DISEÑO DE UN REGISTRO SEMIÓTICO INTERACTIVO PARA REPRESENTAR E INTERACTUAR CON LOS AXIOMAS DE UN GRUPO ALGEBRAICO

JUAN JOSÉ ALEGRÍA ESCOBAR

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN, CAUCA

2019

DISEÑO DE UN REGISTRO SEMIÓTICO INTERACTIVO PARA REPRESENTAR E INTERACTUAR CON LOS AXIOMAS DE UN GRUPO ALGEBRAICO

JUAN JOSÉ ALEGRÍA ESCOBAR

DIRECTOR

DUMAS MANZANO FRANCO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN, CAUCA

2019

Contenido

Introducción

Los signos son el eje central del trabajo en matemáticas, cumplen el papel de mediadores en el proceso de acceder al conocimiento abstracto que definen las matemáticas, así lo afirma. Duval (2006). “ningún tipo de proceso matemático puede ser ejecutado sin usar algún sistema semiótico de representación”. (p.107), luego la construcción de conocimiento matemático al ser una actividad matemática también será ejecutada mediante procesos semióticos, así que los razonamientos desarrollados con el uso de símbolos será un tópico de importancia para la actividad de enseñar. Los objetos que se manipulan mediante procesos matemáticos son accesibles solo mediante representaciones semióticas, así que el desarrollo de métodos que faciliten la manipulación y visualización de los objetos mediante representaciones será siempre necesario para la divulgación y construcción del conocimiento.

Ya que el aula de clase no está alejada de la realidad simbólica que conlleva intentar construir conocimiento, siendo evidente que en matemáticas el proceso de aprendizaje esta mediado enteramente por símbolos y que el conocimiento matemático, es desarrollado mediante estos. Según Hoffman (2006).”La cognición matemática esta mediada por representaciones. La actividad matemática es desarrollada por el significado que tienen los signos visibles, y al interpretar y transformar signos nosotros construimos conocimiento matemático”. Entonces, los símbolos juegan el papel principal en la clase de matemáticas, ya que es la única forma que se tiene de acceder al conocimiento matemático es mediante los símbolos y sus transformaciones, con esto se muestra la importancia que tienen los procesos simbólicos y la investigación en sus aplicaciones.

Para formar educadores en matemáticas capaces de enfrentarse a los problemas que conlleva la enseñanza, la Universidad Del Cauca cuenta en el programa de licenciatura con cuatro cursos los cuales hacen parte de lo que se denomina practica pedagogía el en que se induce al practicante a indagar, investigar, observar los problemas que se pueden presentar en el aula de clase, además de fomentar el desarrollo de soluciones, para abordar estas problemáticas. Durante la práctica se realiza un proceso llamado la inmersión, el cual da la posibilidad al practicante de observar las actividades de una clase de matemáticas, con el fin de identificar problemáticas, o aptitudes de los estudiantes con el fin de desarrollar una propuesta de intervención que es el paso final en el proceso de práctica, este trabajo resulta del proceso de inmersión e intervención que se realizó en el colegio Carlos M Simmons.

El proceso de inmersión logró evidenciar que parte de la confusión que tienen algunos de los estudiantes al momento de trabajar con ideas abstractas, es que los símbolos usados por los alumnos no evidenciaban las propiedades de los objetos que están representando, algunos estudiantes los trabajan, pero las observaciones mostraron que no lograban pasar más allá de la mera interpretación mecánica y de expresiones que ayudaban a realizar este proceso, tales como: “pase al otro lado”, “cambiar el signo”, “si multiplica pasa a dividir”, “se multiplica en cruz”, esto se aplica en las aulas de clase con el fin de facilitar el uso de las propiedades de los números, pero al final tergiversan las propiedades y su correcto uso,

Por ejemplo la expresión “pasar al otro lado” muy común en las aulas de clase, describe una aplicación de la propiedad cancelativa de un grupo:

$$Sean\ \ a,b,c \in G\ \ un\ grupo, si\ b * a = b * c\ \ entonces\ \ \ a = c$$

Al usar estos métodos, se obvia el hecho que no se puede perturbar el equilibrio que poseen las ecuaciones en matemáticas, se usan los símbolos como elementos mecánicos los cuales pueden saltar de un lugar a otro del papel sin considerar ninguna consecuencia sobre las ideas que estos métodos pueden llevar a formar referente a las propiedades de los objetos estudiados, es posible que los estudiantes solo entiendan las operaciones algorítmicas con los símbolos, obviando el hecho que los símbolos representan objetos matemáticos, con sus propiedades. Al final de este periodo de observación se llega a la conclusión que ciertos estudiantes no logran pasar del símbolo al objeto que representan, y si lo operan lo hacen solo manipulando el símbolo (si este lo permite) sin entender el concepto, para otros ni el proceso algorítmico es entendido.

La lengua natural, las gráficas, expresiones algebraicas, figuras geométricas, son las herramientas simbólicas con las cuales se presenta a el estudiante los objetos a estudiar y añadido a esto se pretende que los estudiantes tengan la capacidad de poder maniobrar entre todas estas distintas formas de representar los objetos sin una explicación aparte de la misma representación, además que muchas expresiones usadas no corresponden al comportamiento de los objetos junto con sus propiedades, siendo todo el proceso anterior mediado por la lengua natural lleva a un problema, resumido por. Duval (2006). ”Se habla en la legua natural, mientras se escriben en expresiones simbólicas, como si las explicaciones verbales hicieran cualquier tratamiento simbólico más transparente”. Así que el problema puede ser que para los alumnos no exista una conexión entre los sistemas de representación usados, la lengua natural y los objetos matemáticos.

Siguiendo lo que afirma Duval (2002), cuando se refiere a las representaciones usadas en matemáticas. ”En primer lugar, constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos” (p.63). Así que al ser este el único medio por el cual se accede a estos entes abstractos, también será el único medio por el cual se podrán presentar a los alumnos. Las representaciones y sus interacciones son un foco de interés para quien pretenda intentar enseñar conocimiento matemático, este trabajo propondrá una representación interactiva que tendrá la capacidad de ser usada para el desarrollo de herramientas didácticas con el fin de facilitar la comprensión de las propiedades de un objeto matemático.

Indagar sobre la forma como los estudiantes representan soluciones y conceptos matemáticos, si es que son capaces de lograrlo, además de escudriñar en la habilidad de simbolizar razonamiento usando representaciones no comunes pero si entendibles desde el punto de vista gráfico, será el primer paso para construir la representación, puesto que el fin de la representación es ser interactiva, así que evidenciar las habilidades que poseen los estudiantes al manipular representaciones de una idea usando cualquier tipo de símbolos, ya que si la actividad simbólica del estudiante estuviera enteramente cercada por las representaciones que se proponen en la clase, llevaría a que cualquier intento de desarrollar una herramienta didáctica basada en representaciones solo podría fracasar.

A medida que pasa el tiempo se va descubriendo el poder que tiene este relativamente nuevo paradigma en la educción matemática, así que desarrollar herramientas que permitan la posibilidad de navegar entre las representaciones semióticas que son usadas por los estudiantes debe ser prioridad para los maestros que se interesen por este campo, con las posibilidades tecnológicas de hoy es posible la creación de registros interactivos que ayuden a entender los objetos a estudiar de una manera menos tortuosa para el estudiante, y así lograr la comprensión de un concepto matemático.

Con la idea de ayudar a entender el comportamiento de objetos fundamentales para el desarrollo curricular en las aulas de clase el planteamiento de este trabajo se basara en las representaciones y el uso que puedan darle a estas los estudiantes.

Planteamiento

La posibilidad de usar símbolos

Que los estudiantes adquieran la capacidad de comprender un concepto matemático por medio de una representación es un objetivo de la enseñanza, esto es debido a que los símbolos son el único acceso a los objetos matemáticos. La problemática observada en el aula de matemáticas referente a los símbolos y la desconexión con el objeto matemático que se intenta representar, lleva a la pregunta ¿el problema con la representación de los símbolos involucra los conceptos fundamentales?, si esta dificultad con los símbolos se extiende hasta los objetos básicos de estudio en las matemáticas, conduciría a que el intento de usar las representaciones para entender conceptos más avanzados no tenga éxito. En la inmersión los estudiantes entendieron la forma de usar una representación para describir un objeto matemático y resolvieron un problema con suficientes soluciones para que lograran desarrollar diversas representaciones y poder resolverlo de distintas formas, en los siguientes ítems se mostrara la información recopilada durante la inmersión.

Conceptos matemáticos y resolución de problemas

Al menos un Concepto matemático

¿Pueden los estudiantes representar un concepto matemático? ¿Qué pasa si no pueden representar algún concepto esencial para el trabajo de matemáticas?, esto significaría que las representaciones derivadas de este concepto posiblemente no sean entendidas. La enseñanza en matemáticas se sustenta en la posibilidad que tiene humano para simbolizar, ya que sin esta capacidad sería casi imposible entender las propiedades de los objetos matemáticos. Un concepto fundamental en matemáticas es el de relación, entre dos conjuntos, en él se sustenta el concepto de operación binaria que a su vez es la base para definir un Grupo, fundamental para entender los números reales esto esta descrito con mayor detalle en el capítulo marco teórico, mostrar que en efecto es posible fue parte del proceso de inmersión, con el fin de escudriñar en los problemas que conllevan el trabajo con los símbolos. Para este propósito se les pregunto a los estudiantes sobre el concepto de igualdad y relación con el siguiente planteamiento.

Se les pidió que utilizando una línea relacionaran los números que son iguales

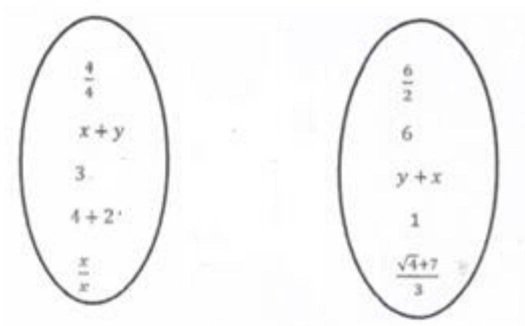


Figura 1. Planteamiento del problema 1, taller 1.

La idea de relación, es un concepto central en matemáticas, de echo es la base para entender el concepto de función, que es un concepto matemático importante para las distintas ramas de esta ciencia, estas son algunas de las respuestas.

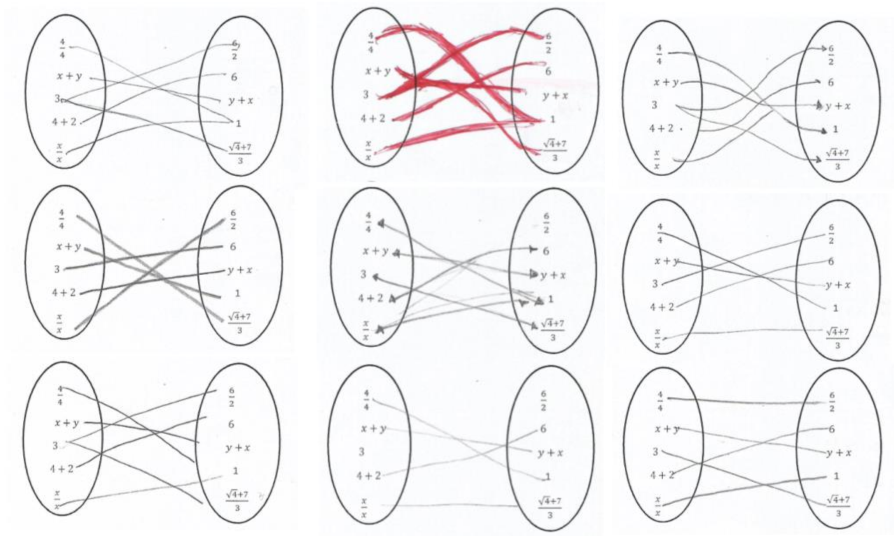


Figura 2. Algunas repuestas de los estudiantes.

Aquí algunas relaciones no cumplen a cabalidad lo pedido en el planteamiento del problema, pero el acto de dibujar la línea y saber que de esa forma se puede relacionar, indica que el concepto de relación está presente en los alumnos, además de mostrar capacidad de representar conceptos matemáticos. Cabe resaltar que la Figura 2 son solo algunas de las respuestas y que la gran mayoría de los alumnos tienen la habilidad de representar una relación de esta manera.

Se hace evidente que por lo menos un concepto matemático es entendido por los estudiantes según la hipótesis propuesta por Duval (2006). “comprensión en matemáticas asume la coordinación de al menos dos registros de representaciones semióticas”, pueden coordinar el cambio de representación entre dos registros, que en este caso es el de la palabra relación y el acto de dibujar la línea. Podríamos suponer que como el concepto de relación entre dos objetos es entendido, existen otros que sean naturalmente entendidos por los estudiantes.

Luego, la posibilidad de trabajar con simbolizaciones intuitivas es posible por parte de los estudiantes, es importante mostrar que los alumnos no son ajenos a entender y representar ideas con símbolos. Entender que las representaciones mostradas en clase puede que sean necesarias para acceder al conocimiento, pero no suficientes para que el alumno comprenda los conceptos que se intenta enseñar, será importante para fomentar la creación de herramientas que usen conceptos semióticos para la aplicación en la enseñanza de las matemáticas.

Un problema sencillo

Cuando el estudiante se enfrenta a un problema, la búsqueda de la solución está restringida a los sistemas de representación clásicos mostrados por el profesor. ¿Estos sistemas son completamente indispensables para resolver problemas?, si no lo son, el abanico de posibilidades de representación potencialmente se expande tanto como alumnos estén en la clase, así que al restringir a los alumnos a los sistemas de representación comunes al final se limitan las representaciones que puedan existir, y usarlas para la representación de los objetos matemáticos a estudiar. Si los estudiantes pueden resolver un problema con distintas representaciones es posible hacer uso de esta habilidad para fomentar el desarrollo de nuevas formas de simbolización. Se plantea el siguiente problema a los estudiantes:

Uniendo los puntos que figuras puedes encontrar. No necesariamente con líneas rectas.

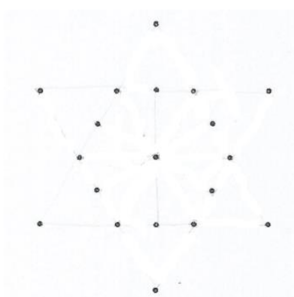


Figura 3. Planteamiento del problema a resolver.

Aunque este problema es algo trivial, envuelve preguntas que no son tan triviales, , por ejemplo: ¿Cuántas figuras se pueden formar con estos puntos?, si no son infinitas entonces ¿Cuántas hay?, ¿El número de figuras dependerá de la forma en que estén distribuidos los puntos?, aquí el estudiante nos ayudara a encontrar una de las posibles figuras que se pueden dibujar. Al resolverlo usaría un tratamiento diferente los que se usa en la clase de matemáticas. Los resultados muestran que efectivamente pueden resolver un problema, así sea pequeño.

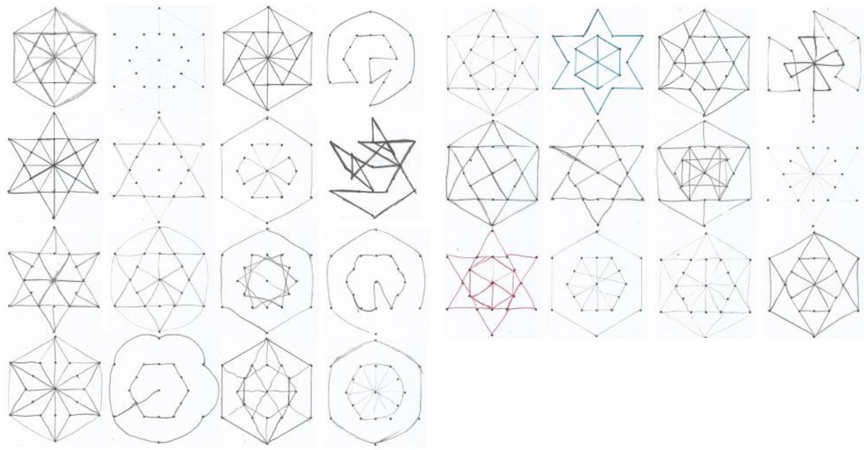


Figura 4. Compilado de respuestas por parte de los estudiantes

Lo interesante aquí es la cantidad de representaciones y lo diversas que son, cada alumno tiene la capacidad de la originalidad para la representación, además de resolverlo sus representaciones posiblemente obedecen a movilizaciones que permiten el trabajo instintivo con representaciones por parte de la humanidad, esto es algo que no se puede obviar cuando de construir conocimiento se habla, ya que puede ayudar a superar el dogmatismo semiótico en el que están inmersas las aulas de matemáticas, no es una locura pensar que los estudiantes no requieran estrictamente de las representaciones usuales para acceder al conocimiento.

Hipótesis de aprendizaje

Puesto que las representaciones son la esencia de la actividad matemática, para comprender un concepto matemático se hace evidente que lograr identificar el objeto matemático en diferentes registros es vital para su comprensión. La mediación entre registros Duval la describe como la coordinación entre estos, además de elevarla con una hipótesis al problema central de la enseñanza de las matemáticas. Para que exista una comprensión en matemáticas la coordinación entre registros es necesaria, saber reconocer un objeto en varios sistemas semióticos es de cierta forma entenderlo, puede que no en su totalidad, pero si propiedades significativas de este, luego lograr que los alumnos hagan este cambio de representaciones y registros sin perder la esencia del objeto estudiado, eso significara que se ha logrado aprender.

Todo esto suena muy bien, pero cuando se realiza la conversión de un objeto en sistema a otro sistema lo importante es poder desligar el objeto de la representación para lograr representarlo en otro sistema, es vital no confundir el objeto matemático con su representación semiótica, he aquí donde aparece una paradoja cognitiva. ¿Cómo puedo distinguir el objeto si la única forma de "verlo" es por medio del símbolo?, en palabras de Duval (2006). "¿Cómo se puede distinguir el objeto representado de su representación semiótica usada cuando no existe otro acceso al objeto matemático aparte de la representación semiótica?" (p.115). esta paradoja da pie a suponer que el aprendizaje se logra cuando de alguna manera el estudiante logra diferenciar el objeto matemático de su representación semiótica y así poder cambiar de registro sin mucha dificultad , es decir cuando el estudiante rompa la paradoja significa que ha aprendido. En palabras de Duval (2006). "comprensión en matemáticas asume la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica" (p.115).

Luego dado que en las aulas de clase se asume de antemano que los estudiantes pueden ejecutar una coordinación completamente eficiente entre distintos registros, pues durante las clases que usan distintos registros, que pasan desde el lenguaje natural, por los gráficos, las figuras geométricas, dibujos.

> "Nosotros esperamos que los estudiantes puedan manejar las asociaciones visuales y las discursivas y las posibilidades especificas proveídas por los diferentes sistemas, y que

también pueden usar la sinergia que se supone es generada por el ir y venir, pero tendemos a desestimar la complejidad cognitiva”. Hoffman (2006).

Luego cabe preguntarse si en realidad es saludable para los aprendices el uso de tantos registros sin que exista una manera natural de relacionarlos cuando en realidad no se entiende el objeto que se está estudiando en palabras, existirá una forma de transmitir la coordinación entre los registros de una manera natural. Duval (2006). “¿esa coordinación de registros llega naturalmente en el contexto de los estudiantes de matemáticas?”. Luego una pregunta que surge es ¿Cómo hacer que la coordinación de registros llegue naturalmente al estudiante?

Usando esta hipótesis la tarea de este trabajo es utilizar las definiciones de los elementos semióticos como un referente para realizar el diseño de un registro que permita la evolución de un concepto matemático por medio del registro simbólico que lo representa, y dar una herramienta para facilitar el cambio de registros, permitiendo que esa coordinación llegue naturalmente a los estudiantes. Luego es importante como educadores brindar a los estudiantes instrumentos con los cuales sortear las dificultades que presentan intentar entender un concepto, haciendo uso de las herramientas disponibles, pues parte del trabajo docente es diseñar formas para mejorar el acceso al conocimiento. En este caso se pretende usar el lenguaje, más específicamente un registro como herramienta didáctica.

Propuesta

Los procesos que involucran la manipulación y el cambio de diferentes sistemas de representación son esenciales para llegar a comprender los objetos de estudio, así que es pertinente indagar en las formas como las herramientas semióticas pueden ser de utilidad para la comprensión de un concepto, lo cual significara movilizar un concepto matemático por distintos registros. Promover la creación de herramientas que permitan facilitar el intercambio de los registros con sus propiedades es de importancia para el desarrollo de la educación matemática.

Los cambios que ha experimentado el mundo en cuestión del uso y el desarrollo de la informática son innegables, dando la capacidad de acceder a mundos que son inalcanzables para los sentidos físicos, siempre que se puedan describir con el uso de números. Los objetos matemáticos son entes de un mundo que no puede ser alcanzado si no es por el uso de las representaciones simbólicas, el uso de la tecnología permitirá el acceso a mundos simulados que serán capaces de contener representaciones de los objetos matemáticos con sus interacciones, un ejemplo actual de esto son las graficadoras y software geométrico, luego las propiedades de los objetos pueden ser simuladas también mediante el uso de las representaciones semióticas con ayuda de la potencia grafica de los ordenadores de la última década.

Con las herramientas a disposición que se tienen para el desarrollo libre de software, y que la disponibilidad de computadores viene siendo prioridad para el enfoque educativo del siglo XXI, es posible la creación de un software el cual permita la interacción con un registro semiótico que evidencia las propiedades de un objeto matemático. Para la creación del software también se requiere idear un registro que cumpla con los requerimientos para simbolizar un objeto matemático que se debe estudiar.

Objetivos

Objetivo general

Desarrollar un programa informático que permita la interacción con un registro semiótico que representa a los elementos que obedecen los axiomas de grupo.

Objetivos específicos

- Observar y registrar los procesos que involucra el uso de símbolos no usuales, para la representación de ideas y razonamientos básicos.
- Encontrar un registro el cual será un sistema semiótico adecuado para representar los axiomas que definen a un grupo.
- Diseñar y programar el software que permitirá la interacción con el registro

Antecedentes

Puesto que lo que se pretende es usar un nuevo registro semiótico para representar un objeto matemático, es pertinente tener presente investigaciones que se hayan realizado al respecto, ya que la finalidad de este proyecto es proponer un software como una ayuda en el aula de clase, pero se tiene certeza de que las representaciones ayuden a desarrollar el conocimiento matemático, según el trabajo desarrollado por Ciro Antonio Garzón y Nubia Viviana Rojas, en su tesis titulada. “Representaciones semióticas como dispositivo para facilitar el desarrollo del pensamiento matemático y científico”, las representaciones no solo ayudan, son indispensables al momento de construir conocimiento.

En este trabajo principalmente se hará uso de lo propuesto en el capítulo cuatro de la tesis, llamado propuesta didáctica, en este se definen cuatro momentos que se requieren para el uso de las representaciones semióticas como dispositivo de aprendizaje.

- Momento real
- Momento virtual
- Momento teórico
- Momento aplicacional

Garzón-Rojas. (2014).”Momentos para acceder a conceptos mediante representaciones semióticas”. Luego proceden a definir los momentos:

El momento real es cuando se hacen uso de elementos tangibles, así el estudiante construye de forma práctica, un modelo que manifieste las características del concepto que se va a abstraer, este momento está relacionado con el entorno al cual se puede acceder y manipular.

El momento virtual es cuando se usan elementos tecnológicos de cualquier tipo, como calculadoras, software, simulaciones, como mediadores de la adquisición de conocimiento, en estos entornos virtuales el estudiante puede recrear las interacciones entre las representaciones del sistema

El momento teórico Garzón-Rojas (2014).”Se denomina MOMENTO TEORICO a los diferentes procedimientos que buscan la adquisición de un concepto o un proceso haciendo uso de referentes memorísticos o de análisis lógico-deductivo (recurriendo en algunas ocasiones a conceptos pre-concebidos” (p.76)

El momento aplicacional cuando se usa las representaciones adquiridas para resolver situaciones problema

En todos estos momentos se usan las representaciones semióticas como medio para acceder al conocimiento y en palabras de los autores Garzón-Rojas (2014).

> ”Es conveniente hacer uso del mayor número de Representaciones Semióticas en la conceptualización y aplicación de los momentos, así como en el desarrollo de procesos que tienen como objetivo generar estudiantes hábiles en Matemáticas y Ciencias Naturales, intencionadas forjando una amplia y bien concebida cultura de estas áreas” (p. 76)

Luego este trabajo espera contribuir con el desarrollo de estos momentos en particular en el momento virtual donde se hace uso de representaciones interactivas para construir conocimiento, con el fin de aumentar los registros disponibles además de un prototipo de un software que permita la manipulación del nuevo registro.

Marco teórico

Semiótica y matemáticas

Representaciones semióticas

En apartados anteriores se mencionaron dos objetos de estudio de la semiótica, que son las representaciones y las representaciones semióticas, siendo las representaciones precisamente eso, asignaciones que se dan a un objeto, es lo que nos permite acceder al objeto sin ver el objeto, en palabras de Duval (2006).”Una representación es algo que se pone en lugar de otro algo” (p.103). Pero estas representaciones pueden estar viciadas por las preconcepciones que tienen los humanos, las experiencias, los juicios, las sensaciones, todo eso influye en las representaciones que les damos a los objetos. Duval (2002) “Así, las representaciones pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales”. Luego las representaciones “sueltas” no pueden ser usadas para el trabajo matemático, por la subjetividad que conlleva el tomar en cuenta cada representación individual, es necesario un consenso.

Entonces como diferenciar las representaciones útiles de las que no lo son, ¿cuáles son las que en realidad permiten el acceso al conocimiento?, es aquí donde entra el concepto de representación semiótica, la representación ya no es una mera substitución de un objeto, y no solo está destinada a solamente etiquetarlo. La representación semiótica pretende describirlo, aquí son importantes las relaciones que nacen al interactuar estos símbolos.

> "Pero las representaciones también pueden ser signos y sus complejas asociaciones, las cuales son producidas de acuerdo con unas reglas y permiten la descripción de un sistema, un proceso, o conjunto de fenómenos. Aquí las representaciones semióticas aparecen como una herramienta común para el proceso de producir nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental en particular". Duval (2006). (p.104).

Las representaciones semióticas es lo que nos permite pasar más lejos de la mera representación, ahora los signos no son solo para denotar y comunicar, con las representaciones semióticas es posible acceder a nuevo conocimiento, gracias a las relaciones que podemos encontrar entre las representaciones. Inmersas en las representaciones semióticas, podemos encontrar las gráficas, las figuras geométricas, las representaciones de los números, etc… , es fácil notar que el uso de representaciones semióticas está presente en todo momento de la enseñanza lo cual es una invitación para que los maestros emprendan más estudios en su manejo, e invertir en el desarrollo de nuevos métodos de representación, aprovechando las nuevas tecnologías, pues permiten simular mundos que antes no estaban a nuestro alcance.

Registros

Como se ha mencionado las representaciones semióticas nos ayudad a acceder al conocimiento, tiene un significado y representan un objeto definido, conducen hacia las propiedades que están unidas al objeto, también permite cambiar entre distintos sistemas de representación sin alterar el objeto que están representando, por ejemplo las expresiones:

a) Circunferencia.

b) $x^2 + y^2 = r^2$

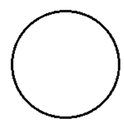
c) 

Fig5. Diferentes representaciones de un objeto matemático

Son distintas representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, que nos dan diferente información sobre el objeto que se intenta describir, pero entre estas, si dejamos de lado la posibilidad de utilizar regla y compas sobre c), solo la representación semiótica b) permite transformaciones sobre ella, que nos darán más información sobre el objeto, incluso a relacionarlo con otros objetos matemáticos.

La representaciones semióticas, pueden llegar a un nivel superior en su uso en matemáticas, como se ve en la fig5 ítem b) , aparte de ser la designación de un objeto matemático y describir unas propiedades. Para ejercer la actividad matemática es necesario poder manipular los objetos matemáticos, cambiarlos de acuerdo a sus propiedades, tener la posibilidad de aplicar teoremas, siguiendo esta línea de razonamiento y dado que los objetos matemáticos solo pueden ser alcanzados por medio de las representaciones, es natural pensar que para lograr estos cambios en los objetos las representaciones de estos también tienen que cambiar, según Duval (2006). “La actividad matemática intrínsecamente consiste en las trasformaciones de las representaciones”.

Así que aquí es necesario usar otro tipo de definición, los registros semióticos, serán un sistema representaciones semióticas que permitan las trasformaciones de sus representaciones, definidos usando las representaciones semióticas por Duval (2006).”No todos los sistemas semióticos son registros, solo aquellos que permiten transformación de la representación” (p.111).   Los registros nos permiten acceder al mecanismo por el cual se trasforman las representaciones para acceder a nuevos tipos de conocimiento es la cualidad que permite el proceso de demostración, que es la base de la verdad matemáticas. Cualquier desarrollo en matemáticas tiene que ver con las transformaciones de los sistemas semióticos.

Tratamientos y conversiones.

Como se afirmó en el ítem anterior la actividad matemática es en esencia el proceso de trasformación de las representaciones semióticas, aquí emergen dos tipos de cambios, uno de ellos ocurre dentro del mismo sistema de representación alterando las representaciones pero sin salirse del sistema. Dada la riqueza de simbolismo que posee la matemática, además de que las distintas representaciones nos dan diferentes puntos de vista de un objeto matemático, es completamente necesaria la alternación entre distintos sistemas de representación para el desarrollo de la actividad matemática. “En la medida en que la actividad matemática consiste intrínsecamente en la trasformación de representaciones, se hace obvio que hay dos tipos de trasformaciones semióticas que son radicalmente diferentes: tratamientos y conversiones”. Duval (2006) (p.111).

Los tratamientos es el proceso el cual usa los registros y los trasforma para realizar una operación en el sistema de representación, con la particularidad que la nueva representación cae dentro del mismo sistema, por ejemplo esto se evidencia en el proceso de despejar una ecuación, eso es un tratamiento. Duval (2006).”Los tratamientos son trasformaciones de representaciones que ocurren dentro del mimo registro”. (p.111)

Las conversiones son usadas para cambiar de un sistema de representación a otro, es la capacidad que tienen los sistemas de ser representados con otro, sin cambiar los objetos estudiados, es en parte el proceso que se usa al intentar comprender un concepto matemático que está representado en un sistema, con el mismo concepto pero en otro sistema de representación, un ejemplo clásico es representar gráficamente una expresión algebraica ara comprender mejor su comportamiento. A las conversiones Duval (2006) las define. ”Las conversiones son transformaciones de representación que consiste en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados” (p.112).

Este enfoque teórico sobre los tratamientos y conversiones de sistemas de representación puede tener implicaciones en el proceso de enseñanza, pues no se puede negar que el cambio de representaciones semióticas es la forma como se trabaja en el aula de clase.

Antes de idear una representación de un objeto matemático, es necesario conocer el objeto que se va a representar, teniendo presente las propiedades que se quieren evidenciar, para escoger la representación adecuada.

Grupo

Para el objeto matemático a ser representado se escogió la estructura algebraica de grupo, pues es un concepto que está inmerso en varias ramas de las matemáticas, especialmente en los conjuntos numéricos donde se desarrolla el álgebra y el cálculo, dos disciplinas indispensables para el desarrollo científico, así que entender los axiomas de los cuales se desprende la teoría de grupos es de importancia para la apropiación de las propiedades operatorias de los números.

En el libro de Algebra abstracta de Dummit (p. 16-17) define un grupo como la pareja ordenada $(G,*)$ donde G es un conjunto y $*$ es una operación binaria sobre G que satisface los siguientes axiomas:

(i) $(a*b)*c = a*(b*c)$ Para todo $a, b, c \in G$, se dira que $*$ es asociativa

(ii) Existe un elemento $e \in G$ llamado la identidad de G tal que para todo $a \in G$ se tiene que $a*e = e*a = a$

(iii) Para cada $a \in G$ exite un elemento a^{-1} de G, llamado el inverso de a tal que $a*a^{-1} = a*a^{-1} = e$

En esta definición se supone que la operación$*$ en una operación cerrada. También hay una propiedad de vital importancia para el desarrollo del registro que es la propiedad que define a un de grupo abeliano

El grupo $(G,*)$ se denomina abeliano (o conmutativo) si $a*b = b*a$ para todo $a, b \in G$

Varios de los objetos matemáticos que se estudian en el aula de clase obedecen a los axiomas de grupo, como lo son los sistemas numéricos a excepción de los naturales, que son una parte a la que se le da énfasis en el aula de clase, reconocido como un derecho básico de aprendizaje, consignados en el documento Derechos Básicos De Aprendizaje, en el apartado referente a matemáticas, es evidente como los conjuntos numéricos son una parte central de estos derechos, evolucionado desde los números naturales hasta los números reales y su estructura, así que comprender estas propiedades será importante para que los estudiantes se apropien del concepto de conjunto numérico con sus operaciones, inevitablemente tendrán que pasar por las propiedades de grupos. Así que al ser la teoría de grupos, un paso que irremediablemente deben dar los alumnos en la comprensión de objetos matemáticos, esta propuesta pretende construir un registro semiótico que permita evidenciar los procesos que involucran las operaciones en un conjunto, con la condición de cumplir las propiedades de los grupos. Como también se mostró en párrafos anteriores, la problemática que se observó y desencadeno las ideas que llevaron a la propuesta de este trabajo, tiene que ver con el manejo de la propiedad cancelativa derivada de los axiomas de grupo, así que este este registro es de interés para intentar sortear esta problemática.

Un caso de este tipo de objetos matemáticos es R el conjunto de los reales, este conjunto cumple con los axiomas de grupo, tomando la definición de los axiomas de cuerpo para la adición del el libro Calculo Vol1 Tom Apóstol (p.22) Los reales bajo la operación suma cumplen con las siguientes propiedades:

Sean $x, y, z \in R$

- AXIOMA 1: Propiedad conmutativa: $x + y = y + x$
- AXIOMA 2: Propiedad asociativa $x + (y + z) = (x + y) + z$
- AXIOMA 4: Existencia de elemento neutro: Existe un número real denotado por 0 tal que para cada número real x se tiene $x + 0 = 0 + x = x$
- AXIOMA 5: Existencia de negativos : Para cada número real x existe un nuero real y tal que $y + x = x + y = 0$

Estos axiomas son análogos a los axiomas de grupo, así que los reales bajo la operación suma cumplen con todos los resultados de la teoría de grupos en general, esto será de importancia al construir el registro. Pero aquí nace la inquietud de no saber por dónde comenzar a desarrollar un nuevo registro que cumpla con esas propiedades, además de permitir su manipulación.

¿Existen representaciones que evidencien las propiedades de los grupos?, para construir una representación es pertinente indagar sobre las representaciones disponibles que permiten la experiencia con los axiomas de grupos, o alguno de ellos, una de las representaciones es la que se usó en este ítem para describir las propiedades, pero el tratamiento no es evidente las operación de los símbolos es completamente abstracta, a diferencia de la representación que se presentara en el siguiente ítem, la cual permite evidenciar la operación que se realiza con los símbolos.

Vectores en $\boldsymbol{R^2}$

Existe un tipo de construcción matemática llamada el plano cartesiano, el plano o R^2 siendo R el conjunto de los numero reales. Estos elementos matemáticos son definidos así en Algebra lineal Bernard Kolman sexta edición (p. 127).

- Un vector en el plano es un 2-vector: $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ donde x_1 y y_1 son números reales, que son los componentes de u.

Con esta definición de los elementos del plano se puede definir una operación sobre estos, la cual cumpla las propiedades de los grupos. (p.132)

- Sean $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ dos vectores en el plano. La suma de los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ es el vector: $(x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)$

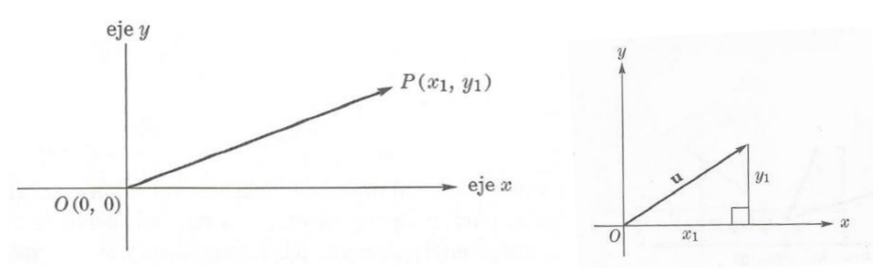
Con esta definición se cumplen los axiomas de grupo mostrados en la página 142 teorema 3.2 ítem (∝).

Estos objetos cumplen con la condiciones para ser grupo, así que algunas de sus representaciones evidenciaran estas propiedades, en particular los vectores en el plano tienen una representación semiótica que permite la operación de sus elementos y mediante una construcción geometría evidenciar los procesos que se involucra operarlos con entre si usando la operación definida en los párrafos anteriores. Si se pretende lograr construir un nuevo registro se debe indagar en los que existen, para encontrar mejores formas de representar un concepto.

Representación de los vectores

Estos objetos presentan la peculiaridad de brindar una interpretación geométrica a ciertos axiomas de grupos, al representarlos así, se logra evidenciar propiedades como la cerradura, además de admitir trasformaciones de los objetos dentro del sistema, lo cual lo vuelve un registro.

A continuación se harán referencia a las propiedades, tomadas del libro Algebra lineal Bernard Kolman sexta edición al igual que las representaciones son tomadas del libro.



(a) *(b)*

Figura 6 .representación cartesiana

Esta es la representación corresponde a un vector formado por la coordenada indicada, es evidente que se trata de una flecha, la cual nos permitirá conocer propendes como la dirección del vector, saber a qué cuadrante del plano pertenece, también ayudara para efectuar una operación con estas representaciones, en la figura ítem (a) se muestra la forma general como se verían los vectores en esta representación

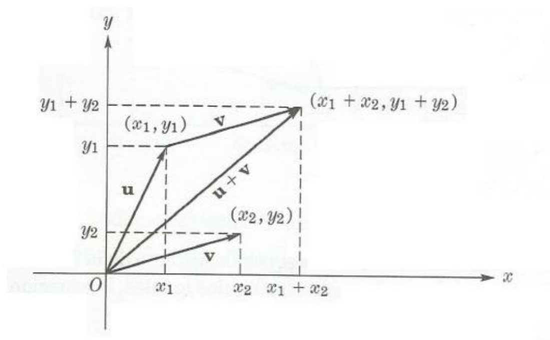


Figura 7

En la figura se usa la definición de suma expuesta anteriormente, para llegar a una construcción la cual nos dará la manera de componer los elementos de la representación con flechas de los vectores

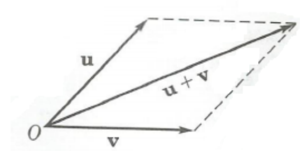


Figura 8

La figura muestra la forma general de operar vector

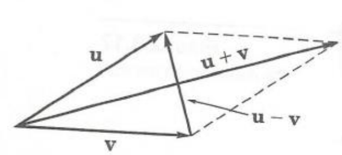


Figura 9

Aquí se aprecia la posibilidad de suma y la resta.

A partir de estas representaciones es evidente que cumplen con los axiomas de grupos, es una buena forma de enseñar las interacciones de los elementos para formar otros elementos.

Pero hay un símbolo que no es tan evidente para su representación , que además es de vital importancia para entender las propiedades de los grupos, y por ende de los números reales, de los cuales se derivan el cálculo, parte fundamental de los derechos básicos y estándares, este símbolo corresponde al neutro, este sistema no posee una flecha neutra, u otro símbolo para representarlo, en la sección vectores en R^2 se hace evidente que existe una representación que es $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ este seria el neutro, pero en la forma de flechas no existe.

Aun sin este símbolo la utilidad de esta representación con flechas es de gran ayuda para interpretar los problemas, sobre todo los que tienen que ver con campos vectoriales, este sistema es usado en física donde algunas de las nociones básicas de esta ciencia son representadas con vectores, como la Fuerza, aceleración, velocidad, etc.... Así que al ser aceptado este sistema de representación, este trabajo lo tomara como precedente para elaborar un nuevo sistema de representación que permita la visualización del elemento neutro y los axiomas de grupo.

El objetivo no solo es crear la representación, también proponer una primera versión de un software que permita la manipulación de los símbolos con sus propiedades, para esto se usara el siguiente paradigma de programación.

Programación orientada a objetos

Las citas referidas en los siguientes párrafos son sacadas del libro, Programación en C, C++, Java y UML de los autores Luis Joyanes Aguilar, Ignacio Zahomero Martínez.

Este es un paradigma para la programación de software el cual ve los conceptos como unos entes abstractos llamados objetos, "La POO se basa en el hecho de que se debe dividir el programa, no en tareas sino en modelos de objetos físicos o simulados" (p 363). En este ítem se expone a grandes rasgos los elementos más importantes de la programación orientada a objetos necesarios para entender el potencial didáctico del software a diseñar.

Objeto

Un objeto es una abstracción que se realiza para lograr simular algo que sigue unas reglas y que posee unos atributos que lo definen. "Un objeto es algo que visualiza, se utiliza y que juega un papel o un rol. Cuando se programa de modo orientado a objetos se trata de descubrir e implementar los objetos que juegan un rol en el dominio del problema del programa" (p 365)

El concepto de clase es utilizado para modelar el comportamiento de estos objetos permitiendo así llevar estos objetos al lenguaje en el cual se van a programar, en la clase están contenido las propiedades que mejor describen al objeto "la abstracción es la propiedad que considera los aspectos más significativos o notables de un problema y expresa una solución en esos términos" (p 368)

Herencia

Los objetos pueden obtener algunas de sus propiedades de otro objeto, por ejemplo, si se construye una clase que simule las propiedades de un polígono en el plano, se verían cosas como el área de la figura, el perímetro, y esto también puede encontrarse en un triángulo, en un cuadrado, ya que ambas figuras son polígonos pero a su vez se diferencian en su número de lados.

"la idea principal de estos tipos de divisiones reside en el hecho de que cada subclase comparte características con la clase de la cual se deriva" (p 369)

UML

"UML (Unified Model Language) es el lenguaje estándar de modelado para el desarrollo de sistemas y software" (p. 372)

Ese lenguaje es usado para diseñar las clases e indicar de qué forma interactúan entre ellas, iniciar sus atributos y métodos con los cuales se simulara el comportamiento

Clases

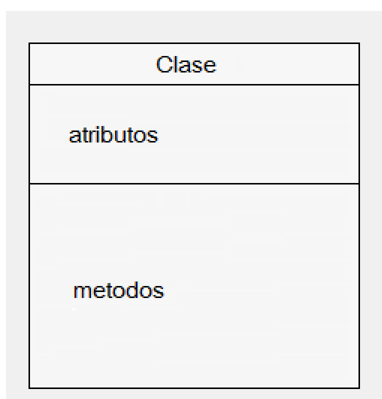


Fig. 10

En la Fig. 10 se muestra el diseño que debe tener las clases, en la parte de arriba va el nombre de la clase, en el medio esta los atributos y abajo los métodos.

Herencia

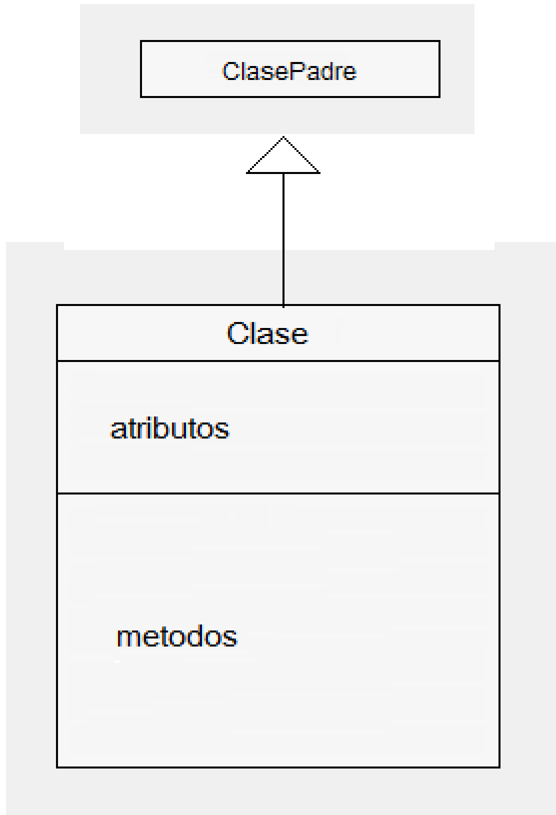


Fig. 11

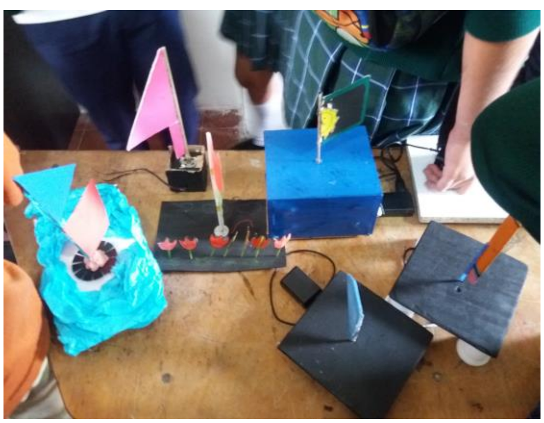
Con esta representación se dice que la Clase en la Fig. heredara los métodos de la Clase Padre , así se indica que Clase es en esencia una Clase Padre con comportamientos adicionales.

Queda demasiada teoría sobre la POO afuera de este capítulo, como el polimorfismo, la ocultación de los datos, pero con estas dos ideas de clase y herencia se puede entender los objetos que componen el software que se propone en las siguientes páginas.

Metodología

El proceso de desarrollo de este trabajo está dividido en varios espacios de construcción, los propuestos por el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca son dos, las cuales son la inmersión y la intervención en el aula, luego de reunir la información se procede a proponer una manera de sortear las problemáticas que se observaron durante la inmersión y la intervención, pero sin dejar de lado las fortalezas que se encontraron durante este proceso, luego se diseña la representación del objeto, pasado esto se diseña y programa el software.

Inmersión: Durante la inmersión se realizó con los estudiantes de la institución educativa Carlos M Simmons en la que se hizo un trabajo de acompañamiento, y un taller, el cual ya se explicó en la parte de planteamiento, aparte de esto con los estudiante se trabajo en el desarrollo de un proyecto sobre solidos de revolución la cual dio como resultado varios aparatos que generan.



En estas imágenes se observa algunos de los proyectos que realizaron los estudiantes, en esta experiencia, la motivación con este proyecto fue evidente, posiblemente debido a fue un trabajo manual de construcción para entender cómo funciona mecánicamente un sólido de revolución. Con los datos obtenidos en esta etapa se procede a realizar la intervención

Intervención**:** Según los Datos obtenidos, los estudiantes son capaces de trabajar en equipo, como se vio en el proyecto de solidos de revolución, pueden simbolizar conceptos matemáticos y resolver problemas sencillos. Durante este proceso se profundizara en el manejo de símbolos por parte de los estudiantes, se observó sus fortalezas y encaminarlas a ser usarlas en una propuesta para ayudar a sortear el problema explicado en el planteamiento.

Como eje central de la intervención se realizó un taller, donde se pidió simbolizar una serie de frases que describían una serie de proposiciones, el objetivo es observar si se logra movilizar la motivación para el acto de simbolizar un razonamiento, esto tiene la finalidad de responder a ala pregunta si los estudiantes están en la capacidad de usar otro sistema de símbolos no convencionales para representar alguna idea o razonamiento

Un nuevo registro: Se procede a buscar un registro el cual ayude a trabajar con los elementos del grupo, evidenciar sus axiomas y propiedades, para esto se usara como punto de partida las representaciones usadas con los vectores en el plano.

Programación del software: La programación se hará en un lenguaje que sea portable y capaz de correr de forma eficiente en la mayoría de equipos, se usara la POO para realizar el programa.

Los puntos anteriores describen el camino recorrido para la construcción de un registro y un software capaz de manipular dicho registro, que cumplirá el propósito de ayudar en la construcción de conocimiento matemático en el aula de clase.

Hacia La Construcción Del Software

Símbolos e ideas

Un eje principal de este trabajo es la construcción de un registro, el cual usara símbolos con los cuales los estudiantes no están familiarizados. Dado que es bastante arriesgado lanzarse a suponer que los estudiantes puedan siquiera tratar de usar los nuevos símbolos, y más si se les propone resolver un problema con estos, entonces es necesario indagar cuál es su reacción al enfrentarse a la simbolización de razonamientos simples con otro sistema de símbolos poco comunes. Con esto se desea mostrar que los estudiantes no son ajenos a trabajar con símbolos nuevos, y que es totalmente valido investigar como las distintas representaciones semióticas pueden ser de utilidad al momento de enseñar un concepto.

Como ya se menciono es importante evidenciar que el trabajo formal es posible si se usa un sistema de símbolos no comunes a los usados en el aula de clase de matemáticas si es que se pretende que ellos logren trabajar con registros diferentes, y que no solo puedan trabajar sino construir conocimiento matemático.

A los estudiantes se les presenta un conjunto de símbolos, los cuales son unas representaciones que pueden relacionarse con ideas comunes. Cuando se les pide que simbolicen una serie de proposiciones, sin dudarlo los estudiantes se lanzan a intentar simbolizar lo que ellos ven, así que es posible motivar el uso de símbolos poco comunes, es natural en ellos usarlos, sobretodo en esta era tecnológica donde tener acceso a la información significa saber interpretar una serie de símbolos.

Además de simbolizar se encontró que la mayoría de los estudiantes no se quedan en la mera representación, intentan darle un sentido a lo que ellos creen que es la composición adecuada de símbolos que represente la proposición y su significado, también algunos de estos intentos tienen una gran similitud entre ellos, pareciera que la forma de simbolizar e interpretar los símbolos y las preposiciones obedeciera a una estructura que es común entre ellos, pues la similitud no se puede negar, pero aunque suene paradójico también existen grandes diferencias, que se ven en la forma de composición y en la interpretación de ciertos símbolos, pero este es un análisis que no se hará en este trabajo, aquí solo se tomara en cuenta esa capacidad de simbolizar razonamientos con otros símbolos.

Es importante mostrar que los estudiantes tienen la capacidad de trabajar con otros sistemas de representación diferentes, si se quiere usar los símbolos como una herramienta didáctica. A continuación algunas respuestas dadas por los estudiantes, con esto se muestra que los alumnos tienen la capacidad de manipular simbología además de intentar darle un sentido, parte fundamental para el proceso que sigue ya que es el desarrollo de un nuevo registro, pero si los estudiantes no tienen la capacidad de trabajar con un registro nuevo no sería prudente continuar, afortunadamente esto no sucedió. En la parte de arriba esta la frase que se quiere simbolizar y en la de abajo los símbolos que usaron los estudiantes. Estas son algunas de las repuestas.

- El camión va para adelante o para atrás:

Figura 12.

- Si la democracia funciona la humanidad vivirá bien:

Figura 13.

- Una partícula con más velocidad llegara en menos tiempo:

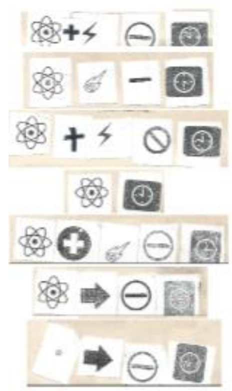


Figura 14.

- Sin señal no se puede enviar un mensaje:

Figura 15.

Todas las frases anteriores pueden interpretarse con la lógica proposicional, como se ve en las muestras tomadas, los estudiantes hacen uso de los símbolos para ejecutar la creación de un sistema semiótico que tienen un significado particular para ellos, es posible incentivar a los estudiantes a representar un tipo de razonamiento con un sistema simbólico poco usual.

Así se completa la indagación sobre si es adecuado usar otro tipo de representaciones para movilizar la enseñanza en matemáticas. Como se mostró, el trabajo con otro tipo de representaciones no está vetada para los estudiantes, esta posibilidad permite introducir un nuevo registro.

Un nuevo Registro

Debido a la importancia de promover el desarrollo de nuevos registros para que los estudiante tengan más oportunidad a acceder al conocimiento crear y promover registros puede llegar a ser una tarea de suma importancia en el futuro, incluso promover el desarrollo de representaciones semióticas creadas por los estudiantes. En las aulas las representaciones de los objetos se ven restringidas a las pocas que se conoces y están establecidas por la academia, las cuales no están mal, pero ¿serán suficientes para que todos los humanos puedan acceder al conocimiento matemático? , el cual se les presenta en representaciones ideadas por una comunidad que poco o nada tiene que ver con su realidad.

Poder ayudar a comprender un proceso matemático con una representación que no es el objeto, pero que evidencia el uso de una propiedad, sin violar las reglas de los axiomas, es lo que se hará a continuación.

Usando como inspiración el registro de los vectores como flechas se propone las siguientes representaciones.

El elemento principal de este registro será el siguiente: este elemento en distintas posiciones también será elemento del sistema, y tener varias posiciones.

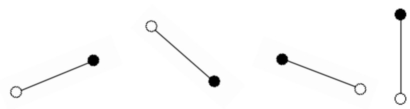


Fig. 16

En la figura se observa los distintos objetos que se obtienen al rotar el elemento expuesto, este objeto también se puede “estirar y contraer” de las distintas formas:

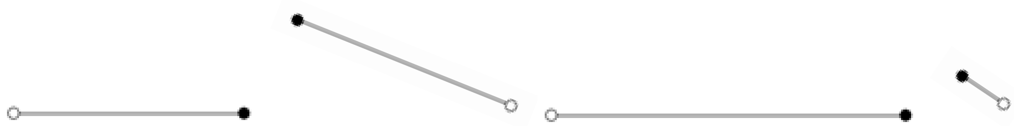


Fig. 17

Todos estos tipos pertenecen al conjunto de elementos que tienen esta forma de segmentos con dos bolas, una blanca y una negra en los extremos, además tendremos la siguiente regla de composición inspirada en la suma vectores como flechas estos símbolos obedecerán a la siguiente regla de composición.

La composición se hará encajando las bolas negras con las bolas blancas, dado como resultado el objeto comprendido entre las dos bolas que no interactuaron.

Fig 18

Este modo de composición también aplica para todas las formas que pueden tener los elementos incluidos los de la esta forma .

Con estas dos formas de los elementos se pueden construir todos los demás de cualquier altura o inclinación, al igual como todos los vectores en el plano se pueden descomponer en sus componentes que se encuentran en el eje x como se aprecia en la figura

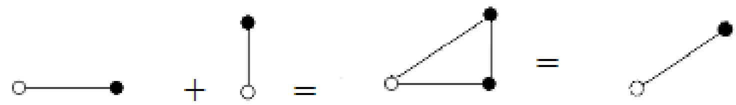
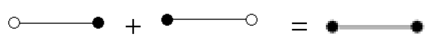


Fig. 19

Así con los elementos en vertical y horizontal se pueden construir todos los elementos de este sistema.

Nótese que según esta regla de composición existen elementos que les daremos una definición especial, lo cual llevara a la introducción de un nuevo símbolo que tendrá propiedades especiales.

 , esto pasa si se componen dos elementos de la misma longitud, pero con la posición de las bolas invertida, este objeto extraño lo definiremos como  , este nuevo símbolo cumplirá con las propiedades del neutro ya que según la regla de composición, este símbolo se opera sobre la bola negra, al ser solo una bola blanca, no afectara al elemento  Ya con estos elementos definidos, construidas las representaciones y establecida una regla de comparación entre estos, se tienen las herramientas necesarias para mostrar que efectivamente este sistema semiótico, cumple con los requerimientos para ser considerado la representación de un grupo.

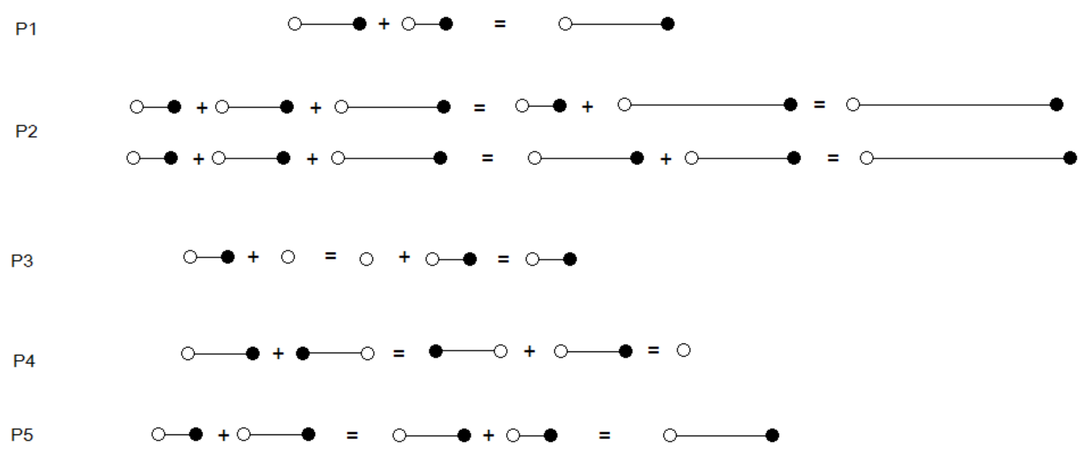


Fig. 20

Al cumplirse para estos símbolos también se cumplen para los que tienen su representación vertical, luego estas propiedades se cumplen para todos los elementos de este sistema. La visualización de las propiedades de grupo, ayudara a tener un referente en estas representaciones cuando se intenten aplicar estas propiedades en el trabajo matemático del aula.

Con este registro se espera ayudar con la tarea de coordinación entre los diferentes registros semióticos que se usan en clase, además siguiendo esta conclusión de Duval (2006) “El verdadero reto de la educación matemática consiste en desarrollar primero la capacidad de cambiar el registro de representación”. Este registro es un intento por ayudar a facilitar esta capacidad de cambiar el registro, así como contribuir con los procesos que requieren el acceso a conocimiento mediante representaciones semióticas.

Pero el registro es tedioso si solo se escribe en un papel, para acceder a las propiedades es necesario dibujar cada paso para evidenciar su comportamiento, por eso es acertado facilitar la manipulación de dichos símbolos para que el centro de atención sean las propiedades y su comportamiento, dejando al símbolo como tal solo como la representación.

Software

Debido a la disposición que cada vez es más grande de usar dispositivos tecnológicos por parte de la comunidad, la facilidad con que los estudiantes se involucran en el uso de la tecnología, el acceso a la información y componentes tecnológicos es más común cada día. A continuación se dará una idea de software que ayudara al provecho del potencial tecnológico que crece en las aulas de clase

Registro interactivo

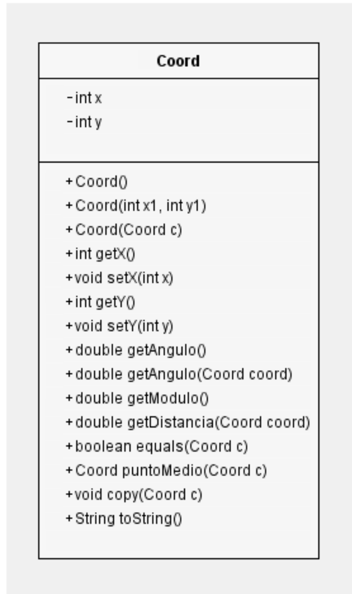
El software que se planea desarrollar es una aplicación grafica interactiva que muestra la ejecución de las propiedades del objeto matemático a estudiar. Uno de los principales objetivos es el desarrollo de software basado en el registro semiótico presentado en apartados anteriores, en este ítem se verá el diseño del software con las clases definidas.

El problema a solucionar es crear un escenario donde interactúen los símbolos y que se hagan evidentes las propiedades que se intentan visualizar por reste medio, el programa se compone de pocos objetos, que se describirán a continuación.

Clases

Círculo y Coord

Las dos primeras clases son las que definirán todo lo que se encuentre dentro del escenario, además los símbolos que se simularan se pueden definir mediante los dos siguientes objetos, al igual que todos los componentes importantes para el desarrollo del software.



Fig, 21

Esta clase describe las propiedades de un punto en la pantalla, mediante dos números enteros puesto que la pantalla es discreta para el motor gráfico que se usa, también sus métodos describen el comportamiento que tienen las coordenadas, también posee métodos que permiten la operación con otras clases del mismo tipo.

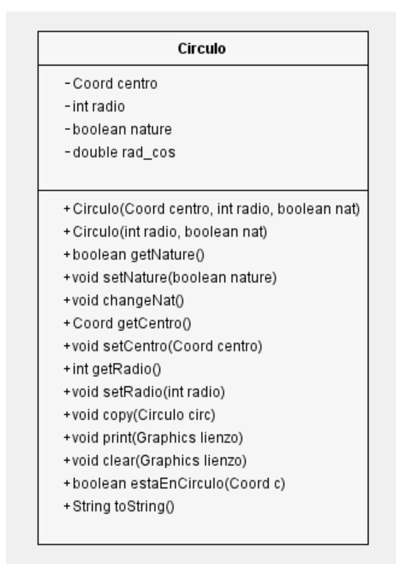


Fig. 22

Con la clase circulo se habilita la creación de los círculos que componen los símbolos del registro que se planea implementar, también el de ayudar a graficar otros elementos del escenario.

Elemento

Esta clase describirá al objeto principal del escenario, de la cual se derivaran todas las demás clases de objetos que sean capases de interactuar con los símbolos, ya sean elementos que roten, inviertan, y que apliquen operaciones a los símbolos, y también los símbolos.

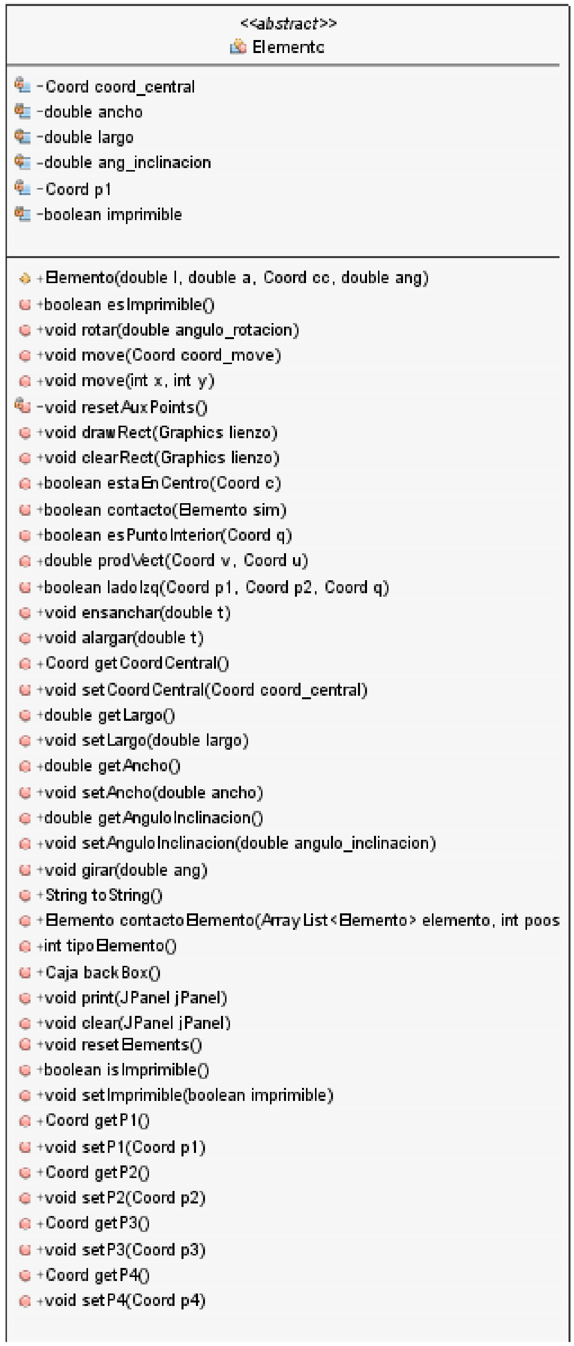


Fig. 23

Este elemento está definido por un rectángulo, con su largo, su ancho, un ángulo de inclinación y una coordenada central la que dará la información sobre la posición del elemento en el escenario.

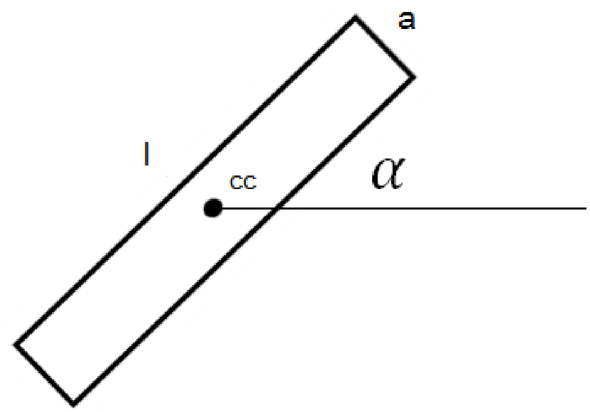


Fig. 23

La fig. 23 muestra una visualización de lo que la clase intenta simular mediante el código del software, es esencia un rectángulo con la capacidad de rotar sobre la coordenada central (cc), este objeto permitirá ubicar en la pantalla los objetos que interactuaran en el escenario. Siendo l la longitud y a el ancho del rectángulo, y alfa será el ángulo comprendido entre una paralela a la horizontal

Símbolo

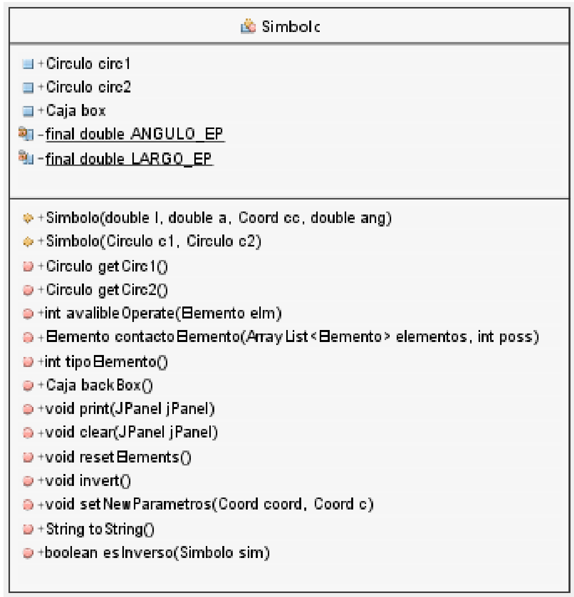


Fig. 24

Esta clase hace uso de las propiedades de la clase elemento, dando así la posibilidad de moverse por y rotar por todo el escenario para poder interactuar con otros símbolos y con los elementos capases de transformarlos,

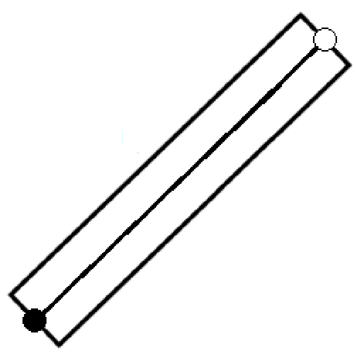


Fig. 25

La Fig.25 muestra con una representación como el objeto símbolo está ubicado dentro de un elemento

Generador

Esta clase cumplirá la función de generar los símbolos que se requieran para realizar los ejercicios o simplemente jugar con las propiedades y los elementos.

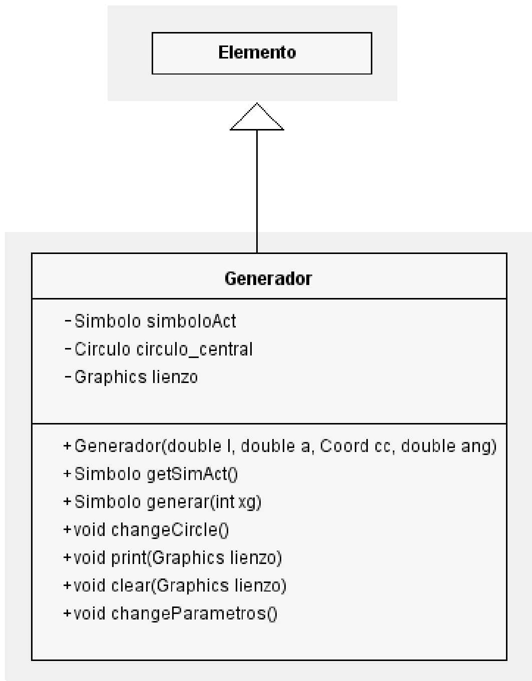


Fig. 26

Al ser un componente que está en el escenario y formara parte de las mecánicas que permiten la simulación del objeto matemático con sus propiedades también serán las que posee un elemento dentro del escenario, claro con las restricciones o aplicaciones que requiera la clase generador.

Función

La clase función y sus clases derivadas heredan las propiedades de la clase elemento, así que las funciones podrán moverse por la pantalla he interactuar con los demás elementos según la programación que tenga cada función.

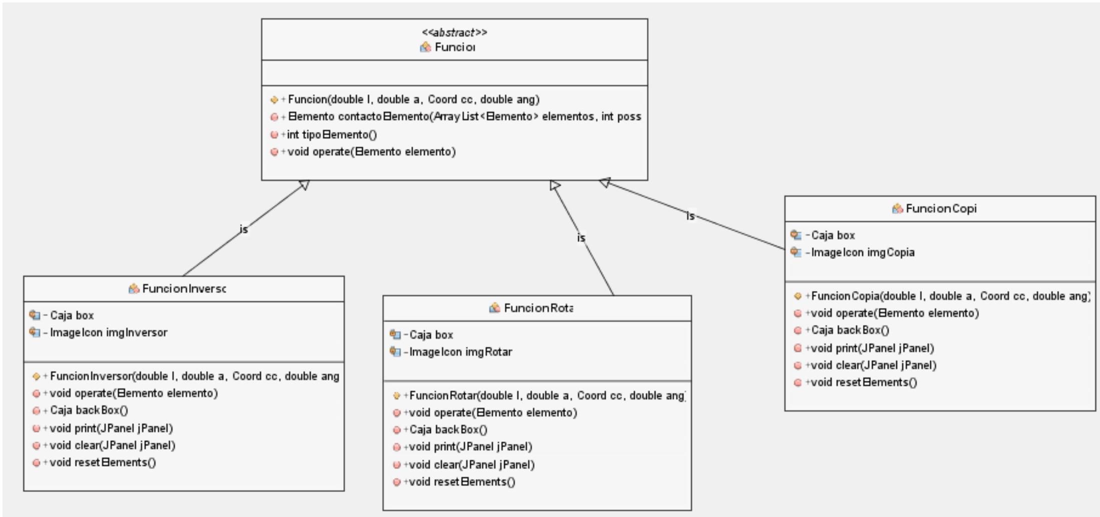


Fig. 27

Para este proyecto se programaron tres funciones con las cuales permitían, girar, copiar, he invertir cada símbolo del sistema planteado, se diferencian por las siguientes imágenes

Fig. 28

Que corresponde en su orden a las funciones planteadas anteriormente, las imágenes tratan de evocar la interacción que realiza la función.

Escenario

Este clase es la abstracción del objeto donde intentaran los símbolos con los demás elementos, aquí es donde se simularan todo lo que es posible hacer con ellos, principalmente la operación definida en el ítem un nuevo registro.

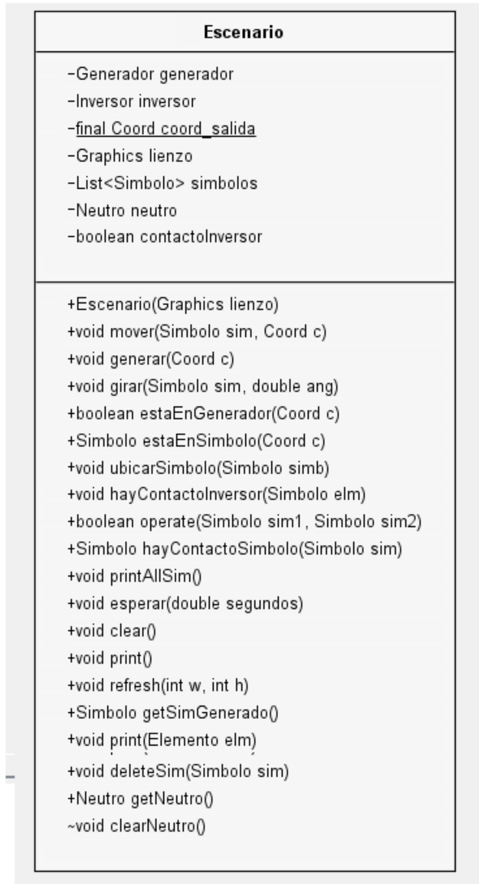


Fig. 29

Especificaciones técnicas

El software es escrito en java y cuenta con las siguientes especificaciones para su ejecución en los computadores. Las especificaciones son tomadas de la página web.

https://www.java.com/es/download/help/sysreq.xml

Windows

Windows 10 (8u51 y superiores)

Windows 8.x (escritorio)

Windows 7 SP1

Windows Vista SP2

Windows Server 2008 R2 SP1 (64 bits)

Windows Server 2012 y 2012 R2 (64 bits)

RAM: 128 MB

Espacio en disco: 124 MB para JRE; 2 MB para Java Update

Procesador: Mínimo Pentium 2 a 266 MHz

Exploradores: Internet Explorer 9 y superior, Firefox

Mac OS X

Mac con Intel que ejecuta Mac OS X 10.8.3+, 10.9+

Privilegios de administrador para la instalación

Explorador de 64 bits

Se requiere un explorador de 64 bits (Safari, por ejemplo) para ejecutar Oracle Java en Mac.

Linux

Oracle Linux 5.5+1

Oracle Linux 6.x (32 bits), 6.x (64 bits)2

Oracle Linux 7.x (64 bits)2 (8u20 y superiores)

Red Hat Enterprise Linux 5.5+1, 6.x (32 bits), 6.x (64 bits)2

Red Hat Enterprise Linux 7.x (64 bits)2 (8u20 y superiores)

Suse Linux Enterprise Server 10 SP2+, 11.x

Suse Linux Enterprise Server 12.x (64 bits)2 (8u31 y superiores)

Ubuntu Linux 12.04 LTS, 13.x

Ubuntu Linux 14.x (8u25 y superiores)

Ubuntu Linux 15.04 (8u45 y superiores)

Ubuntu Linux 15.10 (8u65 y superiores)

Exploradores: Firefox

Reflexiones Finales

Posibilidades didácticas

Como se muestra en capítulos anteriores, el registro semiótico propuesto cumple con los axiomas que definen un grupo, por tanto cumplirán con las propiedades que se deriven de estos y estas propiedades están presentes en diversos campos de las matemáticas como en el comportamiento de los números reales y el tratamiento algebraico. Dar la posibilidad para que se desarrollen métodos que ayuden a los estudiantes en el objetivo de alcanzar la coordinación entre registros, esto sería un paso para la comprensión de los objetos matemáticos según la hipótesis de Duval sobre la comprensión de conceptos matemáticos, explicada en apartados anteriores.

El ministerio de educación propone un sistema educativo basado en competencias matemáticas, y para que los profesores adopten un sistema enfocado en la adquisición de competencias por parte del estudiante, se debe hablar del concepto de matemáticamente competente, pero para lograr que los profesores puedan manejar este concepto, según el ministerio de educación Colombiano en el documento Estándares Básicos de Competencia En Matemática (Pg. 49). Se requiere que los profesores reflexionen y exploren en varios aspectos que conciernen a la actividad matemática en general llamados en el documento EBCM . “Los cinco procesos generales de la actividad matemática” (pg. 51) los cuales son:

- La formulación, tratamiento y resolución de problemas
- La modelación
- La comunicación
- El razonamiento
- La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos

Estos son los procesos que están involucrados en la actividad matemática, y por esto también presentes en la enseñanza de las matemáticas. La comunicación de los conceptos matemáticos, entre el profesor y los alumnos, y entre los aprendices, es uno de estos procesos mencionados por el ministerio, en el documento se hace referencia a la hipótesis de aprendizaje de Raymond Duval, y se reconoce como el punto de referencia para aceptar que la comprensión en matemáticas viene dada por la coordinación de varios registros. Esta hipótesis se usa en este documento como parte de la justificación para crear un nuevo registro, el cual permita el proceso de razonamientos de composición que posee la actividad matemática.

El razonamiento es otro punto de procesos generales, y teniendo en cuenta que para lograr trabajar con un registro semiótico es necesario un proceso lógico dado por la naturaleza de los objetos que se estudian, la creación de registros que promuevan este tipo de pensamiento también es necesaria para el desarrollo matemático.

Movilizar estos dos procesos seria esencial para el desarrollo de las competencias matemáticas que los estudiantes podrían llegar a tener, si no se desarrollan estos procesos de forma adecuada, ¿Cómo podrán cumplir con los estándares si no se logran movilizar estos procesos?

El programa está diseñado para dar la posibilidad de crear a partir de la clase elemento diferentes tipos de entidades capases de interactuar con todas las demás clases derivadas de la clase elemento, un ejemplo es la simulación de la clase función

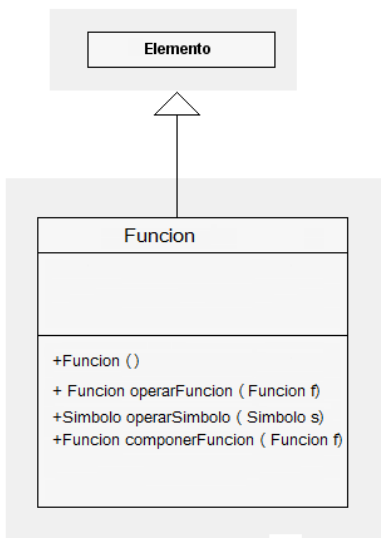


Fig. 30

Esta clase básica, permite la relación de un símbolo con otro, además de operar dos funciones, a partir de esta clase base se pueden crear diferentes tipos de funciones que involucren los símbolos propuestos en el nuevo registro.

Al final lo que es posible hacer con este programa estará limitado por lo que es posible hacer con los símbolos propuestos que hasta el momento de escribir este trabajo son potencialmente todas las propiedades de los grupos. Es posible el usar este software para la creación de secuencias didácticas que pretendan suplir una falencia al momento de intentar enseñar un concepto, incluso la secuencia didáctica puede ser una clase como tal en programa.

Conclusión

Las representaciones son esenciales para el trabajo matemático, sin estas no es posible la interacción con los objetos matemáticos, son el eje central del trabajo del maestro y son las únicas herramientas con las que puede presentar los objetos matemáticos a los estudiantes (ver implementación), estas representaciones semióticas son formas de interpretar los objetos matemáticos cumpliendo su objetivo en algunos estudiantes, y causando dificultad en otros, además estas representaciones son limitadas a las que presenta el profesor que a sus vez están limitadas a los libros de texto académicos. Los alumnos son capaces de usar diferentes símbolos para representar razonamientos simples, lo que da el potencial a que sean propensos a usar diferentes tipos de representación para su trabajo en matemáticas.

Existen diferentes formas de representar conceptos matemáticos, en este trabajo se mostró como un sistema de representación puede coincidir con el comportamiento indicado en los axiomas que describen en este caso un objeto matemático, pero es muy probable que esta representación no sea la última que sea compatible con los axiomas de grupo, y así con los diversos objetos que estudia las matemáticas.

Si un trabajo guiado por el uso de las representaciones facilita en gran medida la construcción de conocimiento, el desarrollo de una actividad educativa destinada a la búsqueda de estas representaciones es muy adecuado para fomentar esta construcción.

Bibliografía

Bernard Kolman (1999). *Algebra Lineal con aplicaciones y mathlab. PRENTICE HALL*

David S. Dummit (2004), Richard M. Foote. *Abstarct Algebra Thirt Edition.* JOHN WILEY & SONS, inc.

Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de hppts://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Estándares Básicos de Competencias. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Luis Joyanes, Ignacio Zahonero (2014). *Programación en C,C++,Java y UML.* MC GRAW HILL

Michael H.G Hoffman (2006). *Semiotic Perspectives in Mathematics Education*. Educational Studies in Mathematics. SPRINGER

Raymond Duval (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics.* Educational Studies in Mathematics. SPRINGER

Tom M. Apostol (2001). *CALCULOS Volumen I*. REVERTÉ