VI</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>1. Panorama cronológico de la Física de Partículas</b>	<b>1</b>
1.1. ¿Que son las partículas elementales? . . . . .	1
1.2. ¿Cómo se producen y como se detectan las partículas? . . . . .	2
1.3. Introducción histórica a las partículas elementales . . . . .	4
1.4. Interacciones fundamentales . . . . .	10
<b>2. Mecánica y teoría clásica de campos</b>	<b>13</b>
2.1. Mecánica Clásica . . . . .	13
2.1.1. Mecánica de una partícula . . . . .	13
2.1.2. Mecánica de un sistema de partículas . . . . .	15
2.1.3. Ligaduras . . . . .	19
2.1.4. Coordenadas Generalizadas . . . . .	19
2.1.5. Principio de D'Alembert y Ecuaciones de Lagrange . . . . .	20
2.1.6. Potenciales dependientes de la velocidad . . . . .	21
2.2. Calculo de Variaciones . . . . .	23
2.2.1. Principio de Hamilton . . . . .	23
2.2.2. Técnicas del cálculo de variaciones . . . . .	24
2.3. Teoremas de Conservación y propiedades de simetría . . . . .	25
2.3.1. Conservación de la energía . . . . .	25
2.3.2. Teorema de Noether . . . . .	26
2.4. Relatividad Especial . . . . .	29
2.4.1. Principio de la Relatividad de Einstein . . . . .	29
2.4.2. El espacio-tiempo de Minkowski . . . . .	30
2.4.3. Transformación de Lorentz . . . . .	30

2.4.4.	Mecánica Relativista . . . . .	32
2.4.5.	Acción de una Partícula Libre . . . . .	32
2.4.6.	Momento y Energía . . . . .	33
2.5.	Presentación Covariante de la Electrodinámica . . . . .	33
2.5.1.	El cuadripotencial $A^\mu$ . . . . .	34
2.5.2.	Las dos ecuaciones de Maxwell . . . . .	35
2.5.3.	La Fuerza de Lorentz . . . . .	36
2.5.4.	El tensor Electromagnético . . . . .	36
2.6.	Teoría Clásica de Campos . . . . .	37
2.6.1.	Formalismo Lagrangiano para Campos . . . . .	37
2.6.2.	Teorema de Noether . . . . .	40
<b>3.</b>	<b>Fundamentos Algebraicos</b>	<b>43</b>
3.1.	Simetrías . . . . .	43
3.2.	Teoría de grupos . . . . .	43
3.2.1.	Concepto de grupo . . . . .	44
3.2.2.	Subgrupos . . . . .	44
3.2.3.	Homomorfismo e isomorfismo . . . . .	45
3.3.	Grupos finitos . . . . .	45
3.3.1.	Grupos de permutación . . . . .	45
3.3.2.	Clases de equivalencia . . . . .	45
3.3.3.	Subgrupo invariante . . . . .	46
3.4.	Teoría de representaciones . . . . .	46
3.4.1.	Carácter . . . . .	47
3.4.2.	Representaciones equivalentes . . . . .	47
3.4.3.	Representaciones reducibles e irreducibles . . . . .	48
3.5.	Grupos y álgebras de Lie . . . . .	49
3.5.1.	Grupos de Lie . . . . .	49
3.5.2.	Generadores . . . . .	50
3.5.3.	Álgebras de Lie . . . . .	51
3.5.4.	$SO(3)$ . . . . .	52
3.5.5.	$SU(2)$ . . . . .	53
3.5.6.	$SU(3)$ . . . . .	55
3.5.7.	El grupo de Lorentz . . . . .	56
3.5.8.	El grupo de Poincaré . . . . .	60
<b>4.</b>	<b>Álgebras de Lie en física de partículas y teoría de campos</b>	<b>62</b>
4.1.	Simetrías . . . . .	62
4.1.1.	Espín . . . . .	63
4.1.2.	Isospin . . . . .	65
4.2.	Simetrías Discretas . . . . .	67

4.2.1.	Paridad . . . . .	67
4.2.2.	Conjugación de cargas . . . . .	70
4.2.3.	CP . . . . .	72
4.2.4.	La inversión temporal y el teorema TCP . . . . .	72
4.3.	Un rápido recorrido para la introducción a la teoría cuántica de campos	74
4.3.1.	Campos Espín 0 . . . . .	76
4.3.2.	Campos Espín $\frac{1}{2}$ . . . . .	79
4.3.3.	Campos Espín 1 . . . . .	86
4.4.	Teoría de la interacción . . . . .	88
4.4.1.	Interacciones U(1) . . . . .	89
4.4.2.	Interacciones SU(2) . . . . .	97
4.4.3.	Isospin . . . . .	99
4.4.4.	Interacciones SU(3) . . . . .	101
<b>A. Bases Clásicas</b>		<b>105</b>
A.1.	Principio de D'Alembert y ecuaciones de Lagrange . . . . .	105
A.1.1.	Potencial Escalar y Vectorial . . . . .	107
A.2.	Calculo Variacionales . . . . .	108
A.2.1.	Técnicas del cálculo de variaciones . . . . .	108
A.3.	Relatividad Especial . . . . .	110
A.3.1.	Tensores . . . . .	110
A.3.2.	Transformación de Lorentz . . . . .	111
A.3.3.	Transformaciones físicamente admisibles . . . . .	113
A.3.4.	Generadores de los demás componentes del grupo de Lorentz .	113
<b>B. Álgebras de Lie</b>		<b>115</b>
B.1.	Relación de las representaciones del grupo de Lorentz . . . . .	115
B.1.1.	Notación Van der Waerden . . . . .	115
B.1.2.	Espinores y Paridad . . . . .	119
B.1.3.	Espinores y Conjugación de cargas . . . . .	120
B.2.	álgebra de Clifford . . . . .	121
B.2.1.	Soluciones al Álgebra de Clifford . . . . .	122

# Resumen

Dilucidar las propiedades simétricas de la naturaleza es uno de los temas abiertos más importantes en física teórica tanto en astro-física, física de partículas y materia condensada entre otros campos de investigación. Para poder realizar un estudio estructurado de este campo de acción, y dominar las bases necesarias para contextualizar el comportamiento de partículas es necesario enfocarse en la simetría y las leyes de conservación que aquí se generan. Este trabajo de profundización titulado “Grupos de Lie con aplicaciones a física de partículas” es una sinopsis de las bases fisicomatemáticas necesarias para comprender la naturaleza simétrica de la física de partículas. En primera instancia, se parte de la teoría básica de grupos y la teoría de representaciones debido a que estos principios permiten describir diferentes sucesos naturales que están impregnados de simetrías subyacentes en el universo de las partículas, como traslaciones rotaciones básicas para describir la cristalografía y la espectroscopia por ejemplo y que en el entorno de la mecánica cuántica se convierte en un modelo efectivo para analizar sistemas de muchos cuerpos que involucren el espín. Se introducen los grupos de Lie y el álgebra de Lie junto con sus propiedades con el propósito de describir simetrías continuas dado que se puede analizar la estructura algebraica de un grupo sobre un espacio vectorial, lo que ha facilitado entender algunos desarrollos modernos en esta rama de la física. Posteriormente, se estudian dos grupos de Lie importantes como lo son el grupo de Lorentz y el grupo de Poincare, haciendo hincapié en sus aplicaciones a la física de partículas, ya que facilita representaciones de la invariante relativista, que a menudo se llaman invariante de Lorentz o de Poincaré conduciendo al algebra de operadores que están en consonancia con la relatividad, permitiendo así la libertad de analizar teoría cuántica de campos y el teorema de Noether. Se asume que este trabajo cubre un material importante en teoría de grupos y física de partículas de manera que prepara a los estudiantes para estudios futuros en física y matemáticas y pretende contribuir a cerrar la brecha de la falta de material propio de teoría de grupos en el departamento de física y por ende en el programa de ingeniería física que permita explicar a estudiantes de pregrado diferentes problemas de la física moderna [1, 2, 28–31].

# Agradecimientos

A la Universidad del Cauca, por acogerme durante mi proceso de formación, brindarme herramientas y tener la oportunidad de culminar mis estudios.

Agradezco al departamento de física, en especial a su planta docente que hicieron parte de mi formación académica y personal.

Agradezco al Dr. Servio Tulio Pérez Machancano, por su orientación disposición, tiempo, apoyo, confianza en mí y en mi trabajo, pero sobre por su paciencia.

Agradezco a los jurados Msc. Jorge W. Coronel G y Msc. Jhon Mario Córdoba P, por su disposición y tiempo.

Agradezco el apoyo de acompañamiento a toda mi familia, especialmente a mis padres.

# Capítulo 1. Panorama cronológico de la Física de Partículas

## 1.1. ¿Que son las partículas elementales?

La física de partículas es la rama de la física que estudia las partículas elementales y sus propiedades. Es fácil aclarar lo que se entiende por “partículas elementales”: son partículas que no tienen ninguna subestructura. En otras palabras, son objetos que no están formados por objetos más pequeños [1]. Y lo que es aún más notable, estos objetos diminutos se presentan en un pequeño número de tipos diferentes (quark up, quark down), que se replican en cantidades astronómicas para formar toda la “materia” que nos rodea. Y estas réplicas son copias absolutamente perfectas, no sólo “bastante parecidas”, como dos Ford que salen de la misma cadena de montaje, sino totalmente indistinguibles. No se puede estampar un número de identificación en un electrón, ni pintar una mancha en él: si se ha visto uno, se han visto todos. Esta cualidad de absoluta identidad no tiene ningún análogo en el mundo macroscópico. Se puede decir que las partículas elementales son los constituyentes fundamentales de todos los objetos del universo [1, 2].

No es tan fácil decir qué partículas son elementales. Es posible decir qué partículas no son elementales, si se conoce algún experimento que muestre la subestructura del objeto. Pero ningún experimento puede garantizar que un objeto dado no tenga ninguna subestructura. Un nuevo experimento podría mostrar subestructura en un objeto que antes se consideraba elemental [1–3].

Se pensaba que los átomos eran indivisibles hasta que una serie de experimentos realizados a finales del siglo *XIX* y principios del *XX* confirmaron la existencia de electrones y del núcleo atómico. Pronto se comprendió que, para todos los átomos, excepto el más ligero, el hidrógeno, el núcleo tiene una subestructura. Los protones y los neutrones pasaron a llamarse colectivamente nucleones por ser los constituyentes de los núcleos, y a ser tratados como partículas elementales [1]. Unas décadas más tarde, nuevos experimentos indicaron que los propios nucleones tienen subestructura, por lo que ya no se les puede llamar partículas elementales. Ahora están formados por

quarks, que son partículas elementales como los electrones. Así, la lista de partículas elementales cambia con el tiempo. No se puede garantizar que las partículas elementales de hoy no se conviertan en objetos compuestos mañana [1,2].

Una partícula elemental no tiene por qué ser subatómica, en el sentido de que no tiene por qué ser un constituyente de los átomos de un modo u otro. Ingenuamente, cuando se piensa en las partículas elementales, se tiene una de las dos siguientes proposiciones en nuestra mente, o quizás alguna mezcla de las dos [1,2]

1. Las partículas elementales son constituyentes de conglomerados más grandes [1].
2. Las partículas elementales no tienen estructura interna [1].

Por lo tanto, es importante dejar absolutamente claro desde el principio que cuando se habla del campo de la “física de las partículas elementales”, se utiliza la palabra “elemental” solo en el segundo sentido. La existencia de la primera propiedad puede ser crucial para detectar una partícula elemental concreta, pero no es necesaria para decidir si una partícula concreta debe incluirse en la lista de partículas elementales. En otras palabras, la capacidad de formar conglomerados más grandes es una propiedad que una partícula elemental puede tener o no. De hecho, la mayoría de las partículas elementales no tienen esta propiedad por una u otra razón [1,2].

El mundo de la vida cotidiana se rige por la mecánica clásica. Pero para los objetos que viajan muy rápido (a velocidades comparables a  $c$ ), las reglas clásicas son modificadas por la relatividad especial, y para los objetos que son muy pequeños (comparables al tamaño de los átomos), la mecánica clásica es superada por la mecánica cuántica. Por último, para las cosas rápidas y pequeñas, se necesita una teoría que incorpore la relatividad especial y los principios cuánticos: la teoría cuántica de campos. Ahora bien, las partículas elementales son extremadamente pequeñas, y normalmente también son muy rápidas. Por tanto, la física de las partículas elementales cae naturalmente bajo el dominio de la teoría cuántica de campos [1–3].

## 1.2. ¿Cómo se producen y como se detectan las partículas?

Los electrones y los quarks no son un problema; son los componentes estables de la materia ordinaria. Para producir electrones basta con calentar un trozo de metal. Si

se quiere un haz de electrones, basta con colocar una placa cargada positivamente cerca, para atraerlos, y hacer un pequeño agujero en ella; los electrones que atraviesan el agujero constituyen el haz [3]. Un cañón de electrones de este tipo es el elemento inicial de un tubo de televisión o de un osciloscopio o de un acelerador de electrones. Para las partículas más exóticas hay tres fuentes principales: los rayos cósmicos, los reactores nucleares y los aceleradores de partículas [3].

En general, cuanto más pesada es la partícula que se quiere producir, mayor debe ser la energía de la colisión. Por eso, históricamente, se tiende a descubrir primero las partículas ligeras, y a medida que pasa el tiempo, y los aceleradores se vuelven más potentes, se encuentran partículas más pesadas. Dentro de un acelerador, dos haces de partículas de alta energía viajan a una velocidad cercana a la de la luz antes de chocar. Los haces viajan en direcciones opuestas en tubos de haz separados: dos tubos mantenidos en ultra alto vacío. Son guiados alrededor del anillo del acelerador por un fuerte campo magnético mantenido por electroimanes superconductores [4, 5]. Justo antes de la colisión, se utiliza otro tipo de imán para “apreta” las partículas y aumentar las posibilidades de colisión. Las partículas son tan diminutas que la tarea de hacerlas colisionar es similar a disparar dos agujas separadas por 10 kilómetros con tal precisión que se encuentran a mitad de camino [5]. Por lo tanto, los experimentos de dispersión de electrones se orientarán cada vez más hacia los colisionadores lineales, mientras que los anillos de almacenamiento seguirán utilizándose para los protones y las partículas más pesadas [1–4].

Hay muchos tipos de detectores de partículas: contadores Geiger, cámaras de nubes, cámaras de burbujas, cámaras de chispas, cámaras de deriva, emulsiones fotográficas, contadores Cerenkov, centelleadores, fotomultiplicadores, etc [3]. En realidad, un detector moderno típico tiene conjuntos enteros de estos dispositivos, conectados a un ordenador que sigue las partículas y muestra sus trayectorias en una pantalla de televisión. La mayoría de los mecanismos de detección se basan en el hecho de que, cuando las partículas cargadas de alta energía atraviesan la materia, ionizan los átomos a su paso [3]. Los iones actúan entonces como “semillas” en la formación de gotas (cámara de nubes) o burbujas (cámara de burbujas) o chispas (cámara de chispas), según el caso. Pero las partículas eléctricamente neutras no provocan la ionización y no dejan huellas [1–4].

### 1.3. Introducción histórica a las partículas elementales

Se podría precisar que la física de las partículas elementales nació en 1897, con el descubrimiento del electrón por J. J. Thomson [1, 3]. Él sabía que los rayos catódicos emitidos por un filamento caliente podían ser desviados por un imán. Esto sugería que llevaban carga eléctrica; de hecho, la dirección de la curvatura exigía que la carga fuera negativa. Por tanto, parecía que no se trataba de rayos, sino de corrientes de partículas. Haciendo pasar el rayo a través de campos eléctricos y magnéticos cruzados, y ajustando la intensidad del campo hasta que la desviación neta fuera cero, Thomson pudo determinar la velocidad de las partículas (aproximadamente una décima parte de la velocidad de la luz), así como su relación carga-masa. Thomson llamó a las partículas corpúsculos [2, 3]. Ya en 1891, George Johnstone Stoney había introducido el término “electrón” para la unidad fundamental de carga; más tarde, ese nombre se adoptó para las propias partículas [1–3].

Thomson conjeturó correctamente que estos electrones eran constituyentes esenciales de los átomos; sin embargo, como los átomos en su conjunto son eléctricamente neutros y mucho más pesados que los electrones, surgió inmediatamente el problema de cómo se distribuye la carga positiva compensatoria y la mayor parte de la masa dentro de un átomo. El propio Thomson imaginó que los electrones estaban suspendidos en una pasta pesada y cargada positivamente, como (según él) las ciruelas de un pudín [2, 3]. Pero el modelo de Thomson fue rechazado de forma contundente por el famoso experimento de dispersión de Rutherford, que demostró que la carga positiva, y la mayor parte de la masa, se concentraban en un pequeño núcleo, en el centro del átomo. Rutherford lo demostró disparando un haz de partículas de  $\alpha$  (átomos de helio ionizados) contra una fina lámina de oro. Si los átomos de oro estuvieran formados por esferas bastante difusas, como suponía Thomson, todas las partículas de  $\alpha$  se habrían desviado un poco, pero ninguna se habría desviado mucho. Lo que ocurrió en realidad fue que la mayoría de las partículas de  $\alpha$  pasaron a través del oro sin ser molestadas, pero unas pocas rebotaron en ángulos salvajes. La conclusión de Rutherford fue que las partículas de  $\alpha$  tenían se encontró con algo muy pequeño, muy duro y pesado. Evidentemente, la carga positiva, y prácticamente toda la masa, estaba concentrada en el centro, ocupando sólo una pequeña fracción del volumen del átomo [1–3].

El núcleo del átomo más ligero (el hidrógeno) recibió el nombre de protón por parte de Rutherford. En 1914, Niels Bohr propuso un modelo para el hidrógeno que consistía en un único electrón que giraba alrededor del protón, como un planeta que giraba alrededor del sol, mantenido en órbita por la atracción mutua de cargas opues-

tas. Era natural entonces suponer que los núcleos de los átomos más pesados estaban compuestos por dos o más protones unidos entre sí, soportando un número similar de electrones en órbita. Desgraciadamente, el siguiente átomo más pesado (el helio), aunque efectivamente lleva dos electrones, pesa cuatro veces más que el hidrógeno, y el litio (tres electrones) pesa siete veces más que el hidrógeno, y así sucesivamente [3]. Este dilema se resolvió finalmente en 1932 con el descubrimiento por Chadwick del neutrón, un gemelo eléctricamente neutro del protón. Resulta que el núcleo del helio contiene dos neutrones además de los dos protones; el litio, evidentemente, incluye cuatro; y, en general, los núcleos más pesados llevan más o menos el mismo número de neutrones que de protones. El descubrimiento del neutrón puso el broche final a lo que podríamos llamar el periodo clásico de la física de partículas elementales. Nunca antes y nunca después la física había ofrecido una respuesta tan sencilla y satisfactoria a la pregunta: “¿De qué está hecha la materia?” En 1932, todo eran protones, neutrones y electrones [1–3].

Ahora bien, hay un problema llamativo al que el modelo “clásico” no se refiere en absoluto: ¿qué mantiene unido el núcleo? Al fin y al cabo, los protones cargados positivamente deberían repelerse violentamente, al estar tan cerca unos de otros. Evidentemente, debe haber alguna otra fuerza, más poderosa que la fuerza de repulsión eléctrica, que una los protones (y los neutrones); los físicos de aquella época menos imaginativa la llamaban, simplemente, la fuerza fuerte, tiene un alcance muy corto que es aproximadamente del tamaño del propio núcleo [3].

La primera teoría significativa de la fuerza fuerte fue propuesta por Yukawa en 1934. Supuso que el protón y el neutrón se atraen mutuamente por algún tipo de campo, al igual que el electrón es atraído al núcleo por un campo eléctrico y la luna a la tierra por un campo gravitatorio [1–4]. Este campo debería ser cuantificado, y Yukawa se preguntó: ¿cuáles deben ser las propiedades de su cuanto, la partícula cuyo intercambio explicaría las características conocidas de la fuerza fuerte? Por ejemplo, el corto alcance de la fuerza indicaba que el mediador debía ser bastante pesado; Yukawa calculó que su masa debía ser casi 300 veces la del electrón. La partícula de Yukawa pasó a llamarse mesón. En el mismo sentido, el electrón se llama leptón, mientras que el protón y el neutrón son bariones. En 1947, Powell y sus colaboradores en Bristol descubrieron que hay dos partículas de peso medio en los rayos cósmicos, que llamaron  $\pi$  (o “pión”) y  $\mu$  (o “muón”). El verdadero mesón de Yukawa es el  $\pi$ ; se produce copiosamente en la atmósfera superior, pero normalmente se desintegra mucho antes de llegar a la tierra [1–4].

El primer gran logro de esta época fue el descubrimiento por parte de Dirac, en 1927, de la ecuación que lleva su nombre. La ecuación de Dirac debía describir electrones libres con una energía dada por la fórmula relativista [2, 3]

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4,$$

pero tenía una característica muy problemática: para cada solución de energía positiva ( $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ ) admitía una solución correspondiente con energía negativa ( $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ ). Esto significaba que, dada la tendencia natural de todo sistema a evolucionar en la dirección de la energía más baja, el electrón debería “huir” hacia estados cada vez más negativos, irradiando una cantidad infinita de energía en el proceso. Para salvar su ecuación, Dirac propuso una solución que compensaba con brillantez lo que le faltaba de plausibilidad: postuló que los estados de energía negativa están todos ocupados por un “mar” infinito de electrones [3]. La ausencia del electrón “esperado” en el mar se interpretaría como una carga positiva neta en ese lugar, y la ausencia de su energía negativa esperada se vería como una energía positiva neta. Así, un “agujero en el mar” funcionaría como una partícula ordinaria con energía y carga positivas. A finales de 1931, Anderson descubrió el positrón, un gemelo del electrón con carga positiva y con los atributos que Dirac necesitaba [2, 3]. Sin embargo, muchos físicos se sentían incómodos con la idea de que estuviera inmerso en un mar infinito de electrones invisibles, y en la década de 1940 Stueckelberg y Feynman proporcionaron una interpretación mucho más sencilla y convincente de los estados de energía negativa. En la formulación de Feynman-Stueckelberg, las soluciones de energía negativa se expresan como estados de energía positiva de una partícula diferente (el positrón); el electrón y el positrón aparecen en igualdad de condiciones, y no hay necesidad del “mar de electrones” de Dirac ni de sus misteriosos “agujeros” [2–4].

Para la tercera vertiente de la historia en el año 1930. Había surgido un problema en el estudio de la desintegración beta nuclear. En la desintegración beta, un núcleo radiactivo  $A$  se transforma en un núcleo ligeramente más ligero  $B$ , con la emisión de un electrón [3]

$$A \rightarrow B + e^-,$$

la conservación de la carga requiere que  $B$  lleve una unidad más de carga positiva que  $A$ . Hay muchos ejemplos de desintegración beta: el potasio se convierte en calcio, el cobre en zinc etc. Una característica de las desintegraciones de dos cuerpos ( $A \rightarrow B + C$ ) es que las energías salientes están determinadas cinemáticamente, en el marco del centro de masa [3]. Específicamente, si el núcleo “padre”  $A$  está en reposo, de modo que  $B$  y  $e$  salen de vuelta con momentos iguales y opuestos, entonces la conservación de la energía dicta que la energía del electrón es

$$E = \left( \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_e^2}{2m_A} \right) c^2.$$

Nombre	Símbolo	Carga (e)	Masa/MeV
electrón	$e$	-1	0,5109
electrón-neutrino	$\nu_e$	0	< 0,00046
muon	$\mu$	-1	105,658
muon-neutrino	$\nu_\mu$	0	< 0,19
tau	$\tau$	-1	1776,86
tau-neutrino	$\nu_\tau$	0	< 18,2

Cuadro 1.1: Leptones [4, 6].

Cuando se realizan los experimentos, se comprueba que los electrones emitidos varían considerablemente en energía; la ecuación anterior sólo determina la energía máxima del electrón para un proceso de desintegración beta concreto [3].

Este fue un resultado muy perturbador. Niels Bohr estaba dispuesto a abandonar la ley de conservación de la energía. Afortunadamente, Pauli adoptó un punto de vista más sobrio, sugiriendo que se emitía otra partícula junto con el electrón, un cómplice silencioso que se lleva la energía “perdida”. Tenía que ser eléctricamente neutra, para conservar la carga (y también, por supuesto, para explicar por qué no dejaba huella); Pauli propuso llamarla neutrón [2, 3]. La idea fue recibida con cierto escepticismo, y en 1932 Chadwick se adelantó al nombre. Pero al año siguiente Fermi presentó una teoría de la desintegración beta que incorporaba la partícula de Pauli y resultó tan brillantemente exitosa que la sugerencia de Pauli tuvo que ser tomada en serio. Del hecho de que las energías de los electrones observadas alcanzan el valor dado en la ecuación se deduce que la nueva partícula debe ser extremadamente ligera; Fermi la llamó neutrino (“pequeño neutro”) [1, 3].

La conjetura de Pauli se demostró en 1956, y así se confirmó la existencia de un tipo de neutrinos. En la terminología moderna, se denominan *electron-neutrinos* ( $\nu_e$ ), ya que están relacionados con la desintegración beta, en la que se emite un electrón. En la década de 1960, se descubrió que el muón también va acompañado de su propio neutrino, que ahora se denomina *muón-neutrino* ( $\nu_\mu$ ), la partícula tau también tiene su propio neutrino, que es diferente de  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ , y se denota por  $\nu_\tau$ , tabla 1.1. Los neutrinos, por tanto, también se ajustan a la estructura generacional [3, 4]. En 1977, por tanto, la familia de los leptones había aumentado a ocho: el electrón, el muón, tau, sus respectivos neutrinos y las correspondientes antipartículas [1–4].

Durante un breve periodo en 1947, fue posible creer que los principales problemas de la física de las partículas elementales estaban resueltos. Después de un largo desvío

en la búsqueda del muón, el mesón de Yukawa ( $\pi$ ), había sido finalmente capturado. Se había encontrado el positrón de Dirac, y el neutrino de Pauli. Pero este estado de confort no duró mucho. En diciembre de ese año, Rochester y Butler [25] publicaron la fotografía de la cámara de nubes que se muestra las partículas de los rayos cósmicos entran por la parte superior izquierda y chocan con una placa de plomo, produciendo una partícula neutra, cuya presencia se revela cuando decae en dos secundarias cargadas, formando la “V” invertida de la parte inferior derecha. El análisis detallado indicó que estas partículas cargadas son en realidad un  $\pi^+$  y un  $\pi^-$ . Se trataba, pues, de una nueva partícula neutra con al menos el doble de masa que el pión; se llama  $K^0$  (“kaon”). Los kaones se comportan en algunos aspectos como piones pesados, por lo que la familia de los mesones se amplió para incluirlos [2,3].

Mientras tanto, en 1950 el grupo de Anderson en Caltech encontró otra partícula neutra. Pero esta vez los productos eran un  $p^+$  y un  $\pi^-$ . Evidentemente, esta partícula es sustancialmente más pesada que el protón; se llama  $\Lambda$ . El lambda pertenece con el protón y el neutrón a la familia de los *bariones* [2,3].

La sorpresa con la que se recibieron estos nuevos bariones y mesones pesados es lo que explica que se les conozca colectivamente como partículas “extrañas”. Las nuevas partículas no sólo eran inesperadas; hay un sentido más técnico en el que parecían “extrañas”: se producen copiosamente (en una escala de tiempo de unos  $10^{-23}$  segundos), pero se desintegran con relativa lentitud (normalmente unos  $10^{-10}$  segundos). En un lenguaje moderno, las partículas extrañas son producidas por la fuerza fuerte, pero se desintegran por la fuerza débil [3]. En 1953 Gell-Mann y Nishijima asignaron a cada partícula una nueva propiedad (Gell-Mann la llamó “extrañeza”) que se conserva en cualquier interacción fuerte, pero (a diferencia de esas otras) no se conserva en una interacción débil [3].

El jardín que parecía tan ordenado en 1947 se había convertido en una jungla en 1960, y la física de hadrones sólo podía describirse como un caos. La plétora de partículas que interaccionan fuertemente se dividía en dos grandes familias: los bariones y los mesones y los miembros de cada familia se distinguían por su carga, su extrañeza y su masa [1–4].

En 1964, Gell-Mann y Zweig propusieron, de forma independiente, que todos los hadrones están compuestos, de hecho, por constituyentes aún más elementales, a los que Gell-Mann llamó quarks [2,3]. Los quarks se presentan en tres tipos (o “sabores”), formando un patrón triangular de la “Vía Óctuple”, los bariones y mesones se organizan en patrones geométricos considerando las propiedades de carga y extrañeza [1–4].

Y hay dos reglas de composición [3]:

Nombre	Símbolo	Carga (e)	Masa/MeV
down	$d$	$-\frac{1}{3}$	4.67
up	$u$	$+\frac{2}{3}$	2.16
strange	$s$	$-\frac{1}{3}$	93.4
charm	$c$	$+\frac{2}{3}$	1270
bottom	$b$	$-\frac{1}{3}$	4180
top	$t$	$+\frac{2}{3}$	172690

Cuadro 1.2: Familia de Quarks [4, 5].

1. Cada barión está compuesto por tres quarks (y cada antibarión está compuesto por tres antiquarks) [3].
2. Cada mesón está compuesto por un quark y un antiquark [3].

Las propiedades de los quarks deben deducirse de las propiedades de los hadrones. Se necesitan seis tipos de quarks para entender las propiedades de todos los hadrones conocidos ver tabla 1.2. También parecen seguir la estructura generacional, en el sentido de que las propiedades de  $u$ ,  $c$  y  $t$  son similares, y también lo son las de  $d$ ,  $s$  y  $b$ . Así, los seis quarks vienen en tres generaciones [2–4].

Recordando que la teoría original de la desintegración beta (1933), Fermi trató el proceso como una interacción de contacto, que ocurre en un único punto y, por tanto, no requiere ninguna partícula mediadora. Resulta que la fuerza débil (responsable de la desintegración beta) tiene un alcance extremadamente corto, por lo que el modelo de Fermi no estaba lejos de la realidad y arroja excelentes resultados aproximados a bajas energías [3]. Sin embargo, se reconoció ampliamente que este enfoque estaba destinado a fallar a altas energías y que eventualmente tendría que ser suplantado por una teoría en la que la interacción estuviera mediada por el intercambio de alguna partícula. El mediador pasó a conocerse con el prosaico nombre de bosón vectorial intermedio [2–4].

El reto para los teóricos era predecir las propiedades del bosón vectorial intermedio, y para los experimentadores, producir uno en el laboratorio. Pero no fue hasta la aparición de la teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam cuando se hizo posible una predicción realmente firme de la masa. En esta teoría, existen de hecho tres bosones vectoriales intermedios, dos de ellos cargados ( $W^\pm$ ) y uno neutro ( $Z$ ) [3]. En enero de 1983, el grupo de Carlo Rubbia comunicó el descubrimiento de la  $W$  y 5 meses más tarde el mismo equipo anunció el descubrimiento de la  $Z$ . Estos expe-

Nombre	Símbolo	Carga (e)	Masa/eV
foton	$\gamma$	0	0
gluon	g	0	0
boson	$W^{\pm}$	$\pm 1$	$8,0377 \times 10^{10}$
boson	Z	0	$9,11876 \times 10^{10}$
higgs	$H^0$	0	$1,2525 \times 10^{11}$
graviton	G	n/a	$< 1,76 \times 10^{-23}$

Cuadro 1.3: Partículas Mediadoras [4, 5].

rimentos representan un triunfo técnico extraordinario, y tuvieron una importancia fundamental a la hora de confirmar un aspecto crucial del Modelo Estándar con el que la comunidad de físicos estaba por aquel entonces muy comprometida (y por el que ya se había concedido un Premio Nobel) [2–4].

Según la visión actual, toda la materia está formada por tres tipos de partículas elementales: leptones, quarks y mediadores. Existen seis leptones, también existen seis antileptones, con todos los signos invertidos. Del mismo modo, hay seis “sabores” de quarks. Cada interacción tiene su mediador tabla 1.3: el fotón para la fuerza electromagnética, dos W y una Z para la fuerza débil, el gravitón (presumiblemente) para la gravedad, para la fuerza el mediador se llama gluón, y en el Modelo Estándar hay ocho de ellos, y el bosón de Higgs, esta partícula verificaría la existencia del mecanismo de Higgs y confirmaría la forma en que las partículas adquieren masa [1, 3, 4].

## 1.4. Interacciones fundamentales

Existen cuatro tipos de interacciones fundamentales. La más antigua es la interacción gravitatoria, conocida desde la época de Newton en el siglo *XVII*. En el siglo *XIX*, la electricidad y el magnetismo se unificaron en la teoría electromagnética, y éste es el segundo tipo de interacción que se reconoce como fundamental. A principios del siglo *XX*, con el descubrimiento del núcleo atómico, fue necesario introducir dos tipos más de interacciones fundamentales. Una de ellas es la interacción fuerte, necesaria para explicar la estabilidad de los núcleos atómicos a pesar de que los protones de los núcleos ejercen fuerzas de Coulomb repulsivas entre sí. La otra es la interacción débil, necesaria para explicar el fenómeno de la radiactividad beta, en el que un electrón o un positrón sale de un núcleo [1–5].

A cada una de estas fuerzas le corresponde una teoría física. La teoría clásica de la gravedad es, por supuesto, la ley de la gravitación universal de Newton. Su generalización relativista es la teoría general de la relatividad de Einstein (“geometrodinámica”). Todavía no se ha elaborado una teoría cuántica de la gravedad completamente satisfactoria; por el momento, la mayoría de la gente asume que la gravedad es simplemente demasiado débil para desempeñar un papel significativo en la física de las partículas elementales [1]. La teoría física que describe las fuerzas electromagnéticas se llama electrodinámica, Maxwell la formuló de forma clásica hace más de cien años. La teoría de Maxwell ya era coherente con la relatividad especial. La teoría cuántica de la electrodinámica (QED) fue perfeccionada por Tomonaga, Feynman y Schwinger en 1940. Las fuerzas débiles, que explican la desintegración beta nuclear, eran desconocidas para la física clásica; su descripción teórica recibió una formulación cuántica relativista desde el principio. La primera teoría de las fuerzas débiles fue presentada por Fermi en 1933; fue refinada por Lee y Yang, Feynman y Gell-Mann, y muchos otros, en 1950, y puesta en su forma actual por Glashow, Weinberg y Salam, en 1960 [1, 3]. (El modelo GWS trata las interacciones débiles y electromagnéticas como diferentes manifestaciones de una única fuerza electrodébil, y en este sentido las cuatro fuerzas se reducen a tres). En cuanto a las fuerzas fuertes, más allá del trabajo pionero de Yukawa en 1934 no hubo realmente ninguna teoría hasta la aparición de la cromodinámica (QCD) en la década de 1970. La interacción fuerte está mediada por bosones gauge sin masa llamados gluones ( $g$ ). Los gluones son los cuantos de campo que llevan un tipo único de carga, llamada color, que da nombre a la teoría [1–4].

Cada una de estas fuerzas está mediada por el intercambio de una partícula. Las fuerzas gravitatorias están mediadas por el gravitón, las fuerzas electromagnéticas por el fotón  $\gamma$ , las fuerzas fuertes por el gluón  $g$  y las fuerzas débiles por los bosones vectoriales intermedios,  $W$  y  $Z$ . Estos mediadores transmiten la fuerza entre un quark o leptón y otro [1–4].

La partícula que en la actualidad se conoce como el bosón de Higgs apareció por primera vez en un artículo científico escrito por Peter Higgs en 1964. En ese momento, los físicos estaban trabajando en la descripción de la fuerza débil, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, utilizando un marco denominado teoría cuántica de campos [7].

Sin embargo, no fue posible aplicar un enfoque similar a la interacción débil debido a un problema fundamental: la teoría no permitía que las partículas tuvieran masa. Específicamente, los portadores de fuerza débil los bosones  $W$  y  $Z$  tenían que no tener masa, de lo contrario se rompería una simetría fundamental de la teoría y por

lo tanto no funcionaría. Esto planteó un problema importante ya que los portadores de fuerza débil tenían que ser masivos para ser consistentes con el rango muy corto de la interacción débil [3,4]. La solución a este problema se encontró con el mecanismo de Brout-Englert-Higgs. Este mecanismo tiene dos componentes principales: un nuevo campo es lo que ahora llamamos el campo de Higgs, y la ruptura espontánea de la simetría [7].

Las partículas obtienen su masa al interactuar con el campo de Higgs; no tienen masa propia. Cuanto más fuerte interactúa una partícula con el campo de Higgs, más pesada termina siendo la partícula. Los fotones, por ejemplo, no interactúan con este campo y por lo tanto no tienen masa. Sin embargo, otras partículas elementales, incluidos los electrones, los quarks y los bosones (W y Z) interactúan y, por lo tanto, tienen una variedad de masas [7].

El 4 de julio de 2012, las colaboraciones ATLAS y CMS anunciaron el descubrimiento de una nueva partícula en el CERN. Esta partícula no tenía carga eléctrica, fue de corta duración y se desintegró de la misma manera que lo haría el bosón de Higgs, según la teoría. Para confirmar si realmente era el bosón de Higgs, los físicos necesitaban verificar su “espín”: el bosón de Higgs es una partícula que tiene un espín de cero. Al examinar dos veces y media más datos, concluyeron en marzo de 2013 que, efectivamente, se había descubierto el bosón de Higgs [1, 7].

# Capítulo 2. Mecánica y teoría clásica de campos

## 2.1. Mecánica Clásica

El movimiento de cuerpos materiales constituyó el tema de algunas de las primeras investigaciones realizadas por los pioneros de la física. A partir de sus esfuerzos ha evolucionado un vasto campo conocido por los nombres de Mecánica analítica, dinámica o, simplemente mecánica. En el siglo actual se ha impuesto el término “mecánica clásica” para distinguir esa rama de la física de las modernas teorías físicas, especialmente de la mecánica cuántica. Toda presentación de la mecánica se basa en algunos conceptos físicos fundamentales, tales como espacio, tiempo, simultaneidad, masa y fuerza [8–10].

### 2.1.1. Mecánica de una partícula

Sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición de una partícula para un origen dado y sea  $\mathbf{v}$  su vector velocidad [8]

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

La cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$  de la partícula es, por definición, el producto de su masa por su velocidad [8]

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

A consecuencia de interacciones con campos y objetos exteriores, la partícula puede experimentar fuerzas de diversos tipos, por ejemplo, gravitatorias o electrodinámicas; la suma vectorial de las fuerzas que se ejercen sobre la partícula es la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  [8, 9]. La mecánica de la partícula está regida por la Segunda Ley de Newton del Movimiento, la cual establece que existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de la partícula está descrito por la ecuación diferencial

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

muchas conclusiones importantes de la mecánica se pueden expresar en forma de teoremas de conservación que indican en qué condiciones se mantienen constantes en el tiempo diversas magnitudes mecánicas [8, 9]. Por lo tanto a partir de ello, se puede enunciar el siguiente teorema.

**Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula:** Si la fuerza resultante,  $\mathbf{F}$ , es nula, será  $\dot{\mathbf{p}} = 0$  se conservará la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$  [8, 9].

El momento angular de la partícula respecto a un punto  $O$  se representa por  $\mathbf{L}$  y es, por definición

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición que va de  $O$  a la partícula y el torque respecto a un punto  $O$ , resulta como:

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

notemos que tanto  $\mathbf{N}$  como  $\mathbf{L}$  dependen del punto  $O$  respecto al cual se toman los momentos, a partir de ello se enuncia el.

**Teorema de conservación del momento angular de una partícula:** Si el torque resultante  $\mathbf{N}$  es nulo, será  $\dot{\mathbf{L}} = 0$ , y se conserva el momento angular [8, 9].

Ahora al considera el trabajo efectuado por la fuerza exterior  $\mathbf{F}$  sobre la partícula cuando ésta va del punto 1 al punto 2. Por definición, este trabajo es [8–10]

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

si la masa es constante, la integral de la ecuación anterior se reduce a la variación de la energía cinética:

$$W_{12} = T_2 - T_1.$$

Cuando el campo de fuerzas sea tal que el trabajo  $W_{12}$  sea el mismo para todo camino posible que una los puntos 1 y 2, se dirá que la fuerza (y el sistema) es conservativa [8–10]. Otra descripción de sistema conservativo se obtiene imaginando que se lleva la partícula del punto 1 al punto 2 por un camino posible y luego regresa

al punto 1 por otro camino. La independencia de  $W_{12}$  del camino particular seguido implica que el trabajo efectuado a lo largo del circuito cerrado mencionado sea nulo, es decir [8]

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Para que  $W_{12}$  sea independiente del camino físico seguido por la partícula es condición necesaria y suficiente que  $\mathbf{F}$  sea el gradiente de una cierta función escalar de la posición: [8–10]

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}),$$

donde  $V$  recibe el nombre de potencial o energía potencial. Si  $W_{12}$  es independiente del camino de integración entre los extremos 1 y 2, se podría considerar que  $W_{12}$  es la variación de una magnitud que sólo depende de la posición de los puntos extremos [8, 9]

$$W_{12} = V_1 - V_2.$$

A partir de este resultado, se enuncia el siguiente teorema.

**Teorema de conservación de la energía de una partícula:** Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, se conservará la energía total  $T + V$  de la partícula [8–10].

### 2.1.2. Mecánica de un sistema de partículas

Al generalizar a sistemas de muchas partículas, se debe distinguir entre *fuerzas exteriores* que se ejercen sobre las partículas por parte de fuentes fuera del sistema y *fuerzas interiores* sobre, la partícula  $i$  debidas a las demás partículas del sistema [9]. Así, la ecuación del movimiento (Segunda ley de Newton) para la partícula  $i$ -ésima se escribirá

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  representa la fuerza exterior y  $\mathbf{F}_{ji}$ , es la fuerza interior que la partícula  $j$ -ésima ejerce sobre la partícula  $i$ -ésima (naturalmente,  $\mathbf{F}_{ii}$  es nula) [9]. Supondremos que  $\mathbf{F}_{ji}$ , (como  $\mathbf{F}_i^{(e)}$ ) cumplen la tercera ley de Newton del movimiento en su forma original: que las fuerzas que se ejercen entre sí dos partículas son iguales y opuestas [9]

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

En el estudio de la dinámica de sistemas de partículas es de gran importancia el concepto de centro de masas, y el vector de posición del centro de masas del sistema Fig.2.1, por lo tanto [8,9]

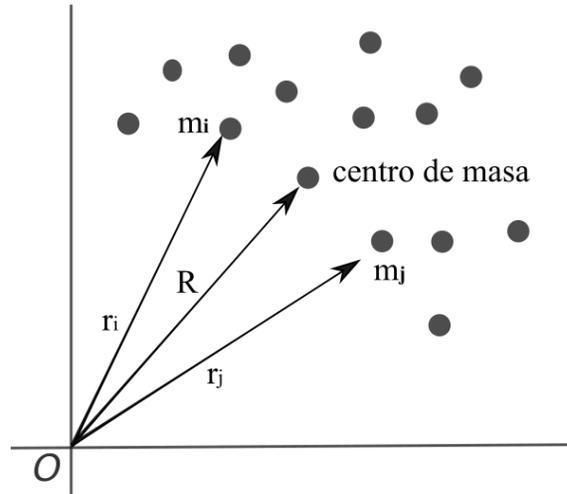


Figura 2.1: Centro de masa de un sistema de partículas [8].

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}, \quad (2.2)$$

se obtiene que el centro de masa se mueve como si la resultante de las fuerzas exteriores estuviera aplicada a la masa total del sistema concentrada en su centro de masa [8]. Las fuerzas puramente internas, si cumplen la tercera ley de Newton, no tendrán pues efecto alguno sobre el movimiento del centro de masa. La cantidad de movimiento total del sistema [9]

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (2.3)$$

es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa. En consecuencia, la ecuación (2.3) del movimiento del centro de masa de un sistema de partículas, conlleva al.

**Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas:** Cuando la resultante de las fuerzas exteriores es nula, se conserva la cantidad de movimiento total [8,9].

Analicemos el momento angular resultante del sistema formado por los productos

vectoriales  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ , sumándolos para todos los valores de  $i$ ; considerando la ecuación (2.1), se encuentra la variación respecto del tiempo [8,9]

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}.$$

Si las fuerzas interiores entre dos partículas, además de ser iguales y opuestas, están sobre la recta que une las partículas, condición conocida por el nombre de ley fuerte de acción y reacción, todos estos productos vectoriales serán nulos [8,9]

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}, \quad (2.4)$$

la derivada temporal del momento angular resultante es, igual al momento resultante de las fuerzas exteriores (torque) respecto al punto dado. A la ecuación (2.4) se generaliza el.

**Teorema de conservación del momento angular resultante:**  $\mathbf{L}$  será constante en el tiempo cuando el momento resultante aplicado (de las fuerzas exteriores) sea nulo [8,9].

Para relacionar el momento angular con el centro de masas, se descompone cada posición y cada velocidad. Con el origen  $O$  como punto de referencia y sea  $\mathbf{R}$  vector de posición del centro de masa respecto a  $O$  y sea  $\mathbf{r}'_i$  el vector de posición de la partícula  $i$ -ésima respecto al centro de masa Fig.2.2, el momento angular resultante respecto a  $O$  resulta ser [8,9]

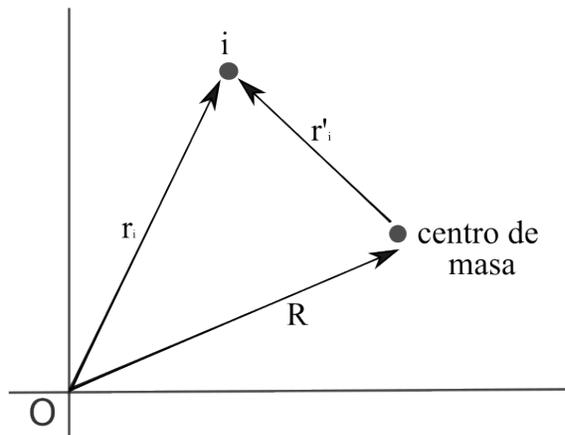


Figura 2.2: Vectores que intervienen en el cambio de punto de referencia para el momento angular [8].

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i, \quad (2.5)$$

el momento angular resultante respecto a un punto  $O$  es igual al momento angular del sistema concentrado en su centro de masa, más el momento angular del movimiento alrededor del centro de masa [8–10].

Al igual que en el caso de la partícula, se calcula el trabajo efectuado por todas las fuerzas al mover el sistema de un punto inicial 1 a un punto final 2.

Se puede escribir el trabajo efectuado por todas las fuerzas al mover el sistema de un punto inicial 1 a un punto final 2, considerando la ecuación (2.1) [8–10]

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i.$$

De tal manera que se puede escribir en la forma de diferencia entre las energías cinéticas final e inicial y haciendo uso de las transformaciones de las coordenadas del centro de masa, se puede escribir  $T$  en la forma [8–10]

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2,$$

la energía cinética, al igual que el momento angular, consta de dos partes: la energía cinética que se obtiene considerando toda la masa concentrada en el centro de masa, más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa [8–10].

En el caso particular de que las fuerzas exteriores e interiores deriven de un potencial y las fuerzas son conservativas, resulta

$$W_{12} = \left[ - \sum_i V_i - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \right]_1^2,$$

se puede definir una energía potencial total  $V$  del sistema [8–10]

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}.$$

Se puede enunciar un teorema análogo al de conservación para una partícula

$$T + V = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}, \quad (2.6)$$

tal que se conserva la energía total  $T + V$  [8–11].

### 2.1.3. Ligaduras

En los apartados anteriores se podría haber sacado la impresión de que todos los problemas de la Mecánica se reducen a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, ecuación (2.1). Simplemente, se sustituyen las distintas fuerzas que se ejercen sobre las partículas del sistema. Sin embargo, incluso desde un punto de vista puramente físico, esto es una simplificación excesiva. Por ejemplo, puede ser necesario tener en cuenta las “ligaduras” que limitan el movimiento del sistema (independientes de las fuerzas actuantes). Con frecuencia, los sistemas están sometidos a ligaduras que obligan a la partícula o sistema de partículas a moverse en ciertas trayectorias o a restringir su movimiento a ciertas regiones específicas. Tal es el caso de el péndulo simple, donde el movimiento de una masa  $m$  esta restringido [9, 11, 12].

#### Tipos de Ligaduras

Si las condiciones de ligadura se pueden expresar en forma de ecuaciones que relacionen las coordenadas de las partículas (y posiblemente el tiempo) cuya forma sea

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = 0, \quad (2.7)$$

diremos que las ligaduras son *holonomas*. Aquellas que no puedan expresarse de esta manera ecuación (2.7) se denominan *no holonomas*. Las ligaduras se clasifican además según que las ecuaciones de ligadura contengan el tiempo como variable explícita (*reónomas*) o no dependan explícitamente del tiempo (*esclerónomas*) [9, 11, 12].

### 2.1.4. Coordenadas Generalizadas

Un sistema de  $N$  partículas, exento de ligaduras, tiene  $3N$  coordenadas independientes o *grados de libertad*. Si existen ligaduras holónomas, expresadas por  $k$  ecuaciones de la forma de la ecuación (2.7), podremos utilizar éstas para eliminar  $k$  de las  $3N$  coordenadas y nos quedarán  $3N - k$  coordenadas independientes y diremos que el sistema posee  $3N - k$  grados de libertad. Esta eliminación de las coordenadas dependientes se puede expresar de otra manera, introduciendo  $3N - k$  variables indepen-

dientes nuevas  $(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$  en función de las cuales, las antiguas coordenadas  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , se expresarán mediante ecuaciones de la forma [9, 11–13]

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \quad (2.8)$$

que contienen implícitamente las ligaduras. Estas son ecuaciones de transformación del sistema de variables  $(\mathbf{r}_1)$  al sistema de las  $(q_1)$ , o bien se puede considerar que las ecuaciones (2.8) son representaciones paramétricas de las variables  $(\mathbf{r}_1)$ . Se supone siempre que también podemos pasar del sistema  $(q_1)$  al sistema  $(\mathbf{r}_1)$ , es decir, que las ecuaciones (2.8) combinadas con las  $k$  ecuaciones de ligadura se pueden invertir para obtener cualquier  $q_i$  en función de la variable  $\mathbf{r}_1$  y el tiempo [9, 11–13].

### 2.1.5. Principio de D'Alembert y Ecuaciones de Lagrange

El desplazamiento virtual (infinitesimal) de un sistema es el cambio de configuración de éste a consecuencia de una variación infinitesimal arbitraria de las coordenadas  $\delta\mathbf{r}_i$ , *compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en el instante dado  $t$* . El tiempo se considera fijo en los desplazamientos virtuales, de modo que se ignoren los posibles cambios en las fuerzas y en las ligaduras que puedan provenir de la evolución temporal [11–13].

Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton y al descomponer  $\mathbf{F}_i$  en la fuerza aplicada  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  y la fuerza de ligadura  $\mathbf{f}_i$ , el trabajo virtual asociado a las fuerzas sobre una partícula  $i$  [11–13]

$$\sum (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Se limitara a sistemas para los cuales el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sea nulo

$$\sum (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad (2.9)$$

que constituye el *principio de D'Alembert*. Hasta ahora se ha logrado el propósito de que no figuren las fuerzas de ligadura, pero aún no tiene forma útil para proporcionar las ecuaciones del movimiento del sistema [12]. Se debe ahora transformar el principio en una expresión que contenga desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas, las cuales son entonces independientes entre si (para ligaduras holónomas), con lo cual se podrán hacer separadamente iguales a cero los coeficientes de las  $\delta q_i$  [12]. El desplazamiento virtual arbitrario  $\delta\mathbf{r}_i$  se puede relacionar con los desplazamientos virtuales  $\delta q_j$  en coordenadas generalizadas. Ahora el segundo término de la ecuación (2.9), puede escribirse en la forma

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j,$$

reemplazando los anteriores resultados se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (2.10)$$

sin embargo, tal como se definió  $V$  no depende de las velocidades generalizadas [11–13]. Por lo que se puede incluir un término en  $V$  en la derivada parcial respecto a  $\dot{q}_j$ , es decir, definiendo una nueva función, el Lagrangiano  $L$ , en la forma

$$L = T - V, \quad (2.11)$$

las ecuaciones quedan en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (2.12)$$

las ecuaciones obtenidas se conocen como *ecuaciones de Lagrange* [11–13]. Observe que estas ecuaciones no requieren que las fuerzas sean conservativas, ya que el potencial puede ser función explícita del tiempo, para ver con más detalle la deducción referirse al apéndice A. En la formulación Lagrangiana se tienen algunas ventajas operativas como son:

- No aparecen las fuerzas de ligadura, y las fuerzas aplicadas usualmente son parámetros de entrada. Es decir, normalmente conocemos la forma funcional de las fuerzas aplicadas [14].
- Al no haber coordenadas dependientes, el número de ecuaciones es el menor posible [14].
- Las ecuaciones son escalares ya que están basadas en la energía [14].
- Las ecuaciones de Lagrange son idénticas en forma en cualquier sistema de coordenadas generalizadas [14].

### 2.1.6. Potenciales dependientes de la velocidad

Las ecuaciones de Lagrange se pueden poner en la forma ecuación (2.12) aun cuando no exista función potencial,  $V$ , en el sentido usual, con tal que las fuerzas generalizadas se obtengan de una función  $U(q_j, \dot{q}_j)$ , donde  $U$  es un potencial generalizado dependiente de la velocidad [11–14].

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (2.13)$$

El caso de una partícula cargada en un campo electromagnético es un ejemplo importante de existencia del Lagrangiano para fuerzas dependientes de la velocidad. Al considerar una carga se propaga en el vacío en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y un campo magnético  $\mathbf{B}$ , el valor de la fuerza que experimenta la carga es [11–14]

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

los campos se pueden generar de un potencial escalar  $\phi$  y un potencial vectorial  $\mathbf{A}$ , los cálculos realizados se desarrollan en el apéndice A

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

en función de los potenciales  $\phi$  y  $\mathbf{A}$ , la llamada fuerza de Lorentz [11–14] queda:

$$\mathbf{F} = q \left( -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}),$$

la ecuación anterior se puede poner en una forma mas conveniente, por ejemplo consideremos la componente  $x$

$$F_x = q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right) \right\},$$

como el potencial escalar es independiente de la velocidad, esta expresión equivale a

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x},$$

donde

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v},$$

$U$  es un potencial generalizado y la lagrangiana para una partícula cargada en un campo electromagnético puede escribirse [11–14]

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.14)$$

## 2.2. Cálculo de Variaciones

### 2.2.1. Principio de Hamilton

El *principio de Hamilton* es un principio integral que describe el movimiento de los sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas (salvo las de ligadura) pueden derivar de un potencial escalar generalizado que puede ser función de las coordenadas, velocidades y del tiempo. Para los sistemas monógenos, el principio de Hamilton se enuncia diciendo que *el movimiento del sistema entre el tiempo  $t_1$  y el tiempo  $t_2$  es tal que la integral curvilínea* [8,9,14]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (2.15)$$

donde  $L$ , tiene un valor estacionario para el camino del movimiento correcto [8,9,14]. Es decir, de entre todos los caminos posibles por los cuales el punto representativo del sistema podría ir de su posición en el instante  $t_1$  a su posición en el instante  $t_2$ , recorrerá en la realidad el camino para el cual el valor de la integral ecuación (2.15) sea estacionario, figura 2.3. Se resume el principio de Hamilton diciendo que el movimiento es tal que la variación de la integral curvilínea  $I$  para  $t_1$  y  $t_2$  fijos, es nula [8,9,14]

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (2.16)$$

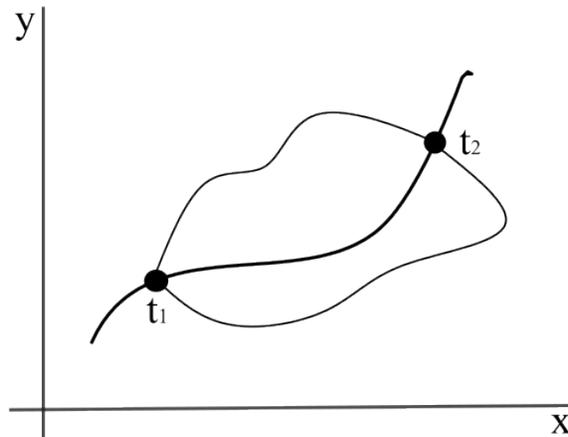


Figura 2.3: Camino del punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones [8].

El principio de Hamilton sea condición suficiente para deducir las ecuaciones del movimiento, nos permite construir la Mecánica de sistemas monógenos tomando

como base el principio de Hamilton en vez de las leyes de Newton del movimiento [8, 9, 14].

### 2.2.2. Técnicas del cálculo de variaciones

Se considerara el problema inicialmente unidimensional: tenemos una función  $f(y, \dot{y}, x)$  definida sobre un camino  $y = y(x)$  entre dos valores  $x_1$  y  $x_2$ , donde  $\dot{y}$  es la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . Se quiere encontrar un camino particular  $y(x)$  tal que la integral curvilínea  $J$  de la función  $f$  entre  $x_1$  y  $x_2$ ,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx, \quad (2.17)$$

tenga un valor estacionario relativo a los caminos que difiera infinitesimalmente de la función correcta  $y(x)$  [8, 9, 14].

Ahora se plantea el problema en una forma que nos permita utilizar los métodos conocidos del cálculo diferencial para hallar los puntos estacionarios de una función. Como  $J$  debe tener un valor estacionario para el camino correcto relativo a todo camino próximo, la variación debe ser cero relativa a algún conjunto particular de caminos vecinos señalados por un parámetro infinitesimal  $\alpha$  [8, 9, 14]

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx. \quad (2.18)$$

Derivando bajo el signo integral de la forma usual y considerando la condición para obtener un máximo y un mínimo se vé que la condición para que  $J$  adquiera un valor estacionario es [8, 9, 14]

$$\left( \frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} dx = 0. \quad (2.19)$$

Se puede, aplicar a la ecuación (2.19) el lema fundamental del cálculo de variaciones, por tanto, que  $J$  sólo puede tener un valor estacionario si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \quad (2.20)$$

esta ecuación diferencial nos da entonces como solución la trayectoria  $y = y(x)$  que deja estacionaria la cantidad  $J$ . Para ver con mayor detalle referirse apéndice A. Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Euler-Lagrange [8, 9, 14].

## 2.3. Teoremas de Conservación y propiedades de simetría

Hasta ahora nos hemos ocupado principalmente de obtener las ecuaciones del movimiento y poco se ha hablado de cómo resolverlas en un problema particular una vez obtenidas. Un sistema de  $n$  grados de libertad tendrá  $n$  ecuaciones diferenciales que son de segundo orden en el tiempo. La solución de cada ecuación requerirá dos integraciones que darán lugar, entre todas, a  $2n$  constantes de integración [8, 14].

En realidad, la mayoría de problemas no son integrables totalmente. No obstante, aun cuando no se puedan obtener soluciones completas, suele ser posible sacar mucha información referente a la naturaleza física del movimiento del sistema. En muchos problemas, se pueden obtener de manera inmediata integrales primeras de las ecuaciones del movimiento, es decir, relaciones del tipo

$$f(q, \dot{q}, t) = cte, \quad (2.21)$$

que son ecuaciones diferenciales de primer orden [8, 14]. Estas estructuras se conocen como primeras integrables de las ecuaciones de movimiento. Mucha información se puede extraer de estas primeras integrales, en particular las leyes de conservación. Si se considera un sistema de partículas puntuales bajo la influencia de fuerzas que se deriven de potenciales que solo dependen de la posición. En este caso se puede escribir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{x_i},$$

que corresponde a la componente  $x$  del momento lineal de la partícula  $i$ -ésima [8, 14]. Esto sugiere la forma de elaborar el concepto de momento generalizado cuando usamos coordenadas generalizadas. El momento generalizado  $p_j$ , asociado a la coordenada generalizada  $q_j$ , se define como

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (2.22)$$

a  $p_j$  se le llama también *cantidad de movimiento canónica o cantidad de movimiento conjugada* [8, 9, 14].

### 2.3.1. Conservación de la energía

Otro teorema de conservación que se podría esperar obtener en la formulación de Lagrange es la conservación de la energía total en sistemas en donde las fuerzas deriven de potenciales que dependan sólo de la posición. Se considera una Lagrangiana

genérica, la cual será función de  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ . Entonces, la derivada total respecto al tiempo de  $L$  es [8, 9, 14]

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (2.23)$$

a partir de las ecuaciones de Lagrange, resulta

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (2.24)$$

la cantidad entre paréntesis se denomina a veces *función energía* y se representa por  $h$  [8, 9, 14]

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \quad (2.25)$$

y se puede considerar que la ecuación (2.24) da la derivada total de  $h$  respecto al tiempo:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (2.26)$$

si la lagrangiana no es función explícita del tiempo, es decir, si  $t$  no aparece explícitamente en  $L$  sino tan sólo implícitamente a través de la variación temporal de  $q$  y  $\dot{q}$ , la ecuación (2.26) nos dice que  $h$  se conserva; es una de las integrales primeras del movimiento y se le da a veces el nombre de integral de Jacobi [8, 9, 14].

### 2.3.2. Teorema de Noether

El *Teorema de Noether* es un resultado central en física teórica. Este teorema expresa que cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, tiene su correspondiente ley de conservación. Además de permitir aplicaciones físicas prácticas, este teorema constituye una explicación del por qué existen leyes de conservación y magnitudes físicas que no cambian a lo largo de la evolución temporal de un sistema físico [9, 14].

**Teorema de Noether:** Sea un Lagrangiano de la forma  $L = L(q, \dot{q}, t)$ . Se supone que las ecuaciones de movimiento de Lagrange, son invariantes bajo una transformación continua de coordenadas de la forma  $[t, q] \rightarrow [t'(t), q'(q, t)]$ . Entonces existe una integral de movimiento, una cantidad conservada asociada a dicha invarianza. Dado un Lagrangiano  $L(q, \dot{q}, t)$  que depende de las coordenadas  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), sus derivadas temporales  $\dot{q}_i$  y el tiempo  $t$ , al introducir unas nuevas coordenadas con la transformación [9, 13, 14]

$$t' \equiv t'(t), \quad q'_i \equiv q'_i(q, t), \quad (2.27)$$

esta transformación debe ser invertible ya que de lo contrario, el nuevo conjunto coordinado no sería independiente. Al parametrizar las nuevas coordenadas en la forma:

$$t' \equiv t + \delta t(t), \quad q'_i \equiv q_i + \delta q_i(q, t), \quad (2.28)$$

inicialmente las transformaciones  $\delta t(t)$  y  $\delta q_i$  son arbitrarias, se puede conectar estas cantidades a través de [14]

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t. \quad (2.29)$$

Dado que la física no puede cambiar con esta transformación de coordenadas, la acción debe permanecer invariante:

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt = S'[t'(t_1), t'(t_2)] \equiv \int_{t'(t_1)}^{t'(t_2)} L'[q'(t'), \dot{q}'(t'), t'] dt',$$

para que esto se cumpla, se requiere de la siguiente igualdad [14]

$$L'(q', \dot{q}', t) \equiv L[q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t'), t(t')] \frac{dt}{dt'}. \quad (2.30)$$

Si la forma de las ecuaciones de movimiento es invariante ante esta transformación de coordenadas, se dice que dicha transformación es simétrica, es suficiente que se cumpla la relación

$$L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{d}{dt'} \Omega(q', t'), \quad (2.31)$$

es decir, que ambas funciones lagrangianas pueden diferir en una derivada total con respecto al nuevo parámetro de tiempo [14]. Si se inserta la ecuación (2.31) en (2.30), se tiene

$$L[q, \dot{q}, t] - L(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q', t'), \quad (2.32)$$

y dado que la transformación es continua, es posible considerar transformaciones infinitesimales ecuación (2.28). Definiendo

$$L(q', \dot{q}', t') - L[q, \dot{q}, t] \equiv \delta L,$$

al tomar la ecuación (2.28), teniendo en cuenta la expansión de Taylor y despreciando términos cuadráticos en  $\delta q$ ,  $\delta \dot{q}$  y  $\delta t$ , la ecuación (2.32), se convierte en

$$\delta L = -L(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta t - \frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t), \quad (2.33)$$

por otro lado, dado que estamos escribiendo  $L$  en función de  $q, \dot{q}, t$  la regla de la cadena para  $\delta L$  nos da

$$\delta L = \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t, \quad (2.34)$$

igualando las ecuaciones (2.33) con (2.34) y usando (2.29) resulta:

$$\sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \right] \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \left[ L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] \frac{d}{dt} \delta t = -\frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t), \quad (2.35)$$

la ecuación (2.29) describe la condición que un  $\delta \Omega$  debe cumplir para un Lagrangiano dado, a fin de que las ecuaciones de movimiento (2.20), permanezcan invariantes ante una transformación infinitesimal dada por la ecuación (2.28) [14]. El problema se reduce usualmente a la existencia (o no existencia) de una solución para la función  $\Omega$  en la ecuación (2.35) para una transformación específica de la forma ecuación (2.28). En particular, si se cumplen las condiciones

$$\frac{d(\delta \Omega)}{dt} = 0, \quad \frac{d(\delta t)}{dt} = 0, \quad (2.36)$$

entonces la ecuación (2.33) nos lleva a que  $\delta L = 0$  [14]. Por tanto, bajo estas condiciones la función Lagrangiana misma permanecería invariante bajo la transformación de coordenadas. Si la ecuación (2.35) se satisface, entonces al usar las ecuaciones de movimiento, se obtiene

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \right] \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \left[ L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] \frac{d}{dt} \delta t = -\frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t). \quad (2.37)$$

Al realizar cálculos de factorización, derivadas, usando la regla de la cadena para  $\frac{dL}{dt}$  y las ecuaciones de Lagrange, se evalúa el término proporcional a  $\delta t$ , por tanto la ecuación (2.37) queda

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t + \delta \Omega(q, t) \right\} = 0,$$

es decir que la cantidad

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t + \delta \Omega(q, t) = Cte, \quad (2.38)$$

es una constante o cantidad conservada (integral de movimiento) [14]. En síntesis, si para una transformación específica de coordenadas de la forma de la ecuación (2.28), existe un valor de  $\delta \Omega(q, t)$  que satisfaga la ecuación (2.35), dicho valor de  $\delta \Omega$  nos conducirá a una constante de movimiento de la forma (2.38). Recordemos que la condición de la ecuación (2.35) equivale a la invarianza de las ecuaciones de movimiento ante la transformación de la ecuación (2.28) [14].

## 2.4. Relatividad Especial

La teoría de la relatividad especial se refiere al marco teórico basado en el principio de la relatividad de Einstein. En la mecánica Newtoniana, se tiene el espacio y el tiempo como dos entidades distintas y el tiempo es el mismo para todos los observadores. Esta configuración se rompe cuando se impone que las interacciones no se propagan instantáneamente con velocidad infinita. En la relatividad especial se tiene el espacio-tiempo como escenario natural para la descripción de los fenómenos físicos [15, 16].

### 2.4.1. Principio de la Relatividad de Einstein

Los experimentos apoyan la validez del Principio Especial de Relatividad, es decir, que las leyes de la física tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. Un supuesto clave de la mecánica Newtoniana es que las interacciones se propagan con velocidad infinita. Sin embargo, los experimentos demuestran que no hay interacciones que se propaguen con velocidad infinita. La velocidad de la luz es muy alta en comparación con las velocidades típicas de los objetos que nos rodean, pero sigue siendo finita. El ingrediente crucial para ir más allá de la mecánica Newtoniana es constatar que existe una velocidad máxima para la propagación de las

interacciones. *El principio de Relatividad de Einstein* dice [15, 16]

### El principio de la Relatividad de Einstein

1. El Principio Especial de la Relatividad es válido.
2. La velocidad de la luz en el vacío es la velocidad máxima para la propagación de las interacciones.

La mecánica Newtoniana es claramente incoherente con el Principio de Relatividad de Einstein, ya que si la velocidad de propagación de las interacciones fuera finita, su valor debería cambiar en diferentes marcos de referencia. En la mecánica Newtoniana existe un tiempo absoluto que es válido para todos los sistemas de referencia. Sin embargo, la existencia de un tiempo absoluto válido para todos los marcos de referencia es inconsistente con el Principio de Relatividad de Einstein [15, 16].

#### 2.4.2. El espacio-tiempo de Minkowski

En la relatividad especial es útil introducir el concepto de espacio-tiempo, donde las coordenadas espaciales y las coordenadas temporales se convierten en las coordenadas del espacio-tiempo. Cada punto del espacio-tiempo es un acontecimiento, porque representa efectivamente un suceso que ocurre en un punto particular del espacio y en un momento determinado. El elemento de línea puede escribirse como [1, 2, 15, 16]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.39)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la *métrica de Minkowski* y se lee

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

El *espacio-tiempo de Minkowski* de  $n$  dimensiones puede identificarse con  $\mathbb{M}^n$  con la métrica  $g_{\mu\nu}$ . El espacio-tiempo de Minkowski es el espacio de la mecánica relativista como el espacio euclidiano es el espacio de la mecánica Newtoniana [1, 2, 15, 16].

#### 2.4.3. Transformación de Lorentz

Ahora se va a encontrar la contra parte relativista de las transformaciones de Galileanas, es decir, aquellas transformaciones que conectan las coordenadas de dos marcos de referencia inerciales que difieren sólo por el movimiento relativo constante

y son consistentes con el Principio de Relatividad de Einstein. Sea  $\Lambda^\mu{}_\nu$  la matriz que conecta los dos sistemas de referencia inerciales, es decir [1, 2, 15, 16]

$$dx^\mu \longrightarrow dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu, \quad (2.41)$$

tenemos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \longrightarrow ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu, \quad (2.42)$$

porque la forma del tensor métrico no puede cambiar, y por tanto nos encontramos con la siguiente condición que debe satisfacer la transformación  $\Lambda^\mu{}_\nu$

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\rho\sigma}, \quad (2.43)$$

la expresión para  $\Lambda^\mu{}_\nu$

$$\Lambda_{x^\mu}{}_{x^\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Consideremos ahora la trayectoria de una partícula [1, 2, 15, 16]. Las coordenadas cartesianas de la partícula en el primer sistema de referencia inercial son  $(ct, x, y, z)$ . En el segundo sistema de referencia inercial, las coordenadas cartesianas de la partícula son  $(ct', x', y', z')$ . Los desplazamientos infinitesimales de la partícula en los dos sistemas de coordenadas están relacionados por las siguientes ecuaciones [1, 2, 15, 16]

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma dt - \frac{\gamma v}{c^2} dx, \\ dx' &= -\gamma v dt + \gamma dx, \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Las transformaciones que conectan dos sistemas de referencia inerciales que sólo se diferencian por un movimiento relativo constante se denominan *Transformaciones de Lorentz* o *boosts de Lorentz*, en el apéndice A se realizan los cálculos con mayor detalle. Son la generalización relativista de las transformaciones Galileanas. Las transformaciones de Lorentz con las rotaciones espaciales forman un grupo, que se llama *grupo de Lorentz*. Si se añaden las traslaciones al grupo de Lorentz, tenemos el *grupo de Poincaré*, que es la contrapartida en la relatividad especial del grupo Galileano en la mecánica Newtoniana [1, 2, 15, 16].

#### 2.4.4. Mecánica Relativista

La mecánica relativista es la mecánica basada en el Principio de Relatividad de Einstein. Se reduce a la mecánica en el límite  $c \rightarrow \infty$ . Considerando la notación tensorial en el apéndice A, [1, 2, 15, 16].

#### 2.4.5. Acción de una Partícula Libre

En la mecánica Newtoniana, la Lagrangiana de una partícula puntual libre es simplemente la energía cinética de la partícula y viene dada [1, 2, 15, 16]

$$L = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad (2.46)$$

donde  $g_{ij}$  es el tensor métrico. Nótese que las ecuaciones geodésicas se pueden obtener incluso si aplicamos el Principio de mínima acción a la longitud de la trayectoria de la partícula

$$\ell = \int_{\Gamma} dl = \int_{\Gamma} \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} dt. \quad (2.47)$$

La generalización relativista natural de la ecuación (2.46), [1, 2, 15, 16]

$$L = \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (2.48)$$

Al buscar ahora la contrapartida de las ecuaciones (2.47), su generalización natural es

$$\ell = \int_{\Gamma} \sqrt{-ds^2}, \quad (2.49)$$

ahora  $\Gamma$  es una curva en el espacio-tiempo de  $(n + 1)$  dimensiones, los puntos inicial y final son dos eventos del espacio-tiempo, y  $ds$  es el elementos de línea del espacio-tiempo [15, 16]. Al parametrizar la trayectoria de la partícula con la coordenada temporal  $t$ ; a partir de la ecuación (2.49), la acción de la partícula libre debe tener la siguiente forma

$$S = K \int_{\Gamma} \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} dt, \quad (2.50)$$

es fácil ver que  $K = -mc$  para recuperar el límite Newtoniano correcto, donde  $m$  es la masa de la partícula y  $c$  es la velocidad de la luz, el Lagrangiano es

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2. \quad (2.51)$$

El término  $-mc^2$  es una constante y por tanto no juega ningún papel en las ecuaciones de movimiento, el segundo término es la energía cinética Newtoniana [15–17].

### 2.4.6. Momento y Energía

El momento conjugado de la partícula [15–17] es

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = m\dot{x}_\mu, \quad (2.52)$$

el cuadri-momento es  $p^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu$ . Se tiene la conservación de la masa de la partícula

$$p^\mu p_\mu = -m^2c^2, \quad (2.53)$$

las componentes espaciales de la cuadrivelocidad son, el vector velocidad de la mecánica Newtoniana multiplicado por  $\gamma$  (recordando que  $x^0 = ct$ )

$$\dot{x}^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}), \quad (2.54)$$

se puede escribir las componentes de  $p^\mu$

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{v}), \quad (2.55)$$

al escribir el cuadri-momento con índices inferiores tenemos [15–17]  $p_\mu = \left( \frac{-E}{c}, \mathbf{p} \right)$ . La conservación en la ecuación (2.53) se convierte en

$$E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2. \quad (2.56)$$

Si una partícula esta en reposo  $\mathbf{p} = 0$ , se encuentra la muy célebre formula

$$E = mc^2. \quad (2.57)$$

## 2.5. Presentación Covariante de la Electrodinámica

La electrodinámica está formalmente contenida en las ecuaciones de Maxwell [17, 18]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.58)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.60)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.61)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (2.62)$$

La relatividad especial le da al electromagnetismo una apariencia interesante. Sin embargo, es justo advertir que la relatividad no afecta esencialmente la estructura formal de la teoría electromagnética. Dicho en otras palabras, la electrodinámica es covariante bajo las transformaciones entre observadores inerciales. Las cuatro ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz son covariantes. Conviene formular la electrodinámica utilizando otras ecuaciones, equivalentes a las cinco mencionadas que sean manifiestamente covariantes [17, 18].

### 2.5.1. El cuadripotencial $A^\mu$

Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son enteramente suficientes para describir el campo electromagnético. Sin embargo, para darle a la electrodinámica una escritura manifiestamente covariante, se pueden abandonar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , expresándolos en términos de otros campos  $\phi$  y  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.64)$$

sin embargo, la relación entre  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  y  $(\phi, \mathbf{A})$  no es uno a uno, ya que para describir a  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  hay un número infinito de operaciones  $(\phi, \mathbf{A})$  [17, 18]. Esto es lo que se espera, ya que los campos  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  se producen como derivadas de los campos  $(\phi, \mathbf{A})$ , o sea que a los  $(\phi, \mathbf{A})$  se les puede agregar términos sin afectar sus derivadas. En efecto, utilizando cualquier función derivable  $\chi$  se puede producir unos nuevos campos  $(\phi', \mathbf{A}')$  equivalentes a  $(\phi, \mathbf{A})$ , así

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad (2.66)$$

es decir, los campos  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  se pueden calcular, bien sea con  $(\phi, \mathbf{A})$  o con  $(\phi', \mathbf{A}')$ , se tiene una cierta libertad en la escogencia, que recibe el nombre de *libertad gauge* [17, 18]. Para describir un campo electromagnético se puede usar las variables  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$

o las variables  $(\phi, \mathbf{A})$ . Como se quiere una expresión manifiestamente covariante de la electrodinámica, se debe buscar una condición de gauge covariante. Considerando la condición de gauge de Lorentz.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.67)$$

a primera vista esta ecuación no parece covariante, pero al definir cuadri-vector Potencial

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad (2.68)$$

la ecuación (2.67) se escribe

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.69)$$

en general, cuando se necesite una formulación manifiestamente covariante se puede usar el gauge de Lorentz [17, 18].

### 2.5.2. Las dos ecuaciones de Maxwell

Al reemplazar las ecuaciones (2.63) y (2.64) en las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell, se obtiene [17, 18]

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} + \nabla^2 \phi = -4\pi\rho, \quad (2.70)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (2.71)$$

En estas dos ecuaciones las variables  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  están acopladas de una manera complicada. Pero ellas se pueden desacoplar muy fácilmente; en efecto, si se utiliza el gauge de Lorentz, las dos ecuaciones (2.70) y (2.71) queden así

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \nabla^2 \phi = -4\pi\rho, \quad (2.72)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.73)$$

las ecuaciones de movimiento de  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  están desacopladas y, además, tiene una simetría evidente [17, 18]. Por ende las ecuaciones se escriben

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \phi &= 4\pi\rho, \\ \partial^\mu \partial_\mu \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

dado que el cuadvivector contravariante que combina densidad de carga eléctrica  $\rho$  y densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ ,  $J^\mu = (\rho c, \mathbf{J})$ , resulta

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (2.75)$$

Esta ecuación expresa las dos ecuaciones inhomogéneas de Maxwell de manera manifiestamente covariante [17, 18].

### 2.5.3. La Fuerza de Lorentz

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.63) y (2.64), al des componerlas, resulta [17, 18]

$$\begin{aligned} E_x &= -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0), & B_x &= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2), \\ E_y &= -(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0), & B_y &= -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3), \\ E_z &= -(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0), & B_z &= -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1), \end{aligned} \quad (2.76)$$

considerando la fuerza de lorentz en sus componentes, se obtiene

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{q}{c} (cE_x + v_y B_z - v_z B_y), \quad (2.77)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{q}{c} (cE_y + v_z B_x - v_x B_z), \quad (2.78)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{q}{c} (cE_z + v_x B_y - v_y B_x), \quad (2.79)$$

considerando la quadri-velocidad (2.54), se puede escribir de manera general como

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) V_\nu. \quad (2.80)$$

En conclusión con la condición de gauge de Lorentz, las ecuaciones de la electrodinámica manifiestamente covariante son (2.75) y (2.80). La conexión entre  $A^\mu$  y los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  está en (2.63) y (2.64) [17, 18].

### 2.5.4. El tensor Electromagnético

La teoría electrodinámica esta escrita de modo manifiestamente covariante, el cual era el principal objetivo, pero conviene presentar un nuevo tensor  $F^{\mu\nu}$  que trae ventajas en el estudio de las leyes de conservación y la formulación Lagrangiana. Las ecuaciones (2.75) y (2.80) sugieren decididamente que se defina la cantidad

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.81)$$

entonces  $F^{\mu\nu}$  se le conoce como el *tensor electromagnético*. En forma matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Ahora se pasara a expresar las ecuaciones de la electrodinámica en términos del nuevo tensor  $F^{\mu\nu}$  [17, 18].

**Las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell**, se expresan mediante la ecuación [17, 18]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (2.83)$$

**Las ecuaciones homogéneas de Maxwell**, por la definición del tensor  $F^{\mu\nu}$  es claro que [17, 18]

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} = 0. \quad (2.84)$$

**La Fuerza de Lorentz**, en la ecuación (2.80) se sustituye la definición del tensor electromagnético [17, 18]

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} V_\nu. \quad (2.85)$$

## 2.6. Teoría Clásica de Campos

### 2.6.1. Formalismo Lagrangiano para Campos

El formalismo Lagrangiano y el principio de mínima acción puede extenderse a la descripción de Campos (por ejemplo, campos escalares, campo electromagnético, campo gravitatorio, etc). Ahora la variable que describe la configuración del campo es una cantidad (escalar, vectorial o tensor) que tiene algún valor en cada punto del espacio-tiempo. Al considerar un sistema cuyos estados están especificados por

$n$  variables de campo  $\phi_a(x)$ ,  $a = 1, \dots, n$ . Estos campos pueden ser funciones reales o complejas, escalares, vectoriales, espinorales o tensoriales del espacio-tiempo [18, 19].

Suponiendo que el comportamiento del sistema, se rige por la acción

$$S = \int_{\mathcal{U}} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi), \quad (2.86)$$

donde  $\mathcal{U}$  es un dominio delimitado por las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  que se extienden hasta el infinito [18, 19]. El escalar  $\mathcal{L}$ , llamado *densidad Lagrangiana*, o *Lagrangiano* para abreviar, es una función local de los campos y sus primeras derivadas. Por analogía con la mecánica, se define la variación del campo local

$$\delta\phi_a = \phi'_a(x) - \phi_a(x), \quad (2.87)$$

que se refiere al cambio de una configuración de campo determinada a otra vecina. La variación total del campo se define por

$$\Delta\phi_a = \phi'_a(x') - \phi_a(x), \quad (2.88)$$

donde las coordenadas espacio-tiempo difieren entre si en una cantidad infinitesimal [18, 19]

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu}. \quad (2.89)$$

Teniendo en cuenta la variación del campo y el teorema fundamental del calculo

$$\Delta\phi = \delta(x) + \Delta x^{\mu} \partial_{\mu} \phi, \quad (2.90)$$

donde el último término puede considerarse como una deformación de la configuración del campo fijo en respuesta al cambio de variables del espacio-tiempo de la ecuación (2.89). Suponiendo que la forma funcional de  $\mathcal{L}$  no cambia con estas variaciones de  $\phi$  y  $x$ . Entonces la correspondiente variación del Lagrangiano tiene la forma [18, 19]

$$\Delta\mathcal{L} = (\partial_{\mu}\mathcal{L})\Delta x^{\mu} + \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)} \delta\phi_a \right] + \varepsilon^a \delta\phi_a, \quad (2.91)$$

aquí,  $\partial_{\mu}\mathcal{L}$  es la derivada parcial completa con respecto a  $x^{\mu}$ , es decir, incluyendo la dependencia implícita de  $x^{\mu}$  de los campos

$$\partial_{\mu}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \partial_{\mu}\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi_a)} \partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_a, \quad (2.92)$$

y  $\varepsilon^a$  es la Euleriana asociada a la variación con respecto a  $\phi_a$  [18, 19]

$$\varepsilon^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right]. \quad (2.93)$$

La variación total de la acción es

$$\Delta S = \int_{\mathcal{U}'} d^4 x' \mathcal{L}'(\phi', \partial \phi') - \int_{\mathcal{U}} d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial \phi), \quad (2.94)$$

donde

$$d^4 x' = \det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) d^4 x, \quad (2.95)$$

la relación entre las medidas de volumen  $d^4 x'$  y  $d^4 x$ , se determina a partir del Jacobiano de transformación

$$\det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) = 1 + \partial_0 \Delta x^0 + \partial_1 \Delta x^1 + \partial_2 \Delta x^2 + \partial_3 \Delta x^3 = 1 + \partial_\mu \Delta x^\mu, \quad (2.96)$$

se obtiene

$$\Delta S = \int_{\mathcal{U}} d^4 x [\Delta \mathcal{L} + \partial_\mu \Delta x^\mu \mathcal{L}]. \quad (2.97)$$

Combinando la ecuación (2.91) con (2.97) y reordenamos términos

$$\Delta S = \int_{\mathcal{U}} d^4 x [\partial_\mu (\mathcal{L} \Delta x^\mu + \pi_a^\mu \delta \phi_a) + \varepsilon^a \delta \phi_a], \quad (2.98)$$

donde  $\pi_a^\mu$  es el *momento* conjugado a la variante de campo  $\phi_a$  [18, 19]

$$\pi_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)}. \quad (2.99)$$

Si el integrando cae lo suficientemente rápido como  $|x| \rightarrow \infty$ , entonces, aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradskil, se obtiene

$$\Delta S = Q(\Sigma_2) - Q(\Sigma_1) + \int_{\mathcal{U}} d^4 x \varepsilon^a \delta \phi_a, \quad (2.100)$$

las integrales de superficie pueden transformarse utilizando la ecuación (2.90)

$$Q(\Sigma_i) = \int_{\Sigma_i} d\sigma_\mu [\pi_a^\mu \Delta \phi_a - \theta^\mu{}_\nu \Delta x^\nu], \quad (2.101)$$

la cantidad

$$\theta^\mu{}_\nu = \pi_a^\mu \partial_\nu \phi_a - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (2.102)$$

se conoce como el *tensor de tensión-energía canónico* [18,19]. Ahora especializamos estas observaciones generales al caso de que las superficies límite  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  sean fijas, y la variación total del campo desaparezca en  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Para tales variaciones, las integrales de superficie de la ecuación (2.101) son cero. En este contexto, se formula el *principio de acción*: la configuración real del campo hace que la acción sea extrema,  $\Delta S = 0$ . De la ecuación (2.100) se reduce que [18,19]

$$\int_{\mathcal{U}} d^4x \varepsilon^a \delta\phi_a = 0, \quad (2.103)$$

teniendo en cuenta que  $\delta\phi_a$  son funciones infinitesimales arbitrarias, se concluye que las configuraciones reales del campo son soluciones de las *ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\varepsilon^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right] = 0. \quad (2.104)$$

Los campos  $\phi_a$  que obedecen a las ecuaciones de Euler-Lagrange hacen que la acción sea un extremo, de ahí el nombre de *extremales*. En resumen, se ha obtenido las ecuaciones diferenciales parciales (2.104) que rigen el comportamiento de los sistemas de campo. En la teoría de campos, estas ecuaciones son la generalización de la ecuaciones de Euler-Lagrange, se denominan *ecuaciones de campo*. Se supone que todas las propiedades esenciales de un sistema dado están codificadas en el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  [18,19].

## 2.6.2. Teorema de Noether

El teorema de Noether visto en la sección 2.3.2, es muy importante en el campo de la física. Ahora se vera aplicado a la teoría de campos. Considerando las siguientes tiene las siguientes transformaciones [18,19]

$$\Delta x^\mu = \Gamma^\mu_k(x) \epsilon^k, \quad (2.105)$$

$$\Delta \phi_a = G_{ka}(x, \phi) \epsilon^k, \quad (2.106)$$

sea un grupo de transformaciones infinitesimales que dependen de  $p$  parámetros  $\epsilon^k, k = 1, \dots, p$  siendo  $\Gamma^\mu_k$  generadores del grupo y los  $G_{ka}$  representaciones de estos generadores que actúan sobre  $\phi_a$ . Suponiendo que la acción es invariante bajo las transformaciones infinitesimales de las ecuaciones (2.105) y (2.106), que se llaman *transformaciones de simetría* [18,19]. Considerando,  $\varepsilon^a = 0$ , en la ecuación (2.100), se tiene

$$Q_k = \int_{\Sigma_i} d\sigma_\mu [\pi_a^\mu G_{ka} - \theta^\mu_\nu \Gamma^\mu_k] = cte. \quad (2.107)$$

En particular  $Q_k$  no se ve afectado por desplazamientos de  $\Sigma$  en direcciones temporales. Ahora *el primer teorema de Noether dice*: la invariancia de la acción  $\Delta S = 0$  bajo un grupo continuo de transformaciones de  $p$  parámetros (2.105) y (2.106) implica  $p$  leyes de conservación globales para las cantidades integrales  $Q_k$ . La ecuación (2.107), que expresan  $p$  leyes de conservación globales, son equivalentes a un conjunto de  $p$  ecuaciones de continuidad [18, 19].

Usando el teorema de Green para pasar de una integral de superficie a una integral de volumen, se tiene

$$\partial_\mu \mathcal{N}_k^\mu = 0 \quad k = 1, \dots, p, \quad (2.108)$$

donde  $\mathcal{N}_k^\mu$ , llamada *Corriente de Noether*, se define por

$$\mathcal{N}_k^\mu = \pi_a^\mu G_{ka} - \theta^\mu{}_\nu \Gamma_k^\nu, \quad (2.109)$$

otro nombre para la ecuación (2.108) es el de *leyes locales de conservación*. es decir, tenemos una corriente  $\mathcal{N}_k^\mu$  conservada [18, 19].

A continuación se vera algunos ejemplos de Lagrangiano, primero tomamos un campo escalar real  $\phi$ . La densidad Lagrangiana invariante de lorentz más sencillo es cuadrático en  $\phi$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_a \phi)(\partial^a \phi) - \frac{\mu^2}{2}\phi^2, \quad (2.110)$$

teniendo en cuenta que la integración parcial de la acción no cambia las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden reescribir (2.110) como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\square + \mu^2)\phi, \quad (2.111)$$

es evidente que la ecuación de Euler-Lagrange resultante de (2.111) es la *ecuación de Klein-Gordon* [18–20]

$$(\square + \mu^2)\phi = 0. \quad (2.112)$$

Lo siguiente en orden de complejidad a los escalares son los espinores de Dirac. Sea  $\psi$  un campo espinor complejo, y  $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$  el conjugado de Dirac de  $\psi$ . Las combinaciones covariantes bilineales más simples de estos campos son  $\bar{\psi}\psi$  y  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Los empleamos para construir el Lagrangiano [18–20]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.113)$$

en lugar de variar por separado las partes real e imaginaria del campo de Dirac de valor complejo  $\psi$ , consideramos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  como dos campos independientes. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\psi$  son las siguientes

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.114)$$

esta ecuación se denomina ecuación de Dirac, gobierna un campo libre de espín  $\frac{1}{2}$  [18–20]. Para  $\bar{\psi}$ , se obtiene

$$\bar{\psi} \left( i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0. \quad (2.115)$$

Una comparación entre (2.111) y (2.112), o entre (2.113) y (2.114), nos indica como se puede reproducir directamente la Lagrangiana de un campo libre a partir de la ecuación de campo [18–20].

Al aplicar  $i\gamma^\mu \partial_\mu + m$  a la izquierda de la ecuación (2.114) y teniendo en cuenta las relaciones de anti conmutación para las matrices de Dirac [18–20]

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (2.116)$$

se obtiene

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (2.117)$$

donde,  $m$  representa la masa del campo de Dirac  $\psi$ . Un Lagrangiano adecuado para el campo electromagnético se puede escribir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu, \quad (2.118)$$

al calcular las ecuaciones de campos, se obtiene

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (2.119)$$

dada una  $\mathcal{L}$  tal que sus ecuaciones de Euler-Lagrange coincidan con las ecuaciones de movimiento, que en este caso son las ecuaciones de Maxwell [1, 2, 18–20].

## Capítulo 3. Fundamentos Algebraicos

### 3.1. Simetrías

La simetría es cada vez más importante en las ciencias modernas. ¿Qué es la simetría? A menudo se dice que un triángulo escaleno es asimétrico, un triángulo isósceles y un triángulo regular son más simétricos, y un círculo es el más simétrico de todos. El concepto de simetría está ligado a las transformaciones. Una transformación que preserva el invariante del sistema se llama transformación simétrica del sistema. La simetría de un sistema se describe por el conjunto de todas sus transformaciones simétricas. La transformación idéntica que preserva cualquier invariante es una transformación simétrica trivial de cualquier sistema. Un triángulo escaleno no es invariante en ninguna transformación excepto en la transformación idéntica. Un triángulo isósceles es invariante en la reflexión respecto al plano bisectriz perpendicular a su arista inferior. Un triángulo regular es invariante en tres reflexiones respecto al plano bisectriz perpendicular a sus aristas y en las rotaciones por  $\frac{2\pi}{3}$  alrededor del eje perpendicular al triángulo en su centro. Una circunferencia es invariante en cualquier plano perpendicular que contenga su diámetro y en cualquier rotación alrededor del eje perpendicular a la circunferencia en su centro [21–28].

### 3.2. Teoría de grupos

La teoría de grupos proporciona el lenguaje adecuado para formular y desarrollar los principios de simetría inherentes a la física. La teoría de grupos trata de desarrollar esos aspectos universales que presentan todos los sistemas que contienen simetrías de naturaleza análoga. Se trata, por tanto, de un conocimiento fundamental para poder resolver un enorme conjunto de problemas de la física. En el marco de la teoría de grupos juega un rol fundamental la llamada teoría de representaciones, la que permite clasificar los objetos físicos según la simetría que subyace al sistema de interés. La teoría de grupos es un campo muy amplio y haciendo uso de tal extensión en este trabajo de profundización se va a hacer uso de diferentes campos de acción en la física de partículas que se mostraran a continuación de una manera rápida esperando que

las temáticas más esenciales para el desarrollo de este se puedan desarrollar a lo largo del trabajo de grado [21–28].

### 3.2.1. Concepto de grupo

**Definición:** Se dice que un conjunto  $G$  forma un grupo si hay una operación, llamada multiplicación de grupo, de la forma  $\cdot$ , que asocia cualquier par dado (ordenado) de elementos  $a, b \in G$  con un producto bien definido  $a \cdot b$  que también es un elemento de  $G$ , de manera que se satisfacen las siguientes condiciones [21–23]

- La operación punto es asociativa, es decir,  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  para todo  $a, b, c \in G$ .
- Entre los elementos de  $G$ , hay un elemento  $e$ , llamado identidad, que tiene la propiedad de que  $a \cdot e = a$  para todo  $a \in G$ .
- Para cada  $a \in G$ , hay un elemento  $a^{-1} \in G$ , llamado inverso de  $a$ , que tiene la propiedad de que  $a \cdot a^{-1} = e$ .

Las tres condiciones anteriores son esenciales. De estos axiomas, se pueden generar consecuencias útiles y elementales tales como:  $e^{-1} = e$ ;  $a^{-1} \cdot a = e$  y  $e \cdot a = a$ , para todo  $a \in G$  [21–28].

### 3.2.2. Subgrupos

**Definición:** Se dice que un subconjunto de un grupo  $G$  que forma un grupo bajo la misma ley de multiplicación que  $G$  forma un subgrupo de  $G$  [23].

Es importante mencionar también que, forman subgrupos cualquier conjunto de matrices  $n \times n$  invertibles, que incluye la matriz unitaria, y que se cierra mediante la multiplicación de matrices. Estos forman también grupos de matrices. Algunos ejemplos importantes son:

- El grupo lineal general  $GL(n)$  que consta de todas las matrices  $n \times n$  invertibles [23].
- Grupo unitario  $U(n)$  que consta de todas las matrices unitarias, es decir, matrices  $U$ ,  $n \times n$  que satisfacen  $UU^\dagger = 1$  [23].
- El grupo unitario especial  $SU(n)$  que consiste de matrices unitarias con determinante unitario [23].
- El grupo ortogonal  $O(n)$  que consta de matrices ortogonales reales, o matrices reales  $n \times n$  matrices reales que satisfacen  $OO^T = 1$  [23].

### 3.2.3. Homomorfismo e isomorfismo

Un mapeo  $f : G \rightarrow G'$  de un grupo  $G$  en el grupo  $G'$  se denomina homomorfismo si conserva la estructura multiplicativa de  $G$ , es decir, sí  $f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2)$ . Claramente, este requisito implica que  $f(I) = I$  (más estrictamente hablando, la identidad de  $G$  se asigna a la identidad de  $G'$ ). Un homomorfismo se convierte en isomorfismo si el mapeo es uno a uno y sobre [21–28].

## 3.3. Grupos finitos

### 3.3.1. Grupos de permutación

Estos grupos tienen una importancia considerable en la mecánica cuántica de las partículas idénticas. Consideremos un sistema de  $n$  objetos idénticos. Si intercambiamos dos o más de estos objetos, la configuración resultante es indistinguible de la original. Podemos considerar cada intercambio como una transformación del sistema y entonces todas esas posibles transformaciones forman un grupo bajo el cual el sistema es invariante. Como hay en total  $n!$  permutaciones sobre  $n$  objetos, el grupo tiene orden  $n!$ . Se conoce como el grupo de permutaciones de  $n$  objetos o el grupo simétrico de grado  $n$  y se suele denotar por  $S_n$  [21–28].

Como suele ocurrir en matemáticas y física, una buena notación es la mitad de la batalla. Para ser específico, considere  $S_5$ . Un elemento “típico” podría ser

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

esto denota una permutación que toma  $1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 5, 4 \rightarrow 2$  y  $5 \rightarrow 3$ , es decir, una permutación que permuta cíclicamente  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  e intercambia  $3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ . Generalmente se usa una notación más compacta:  $g = (142)(35)$  [23–25]. La permutación  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  se conoce como ciclo de longitud  $k$  y permuta cíclicamente  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \cdots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$ . Un ciclo de longitud 2 se llama transposición, o más informalmente, intercambio. En el ejemplo anterior,  $(35)$  intercambia 3 y 5. Además, un teorema de Cayley establece que cualquier grupo finito  $G$  con  $n$  elementos es isomorfo (es decir, idéntico) a un subgrupo de  $S_n$  [21–28].

### 3.3.2. Clases de equivalencia

Dado un grupo  $G$ , los distintos elementos del grupo, no son los mismo, pero existe la sensación de que algunos elementos del grupo pueden ser esencialmente los mismos [21–24]. En un grupo  $G$ , dos elementos  $g$  y  $g'$  son equivalentes si existe otro elemento  $f$  tal que:

$$g' = f^{-1} g f, \tag{3.2}$$

cuando exista tal relación entre los dos elementos, se dice que son elementos conjugados. La operación  $g \rightarrow g'$  se llama transformación de semejanza lineal [23].

Dado que la equivalencia es transitiva (el amigo de un amigo es un amigo), es decir  $g \sim g'$  y  $g' \sim g''$  implica que  $g \sim g''$ , se puede reunir todos los elementos equivalentes en una clase de equivalencia. El número de elementos en una clase de equivalencia  $c$  dada, denotado por  $n_c$ , juega un papel crucial en la teoría de las representaciones [21–28].

### 3.3.3. Subgrupo invariante

De lo anterior, se sabe que es un subgrupo, pero ahora se desea hablar de un tipo de subgrupo muy especial, conocido como subgrupo invariante. Sea  $H$ , que consta de elementos  $h_1, h_2, h_3, \dots$ , sea un subgrupo de  $G$ . Tome cualquier elemento  $g$  que no esté en  $H$ . Entonces el conjunto de elementos  $g^{-1}h_1g, g^{-1}h_2g, g^{-1}h_3g, \dots$  forma un subgrupo, que naturalmente se denota por  $g^{-1}Hg$ . En general, los subgrupos  $H$  y  $g^{-1}Hg$  son distintos [2, 21, 23, 24].

Pero si  $H$  y  $g^{-1}Hg$  son iguales para todos  $g \in G$  (haciendo énfasis en “todos”), entonces  $H$  se llama un subgrupo invariante. En otras palabras,  $H$  es invariante si las dos listas  $h_1, h_2, h_3, \dots$  y  $g^{-1}h_1g, g^{-1}h_2g, g^{-1}h_3g, \dots$  son iguales para cualquier  $g$ . En otras palabras, las transformaciones de similitud generadas por los elementos del grupo  $G$  dejan a  $H$  sin cambios, (informalmente se dice que un subgrupo invariante también se conoce como un subgrupo normal) [21–28].

## 3.4. Teoría de representaciones

Las representaciones son herramientas que permiten entender la estructura algebraica de un grupo dejándolo actuar sobre un espacio vectorial. Esta idea a priori abstracta goza de gran aplicación práctica en varias ramas de la física. El interés en la teoría de grupos, por tanto, se centra en la realización de transformaciones de grupos como transformaciones lineales en espacios vectoriales de la física clásica y cuántica [21–28].

La noción de representar elementos de un grupo mediante matrices es tanto natural como intuitiva. Sea  $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$  un grupo finito de orden  $d$  con un elemento identidad. Sea  $D = \{D(g_1), D(g_2), D(g_3), \dots\}$  sea una colección de matrices cuadradas no singulares, todas del mismo orden, que tenga la propiedad [23–25]

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2), \quad (3.3)$$

para cualquier par de elementos  $g_1$  y  $g_2$ . Se dice que la matriz  $D(g)$  representa el elemento  $g$ , y el conjunto de matrices  $D(g)$  para todo  $g$  de  $G$  proporciona una representación de  $G$  [23, 24]. El tamaño de las matrices,  $d$ , se conoce como la dimensión de la representación. El producto  $g_1g_2$  de dos elementos de grupo  $g_1$  y  $g_2$  está representado por el producto de las matrices que representan  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente [21–28].

### 3.4.1. Carácter

Dada una representación  $D^{(r)}(g)$ , (la matriz que representa el elemento  $g$  en la representación  $r$ ) ella define el concepto importante del carácter  $\chi^{(r)}$  de la representación a través de [21, 23–25]

$$\chi^{(r)}(g) \equiv \text{tr } D^{(r)}(g), \quad (3.4)$$

el carácter, como su nombre indica, ayuda a caracterizar la representación. Nominalmente, el carácter depende de  $r$  y  $g$ . Sin embargo, recuerde que los elementos de un grupo se pueden dividir en clases de equivalencia. Dos elementos  $g_1$  y  $g_2$  son equivalentes ( $g_1 \sim g_2$ ) si existe otro elemento  $f$  tal que

$$g_1 = f^{-1} g_2 f, \quad (3.5)$$

en otras palabras, si  $g_1 \sim g_2$ , entonces  $\chi^{(r)}(g_1) = \chi^{(r)}(g_2)$ . Así,  $\chi^{(r)}(c) = \text{tr } D^{(r)}(g)$  para  $g \in c$ . Aquí  $c$  denota la clase de equivalencia de la que el elemento  $g$  es miembro. La traza del lado derecho no depende de  $g$  como tal, sino solo de la clase a la que pertenece  $g$ . Todos los elementos de una clase de equivalencia dada tienen el mismo carácter [21–28].

### 3.4.2. Representaciones equivalentes

Dos representaciones  $D(g)$  y  $D'(g)$  son equivalentes si ellas están relacionadas a través de una transformación semejante. Teniendo en cuenta el álgebra lineal,  $D(g)$  y  $D'(g)$  son esencialmente la misma matriz, solo que, escritas en bases diferentes, donde la matriz  $S$  relaciona un conjunto de vectores básicos con otro. Ósea, que dada una representación  $D(g)$  y una representación  $D'(g)$  la cual está determinada por la ecuación (3.5); ellas están relacionadas a través de una matriz  $S$  cuya inversa esté garantizada. Entonces,  $D'(g)$  es una representación que cumple [23–25]

$$D'(g_1)D'(g_2) = (S^{-1}D(g_1)S)(S^{-1}D(g_2)S) = S^{-1}D(g_1g_2)S = D'(g_1g_2).$$

Tenga en cuenta que es la misma  $S$  para todo  $g$ . Como se puede notar de las diferentes expresiones anteriores, si se tienen dos representaciones, ¿cómo se sabe si son equivalentes o no? La respuesta matemática es, tome la traza de ecuación (3.5) y una vez más usando la ciclicidad de la traza, se obtiene [23–25]

$$\chi'(c) = \text{tr } S D(g) S^{-1} = \text{tr } D(g) S^{-1} S = \text{tr } D(g) = \chi(c), \quad (3.6)$$

donde  $g$  es un miembro de la clase  $c$ . Por lo tanto, si existe alguna clase  $c$  para la cual  $\chi'(c) \neq \chi(c)$ , se puede concluir inmediatamente que las dos representaciones son de hecho diferentes. ¿Qué pasa si  $\chi'(c) = \chi(c)$  para todo  $c$ ? Si esto es válido para sólo uno o dos  $c$ , algunos físicos admitirían que podría ser una coincidencia, pero ¿para todos los  $c$ ? La mayoría de los físicos teóricos “razonables” dirían que esto es una fuerte evidencia circunstancial que indica que las dos representaciones son de hecho iguales [21–28].

### 3.4.3. Representaciones reducibles e irreducibles

Sea la representación  $D = \{D(g_1), D(g_2), D(g_3), \dots\}$  de  $G$

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_{11}(g) & D_{12}(g) \\ 0 & D_{22}(g) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

para todo  $D \in G$  donde  $D_{11}, D_{12}, D_{21}$  y  $0$  tiene dimensiones  $s_1 \times s_1, s_1 \times s_2, s_2 \times s_2$  y  $s_2 \times s_1$  respectivamente [25]. Para cualquier  $g_1 g_2 \in G$ .

$$D(g_1)D(g_2) = \begin{bmatrix} D_{11}(g_1)D_{11}(g_2) & D_{11}(g_1)D_{12}(g_2) + D_{12}(g_1)D_{22}(g_2) \\ 0 & D_{22}(g_1)D_{22}(g_2) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

por lo que, como las matrices  $D(g)$  forman una representación de  $G$ ,

$$D_{11}(g_1 g_2) = D_{11}(g_1)D_{11}(g_2), \quad (3.9)$$

$$D_{22}(g_1 g_2) = D_{22}(g_1)D_{22}(g_2), \quad (3.10)$$

las ecuaciones (3.9) y (3.10) implican que las matrices  $D_{11}(g)$  y las matrices  $D_{22}(g)$  forman ambas representaciones de  $G$ . Así, la representación  $D$  de  $G$  está formada por otras dos representaciones de dimensiones más pequeñas, por lo que es natural describir dicha representación como “reducible” [25, 26]. Para que esta descripción se aplique por igual a todas las representaciones equivalentes, la definición formal puede enunciarse como sigue:

#### Representación reducible

Se dice que una representación de un grupo  $G$  es “reducible” si es equivalente a una representación  $D$  de  $G$  que tiene la forma de la ecuación (3.7) para todo  $g \in G$  [24–26].

## Representación irreducible

Se dice que una representación de un grupo  $G$  es “irreducible” si no es reducible. Esta definición implica que una representación irreducible no puede ser transformada por una transformación de similitud. En consecuencia, el espacio portador de una representación irreducible no tiene ningún subespacio invariante de menor dimensión [24–26].

## 3.5. Grupos y álgebras de Lie

Las temáticas anteriores se centraron en los grupos finitos, que son grupos con muchos elementos finitos o contables. Sin embargo, dado que muchas simetrías físicas son simetrías continuas, se debe pasar de grupos finitos a grupos que puedan expresar estas simetrías continuas. Resulta que hay grupos cuyos elementos están organizados continuamente por algunas funciones continuas y suaves, que son exactamente los grupos de Lie, los cuales son el propósito central de este trabajo [1, 25–28].

### 3.5.1. Grupos de Lie

**Definición:** Un grupo de Lie  $G$  es un grupo que además es una variedad diferenciable de dimensión finita equipada con una estructura diferencial compatible con la operación del grupo, de tal forma que las funciones son regulares [1, 25–28].

Los grupos de Lie más importantes que se pueden analizar son grupos de matrices. Sin embargo, en concreto, se trata de los subgrupos de  $GL(N)$  con entradas reales o complejas que vienen resumidos en la tabla 3.1. Algo que tienen en común todos ellos es que son compactos. Además, todos son conexos salvo  $O(N)$ , que tiene dos componentes conexas: una que contiene la identidad y es isomorfa a  $SO(N)$  y otra que contiene las matrices de determinante 1 [25, 26].

La utilidad de la teoría de grupos es que los grupos representan una forma matemática de realizar cambios en un sistema sin modificar algo sobre el sistema. Por ejemplo, si se consideran tres bolas roja, naranja y amarilla sucesivamente y estas se mueven en su entorno de tal manera que sus posiciones no cambien, entonces, se puede decir que el grupo mantuvo su estructura básica. En este sentido, la teoría de grupos es un estudio de la simetría. No importa cuál de “estas” transformaciones le haga al sistema, “esto” permanece igual: esto es simetría [1, 25–28].

Entonces, la teoría de grupos, y en particular la teoría de grupos de Lie, brinda una forma extremadamente poderosa de comprender y clasificar las simetrías y, por lo tanto, las cargas conservadas. Y debido a que permite comprender las cargas

Nombre	Subgrupo	Definición	Comentario
$O(N)$	$GL_N(\mathbb{R})$	$M^\dagger M = 1$	Grupo ortogonal
$SO(N)$	$GL_N(\mathbb{R})$	$M^\dagger M = 1, \det M = 1$	Grupo espacial ortogonal
$U(N)$	$GL_N(\mathbb{C})$	$M^\dagger M = 1$	Grupo unitario
$SU(N)$	$GL_N(\mathbb{C})$	$M^\dagger M = 1, \det M = 1$	Grupo espacial unitario

Cuadro 3.1: Grupos de Lie notables [1].

conservadas, la teoría de grupos (aparentemente) se puede utilizar para comprender casi la totalidad de la física de nuestro universo [1, 25–28].

### 3.5.2. Generadores

Como se expresó anteriormente, un grupo de Lie es un grupo que está parametrizado por un conjunto de parámetros continuos, que aquí se denominan  $\alpha_i$ , para  $i = 1, \dots, n$  donde  $n$  es el número de parámetros de los que depende el grupo. Los elementos del grupo se denominarán  $g(\alpha_i)$ . Debido a que todos los grupos incluyen un elemento de identidad, se opta por parametrizarlos y se obtiene la representación

$$D_n(g(\alpha_i))|_{\alpha_i=0} = I, \quad (3.11)$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $n \times n$ . Para cualquier representación de dimensión ( $n$ ) que se quiera [1, 25–28]. Ahora si considera que  $\delta\alpha_i$  es muy pequeño ( $\delta\alpha_i \ll 1$ ), entonces  $D_n(g(0 + \delta\alpha_i))$  se puede expandir en series de Taylor donde se obtiene que

$$X_i = -i \left. \frac{\partial D_n}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=0}, \quad (3.12)$$

(aquí se incluye el índice  $i$  para hacer  $X_i$  hermítico, lo cual será conveniente más adelante). Luego, la representación para  $\delta\alpha_i$  infinitesimal es

$$D_n(\delta\alpha_i) = I + i\delta\alpha_i X_i + \dots, \quad (3.13)$$

(donde se ha cambiado la notación  $D_n(g(\alpha))$  a  $D_n(\alpha)$  con el fin de abreviar), donde  $X_i$  son matrices constantes que trataran más adelante [1, 25–28].

Ahora, si se quiere se puede ver la representación para un valor finito de  $\alpha_i$  en lugar de un valor infinitesimal. Una transformación finita será el resultado de un número infinito de transformaciones infinitesimales. En otras palabras,  $\alpha_i = N\delta\alpha_i$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , luego

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\alpha_i}{N} X_i\right)^N = e^{i\alpha_i X_i}, \quad (3.14)$$

a los  $X_i$  se les llama los generadores del grupo, y hay uno para cada parámetro requerido para especificar un elemento particular del grupo [1, 25–28].

Luego, cualquier elemento de un grupo en una representación particular se puede escribir como

$$D_n(\alpha_i) = e^{i\alpha_i X_i}, \quad (3.15)$$

para cualquier grupo (se entiende que el índice  $i$  en el exponente se suma a todos los parámetros y generadores). Toda la representación está completamente definida por los generadores  $X_i$  [1, 25–28].

### 3.5.3. Álgebras de Lie

**Definición:** El álgebra de Lie del grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{R})$  es  $gl(n, \mathbb{R}) = Mat(n \times n, \mathbb{R})$  y el corchete de Lie en  $gl(n, \mathbb{R})$  viene dado por el conmutador estándar de matrices [1, 25–28].

Un álgebra es un espacio formado por elementos del grupo con coeficientes  $C$  que parametrizan el espacio euclidiano. Obviamente, no se puede concretar un álgebra de la misma manera para los grupos de Lie, porque los elementos son continuos. Pero, como se discutió en la última sección, un elemento particular de un grupo de Lie se define por los valores de los parámetros en el espacio de parámetros comprendido por los generadores. Se vera a continuación que los generadores formarán las álgebras para los grupos de Lie [1, 28].

Considere dos elementos del mismo grupo con generadores  $X_i$ , uno con valores de parámetro  $\alpha_i$  y el otro con valores de parámetro  $\beta_i$ . El producto de los dos elementos será entonces  $e^{i\alpha_i X_i} e^{i\beta_j X_j} = e^{i\delta_k X_k}$ . Debido a que se asume que se trata de un grupo, se sabe que el producto debe ser un elemento del grupo (debido a la propiedad de clausura de los grupos) y, por lo tanto, el producto debe especificarse mediante algún conjunto de parámetros  $\delta_k$  [1, 25–28].

Ya que los generadores son matrices y por tanto de manera general no conmutan. Entonces, se desea averiguar quiénes serán los  $\delta_i$  en términos de los  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ .

$$i\delta_k X_k = i(\alpha_i X_i + \beta_j X_j) - \frac{1}{2} [\alpha_i X_i, \beta_j X_j], \quad (3.16)$$

o

$$e^{i\alpha_i X_i} e^{i\beta_j X_j} = e^{i(\alpha_i X_i + \beta_j X_j) - \frac{1}{2} [\alpha_i X_i, \beta_j X_j]}. \quad (3.17)$$

La ecuación (3.21) se denomina fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff y es una de las relaciones más importantes en la teoría de grupos en la física. Observe que, si los generadores conmutan, esto se reduce a la ecuación normal para multiplicar exponenciales [1, 25–28].

Ahora, está claro que el conmutador  $X_i, X_j$  debe ser proporcional a alguna combinación lineal de los generadores del grupo (por la propiedad de clausura). Entonces, en este caso es claro que

$$[X_i, X_j] = i f_{ijk} X_k, \quad (3.18)$$

para algún conjunto de constantes  $f_{ijk}$ . Estas constantes se denominan “constantes de estructura del grupo”, y si se conocen por completo, se conocen las relaciones de conmutación entre todos los generadores, por lo que se puede determinar todo el grupo en cualquier representación que se desee. Los generadores, bajo las relaciones de conmutación específicas definidas por las constantes de estructura, forman el álgebra de Lie del grupo, y es esta estructura de conmutación la que forma la estructura del grupo de Lie [1, 25–28].

### 3.5.4. SO(3)

El grupo  $SO(3)$ , consiste en todas las transformaciones lineales continuas en el espacio euclidiano de 3 dimensiones que dejan invariante la longitud de los vectores de coordenadas. El método estándar para rotar vectores en tres dimensiones es utilizar matrices de rotación de  $3 \times 3$  [1, 28]

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$$R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Las condiciones de definición del grupo  $SO(3)$  son,

$$R^T R = I, \quad \det(R) = 1. \quad (3.22)$$

Ahora recordando la definición de los generadores, o sea la ecuación 3.12 [1, 28]. Se la puede usar  $R$  para encontrar los generadores de  $SO(3)$ , los cuales se denotan por  $J_x, J_y$  y  $J_z$ . Esto produce

$$J_x = \frac{1}{i} \frac{dR_x(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=0} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \\ 0 & -\cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \Big|_{\phi=0} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

y similarmente

$$J_y = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Se puede conectarlos a las exponenciales con los parámetros apropiados  $(\phi, \psi, \theta)$  y encontrar que  $e^{i\phi J_x}$ ,  $e^{i\psi J_y}$  y  $e^{i\theta J_z}$  reproduciendo las ecuaciones 3.19, 3.20 y 3.21, respectivamente [1, 28]. Además, se puede multiplicar los conmutadores para encontrar

$$[J_x, J_y] = i J_z, \quad [J_y, J_z] = i J_x, \quad [J_z, J_x] = i J_y,$$

o

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (3.25)$$

Esto nos dice que las constantes de estructura para  $SO(3)$  son

$$f_{ijk} = \varepsilon_{ijk},$$

donde  $\varepsilon_{ijk}$ , es el tensor totalmente antisimétrico. El hecho de que las constantes de estructura sean distintas de cero es coherente con que  $SO(3)$  sea un grupo no abeliano [1, 25–28].

### 3.5.5. $SU(2)$

El grupo  $SU(2)$  es el grupo de las matrices unitarias  $2 \times 2$ , cumple las siguientes condiciones [1, 28]

$$U^\dagger U = 1, \quad \det(U) = 1. \quad (3.26)$$

Los generadores de  $SU(2)$  deben ser matrices hermíticas

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

se denominan matrices de pauli [28]. Se pueden expresar estas matrices para los generadores con los conmutadores

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (3.28)$$

Es conveniente definir los generadores de  $SU(2)$  como

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i.$$

El álgebra de Lie

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \quad (3.29)$$

Se trata de la misma relación de los corchetes de Lie que se derivaron ecuación (3.25) para el grupo  $SO(3)$ . Por tanto, se dice que  $SU(2)$  y  $SO(3)$  tienen la misma álgebra de Lie. Hay operadores especiales que se pueden construir a partir de un conjunto dado de generadores que son útiles para entender las representaciones del álgebra de Lie [1, 28]. Estos operadores se llaman operadores de Casimir y tienen la propiedad especial de que conmutan con todos los generadores del álgebra de Lie dada. Para el álgebra de Lie  $SU(2)$  existe un operador de este tipo

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2. \quad (3.30)$$

Además de esta etiqueta para las diferentes representaciones, se utilizan operadores especiales adicionales para etiquetar los diferentes elementos del espacio vectorial sobre el que actúan nuestros grupos. Los operadores que se utilizan para este fin se conocen como elementos de Cartan del álgebra de Lie. En otras palabras, mientras que los operadores de los elementos de Casimir proporcionan etiquetas para diferentes representaciones, los elementos de Cartan proporcionan etiquetas dentro de una representación dada. Los elementos de Cartan son todos aquellos generadores que pueden ser diagonalizados simultáneamente. Para  $SU(2)$  sólo hay un elemento de este tipo y es convencional elegir  $J_3$  como generador diagonal [1, 28].

Se utiliza para cada representación los vectores propios del generador diagonal  $J_3$  como vectores base para el espacio vectorial sobre el que actúa nuestra representación. Utilizamos aquí una notación abstracta para los elementos del espacio vectorial sobre el que actúan nuestros generadores. Esta notación enfatiza las etiquetas que utilizamos para distinguir los diferentes elementos y es extremadamente popular en la mecánica cuántica [1, 28]

$$\begin{aligned}
J_+ &= J_1 + iJ_2, \\
J_- &= J_1 - iJ_2, \\
J^2 |jm\rangle &= j(j+1) |jm\rangle, \\
J_z |jm\rangle &= m |jm\rangle, \\
J_\pm |jm\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Para valor posible  $j = \frac{1}{2}$ . Esta representación es  $2\frac{1}{2} + 1 = 2$  dimensiones [1, 28]. El generador  $J_3$  tiene valores propios de  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

que son las matrices de pauli [1, 25–28].

### 3.5.6. SU(3)

$SU(3)$  es un grupo de matrices unitarias  $3 \times 3$  de determinantes unitarios, condición (3.26). Esto significa que, a cada elemento del grupo abstracto, se puede asociar una matriz unitaria de  $3 \times 3$  [8, 15, 21]. Como es habitual para los grupos de Lie, se puede escribirlo como una función exponencial

$$U = e^{iT_A \theta_A}. \tag{3.33}$$

Una base para esos generadores hermitianos sin traza está dada, al menos en una representación, por ocho matrices de  $3 \times 3$ , llamadas matrices de Gell-Mann [1, 21, 28]

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Los generadores del grupo están conectados a estas matrices de Gell-Mann, al igual que las matrices de Pauli estaban conectadas a los generadores del grupo  $SU(2)$  a través de  $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$  para  $a = 1, \dots, 8$ , [1, 21, 28]. El álgebra de Lie para este grupo viene dada por

$$[T_A, T_B] = if_{ABC}T_C, \quad (3.34)$$

donde se adopta la convención estándar de que las letras mayúsculas como  $A, B, C$  pueden tomar cualquier valor de 1 a 8,  $f_{ABC}$  se denominan las constantes de estructura de  $SU(3)$ , que para  $SU(2)$  estaban dadas por el símbolo de Levi-Civita. Las constantes de estructura no nulas son

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

El grupo  $SU(3)$  tiene dos generadores Cartan  $\frac{1}{2}\lambda^3$  y  $\frac{1}{2}\lambda^8$ . Por tanto, cada partícula que interactúa a través de la fuerza fuerte lleva dos etiquetas adicionales, correspondientes a los valores propios de los generadores de Cartan [1, 25–28].

### 3.5.7. El grupo de Lorentz

En la sección 2.4.3, se discutió las transformaciones de Lorentz. En ello, se ha tenido en cuenta que las transformaciones de Lorentz son en realidad los elementos del grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$ . Sin embargo, ahora que ya se ha adquirido cierta comprensión de los grupos de Lie en general, se puede hablar de las transformaciones de Lorentz (y, en consecuencia, toda la estructura de la relatividad especial) con mayor profundidad matemática [1, 26–28].

#### Álgebra de Lorentz

Se inicia mirando el álgebra del grupo de Lorentz, también conocida como el álgebra de Lorentz. Hay innumerables formas de obtener el álgebra de Lorentz, todas con diversos grados de rigor matemático y sofisticación. Para el propósito inicial de este trabajo, no obstante, será suficiente simplemente usar los generadores directamente de las transformaciones conocidas dadas en secciones anteriores. Sin embargo, debido a que las relaciones de conmutación son las mismas para cualquier representación, aún se puede extraer alguna información general de este enfoque [1, 28].

Se pretende hacer el ejercicio de cambiar un poco nuestra notación la notación acostumbrada en relatividad especial para dejar claro exactamente de qué se está hablando. En lugar de usar  $\Lambda$ , se usa  $R$  para las rotaciones,  $B$  para los “boosts” (rotaciones

espacio temporales de Lorentz o simplemente rotaciones de Lorentz propiamente dichas),  $J$  para los generadores de rotación y  $K$  para los generadores de “boosts”. Entonces, incluyendo los índices de la matriz en el lado izquierdo, a partir de las ecuaciones de la relatividad especial hay tres rotaciones y tres boosts [1, 26–28].

Al utilizar la ecuación (3.12) directamente para encontrar los generadores de rotación  $J_i$  [1, 21, 28]

$$[J_x]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad [J_y]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [J_z]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces los generadores de boosts  $K_i$  son:

$$[K_x]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [K_y]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [K_z]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede realizar el álgebra matricial para encontrar las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k, \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k, \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k, \end{aligned} \tag{3.35}$$

se tiene dos tipos de transformaciones: las rotaciones y los boosts. Una cosa interesante es que estas dos cosas no se conmutan [1, 21, 28]. Las rotaciones son cerradas bajo conmutación, pero el conmutador de dos boosts es una rotación. Los boosts son rotaciones que mezclan el espacio y el tiempo. Al igual que las rotaciones no conmutan (es decir,  $SO(3)$  no es abeliano), los boosts y las rotaciones puras no conmutan. Obviamente, una transformación general de Lorentz con el parámetro de boosts  $\phi$  y el parámetro de rotación  $\theta$  se expresa de la forma

$$L = e^{i\mathbf{J}\cdot\theta + i\mathbf{K}\cdot\phi}.$$

### La estructura del grupo de Lorentz

Para comprender mejor la estructura de este grupo, es preciso considerar las siguientes combinaciones lineales de los generadores [1, 26–28]

$$N_i^\pm = \frac{1}{2}(J_i \pm ik_i). \tag{3.36}$$

Al resolver los detalles para encontrar las relaciones de conmutación de estos nuevos generadores, se encontrará que son [1, 26–28].

$$\begin{aligned} [N_i^+, N_j^+] &= i\varepsilon_{ijk}N_k^+, \\ [N_i^-, N_j^-] &= i\varepsilon_{ijk}N_k^-, \\ [N_i^-, N_j^+] &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Esta combinación lineal de generadores revela que el grupo de Lorentz está realmente formado por dos copias de  $SU(2)$ . Se reitera aquí, que esto sólo es cierto en  $1 + 3$  dimensiones del espacio tiempo [1, 26–28].

Es convencional escribir el álgebra de Lorentz de forma más compacta introduciendo un nuevo símbolo  $M_{\mu\nu}$ , que se define mediante las ecuaciones [1, 28]

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}, \\ K_i &= M_{0i}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Con esta nueva definición el álgebra de Lorentz queda como

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \quad (3.39)$$

A continuación, se investigara en detalle diferentes representaciones del álgebra de Lie [1, 26–28].

## Representaciones del grupo de Lorentz

Se mencionan varias representaciones del grupo de Lorentz en las dimensiones del espacio-tiempo  $1 + 3$  [1, 26–28].

### La representación $(0, 0)$

La representación de menor dimensión es, como para  $SU(2)$ , trivial, porque el espacio vectorial es unidimensional para ambas copias de  $SU(2)$ . Por tanto, los generadores deben ser matrices  $1 \times 1$  y la única “matriz”  $1 \times 1$  que cumple las relaciones de conmutación es el número 0:

$$N_i^+ = N_i^- = 0 \quad \rightarrow \quad e^{iN_i^+} = e^{iN_i^-} = e^0 = 1. \quad (3.40)$$

Por tanto, la representación  $(0, 0)$  del grupo de Lorentz actúa sobre objetos que no cambian bajo transformaciones de Lorentz. Esta representación se denomina representación escalar [1, 26–28].

### La representación $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$

La siguiente representación es la representación  $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$ . En esta representación sólo se utilizan los generadores  $N_i^+$ . Esta es la representación en la que  $N_i^-$  se toma como cero [1, 28]

$$N_i^- = \frac{1}{2} (J_i - i K_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_i = i K_i. \quad (3.41)$$

Como se sabe que los generadores  $N_i^+$  son la representación  $j = \frac{1}{2}$  de  $SU(2)$ , deben ser iguales a las matrices de Pauli (3.27),

$$N_i^+ = \frac{1}{2} (J_i + i K_i) = \frac{1}{2} (i K_i + i K_i) = i K_i = \frac{1}{2} \sigma_i, \quad (3.42)$$

donde se ha introducido la ecuación (3.41) para obtener la segunda igualdad [1, 26–28]. Escribiendo los generadores de rotación y de boosts, se tiene

$$K_i = -i \frac{1}{2} \sigma_i, \quad J_i = i K_i = \frac{1}{2} \sigma_i. \quad (3.43)$$

Se puede usar la ecuación (3.43) para calcular cómo se transforma un objeto en la representación  $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$  bajo rotaciones y boosts. En general, estos son [1, 26–28]

$$\begin{aligned} R(\theta) &= e^{i\theta \cdot \mathbf{J}} = e^{i\theta \cdot \frac{\sigma}{2}}, \\ B(\phi) &= e^{i\phi \cdot \mathbf{K}} = e^{i\phi \cdot \frac{\sigma}{2}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

### La representación $(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$

A continuación, se muestran algunos detalles de la representación  $(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ . Ahora solo se usa la parte  $N_i^-$  y siguiendo el proceso anterior, por lo que tiene

$$J_i = \frac{1}{2} \sigma_i, \quad K_i = i \frac{1}{2} \sigma_i, \quad (3.45)$$

por tanto, las transformaciones generales en esta representación son

$$\begin{aligned} R(\theta) &= e^{i\theta \cdot \mathbf{J}} = e^{i\theta \cdot \frac{\sigma}{2}}, \\ B(\phi) &= e^{i\phi \cdot \mathbf{K}} = e^{-\phi \cdot \frac{\sigma}{2}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Entonces, las dos representaciones  $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$  y  $(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$  son idénticas bajo rotaciones, pero ligeramente diferentes bajo boosts [1, 26–28].

En resumen, se pueden obtener cuatro representaciones del grupo de Lorentz (en cuatro dimensiones): la representación escalar  $(0, 0)$  en la que las cosas no se transforman, la representación  $(\frac{1}{2}, 0)$  de la mano izquierda y la  $(0, \frac{1}{2})$  de la mano derecha, que actúan sobre cosas llamadas espinores. Por supuesto, se puede elegir cualquier otra representación  $(j, j')$  que se desee y resolver los detalles [1, 26–28].

### 3.5.8. El grupo de Poincaré

Las transformaciones de Lorentz son transformaciones homogéneas en las coordenadas de 4 dimensiones. La suposición de la homogeneidad del espacio-tiempo requiere la invariancia de las leyes físicas bajo traslaciones de 4 dimensiones  $T(b)$  que son transformaciones no homogéneas [28, 30]

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + b^\mu. \quad (3.47)$$

Así, el grupo de traslación de 4-dimensiones es abeliano y, por sí mismo, la estructura de grupo es muy simple. Cuando se combina todas las simetrías espacio-temporales continuas del espacio-tiempo de 4 dimensiones en un grupo de simetría general, se obtiene la generalización de los grupos euclidianos. El conjunto de transformaciones en el espacio de Minkowski formado por todas las traslaciones y transformaciones propias de Lorentz y sus Productos forman un grupo  $P$ , llamado Grupo de Poincaré, o grupo inhomogéneo de Lorentz [28, 30].

Los generadores del grupo de Poincaré son los generadores del grupo de Lorentz  $J_i$ ,  $K_i$  más los generadores de las traslaciones  $P_\mu$ . En términos de  $J_i$ ,  $K_i$  y  $P_\mu$  el álgebra de Lie

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k, & [J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk}P_k, \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k, & [J_i, P_0] &= 0, \\ [K_i, P_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k, & [K_i, P_j] &= i\delta_{ij}P_0, & [K_i, P_0] &= -iP_i, \end{aligned}$$

es convencional escribir esto en términos de  $M_{\mu\nu}$ , que fue definido por [28, 30]

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}, \\ K_i &= M_{0i}. \end{aligned}$$

Con  $M_{\mu\nu}$  el álgebra de Poincaré se lee

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu), \end{aligned} \quad (3.48)$$

y, por supuesto, sigue teniendo

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}).$$

Para este grupo bastante complicado es muy útil etiquetar las representaciones utilizando los valores escalares fijos de los operadores de Casimir. El grupo de Poincaré tiene dos operadores de Casimir [28, 30]. El primero es:

$$P_\mu P^\mu =: m^2, \tag{3.49}$$

se da al valor escalar el sugestivo nombre de  $m^2$ , porque que coincide con la masa de las partículas. El segundo operador de Casimir es  $M_\mu M^\mu$ , donde

$$M_\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}, \tag{3.50}$$

que se llama el cuatro vector de Pauli-Lubanski [28, 30].

# Capítulo 4. Álgebras de Lie en física de partículas y teoría de campos

## 4.1. Simetrías

Las simetrías desempeñan un papel importante en la física elemental de partículas, en parte por su relación con las leyes de conservación y en parte porque permiten hacer algunos progresos cuando aún no se dispone de una teoría dinámica completa [3]. Simetría significa que no se puede distinguir entre antes y después de una determinada transformación [29]. Para el caso de la traslación espacio-temporal continua, esto significa que no existe una posición especial ni un sistema de coordenadas absoluto a la hora de establecer las coordenadas espacio-temporales para describir un fenómeno físico. Los mismos experimentos realizados en dos lugares distintos (por ejemplo, en Tokio y en Nueva York) o en momentos diferentes (hoy o mañana) deberían producir el mismo resultado. En otras palabras, la invariancia traslacional significa la existencia de ciertos no observables, es decir, la posición y el tiempo absolutos [29].

Las simetrías se dividen en dos categorías: en primer lugar, las relacionadas con la estructura del espacio-tiempo, que suelen denominarse externas, y en segundo lugar, las relacionadas con las simetrías internas, como la carga eléctrica, el isospín y la carga de color [29]. Las simetrías espacio-tiempo cambian los valores de las coordenadas, de modo que sólo la acción, que es una integral de una Lagrangiana sobre todo el espacio-tiempo, permanece invariante. En otras clasificaciones, son continuas o discretas. Las simetrías continuas, están relacionadas con una ley de conservación correspondiente (Teorema de Noether 2.3.2). Esto significa que cuando una ecuación de movimiento o la lagrangiana es invariante bajo alguna operación de simetría, existe un observable físico que no cambia en función del tiempo. Las simetrías discretas no son funciones de un parámetro continuo y no es posible ninguna variación o diferenciación infinitesimal. La transformación de paridad, la inversión temporal y la conjugación de cargas para intercambiar partículas y antipartículas son ejemplos de ello [29, 30].

Bosones		Fermiones	
espín 0	espín 1	espín $\frac{1}{2}$	espín $\frac{3}{2}$
	Mediadores $\gamma, g$	Quarks/Leptones $u, d, e$	
Mesones pseudoescalares $\pi, K, \eta, \eta'$	Mesones vectoriales $\rho, W, \psi$	Octeto de bariones $p, n$	Decuplo de bariones $\Delta, \Omega$

Cuadro 4.1: Clasificación de partículas por espín [29]

A continuación, se aborda el caso de la simetría rotacional, relacionada con el espín. Esto nos lleva a su vez a las simetrías “internas”: isospín. Por último, consideramos las simetrías “discretas”: paridad, conjugación de cargas [3, 4, 29].

#### 4.1.1. Espín

La energía y el momento no son los únicos atributos que posee una partícula. Actúa como si girara sobre algún eje. El espín significa momento angular y su magnitud se cuantiza en enteros o semienteros en unidades de la constante de Planck  $\hbar$ . Las componentes del espín o una proyección del espín sobre un eje determinado (eje  $z$ ) también se cuantiza en unidades de  $\hbar$  [29]. El espín en mecánica cuántica tiene, matemáticamente, todas las propiedades del momento angular, pero la imagen de un objeto autogiratorio como la Tierra en rotación no es aplicable, porque una partícula puntual no puede tener momento angular en el sentido clásico ( $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ) [29]. Por lo tanto, la componente de espín debe considerarse como un grado de libertad. Para una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  como un electrón, sólo se permite ( $S_z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ). Es evidente que sólo dos electrones  $S_z = \pm\frac{1}{2}$  pueden ocupar la misma órbita en un átomo de hidrógeno. El principio de exclusión de Pauli prohíbe que otros electrones con los mismos atributos ocupen el mismo estado cuántico en el mismo punto espacial. En el caso de una partícula puntual el momento angular de espín es simplemente una propiedad intrínseca de la propia partícula [1, 3, 29, 30].

Las partículas se dividen en dos clases, tabla 4.1: Las partículas que forman la materia con espín semientero son *fermiones*, el octeto bariones, leptones y quarks con  $s = \frac{1}{2}$  y el decuplo de bariones con  $s = \frac{3}{2}$ . Las partículas que llevan la fuerza con espín entero son *bosones*, los mesones pseudoescalares con  $s = 0$ , los mesones vectoriales y las partículas mediadoras con  $s = 1$  [1, 3, 29, 30].

Una partícula con espín  $\frac{1}{2}$ ; puede tener  $m_s = \frac{1}{2}$ ; (“espín arriba”), o  $m_s = -\frac{1}{2}$ ; (“espín

abajo”). Una notación es la que ofrecen los vectores columna de dos componentes, o espinores:

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2} - \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

El estado más general de una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  es la combinación lineal

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos números complejos [3,4,29]. Es cierto que una medida de  $S_z$  sólo puede devolver el valor  $\frac{1}{2}\hbar$  o  $-\frac{1}{2}\hbar$ , pero el primer resultado, digamos, no prueba que la partícula estuviera en el estado  $\uparrow$  antes de la medida. En el caso general (ecuación (4.2)),  $|\alpha|^2$  es la probabilidad de que una medida de  $S_z$  arroje el valor  $\frac{1}{2}\hbar$ , y  $|\beta|^2$  es la probabilidad de obtener  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Dado que estos son los únicos resultados permitidos, se deduce que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (4.3)$$

Aparte de esta condición de “normalización”, no hay ninguna restricción a priori sobre los números  $\alpha$  y  $\beta$ . Supongamos ahora que se va a medir  $S_x$  o  $S_y$  en una partícula en el estado genérico dado por la ecuación (4.2) ¿Qué resultados se podría obtener? La simetría dicta que los valores permitidos sean  $\pm\frac{1}{2}\hbar$  después de todo, es perfectamente arbitrario qué dirección elegimos para llamar a  $z$  en primer lugar. A cada componente de  $\mathbf{S}$  le asociamos una matriz  $2 \times 2$  [3,4,29]

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Corresponden a las matrices de Pauli [3,4,29].

Las partículas de espín  $\frac{1}{2}$  se transforman bajo rotaciones según la representación bidimensional de  $SU(2)$ . Del mismo modo, las partículas de espín  $\frac{3}{2}$ , descritas por vectores, pertenecen a la representación tridimensional de  $SU(2)$ ; las partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , descritas por un objeto de cuatro componentes, se transforman bajo la representación cuatridimensional de  $SU(2)$ ; y así sucesivamente. Las partículas de distinto espín pertenecen, pues, a distintas representaciones del grupo de rotación [3,4,29]. En el capítulo 3, se realizó el estudio del grupo  $SO(3)$  y  $SU(2)$ , donde se vio que los grupos poseen la misma álgebra (3.29), y la relación con el momento angular, como la descripción matemática esta relacionada con el momento angular y por lo tanto con el espín [1,3,4,29].

### 4.1.2. Isospin

Hay algo extraordinario en el neutrón, que Heisenberg observó poco después de su descubrimiento en 1932: aparte del hecho obvio de que no lleva carga, es casi idéntico al protón. En particular, sus masas son asombrosamente próximas,  $m_p = 938,28 MeV/c^2$ ,  $m_n = 939,57 MeV/c^2$  [3, 4]. Heisenberg propuso considerarlos como dos “estados” de una única partícula, el nucleón. Incluso la pequeña diferencia de masa podría atribuirse al hecho de que el protón está cargado, ya que la energía almacenada en su campo eléctrico contribuye, según la fórmula de Einstein  $E = mc^2$ , a su inercia. Si de alguna manera se pudiera “desconectar toda carga eléctrica”, el protón y el neutrón serían, según Heisenberg, indistinguibles. O, dicho de forma más prosaica, las fuerzas fuertes que experimentan protones y neutrones son idénticas [2–4, 29].

Para poner en práctica la idea de Heisenberg, se escribe el nucleón como una matriz de columnas de dos componentes

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

con

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Por analogía directa con el espín,  $s$ , al introducir el isospín,  $I$  [3]. Sin embargo,  $I$  no es un vector en el espacio ordinario, con componentes a lo largo de las coordenadas  $x, y$  y  $z$ , sino más bien en un “espacio de isospín” abstracto, con componentes  $I_1, I_2$  e  $I_3$ . El nucleón lleva isospín  $\frac{1}{2}$  y el tercer componente,  $I_3$ , tiene los valores propios  $\frac{1}{2}$  (el protón) y  $-\frac{1}{2}$  (el neutrón):

$$p = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \quad n = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (4.7)$$

El protón es “isospín arriba”; el neutrón es “isospín abajo”. Esto no es más que notación; la física viene dada por la proposición de Heisenberg de que las interacciones fuertes son invariantes bajo rotaciones en el espacio de isospín, igual que, por ejemplo, las fuerzas eléctricas son invariantes bajo rotaciones en el espacio de configuración ordinario [3, 4]. Llamamos a esto una simetría interna, porque no tiene nada que ver con el espacio y el tiempo, sino con las relaciones entre diferentes partículas. Una rotación de  $180^\circ$  sobre el eje 1 del espacio de isospín convierte los protones en neutrones y viceversa. Si la fuerza fuerte es invariante bajo rotaciones en el espacio de isospín, se deduce, por el teorema de Noether, que el isospín se conserva en todas

las interacciones fuertes, al igual que el momento angular se conserva en los procesos con invariancia rotacional en el espacio ordinario [2-4, 29].

En el lenguaje de la teoría de grupos, Heisenberg afirmó que las interacciones fuertes son invariantes bajo un grupo de simetría interna  $SU(2)$ , y que los nucleones pertenecen a la representación bidimensional (isospin  $\frac{1}{2}$ ). En 1932, esto era una sugerencia audaz; hoy en día, la evidencia está a nuestro alrededor, sobre todo en la estructura “multiplete” de los hadrones. Recordemos que en la Vía Óctuple: todas las filas horizontales muestran exactamente la característica que llamó la atención de Heisenberg en el caso de los nucleones; tienen masas muy similares pero cargas diferentes. A cada uno de estos multipletes, le asignamos un isospín  $I$  particular, y a cada miembro del multiplete, le asignamos un  $I_3$  particular [2-4, 29].

Para los piones,  $I = 1$ :

$$\pi^+ = |1\ 1\rangle, \quad \pi^0 = |1\ 0\rangle, \quad \pi^- = |1\ -1\rangle. \quad (4.8)$$

Para  $\Lambda$ ,  $I = 0$

$$\Lambda = |0\ 0\rangle. \quad (4.9)$$

Para los  $\Delta$   $I = \frac{3}{2}$

$$\Delta^{++} = \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle, \quad \Delta^+ = \left| \frac{3}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \Delta^0 = \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \Delta^- = \left| \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2} \right\rangle, \quad (4.10)$$

y así sucesivamente. Para determinar el isospín de un multiplete, basta con contar el número de partículas que contiene; como  $I_3$  va de  $-I$  a  $+I$ , en pasos enteros, el número de partículas del multiplete es  $2I + 1$ :

$$\text{multiplicidad} = 2I + 1. \quad (4.11)$$

La tercera componente del isospín,  $I_3$ , está relacionada con la carga,  $Q$ , de la partícula. Se asigna el valor máximo,  $I_3 = I$ , al miembro del multiplete con la carga más alta, y rellenamos el resto en orden decreciente de  $Q$ . Para los hadrones compuestos sólo por quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  la relación explícita entre  $Q$  y  $I_3$  es la fórmula Gell-Mann-Nishijima [2-4, 29]

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(A + S), \quad (4.12)$$

donde  $A$  es el número de bariones y  $S$  es la extrañeza. Originalmente, esta ecuación era una observación puramente empírica, pero en el contexto del modelo de los quarks

se deduce simplemente de las asignaciones de isospín para los quarks:  $u$  y  $d$  forman un “doblete” (como el protón y el neutrón):

$$u = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle, \quad d = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle, \quad (4.13)$$

y todos los demás sabores llevan isospín cero.

Experimentalmente, el neutrón y el protón forman un único estado ligado, el deuterón (d); no existe ningún estado ligado de dos protones o de dos neutrones. Por lo tanto, el deuterón debe ser un isosinglet [2–4, 29].

## 4.2. Simetrías Discretas

### 4.2.1. Paridad

El grupo de Lorentz,  $SO(1, 3)$ , es el grupo de matrices  $\Lambda$  de  $4 \times 4$ , este grupo también contiene las transformaciones de paridad e inversión temporal A.3.3. La transformación de paridad es equivalente a la inversión espacial a través del origen,  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ , esta transformación cambia la lateralidad del sistema. Si  $\mathbf{x}$  es diestro entonces  $-\mathbf{x}$  es zurdo [1, 30].

Antes de 1956, se daba por sentado que las leyes de la física son ambidiestras, es decir, que la imagen especular de cualquier proceso físico también representa un proceso físico perfectamente posible. De hecho, la mayoría de los físicos consideraban evidente la simetría especular (o “invariancia de paridad”) de las leyes de la naturaleza [3, 4]. Pero en 1956, Lee y Yang se preguntaron si había habido alguna prueba experimental de esta suposición. Buscando en la literatura, se sorprendieron al descubrir que, aunque había amplias pruebas de la invariancia de paridad en los procesos fuertes y electromagnéticos, no había confirmación en el caso de las interacciones débiles [3, 4]. En 1957, Wu y colaboradores estudiaron la desintegración nuclear beta del cobalto-60 polarizado,  ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e + \bar{\nu}_e$  [3, 4]. Los núcleos de  ${}^{60}\text{Co}$ , que poseen un momento magnético nuclear permanente  $\boldsymbol{\mu}$ , se alinearon en un fuerte campo magnético  $\mathbf{B}$  y los electrones de desintegración beta se detectaron en diferentes ángulos polares con respecto a este eje, como se muestra en la figura 4.1. Dado que tanto  $\mathbf{B}$  como  $\boldsymbol{\mu}$  son vectores axiales, no cambian de signo bajo la transformación de paridad. Por lo tanto, cuando se mira en el “espejo” de paridad invertida, la única cantidad que cambia de signo es el momento vectorial del electrón emitido. Por lo tanto, si la paridad se conservara en la interacción débil, la velocidad a la que se emiten electrones en una determinada dirección relativa al campo  $\mathbf{B}$  sería idéntica a la velocidad en la dirección opuesta. Experimentalmente, se observó que se emitían

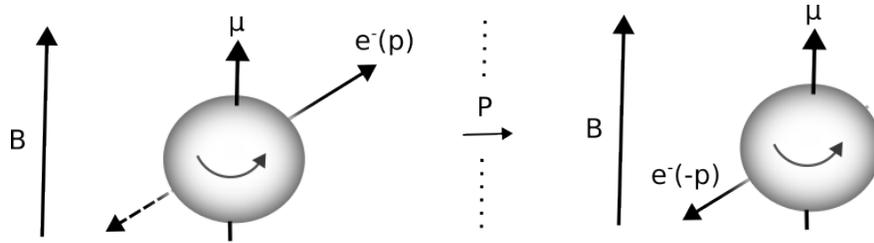


Figura 4.1: La desintegración beta del  $^{60}\text{Co}$  polarizado. A la izquierda, se emite un electrón en una dirección determinada. A la derecha se muestra el equivalente con paridad invertida. [3].

más electrones en el hemisferio opuesto a la dirección del campo magnético aplicado que en el hemisferio en la dirección del campo aplicado, proporcionando así una clara demostración de que la paridad no se conserva en la interacción débil [3,4,29,30].

Es natural introducir el concepto de helicidad. La helicidad  $h$  de una partícula se define como la componente normalizada de su espín a lo largo de su dirección de vuelo [4]. Para una partícula de espín medio, la componente de espín medido a lo largo de cualquier eje se cuantifica para ser  $\pm\frac{1}{2}$ . En consecuencia, los valores propios de la partícula libre y el operador de helicidad son iguales. Los dos estados de helicidad posibles para un fermión de espín medio se denominan estados de helicidad diestro y zurdo. Aunque la helicidad es un concepto importante en la física de partículas, es importante recordar que la helicidad no es invariante de Lorentz; para partículas con masa, siempre es posible transformarse a un marco en el que la dirección de la partícula se invierta [4].

Para ver esto, si se considera que se tiene un electrón diestro que gira hacia la derecha figura 4.2 (a), y otra persona lo observa desde un sistema inercial que viaja hacia la derecha a una velocidad mayor que  $v$ . Desde su perspectiva, el electrón gira hacia la izquierda figura 4.2 (b), pero sigue girando de la misma manera, por lo que este observador dirá que es un electrón zurdo [3]. En otras palabras, puede convertir un electrón diestro en uno zurdo simplemente cambiando su marco de referencia [3].

Pero, ¿qué pasaría si se aplicara el mismo razonamiento a un neutrino, que, por el momento, no tiene masa, viaja a la velocidad de la luz y, por tanto, no hay ningún observador que viaje más rápido? Es imposible “invertir la dirección del movimiento” de un neutrino (sin masa) poniéndose en un sistema de referencia que se mueva más rápido y, por tanto, la helicidad de un neutrino (o de cualquier otra partícula sin masa) es invariante de Lorentz, una propiedad fija y fundamental que no es un artefacto del sistema de referencia del observador [3,4]. Determinar la helicidad de un neutrino dado se convierte en una cuestión experimental importante.

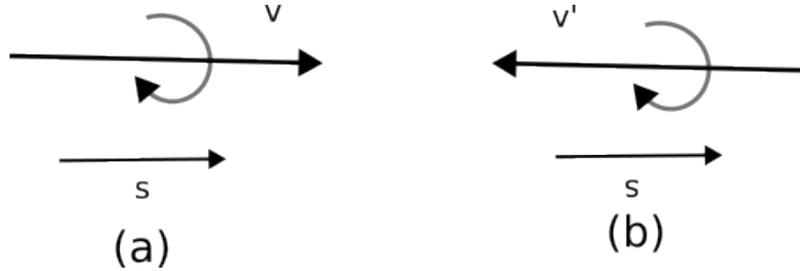


Figura 4.2: Helicidad. En (a) el espín y la velocidad son paralelos (helicidad +1); en (b) son antiparalelos (helicidad -1) [3].

Hasta mediados de los años cincuenta, todo el mundo suponía que la mitad de los neutrinos eran zurdos y la otra mitad diestros, como los fotones. Lo que en realidad descubrieron fue que.

### Los neutrinos son zurdos los antineutrinos son diestros

Por supuesto, es difícil medir la helicidad de un neutrino directamente; son bastante difíciles de detectar. Existe, sin embargo, un método indirecto relativamente fácil, utilizando la desintegración del pión:  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . Si el pión está en reposo, el muón y el antineutrino salen espalda con espalda figura 4.3. Además, como el pión tiene espín 0, los espines del muón y del antineutrino deben estar alineados de forma opuesta [3,4]. Por lo tanto, si el antineutrino es diestro, el muón también debe serlo (en el marco de reposo del pión), y esto es precisamente lo que se ha encontrado experimentalmente. Por tanto, la medición de la helicidad del muón nos permite determinar la helicidad del antineutrino. Del mismo modo, en la desintegración de  $\pi^+$ , el antimuón es siempre zurdo, lo que indica que el neutrino es zurdo. Por el contrario, consideremos la desintegración del pión neutro,  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Una vez más, en cualquier desintegración dada los dos fotones deben tener la misma helicidad. Pero se trata de un proceso electromagnético que respeta la paridad, por lo que, en promedio, obtenemos tantos pares de fotones diestros como zurdos. No ocurre lo mismo con los neutrinos: sólo interactúan débilmente y todos son zurdos; la imagen especular de un neutrino no existe [3,4,28].

A pesar de su violación en los procesos débiles, la invariancia de paridad sigue siendo una simetría válida de las interacciones fuerte y electromagnética.

Si se aplica el operador de paridad dos veces, por supuesto, se vuelve al punto de partida [3,4,28]

$$P^2 = I.$$

(El grupo de paridad, por tanto, consta sólo de dos elementos:  $I$  y  $P$ .) (Se deduce que los valores propios de  $P$  son  $\pm 1$ . Por ejemplo, los escalares y pseudovectores

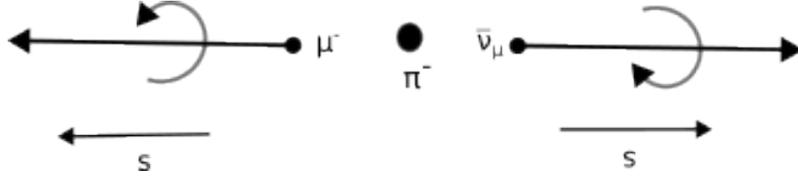


Figura 4.3: Desintegración de  $\pi^-$  en reposo [3].

tienen valor propio  $+1$ , mientras que los vectores y pseudoescalares tienen valor propio  $-1$ . Los hadrones son estados propios de  $P$  y se pueden clasificar según su valor propio, igual que se clasifican por espín, carga, isospín, extrañeza, etc [3, 4, 28]. Según la teoría cuántica de campos, la paridad de un fermión (espín semientero) debe ser opuesta a la de la antipartícula correspondiente, mientras que la paridad de un bosón (espín entero) es la misma que la de su antipartícula. La paridad de un sistema compuesto en su estado fundamental es el producto de las paridades de sus constituyentes (se dice que la paridad es un número cuántico “multiplicativo”, en contraste con la carga, la extrañeza, etc, que son “aditivo”). Así, el octeto bariónico y el decuplo tienen paridad positiva,  $(+1)^3$ , mientras que los nonetos pseudoescalar y mesónico vectorial tienen paridad negativa,  $(-1)(+1)$ . (El prefijo pseudo indica la paridad de las partículas). Para un estado excitado (de dos partículas) hay un factor extra de  $(-1)^l$ , donde  $l$  es el momento angular orbital. Así, en general, los mesones llevan una paridad de  $(-1)^{l+1}$ . Mientras tanto, el fotón es una partícula vectorial, su espín es 1 y su paridad intrínseca es  $-1$  [3, 4, 28].

### 4.2.2. Conjugación de cargas

La electrodinámica clásica es invariante bajo un cambio en el signo de todas las cargas eléctricas; los potenciales y los campos invierten sus signos, pero hay un factor de carga compensatorio en la ley de Lorentz, por lo que las fuerzas siguen siendo las mismas [3, 4, 28]. En la física elemental de partículas, se introduce una operación que generaliza esta noción de “cambio de signo de la carga”. Se llama *conjugación de carga*,  $C$ , y convierte cada partícula en su antipartícula:

$$C |p\rangle = |\bar{p}\rangle. \quad (4.14)$$

La conjugación de la carga es un término equivocado, ya que  $C$  puede aplicarse a una partícula neutra, como el neutrón (dando lugar a un antineutrón), y cambia el signo de todos los números cuánticos “internos” carga, número de bariones, número de leptones, extrañeza, encanto, belleza, verdad, dejando intactos la masa, la energía, el momento y el espín. Al igual que con  $P$ , la aplicación de  $C$  dos veces nos devuelve al estado original:

$$C^2 = I, \quad (4.15)$$

y, por lo tanto, los valores propios de  $C$  son  $\pm 1$  [3,4,28]. Sin embargo, a diferencia de  $P$ , la mayoría de las partículas de la naturaleza no son claramente estados propios de  $C$ . Pues si  $|p\rangle$  es un estado propio de  $C$ , resulta que que

$$C |p\rangle = \pm |p\rangle = |\bar{p}\rangle, \quad (4.16)$$

por lo que  $|p\rangle$  y  $|\bar{p}\rangle$  difieren como mucho en un signo, lo que significa que representan el mismo estado físico. Por lo tanto, sólo aquellas partículas que son sus propias antipartículas pueden ser estados propios de  $C$ . Esto nos deja el fotón, así como todos aquellos mesones que se encuentran en el centro de sus diagramas del óctuple:  $\pi^0, \eta, \eta', \rho^0, \phi, \omega, \psi$ , y así sucesivamente. Puesto que el fotón es el cuanto del campo electromagnético, que cambia de signo bajo  $C$ , tiene sentido que el “número de conjugación de carga” del fotón sea  $-1$ . Un sistema formado por una partícula de espín y su antipartícula, en una configuración con momento angular orbital  $l$  y espín total  $s$ , constituye un estado propio de  $C$  con valor propio  $(-1)^{l+s}$ . Según el modelo de los quarks, los mesones en cuestión son precisamente de esta forma: para los pseudoescalares,  $l = 0$  y  $s = 0$ , por lo que  $C = +1$ ; para los vectores,  $l = 0$  y  $s = 1$ , por lo que  $C = -1$  [3,4,28].

La conjugación de cargas es un número cuántico multiplicativo y, al igual que la paridad, se conserva en las interacciones fuerte y electromagnética. Así, por ejemplo, el  $\pi^0$  decae en dos fotones:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma, \quad (4.17)$$

(para  $n$  fotones  $C = (-1)^n$ , por lo que en este caso  $C = +1$  antes y después), pero no puede decaer en tres fotones. Del mismo modo, el  $\omega$  va a  $\pi^0 \rightarrow \gamma$ , pero nunca a  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ . En las interacciones fuertes, la invariancia de conjugación de carga requiere, por ejemplo, que las distribuciones de energía de los piones cargados en la reacción

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \quad (4.18)$$

deberían ser (por término medio) idénticas. Por otro lado, la conjugación de cargas no es una simetría de las interacciones débiles: cuando se aplica a un neutrino (zurdo, recordemos),  $C$  da un antineutrino zurdo, que no se produce. Así que la versión de carga conjugada de cualquier proceso en el que intervengan neutrinos no es un proceso físico posible. Y las interacciones débiles puramente hadrónicas también muestran violaciones de  $C$ , así como de  $P$  [3,4,28].

### 4.2.3. CP

Como se ha visto, las interacciones débiles no son invariantes bajo la transformación de paridad  $P$ ; la prueba más clara de ello es el hecho de que el antimuón emitido en la desintegración del pión [3, 4, 28]

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad (4.19)$$

siempre sale a la izquierda. Las interacciones débiles tampoco son invariantes bajo  $C$ , ya que la versión conjugada de carga de esta reacción sería

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad (4.20)$$

con un muón zurdo, mientras que en realidad el muón siempre sale diestro. Sin embargo, si se combina las dos operaciones se vuelve a la realidad:  $CP$  convierte el antimuón zurdo en un muón diestro, que es exactamente lo que se observa en la naturaleza. Muchas personas que se habían escandalizado por la caída de la paridad se consolaron al darse cuenta de esto; tal vez, era la operación combinada de la que nuestra intuición había estado hablando todo el tiempo, tal vez lo que se debería haber querido decir con la “imagen especular” de un electrón diestro era un positrón zurdo. Si se hubiera definido la paridad desde el principio como lo que ahora se llama  $CP$ , el trauma de la violación de la paridad podría haberse evitado (o al menos pospuesto) [3, 4, 28].

### 4.2.4. La inversión temporal y el teorema TCP

Al suponer que se hace una película de un proceso físico, por ejemplo, la colisión elástica de dos bolas de billar. Si se hiciera la película al revés, ¿representaría un proceso físico posible, o el espectador podría decir con certeza “No, no, eso es imposible; la película debe estar transcurriendo al revés”? En el caso de las colisiones elásticas clásicas, el proceso de “inversión temporal” es perfectamente posible. (Sin duda, si pudiéramos muchas bolas de billar en la imagen, la versión al revés sería muy improbable; nos sorprendería ver que las bolas se juntan formando un triángulo perfecto, con una sola bola blanca rodando, y sospecharíamos que la película se ha invertido. Pero eso es porque sabemos que sería extraordinariamente difícil crear las condiciones iniciales necesarias para que todas las bolas rodaran juntas a la velocidad y en la dirección correctas [3]. Así, las condiciones iniciales pueden darnos una pista sobre la “flecha del tiempo”, pero las propias leyes que rigen las colisiones funcionan igual de bien hacia delante que hacia atrás). Hasta hace poco, se daba por sentado que todas las interacciones de las partículas elementales compartían esta invariancia temporal. Pero con la caída de la paridad, era natural preguntarse si la inversión temporal era realmente tan sagrada [3, 4, 28].

Resulta que la inversión temporal es mucho más difícil de comprobar que P o C. En primer lugar, mientras que muchas partículas son estados propios de P, y algunas son estados propios de C, ninguna es un estado propio de T (el “operador de inversión temporal”, que hace correr la película hacia atrás). Así que no podemos comprobar la “conservación de T” simplemente multiplicando números, como podemos hacerlo para P y C. La prueba más directa sería tomar una reacción particular (digamos,  $n + p \rightarrow d + \gamma$ ), y ejecutarla a la inversa ( $d + \gamma \rightarrow n + p$ ) [3]. Para las condiciones correspondientes de momento, energía y espín, la velocidad de reacción debería ser la misma en ambas direcciones. (Esto se denomina “principio de equilibrio detallado”, y se deduce directamente de la invariancia tiempo-reversión) [3, 4]. Estas pruebas funcionan bien para las interacciones fuerte y electromagnética, y se han comprobado diversos procesos. Los resultados siempre han sido negativos (no hay pruebas de violación de T), pero esto no es sorprendente [3, 4, 28].

Basándonos en nuestra experiencia con P y C, esperamos ver un fallo de la inversión temporal en las interacciones débiles, si es que lo hay. Por desgracia, los experimentos de reacción inversa son difíciles de realizar en las interacciones débiles. Al tomar, por ejemplo, la típica desintegración débil  $\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-$  [3]. La reacción inversa sería  $p^+ + \pi^- \rightarrow \Lambda$ , pero nunca vamos a ver un proceso así, porque la interacción fuerte del protón y el pión anularía totalmente la débil interacción débil. Para evitar la contaminación fuerte y electromagnética, se podría recurrir a un proceso de neutrinos. Pero es notoriamente difícil realizar mediciones precisas de los neutrinos, y en este caso se supone que estamos buscando un efecto muy pequeño. En la práctica, por tanto, las pruebas críticas de la invariancia de T implican mediciones cuidadosas de cantidades que deberían ser precisamente cero si T es una simetría perfecta. El ejemplo clásico es el momento dipolar eléctrico estático de una partícula elemental. Probablemente, las pruebas experimentales más sensibles son los límites superiores de los momentos dipolares eléctricos del neutrón y del electrón [3, 4, 28, 29].

Sin embargo, hay una razón de peso para creer que la inversión temporal no puede ser una simetría perfecta de la naturaleza. Proviene del llamado teorema TCP, uno de los resultados más profundos de la teoría cuántica de campos [3]. Basado únicamente en los supuestos más generales, invariancia de Lorentz, mecánica cuántica y la idea de que las interacciones están representadas por campos, el teorema TCP afirma que la operación combinada de inversión del tiempo, conjugación de cargas y paridad (en cualquier orden) es una simetría exacta de cualquier interacción [3, 4]. Es sencillamente imposible construir una teoría cuántica de campos en la que el producto TCP no se conserve. Si, como demostró el experimento de Fitch-Cronin, se viola CP, debe haber una violación compensatoria de T. Por supuesto, como cualquier afirmación de imposibilidad, el teorema TCP puede ser sólo una medida de falta de imaginación; debe ser probado en el laboratorio, y esa es una razón por la que es tan importante

buscar pruebas independientes de la violación de T. Pero el teorema TCP tiene otras implicaciones que también están sujetas a verificación experimental: si el teorema es correcto, cada partícula debe tener exactamente la misma masa y vida que su antipartícula [3, 4]. Se han realizado mediciones en varios pares partícula-antipartícula; la prueba más sensible hasta la fecha es la masa  $K^0 - \bar{K}^0$  que, como fracción de la masa  $K^0$ , se sabe que es inferior a  $10^{-18}$ . Así pues, el teorema TCP se asienta en un terreno extremadamente firme desde el punto de vista teórico, y es relativamente seguro desde el punto de vista experimental [3, 4, 28–30].

### 4.3. Un rápido recorrido para la introducción a la teoría cuántica de campos

Microscópicamente tenemos la mecánica cuántica y la relatividad especial como dos teorías básicas. El marco para que estas dos teorías sean coherentes entre sí es la teoría cuántica de campos (QFT). En esta teoría, las entidades fundamentales son los campos cuánticos. Sus excitaciones corresponden a las partículas elementales físicamente observables, que son los constituyentes básicos de la materia, así como los mediadores de todas las interacciones conocidas [28–30]. La teoría cuántica de campos ha dado lugar a la concordancia más fantástica entre predicciones teóricas y datos experimentales de la historia de la ciencia. Proporciona conocimientos profundos y profundos sobre la naturaleza de nuestro universo, y sobre la naturaleza de otros posibles universos autoconsistentes [30].

En la mecánica cuántica no relativista de una sola partícula, se parte de la descripción hamiltoniana del correspondiente sistema físico clásico no relativista y promovemos cada uno de los observables a un operador hermitiano. La evolución temporal del sistema mecánico cuántico, en este caso, viene dada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo que tiene la forma [1, 2, 29, 30]

$$H\phi = i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t},$$

donde  $\phi$  representa la función de onda del sistema que corresponde a la amplitud de probabilidad de encontrar la partícula y el hamiltoniano  $H$ , tiene la forma genérica

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (4.21)$$

Este formalismo es claramente no relativista (no covariante) lo que puede verse fácilmente al observar que, incluso para una partícula libre, la ecuación dinámica toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \phi, \quad (4.22)$$

en la base de coordenadas; el operador momento tiene la forma [1, 2, 29, 30]

$$\mathbf{p} \longrightarrow -i\hbar \nabla. \quad (4.23)$$

Por lo que la ecuación de Schrödinger toma la forma [1, 2, 20, 29, 30]

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi, \quad (4.24)$$

donde  $\phi$  es un **Campo Escalar**. El significado físico de esto es que sólo describe una partícula con un único estado. La forma en que se interpreta esto es que describe una partícula con espín 0.

Se tiene un problema fundamental para hacer de ésta una teoría verdaderamente relativista [1, 2]. A saber, la derivada espacial en la ecuación (4.24) actúa cuadráticamente ( $\nabla^2$ ), mientras que la derivada temporal es lineal. Tratar el espacio y el tiempo de forma diferente es inaceptable para una teoría relativista, porque la relatividad requiere que sean tratados de la misma manera. La razón de ello es que si el espacio y el tiempo se consideran simplemente como componentes diferentes de una geometría única, no podemos tratarlos de forma diferente a como se tratan de forma diferente las dimensiones  $x$  e  $y$  en el espacio euclidiano sección 2.4. Esto es un indicio de un problema mucho más profundo de la mecánica cuántica: la cuantización implica “promover” el espacio de un parámetro a un operador, mientras que el tiempo se trata igual que en la física clásica: como un parámetro. Esta asimetría fundamental es lo que, en última instancia, impide una generalización directa a una teoría cuántica relativista. Así que para solucionar este problema, se degrada el espacio a un parámetro y se cuantifica de una nueva manera [1, 2, 20, 29, 30].

Al degradar la posición a un parámetro junto con el tiempo, obviamente se ha sacrificado los operadores a los que se impusieron relaciones de conmutación para obtener una teoría “cuántica” en primer lugar. Como es obvio que no puede imponer relaciones de conmutación a los parámetros (porque son escalares), la cuantización parece imposible. Por tanto, se va a tener que hacer una reinterpretación bastante radical. En lugar de dejar que las coordenadas sean operadores hermitianos que actúan sobre el estado en el espacio de Hilbert que representa una partícula, ahora interpretamos la partícula como el operador hermitiano, y este operador (o partícula) estará parametrizado por las coordenadas espacio-temporales [1, 2]. El estado físico sobre el que actúan los operadores de partícula es entonces el propio vacío,  $|0\rangle$ . Así, mientras que antes se actuaba sobre el “electrón”  $|\Psi\rangle$  con el operador  $\hat{x}$ , ahora el “electrón” (parametrizado por  $x$ )  $\hat{\Psi}(x^\mu)$  actúa sobre el vacío  $|0\rangle$ , creando el estado  $(\hat{\Psi}(x^\mu) |0\rangle)$ .

En otras palabras, el operador que representa un electrón excita el vacío (espacio vacío) dando como resultado un electrón.

Ahora se necesita algunas ecuaciones de movimiento que gobiernen la dinámica de estos campos [1, 2, 20, 29, 30].

### 4.3.1. Campos Espín 0

#### Ecuación de movimiento para campos escalares

Uno de los requisitos para una formulación relativista de la mecánica cuántica es que la ecuación de onda asociada sea invariante de Lorentz. La ecuación de Schrödinger, es de primer orden en la derivada temporal y de segundo orden en las derivadas espaciales. Debido a la diferente dependencia de las coordenadas temporales y espaciales, la ecuación de Schrödinger no es claramente invariante de Lorentz y, por tanto, no puede proporcionar una descripción de las partículas relativistas. La no invariancia de la ecuación de Schrödinger bajo transformaciones de Lorentz es una consecuencia de su construcción a partir de la relación no relativista entre la energía de una partícula libre y su momento. La ecuación de onda de Klein-Gordon se obtiene escribiendo la relación energía-momento de Einstein, [1, 23]

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Ahora veremos cómo hacer que esta descripción sea relativista [1–3]. La suposición más obvia para una forma relativista es simplemente introducir el Hamiltoniano relativista estándar,

$$H = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (4.25)$$

insertando la ecuación 4.23 y (4.24) en (4.25), tenemos

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \phi. \quad (4.26)$$

Pero esto plantea el siguiente problemas: las derivadas espaciales y temporales siguen tratándose de forma diferente, por lo que esto es inadecuado como ecuación relativista. Una solución es elevar al cuadrado el operador en ambos lados, lo que da

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \phi, \\ \implies \left( -\partial^0 \partial_0 + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si se elige las llamadas “unidades naturales”, donde  $c = \hbar = 1$ , y considerando la ecuación (A.32), se tiene

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0, \quad (4.28)$$

la ecuación (4.28) se denomina ecuación de **Klein-Gordon**, vista en la ecuación (2.112). No es más que una versión operante de la relación relativista estándar [1, 2, 20, 29, 30].

La ecuación de Klein-Gordon tiene soluciones de onda plana [3],

$$\phi(\mathbf{x}, t) = Ne^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et},$$

cuando se sustituyen en (4.28) implican que

$$E^2\phi = p^2\phi + m^2\phi,$$

y así (por construcción) las soluciones de onda plana a la ecuación de Klein-Gordon satisfacen la relación energía-momento de Einstein, donde la energía de la partícula está relacionada con su momento por

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

En mecánica clásica, las soluciones de energía negativa pueden descartarse por no ser físicas [3]. Sin embargo, en la mecánica cuántica se requieren todas las soluciones para formar un conjunto completo de estados, y las soluciones de energía negativa sencillamente no pueden descartarse. Aunque no está claro cómo deben interpretarse las soluciones de energía negativa, existe un problema más grave con las densidades de probabilidad asociadas [28]. La densidad de probabilidad es proporcional a la energía de la partícula. Sin embargo, esto implica que las soluciones de energía negativa tienen densidades de probabilidad negativas no físicas. A partir de la presencia de soluciones de densidad de probabilidad negativa, puede concluirse que la ecuación de Klein-Gordon no proporciona una descripción coherente de los estados de una sola partícula para un sistema relativista [1, 2, 20, 29, 30].

### Lagrangiana para campos escalares

Ahora se quiere encontrar una Lagrangiana para los campos escalares (espín  $j = 0$ ) de Klein-Gordon [3]. Se sabe que los términos de cualquier lagrangiano son todos escalares de Lorentz (para que el lagrangiano sea invariante relativísticamente) (2.110). Esto no plantea realmente un problema en el caso de los campos escalares porque, para empezar, son escalares. El término escalar más simple (el término de masa) será proporcional a  $\phi^2$ . Otro término escalar (el término de energía cinética) es proporcional a  $\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$ . Resulta que estos son los únicos términos que se necesitan. El Lagrangiano para un campo escalar de Klein-Gordon es [1–3]

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (4.29)$$

Entonces al tomar la variación de esto para mostrar que da (4.28). Utilizando la ecuación (2.104) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= -\frac{1}{2}m^2\frac{\partial}{\partial\phi}\phi^2 = -m^2\phi, \\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) &= \partial_\mu(-\partial^\mu\phi) = -\partial^2\phi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$-\partial^2\phi + m^2\phi = 0 \implies (\partial^2 - m^2)\phi = 0, \quad (4.31)$$

como era de esperar [1–3].

Antes de continuar, si se considera una ligera modificación del Lagrangiano escalar. En realidad se estaba considerando campos escalares reales. También se podría considerar campos escalares complejos [1, 20, 28, 29]. En este caso el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{KG} = -\partial^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi. \quad (4.32)$$

En el caso del campo real,  $\phi$  sólo tenía un único grado de libertad (real). Ahora  $\phi$  tiene dos grados de libertad reales ( $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ ). En lugar de tratar  $\phi_1$  y  $\phi_2$  como los campos independientes, trataremos  $\phi$  y  $\phi^\dagger$  como los campos independientes. Así que ecuación (4.32) describe dos campos independientes,  $\phi$  y  $\phi^\dagger$  (por eso se excluye los factores de  $\frac{1}{2}$  porque aquí hay dos campos). Se puede tomar la variación con respecto a  $\phi^\dagger$  para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger} &= -m^2\phi, \\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}\right) &= -\partial_\mu(\partial^\mu\phi), \end{aligned} \quad (4.33)$$

por lo que la ecuación de movimiento igual (4.28) [1, 3, 28].

Entonces se puede tomar una variación con respecto a  $\phi$  y encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= -m^2\phi^\dagger, \\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) &= -\partial_\mu(\partial^\mu\phi^\dagger), \end{aligned} \quad (4.34)$$

la ecuación de movimiento es

$$(\partial^2 - m^2)\phi^\dagger = 0. \quad (4.35)$$

Observe que las ecuaciones de movimiento para  $\phi$  y  $\phi^\dagger$  son simplemente la ecuación de Klein-Gordon (ambos campos satisfacen la misma ecuación de movimiento) [1, 3]. Dado que los campos escalares  $j = 0$  no tienen índices y, por tanto, se transforman trivialmente bajo cualquier tipo de transformación [8, 14, 21, 24, 26].

### 4.3.2. Campos Espín $\frac{1}{2}$

Los aparentes problemas de la ecuación de Klein-Gordon llevaron a Dirac (1928) a buscar una formulación alternativa de la mecánica cuántica relativista. La ecuación de onda resultante no sólo resolvía el problema de las densidades de probabilidad negativas, sino que también proporcionaba una descripción natural del espín intrínseco y los momentos magnéticos de los fermiones de medio espín. Su desarrollo representa uno de los grandes avances teóricos del siglo XX. El requisito de que las partículas relativistas satisfagan  $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ , hace que la ecuación de onda de Klein-Gordon sea de segundo orden en las derivadas. Dirac buscó una ecuación de onda que fuera de primer orden tanto en las derivadas espaciales como en las temporales [3].

Los campos de espín 0, son campos escalares se transforman trivialmente bajo todo. Sin embargo, como veremos, los campos de espín  $\frac{1}{2}$  son bastante diferentes. Hay una enorme cantidad de detalles muy sutiles [1, 3].

Como se vio anteriormente un estado de espín arbitrario se describe mediante dos parámetros complejos (sujetos a la condición de estar normalizados) [1, 3]. Ahora describiremos una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  con un espinor de dos componentes B

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  están ambos en  $\mathbb{C}$ . Ahora queremos una ecuación que gobierne su comportamiento.

En lo que sigue se adoptará el enfoque de Dirac para encontrar la ecuación de movimiento que gobierna [1, 3, 29]. Aunque quería que dicha ecuación se sostuviera por sí misma, razonó que también debería ser coherente con la ecuación de Klein-Gordon (que simplemente hace que la teoría sea relativista), o de algún modo implicarla. Además, quería que sólo contuviera derivadas de primer orden. Sin embargo, esto es problemático. Simplemente al actuar sobre  $\psi$  con  $\partial_\mu$ , obtenemos

$$\partial_\mu \psi = \begin{pmatrix} \partial_\mu \psi_1 \\ \partial_\mu \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

que tiene un índice espacio-temporal no contraído. Hay que contraerlo con otra cosa que tenga un índice espacio-temporal [1]. Una primera suposición puede ser algún vector  $v^\mu$ , pero la expresión  $v^\mu \partial_\mu \psi$  tiene una dirección “preferida” en el espacio-tiempo (la dirección de  $v^\mu$ ) y, por tanto, no es aceptable. En lugar de actuar sobre  $\psi$  con  $v^\mu \partial_\mu$ , Dirac buscó un operador diferencial en forma de matriz  $2 \times 2$  (para actuar sobre el espinor de 2 componentes). En otras palabras, quería encontrar un operador de la forma [1, 2, 20, 29, 30]

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3, \quad (4.38)$$

donde las  $\partial_\mu = \gamma^0$  son matrices  $2 \times 2$ . La ecuación de movimiento sería entonces

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = -im\psi, \quad (4.39)$$

o escribirlo de una manera más estándar,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (4.40)$$

El razonamiento de Dirac fue que, dada esta ecuación, la ecuación de Klein-Gordon debería producirse actuando dos veces con el “operador de Dirac”  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$  [1, 3, 28]. Escribiendo esto se obtiene

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \implies (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2) \psi = 0. \quad (4.41)$$

Esto dará la ecuación de Klein-Gordon si la parte simétrica de  $\gamma^\mu \gamma^\nu$  satisface

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}. \quad (4.42)$$

Usando la simetría de la suma en (4.41) para asegurar que se está trabajando con la parte simétrica, se requiere

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}. \quad (4.43)$$

Que corresponde al álgebra de Clifford, ver apéndice B.

Veamos cómo esta ecuación implica la ecuación de Klein-Gordon. Consideremos [1]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad (4.44)$$

si las matrices  $\gamma^\mu$  satisfacen (4.44), entonces (4.41) da

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \psi = 0 \implies (-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \psi = 0 \implies (\partial^2 - m^2) \psi = 0, \quad (4.45)$$

que es exactamente la ecuación de Klein-Gordon (4.28). Así, se tiene que la ecuación de Dirac es la “raíz cuadrada” de la ecuación de Klein-Gordon

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^2 = (\partial^2 - m^2), \quad (4.46)$$

siempre que se cumpla el álgebra de Clifford [1, 2].

Mientras se elija las  $\gamma^\mu$  matrices de modo que (4.44) se mantenga se tiene una teoría relativísticamente consistente, podemos empezar con la ecuación de Dirac [1, 3, 28]

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (4.47)$$

y tratar de encontrar las matrices  $\gamma^\mu$  adecuadas.

Para empezar, se quiere encontrar una solución a la ecuación (4.44). Ahora bien ya que se conoce la ecuación de Dirac y se podría trabajar hacia atrás a partir de ella y llegar a una lagrangiana que la produzca. Pero esto podría ocultar algunos detalles del funcionamiento de los espinores. Por tanto, se intentara construir una Lagrangiana de campo de Dirac “desde cero” y luego comprobar que satisface la ecuación de Dirac. Así que se tiene que construir un Lagrangiano. Los términos de una Lagrangiana son todos escalares de Lorentz. Típicamente esto significa términos sin índices espacio-temporales o términos con un índice espacio-temporal contraído con el operador diferencial  $\partial_\mu$ . Esto era fácil para el campo de Klein-Gordon  $\phi$  porque era un escalar para empezar. Ahora, sin embargo, tenemos que intentar encontrar un escalar puro a partir de  $\psi$ , que tiene cuatro componentes y, por tanto, un índice espinor [1, 2, 29, 30].

Empezaremos probando algo que parece que debería funcionar. Se requiere construir un escalar a partir de  $\psi$ . Sabemos que  $\psi$  es un objeto de cuatro componentes con entradas complejas, que escribiremos en términos de dos cantidades de 2 componentes  $\psi_1$  y  $\psi_2$  (en otras palabras,  $\psi_1$  tiene dos componentes complejas y  $\psi_2$  tiene dos componentes complejas) [1, 3]. Así que parece natural suponer que se puede formar un escalar a partir del conjugado hermitiano

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}^{*T} = (\psi_1^{*T} \quad \psi_2^{*T}). \quad (4.48)$$

El escalar sería entonces  $\psi^\dagger\psi$ . Ahora veamos cómo se transforma, al escribir una transformación de Lorentz genérica en la representación espinor como  $\mathcal{S}$ , y los generadores como  $S$ . Así que escribimos esta transformación como

$$\psi^\dagger\psi \rightarrow \psi'^\dagger\psi' = \psi^\dagger\mathcal{S}^\dagger\mathcal{S}\psi. \quad (4.49)$$

Esta transformación indicará que efectivamente es un escalar de Lorentz siempre que  $\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}$ . Pero sabemos exactamente cómo es esta representación a partir de los generadores (B.34) [1]. Por tanto, una transformación finita general será

$$\mathcal{S} = e^{\frac{i}{2} w_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}, \quad (4.50)$$

donde  $w_{\mu\nu}$  es un conjunto matricial real antisimétrico de parámetros (ángulos de rotación y parámetros de boost) que especifica qué transformación de Lorentz se está haciendo [1–3]. Por ejemplo  $w_{01} = -w_{10}$  es  $\phi_x$ , el parámetro de refuerzo en la dirección  $x$ ,  $w_{31} = -w_{13}$  es  $\theta_y$ , el ángulo de rotación que mezcla  $x$  y  $z$ , etc. Debido a que la suma será tanto de  $w_{\mu\nu}$  como de  $w_{\nu\mu}$ , el factor de  $\frac{1}{2}$  se incluye para no contar dos veces. Escribiendo todo esto, tenemos

$$\mathcal{S} = e^{\frac{i}{2} w_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} = e^{-\frac{1}{8} w_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]}. \quad (4.51)$$

Tomando el conjugado hermitiano del exponente obtendremos

$$\begin{aligned} \left( \frac{i}{2} w_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right)^\dagger &= \left( -\frac{1}{8} w_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right)^\dagger \\ &= \left( -\frac{1}{8} w_{\mu\nu} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \right)^\dagger \\ &= -\frac{1}{8} w_{\mu\nu}^\dagger (\gamma^{\nu\dagger} \gamma^{\mu\dagger} - \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{\nu\dagger}) \\ &= -\frac{1}{8} w_{\mu\nu} (\gamma^{\mu\dagger} \gamma^{\nu\dagger} - \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{\mu\dagger}) \\ &= -\frac{1}{8} w_{\mu\nu} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] \\ &= -\frac{1}{2} w_{\mu\nu} \left( -\frac{i}{4} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] \right) \\ &= -\frac{i}{2} w_{\mu\nu} S^{\mu\nu\dagger}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde

$$S^{\mu\nu\dagger} = -\frac{i}{4} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]. \quad (4.53)$$

Se ha utilizado el hecho de que  $w_{\mu\nu}^\dagger = -w_{\mu\nu}$  (porque  $w_{\mu\nu}$  es real y antisimétrica). Ahora, si todas las matrices  $\gamma^\mu$  son hermitianas ( $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu$ ) o todas son antihermitianas ( $\gamma^{\mu\dagger} = -\gamma^\mu$ ), entonces  $S^{\mu\nu}$  es hermitiana ( $S^{\mu\nu\dagger} = S^{\mu\nu}$ ) y tenemos

$$\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = 1, \quad (4.54)$$

como se espera para hacer (4.49) una transformación escalar [1, 3, 29]. Sin embargo, este no es el caso; por ejemplo, las definiciones de las matrices  $\gamma^\mu$  en (B.43). La matriz  $\gamma^0$  es hermitiana, pero como las matrices de Pauli son todas hermitianas,  $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ . En otras palabras, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, \\ \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i.\end{aligned}\tag{4.55}$$

Se ha llegado al sorprendente hecho de que el grupo de Lorentz no produce transformaciones unitarias de los estados [1, 3, 29]. Resulta que no existen representaciones unitarias de dimensión finita del grupo de Lorentz. En otras palabras, no hay generadores  $S^{\mu\nu}$  que satisfagan el álgebra de Lorentz que también sean hermitianos, satisfaciendo

$$S^{\mu\nu\dagger} = S^{\mu\nu}.\tag{4.56}$$

En consecuencia,  $\psi^\dagger\psi$  no es un escalar. Sin embargo, no todo está perdido; nuestro fracaso a la hora de crear un escalar nos ha dado una pista sobre cómo construir un término escalar genuino. Se sabe por el álgebra de Clifford (4.44) que  $\gamma^0$  satisface [1]

$$\begin{aligned}\{\gamma^0, \gamma^0\} &= -2\eta^{00} = -2(-1) = 2 \implies (\gamma^0)^2 = 1, \\ \{\gamma^0, \gamma^i\} &= -2\eta^{0i} = 0 \implies \gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Así, consideremos la expresión  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ . Bien es

$$\begin{aligned}\gamma^0\gamma^0\gamma^0 &= \gamma^0, \\ \gamma^0\gamma^i\gamma^0 &= -\gamma^0\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Comparando esto con (4.55), tenemos

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0,\tag{4.59}$$

para todos los índices del espacio-tiempo  $\mu$ . Por lo tanto, la razón por la que  $\psi^\dagger\psi$  no es un escalar es que en (4.54), los generadores  $S^{\mu\nu}$  no eran hermitianos [1, 3]. Ahora podemos escribir

$$\begin{aligned}S^{\mu\nu\dagger} &= -\frac{i}{4} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}], \\ &= -\frac{i}{4} [\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0], \\ &= -\frac{i}{4}\gamma^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^0, \\ &= -S^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{4.60}$$

Por lo tanto, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^\dagger &= e^{-\frac{i}{2}w_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger}}, \\
&= \gamma^0 e^{-\frac{i}{2}w_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \gamma^0, \\
&= \gamma^0 \mathcal{S}^{-1} \gamma^0.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Esta es la clave; ahora podemos escribir fácilmente el escalar de Lorentz utilizando. Primero definimos la expresión

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \tag{4.62}$$

Entonces, el escalar será  $\bar{\psi}\psi$  [1,3]. Podemos escribir la transformación fácilmente; es

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}'\psi' = \psi'^\dagger \gamma^0 \psi', \\
&= \psi^\dagger \mathcal{S}^\dagger \gamma^0 \mathcal{S} \psi, \\
&= \psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{S}^{-1} \gamma^0 \gamma^0 \mathcal{S} \psi, \\
&= \psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{S}^{-1} \mathcal{S} \psi, \\
&= \psi^\dagger \gamma^0 \psi, \\
&= \bar{\psi}\psi.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Así que con cierta dificultad se ha conseguido construir un escalar de Lorentz a partir del campo espinor  $\psi$ . Nuestro siguiente objetivo, es construir un vector de Lorentz. La expresión  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es un vector de Lorentz. Para demostrarlo necesitamos un resultado preliminar. Consideremos de nuevo el conmutador en (B.36), se puede demostrar que

$$\begin{aligned}
[\gamma^\rho, S^{\mu\nu}] &= -i(\eta^{\rho\mu}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu), \\
&= -i(\eta^{\rho\mu}\eta^{\nu c} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu c})\eta_{bc}\gamma^b, \\
&= (J^{\mu\nu})_b^\rho \gamma^b,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

donde  $J^{\mu\nu}$  es el generador de Lorentz en la representación vectorial [1]. Entonces, para ver que  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es un vector, simplemente calculamos la transformación, utilizando (4.64). Se obtiene

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\rightarrow \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi'^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi', \\
&= \psi^\dagger \mathcal{S}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \mathcal{S} \psi, \\
&= \psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{S}^{-1} \gamma^0 \gamma^\mu \mathcal{S} \psi, \\
&= \psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{S}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S} \psi, \\
&= \bar{\psi} (\mathcal{S}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}) \psi.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Ahora sólo tenemos que fijarnos en la parte que aparece entre paréntesis. Esto es (sólo en primer orden, como de costumbre)

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{S} &= \left(1 - \frac{i}{2}w_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu\left(1 + \frac{i}{2}w_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right), \\
&= \gamma^\mu + \frac{i}{2}w_{\alpha\beta}\gamma^\mu S^{\alpha\beta} - \frac{i}{2}w_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\gamma^\mu, \\
&= \gamma^\mu + \frac{i}{2}w_{\alpha\beta}[\gamma^\mu, S^{\alpha\beta}], \\
&= \gamma^\mu + \frac{i}{2}w_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta})^\mu{}_\sigma\gamma^\sigma.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Podemos reconocer la última línea como el término de primer orden en  $e^{\frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}$ , la transformación vectorial en  $\gamma^\mu$ . Por lo tanto,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es en efecto un vector espacio-temporal, que podemos contraer con el operador de diferenciación  $\partial_\mu$  para formar un escalar. Así, nuestros dos escalares de Lorentz son  $\bar{\psi}\psi$  y  $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  [1–3]. Escribir nuestro Lagrangiano es ahora bastante fácil. Es

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \tag{4.67}$$

Veamos si esto reproduce la ecuación de Dirac.

Podemos tomar las variaciones con respecto a  $\bar{\psi}$  o  $\psi$  (los resultados serán conjugados entre sí). Tomar el conjugado con respecto a  $\bar{\psi}$  es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \\
\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) &= 0, \\
\implies\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} &= 0, \\
\implies(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0,
\end{aligned} \tag{4.68}$$

que es la forma correcta de la ecuación de Dirac [1–3]. Tomar la variación con respecto a  $\psi$  es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi} &= -m\bar{\psi}, \\
\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) &= \partial_\mu (i\bar{\psi}\gamma^\mu), \\
\implies \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi} &= 0, \\
\implies i\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu) + m\bar{\psi} &= 0, \\
\implies (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Así que si tomamos la variación de (4.67) con respecto a  $\bar{\psi}$  o  $\psi$ , se obtiene la ecuación de Dirac, como era de esperar. Antes de continuar, detengámonos un momento y consideremos lo que se ha encontrado [1]. Queríamos una ecuación para el espinor de dos componentes  $\psi$  que fuera invariante relativísticamente. Lo conseguimos, pero al precio de duplicar el número de estados de  $\psi$ , de 2 a 4. Lo aceptamos y seguimos adelante. Pudimos encontrar la ecuación relevante, llamada ecuación de Dirac (4.47), que era tanto de primer orden en el operador diferencial como invariante relativista. Dirac resolvió el problema percibido con densidades de probabilidad negativas [3]. El precio es que ahora las partículas tienen que describirse mediante funciones de onda de cuatro componentes. La ecuación de Dirac podría haber resultado ser una construcción puramente matemática sin relevancia física. Sin embargo, sorprendentemente, se puede demostrar que los grados de libertad adicionales de las funciones de onda de cuatro componentes describen de forma natural el momento angular intrínseco de las partículas y antipartículas de espín medio. La ecuación de Dirac proporciona una descripción natural de las partículas de espín medio [1–3, 20, 29, 30].

### 4.3.3. Campos Espín 1

Antes de seguir adelante, será útil discutir un último tipo de campo: los campos vectoriales. Éste será un campo  $A_\mu$  con cuatro componentes que se transforman como un vector espacio-temporal bajo transformaciones de Lorentz. El potencial electromagnético, sección 2.5. Nos aproximaremos a este tipo de campos de forma un poco menos matemática y un poco más intuitiva [1–3, 20, 29, 30].

#### Construcción de un lagrangiano para campos vectoriales

Sabemos que necesitaremos términos (escalares) invariantes de Lorentz para construir una lagrangiana a partir de  $A_\mu$  [1, 3]. En segundo orden sólo hay tres términos de este tipo,

$$A_\mu A^\mu, \quad (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu), \quad (\partial_\mu A^\mu) (\partial_\nu A^\nu). \quad (4.70)$$

Se puede entonces construir un Lagrangiano a partir de estos términos, pero no sabemos cuál debe ser el coeficiente de cada uno. Así que por ahora se dejaron como variables. El Lagrangiano para  $A_\mu$  es entonces

$$\mathcal{L}_{vec} = -\frac{1}{2} ((\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \alpha (\partial_\mu A^\mu) (\partial_\nu A^\nu) + \beta A_\mu A^\mu), \quad (4.71)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes que aún no se han determinado (se puede elegir la normalización global, de modo que tomamos como 1 el coeficiente del primer término). Se puede tomar una variación con respecto a  $A_\mu$  y obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{vec}}{\partial A_\mu} &= -\beta A^\mu, \\ \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{vec}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) &= -\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \alpha \partial^\mu \partial^\nu A_\nu, \\ \implies \partial_\nu \partial^\nu A^\mu + \alpha \partial^\mu \partial^\nu A_\nu - \beta A^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Al suponer que la solución tiene la forma general de una onda [1, 3],

$$A_\mu = a_\mu e^{ip \cdot x}, \quad (4.73)$$

donde  $a_\mu$  es un vector de amplitud arbitrario y  $p \cdot x = p^\mu x_\mu$  donde  $p^\mu$  es el cuadri-vector de energía-momento para el campo. Introduciendo esto en la ecuación de movimiento (4.72) se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial^\nu (a^\mu e^{ip \cdot x}) + \alpha \partial^\mu \partial^\nu (a_\nu e^{ip \cdot x}) - \beta (a^\mu e^{ip \cdot x}) &= 0, \\ \implies p_\nu p^\nu a^\mu + \alpha p^\mu p^\nu a_\nu + \beta a^\mu &= 0, \\ \implies p_\mu (p^2 a^\mu + \alpha p^\mu p \cdot a + \beta a^\mu) &= 0, \\ \implies ((1 + \alpha) p^2 + \beta) p \cdot a &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Hay varias opciones para  $\alpha$  y  $\beta$ , pero hay una que nos da un conjunto de ecuaciones particularmente bueno. En concreto, queremos que el campo tenga amplitud sólo perpendicular a su vector energía-momento. Esto se consigue si fijamos  $\alpha = 1$ . Entonces la ecuación de movimiento es

$$p \cdot a = 0, \quad (4.75)$$

que elimina la amplitud en la dirección de  $p^\mu$  (es decir, si el campo está quieto y sólo se mueve a través del tiempo, entonces la amplitud será puramente espacial,

etc.) Además, a partir de la forma general del término  $\beta$  podemos tomar  $\beta$  como la masa del campo (los términos de masa en los campos de espín-0 y espín- $\frac{1}{2}$ ). Entonces tomamos  $\beta = m^2$  [1–3].

Nuestro Lagrangiano es ahora

$$\mathcal{L}_{vec} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu) (\partial_\nu A^\nu). \quad (4.76)$$

La nueva ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu - m^2 A^\mu &= 0, \\ \implies \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) - m^2 A^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Esto se denomina **ecuación de Proca**. Esta forma sugiere que podemos simplificar nuestra notación al tensor en cuenta el tensor electromagnético (2.81). La ecuación de movimiento se convierte entonces en

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = 0. \quad (4.78)$$

Podemos entonces reescribir el Lagrangiano en términos de esta nueva cantidad como

$$\mathcal{L}_{vec} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu. \quad (4.79)$$

Se ha deducido las ecuaciones de movimiento que describen los campos libres y las partículas. Por lo tanto, en el próximo capítulo derivaremos Lagrangianos que describen la interacción entre diferentes campos y partículas [1–3, 20, 29, 30].

## 4.4. Teoría de la interacción

Ya hemos discutido todo lo que necesitamos para determinar las ecuaciones de campo para los campos de espín 0, espín  $\frac{1}{2}$  y vectoriales. Sin embargo, se tiene que discutir: las teorías gauge [1]. La idea de las teorías gauge hunde sus raíces en las investigaciones clásicas de Hermann Weyl en la década de 1920, y la noción de que las simetrías generan interacciones se expresó plenamente en los trabajos de Yang y Mills un cuarto de siglo después. Más recientemente, el principio de invariancia gauge local ha florecido hasta convertirse en un tema unificador que parece capaz de abarcar e incluso sintetizar todas las interacciones elementales. La aparición de las teorías gauge ha ido acompañada del reconocimiento de que una descripción fundamental de las partículas elementales debe basarse en la idea de que las partículas que interactúan fuertemente, o hadrones, están compuestas por quarks. Junto con

los leptones, como el electrón y el neutrino [31].

A continuación veremos la forma correcta de los Lagrangianos, las simetrías internas, bajo la acción de los grupos de Lie. El punto de partida será la simetría local  $U(1)$  y terminaremos con el Lagrangiano [1, 2, 28, 30].

#### 4.4.1. Interacciones $U(1)$

##### Simetría interna de campos espín libre $\frac{1}{2}$

Veamos de nuevo el Lagrangiano que derivamos para una teoría de espín libre  $\frac{1}{2}$  (4.67). La hemos derivado exigiendo la simetría de Lorentz, pero si nos fijamos bien podemos descubrir otra simetría de esta Lagrangiana. El Lagrangiano no cambia si transformamos el campo  $\psi$  de la siguiente manera [1, 2, 28, 30]

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ia}\psi, \quad (4.80)$$

si tenemos en cuenta que esto implica que  $\bar{\psi}$  también se transforma

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \psi'^{\dagger}\gamma^0 = (e^{ia}\psi)^{\dagger}\gamma^0 = \bar{\psi}e^{-ia}. \quad (4.81)$$

El signo menos procede de la conjugación compleja y  $a$  es un número real arbitrario. Para ver que el Lagrangiano es invariante bajo esta transformación, transformamos el Lagrangiano explícitamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= -m\bar{\psi}'\psi' + i\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi', \\ &= -m(\bar{\psi}e^{-ia})(e^{ia}\psi) + i(\bar{\psi}e^{-ia})\gamma^{\mu}\partial_{\mu}(e^{ia}\psi), \\ &= -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = \mathcal{L}_D, \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde utilizamos que  $e^{ia}$  es sólo un número complejo, que podemos mover libremente. Recordando que aprendimos en el capítulo 3 que todos los números complejos unitarios pueden escribirse como  $e^{ia}$  y forman un grupo llamado  $U(1)$ , podemos poner lo que acabamos de descubrir en términos matemáticos, diciendo que la Lagrangiana es invariante  $U(1)$  [1, 28]. Esta simetría es una **simetría interna**, porque claramente no es una transformación del espacio-tiempo y por tanto transforma el campo internamente.

Ahora vamos a profundizar en lo que acabamos de descubrir. Hemos demostrado que somos libres de multiplicar nuestro campo por un número complejo unitario arbitrario sin cambiar nada. La transformación de simetría  $\psi \rightarrow \psi' = e^{ia}\psi$  se llama una transformación global, porque multiplicamos el campo  $\psi = \psi(x)$  en cada punto  $x$

con el mismo factor  $e^{ia}$  [1, 28, 30].

Ahora bien, ¿por qué este factor en un punto del espacio-tiempo debería estar correlacionado con el factor en otro punto del espacio-tiempo? La elección en un punto del espacio-tiempo no debería fijarlo inmediatamente en todo el universo. Esto sería extraño, porque la relatividad especial nos dice que ninguna información puede propagarse más rápido que la luz. Para una simetría global la elección se fijaría inmediatamente para cualquier punto de todo el universo [28]. Comprobemos si nuestra Lagrangiana es invariante si transformamos cada punto del espacio-tiempo con un factor diferente  $a = a(x^\mu)$ , esta es una *transformación local*

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{ia(x)}\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-ia(x)}\bar{\psi},\end{aligned}\tag{4.83}$$

donde el factor  $a = a(x)$  depende ahora de la posición, obtenemos la Lagrangiana transformada

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_D &= -m\bar{\psi}'\psi' + i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi', \\ &= -m(\bar{\psi}e^{-ia(x)})(e^{ia(x)}\psi) + i(\bar{\psi}e^{-ia(x)})\gamma^\mu\partial_\mu(e^{ia(x)}\psi), \\ &= -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i^2(\partial_\mu a(x))\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \neq \mathcal{L}_D.\end{aligned}\tag{4.84}$$

Por lo tanto, nuestro Lagrangiano no es invariante bajo la simetría  $U(1)$  local, porque la regla del producto produce un término extra. Como ya hemos dicho, nuestro lagrangiano debería ser invariante local, pero acabamos de descubrir que no lo es. Hay algo que podemos hacer al respecto, pero primero debemos investigar otra simetría [1, 28–31].

### Simetría interna de los campos libres de espín 1

A continuación, echemos un vistazo al Lagrangiano que derivamos para partículas libres de espín 1 (4.76). Aquí también podemos descubrir una simetría interna global [28–31]. Si transformamos

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + a_\mu,\tag{4.85}$$

con algunas constantes arbitrarias  $a_\mu$ , el Lagrangiano se lee [28]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{vec} &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A'_\nu) (\partial^\mu A'^\nu) - \frac{1}{2} m^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu A'^\mu) (\partial_\nu A'^\nu), \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu + a_\mu) \partial^\mu (A^\nu + a^\nu) - \frac{1}{2} m^2 (A_\mu + a_\mu) (A^\mu + a^\mu) \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu (A^\mu + a^\mu) \partial_\nu (A^\nu + a^\nu), \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{2} m^2 ((A_\mu + a_\mu) (A^\mu + a^\mu)).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Concluimos que esta transformación es una transformación de simetría global de este Lagrangiano, si nos restringimos a campos sin masa, es decir,  $m = 0$ . ¿Qué pasa aquí con la simetría local? Transformamos

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + a_\mu(x), \tag{4.87}$$

y el Lagrangiano transformado sin masa se lee

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{Maxwell} &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A'_\nu) (\partial^\mu A'^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A'^\mu) (\partial_\nu A'^\nu), \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu + a_\mu(x)) \partial^\mu (A^\nu + a^\nu(x)) + \frac{1}{2} \partial_\mu (A^\mu + a^\mu(x)) \partial_\nu (A^\nu + a^\nu(x)),
\end{aligned} \tag{4.88}$$

lo que demuestra que  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + a_\mu(x)$  no es una simetría interna local [28].

Sin embargo, podemos encontrar una simetría interna local considerando la transformación  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu a(x)$  en su lugar. Esto significa que añadimos la derivada de alguna función arbitraria  $\partial_\mu a(x)$  en lugar de una función arbitraria. Esta transformación tiene el siguiente efecto en el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{Maxwell} &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A'_\nu) (\partial^\mu A'^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A'^\mu) (\partial_\nu A'^\nu), \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu + \partial_\mu a(x)) \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu a(x)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu a(x)) \partial_\nu (A^\nu + \partial^\nu a(x)), \\
&= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu) (\partial_\nu A^\nu) = \mathcal{L}_{Maxwell}.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Vemos que se trata de una transformación de simetría local interna [1, 28, 31].

**Resumamos lo que hemos averiguado hasta ahora:**

- Descubrimos que el Lagrangiano para campos de espín libre  $\frac{1}{2}$  tiene una simetría global interna  $\psi \rightarrow \psi' = e^{ia}\psi$ . Formulado de otra manera: el Lagrangiano para campos de espín libre  $\frac{1}{2}$  es invariante bajo transformaciones globales  $U(1)$ .
- Vimos que esta simetría no es local (aunque debería serlo), porque para  $a = a(x)$ , obtenemos un término extra en la Lagrangiana de la forma (4.84).

$$-(\partial_\mu a(x)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.90)$$

En otras palabras: El Lagrangiano no es localmente invariante  $U(1)$ .

- En la última sección encontramos una simetría local interna para campos de espín 1 sin masa

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu a(x), \quad (4.91)$$

que sólo es una simetría local si añadimos la derivada de una función arbitraria  $\partial_\mu a(x)$ , en lugar de una función arbitraria  $a_\mu(x)$ .

Esto realmente parecen dos piezas de un rompecabezas que deberíamos unir. Cuando transformamos  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  y  $A_\mu$  simultáneamente, un término adicional  $A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  en el Lagrangiano se convierte en

$$A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow (A_\mu + \partial_\mu a(x)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \partial_\mu a(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.92)$$

Al comparar el segundo término con la ecuación (4.90). El nuevo término en la Lagrangiana, acoplando  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  y  $A_\mu$  juntos, por lo tanto cancela exactamente el término que impidió que la Lagrangiana para espín libre  $\frac{1}{2}$  fuera localmente invariante  $U(1)$ . Dicho de otro modo: Añadiendo este nuevo término podemos hacer que la Lagrangiana sea localmente invariante  $U(1)$  [28, 31].

Se vera con más detalle. Primero al observar que es convencional factorizar una constante  $g$  en el exponente de la transformación  $U(1)$  local:  $e^{iga(x)}$  [28]. Entonces el término extra se convierte en

$$-(\partial_\mu a(x)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow -g (\partial_\mu a(x)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.93)$$

Este factor extra  $g$  da cuenta de una constante de acoplamiento arbitraria. A continuación se agrega al Lagrangiano para campos libres de espín  $\frac{1}{2}$  el nuevo término

$$g A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (4.94)$$

donde incluimos  $\gamma^\mu$  para hacer invariante el término de Lorentz, se inserta la constante de acoplamiento  $g$ . Se obtiene así la Lagrangiana [28]

$$\mathcal{L}_{Dirac+Term-Extra} = -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (4.95)$$

Transformando este Lagrangiano según las reglas de transformaciones locales de  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  y  $A_\mu$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{Dirac+Term-Extra} &= -m\bar{\psi}'\psi' + i\bar{\psi}'\gamma_\mu\partial^\mu\psi' + gA_\mu\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' \\ &= -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + g(\partial^\mu a(x))\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + gA'_\mu\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' \\ &= -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + g(\partial^\mu a(x))\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &\quad + g(A_\mu + \partial_\mu a(x))(e^{-iga(x)}\bar{\psi})\gamma^\mu(e^{iga(x)}\psi) \\ &= -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \mathcal{L}_{Dirac+Term-Extra}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Por lo tanto, añadiendo un término extra se obtiene un Lagrangiano localmente invariante  $U(1)$ . Para describir un sistema formado por campos masivos de espín  $\frac{1}{2}$  y campos de espín 1 sin masa debemos añadir también a la lagrangiana el lagrangiano para campos libres de espín 1 sin masa. Esto nos da el Lagrangiano completo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac+Term-Extra+Maxwell} &= -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu\partial_\nu A_\mu). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Para despejar la notación, es habitual introducir un nuevo símbolo

$$D^\mu \equiv i\partial^\mu - igA^\mu, \quad (4.98)$$

llamada **derivada covariante** [28, 30, 31]. El Lagrangiano se lee entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac+Term-Extra+Maxwell} &= -m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu\partial_\nu A_\mu). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Este es el Lagrangiano correcto para la teoría cuántica de campos de la electrodinámica, comúnmente llamada **electrodinámica cuántica**. Podemos derivar este Lagrangiano simplemente haciendo uso de las simetrías internas de los Lagrangianos que describen campos de espín libre  $\frac{1}{2}$  y campos de espín libre 1 [21, 28, 31].

Surge la siguiente pregunta ¿Qué ecuaciones de movimiento se siguen de este Lagrangiano?

## Ecuaciones de Maxwell no homogéneas y Acoplamiento mínimo

Este Lagrangiano nos da las ecuaciones no homogéneas de Maxwell en presencia de corrientes. El proceso es de nuevo sencillo: simplemente ponemos la Lagrangiana (4.97), en la ecuación de Euler-Lagrange para cada campo [28]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} - \partial_\rho \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\rho)} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{4.100}$$

El resultado es

$$\begin{aligned}\bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu + m) + gA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu &= 0, \\ (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi + gA_\mu \gamma^\mu \psi &= 0, \\ \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \psi + g\bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= 0.\end{aligned}\tag{4.101}$$

Las dos primeras ecuaciones describen el comportamiento de partículas/campos de espín  $\frac{1}{2}$  en un campo electromagnético externo. En presencia de un campo externo la derivada  $\partial^\mu$  tiene que cambiarse por la derivada covariante

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu,\tag{4.102}$$

para obtener las ecuaciones correctas. La palabra “mínimo” se utiliza, porque sólo un campo gauge  $A_\mu$ , con cuatro componentes  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , se utiliza [28, 30, 31].

## Teorema de Noether para la simetría U(1) interna

En la sección 2.3.2 se vio que el teorema de Noether relaciona cada simetría interna con una cantidad conservada. ¿Qué cantidad conservada se deduce de la simetría U(1) que acabamos de descubrir? El teorema de Noether para simetrías internas nos dice que una transformación de la forma [28]

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \delta\psi,\tag{4.103}$$

conduce a una corriente de Noether

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta\psi,\tag{4.104}$$

que cumple una ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.105)$$

Una transformación global U(1) es

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iga}\psi = (1 + iga + \dots)\psi. \quad (4.106)$$

Detenemos la expansión en serie de la función exponencial, como es habitual, después del primer término, porque U(1) es un grupo de Lie y se pueden construir transformaciones arbitrarias a partir de infinitesimales. Una transformación infinitesimal se lee [28, 30, 31]

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + iga\psi. \quad (4.107)$$

Por lo tanto tenemos  $\delta\psi = iga\psi$  y como derivamos en la sección 2.3.2 la corriente de Noether correspondiente es

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta\psi, \\ &= \frac{\partial (-m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi)}{\partial (\partial_\mu \psi)} iga\psi, \\ &= -\bar{\psi}\gamma^\mu ga\psi = -ga\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Se puede ignorar la constante arbitraria  $a$ , porque la ecuación de continuidad se cumple para  $a$  arbitraria y por tanto, definimos

$$J^\mu \equiv -g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (4.109)$$

Se suele denominar la **cuadri-corriente eléctrica** [28]. La componente cero es la densidad de carga eléctrica, que nos da si la integramos, una cantidad que se conserva en el tiempo

$$Q = \int d^3x \rho = \int d^3x J^0 = -g \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi. \quad (4.110)$$

En el marco cuántico los objetos  $\psi$  se relacionarán con amplitudes de probabilidad y esta interpretación requiere que  $\int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = 1$ , porque la probabilidad global debe ser 100% = 1. Por lo tanto, la cantidad conservada es de hecho la fuerza de acoplamiento  $g$ , que para el electromagnetismo es la carga eléctrica. Por lo tanto, la simetría U(1) global conduce a la conservación de la carga eléctrica [28].

Si ahora echamos un vistazo de nuevo a la tercera ecuación de (4.101), podemos escribirla, usando la definición de la ecuación (4.109), como

$$\begin{aligned}\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= 0, \\ \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) &= J^\mu.\end{aligned}\tag{4.111}$$

Utilizando el tensor electromagnético definido en la ecuación (2.81), esta ecuación es la siguiente

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu.\tag{4.112}$$

Se trata de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell en presencia de una corriente electromagnética externa [28, 29, 31].

A continuación echaremos un rápido vistazo a las interacciones de los campos masivos de espín 1 y espín 0 [28].

### Interacción de campos masivos de espín 0

Nótese que el Lagrangiano que derivamos para campos de espín 0

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

no es invariante U(1), como podemos ver transformando  $\phi' \rightarrow \phi = e^{ia}\phi$ . No obstante, la teoría escalar compleja

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^*\phi,$$

tiene simetría U(1), porque entonces tenemos  $\phi' \rightarrow \phi = e^{ia}\phi$  y  $\phi^* \rightarrow (\phi^*)' = e^{-ia}\phi^*$ . Por lo tanto es posible derivar, análogamente a lo que hicimos para campos de espín  $\frac{1}{2}$ , una teoría de interacción para este Lagrangiano [28]. La derivación es completamente análoga y se obtiene

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \left( ((\partial_\mu + iqA_\mu)\phi^*) ((\partial^\mu - iqA^\mu)\phi) - m^2\phi^*\phi \right).$$

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange, encontramos la correspondiente ecuación de movimiento

$$(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu - iqA^\mu)\phi - m^2\phi = 0,$$

que describe un campo de espín 0 cargado acoplado a un campo de espín 1 sin masa [28, 30, 31].

## Interacción de campos masivos de espín 1

La interacción de un campo masivo de espín 1 con un campo de espín 1 sin masa también viene dictada por la simetría [28]. El Lagrangiano para campos de espín 1 sin masa viene dado por (4.79)

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.113)$$

Para distinguir entre un campo sin masa y uno masivo de espín 1, denominamos al campo masivo  $B^\mu$  y definimos

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu. \quad (4.114)$$

El Lagrangiano para este campo masivo de espín 1 es

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + m^2 B^\mu B_\mu. \quad (4.115)$$

La simetría de Lorentz dicta que el término de interacción en la Lagrangiana sea de la forma

$$\mathcal{L}_{Proca.Int} = -CG_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.116)$$

con una constante de acoplamiento  $C$  que se debe medir en los experimentos [28–31].

### 4.4.2. Interacciones SU(2)

Motivados por el éxito con la simetría  $U(1)$  queremos responder a la pregunta: ¿Es  $U(1)$  la única simetría interna de nuestros Lagrangianos? Resulta que se puede encontrar una simetría interna para dos campos de espín  $\frac{1}{2}$  sin masa [28]. Obtenemos el Lagrangiano para dos campos de espín  $\frac{1}{2}$  añadiendo dos copias del Lagrangiano. El Lagrangiano final se puede encontrar en la ecuación (4.67). Aquí se desprecia los términos de masa, lo que significa  $m = 0$ , porque de otro modo el Lagrangiano no es invariante como veremos en un momento. La suma da

$$\mathcal{L}_{D_1+D_2} = i\bar{\psi}_1\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 + i\bar{\psi}_2\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2. \quad (4.117)$$

Esto se puede reescribir, si definimos

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \bar{\Psi} &= (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2), \end{aligned} \quad (4.118)$$

donde el nuevo objeto definido  $\Psi$  se denomina doblete:

$$\mathcal{L}_{D_1+D_2} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi. \quad (4.119)$$

Este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones  $SU(2)$  globales

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = e^{i\alpha_i\frac{\sigma_i}{2}}\Psi, \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}e^{-i\alpha_i\frac{\sigma_i}{2}}, \end{aligned} \quad (4.120)$$

donde se asume implícitamente una suma sobre el índice “ $i$ ”,  $a_i$  denota constantes reales arbitrarias y  $\frac{\sigma_i}{2}$  son los generadores habituales de  $SU(2)$ , con las matrices de Pauli  $\sigma_i$  [28, 31]. Para ver la invariancia se tiene el Lagrangiano transformado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{D_1+D_2} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi', \\ &= i\bar{\Psi}e^{-i\alpha_i\frac{\sigma_i}{2}}\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\alpha_i\frac{\sigma_i}{2}}\Psi, \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = \mathcal{L}_{D_1+D_2}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

donde llegamos a la última línea porque nuestra transformación  $e^{i\alpha_i\frac{\sigma_i}{2}}$  actúa sobre el recién definido objeto de dos componentes  $\Psi$ , mientras que  $\gamma^\mu$  actúa sobre los objetos de nuestro doblete, es decir, los espinores de Dirac. Podemos expresar esto utilizando índices. Esta simetría también debería ser una simetría local. Las transformaciones  $SU(2)$  mezclan las dos componentes del doblete [28].

El problema aquí es de nuevo la derivada, que produce un término extra. Para despejar la notación, se define  $U(x) \equiv e^{-i\alpha_i(x)\frac{\sigma_i}{2}}$  :

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U(x)\Psi, \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}U^\dagger(x). \end{aligned} \quad (4.122)$$

El lagrangiano transformado es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{D_1+D_2} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi', \\ &= i\bar{\Psi}U^\dagger(x)\gamma^\mu\partial_\mu(U(x)\Psi), \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu U^\dagger(x)(\partial_\mu U(x))\Psi \neq \mathcal{L}_{D_1+D_2}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Se puede ver que el Lagrangiano no es invariante porque obtenemos un término adicional,  $i\bar{\Psi}\gamma^\mu U^\dagger(x)(\partial_\mu U(x))$ , después de la transformación.

Entonces, ¿cómo podemos modificar nuestro Lagrangiano  $\mathcal{L}_{D_1+D_2}$  de forma que sea invariante bajo transformaciones locales  $SU(2)$ ? En principio, el mismo método para asegurar  $U(1)$  local vuelve a funcionar. Ya observamos que la esencia de cómo se

tiene que cambiar el Lagrangiano se puede resumir a través de la sustitución de la derivada ordinaria  $\partial_\mu$ , con una “derivada covariante”  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$  [28]. Con esto en mente, se sustituye la derivada  $\partial_\mu$  en nuestro Lagrangiano  $\mathcal{L}_{D_1+D_2}$  por un nuevo objeto  $D_\mu$  y luego tratamos de derivar cómo es  $D_\mu$  para asegurar la invariancia local SU(2).

Concretamente, escribimos ahora

$$\tilde{\mathcal{L}}_{D_1+D_2} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi, \quad (4.124)$$

y bajo una transformación local SU(2) este Lagrangiano se convierte en

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}'_{D_1+D_2} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu (D_\mu\Psi)', \\ &= i\bar{\Psi}U^\dagger(x)\gamma^{mu} (D_\mu\Psi)', \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_{D_1+D_2}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Podemos ver aquí que este nuevo Lagrangiano es invariante bajo la transformación local SU(2)  $U(x) = e^{-ia_i(x)\frac{\sigma_i}{2}}$  si  $(D_\mu\Psi)' = U(x)D_\mu\Psi$ , porque entonces [28]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}'_{D_1+D_2} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu (D_\mu\Psi)', \\ &= i\bar{\Psi}U^\dagger(x)\gamma^{mu} (D_\mu\Psi)', \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu U^\dagger(x)U(x)D_\mu\Psi, \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_{D_1+D_2}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Así que nuestro objetivo es encontrar un objeto  $D_\mu$  que tiene exactamente este comportamiento de transformación  $(D_\mu\Psi)' = U(x)D_\mu\Psi$ . Nótese que esta propiedad es la razón por la que llamamos a  $D_\mu$  la “derivada covariante” [28]. La derivada covariante de  $\Psi$ , que denotamos por  $D_\mu\Psi$ , se transforma exactamente igual que  $\Psi$ , es decir,  $\Psi' = U(x)\Psi$ . Por lo tanto, la forma sigue siendo la misma y no obtenemos términos adicionales, como lo hacemos si utilizamos la derivada ordinaria  $\partial^\mu$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\sigma_a}{2}W_\mu^a,$$

donde  $\sigma_a$  son las matrices de Pauli. Con este requisito  $(D_\mu\Psi)' = U(x)D_\mu\Psi$ , puede traducirse ahora en una ley de transformación para los campos de espín 1  $W_\mu^a$  [28–31].

### 4.4.3. Isospin

Ahora es el momento de hablar de la cantidad conservada que se desprende de la simetría SU(2). Los lagrangianos libres sólo son invariantes globales y necesitamos

términos de interacción para hacerlos localmente simétricos [28]. Recordemos que la simetría global es un caso especial de la simetría local. Por tanto, tenemos simetría global en cada lagrangiano invariante local y la cantidad conservada correspondiente se conserva para ambos casos. El resultado será que la invariancia global SU(2) nos da a través del teorema de Noether, una nueva cantidad conservada llamada isospín. Esto es similar a la carga eléctrica, que es la cantidad conservada que se deduce de la invariancia global U(1). El teorema de Noether, nos dice que

$$\partial_0 \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Psi)} \delta \Psi = 0, \quad (4.127)$$

donde

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Psi)} \delta \Psi. \quad (4.128)$$

El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de la forma

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{ia_i \frac{\sigma_i}{2}} \Psi = (1 + ia_i \frac{\sigma_i}{2} + \dots) \Psi. \quad (4.129)$$

Por lo tanto nuestra variación infinitesimal es  $\delta \Psi = ia_i \frac{\sigma_i}{2} \Psi$ , con  $a_i$  arbitrario. Esto nos dice que obtenemos una cantidad conservada para cada generador, porque el Lagrangiano es invariante independientemente de si dos de los tres  $a_i$  son cero y uno no. Por ejemplo,  $a_2 = a_3 = 0$  y  $a_1 \neq 0$  o  $a_1 = a_2 = 0$  y  $a_3 \neq 0$ . Por supuesto, obtenemos otra cantidad conservada para  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 \neq 0$  y  $a_3 \neq 0$ , que no es más que la suma de las cantidades conservadas que obtenemos de los generadores individuales. En otras palabras: obtenemos tres cantidades conservadas independientemente, una para cada generador de SU(2) [28].

El Lagrangiano libre globalmente invariante ecuación (4.119) es

$$\mathcal{L}_{D_1+D_2} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi. \quad (4.130)$$

Las correspondientes cantidades conservadas  $Q_i$ , por ejemplo para el doblete electrón-neutrino, son

$$\begin{aligned} Q_i &= i \bar{\Psi} \gamma^0 \frac{\sigma_i}{2} \Psi, \\ &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \frac{\sigma_i}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Recordemos que sólo  $\sigma_3$  es diagonal. Esto significa que sólo podemos asignar un valor definido a las dos componentes del doblete  $(\nu_e, e)$  para la cantidad conservada  $i = 3$ .

Para los otros generadores,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , nuestras dos componentes  $\nu_e$  y  $e$  no son estados propios [21]. Por supuesto, somos libres de elegir una base diferente, en la que, por ejemplo,  $\sigma_2$  sea diagonal. Entonces podemos simplemente redefinir lo que llamamos  $\nu_e$  y  $e$  y obtener el mismo resultado. Lo que hay que tener en cuenta es que, aunque tenemos tres cantidades conservadas, una para cada generador, sólo podemos utilizar una a la vez para etiquetar nuestras partículas/estados [28].

Para  $i = 3$  tenemos

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}^\dagger \frac{\sigma_3}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \nu_e^\dagger \nu_e - \frac{1}{2} e^\dagger e
\end{aligned} \tag{4.132}$$

Esto significa que podemos asignar  $Q_3(\nu_e) = \frac{1}{2}$  y  $Q_3(e) = -\frac{1}{2}$  como nuevas etiquetas de partículas. En cambio, para  $i = 1$ , tenemos

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}^\dagger \frac{\sigma_1}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \nu_e^\dagger e + \frac{1}{2} e^\dagger \nu_e
\end{aligned} \tag{4.133}$$

y no podemos asignar ninguna etiqueta de partícula aquí, porque la matriz  $\sigma_1$  no es diagonal [28].

#### 4.4.4. Interacciones SU(3)

Para tres campos de fermiones podemos encontrar un lagrangiano invariante localmente SU(3) exactamente de la misma forma que se realizó en el capítulo anterior para dos campos y SU(2) [1, 28]. Esta simetría no se rompe y los correspondientes campos de espín 1, llamados campos de gluones, carecen de masa. SU(3) es el grupo de todas las matrices unitarias  $3 \times 3$  con determinante unitario, sección 3.

De forma análoga a lo que hicimos para SU(2), se introduce un triplete de campos de espín  $\frac{1}{2}$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad (4.134)$$

y exactamente igual que para SU(2) obtenemos nuevas etiquetas para los objetos dentro de este triplete [28].

Para que el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{Q}\partial_\mu\gamma^\mu Q - \bar{Q}mQ, \quad (4.135)$$

localmente invariante SU(3), se añaden de nuevo términos de acoplamiento entre los campos de espín  $\frac{1}{2}$  y los nuevos campos de espín 1.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \bar{Q}(iD_\mu\gamma^\mu - m)Q, \quad (4.136)$$

y el tensor de intensidad de campo  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$  para los campos de gluones de espín 1  $\mathcal{G}_\alpha \equiv T^C G_\alpha^C$  se define como

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\mathcal{G}_\beta - \partial_\beta\mathcal{G}_\alpha - g[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta]. \quad (4.137)$$

Aquí  $T^C$  denota los generadores de SU(3) [28, 30].

## Color

A partir de la simetría global SU(3) obtenemos mediante el teorema de Noether nuevas cantidades conservadas. Esto es análogo a lo que se discutió para SU(2). Siguiendo las mismas líneas de pensamiento que para SU(2) nos dice que tenemos 8 cantidades conservadas, una para cada generador [28]. De nuevo, sólo podemos usar las cantidades conservadas que pertenecen a los generadores diagonales como etiquetas de partículas. SU(3) tiene dos generadores Cartan  $\frac{1}{2}\lambda_3$  y  $\frac{1}{2}\lambda_8$ . Por lo tanto, cada partícula que interactúa a través de la fuerza fuerte lleva dos etiquetas adicionales, correspondientes a los valores propios de los generadores de Cartan.

Los valores propios de  $\frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , son  $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ .

Los valores propios de  $\lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , son  $\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ .

Por tanto, si se ordena los fermiones que interactúan fuertemente en tripletes (en la base abarcada por los vectores propios de los generadores de Cartan), se puede asignarles las siguientes etiquetas, con algún espinor arbitrario  $\psi$  [28]

$$\left( +\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \text{ para } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \psi,$$

donde se suele definir **rojo**:  $\left( +\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$ .

Esto significa algo de  $\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , es llamado rojo.

Análogamente

$$\left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \text{ para } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \psi,$$

con **azul**:  $\left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$ .

Para la tercera posibilidad se define **verde**:  $\left( 0, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$ .

Recordemos que las partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , que interactúan a través de la fuerza fuerte, se denominan quarks [28, 31]. Si se quiere hablar de quarks tenemos que considerar, los quarks son tripletes SU(3), denotados por  $Q$ . Dentro de un triplete tenemos el mismo quark, por ejemplo un up-quark  $u$ , en diferentes colores  $u_r, u_b, u_g$ .

Los tripletes siempre aparecen en pares  $\bar{Q}Q$  para obtener algo invariante SU(3), exactamente igual que siempre se necesitan pares de dobletes para obtener algo invariante SU(2). En lugar de escribir  $\bar{Q}Q$ , podemos utilizar una notación de índice:  $\bar{Q}Q = \bar{q}_c q_c$ , donde el índice  $c$  representa el color  $c = r, g, b$  [28–31].

# Conclusiones

1. Se realizó un estudio panorámico de las partículas elementales, describiendo cualitativamente sus propiedades e interacciones, con el fin de abordar las componentes del Modelo estándar.
2. El formalismo de las teorías clásicas, permitieron abordar las teorías de campo para describir la dinámica de las partículas de espín  $0, \frac{1}{2}, 1$ , con una representación matemática de los Lagrangianos que derivan las ecuaciones de campo para las partículas.
3. El estudio de las simetrías de los grupos de Lie, permitieron abordar la simetría rotacional continua, por ejemplo, los grupos de Lie  $SO(3)$  y el subgrupo  $SU(2)$ , permitieron ver la relación cuantitativa con el momento angular cuántico y su descripción matemática de las álgebras de los grupos de Lie con el espín y la simetría interna el isospín.
4. A partir del teorema de Noether que relaciona una simetría con una cantidad conservada, se discute las simetrías gauge las cuales también derivan una cantidad conservada, donde se obtuvo que a partir de la simetría  $U(1)$  es la carga eléctrica, para la simetría  $SU(2)$  el isospín y la simetría  $SU(3)$  el color.
5. En este trabajo se aprendieron diferentes herramientas que permiten realizar el estudio de la teoría gauge, bajo la acción de la descripción cuantitativa de los grupos de Lie y como consecuencia de la invarianza local de las ecuaciones de campo, que permitieron la descripción cuantitativa de las interacciones fundamentales para un mayor entendimiento de los procesos físicos de la naturaleza.

# Apéndice A. Bases Clásicas

## A.1. Principio de D'Alembert y ecuaciones de Lagrange

Considerando la segunda ley de Newton y la descomposición de fuerzas aplicadas y fuerzas de ligadura, el trabajo virtual resulta

$$\sum (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

al considerar a sistemas para los cuales el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sea nulo

$$\sum (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (\text{A.1})$$

que constituye el *principio de D'Alembert* [8,9]. La traducción del lenguaje de las  $\mathbf{r}_i$ , al de las  $q_j$  parte de las ecuaciones de transformación

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t),$$

(suponiendo  $n$  coordenadas independientes) y se efectúa mediante las reglas de cadena del cálculo de derivadas parciales. Así,  $\mathbf{v}_i$  se expresa en función de las  $\dot{q}_k$  mediante la fórmula

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

análogamente, el desplazamiento virtual arbitrario  $\delta \mathbf{r}_i$  se puede relacionar con los desplazamientos virtuales  $\delta q_j$  en coordenadas generalizadas a través de la relación

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (\text{A.3})$$

En función de las coordenadas generalizadas, el trabajo virtual de las  $\mathbf{F}_i$ , será [8–12]

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j,\end{aligned}\tag{A.4}$$

donde  $Q_j$  son las llamadas componentes de la *fuerza generalizada*, las cuales se definen en la forma:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},\tag{A.5}$$

pasemos ahora al otro término de la ecuación (A.1), que puede escribirse en la forma [8–10]

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i,$$

resulta

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\},\tag{A.6}$$

donde

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j},$$

la sustitución de estos cambios conduce al resultado

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j,$$

reemplazando los resultado en la ecuación del principio D'Alembert

$$\sum_j \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0.\tag{A.7}$$

Todo desplazamiento virtual  $\delta q_j$  será entonces independiente de  $\delta q_k$  y por tanto, la única manera de que se cumpla la ecuación (A.7) es que se anulen por separado los coeficientes [8–12]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (\text{A.8})$$

La expresión (A.8) suele llamárseles ecuaciones de Lagrange, si bien esta designación se reserva frecuentemente para la forma que toman las ecuaciones (A.8) cuando las fuerzas derivan de un potencial escalar  $V$ , las fuerzas generalizadas pueden escribirse en la forma

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (\text{A.9})$$

La ecuación (A.8) se pueden escribir también en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad (\text{A.10})$$

por lo tanto la ecuación (A.10) no están limitadas necesariamente a sistemas conservativos; solamente si  $V$  no es función explícita del tiempo, es conservativo el sistema [8–10]. Sin embargo, tal como definimos aquí  $V$  no depende de las velocidades generalizadas. Luego podemos incluir un término en  $V$  en la derivada parcial respecto a  $\dot{q}_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0,$$

definiendo una nueva función, la lagrangiana  $L$ , las ecuaciones quedan en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (\text{A.11})$$

las ecuaciones obtenidas se conocen como *ecuaciones de Lagrange* [8–14].

### A.1.1. Potencial Escalar y Vectorial

En el sistema de unidades de Gauss, las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Dado que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{B}$  puede representarse por el rotacional de un vector,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.13})$$

donde  $\mathbf{A}$  es el llamado potencial vector magnético. La ecuación del rotacional de  $\mathbf{E}$  queda en la forma [8, 11]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \left( \nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0, \\ \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned}$$

el vector que hay dentro del paréntesis tiene un rotacional nulo, lo que significa que puede ser expresado como el gradiente de un potencial escalar, podemos escribir [8–12]

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.14})$$

## A.2. Cálculo Variacionales

### A.2.1. Técnicas del cálculo de variaciones

Al considerar el problema en forma esencialmente unidimensional: se tiene una función  $f(y, \dot{y}, x)$  definida sobre un camino  $y = y(x)$  entre dos valores  $x_1$  y  $x_2$ , donde  $\dot{y}$  es la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . Se va encontrar un camino particular  $y(x)$  tal que la integral curvilínea  $J$  de la función  $f$  entre  $x_1$  y  $x_2$ ,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx, \quad (\text{A.15})$$

tenga un valor estacionario relativo a los caminos que difiera infinitesimalmente de la función correcta  $y(x)$ . Un conjunto de caminos se podría representar por  $y(x, \alpha)$  representando  $y(x, 0)$  al camino correcto [8–12]. Por ejemplo, si se selecciona una función cualquiera  $\eta(x)$  que se anule en  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , un conjunto posible de caminos variados sería

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x), \quad (\text{A.16})$$

para cualquiera de tales familias de curvas paramétricas, la  $J$  de la ecuación (A.15) será también función de  $\alpha$ :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx. \quad (\text{A.17})$$

Condición para obtener un máximo y un mínimo [8–11]

$$\left( \frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Derivando bajo el signo integral de la forma usual y factorizando

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx,$$

combinando la ecuación (A.18) se vé que la condición para que  $J$  adquiera un valor estacionario es

$$\left( \frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} dx = 0, \quad (\text{A.19})$$

ahora bien, la derivada parcial de  $y$  respecto a  $\alpha$  que aparece en la ecuación (A.19) es una función de  $x$  que es arbitraria salvo en lo que respecta a la continuidad y condiciones en los puntos extremos [8–12]. Por ejemplo, para la familia paramétrica particular de caminos variados dada por la ecuación (A.16), es la función arbitraria  $\eta(x)$ . Podemos, aplicar a la ecuación (A.19) el lema fundamental del cálculo de variaciones que dice que si

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0, \quad (\text{A.20})$$

para todas las funciones arbitrarias  $\eta(x)$  continuas hasta la segunda derivada,  $M(x)$  deberá ser idénticamente nula en el intervalo  $(x_1, x_2)$ . Podemos imaginar que construimos una función  $\eta$  que sea positiva en la inmediata proximidad de un punto cualquiera elegido en el intervalo y nula en el resto [8–12]. La ecuación (3.10) puede entonces ser válida solamente si  $M(x)$  se anula en dicho punto elegido (arbitrariamente), lo que demuestra que  $M$  debe ser nula en todo el intervalo. Por tanto,  $J$  sólo puede tener un valor estacionario si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \quad (\text{A.21})$$

la cantidad diferencial

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \equiv \delta y, \quad (\text{A.22})$$

representa el apartamiento infinitesimal del camino variado respecto al camino correcto  $y(x)$  en el punto  $x$  y por tanto corresponde al desplazamiento virtual [8, 11]. Análogamente, la variación infinitesimal de  $J$  respecto al camino correcto puede designarse

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha \equiv \delta J, \quad (\text{A.23})$$

la estacionaridad del variacional  $J$  cuando se evalúa sobre el camino correcto se manifiesta entonces como  $\delta J = 0$ . Multiplicando la ecuación (A.19) por  $d\alpha$

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha dx = 0,$$

teniendo en cuenta las ecuaciones (A.22) y (A.23), obtenemos

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \delta y dx = 0,$$

exigiendo que  $y(x)$  satisfaga a la ecuación diferencial [8–14].

## A.3. Relatividad Especial

### A.3.1. Tensores

Sistema con coordenadas

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (\text{A.24})$$

los índices griegos,  $\mu$  van, de cero a tres:  $\mu = 0, 1, 2, 3$  [15, 16]. Al usar los índices latinos por ejemplo de  $\alpha = 1, 2, 3$ . El intervalo que hay entre el origen de coordenadas  $(0, 0, 0, 0)$  y el evento  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$(\Delta s)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad (\text{A.25})$$

Considerando la matriz (2.40), la ecuación (A.25), se escribe:

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (\text{A.26})$$

La relación entre dos observadores con coordenadas  $x^\mu$  para el observador  $O$  y coordenadas  $x'^\mu$  para el observador  $O'$

$$(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z'), \quad (\text{A.27})$$

las transformaciones primadas y no primadas están conectadas por las transformaciones de Lorentz, por lo que la relación es

$$x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}, \quad (\text{A.28})$$

$$x^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} x'^{\nu}. \quad (\text{A.29})$$

La derivada se usa en notación compacta

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right), \quad (\text{A.30})$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla \right), \quad (\text{A.31})$$

el producto  $\partial^{\mu}\partial_{\mu} = \partial^0\partial_0 + \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}$  es [15,16]

$$\square = \partial^2 = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{A.32})$$

### A.3.2. Transformación de Lorentz

Hay varias formas de obtener la expresión de la transformación  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ . En primer lugar, consideramos la transformación

$$t \longrightarrow \tilde{t} = ict, \quad (\text{A.33})$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria, es decir  $i^2 = -1$ . El elemento línea ahora se lee

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{A.34})$$

que es el elemento de línea en el espacio Euclidiano de 4 dimensiones,  $\mathbb{R}^4$  [15, 16]. Consideremos una rotación en el plano  $\tilde{t}x$ . La matriz de rotación es

$$R_{\tilde{t}x}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

donde  $\psi$  es el ángulo de rotación. Donde

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{t} \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi d\tilde{t} + \sin \psi dx + 0 + 0 \\ -\sin \psi d\tilde{t} + \cos \psi dx + 0 + 0 \\ 0 + 0 + dy + 0 \\ 0 + 0 + 0 + dz \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} d\tilde{t} \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d\tilde{t}' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi d\tilde{t} + \sin \psi dx \\ -\sin \psi d\tilde{t} + \cos \psi dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Si consideramos un evento que no está cambiando las coordenadas espaciales en el marco de referencia  $(\tilde{t}, x, y, z)$ , tenemos  $dx = 0$  y por lo tanto [15, 16]

$$\frac{dx'}{d\tilde{t}'} = -\frac{\sin \psi d\tilde{t}}{\cos \psi d\tilde{t}} = -\tan \psi. \quad (\text{A.37})$$

Nótese que  $\frac{dx'}{d\tilde{t}'} = -v$ , donde  $-v$  es la velocidad de referencia  $(ct, x, y, z)$  con respecto al sistema de referencia  $(ct', x', y', z')$ , y por tanto

$$\tan \psi = -i\beta, \quad (\text{A.38})$$

donde hemos definido  $\beta = \frac{v}{c}$ . Dado que

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \sin \psi &= \tan \psi \cos \psi = -\frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

la ecuación (A.36) se convierte en

$$\begin{pmatrix} cd\tilde{t} \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} cd\tilde{t}' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma cd\tilde{t} - \gamma\beta dx \\ -\gamma\beta cd\tilde{t} + \gamma dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (\text{A.40})$$

donde hemos definido el *factor de Lorentz* [15, 16]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{A.41})$$

la expresión para  $\Lambda_{x \nu}^{\mu}$

$$\Lambda_{x \nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.42})$$

el subíndice  $x$  indica la velocidad relativa de los dos marcos de referencia es a lo largo del eje  $x$  [15, 16].

### A.3.3. Transformaciones físicamente admisibles

El grupo de Lorentz se define por la ecuación (2.43). Al considerar el determinante de (2.43), se obtiene

$$\det(\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\rho\sigma}) = \det(g_{\mu\nu}) \rightarrow g\Lambda^2 = g \rightarrow \Lambda = \pm 1. \quad (\text{A.43})$$

Por lo tanto, el determinante de una transformación de Lorentz es 1 o  $-1$ . Al considerar por ejemplo, las transformaciones

$$(\Lambda_p)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

tiene determinante  $-1$ , satisface la ecuación (2.43), su efecto sobre un vector arbitrario

$$\Lambda_p(t, \mathbf{x})^T = (t, -\mathbf{x})^T. \quad (\text{A.45})$$

Observe que esta transformación cambia la lateralidad del sistema [1, 15, 16]. Si  $(x, y, z)$  es diestro entonces  $(-x, -y, -z)$  es zurdo. Por esta razón se llama  $\Lambda_p$  transformación de paridad, o transformaciones propias de Lorentz. La transformación

$$(\Lambda_T)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

que toma la forma

$$\Lambda_T(t, \mathbf{x})^T \rightarrow (-t, \mathbf{x})^T, \quad (\text{A.47})$$

corresponde a la transformación de inversión temporal. Se puede clasificar las transformaciones de Lorentz en dos categorías: las transformaciones propias y las impropias [1, 15, 16].

### A.3.4. Generadores de los demás componentes del grupo de Lorentz

Para entender como son los generadores para transformaciones de los otros componentes del grupo de Lorentz. Simplemente se tiene que actuar con la operación de paridad y el operador inversión temporal, sobre las matrices  $J_i$  y  $K_i$  [1, 15, 16].

$$(\Lambda_p)^\alpha{}_{\alpha'} (\Lambda_p)^\beta{}_{\beta'} (J_i)^{\alpha'\beta'} \cong \Lambda_p J_i (\Lambda_p)^T = J_i \cong (J_i)^{\alpha\beta} \quad (\text{A.48})$$

$$(\Lambda_p)^\alpha{}_{\alpha'}(\Lambda_p)^\beta{}_{\beta'}(K_i)^{\alpha'\beta'} \cong \Lambda_p K_i (\Lambda_p)^T = -K_i \cong -(K_i)^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.49})$$

se puede comprobar utilizando las matrices explicitas derivadas en la sección 3.5.7. En conclusión se tiene bajo transformaciones de paridad

$$\underbrace{J_i \rightarrow J_i}_p \qquad \underbrace{K_i \rightarrow -K_i}_p. \quad (\text{A.50})$$

Para los generadores inversión temporal el resultado es el mismo, por que la inversion en el tiempo implica solo la primera componente

$$\underbrace{J_i \rightarrow J_i}_T, \qquad \underbrace{K_i \rightarrow -K_i}_T. \quad (\text{A.51})$$

# Apéndice B. Álgebras de Lie

## B.1. Relación de las representaciones del grupo de Lorentz

Típicamente se llama a la representación  $(\frac{1}{2}, 0)$  la representación **Espinor Zurdo**, y a la representación  $(0, \frac{1}{2})$  la representación **Espinor Derecho** [1, 28]. Simplemente se entiende que la palabra “espinor” es el nombre de la representación. En otras palabras, “espinor” es la palabra que se usa en lugar de “vector”.

Los objetos de los componentes sobre los que actúa la representación espinor zurdo

$$\chi_L = \begin{pmatrix} (\chi_L)_1 \\ (\chi_L)_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Los espinores son objetos de dos componentes. Una posible definición de los espinores quirales izquierdos es que son objetos que se transforman bajo transformaciones de Lorentz según la representación  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Y los objetos de la representación  $(0, \frac{1}{2})$  del grupo de Lorentz que actúa sobre espinores derecho

$$\chi_R = \begin{pmatrix} (\chi_R)_1 \\ (\chi_R)_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

El nombre genérico de los espinores izquierdos y derechos es espinores de Weyl [1, 28].

### B.1.1. Notación Van der Waerden

Se introduce una notación que hace muy cómodo trabajar con espinores [1, 28]. Se define que un espinor quiral izquierdo  $\chi_L$  tiene un índice inferior sin puntos

$$\chi_L = \chi_a, \quad (\text{B.3})$$

y un espinor quiral derecho  $\chi_R$  tiene un índice superior, punteado

$$\chi_R = \chi^{\dot{a}}. \quad (\text{B.4})$$

A continuación, se introduce la “métrica espinor”. La métrica espinor nos permite transformar un espinor quirral derecho en quirral izquierdo y viceversa, la métrica espinor [1, 28]

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Además, se define

$$\chi_L^C \equiv \epsilon \chi_L^*, \quad (\text{B.6})$$

donde  $*$  denota conjugación compleja. Ahora inspeccionaremos cómo se transforma  $\chi_L^C$  bajo transformaciones de Lorentz y veremos que se transforma precisamente como un espinor quirral derecho. El rasgo definitorio de un espinor quirral derecho es su comportamiento de transformación y, por tanto, se concluye que  $\chi_L^C$  es un espinor quirral derecho. Veamos cómo se transforma  $\chi_L^C$  bajo Boosts

$$\begin{aligned} \chi_L^C \rightarrow \chi_L'^C &= \epsilon (\chi_L')^*, \\ &= \epsilon \left( e^{\phi \cdot \frac{\sigma}{2}} \chi_L \right)^*, \\ &= e^{-\phi \cdot \frac{\sigma}{2}} \chi_L^C, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

que es exactamente el comportamiento de transformación de un espinor quirral derecho. Se puede comprobar de la misma manera que el comportamiento bajo rotaciones no cambia por conjugación compleja, como debería ser, porque  $\chi_L$  y  $\chi_R$  se transforman de la misma manera bajo rotaciones [1, 28]

$$\begin{aligned} \chi_L^C \rightarrow \chi_L'^C &= \epsilon (\chi_L')^*, \\ &= \epsilon \left( e^{i\theta \cdot \frac{\sigma}{2}} \chi_L \right)^*, \\ &= e^{\theta \cdot \frac{\sigma}{2}} \chi_L^C. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Además, se sabe sabemos que si se quiere obtener  $\chi_R$  a partir de  $\chi_L$  se tiene que utilizar también la conjugación compleja

$$\chi_R = \epsilon \chi_L^*, \quad (\text{B.9})$$

esto significa que la conjugación compleja transforma un índice sin puntos en un índice con puntos [1, 28]

$$\chi_R = \epsilon \chi_L^* = \chi^{\dot{a}}. \quad (\text{B.10})$$

Por lo tanto, se puede obtener un índice inferior, punteado, conjugando  $\chi_L$  complejo:

$$\chi_L^* = \chi_a^* = \chi_{\dot{a}}, \quad (\text{B.11})$$

y un índice superior, sin puntos, mediante conjugación compleja  $\chi_R$

$$\chi_R^* = (\chi^{\dot{a}})^* = \chi^a. \quad (\text{B.12})$$

Resulta instructivo investigar cómo se transforman  $\chi^{\dot{a}}$  y  $\chi^a$ , porque estos objetos son necesarios para construir términos a partir de espinores, que no cambian bajo transformaciones de Lorentz [1, 28]. Términos como éste son increíblemente importantes, porque los necesitamos para derivar leyes físicas que sean las mismas en todos los marcos de referencia. Esto se hará explícito en un momento. A partir del comportamiento de transformación de un espinor quirral izquierdo

$$\chi_L = \chi_a \rightarrow \chi'_a = \left( e^{i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2}} \right)_a^b \chi_b, \quad (\text{B.13})$$

podemos derivar cómo se transforma un espinor con índice inferior, punteado:

$$\begin{aligned} \chi_L^* = \chi_a^* = \chi_{\dot{a}} \rightarrow \chi'_{\dot{a}} &= (\chi'_a)^* = \left( \left( e^{i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2}} \right)_a^b \right)^* \chi_b^* \\ &= \left( e^{-i\theta\frac{\sigma^*}{2} + \phi\frac{\sigma^*}{2}} \right)_{\dot{a}}^b \chi_b. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

De forma análoga, se utiliza lo que sabemos cómo se transforma un espinor quirral derecho:

$$\chi_R \rightarrow \chi'_R = \chi^{\dot{a}} = \left( e^{i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2}} \right)_{\dot{a}}^b \chi^b, \quad (\text{B.15})$$

para derivar cómo se transforma un espinor con índice superior no punteado:

$$\begin{aligned} \chi_R^* = (\chi^{\dot{a}})^* = \chi^a \rightarrow \chi'^a &= (\chi'^{\dot{a}})^* = \left( \left( e^{i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2}} \right)_{\dot{a}}^b \right)^* (\chi^b)^* \\ &= \left( e^{-i\theta\frac{\sigma^*}{2} - \phi\frac{\sigma^*}{2}} \right)_b^a \chi^b. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Para poder escribir productos de espinores que no cambien bajo transformaciones de Lorentz, se necesita un ingrediente más. Recordemos cómo se define el producto escalar de dos vectores:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ . Con el mismo espíritu debemos transponer uno de los espinores en un producto de espinores. Podemos ver esto, porque en este momento tenemos el conjugado complejo de las matrices de Pauli  $\sigma_i^*$ . Junto con la transposición esto se convierte en el conjugado hermitiano:  $\sigma_i^\dagger = (\sigma_i^*)^T$ , donde el símbolo  $\dagger$  se llama “daga”. El conjugado hermitiano de cada matriz de Pauli, es de nuevo la misma matriz de Pauli [1, 28].

$$\sigma_i^\dagger = (\sigma_i^*)^T = \sigma_i. \quad (\text{B.17})$$

Comparando la ecuación (B.13) con la ecuación (B.16) y utilizando la ecuación (B.17), vemos que el comportamiento de transformación de un espinor transpuesto con índice inferior sin puntos es exactamente el opuesto al de un espinor con índice superior sin puntos. Esto significa que un término de la forma  $(\chi^a)^T \chi_a$  es invariante (no cambia) bajo transformaciones de Lorentz, porque [1, 28]

$$(\chi^a)^T \chi_a \rightarrow (\chi'^a)^T \chi'_a = (\chi^C)^T \chi_C. \quad (\text{B.18})$$

Del mismo modo, se puede combinar un índice superior, punteado, con un índice inferior, punteado. Por el contrario, un término de la forma  $(\chi^{\dot{a}})^T \chi_a \cong \chi_R^T \chi_L$  no es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Por lo tanto, un término que combina un espinor quirral izquierdo con un espinor quirral derecho no es invariante de Lorentz. Concluimos, siempre debemos combinar un índice superior con uno inferior del mismo tipo para obtener términos invariantes de Lorentz [1, 28].

Además, ahora se puede escribir los dos operadores de transformación como un objeto  $\Lambda$ . Por ejemplo, cuando tiene índices punteados sabemos que se multiplica con un espinor quirral derecho y sabemos qué operador de transformación elegir:

$$\chi_R \rightarrow \chi'_R = \chi'^a = \Lambda^{\dot{a}}{}_{b} \chi^{\dot{b}} = (e^{i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2}})^{\dot{a}}{}_{b} \chi^{\dot{b}}, \quad (\text{B.19})$$

y análogamente para espinores quirales izquierdos

$$\chi_L \rightarrow \chi'_L = \chi'_a = \Lambda_a{}^b \chi_b = (e^{i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2}})_a{}^b \chi_b. \quad (\text{B.20})$$

por lo tanto

$$\Lambda_{(\frac{1}{2}, 0)} = (e^{i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2}}) \cong \Lambda_a{}^b, \quad (\text{B.21})$$

y

$$\Lambda_{(0, \frac{1}{2})} = (e^{i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2}}) \cong \Lambda^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}. \quad (\text{B.22})$$

Esta notación es útil porque, como hemos visto, los dos objetos diferentes  $\chi_L$  y  $\chi_R$  no son tan diferentes después de todo. De hecho, podemos transformarlos el uno en el otro y el resultado lógico es una notación unificada [1, 28].

### B.1.2. Espinores y Paridad

Hasta aquí no hay ninguna justificación de por qué se llama quiral-izquierda a los objetos que se transforman según la representación  $(\frac{1}{2}, 0)$  y quiral-derecha a los objetos que se transforman según la representación  $(0, \frac{1}{2})$ . Y teniendo en cuenta el comportamiento de los generadores del grupo de Lorentz bajo transformaciones de paridad, ver apéndice A.3.3 y A.3.4 [1, 28].

Se puede ver que bajo transformaciones de paridad  $N^+ \leftrightarrow N^-$ , ecuación (3.36). Por tanto la representación  $(0, \frac{1}{2})$  de una transformación se convierte en la representación  $(\frac{1}{2}, 0)$  de esta transformación y viceversa bajo transformaciones de paridad.

Las rotaciones son las mismas para ambas representaciones, pero los transformaciones de Boots difieren por un signo [1, 28]

$$\begin{aligned} (\Lambda_{\mathbf{K}})_{(\frac{1}{2}, 0)} &= e^{\phi \mathbf{K}} \underbrace{\rightarrow}_P e^{-\phi \mathbf{K}} = (\Lambda_{\mathbf{K}})_{(0, \frac{1}{2})}, \\ (\Lambda_{\mathbf{K}})_{(0, \frac{1}{2})} &= e^{-\phi \mathbf{K}} \underbrace{\rightarrow}_P e^{\phi \mathbf{K}} = (\Lambda_{\mathbf{K}})_{(\frac{1}{2}, 0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Si se quiere describir un sistema físico que sea invariante bajo transformaciones de paridad, siempre se necesita espinores derechos e izquierdos. Se pueden escribirlos en un único objeto llamado espinor de Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \xi^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Recordando que el nombre genérico para los espinores izquierdos y derechos es espinor de weyl, se puede decir que un espinor de Dirac  $\Psi$  consiste en dos espinores de weyl  $\chi_L$  y  $\xi_R$ . Un espinor de Dirac se transforma según la representación  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$  del grupo de lorentz, lo que significa que se puede escribir las transformaciones correspondientes en forma de bloque diagonal en una gran matriz [1, 28]

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Lambda_{(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})} \Psi = \begin{pmatrix} \Lambda_{(\frac{1}{2}, 0)} & 0 \\ 0 & \Lambda_{(0, \frac{1}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}, \quad (\text{B.25})$$

por ejemplo una transformación de Boots tiene la siguiente forma

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \begin{pmatrix} e^{\phi \frac{\sigma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\phi \frac{\sigma}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

Es instructivo investigar cómo se comportan los espinores de Dirac bajo transformaciones de paridad. No podemos esperar que un espinor de Dirac sea después de una

transformación de paridad todavía un espinor de Dirac (un objeto que se transforma según la representación  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ ), porque sabemos que bajo transformaciones de paridad  $N^+ \leftrightarrow N^-$  y por tanto [1, 28]

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \underset{p}{\leftrightarrow} \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Por tanto un espinor de Dirac se transforma según  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ , el objeto transformado de paridad se transforma según la representación  $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$

$$\Psi^P \rightarrow (\Psi^P)' = \Lambda_{(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)} \Psi^P = \begin{pmatrix} \Lambda_{(0, \frac{1}{2})} & 0 \\ 0 & \Lambda_{(\frac{1}{2}, 0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_R \\ \chi_L \end{pmatrix}, \quad (\text{B.27})$$

por lo tanto

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} \rightarrow \Psi^P = \begin{pmatrix} \xi_R \\ \chi_L \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Un espinor de Dirac transformado en paridad contiene los mismos objetos  $\xi_R, \chi_L$  que el espinor de Dirac sin transformar, sólo que escritos de forma diferente [1, 28].

### B.1.3. Espinores y Conjugación de cargas

En la sección B.1.1 tropezamos con una transformación, que da  $\chi_L \rightarrow \chi_R$  y  $\xi_R \rightarrow \xi_R$ . La transformación se consigue mediante  $\chi_L \rightarrow \chi_L^C = \epsilon \chi_L^* = \chi_R$  y análogamente para un espinor quiral derecho  $\xi_R \rightarrow \xi_R^C = (-\epsilon) \xi_R^* = \xi_L$ . Ahora se es capas de entender desde una perspectiva bastante diferente [1, 28].

Hasta este punto, se ha utilizado esta transformación simplemente como un truco para subir y bajar índices. Ahora bien, ¿cómo se transforma un espinor de Dirac bajo dicha transformación? Ingenuamente obtenemos:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \chi_R^C \\ \xi_L^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \xi_L \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Este objeto no se transforma como un espinor de Dirac, que se transforma bajo Boots de la siguiente manera [1, 28]

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \begin{pmatrix} e^{\theta \frac{\sigma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\theta \frac{\sigma}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

En cambio, el objeto  $\tilde{\Psi}$  que obtenemos de la operación ingenua, se transforma como

$$\tilde{\Psi} \rightarrow \tilde{\Psi}' = \begin{pmatrix} e^{\theta \frac{\sigma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\theta \frac{\sigma}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Este es un tipo diferente de objeto, porque se transforma según una representación diferente del grupo de Lorentz. Por tanto, escribimos [1, 28]

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} \rightarrow \Psi^C = \begin{pmatrix} \xi_R^C \\ \chi_L^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad (\text{B.32})$$

que incorpora el comportamiento de transformación que se observaron anteriormente y se transforma como un espinor de Dirac. Esta operación se denomina comúnmente conjugación de cargas. Se sabe que esta transformación transforma un espinor quiral izquierdo en quiral derecho, es decir, invierte una etiqueta que utilizamos para describir nuestras partículas elementales [1, 28].

## B.2. álgebra de Clifford

Una forma matemáticamente más general de ver las representaciones espinorales, para ello se utiliza el **Álgebra de Clifford**. Un álgebra de Clifford en  $n$  dimensiones es un conjunto de  $n$  matrices  $\gamma^\mu$  para  $i = 0, \dots, n - 1$  con componentes  $(\gamma^\mu)^{ab}$  que satisfacen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (\text{B.33})$$

donde  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$  es el anticomutador de  $\gamma^\mu$  y  $\gamma^\nu$  [1, 2, 28]. Entonces, ¿cómo se relaciona (B.33) con el grupo de Lorentz? Consideremos la matriz definida por

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{B.34})$$

Los índices de  $S^{\mu\nu}$  son antisimétricos, y cada  $S^{\mu\nu}$  será una matriz  $n \times n$  con componentes  $(S^{\mu\nu})^{ab}$ . Se puede reescribir  $S^{\mu\nu}$  utilizando (B.33)

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \\ &= \frac{i}{4} (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), \\ &= \frac{i}{4} (\gamma^\mu\gamma^\nu - (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)), \\ &= \frac{i}{2} (\gamma^\mu\gamma^\nu + \eta^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

El siguiente conmutador [1, 2, 28]

$$\begin{aligned}
[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] &= \left[ \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\rho \right], \\
&= \left[ \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \eta^{\mu\nu}), \gamma^\rho \right], \\
&= \frac{i}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\rho], \\
&= i (\gamma^\nu \eta^{\rho\mu} - \gamma^\mu \eta^{\nu\rho}).
\end{aligned} \tag{B.36}$$

### B.2.1. Soluciones al Álgebra de Clifford

Se ha introducido el álgebra de Clifford, pero no se he dicho nada sobre cómo resolverla. Ahora ya se está listo para hacerlo. Resulta que hay un buen “truco” que se puede utilizar para encontrar soluciones a (4.44) [1, 2, 28]. Al considerar las siguientes  $2 \times 2$  matrices,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{B.37}$$

La siguiente expresión para un tipo de producto entre ellos,

$$A \otimes B \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} \\ ab_{21} & ab_{22} \end{pmatrix}.$$

Esta notación es conveniente porque nos permite escribir la siguiente identidad:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD), \tag{B.38}$$

donde  $AC$  y  $BD$  son simplemente los productos matriciales  $2 \times 2$  habituales. ¿Qué utilidad tiene esto? Queremos satisfacer (4.44). Por lo tanto, las matrices  $\gamma^\mu$  deben satisfacer

$$\begin{aligned}
(\gamma^0)^2 &= (-2)\eta^{00} = 2, \\
(\gamma^i)^2 &= (-2)\eta^{ii} = -2,
\end{aligned} \tag{B.39}$$

mientras que en caso contrario deberían anticonducirse. Como una forma de construir esto, considere las matrices de Pauli más la matriz identidad [1, 2, 28]. Podemos calcular fácilmente las relaciones de anticonmutación para las matrices de Pauli,

$$\begin{aligned}
\{\sigma^i, \sigma^j\} &= 2\delta^{ij}, \\
\{\sigma^0, \sigma^\mu\} &= 2\sigma^\mu.
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Consideremos ahora las  $4 \times 4$  matrices  $(\sigma^\mu \otimes \sigma^\nu)$ . Podemos generar varios productos de esta forma y calcular fácilmente sus relaciones de anticonmutación utilizando (B.38). Al considerar, por ejemplo, el conjunto

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= (\sigma^0 \otimes \sigma^1), \\ \gamma^i &= i(\sigma^i \otimes \sigma^2).\end{aligned}\tag{B.41}$$

Las relaciones de anticonmutación son [1, 2, 28]

$$\begin{aligned}\{\gamma^0, \gamma^0\} &= 2(\sigma^0 \otimes \sigma^1)(\sigma^0 \otimes \sigma^1) = 2(\sigma^0 \sigma^0 \otimes \sigma^1 \sigma^1) = 2, \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= i^2(\sigma^i \otimes \sigma^2)(\sigma^j \otimes \sigma^2) + i^2(\sigma^j \otimes \sigma^2)(\sigma^i \otimes \sigma^2), \\ &= -(\sigma^i \sigma^j \otimes \sigma^2 \sigma^2) - (\sigma^j \sigma^i \otimes \sigma^2 \sigma^2), \\ &= -(\{\sigma^i, \sigma^j\} \otimes 1) = -2\delta^{ij},\end{aligned}\tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}\{\gamma^0, \gamma^i\} &= i(\sigma^0 \otimes \sigma^1)(\sigma^i \otimes \sigma^2) + i(\sigma^i \otimes \sigma^2)(\sigma^0 \otimes \sigma^1), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Las expresiones (B.41) son una representación del álgebra de Clifford. Escribiéndolas explícitamente tenemos

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^i &= i \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{B.43}$$

Se llama la Representación Quiral del álgebra de Clifford. A veces también se denomina Representación de Weyl [1, 2, 28].

# Bibliografía

- [1] Matthew Robinson. *Symmetry and the standard model*. Springer, 2011.
- [2] Palash B Pal. *An introductory course of particle physics*. Taylor & Francis, 2014.
- [3] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2020.
- [4] Mark Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [5] PDG. *The Review of Particle Physics (2022)*. url: <https://pdg.lbl.gov/>.
- [6] Cern. *The Large Hadron Collider*. url: <https://home.cern/science/accelerators/large-hadron-collider>.
- [7] Cern. *The Higgs boson*. url: <https://home.cern/science/physics/higgs-boson>.
- [8] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica*. Reverté, 1987.
- [9] C. Terencio Soldovieri. *Introducción a la mecánica de Lagrange Hamilton*. Reverte, Editorial SA., 2010.
- [10] Lev Davidovich Landau y Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Curso de física teórica*. Reverte, Editorial SA, 2002.
- [11] RA Diaz Sanchez. *Mecánica Analítica: Notas de Clase*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá., 2012.
- [12] Walter Greiner y D Allan Bromley. *Classical mechanics: systems of particles and Hamiltonian dynamics*. Springer, 2003.
- [13] Jorge Mahecha Gomez. *Mecánica clásica avanzada*. Universidad de Antioquia, 2006.
- [14] José A Oller. *Mecánica teórica*. Capítulo, 2010.
- [15] Cosimo Bambi. *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*. Springer, 2018.

- [16] Rafael Ferraro. “Einstein” space-time: An introduction to special and general relativity”. En: (2007).
- [17] Lorenzo De la Torre. *Elementos de relatividad*. Universidad de Antioquia, 2008.
- [18] Boris Kosyakov. *Introduction to the classical theory of particles and fields*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [19] Jairo Andres Fajardo. “Lagrangianos de segundo orden en teoría clásica de campos”. En: REVISTA DE CIENCIAS 4.1 (2014).
- [20] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020..
- [21] Howard Georgi. *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories*. Taylor & Francis, 2000.
- [22] Anthony Zee. *Group theory in a nutshell for physicists*. Vol. 17. Princeton University Press, 2016.
- [23] Wu-Ki Tung. *Group theory in physics*. Vol. 1. World Scientific, 1985.
- [24] Zhong-Qi Ma. *Group theory for physicists*. World Scientific, 2007.
- [25] John F Cornwell. *Group theory in physics: An introduction*. Academic press, 1997.
- [26] Brian C Hall y Brian C Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*. Springer, 2013.
- [27] Bruce E Sagan. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric Vol. 203*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] Jakob Schwichtenberg. *Physics from symmetry*. Springer, 2018.
- [29] Yorikiyo Nagashima. *Elementary Particle Physics: Quantum Field Theory and Particles V1*. Vol. 1. John Wiley & Sons, 2011.
- [30] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge university press, 2014.
- [31] Michio Kaku. *Quantum field theory: a modern introduction*. Oxford University Press on Demand, 1993.