DISFRUTANDO LA TRIGONOMETRÍA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LAS MATEMÁTICAS RECREATIVAS

LESLY SELENIA CEBALLOS TONGUINO

JEISSON ARLEY CUARAN CULCHAC

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN-CAUCA

2022

Tabla de contenido

Introducción

El presente proyecto de aula es el resultado de la sistematización de cuatro asignaturas, que según el pénsum del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Cauca se denominan como “Práctica Pedagógica”. En la primera asignatura se hizo una caracterización de 4 instituciones educativas de la ciudad de Popayán, donde se seleccionó la Institución Educativa Alejandro de Humboldt para llevar a cabo este proyecto; en la segunda, se realizó la planeación y elaboración de los talleres y actividades a realizar en dicha institución; en la tercera, se ejecutaron los talleres y actividades con estudiantes de grado décimo y en la cuarta, se elaboró y organizó el presente documento.

Este proyecto es una propuesta didáctica fundamentada en la solución de problemas en trigonometría y matemáticas recreativas, nuestro objetivo es mostrar las matemáticas desde un punto de vista práctico y divertido, pues estas, además de ayudarnos a solucionar problemas del mundo real, son también fuente de interesantes juegos con los que se desarrollan una serie de habilidades útiles para la vida misma. Es por ello que este proyecto está enfocado en una enseñanza de comprensión de conceptos trigonométricos y no solo en sus algoritmos mecánicos y fórmulas memorísticas, buscando que el estudiante se acerque a la trigonometría de manera natural, observando hechos reales y ciertos comportamientos físicos de su entorno.

A continuación, presentamos el documento que recoge el proceso de practica pedagógica, el cual está organizado en los siguientes capítulos: el primer capítulo, justifica nuestra propuesta, dando a conocer la importancia de enseñar trigonometría en el bachillerato; el segundo capítulo, presenta los referentes teóricos de nuestro trabajo; el tercer capítulo, describe la metodología que dirige nuestro proyecto de aula basándose en la resolución de problemas para desarrollar los principales temas de trigonometría y las matemáticas recreativas como una metodología lúdica en la enseñanza de las matemáticas; el cuarto capítulo, muestra el resultado de la ejecución de cada uno de los talleres en el aula, presentando por medio de bitácoras la respectiva reflexión. Por último, se presentan las conclusiones de nuestro ejercicio docente donde realizamos una reflexión general sobre los resultados obtenidos en este proyecto.

Capitulo I. ¿Por qué enseñar trigonometría?

La trigonometría es de gran importancia para el conocimiento humano, pues modela fenómenos matemáticos y eventos de la vida real, además, es usada en diferentes campos como la física, astronomía, cálculo, matemática, biología, química, geografía, arquitectura, economía, entre otras, por ello, si analizamos nuestro alrededor podemos notar que se encuentra en todos lados.

Enseñar trigonometría a los alumnos de secundaria es una labor compleja debido a varios factores como, por ejemplo, la dificultad de acabar con la idea fuertemente arraigada en la sociedad de que las matemáticas son aburridas y difíciles de aprender, además, la enseñanza de la trigonometría requiere salirse de las clases tradicionales y buscar estrategias innovadoras con el fin de que el estudiante no solo memorice definiciones y fórmulas, sino que acceda a un verdadero conocimiento donde comprenda e interiorice los principales conceptos trigonométricos.

Esta rama de las matemáticas nos llamó la atención debido a que, es uno de los principales temas a desarrollar en grado décimo, que, a su vez, trae muchos errores y dificultades de comprensión por parte de los estudiantes como:

- La repetición mecánica de fórmulas, teoremas y definiciones.
- La comprensión errónea del estudiante de la información transmitida por el docente.
- El deficiente manejo de los conceptos.
- Falta de bases con respecto a la geometría y el álgebra.
- Dificultad en la interpretación en problemas de aplicación.
- Aplicación de leyes o fórmulas sin verificar sobre qué clase de triángulo se está trabajando.

Una de las tareas más importantes como docentes es no dejar avanzar estos obstáculos de aprendizaje en el alumno, por ello, es importante para nosotros implementar diversas actividades con el fin de mostrarles otra visión de la trigonometría, tratando de evitar que el estudiante caiga en los errores y dificultades anteriormente mencionados. Pensamos que una forma de enfrentar estos errores es reforzando muchos de los conceptos de este campo con ayuda de las herramientas TIC, haciendo uso de programas como GeoGebra que ayuden al estudiante a comprender y consolidar conceptos, del mismo modo, esperamos que el alumno mejore su comprensión en la resolución de triángulos, aplicando la trigonometría de una forma diferente.

Capitulo II. Referentes Teóricos

A continuación, se consideran los referentes teóricos en los que está basado este trabajo de práctica, aquí se dan a conocer algunos aspectos relevantes sobre el planteamiento y resolución de problemas en trigonometría y las matemáticas recreativas.

Resolución de problemas, una metodología idónea para la enseñanza de las matemáticas.

Creemos que la resolución de problemas es una metodología que debe estar inmersa en todo el diseño curricular de las instituciones en los diferentes niveles de educación, también es una línea de investigación consolidada en la educación matemática, es tal su importancia que es considerado uno de los ejes indispensables en el aprendizaje matemático.

Por medio de la resolución de problemas, los estudiantes descubren la utilidad de las matemáticas en su vida diaria y el mundo real, en este sentido, De Guzmán (1986) comenta que:

> Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas.

Resolviendo problemas, el estudiante relaciona práctica y saber, donde los conocimientos matemáticos son una base para que se enfrente a las diferentes situaciones de la vida diaria, con lo que el estudiante podrá lograr una apropiación de los teoremas y propiedades matemáticas viendo las magníficas aplicaciones de estas en el mundo real. Por otro lado, no existe un método que permita solucionar todos los problemas de la misma manera, en cada tipo de situación se requiere del aporte de ideas particulares por parte del estudiante, incluso se puede tener diversas formas de resolución.

Uno de los personajes más influyentes en esta línea de investigación es el matemático Húngaro George Pólya, quien en sus estudios estuvo interesado en el proceso de cómo se derivan los resultados matemáticos. En su libro "Como Plantear y Resolver Problemas" Pólya (1981) introdujo un método de cuatro pasos útiles en la solución de problemas, este se basó en sugerencias para el maestro en el aula de clases, el cual por medio de preguntas expuestas de forma sencilla cumple la tarea de ayudar al alumno a resolver problemas por sí mismo, estas preguntas que propone Pólya para el maestro se encuentran en las cuatro fases del método, las cuales presentamos a continuación:

Comprensión del problema.

Esta fase requiere de la motivación e interés del estudiante por el problema, esto es de vital importancia para que luego él trate de entenderlo y quiera resolverlo. Aquí es importante que el alumno se familiarice e intente ver el problema desde distintas perspectivas, además debe reconocer la información que le da el problema y si es el caso, relacionarlo con alguna gráfica usando las notaciones adecuadas.

Para lograr lo anterior debe ser indispensable que el maestro proponga a los estudiantes las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concepción de un plan.

Posterior a familiarizarse con el problema, el estudiante ahora debe plantearse los caminos que lo llevarán a su solución, esta fase es una búsqueda creativa de ideas adecuadas que logren satisfacer la condición del problema. Para ello es necesario que use ciertos conocimientos previos, como problemas resueltos y teoremas demostrados.

Por su parte, el maestro debe guiar al estudiante para que encuentre las ideas adecuadas, esto lo logrará colocándose en el lugar de su alumno y pensando como él, así la ayuda del maestro es solo una guía y no la solución al problema. De esta manera, Pólya propone cuestionar al alumno de la siguiente forma:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Ha empleado todos los datos?

- ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan.

Teniendo listo el plan, hay que aplicarlo y verificar cada paso de la solución, el estudiante debe examinar cada detalle asegurándose que efectivamente se recorre el camino planteado, esto hará que esté completamente seguro de que su solución es correcta.

En esta fase el maestro es la persona que debe insistir en la verificación de cada paso con preguntas como:

- ¿Pueden ustedes ver claramente que el paso es correcto?
- ¿Pueden también demostrar que es correcto?

Examinar la solución obtenida

Finalmente, una vez resuelto el problema, es necesario que el estudiante haga una visión retrospectiva de su solución, un repaso de su trabajo para estar completamente seguro de la no existencia de errores. En esta fase el estudiante comprueba que su camino fue el correcto y no hubo necesidad de plantearse otra solución, sin embargo, puede ocurrir que encuentre una forma más corta y correcta de resolver su problema.

No es suficiente solucionar el problema, el estudiante debe darse cuenta que podría mejorar su solución y utilizarlo como base para resolver otros, también es importante que en esta fase el maestro ayude al estudiante a relacionar su problema con el mundo real, observando las implicaciones de las matemáticas en su vida diaria.

Algunas preguntas propuestas por Pólya en esta fase para que el maestro cuestione a sus alumnos son:

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Con la aplicación de este método en clases, el alumno puede sacar el mejor provecho de todo problema al cual se enfrente, interpretándolos de forma adecuada, analizando, organizando sus datos y sus ideas, de modo que use sus conocimientos y habilidades para la creación y diseño de estrategias que se puedan aplicar correctamente a la condición de cada problema, entendiendo que cada solución se puede convertir en una herramienta para enfrentarse a otro y que solo mediante la ejercitación de este proceso el alumno puede aumentar su destreza y experiencia.

Matemáticas recreativas, una metodología lúdica en la enseñanza de las matemáticas

Etimológicamente, la palabra recrear según Cabello (2014) significa crear de nuevo, es decir, las matemáticas recreativas en el aula permiten al estudiante descubrir algo nuevo por medio de actividades lúdicas, por otro lado, le brindan al docente la posibilidad de divulgar de una forma motivadora las matemáticas. Un buen juego matemático que le permita al estudiante pensar, mostrar su lado competitivo, criticar, modelar, reflexionar, interpretar y, además, con alto valor educativo y formativo se puede convertir en una gran herramienta de motivación para aprender matemáticas.

Guzmán (1986) afirma que desde la antigüedad muchos matemáticos cultivaban la matemática a través del juego, como, por ejemplo:

- Gauss, quien era un gran aficionado a jugar a las cartas y luego de cada juego anotaba las manos que recibía para posteriormente analizarlas estadísticamente.
- Euler, que con su solución al problema de los siete puentes de Königsberg constituyo el comienzo vigoroso de una nueva rama de las matemáticas, la teoría de grafos y con ella la topología general.
- Gerónimo Cardano, el mejor matemático de su tiempo, escribió un libro sobre juegos de azar con el que se anticipó en más de un siglo a pascal y Fermat en estudios probabilísticos.

De esta forma, De Guzmán (1984, citado por Sánchez, 2013) relaciona al juego y la enseñanza de las matemáticas mediante el siguiente pensamiento:

> El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?

Por otro lado, es importante mencionar al filósofo Martin Gardner, divulgador de matemáticas recreativas, quien según Mulcahy y Richards (2014) es reconocido por haber escrito la legendaria columna “Juegos matemáticos” durante 25 años en la revista Scientific American, además afirman que toda persona que se ha interesado por las matemáticas en algún momento se inspiró, estudió y citó su columna a lo largo de los años, pues Gardner logró mostrar con sus muchos juegos que la matemática puede ser divertida y accesible para todos, desde cuestiones matemáticas básicas hasta las más complejas, el mismo Gardner (1979) afirma que:

> Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones «prácticas», (…) Y si

> el «juego» se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia. (p. 3)

Gardner (2007) considera que las matemáticas recreativas son la mejor forma para empezar a conocer la matemática, jugar con números, figuras, acertijos, rompecabezas y más, mejoran la capacidad de pensar lógica y creativamente, además aquellos juegos que solo requieren el más elemental conocimiento también proporcionan una mirada estimulante hacia las matemáticas.

El uso de esta metodología nos permite mostrarles a los estudiantes un lado divertido de la matemática en el aula, como también crear un ambiente donde puedan expresarse libremente, estimulando la comunicación, la crítica, la participación, la autonomía personal y claramente el interés por aprender. De esta forma, se busca que mediante actividades lúdicas el estudiante descubra por sí mismo conocimientos matemáticos, rompiendo con el ambiente tradicional y magistral donde el docente es figura de todo conocimiento y el alumno se reduce a absorber lo que se le trasmite.

Capitulo III. Metodología y Actividades

El presente trabajo está basado en la resolución de problemas y matemáticas recreativas, tal y como se lo expuso en los referentes teóricos, esta metodología nos permite brindar al estudiante una experiencia en la que construye, interpreta y aplica conceptos de la trigonometría en problemas que provienen del mundo real. Para llevar a cabo este proyecto de aula se ha buscado usar una estrategia apoyada en las TIC y herramientas ofimáticas haciendo uso de Power Point y de sitios web como GeoGebra, YouTube, entre otras, en un espacio extracurricular con estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt.

A continuación, presentamos de manera general los talleres propuestos a los estudiantes, identificando las temáticas y objetivos que nos llevaron a proponerlos:

- **¿Qué tanto sabes de trigonometría?**: este es un taller diagnóstico que tiene como objetivo indagar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, como también reconocer algunos de sus conocimientos en trigonometría.
- **Historia de la trigonometría**: en este taller queremos hacer un breve recorrido histórico sobre el surgimiento de la trigonometría y su evolución.
- **Resolvamos problemas con la regla de tres:** el objetivo de este taller es dar a conocer la medición de los ángulos, las diferencias y la importancia de medir en grados o radianes para incorporar adecuadamente estos sistemas en la vida cotidiana.
- **Sumergiéndonos en el mundo de la trigonometría:** en este cuarto taller nos enfocaremos en abordar los principales conceptos de trigonometría, como lo son las razones y funciones trigonométricas.

- **Conociendo las Identidades Trigonométricas:** este taller tiene la finalidad de presentar a los estudiantes la forma de obtener las principales identidades trigonométricas, sus aplicaciones y el cómo obtener el seno y coseno de los ángulos notables sin el uso de calculadora.
- **Descubramos la ley de senos y cosenos:** con este taller se pretende que el estudiante llegue por sí mismo a las leyes de senos y cosenos y comprenda como y cuando usar estas relaciones.

Es importante mencionar que los anteriores talleres se encuentran de manera detallada en el Anexo A de este documento.

Por otro lado, todos los talleres inician con una exposición magistral del tema con el fin de contextualizar al estudiante y así poder realizar sincrónicamente una serie de problemas planteados que se resuelvan empleando el método de Pólya, además, cada taller concluye con una actividad lúdica de matemática recreativa con la cual se quiere potencializar el pensamiento lógico matemático de los estudiantes.

En esta metodología de resolución de problemas se plantean actividades interactivas que provienen del mundo real. En cada una de ellas se proponen preguntas abiertas sugeridas por Pólya, las cuales nos permiten generar un espacio donde los estudiantes puedan participar individual o grupalmente y expresar libremente sus ideas de cómo resolver cada situación presentada. Además, con las matemáticas recreativas a través de nuestros juegos nos permiten enseñar esta ciencia disminuyendo la seriedad y rigurosidad que la acompaña, aunque algunos juegos no tengan nada que ver con el tema principal de nuestros talleres, nos ayudan a fomentar nuestras relaciones personales y comunicativas con nuestros estudiantes.

Con respecto a la parte evaluativa, las TICs y las herramientas ofimáticas ofrecen una vía que apoya el proceso de evaluación de aprendizajes por medio de la participación de cada uno de los estudiantes, las actividades planteadas nos brindan la posibilidad de realizar una evaluación formativa cuyo objetivo según EasyLMS (2020) es monitorear el aprendizaje del estudiante para poder brindar la retroalimentación del proceso, además nos ayuda a identificar las primeras brechas en nuestra instrucción y así poder enfocarnos en reforzar conceptos o procedimientos que no sean claros para el estudiante. En este sentido, nuestra evaluación tiene el objetivo de valorar la participación e interés de los estudiantes hacia la resolución de las diferentes actividades que se plantean en clase.

Capitulo IV. Bitácoras, narrando nuestra experiencia en el aula

En este capítulo, se encuentra a través de bitácoras la reflexión de nuestra práctica docente realizada desde el mes de septiembre hasta noviembre del año 2021 con aproximadamente 10 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt, cabe resaltar que los estudiantes se encontraban recibiendo clases de manera virtual desde el año pasado por motivos de la pandemia covid-19, por lo que convocarlos a presencialidad extra - clase fue complejo por los protocolos de bioseguridad para el manejo y control del riesgo del Coronavirus, por esta razón la participación de los estudiantes en nuestras clases fue voluntaria.

A continuación, presentamos las bitácoras obtenidas del desarrollo en el aula de los seis talleres de trigonometría y matemáticas recreativas, cada bitácora se encuentra organizada por momentos, en los cuales se hace explícito el tema y las actividades a desarrollar, en general las bitácoras inician con una explicación del tema, luego se da paso a la resolución de problemas, y se finaliza con las actividades recreativas.

Bitácora #1: ¿Qué tanto sabes de trigonometría?

En esta primera bitácora reconstruimos lo sucedido en nuestro primer taller ¿Qué tanto sabes de trigonometría?, el cual tenía el objetivo de indagar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, como también reconocer algunos de sus conocimientos en temas de trigonometría, es importante mencionar que el docente encargado del área de matemáticas nos informó que algunos temas de trigonometría habían sido trabajados mediante el desarrollo de guías, por lo que esperábamos que los estudiantes tuvieran cierto conocimiento en estos temas.

Dicho esto, procedemos a realizar la reflexión sobre todo lo acontecido en este primer taller de acercamiento con nuestros estudiantes, teniendo en cuenta los siguientes momentos:

Primer momento: Presentación

En este primer momento de inserción y presentación con los estudiantes dimos a conocer nuestras intenciones con este proyecto de aula en trigonometría, contándoles sobre nuestra metodología de matemáticas recreativas y resolución de problemas. En esta presentación los animamos a disfrutar de las matemáticas a través de los juegos que les propondríamos, como también resaltamos el valor de trabajar alrededor de la resolución de problemas comentándoles sobre el matemático George Pólya y su método para resolver un problema, el cual nos permite hacerlo de forma organizada, puesto que consiste básicamente en: entender el problema, planear una solución, ejecutarla y finalmente examinarla con el fin de que su solución nos sea útil para resolver algún otro problema a futuro.

Segundo momento: Actitudes hacia las matemáticas

En este segundo momento se prepararon algunas preguntas con la intención de indagar sobre las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas. Esto fue de gran importancia para conectarnos con los estudiantes, mantener una comunicación activa y así establecer una buena relación didáctica antes de iniciar con los temas propios de nuestro proyecto de aula.

Por consiguiente, algunas de las preguntas propuestas fueron: ¿Qué son las matemáticas para usted?, ¿Es divertido para usted aprender matemáticas? ¿Por qué?, ¿Para qué son útiles las matemáticas?, ¿Dónde pueden encontrar las matemáticas en la vida real?, y ¿Cómo le gustaría que le enseñen matemáticas? Con base en las respuestas de nuestros estudiantes a estas preguntas hacemos las siguientes reflexiones:

- Los estudiantes admiten que las matemáticas están presentes en su vida diaria, desde ir a comprar en una tienda hasta resolver una situación de mayor complejidad. Estas respuestas nos parecieron satisfactorias, puesto que, muchas veces se cree que las matemáticas no son útiles y que los aprendizajes adquiridos en el colegio no servirán para su vida diaria, más adelante nosotros ayudaremos a fundamentar su utilidad por medio de la resolución de problemas en trigonometría.
- Algunos estudiantes encuentran divertidas las matemáticas, puesto que encuentran en ellas un reto y un objetivo a alcanzar, mientras que para otros no son divertidas por su complejidad, por el método de enseñanza o porque no logran comprenderlas. Independientemente del hecho de que las matemáticas sean o no divertidas, la idea de que son difíciles se ha arraigado en la sociedad e incluso ha llegado a convertirse en un dogma, por ello nuestro deber como docentes es cambiar este pensamiento en los estudiantes permitiéndoles sentirse cómodos haciendo matemáticas.
- Los estudiantes quieren que las matemáticas se enseñen de forma divertida, mediante actividades recreativas que les permitan entenderlas mejor. Con respecto a este tipo de respuestas se entiende que los estudiantes buscan un cambio en su educación, y aunque probablemente no toda teoría matemática se puede enseñar de forma lúdica, es en este punto que se quiere mostrar como las matemáticas recreativas y la resolución de problemas permiten el aprendizaje mediante juegos y actividades dinámicas generando una participación y comunicación activa.
- Los estudiantes no tienen claro que es la matemática como disciplina o como ciencia, pero admiten que incide en sus vidas diarias y que esta es importante porque se encuentra en todas partes. El significado que le dan nuestros estudiantes a la matemática

es práctico, sus respuestas van encaminadas a verla como una ciencia aplicada en su vida real, en las situaciones y problemas que se les presentan. En efecto, nuestra labor con este proyecto de aula es mostrar como las matemáticas surgen a partir de la actividad humana, siendo una construcción social que busca ser útil en nuestras vidas, desarrollando también nuestro intelecto.

Tercer momento: Taller diagnostico

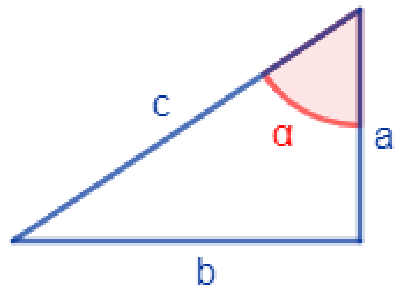
En este punto propusimos un taller escrito el cual iniciaba con la siguiente pregunta: ¿Qué es la trigonometría? Muchos de los estudiantes no recordaron su definición ni los conceptos vistos en esta área. Requena (s. f.), define la trigonometría como la rama de las matemáticas que estudia la relación entre los lados y ángulos de los triángulos, se ocupa, por tanto, de las funciones asociadas a los ángulos, denominadas funciones trigonométricas. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no la relacionaron con ninguno de estos conceptos anteriores, en nuestra opinión esto se debe a que muchas veces la trigonometría se enseña de forma memorística y rutinaria, presentada sin ninguna utilidad, además debido a la situación de pandemia los estudiantes recibieron estos temas en guías, donde no lograron una comprensión profunda y utilitaria de estos conceptos.

Posterior a esta pregunta, el Taller 1 proponía una serie de ejercicios trigonométricos, con el fin de conocer las bases que los estudiantes tenían para dar inicio a nuestro proyecto de aula. El primer y segundo ejercicio de este taller consistían en:

- Identificar el lado correspondiente a cada símbolo a, b o c.

Figura 1.

Triángulo 1

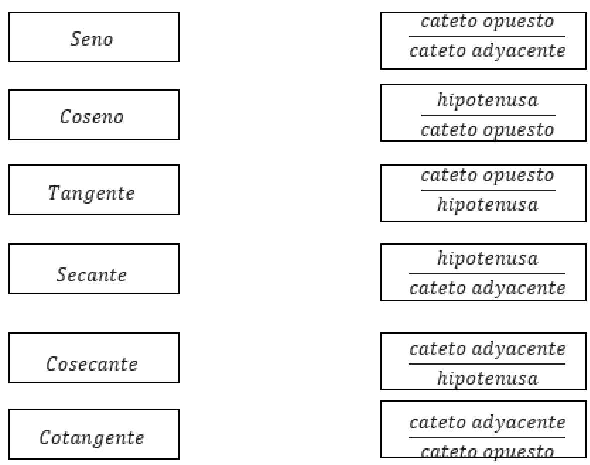


Nota. Esta imagen es usada para desarrollar el ejercicio anterior, donde a, b, c son los lados del triángulo que debían identificar los estudiantes y α uno de sus ángulos. *Fuente:* Elaboración propia.

- Relacionar las siguientes razones trigonométricas con su definición:

Figura 2.

Ejercicio de razones trigonométricas



Fuente: Elaboración propia.

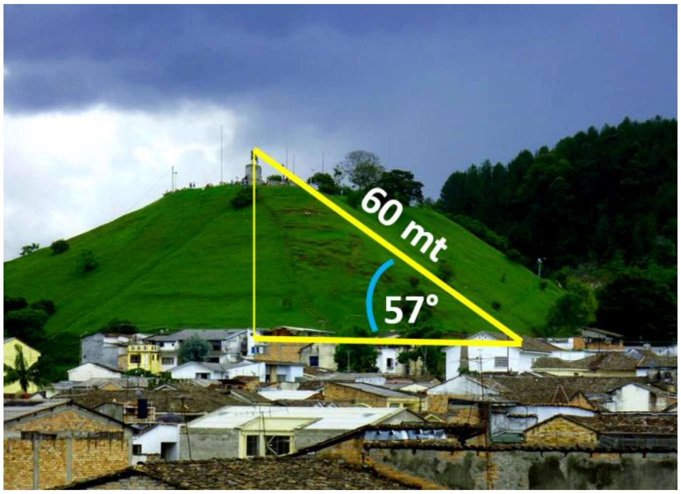
Los estudiantes no respondieron acertadamente los ejercicios anteriores, lo cual podría estar relacionado con el aprendizaje de forma memorística que han adquirido sobre estos conceptos, dado que fue evidente la incomprensión de estos. Cabe resaltar que la resolución de estos ejercicios eran la base para contestar los problemas posteriormente planteados, por ello fue necesario recordar previamente estos conceptos. Esta acción es justificada, puesto que al proporcionarles las fórmulas no se busca que los estudiantes las memoricen, sino que con el uso de las mismas puedan llegar a la resolución de los problemas propuestos.

De esta forma, se continuó con problemas de este tipo:

- Calcular la altura del morro de Popayán, sabiendo que el ángulo de elevación es de 57 º y la inclinación de 60 metros:

Figura 3.

Halla la altura del morro de Popayán



Fuente: Elaboración propia.

Estos problemas tuvieron más acogida que los anteriores, los estudiantes lograron aplicar bien las fórmulas, sin embargo, no profundizaron en su verdadero significado, pues en algunos casos no se tenían las bases para despejar una variable, encontrando respuestas como:

$sen(57°) = \frac{x}{60}$ donde el estudiante no conseguía despejar x.

Como conclusión de este taller diagnóstico, se observó que los estudiantes no tenían unas bases firmes en álgebra y posiblemente lo que aprendieron en este tiempo de pandemia con respecto a trigonometría no permitió interiorizar estos conceptos, por ello se vio necesario no solo recordarles conocimientos que ya han visto sino también comenzar a profundizárselos.

Cuarto momento: Actividades recreativas

Para concluir este primer taller, se dio paso a las dos actividades lúdicas que tenían el fin de amenizar la clase y mostrar en qué consisten las matemáticas recreativas. De este modo, las actividades presentadas fueron:

- Cartas mágicas por Fernández (s.f.) explica que este juego consiste en adivinar números entre 0 y 100 utilizando las siguientes filas de números:

Figura 4.

Cartas mágicas representadas en filas de números

64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80. 81, 82, 83, 87, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 96, 97, 98, 99, 100

16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95

4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 68, 69, 70, 71, 76, 77, 78, 79, 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 100

2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, 42, 43, 46, 47, 50,51, 54, 55, 58, 59, 62, 63, 66, 67, 70, 71, 74, 75, 78, 79, 82, 83, 86, 87, 90, 91, 94, 95, 98, 99

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43,45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99

Fuente: Elaboración propia.

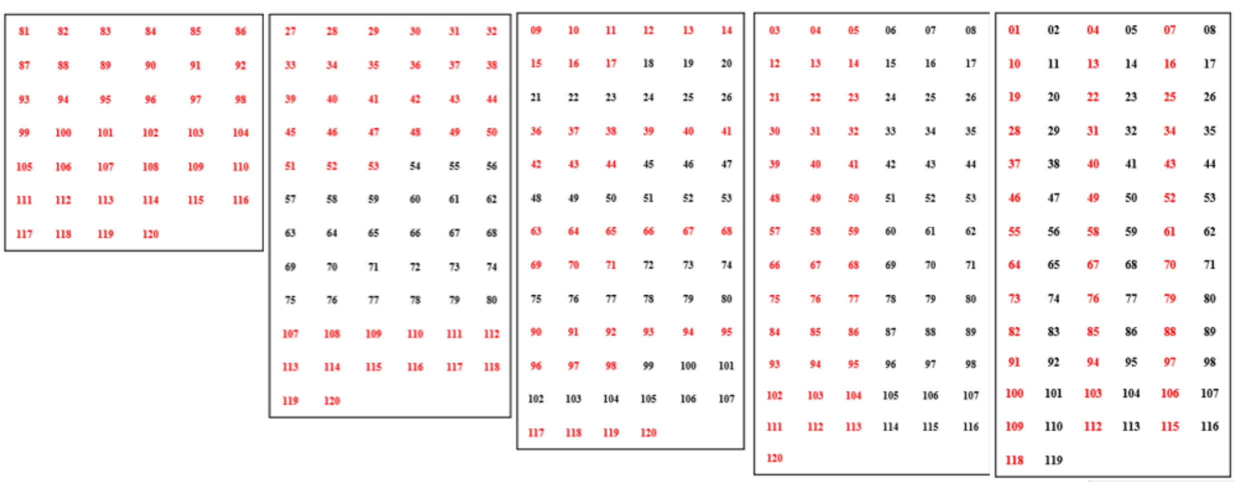
En este juego se pidió a los estudiantes pensar en un número del 0 al 100 y decir en que filas de la anterior figura se encontraba. Para descubrir este número se sumó mentalmente el primer número de cada fila donde se hallaba, de manera que la suma total era el número pensado. Esta actividad logró capturar el interés de los estudiantes, pues trataron de buscar la razón por la cual siempre se les adivinaba el número que pensaban, algunos afirmaron que pudo ser debido a la probabilidad, o que se miraba que un número se repetía en determinadas filas, sin embargo, ninguno llego a la repuesta, pero su intriga fue saciada al momento de indicarles la razón por la cual funciona este juego.

A continuación, se explicó como los números binarios están relacionados con este juego, en este truco se obliga al estudiante a revelar su elección, puesto que ellos dijeron su número hablando en binario, ya que cuando el estudiante dice "No", "No", "No", "Sí", "No", "Sí", "No", se lo puede entender como 0001010, el cual es el número 10 en base decimal y en efecto es el número a adivinar.

Luego de entender el juego se mostró una expansión de este, tomada de S. Cerón (Comunicación personal, 2021):

Figura 5.

Expansión del juego cartas mágicas



Fuente: Elaboración propia.

En esta expansión del juego se puede adivinar el número pensado preguntando si el número está o no en cada una de las cartas y de qué color es, cuando responden "sí" y el color del número, se suma el primer número de color rojo o negro según se responda, la suma que se hace mentalmente es el número elegido. Un resultado que llamó la atención de este juego es como uno de los estudiantes logró mirar esta forma de funcionamiento y lo corroboró jugando con sus compañeros. Es importante dejar claro que el estudiante pudo observar que este juego funciona de la siguiente forma: en esta versión se revela el número en base tres, puesto que, cuando el estudiante dice “No”, “No”, “No”, “Sí en rojo”, “Sí en negro” se lo puede entender como 00012, el cual es el número 5 en base decimal y en efecto es el número por adivinar.

- Cuadrados mágicos tomado de Alegría (2009):

Un cuadrado mágico es una tabla que tiene la misma cantidad de filas como de columnas donde en cada casilla se asigna un número, de tal manera que la suma de cada una de sus filas, columnas y diagonales principales da como resultado el mismo valor, llamado constante mágica, como, por ejemplo, el siguiente cuadrado:

Figura 6.

Cuadrado mágico de orden tres

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fuente: Elaboración propia

En esta actividad se propuso a los estudiantes resolver el cuadrado mágico de 3x3 y luego el de 4x4, la resolución de este cuadrado mágico fue un poco más compleja que el anterior y por ello se dio algunas pistas para completarlo. También se comentó que existen muchos tipos de cuadrados mágicos que no son puros, es decir, que se repite algún número dentro del cuadrado, una respuesta que se resaltó en la resolución del cuadrado de 4x4 fue la de un estudiante, la cual coincidía con el siguiente cuadrado mágico de la sagrada familia. Cabe resaltar que este cuadrado no es puro, ya que se repiten los números 14 y 10.

Figura 7.

Cuadrado mágico de la sagrada familia en Barcelona

Fuente: Elaboración propia

La actitud de los estudiantes cuando se vio los cuadrados mágicos en el arte fue satisfactoria, ya que hubo atención hacia el tema y mayor disposición a hacer los ejercicios propuestos. En esta actividad recreativa también se explicó las diferentes formas de encontrar la constante mágica en un cuadro mágico, las cuales se encuentran en el Taller 1 (Anexo A), es importante resaltar que todas las formas fueron verificadas y analizadas en clase con todos los estudiantes. Luego, se mostró la existencia de otras formas de encontrar esa constante en un cuadrado 4x4, la imagen que se mostró en el proyector fue la siguiente:

Figura 8.

Otras formas de encontrar la constante mágica en un cuadrado mágico de orden 4

Fuente: Elaboración propia

En esta parte los estudiantes verificaron cada una de estas formas encontrando que los cuadrados 4, 6, 7, 9 y 11, no daban como resultado la constante mágica de este cuadrado 4x4 que es 34.

Finalmente, esta parte concluyó con la explicación de los métodos de construcción de cuadrados mágicos mencionados en el Taller 1(Anexo A), se verificó cada uno de ellos y uno de los resultados importantes con los estudiantes siguiendo los pasos del método de construcción de cuadrados de orden par fue:

Figura 9.

Construcción de cuadrado mágico de orden seis

1	35	34	33	32	6
30	8	28	27	11	25
24	23	15	16	20	19
18	17	21	22	14	13
12	26	10	9	29	7
31	5	4	3	2	36

Fuente: Elaboración propia

En este cuadrado los estudiantes verificaron si en verdad era un cuadrado mágico, para ello, primero calcularon la constante mágica con la fórmula:

$$\frac{6(36+1)}{2} = 111$$

Posteriormente, sumaron los números de algunas filas y columnas, dándose cuenta que existían casos donde la suma de estos no concordaba con el resultado de la fórmula, como en el caso de la cuarta fila donde la suma $18 + 17 + 21 + 22 + 14 + 13 = 105$. Así pues, se llegó a que este método de construcción no funcionaba para todos los cuadrados de orden par, por lo que se explicó un método para construir cuadrados mágicos de orden múltiplos de cuatro, es decir, 4x4, 8x8, 12x12, 16x16, … Y se procedió junto con los estudiantes a construir un cuadrado mágico de orden 8 de la siguiente forma:

Figura 10.

Construcción de cuadrado mágico de orden ocho

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Fuente: Elaboración propia

Esta forma de construcción es muy parecida a la anterior, por lo cual se procedió a calcular la constante mágica y efectivamente verificarlo como cuadrado mágico.

En general en este primer taller se logró varios de los objetivos propuestos como el conocer la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y la trigonometría, saber cómo quieren que les enseñen en las clases y también se evidenció la necesidad de reforzar los temas de trigonometría pues en un primer momento se pensó que los estudiantes tendrían cierto conocimiento en estos temas, pero se llegó a que su paso por estos saberes no había sido el esperado, primeramente el objetivo era tratar de recordarles estos conocimientos y profundizarlos hacia la resolución de problemas trigonométricos, pero en ese momento se notó que la enseñanza a realizar debía estar enfocada en un aprendizaje significativo y sólido, más que memorístico, rutinario y aplicable sin ningún significado para el estudiante.

En este taller se reflexionó sobre cómo ha sido la enseñanza de la trigonometría en estos tiempos de pandemia, con estas clases apenas comenzando se buscó restablecer la relación didáctica entre docente, alumno y saber. Tras un año sin estar inmersos los estudiantes en el aula, se quiso que vuelvan a estos espacios y contextos con el deseo de aprender interactuando. Finalmente, vale la pena mencionar que las matemáticas recreativas fueron fundamentales en este taller, pues sirvieron para recobrar el ánimo, interés y motivación de los estudiantes en nuestras clases, ya que los juegos propuestos lograron captar la atención de los estudiantes y se divirtieron mientras jugaban y aprendían, de este modo creemos que las matemáticas recreativas son necesarias en nuestra aula para mejorar la relación didáctica entre nosotros, los saberes matemáticos y los alumnos.

Bitácora #2: Historia de la trigonometría

Este segundo taller tenía el fin de mostrar a los estudiantes como en la construcción de la trigonometría, en sus conceptos y definiciones han estado presente cosas externas a esta misma rama de las matemáticas, como lo es el mundo real y la vida diaria de los seres humanos. Una de las conclusiones del anterior taller fue el reconocimiento de la importancia de las matemáticas en nuestra vida cotidiana y el mundo, la trigonometría no existe por si sola, sus orígenes se remontan a la prehistoria y es precisamente lo que se mostró en este taller, como la trigonometría surge de las necesidades y experiencia del hombre. El objetivo fue mostrar como la trigonometría se ha ido construyendo desde tiempos muy antiguos a través de la experiencia y producto de la actividad viva de razonamiento en la que han intervenido históricamente, de una u otra manera, diversos aspectos del contexto sociocultural. Dicho esto, se procede a realizar la reflexión sobre todo lo acontecido en este segundo taller en dos momentos, la parte histórica con sus respectivos problemas matemáticos y la actividad recreativa propuesta.

Primer momento: Historia de la trigonometría

Este taller inició con la presentación de diapositivas sobre la historia de la trigonometría en diferentes culturas, es importante mencionar que a medida que se iba exponiendo se propusieron ejercicios de acuerdo con lo explicado. De este modo, la exposición empezó mostrando la ubicación en el mapa mundial de las diferentes culturas que aportaron a la evolución de la trigonometría, para a continuación hablar de cada una de ellas.

Cultura egipcia (1800 a. c)

Los egipcios, según Abonia y Miranda (2017) tenían su sistema de medidas por medio del cuerpo humano como el usar, codos, manos y pies para la medición de distancias o magnitudes, también fueron los primeros en establecer el sistema de medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, esto fue algo que se explicó con ayuda de un video publicado por Vitual (2016), donde los estudiantes pudieron hacer la conversión de los grados que diariamente usamos en el sistema decimal a este sistema de medida que propusieron los egipcios de forma sexagesimal de la siguiente forma:

$$39.99° = 39°59´24´´$$

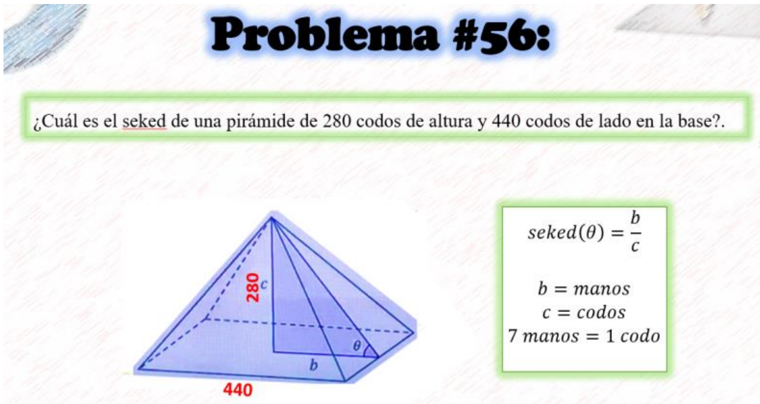
Pues, para pasar de grados a minutos se multiplica por 60, y para pasar de minutos a segundos se multiplica nuevamente por 60, de esta forma $(0{,}99°)(60´) = 59.4´$, luego, $(0{,}4´)(60´´) = 24´´$

Además, Abonia y Miranda (2017) comentan que es tradición de esta cultura hacer sus escritos en tinta negra o roja sobre papiros específicamente para la construcción de sus pirámides, se puede ver el uso de la trigonometría en la construcción de estas, puesto que uno de sus papiros más antiguos, llamado el papiro de Rhind se encontraron contenidos matemáticos y entre ellos de trigonometría, su contenido fecha del año 2000 a. C.

Por consiguiente, se propuso el problema número 56 del papiro de Rhind presentado de la siguiente forma:

Figura 11.

Problema 56 del papiro de Rhind

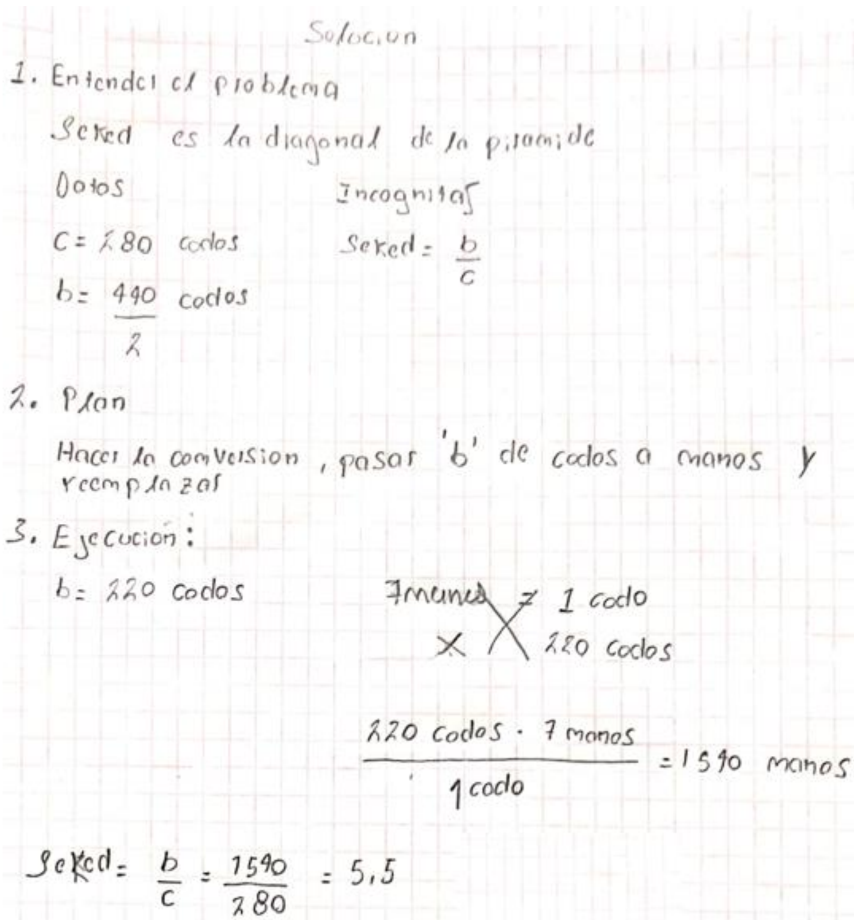


Fuente: Elaboración propia

Para la resolución de este problema se recurrió al método de Pólya, primeramente, se entendió el problema y se miró que datos e incógnitas nos proporcionaba este, en la planeación de la solución se vio la necesidad de hacer algunas conversiones en las medidas dadas y, por tanto, la solución se bosquejó de la siguiente forma:

Figura 12.

Solución del problema 56 del papiro de Rhind



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la institución Alejandro de Humboldt

Es importante resaltar que tipo de unidades son las que encontraron los estudiantes al solucionar este problema, pues solo le colocaron el valor de 5.5 sin indicar ningún sistema de unidades, normalmente se establece el resultado en una misma unidad de medida, mientras en este caso se establecen en dos, manos / codos.

Pues bien, en la parte de verificación del problema se explicó que el Seked (o seqed) es un término egipcio antiguo que describe la inclinación de las caras triangulares de una pirámide recta, por lo tanto, la inclinación de las pendientes medidas se expresó como el número de manos horizontales en relación con cada elevación de codo, equivalente a lo que hoy se conoce por pendiente de una superficie plana inclinada. Además, en este paso se pidió a los estudiantes relacionar este problema con la trigonometría actual, a lo cual no lograron encontrar ninguna relación, ya que no recordaban las identidades trigonométricas, por lo que se hizo necesario recordar lo que es la cotangente y se mostró su relación con el problema, finalizando con el último paso del método de Pólya.

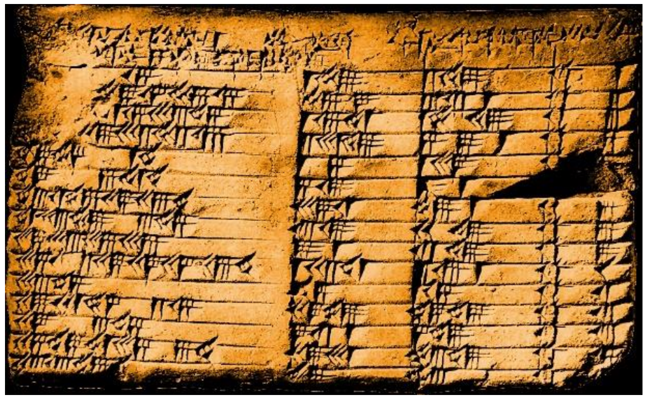
De este modo, la solución presentada fue: $seked(\theta) = \frac{7 \cdot 220}{280} = 5 + \frac{1}{2}$, donde, $cot\ \theta = \frac{220}{280}$ y, por tanto: $7 \cot \theta = seked(\theta)$.

Cultura babilónica (1600 a. c)

Abonia y Miranda (2017) mencionan que lo que más caracteriza a esta cultura es su escritura en forma de símbolos “cuneiformes”, es decir, con forma de cuñas en tablillas de arcilla. El hallazgo más importante en trigonometría en esta cultura es la tablilla Plimpton (Figura N.º 13), se cree que fue escrita cerca de 1800 a. C., tiene una tabla de cuatro columnas y 15 filas de números en escritura cuneiforme de la época, la tablilla de barro Plimpton 322 muestra 60 números en 15 filas y 4 columnas.

Figura 13.

Tablilla babilónica Plimpton 322



Fuente: Villatoro (2017).

Esta tabla muestra lo que ahora se llaman ternas pitagóricas, es decir, números enteros a, b, c que satisfacen el teorema de Pitágoras. Mostrando la tabla anterior de forma legible se tiene la siguiente interpretación de esta:

Figura 14.

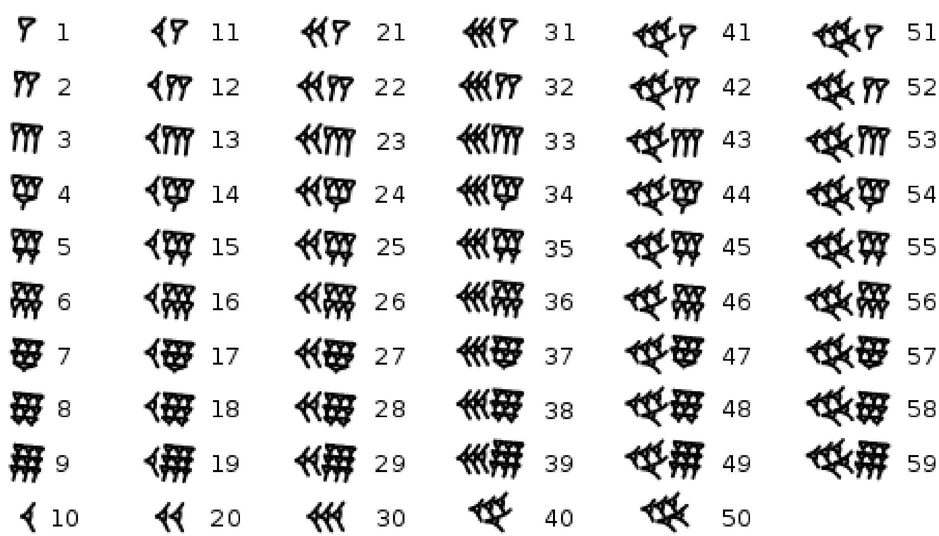
Tablilla Plimpton legible

Fuente: Elaboración propia

Esta tablilla es un poco difícil de entender, por lo que se propuso un ejercicio matemático de conversión donde los estudiantes comprobaron que los símbolos en esta son números reales. Para el siguiente ejercicio lo primero que se explicó fue la base que usaban los babilónicos, la cual es la base sexagesimal, este es un sistema de numeración que emplea como base el número 60 usado para medir el tiempo o como se vio en la cultura egipcia medir los ángulos. El sistema empleado por esta cultura se explicó con la siguiente imagen en la que cada símbolo o marca, representa un número.

Figura 15.

Sistema sexagesimal de la cultura babilónica



Fuente: Fernández (s.f.)

Además, Fernández (s.f.) comenta que el cero en esta cultura lo usaban para representar la ausencia de un número, de la misma forma en que se usa el cero hoy en día, los babilonios tenían las siguientes cuatro representaciones simbólicas para este número:

Figura 16.

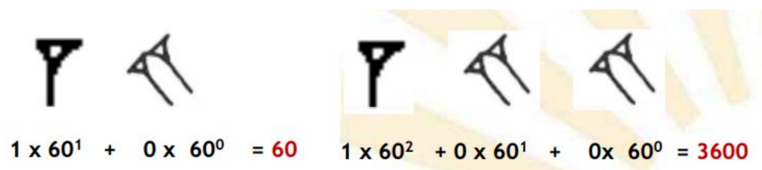
Representaciones del cero en la cultura babilónica

Fuente: Fernández (s.f.)

La representación más usada es la cuarta, de este modo se presentó dos ejemplos de esta representación.

Figura 17.

Uso del cero en la cultura babilónica

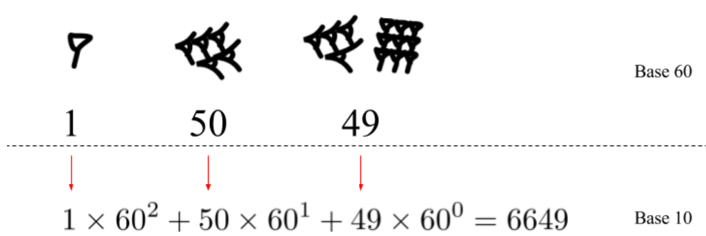


Fuente: Fernández (s.f.)

Por consiguiente, la explicación de estas conversiones de estas marcas en base sexagesimal a nuestro sistema decimal se hizo de la siguiente forma:

Figura 18.

Conversiones sistema sexagesimal babilónico a decimal



Fuente: Camino (2017)

Se multiplica por 60^0 la primera cifra a la derecha correspondiente a la marca y luego se suma la siguiente cifra a la izquierda multiplicada por 60^1 luego la que sigue a su izquierda por

60^2 y se sigue esta secuencia en caso de que hallan más cifras. La suma total da como resultado el número en base 10 como lo indica el ejemplo.

Luego se propuso a los estudiantes convertir los siguientes símbolos o marcas a base decimal:

Figura 19.

Símbolos cuneiformes

Fuente: Elaboración propia

A lo cual los estudiantes contestaron correctamente:

$$3 \times 60^2 + 31 \times 60 + 49 = 10800 + 1860 + 49 = 12709$$

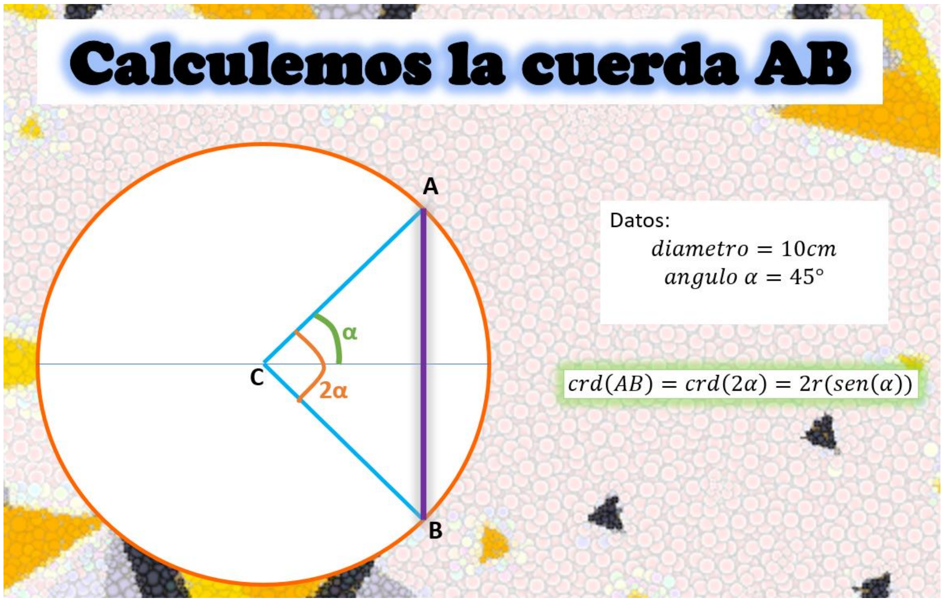
Con este ejercicio matemático se mostró el contexto de los números que se encontraban en la tabla, pues son números bastante grandes que expresan triángulos rectángulos que cumplen con el teorema de Pitágoras.

Cultura griega (200 a. c):

Abonia y Miranda (2017) comentan que en esta cultura sobresalen algunos filósofos matemáticos como Pitágoras a quien se lo considera el padre de las matemáticas griegas, Tales de Mileto quien logró calcular la altura de las pirámides mediante la comparación de sombras, Eratóstenes de Cirene quien es conocido principalmente por ser la primera persona en calcular la circunferencia de la tierra e Hiparco de Nicea quien es considerado el padre de la trigonometría, puesto que fue el primero en tabular valores para lados de un triángulo inscrito en una circunferencia y construyó la primera tabla de cuerdas, que correspondería a una tabla moderna de valores para la función seno. En este punto de la clase se pidió a los estudiantes calcular una cuerda de las que trazaba Tolomeo, pero solucionarlo modernamente. En la siguiente imagen se muestra la formulación del ejercicio hecho a los estudiantes:

Figura 20.

Ejercicio actual sobre las cuerdas de Tolomeo



Fuente: Elaboración propia

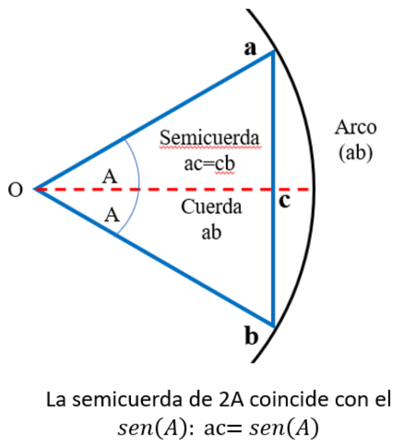
Dado que el ejercicio solo consistió en reemplazar los datos en la ecuación, no se presentó ninguna dificultad para resolverlo. Sin embargo, se resalta que en un primer momento un estudiante pensó que la cuerda 2α era la línea tomate al lado de 2α, es decir, la que marca el doble de la línea verde que indica el ángulo α, algo que corrigió rápidamente y se prosiguió con la solución del ejercicio.

Cultura hindú (400)

Dentro de esta cultura Abonia y Miranda (2017) describen la gran influencia de la cultura griega, particularmente en la trigonometría y astronomía de Ptolomeo, en esta época los astrónomos de la india desarrollaron también un sistema trigonométrico, pero, basado en la función seno en vez de cuerdas; esta función seno no consistía en una proporción, sino en la longitud de un lado opuesto a un ángulo y a una hipotenusa dada de la siguiente forma:

Figura 21.

Sistema trigonométrico hindú basado en longitudes



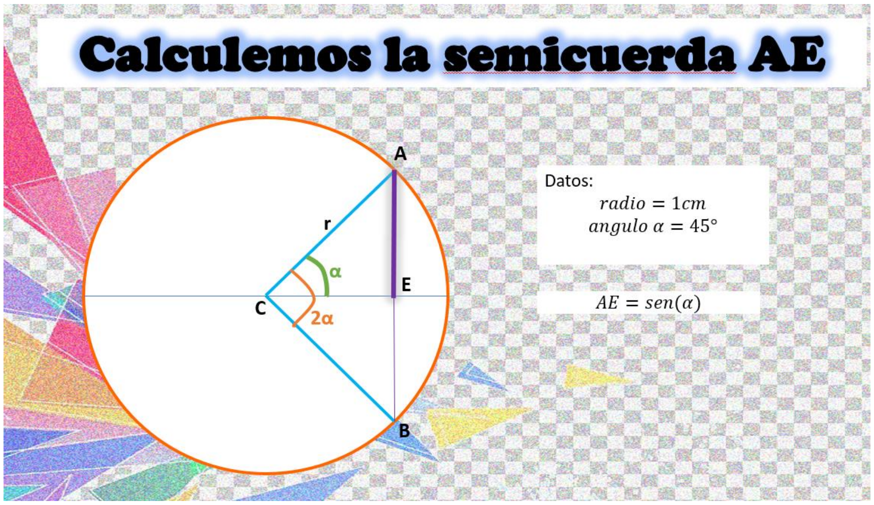
Fuente: Elaboración propia

Es así como el seno empezó a verse como una longitud en un triángulo rectángulo.

Luego de ver como la cultura hindú tomó la trigonometría con respecto a la función seno, se planteó el siguiente ejercicio matemático a la clase, dado que el ejercicio solo consistió en reemplazar los datos en la ecuación, no se presentó ninguna dificultad para resolverlo.

Figura 22.

Ejercicio actual sobre la trigonometría hindú



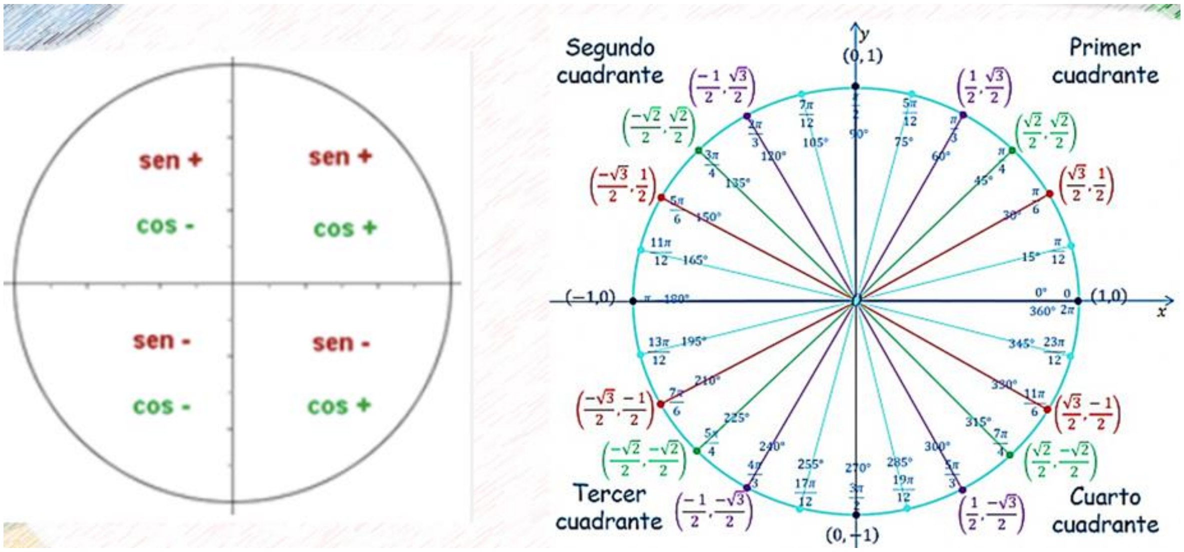
Fuente: Elaboración propia

Cultura árabe (700)

Según Abonia y Miranda (2017) los árabes en principio adoptaron el modelo de cuerdas griego, pero finalmente se decidieron por el modelo hindú, basando así su teoría sobre la función seno y miraron al seno como una longitud. Una de sus aportaciones más singulares fue la de tomar r=1 en la circunferencia goniométrica, es decir, aquella con centro en el origen de un sistema de coordenadas de un plano euclídeo, en esta circunferencia en particular el seno corresponde a la longitud de valor de la ordenada Y del ángulo correspondiente y el coseno a la longitud en la coordenada X. Por otro lado, también se comentó a los estudiantes que fue a través de los árabes como llegó la trigonometría del seno a Europa y además fueron quienes completaron las seis funciones trigonométricas que se ve en la trigonometría actual, las cuales son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. En la siguiente imagen se mostró los resultados de seno y coseno para varios ángulos y además los signos de estos en cada cuadrante del plano cartesiano.

Figura 23.

La trigonometría árabe



Fuente: Elaboración propia

Cultura europea (1200)

Abonia y Miranda (2017) comentan que en esta época es cuando la trigonometría se separó de su aplicación exclusiva en la astronomía en Europa y encontraron que también era útil para resolver problemas de aritmética y de álgebra. Además, se hicieron varias traducciones de obras griegas y árabes, logrando expresar mejor el conocimiento que se tenía hasta ese momento sobre trigonometría y tomándola como una rama independiente de la matemática.

Luego de ver esta evolución trigonométrica, se concluyó con la definición de la trigonometría, para que los estudiantes tengan aún más claro de que se trata esta rama de las matemáticas y que estudia.

Por otro lado, se recordó lo que dicen dos importantes teoremas matemáticos, el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales de Mileto con ayuda de dos videos explicativos

Primeramente, se comentó a los estudiantes que es necesario tener a la mano los dos teoremas para la resolución del próximo ejercicio, por lo que se enunciaron de la siguiente forma:

Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir, $h^2 = a^2 + b^2$ donde h es la diagonal y a, b son catetos.

Teorema de Tales de Mileto

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

El ejercicio que se propuso basado en CirculoA1 (2018) fue el siguiente:

Sean x, y, z reales positivos tal que:

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}=10\,,x+y+z=8$$

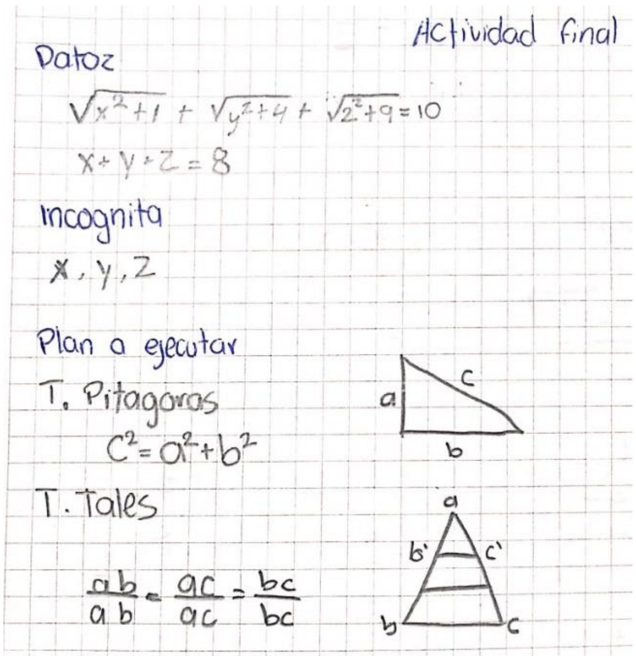
Calcule el valor de x usando el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales de Mileto.

En la solución de este ejercicio matemático se empleó el método de Pólya, en el primer paso los estudiantes entendieron el ejercicio, pero no llegaron a como poder resolverlo, pues lo miraron de una forma totalmente algebraica, no supieron cómo utilizar los dos teoremas para llegar a una solución y la obtención de una idea de resolución fue bastante complicada.

Es por ello por lo que se guio la solución del problema por medio de tres pasos comentados en el Taller 2 (Anexo A), la idea no era resolverles el ejercicio, por lo que se quiso que piensen y traten de llegar a una solución. El bosquejo de la solución del problema fue:

Figura 24.

Solución de la actividad final

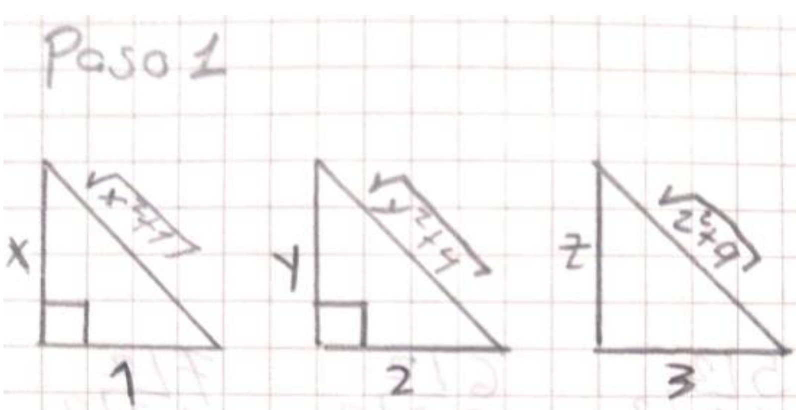


Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Por consiguiente, el paso uno consistió en encontrar los catetos del triángulo sabiendo que la hipotenusa es el resultado del teorema de Pitágoras, este ejercicio fue hecho mentalmente, pues los estudiantes después de ver que en el primer triángulo un lado era x y el otro 1, dedujeron que los otros lados son como se muestran en siguiente figura:

Figura 25.

Solución del primer paso de la actividad final



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

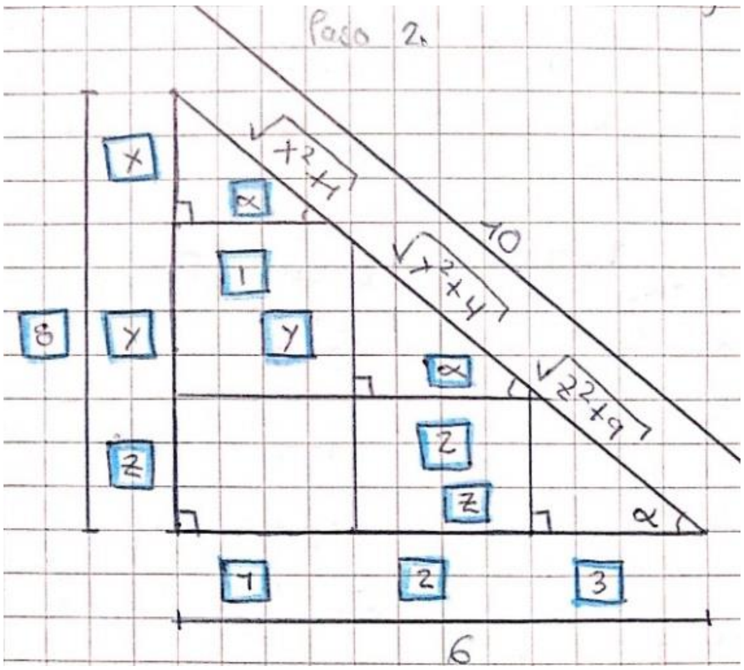
Para llegar a esta solución los estudiantes vieron que en el primer triangulo:

$$h = \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow h^2 = x^2 + 1^2. Por\ tanto, los\ lados\ son: a = x\ y\ b = 1$$

Luego, en el paso número dos, se pidió a los estudiantes completar la siguiente figura:

Figura 26.

Solución del segundo paso de la actividad final

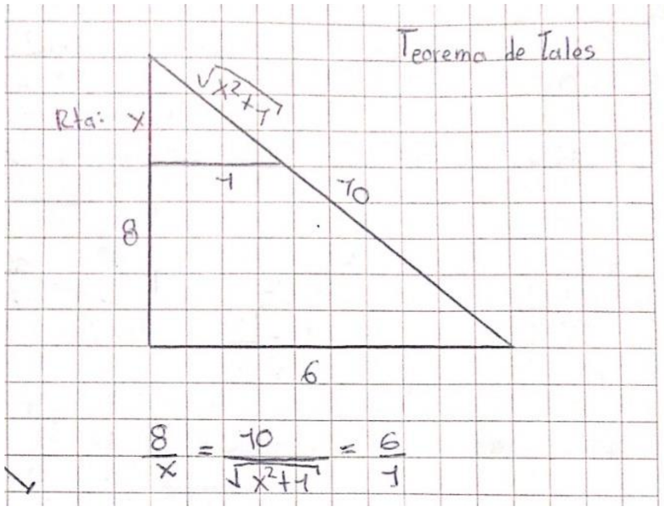


Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Por último, en el paso tres, lo único que faltaba usar era el teorema de Tales de Mileto y por ello se dijo que era hora de usarlo y se propuso la siguiente figura donde los estudiantes aplicaron este teorema:

Figura 27.

Solución del tercer paso de la actividad final



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

El problema estaba casi resuelto, sin embargo, se notó dificultades algebraicas por parte de los estudiantes al no poder despejar la variable x de la ecuación dada por el teorema de Tales de Mileto, por lo cual se explicó el procedimiento para llegar a la respuesta final de la siguiente forma:

Tomamos la primera igualdad que da el teorema de Tales de Mileto para luego pedirles resuelvan la otra igual que es aparentemente más fácil. Así,

$$\frac{8}{x} = \frac{10}{\sqrt{x^2+1}}$$

Pasamos los denominadores a multiplicar:

$$8\sqrt{x^2+1} = 10x$$

Elevamos al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada:

$$(8\sqrt{x^2+1})^2 = (10x)^2$$

$$64(x^2+1) = 100x^2$$

$$64x^2 + 64 = 100x^2$$

$$64 = 100x^2 - 64x^2$$

$$64 = 36x^2$$

$$\frac{64}{36} = x^2$$

Simplificamos:

$$\frac{16}{9} = x^2$$

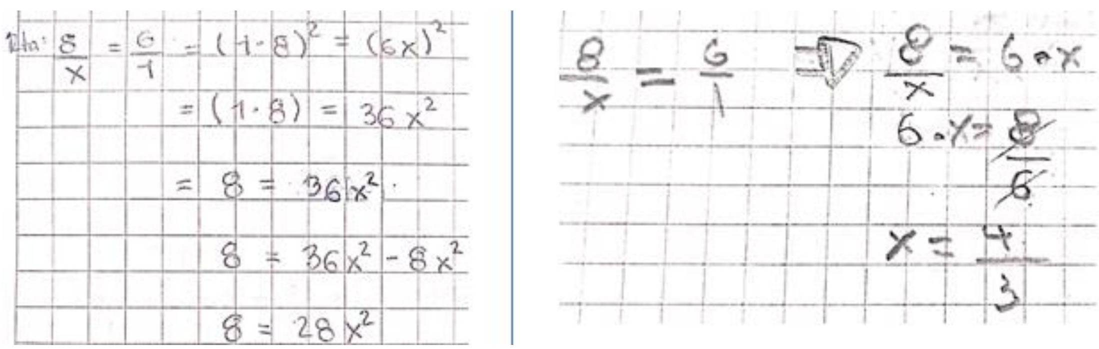
Aplicando raíz cuadrada se obtiene:

$$\frac{4}{3} = x$$

En la solución de esta ecuación se usó un lenguaje algorítmico, el cual los estudiantes entendieron al pie de la letra, sin embargo, cuando hicieron la resolución de la otra igualdad se obtuvieron este tipo de respuestas:

Figura 28.

Soluciones de los estudiantes



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Con respecto a estos resultados, fue evidente que los estudiantes trataron de usar el mismo procedimiento para la otra igualdad, quisieron iniciar elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación tal y como se lo hizo anteriormente, procedimiento que no hacía falta para resolver esta ecuación, entre otras respuestas también se obtuvo una confusión a la hora de despejar la variable y mover las constantes de un lado de la ecuación a otro. Con esto se observó que los estudiantes no se apropiaron de los temas de solución de ecuaciones lineales y el despejo de variables.

La anterior observación fue preocupante, puesto que estos temas de álgebra eran una base que se tenía por segura en los estudiantes, varios temas a desarrollar en estos talleres de trigonometría requieren tanto de álgebra como de geometría, no se puede separar estas tres ramas de la matemática en la resolución de problemas, el álgebra contribuye al aprendizaje de ciertos procedimientos trigonométricos como lo son la resolución de triángulos y las identidades trigonométricas también le abre la puerta a pensar simbólicamente los problemas, a organizarlos y además desarrolla la destreza de resolución de problemas que se quiere ejercitar. En tanto a la geometría se puede decir que los estudiantes están familiarizados con la figura que más importancia corresponde a la trigonometría, como lo es el triángulo, y son temas que se reforzaron con nuestros talleres.

Finalmente, sobre esta actividad, se observó como un ejercicio que en principio no parecía poder solucionarse, ya que se presentan tres incógnitas y dos ecuaciones, ayudados por la geometría se puede llegar a la solución, evidentemente es un problema que necesita ser guiado mediante algunos pasos, puesto que observar el camino para ser solucionado por sí solo es algo complicado a pesar de que se haya recordado con anticipación los teoremas de Tales de Mileto y de Pitágoras, teoremas que mediante el ejercicio se logró su apropiación.

Segundo momento: Actividad recreativa "Tu día pi"

Como actividad final se presentó la actividad recreativa llamada "Tu día pi", dado que en este taller se vieron algunos números irracionales, esta actividad tuvo el objetivo de hablar sobre algunos de ellos y en especial sobre el número π.

La actividad inició preguntándole a los estudiantes si conocen la definición de lo que es un número irracional y si conocen algunos de ellos como π, e, el número de oro, raíz de 2, a lo cual los estudiantes contestaron “no” y que no recuerdan haber tratado con este tipo de números a excepción de alguna vez haber visto el número π como el número 3.14.

Se pensó que esto se debía a que en la educación media muchas veces se trata este tema de los números irracionales comparándolos con el conjunto de los racionales y enseñándoles a los estudiantes a distinguir entre un número decimal periódico a uno aperiódico, sin embargo, no se profundiza en este tema tan complejo en matemáticas llegando incluso a la poca comprensión de lo que implica la palabra “periodo” en estas definiciones, por otro lado, los números irracionales tienen bastante historia que involucra temas tan complejos como el infinito, el cual es poco abordado en los colegios. Para comprender estos conceptos creemos que los estudiantes deben tener cierta madurez matemática, sin embargo, en esta actividad queremos acercarnos un poco a bosquejarles lo que significa ser un número irracional.

De este modo, esta actividad recreativa tuvo el fin de mostrarle a los estudiantes la definición formal del número irracional. Formalmente, según La Luz (s.f.) el concepto de número irracional se establece en el siglo XIX, desde un punto de vista moderno, un número irracional es un valor que no puede ser expresado de la forma:

$$\boldsymbol{\frac{m}{n}\ donde\ m,\ n\ \in \mathbb{Z}\ y\ n \neq 0}$$

Por tanto, un número irracional es un decimal infinito aperiódico.

Para explicarles esto, se procedió de la siguiente forma:

Ejemplos de números racionales:

- 2 pues este se puede escribir como $\frac{2}{1}$
- 2.5 pues este se puede escribir como $\frac{5}{2}$

- $3.\overline{3}$ pues este se puede escribir como $\frac{10}{3}$. Esto es lo que se conoce como número periódico en los reales, se llama periódico porque su parte decimal conserva una secuencia de números que se repiten siempre, en este caso, el número 3 se repite infinitamente después de la coma. Cabe resaltar que el periodo puede ser formado por más de un número, por ejemplo, el número $3,\overline{125}$, es decir, se repite el número 125 después de la coma infinitamente, 3,125125125…

Sin embargo, el número π es igual a 3,1416… siguiendo una cantidad infinita de números decimales que no guardan ningún orden y no existen dos números enteros que al dividirlos de como resultado el número π. Lo mismo sucede con los demás números irracionales y son los llamados números infinitos aperiódicos, es decir, estos números no guardan ningún periodo o serie de números que se repita constantemente en su parte decimal.

De este modo, se mostró algunos ejemplos a los estudiantes de estos números irracionales como los números e, ϕ, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{99}$ hablándoles de cada uno de ellos, para luego enfatizar en el número π. Es importante mencionar que la explicación del origen de estos números irracionales como e y ϕ se hizo en clases de la forma como fue planeada en el Taller 2 (Anexo A).

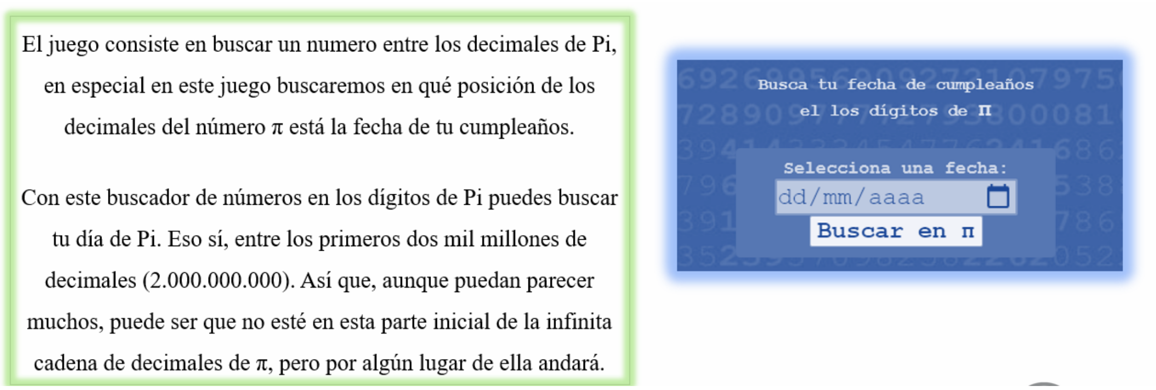
Luego, se habló sobre el número π. Según Flores (2019), este número indica la relación entre el perímetro (P) y el diámetro (D) de una circunferencia. Así, $\pi = P/D$, cabe mencionar que los estudiantes creían que este número era solo un número decimal finito, 3,1416, más no sabían que después de estas cifras, continuaban infinitos decimales.

Por consiguiente, se nombró algunas curiosidades que guarda el número π con el fin de interesarlos por este número, estas curiosidades se encuentran en el Taller 2 (Anexo A), cabe resaltar que estas fueron explicadas a través de material audiovisual.

Para finalizar, se presentó el juego de “día de pi” propuesto por la Sociedad Matemática Mexicana (s.f.) de la siguiente forma:

Figura 29.

Tu día pi



Fuente: Elaboración propia

Con respecto a esta actividad podemos decir que los estudiantes tuvieron gran interés por buscar la fecha de su cumpleaños en este buscador y encontrar en que posición se encontraba su número y descubrir cuál fecha de cumpleaños se encuentra más lejos en las cifras decimales del número π.

Figura 30.

Resultado de la actividad “tu día pi”

Fuente: Sociedad Matemática Mexicana (s.f.)

Este segundo taller culminó con cumplir el objetivo de mostrar a los estudiantes que el número π es un número irracional, que contiene infinitas cifras después de la coma, que alberga muchas curiosidades y la humanidad necesita muchos años para seguir descubriendo sus cifras a través de las computadoras.

Bitácora #3: Resolvamos problemas con la regla de tres.

El tema de este taller son la medición de los ángulos en grados y radianes, se sabe que existen diferentes unidades de medida para medir el peso, la longitud, el volumen y en este caso también los ángulos. De este modo, así como para pasar de metros a kilómetros se hace una conversión sencilla que puede ser mental, lo mismo es para medir los ángulos en grados o en radianes, se hace el proceso matemático llamado regla de tres, este taller resaltó el uso de esta regla en la resolución de problemas, pues juega un papel muy importante a la hora de determinar las respuestas a todos los ejercicios y problemas.

Además, el objetivo de este taller con los estudiantes fue aclarar la definición de grado y radian y como ayudan a medir los ángulos en la vida cotidiana, pues estos son de gran importancia en la realidad, ya que se encuentran en casi todos los objetos y actividades de nuestro alrededor, como en las bicicletas, relojes, movimientos de satélites como del planeta tierra y de los planetas, también en construcción, mecánica, astronomía, ingenierías, física, entre otras. A continuación, se encuentra la reflexión de este taller en cuatro momentos:

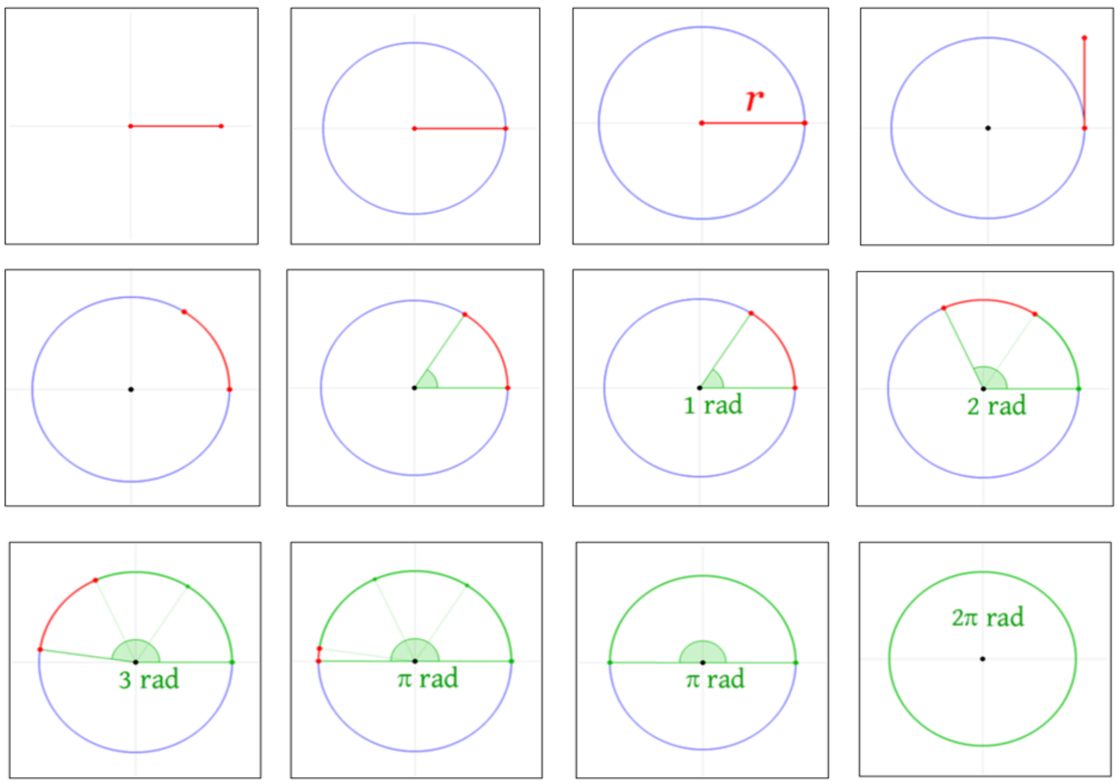
Primer momento: Aclarando conceptos

Este taller inicio con la pregunta ¿Qué son los grados y radianes? A lo cual, los estudiantes tenían claro que son para medir los ángulos, y de hecho estaban más familiarizados a medir ángulos con los grados que con radianes, cabe resaltar que en el anterior taller se enseñó como los egipcios median los ángulos en su cultura y no desconocen que los grados pueden estar dados en el sistema decimal o sexagesimal, por otra parte, el concepto de radián lo conocen, pero no recuerdan como se mide con esta unidad por ello se les dificultó definir esta medida.

Por consiguiente, se aclaró con los estudiantes los anteriores conceptos. Se inició con lo fundamental; el concepto de ángulo, el cual es definido por Ramírez (2011) como la región del plano comprendida entre dos rectas que se unen en un mismo punto llamado origen y se especificó que para medir su abertura siempre se lo hará en sentido contrario a las agujas del reloj, luego, se definió el radián, conceptualmente, es la medida que surge de tomar un arco de circunferencia igual a la medida del radio de esta, esta definición sin recurrir a su representación geométrica es difícil de entender para los estudiantes, así que se mostró el siguiente GIF:

Figura 31.

Definición del concepto de radián



Fuente: Elaboración propia

Los estudiantes con la explicación de esta ilustración comprendieron por qué se le llama radian a esta unidad, puesto que hace referencia justamente al radio de la circunferencia, algo que les llamó la atención con respecto a la anterior animación es como se puede obtener el número π del que se habló en el anterior taller y como todo se relaciona con estos temas.

También se mencionó a los estudiantes que esta medida en radianes se mantiene constante en todas las circunferencias sin importar su tamaño. Posteriormente, se retomó el tema dado en el taller anterior, donde se explicó la medida de ángulos en grados sexagesimales y se realizó un ejercicio en el tablero, el cual se verificó entre todos.

Figura 32.

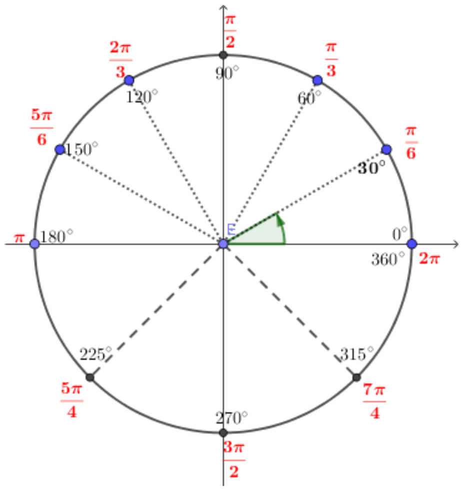
Evidencias fotográficas

Fuente: Elaboración propia

También se comentó que tanto los grados sexagesimales o decimales dividen a la circunferencia en 360 partes iguales, de manera que una vuelta a la misma son 360°, y, para concluir esta parte, se hizo la respectiva relación entre grados y radianes en la circunferencia con la siguiente imagen, en la que los estudiantes entendieron como estas unidades de medida dividen de diferente forma la circunferencia.

Figura 33.

Relación de grados y radianes en la circunferencia



Fuente: López (2021)

Segundo momento: Ejercicios matemáticos de conversión

En este segundo momento se explicó a los estudiantes sobre la medida de los ángulos. Ramírez (2011) comenta que "usualmente medimos los ángulos en grados, pero también es muy común encontrar ángulos medidos en radianes" (p. 213). Los grados y los radianes miden ángulos de manera que si tengo la medida de un ángulo en grados puedo encontrar la medida equivalente en radianes y viceversa.

De este modo, se indicó la relación que existe entre los grados y los radianes explicada por Ramírez (2011) donde:

1 vuelta completa de la circunferencia = 360º = $2 \cdot \pi$ radianes.

Conversión de radianes a grados

Luego, se explicó a los estudiantes que para convertir la medida de un ángulo dado en radianes a grados se debe hacer uso de la regla de tres, algo con lo que los estudiantes se suponen deberían estar familiarizados. Como ejemplo se propuso la siguiente conversión:

Escribir en grados el siguiente ángulo dado en radianes: $\boldsymbol{5\pi/6}$ rad

La regla de tres para este caso es:

$$2\pi \rightarrow 360°$$

$$\frac{5\pi}{6} \rightarrow x$$

De manera que

$$\mathrm{x} = \frac{\frac{5\pi}{6} rad \cdot 360°}{2\pi\, rad} = \frac{5\pi \cdot 360°}{6 \cdot 2\pi} = \frac{5 \cdot 360°}{12} = \frac{1800°}{12} = 150°$$

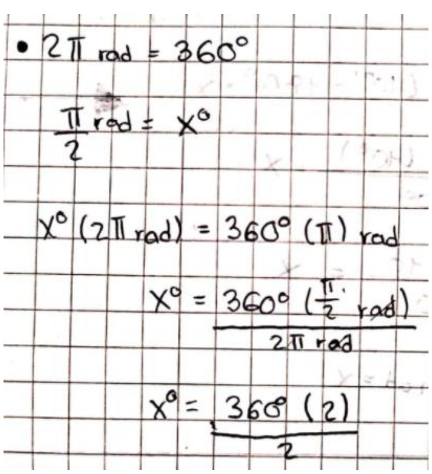
Esto es que $\boldsymbol{5\pi/6}$ radianes equivalen a 150°.

En este momento se propuso como ejercicio escribir en grados los siguientes ángulos dados en radianes: $\boldsymbol{\pi/2}$, $\boldsymbol{\pi/3}$.

Los estudiantes procedieron a realizarlos y se vio que algunos cometieron ciertos errores, pero estos no son sobre la regla de tres ni la forma de realizar la conversión, más bien son de tipo algebraico. La siguiente imagen muestra un ejemplo de lo mencionado anteriormente en la solución por parte de un estudiante:

Figura 34.

Solución de un estudiante



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Nótese que en:

$$x = \frac{360° \left(\frac{\pi}{2} rad\right)}{2\pi \, rad}$$

El estudiante cancela π y la unidad de los radianes rad por estar en el numerador y el denominador y coloca el siguiente resultado que lo lleva a una respuesta incorrecta.

$$x = \frac{360° \left(\frac{\pi}{2} rad\right)}{2\pi \, rad} = \frac{360°(2\,)}{2}$$

Como se puede ver, el estudiante tiene dificultades a la hora de aplicar la ley de cancelación correctamente, no toma en cuenta que está trabajando con números fraccionarios, de manera que al estar π dividiendo entre 2 en el numerador y cancelarlo queda la unidad dividiendo a 2 como se muestra a continuación:

$$x = \frac{360° \left(\frac{\pi}{2} rad\right)}{2\pi \, rad} = \frac{360° \left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

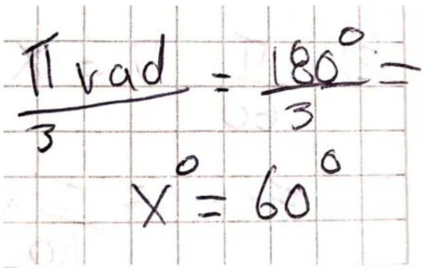
Por otra parte, se resalta el trabajo realizado por un estudiante que no aplicó la regla de tres sugerida en clase, sino que lo realizó de la siguiente forma:

$$\frac{\pi}{2} rad = \frac{180°}{2} = 90°$$

Con esta solución el estudiante observó que $\pi \, rad$ equivalen a 180° como se lo indico en la figura N.º 33 y reemplazó el uno por el otro, lo que conllevó a una solución más rápida y correcta. Cabe resaltar que este método lo aplicó correctamente para los otros ejercicios, como el siguiente:

Figura 35.

Conversión de radianes a grados por un estudiante



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Conversión de grados a radianes

Por consiguiente, se explicó el tema de conversión de grados a radianes donde se hizo una regla de tres análoga y como ejemplo se propuso la siguiente conversión:

Escribir en radianes el siguiente ángulo dado en grados: $\mathbf{47}°$

La regla de tres para este caso es:

$$2\pi \rightarrow 360°$$

$$x \rightarrow 47°$$

De manera que

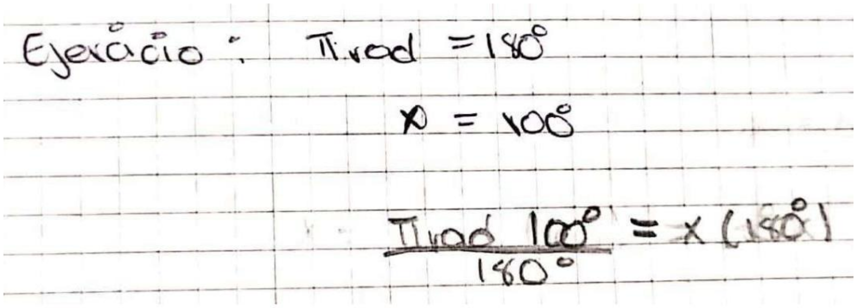
$$\text{x} = \frac{2\pi\, rad \cdot 47°}{360°} = \frac{2\pi\, rad \cdot 47}{360} = \frac{47\pi}{180} rad$$

esto es que $\mathbf{47}°$ equivalen a $\frac{47\pi}{180} rad.$

Y como ejercicio se propuso escribir en radianes los siguientes ángulos dados en grados: $\mathbf{10}°$, $\mathbf{100}°$, es importante mencionar que la mayoría de los estudiantes logró hacer el proceso correctamente, sin embargo, aún se presentaron algunos errores como:

Figura 36.

Errores en los ejercicios de conversión



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Aquí el estudiante olvidó que 180° ya se encontraba en un lado de la ecuación y lo pone nuevamente en el otro lado de esta.

Tercer momento: Resolución de problemas

Para contextualizar los anteriores conceptos y conversiones se comentó a los estudiantes que en nuestra vida diaria siempre se ha escuchado hablar de bicicletas, juegos mecánicos, manecillas del reloj, hélices de un helicóptero y muchas cosas más. Al final de todo quien no ha aprendido a manejar una bicicleta y sus cambios, sabiendo cuantos platos o piñones tienen estas, pues bien, todas estas actividades u objetos involucran un conocimiento fundamental que es el radián y el grado.

En este momento del taller se recordó cómo se han venido resolviendo los diferentes problemas y se preguntó cuáles eran los pasos que debíamos seguir según Pólya, a lo cual los estudiantes contestaron rápidamente, el primer paso es entender el problema y ver los datos e incógnitas, el segundo es plantear una solución, el tercero es ejecutar lo que planeamos y por último verificar todos los pasos y buscar alguna otra forma de solucionarlo.

Posteriormente, se presentó los siguientes tres problemas, los cuales se solucionaron de forma conjunta:

Problema 1

Un arqueólogo encuentra restos de una antigua construcción, se puede notar que esta construcción era circular pues la parte que encontró forma un arco de circunferencia que equivale a 70° de la circunferencia completa, al medir el contorno de este fragmento encontrado dio como resultado 24 mt. Ayuda al arqueólogo a hallar el radio de la circunferencia formada por la construcción si esta estuviera completa.

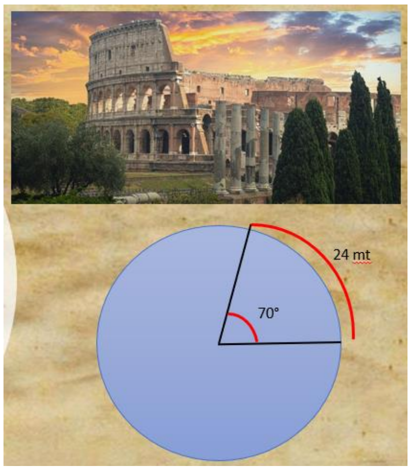
Siguiendo el método de Pólya con nuestros estudiantes, la solución fue hecha en cuatro pasos:

- Comprensión del problema

En este paso, primero se procedió a leer el problema y tratar de entenderlo. Cabe resaltar que el este estaba acompañado de la siguiente imagen:

Figura 37:

Imagen de contexto



Fuente: Elaboración propia

Esta mostró la realidad física del problema, puesto que se puede ver que el coliseo de roma también tiene una estructura como la mencionada en el problema del arqueólogo, donde los restos solo muestran un arco de circunferencia y se desea saber el radio de la circunferencia de esta estructura cuando estaba completa, también con esta imagen se logró llegar a la comprensión del concepto de arco de circunferencia. En segundo lugar, se prosiguió a identificar los datos e incógnita que les proporcionaba el problema, donde:

Datos: arco de circunferencia$= 70°$, contorno del arco= $24\ mt$

Incógnita: radio de la circunferencia=r

En esta fase, se pidió a los estudiantes que traten de resolver el problema y pensaran en un plan a ejecutar, se dio unos minutos para pensar en una posible respuesta, mientras se los cuestionaba de la siguiente forma: ¿Cómo relacionan lo aprendido con el problema? ¿Conocen alguna información útil para resolver el problema? ¿Qué se necesita para resolver este problema?, a lo cual los estudiantes relacionaron rápidamente el problema con las conversiones que habían hecho anteriormente usando la regla de tres.

Por lo que, la primera idea fue un proceso mental de un estudiante, quien comentó que el camino a la respuesta estaba dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{70\ x24}{360} = r$$

Donde,

$$\frac{70\ x24}{360} = r = 4.6mt$$

El camino de solución que el compañero planteó se la bosquejó en el tablero, sin embargo, la respuesta era incorrecta, por ello se preguntó a los estudiantes si creían que el razonamiento estaba bien. El muchacho que trato de solucionarlo defendió su solución diciendo a que dato correspondía cada número, sin embargo, se verificó la siguiente regla de tres de la cual salía el razonamiento:

$$360° \rightarrow 24mt$$

$$70° \rightarrow r$$

Dándose cuenta así que los 360° de la circunferencia no correspondían al perímetro de esta. También se los invitó a hacer una circunferencia con radio 4,6 mt, la cual es muy pequeña para la construcción que se había planteado, además con esta regla de tres no se encontraba el radio de la circunferencia, sino el arco de una circunferencia que equivale a 70°, esta fue toda la interpretación que se hizo a esta respuesta donde se vio que esta regla de tres no era la adecuada para el problema.

Luego, el muchacho tuvo una idea que no soluciono el problema, pero ayudó a formular otro camino a seguir. Uno de los estudiantes propuso que ese arco de circunferencia podría ser la medida de un radián que sería equivalente al radio de esta, es claro que la animación que se mostró cumplió su objetivo, la definición de radián decía que es la medida que surge de tomar un arco de circunferencia igual a la medida del radio de esta. Por lo que el plan a seguir fue hallar el arco de circunferencia que forma un radián y sugirieron pasar 70° grados a radianes para luego buscar a cuantos metros equivale un radián y saber la medida del radio de la circunferencia.

- Ejecución del plan

En este paso se plantearon las reglas de tres y se las realizó de la siguiente forma:

Conversión de 70° a radianes:

$$\pi\, rad \rightarrow 180°$$

$$x \rightarrow 70°$$

Se vio que los estudiantes ya no solo aplicaron la equivalencia: $360° = 2\pi\, rad,$ sino que también vieron que se podía usar: $\pi\, rad = 180°$ y en general cualquier otra que ya habían encontrado, lo cual fue satisfactorio porque entendieron el trasfondo de estos procesos y no se quedaron estancados en una sola equivalencia. Por consiguiente, la solución obtenida fue:

$$x = \frac{\pi\, rad\ \cdot 70°}{180°} = \frac{\pi\, rad\ \cdot 7}{18} = \frac{7\pi}{18} rad$$

Y, por último, solo quedó hallar el arco de circunferencia que forma un radián, esto lo hicieron tomando la idea del primer estudiante, pero aplicando correctamente la regla de tres que anteriormente se corrigió.

$$\frac{7\pi}{18}\ rad \rightarrow 24mt$$

$$1\ rad \rightarrow x$$

Cabe resaltar que esta vez ya plantearon la regla de tres, no en grados, sino en radianes para poder llegar a la respuesta correcta. Entonces,

$$x = \frac{1\, rad\ \cdot 24mt}{\frac{7\pi}{18} rad} = \frac{24mt}{\frac{7\pi}{18}} = \frac{24(18)}{7\pi} mt = 19.64\ mt\ aprox.$$

Por tanto, el radio de la circunferencia si estuviera completa es de 19,64 mt.

- Verificación

En este paso de verificación se procedió a mostrar a los estudiantes otra forma de solucionar el problema, cabe resaltar que esta era la respuesta preparada con la que se esperaba guiar a los estudiantes, sin embargo, no fue necesario utilizarla, puesto que la solución a la que llegaron los estudiantes de forma natural fue usando el concepto de radián con el fin de encontrar el radio de la circunferencia. Esto fue gratificante pues muchas veces pensamos que los estudiantes van a solucionar un problema como nosotros queremos o los guiamos hacia nuestra solución, sin embargo, esperamos a ver que idea se presentaba y como la desarrollaban, fue evidente que el usar este método y dejar que ellos trabajen para solucionar el problema fue exitoso.

Problema 2

El siguiente ejercicio es propuesto por Zago (2012): Una correa conecta dos poleas de radios r=10cm y r=25 cm. Si la grande da un giro completo, ¿qué ángulo expresado en grados y radianes habrá girado la pequeña?

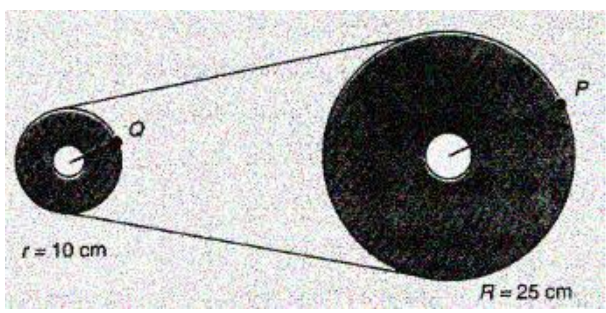
Continuando con el método de Pólya tenemos los mismos pasos:

- Comprensión del problema

Primeramente, es importante mencionar que el problema fue presentado gráficamente de la siguiente forma:

Figura 38.

Poleas conectadas por una cuerda.



Fuente: Zago (2012)

Este paso inició con las preguntas hacia los estudiantes de ¿Cómo relacionan este problema con la vida cotidiana?, ¿Les resulta familiar esta imagen?, ¿Cómo entienden el problema con sus propias palabras?, ¿Qué datos e incógnitas les proporciona el problema?, y ¿Qué les pide el problema? De este modo, lo primero que hicieron los estudiantes fue relacionar este mecanismo con el de las bicicletas, se explicó que la rueda más grande son los platos de una bicicleta mientras la pequeña representa los piñones, muchas veces al manejar bicicleta no se tiene en cuenta el funcionamiento de sus cambios y porque se vuelve más suave o difícil cuando se pedalea, además se mencionó que la cuerda que une los platos con los piñones es la cadena. También se puede ver que este mecanismo funciona en las poleas de los gimnasios y este tipo de imágenes las van a encontrar no solo en matemáticas, sino en física más adelante.

Luego de contextualizar a los estudiantes, leyeron nuevamente el problema y dijeron: “lo que nos pide el problema es saber cuántas vueltas da la rueda pequeña cuando la grande da una vuelta completa”. Y siguiendo con el método de Pólya a continuación, se muestra lo que identificaron como datos e incógnitas:

Datos: radio de la polea pequeña r = 10 cm, radio de la polea grande R = 25 cm, giro de la polea grande G = 360°

Incógnita: giro de la polea pequeña g $= x°$

- Concepción de un plan

En este paso se pidió a los muchachos que piensen en una solución a este problema, que usen lo que han aprendido para llegar a una solución y se les preguntó si el problema anterior les servía para idear otro plan similar para este problema, los estudiantes no miraron inicialmente una similitud, pero si sabían que tocaba usar una regla de tres y tal vez no solo una sino más como en el anterior problema. Visto que los estudiantes ya tenían claro que tocaba plantear una regla de tres, se pidió que la formularan y se dio un momento para ello. En un principio propusieron una regla de tres simple de la siguiente manera:

$$360° \rightarrow 25cm$$

$$x \rightarrow 10cm$$

Con lo que realizando los respectivos procesos se llegó a qué x = 144°

Esto significó que mientras la polea da una vuelta, la pequeña ni siquiera da media vuelta, con lo que se hizo caer en cuenta a los estudiantes que la solución no era razonable, pues si se mira las poleas conectadas por la cadena en una bicicleta, mientras la polea grande da una vuelta, la pequeña da más de una. De manera que se pidió a los estudiantes mirar que dato se encontraba al plantear esta regla de tres y luego de meditarlo un poco se notó que lo encontrado eran los grados que giraría la polea grande al recorrer 10cm. Con lo que se tuvo que replantear el plan de solución.

Luego, se hizo notar a los estudiantes que en primer lugar se debía encontrar algo que conecte o tengan en común las dos poleas, en efecto se llegó a que era la distancia recorrida, pues si pusiéramos el sistema de poleas sobre el suelo cuando la polea recorra una distancia la pequeña recorrerá la misma. De manera que se propuso calcular esta distancia, se preguntó a los estudiantes de qué manera se la podía encontrar y se llegó a que la distancia es el perímetro de dicha polea. Después, se les preguntó sobre la forma para calcular las vueltas da la polea pequeña al recorrer dicha distancia, a lo cual contestaron que era necesario plantear una regla de tres nuevamente.

- Ejecución del plan

En este paso, se llevó a cabo lo planeado en el paso anterior. Primeramente, se halló el perímetro de la polea grande para encontrar la distancia que recorre al dar una vuelta. En este punto se preguntó a los estudiantes sobre la fórmula del perímetro de una circunferencia, a lo cual mencionaron no recordarla. Posteriormente, al tener un conocimiento previo sobre los radianes, se preguntó a los estudiantes: ¿cuántos radios hay en una circunferencia? A lo cual respondieron 2π rad, de manera que se comentó que una forma fácil de obtener la fórmula del perímetro de la circunferencia es multiplicar el radio por 2π, esto significa que si llamamos s al perímetro de la circunferencia se tiene:

$$s = 2\pi R \;\; \rightarrow \;\; s = 2\pi(25cm) = 50\pi\ cm$$

Con lo que se resaltó a los estudiantes que la polea grande recorre 50π cm al dar una vuelta.

Luego, ya que la polea pequeña recorre la misma distancia que la grande, se preguntó a los estudiantes ¿cómo encontrar las vueltas que da la polea pequeña al recorrer esta distancia? Los estudiantes pensaron que se debía plantear una regla de tres, aunque les costó ver la manera de hacerla, por lo que primero se les propuso mirar la distancia que recorre la polea pequeña al dar una vuelta, y puesto que r=10 entonces la distancia es 2π (10) cm, es decir 20π cm.

Después de esto, un estudiante mencionó: “para que la polea pequeña recorra 50π cm debería de dar 2 vueltas más otro poco”, se preguntó ¿Cómo encontrar ese otro poco? Y se los invitó a pensar en plantear una regla de tres, con lo que se dio 6 minutos para que cada estudiante proponga la regla de tres que se estaba buscando, mientras pasaban los minutos un estudiante halló la respuesta manifestando que: “la polea pequeña al dar una vuelta recorre 20π cm, en 2 vueltas 40π cm, con lo que para llegar a 50π cm la polea tendría que dar media vuelta más, es decir 2.5 vueltas”, a lo cual, los demás estudiantes estuvieron de acuerdo, sin embargo, se resalta el hecho de que implícitamente plantearon la regla de tres pedida, por lo que se explicó que la regla de tres correspondiente a lo que acabaron de hallar es la siguiente:

$$2\pi(10)\ cm \rightarrow 1\ vuelta$$

$$50\pi\ cm \rightarrow x\ vueltas$$

De manera que:

$$x = 50\pi\ /(2\pi(10)\ )\ vueltas = 5/2\ vueltas$$

Luego, para encontrar los grados y radianes a los que equivalen dichas vueltas, los estudiantes realizaron lo mismo que en el anterior paso, es decir, una vuelta son 360° en 2 vueltas 720° y la media vuelta que falta suma 180°, es decir que los grados que gira la polea pequeña son 900°, sin embargo, nuevamente comentó que la regla de tres correspondiente es la siguiente:

$$1\ vuelta \rightarrow 360°$$

$$5/2\ vueltas \rightarrow x$$

De manera que:

$$x = (5/2\ vueltas \cdot 360°)/1\ vuelta = (5 \cdot 360°)/2 = 900°$$

Después, para encontrar el ángulo pedido en radianes se planteó la siguiente regla de tres:

$$1\ vuelta \rightarrow 2\pi\ rad$$

$$5/2\ vueltas \rightarrow x$$

De manera que:

$$x = (5/2\ vueltas \cdot 2\pi\ rad)/1\ vuelta = 5/2 \cdot 2\pi\ rad = 5\pi\ rad$$

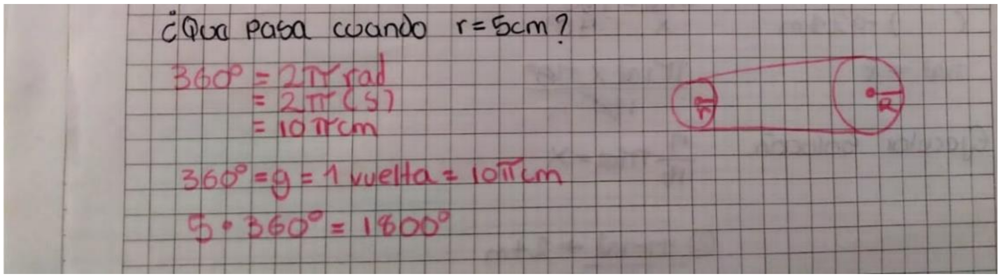
Por tanto, cuando la polea grande haya dado un giro completo, la polea pequeña habrá girado $5\pi\ rad$.

- Verificación

Finalmente, en este punto se verificó que todos los pasos estén bien realizados y con respecto al problema se les recordó que cuando la polea grande da una vuelta, lo recorrido por la segunda polea es lo mismo, ya que la cadena o cuerda que las conecta es la misma. Además, se les planteó el problema de que sucedería si el radio de la polea pequeña fuese de 5 cm, a lo cual los estudiantes notan que daría más vueltas y proceden a realizar el ejercicio, ellos no tuvieron dificultades en este punto. A continuación, se muestra la respuesta por parte de una estudiante.

Figura 39.

Solución de un estudiante



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Nótese que la estudiante observó que $10\pi\ cm$ es una vuelta, por tanto, para llegar a $50\pi\ cm$ la polea pequeña debería de dar 5 vueltas, por lo que procedió a multiplicar 5 por 360° para hallar los grados que gira esta polea.

Problema 3

El siguiente ejercicio también es propuesto por Zago (2012): Un aspersor funciona con un mecanismo que le produce un movimiento de giro de ida y vuelta de 60º. Si el chorro de agua alcanza 16 metros, halla el área de la superficie de césped regada.

- Comprensión del problema

En este primer paso se hizo la lectura del problema y se comprendió la función del aspersor, los estudiantes vieron que este giraba de tal modo que el ángulo que recorría de ida y vuelta era de 60°, y se continuó inmediatamente a sacar los siguientes datos e incógnitas:

Datos: $\theta = 60, \mathrm{r} = 16\ mt, \mathrm{A} = \pi r^2$

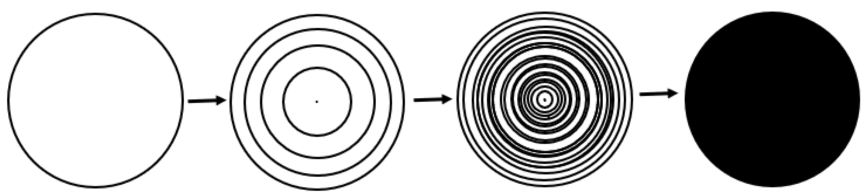
Incógnita: $A_R =$ Area regada

En esta parte se recordó a los estudiantes la fórmula para hallar el área de una circunferencia, puesto que no lo recordaban, a veces es difícil recordar estas fórmulas cuando solo se las aprende por el momento y no se las usa diariamente, por lo que, se explicó una forma de hallar esta fórmula.

En primer lugar, se pidió dibujar una circunferencia, y luego más dentro de ella, todas las que se puedan, de modo que la última supuesta circunferencia sea el centro de esta, puesto que, intuitivamente, si pudiésemos dibujar infinitas circunferencias concéntricas dentro de esta, la suma de todas ellas conformaría el área de la circunferencia de la siguiente forma:

Figura 40.

Circunferencias infinitas

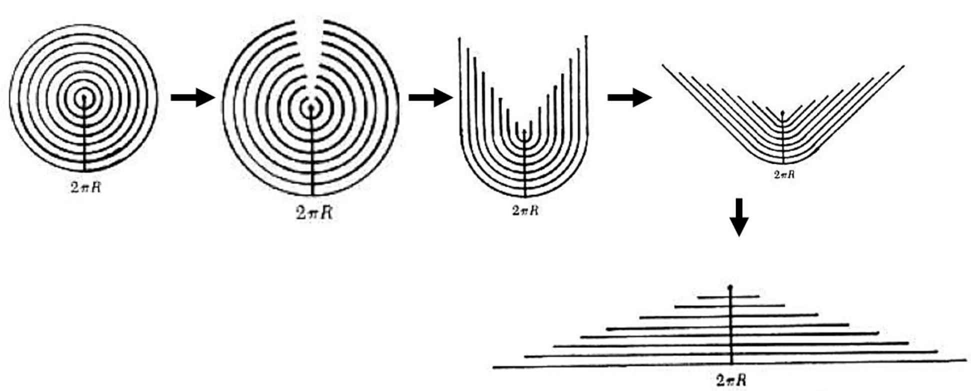


Fuente: Elaboración propia

En segundo lugar, se pidió cortar la circunferencia por un radio y abrir todas las circunferencias hasta que queden como líneas rectas, gráficamente se hizo lo siguiente:

Figura 41.

Hallando el área de la circunferencia



Fuente: Gaussianos (2011)

En tercer lugar, algo que nunca se olvida es la forma hallar el área de un rectángulo: bxa y si este rectángulo se parte en dos triángulos por su diagonal, el área de cada triángulo es: $\frac{b\times a}{2}$ y de hecho la última figura que se obtuvo en el anterior proceso es un triángulo donde la base es $2\pi r$ y la altura es el radio de la circunferencia, de este modo el área de la circunferencia está dada por:

$$\frac{b \times a}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r \times r = \pi r^2$$

Por último, se comentó que esta es una forma sencilla de hallar esta área y fue gracias a un matemático llamado Cavalieri, quien inventó y uso el método de los infinitesimales para resolver problemas de áreas y volúmenes, de manera que miraba un área compuesta por infinitas líneas como se vio en este caso o un volumen compuesto por infinitos planos. Explicada esta parte, se prosiguió con el siguiente paso en nuestra solución.

- Concepción de un plan

En esta parte se pidió a los estudiantes ideas de solución para poder trabajarlas, primeramente, identificaron que si el aspersor girara completamente regaría toda el área de la circunferencia y esta la hallaban con la fórmula que se explicó, pero esto no es lo que pedía el problema, sin embargo, los ayudaría a plantear una regla de tres para solucionarlo, así que se decidió ir paso a paso con ellos en esta solución.

- Ejecución del plan

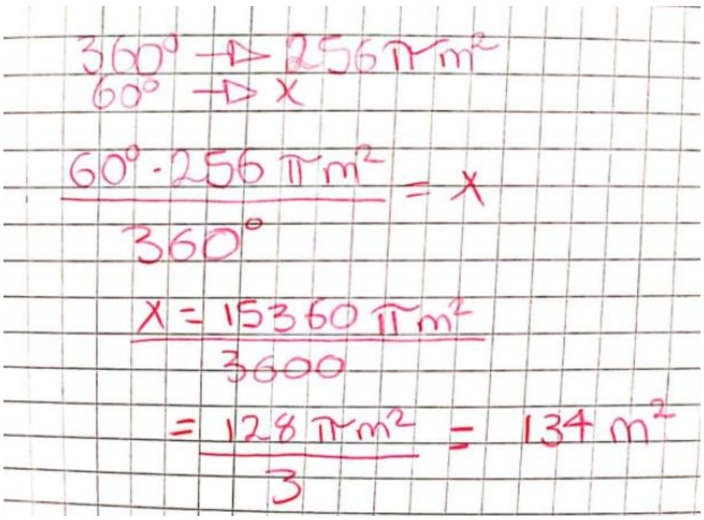
Primero, se calculó el área regada de toda la circunferencia si el aspersor girara 360°, para ello se remplazó los datos en la siguiente fórmula:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 16^2 = 256\pi$$

Luego, teniendo este resultado se llegó con los estudiantes a la siguiente regla de tres y se hizo el proceso de despejo sin ninguna dificultad, a continuación, se muestra la solución hecha por un estudiante:

Figura 42.

Solución de un estudiante



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

- Verificación

En este paso se mostró otra forma de solucionar este problema, cabe resaltar que esta solución se tenía preparada para guiarlos, sin embargo, tampoco fue necesaria, puesto que los estudiantes lograron tener ideas que llevaron a solucionar el problema de la forma expuesta anteriormente.

Luego de analizar todo el proceso se comentó que hay que tener en cuenta que las respuestas no siempre son exactas, recordando que el número π es un número irracional infinito, por lo que las respuestas suelen ser aproximadas. Por otro lado, se preguntó a los estudiantes si encontraron similitudes en los problemas realizados, a lo cual contestaron que sí, ya que el uso de la regla de tres fue el proceso usado para resolver los tres problemas, y encontraron relación de este último con el primero, pues los dos tenían similitud gráficamente. Con lo anterior se concluyó este momento de resolución de problemas observando que la dificultad inicial de plantear las reglas de tres se solucionó satisfactoriamente.

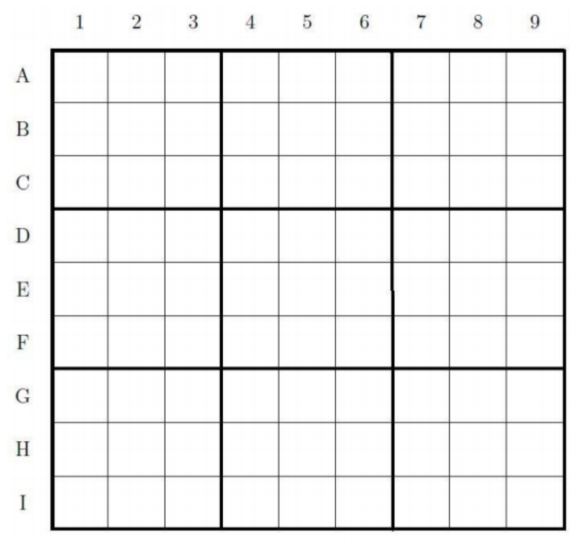
Cuarto momento: Actividad recreativa "Sudoku"

Como actividad recreativa se presentó el juego de SudoMates, que da lugar a un sudoku clásico de 81 casillas que se deben rellenar con números del 1 al 9. Los Sudokus se suelen estructurar en cuadrículas divididas en cajas de 3x3 celdas en las que hay algunos números escritos de antemano. Para jugar, simplemente se debe rellenar las celdas en blanco de tal forma que cada fila, columna y caja de 3x3 no tenga números repetidos.

Con este juego se trabajó el cambio de las unidades de medida de los ángulos: de grados a radianes y de radianes a grados para reforzar los conocimientos adquiridos previamente, como también estimular la concentración, el pensamiento lógico, la ejercitación de procesos, la imaginación, la paciencia, la atención y el pensamiento rápido e intuitivo, mientras se divierten compitiendo con sus compañeros a resolverlo. De este modo, los alumnos debían rellenar algunas de las casillas de este tablero de SUDOKU completamente vacío, haciendo cada conversión que se pedía y colocando en las casillas correspondientes el resultado.

Figura 43.

Sudoku



Fuente: Elaboración propia

PREGUNTAS:

A3, B8, C4, D7, F6, H5: Convertir $\frac{1080}{\pi}$ grados a radianes. RTA 6

B6, E8: Convertir $\frac{2\pi}{45}$ radianes a grados. RTA 8

B1, C5, D4, E9, G8: Convertir $\frac{\pi}{36}$ radianes a grados. RTA 5

C9, E4, H6: Convertir $\frac{\pi}{60}$ radianes a grados. RTA 3

B9, D2, G3, I4: Convertir $\frac{\pi}{45}$ radianes a grados. RTA 4

C6, G4, H9: Convertir $\frac{180}{\pi}$ grados a radianes. RTA 1

E6, F3, G5, H2: Convertir $\frac{1260}{\pi}$ grados a radianes. RTA 7

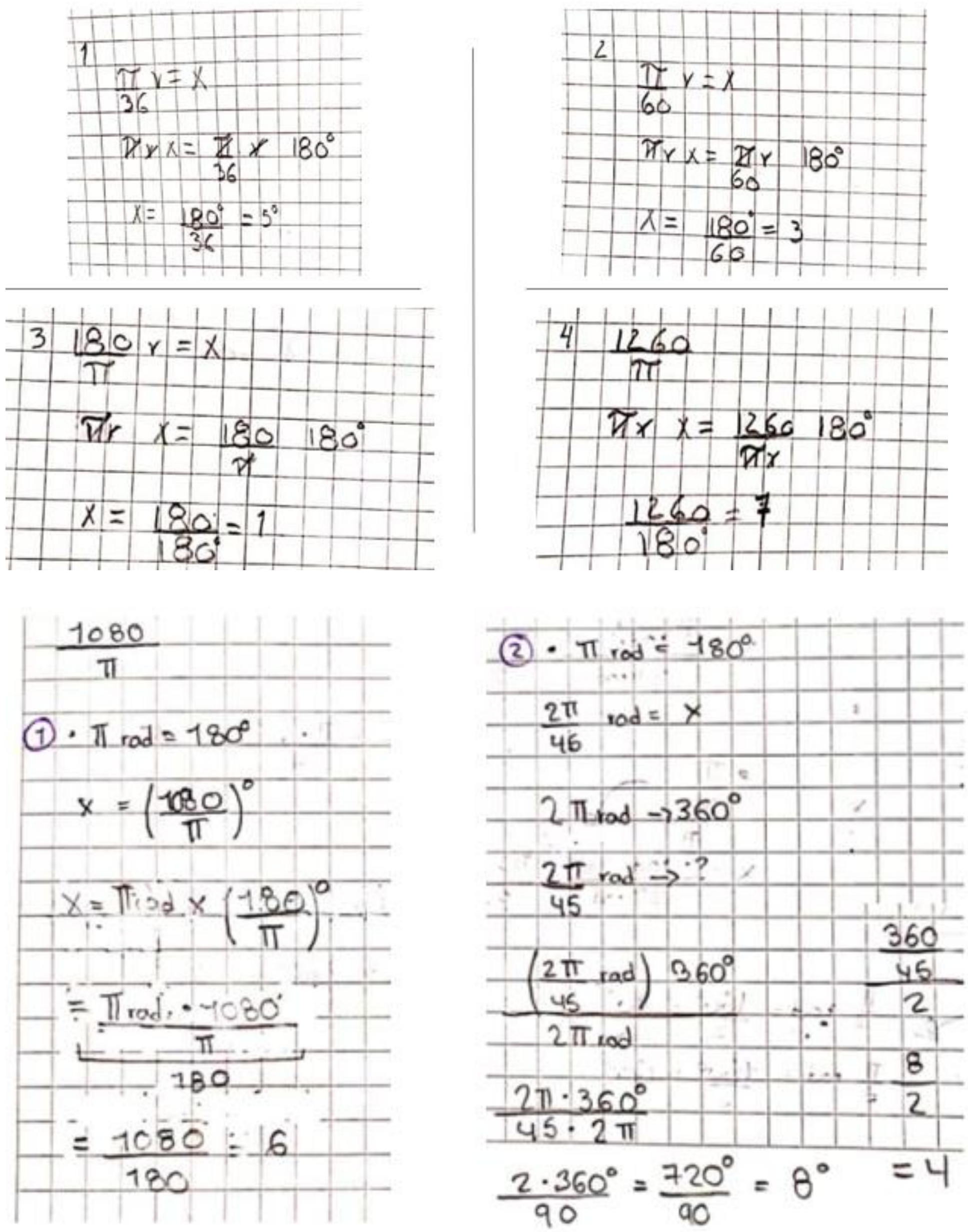
C7, D3, F9, H1: Convertir $\frac{360}{\pi}$ grados a radianes. RTA 2

E1, I3: Convertir $\frac{1620}{\pi}$ grados a radianes. RTA 9

Hay que mencionar que una parte de esta actividad recreativa se la desarrolló en el segundo momento mientras se explicó el tema de conversiones, puesto que se notó que los estudiantes tenían algunas dificultades algebraicas para la solución de reglas de tres, es por ello por lo que se ejercitó esta parte con el sudoku. En este juego tuvieron la oportunidad de repasar los procesos algebraicos y corregir sus errores, fueron nueve ejercicios matemáticos que reforzaron este tema, algunas de las respuestas que obtuvimos se presentan a continuación:

Figura 44.

Soluciones de los estudiantes para el sudoku



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Estas respuestas guiaron a los estudiantes en la resolución del Sudoku, la mayoría hizo el proceso de regla de tres tal y como se lo explicó, sin embargo, resaltamos a un estudiante que hizo un método diferente para realizar las conversiones, donde para el primer caso se tuvo que:

$$\frac{\pi}{36} rad = x$$

Luego, el estudiante multiplicó a un lado de la ecuación por $\pi\ rad$ y al otro lado por $180°$ que es su equivalente en grados.

$$\pi\ rad \cdot x = \frac{\pi}{36} rad \cdot 180°$$

$$\cancel{\pi\ rad} \cdot x = \frac{\cancel{\pi}}{36} \cancel{rad \cdot} 180°$$

Lo cual lo lleva a la respuesta correcta:

$$x = \frac{180°}{36} = 5°$$

De la misma forma el estudiante trató de hacer todos los demás ejercicios, sin embargo, este proceso que le sirvió en las conversiones de radianes a grados no lo pudo usar para las conversiones de grados a radianes, pues él hizo lo siguiente:

$$\left(\frac{1260}{\pi}\right)^{\circ} = x$$

El estudiante volvió a multiplicar a un lado de la ecuación por $\pi\ rad$ y al otro lado por $180°$ que es su equivalente en grados y cometió el error de asociar el numero π a radianes y desde aquí comenzó a acomodar su proceso para llegar a la solución pasando algo que está multiplicando a dividir en el mismo lado de la ecuación.

$$\pi\ rad \cdot x = \frac{1260}{\pi\ rad} \cdot 180°$$

$$\cancel{\pi\ rad} \cdot x = \frac{1260}{\cancel{\pi\ rad}} \cdot 180°$$

$$x = \frac{1260}{180°} = 7$$

Luego de revisar el anterior ejercicio, se explicó al estudiante que la forma de generalizar su método para el caso de convertir grados a radianes debía ser de la siguiente forma:

Si tenemos que:

$$\left(\frac{1260}{\pi}\right)^{\circ} = x$$

Ahora, ya que para convertir de radianes a grados se multiplicaba por el lado izquierdo de la ecuación por $\pi\ rad$ y al otro lado por $180°$ que es su equivalente en grados, para este caso se debía hacer algo análogo, es decir, multiplicar al lado izquierdo por $180°$ y al otro por $\pi\ rad$, asi:

$$180° \cdot x = \left(\frac{1260}{\pi}\right)^{\circ} \cdot \pi\ rad$$

Donde,

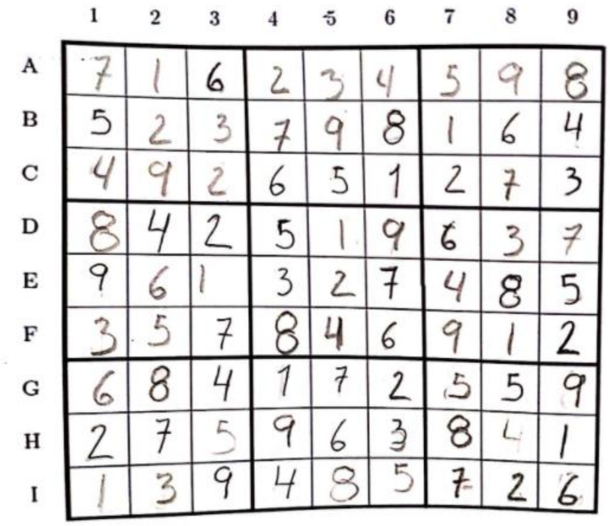
$$180° \cdot x = \frac{1260°}{\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi}\ rad \quad \rightarrow \quad x = \frac{1260°}{180°} \cdot rad = 7\ rad$$

Así el estudiante, pudo generalizar su método para las dos conversiones y seguir usándolo en las actividades propuestas en clases.

Finalmente, los estudiantes consiguieron colocar 33 números, todos del 1 al 9 en las casillas del SUDOKU para luego terminarlo, de modo que el Sudoku quedo de la siguiente forma:

Figura 45.

Sudoku trigonométrico completo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	1	6	2	3	4	5	9	8
B	5	2	3	7	9	8	1	6	4
C	4	9	2	6	5	1	2	7	3
D	8	4	2	5	1	9	6	3	7
E	9	6	1	3	2	7	4	8	5
F	3	5	7	8	4	6	9	1	2
G	6	8	4	1	7	2	5	5	9
H	2	7	5	9	6	3	8	4	1
I	1	3	9	4	8	5	7	2	6

Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Bitácora #4: Sumergiéndonos en el mundo de la trigonometría

A lo largo de nuestros talleres se insistió en el papel de la trigonometría como una herramienta matemática que permite modelar problemas de la realidad. Inicialmente, se contextualizo históricamente a los estudiantes, esto permitió mostrarles cómo surgió y evolucionó la trigonometría a través de la historia. Posteriormente, se mostró el uso de la regla de tres en problemas de conversiones de grados y radianes y es en este taller donde los sumergimos en los principales temas de la trigonometría como lo son las razones y funciones trigonométricas.

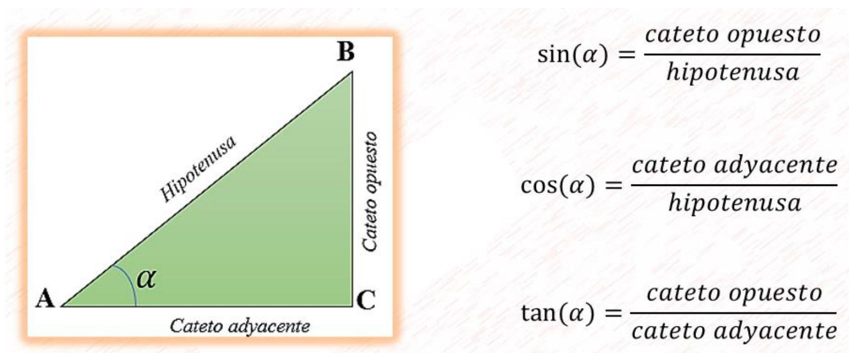
Por consiguiente, se presenta la reflexión de este taller en cuatro momentos, razones trigonométricas, funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas y la actividad recreativa, además ya que este proyecto está enfocado en la resolución de problemas, estos se presentarán a medida que vayamos desarrollando los respectivos temas.

Primer momento: Razones trigonométricas.

En este primer momento se recordó las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo presentándolas de la siguiente forma:

Figura 46.

Razones trigonométricas

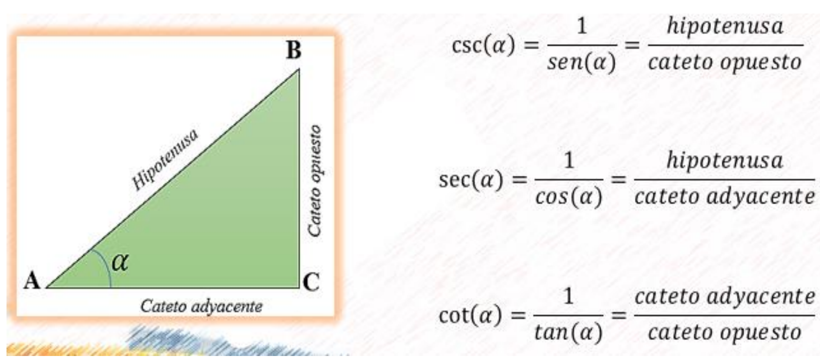


Fuente: Elaboración propia

Estas fueron las primeras definiciones de algunas razones trigonométricas, y con base a estas procedimos a definir las razones trigonométricas recíprocas de la misma forma:

Figura 47.

Razones trigonométricas recíprocas



Fuente: Elaboración propia

Luego, para que los estudiantes recordarán la relación entre las razones y sus recíprocas, propusimos relacionarlas en el tablero de la siguiente forma:

Figura 48.

Relación entre las razones trigonométricas

$$\sin(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

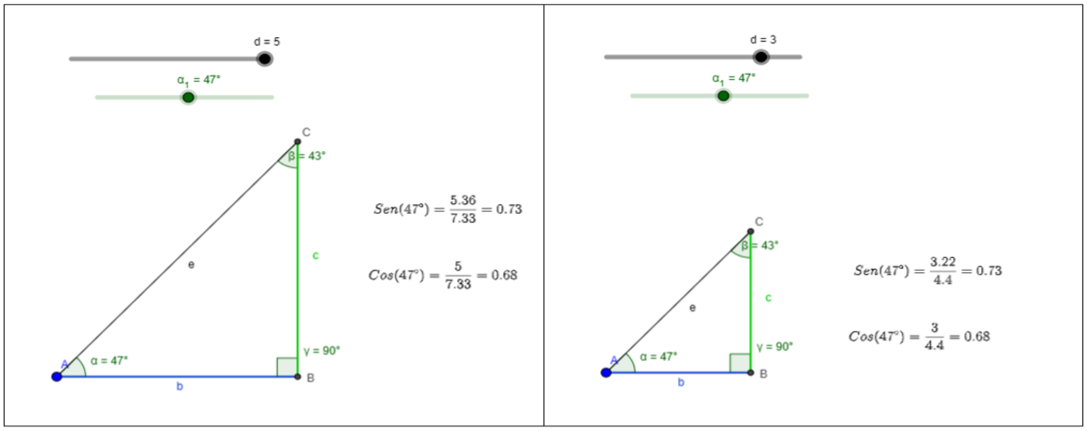
$$\csc(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

Fuente: Elaboración propia

En esta parte los estudiantes notaron que a partir de las tres primeras razones podían encontrar las demás sin tener que aprenderlas memorísticamente, haciendo un proceso de deducción que los ayudaría más adelante a recordarlas. Por consiguiente, se hizo uso de GeoGebra para explicar cómo varían el seno y el coseno en un triángulo rectángulo si se alteran el cateto adyacente o el ángulo. La animación que usamos es de la autora Morales (2016), denominada “razones”:

Figura 49.

El seno y coseno en GeoGebra

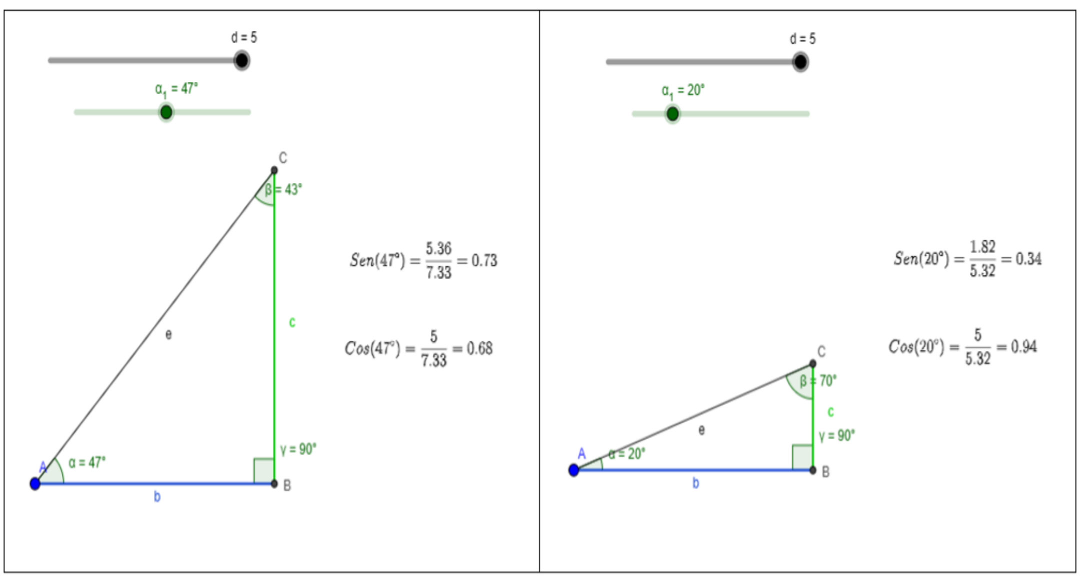


Fuente: Elaboración propia

En la anterior imagen se varió el cateto adyacente del triángulo, donde los estudiantes observaron la alteración del tamaño del triángulo, sin embargo, sus ángulos, el seno y el coseno permanecieron constantes. Con esto, los estudiantes comprendieron que las razones trigonométricas seno y coseno no dependen del tamaño del triángulo.

Figura 50.

El seno y coseno en GeoGebra 2



Fuente: Elaboración propia

Luego, se procedió a variar la amplitud del ángulo y en este caso los estudiantes notaron que el coseno y el seno si variaban con lo que concluyeron que las razones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo sino de la amplitud del ángulo.

Aquí vale la pena mencionar que los estudiantes dieron buen uso al concepto de variable en relación funcional, reconocieron la variación conjunta de las variables, es decir, identificaron cuándo una variable es dependiente o independiente de otra. Muchas veces los conceptos de variable e incógnita generan dificultad en los estudiantes y se suele pensar que el uso de letras como variables se relaciona directamente a un número en particular, por ello cuesta comprender que la variable depende de otros factores y puede cambiar, por ello el uso de GeoGebra fue una herramienta útil para comprender este tipo de conceptos.

Luego, para contextualizar toda la temática explicada, se comentó que las razones trigonométricas son ampliamente usadas en la construcción, topografía, aviación, arquitectura, criminología, entre otras, por ejemplo, en actividades como hallar distancias, ver los ángulos de las luces, medir la inclinación de los techos, alturas, el calcular el ángulo de inclinación con el que desciende un avión, hasta para calcular el ángulo con el que una bala fue disparada, etc. Posteriormente, se prosiguió con el planteamiento de los siguientes problemas:

Problema 1

Carlos ha ido de vacaciones a París y se encuentra a 87 metros delante de la torre Eiffel. Es preciosa y lo impresiona muchísimo, en un momento el faro que se encuentra en lo alto de la torre apunta directamente sus pies con un ángulo de inclinación de 73.79°, calcule a qué distancia se encuentra el foco del faro de Carlos.

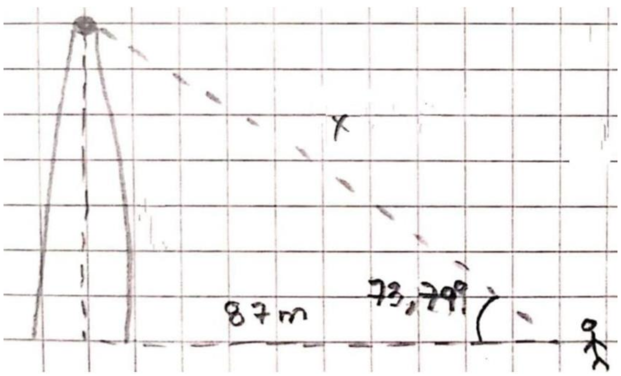
Aplicando nuevamente la metodología de resolución de problemas de Pólya se procedió a solucionar el problema siguiendo los cuatro pasos:

- *Comprensión del problema:*

Luego de leer el problema detenidamente para entenderlo, los estudiantes pasaron a identificar los datos e incógnitas representándolos gráficamente de la siguiente forma:

Figura 51.

Representación del problema 1



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

En este paso, los estudiantes dudaron sobre la ubicación del ángulo dado en grados, pues en un momento pensaron en ubicarlo en la parte superior de la torre, fue evidente que los confundió el término de ángulo de inclinación, por lo que se aclaró que el ángulo de inclinación es el que se forma con el eje x, es decir, en este caso el ángulo que se forma con el suelo. Luego de aclarar esta duda, los estudiantes concluyeron que la distancia de la base de la torre a Carlos es de 87 mt y corresponde al lado adyacente del triángulo con respecto al ángulo dado, y la incógnita a su hipotenusa, con lo que se procedió a hacer la lista usual de datos e incógnitas:

Datos: ángulo= 73.79°, cateto adyacente: 87 mt

Incógnitas: hipotenusa=x, cateto opuesto=h

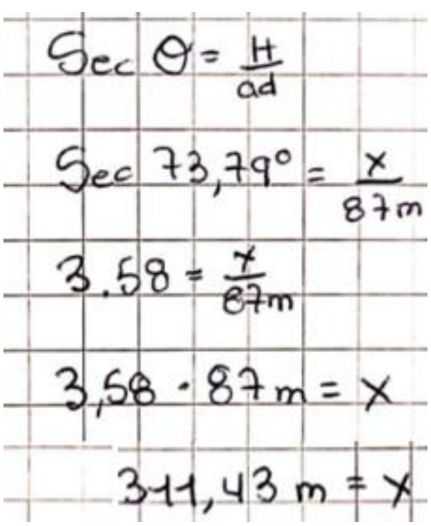
- Concepción de un plan

En este paso se pidió a los estudiantes que pensaran en una idea para solucionar el problema, también se les hizo las preguntas usuales: ¿Cómo podrían resolver este problema con lo que han aprendido?, ¿Recuerdan algún problema similar que los ayude a resolver este?, a lo cual los estudiantes respondieron que las razones trigonométricas les ayudarían a solucionar este problema, por lo que se preguntó ¿Cuál sería la razón trigonométrica que usarían para resolverlo?, los estudiantes estaban un poco confundidos, no supieron qué razón usar y terminaron eligiendo el seno del ángulo, en este punto se les comentó que se necesita una razón trigonométrica que relacione los datos e incógnitas del problema, por lo que los estudiantes notaron que el seno del ángulo no relacionaba la información anterior, de manera que pudieron identificar que la razón trigonométrica que si los relacionaba era la secante o bien el coseno.

- Ejecución del plan

Figura 52.

Solución de los estudiantes



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

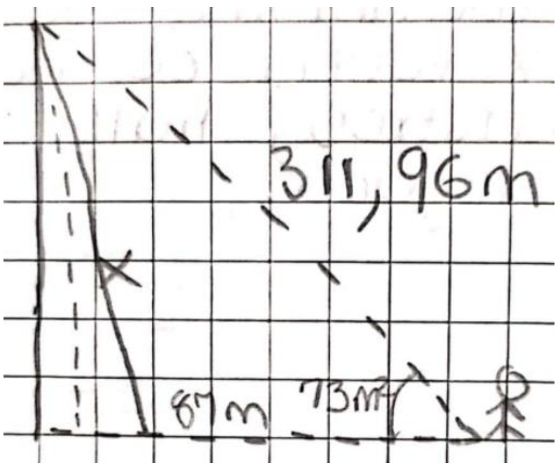
Por lo que, la distancia del foco de la torre a Carlos es de 311,43 mt.

- Verificación

En este paso, se analizó cada paso anterior y también se solucionó el problema usando la razón trigonométrica del coseno, además se planteó el problema de hallar la altura de la torre Eiffel y se prosiguió de la misma forma anterior donde, la representación gráfica fue:

Figura 53.

Representación geométrica del problema

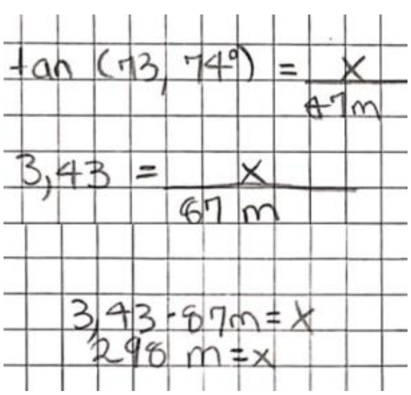


Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Y la razón trigonométrica usada fue la tangente:

Figura 54.

Solución de los estudiantes



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Por lo que se llegó a la conclusión de que Carlos estaba más cerca de la torre Eiffel de lo que se pensaba en un inicio y la siguiente imagen representó mejor la situación problema:

Figura 55.

Representación geométrica del problema

Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Problema 2

El siguiente problema es propuesto por Profesor10demates (2015): En la llanura desde un punto se mide el ángulo de elevación a una montaña y se obtiene 35º. Acercándose 200m más hacia la montaña vuelve a medir el ángulo y se obtienen 55º. ¿Cuál es la altura de la montaña?

- Comprensión del problema

Este problema se contextualizó con una imagen donde un montañista está observando una montaña de la siguiente forma:

Figura 56.

Contexto del problema 2

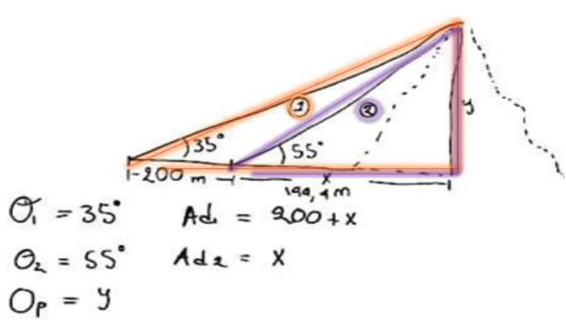
Fuente: Elaboración propia

En este paso se dio a los estudiantes un tiempo para leer el problema, tratar de entenderlo y buscar un gráfico adecuado para representar toda la información dada. Luego, empezaron a reconocer datos e incógnitas solo nombrándolos, pero no pudieron visualizar gráficamente este problema como nosotros queríamos y esperábamos, pensamos que esto se debió a que los estudiantes se acostumbraron a trabajar en problemas donde solo se graficaba un triángulo y al notar que como datos estaban el ángulo de 35° y 55° no supieron dónde ubicarlos.

Por tanto, se guio a los estudiantes a que observen que el ángulo de 35° se toma en una posición inicial de manera que se trazó el triángulo correspondiente, sin embargo, ya que en el problema el sujeto se mueve $200\ mt$ hacia la montaña, se dan cuenta de que es necesario graficar otro triángulo con las nuevas medidas del ángulo en esta nueva posición. De manera que la representación gráfica quedó de la siguiente forma:

Figura 57.

Representación geométrica del problema



Fuente: Elaboración propia

Además, en este primer paso es importante mencionar que a los estudiantes también se les dificultó reconocer e identificar la incógnita x como la distancia desde la segunda posición a la montaña y, por el contrario, no tuvieron problema con llamar y a la altura de la montaña, sin embargo, se notó la dificultad de los estudiantes para interpretar el problema en términos algebraicos.

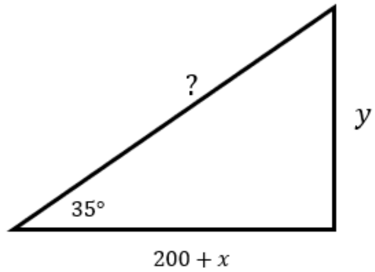
Al ver esta dificultad se hizo una reflexión acerca de la forma de solucionar problemas matemáticos, y se comentó que expresar datos e incógnitas de los problemas en términos de variables o símbolos es para solucionarlos de una forma más sencilla, se trata de descomponer la información y ver claramente que es lo que se busca en cada problema, de manera que la información quede sintetizada en símbolos y ecuaciones con las que se puede trabajar algebraicamente.

- Concepción de un plan

En este paso, se prosiguió con las preguntas usuales mencionadas en el anterior problema, ¿Cómo podrían resolver este problema con lo que han aprendido?, ¿será que en este problema también se usan las razones trigonométricas para solucionarlo? Mientras los estudiantes pensaban en una idea brillante, se insistió en relacionar los datos y las incógnitas, comentándoles la importancia de apoyarse en una gráfica que les ayude a clarificar hacia dónde quieren llegar. Posteriormente, se ideó un plan entre todos, teniendo claro que se buscaba en el problema la altura de la montaña expresada algebraicamente como y, el cual era el lado opuesto del triángulo 1, por lo que primeramente se enfocaron en el siguiente triángulo:

Figura 58.

Representación geométrica del problema



Fuente: Elaboración propia

En este triángulo se observó que el lado adyacente equivale a $200 + x$ y la hipotenusa es otra incógnita, es claro que se identificaron los lados del triángulo para usar una razón trigonométrica, por lo tanto, se propuso aplicar la tangente del ángulo obteniendo lo siguiente:

$$tan\ (35°) = \frac{y}{200 + x}$$

En este momento se recalcó que en este triángulo hay dos incógnitas y un dato, por lo que se dieron cuenta de que con la aplicación de esta razón trigonométrica no se llegaba a una respuesta fija del problema.

En consecuencia, los estudiantes también notaron que no se estaba trabajando con todos los datos del problema, sin embargo, no sugirieron nada más, por lo que se trató de guiarlos para que resuelvan el triángulo número 2 de la misma forma que el 1 con el fin de que notaran que la solución era plantear un sistema de ecuaciones de dos por dos, no obstante fue algo que los estudiantes no lograron visualizar pues comentaron que no recordaban cómo plantear y solucionar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Aquí es importante resaltar que nuestro papel en la resolución de problemas es de guías y no debemos darles las respuestas a los estudiantes tan fácil sin obtener un verdadero esfuerzo de su parte para solucionarlo, sin embargo, esta estrategia no nos funcionó en este problema porque los estudiantes no tuvieron las bases suficientes para resolverlo, por lo que decidimos que primeramente debíamos profundizar en cómo resolver un sistema de dos por dos y luego resolver nuestro problema.

- Ejecución del plan

Se recordó que aplicando la razón trigonométrica de la tangente en el triángulo 1 de la figura N° 57 se tenía la siguiente ecuación:

$$tan\ (35°) = \frac{y}{200 + x}$$

Luego, aplicando la misma razón trigonométrica para el triángulo 2 de la figura N°57, se obtuvo:

$$tan\ (55°) = \frac{y}{x}$$

De este modo, se procedió a solucionar el problema de la siguiente forma:

$$tan\ (35°) = \frac{y}{200 + x} \quad \rightarrow \quad y = tan\ (35°) \cdot (200 + x)$$

$$tan\ (55°) = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = tan(55°)x$$

Luego, se igualo ambas ecuaciones y se despejo x.

$$tan\ (35°)\ \cdot (200 + x) = tan(55°) \cdot x$$

$$0{,}70 \cdot (200 + x) = 1{,}42 \cdot x$$

$$0{,}70 \cdot 200 + 0{,}70 \cdot x = 1{,}42 \cdot x$$

$$140 = 1{,}42x - 0{,}7x$$

$$140 = 0{,}72x$$

$$\frac{140}{0{,}72} = x$$

$$194{,}4mt = x$$

Luego, para hallar y se remplazó x en una de las ecuaciones.

$$y = tan(55°)x$$

$$y = tan(55°)(194{,}4) = 1{,}42(194{,}4) = 276.04\ mt$$

Cabe resaltar que este proceso se explicó detalladamente a los estudiantes logrando su comprensión en este tema.

Finalmente, con este problema se vio que los estudiantes tenían dificultad para interpretar y resolver problemas de tipo algebraico que involucren más de una ecuación, evidenciando pocas bases algebraicas para resolver nuestros problemas. Temas como la resolución de sistemas de ecuaciones son abordados en grados octavo o noveno, por lo que inferimos que como estudiantes de grado décimo vieron estos temas en tiempo de pandemia, no interiorizaron estos conocimientos y tal vez solo se limitaron a cumplir con sus responsabilidades y a hacer procesos algorítmicos que no facilitaron su aprendizaje. Sin embargo, fue satisfactorio haberles recordado estos temas, puesto que los muchachos se entusiasmaron con nuestra forma de enseñanza y nos lo hicieron saber diciendo que entendían todo lo que les estábamos enseñando y les gustaba nuestra metodología.

- Verificación

En la siguiente sesión se retomó nuevamente el problema y los estudiantes identificaron los pasos claves en la resolución del problema. De esta manera, pudieron identificar fácilmente los datos e incógnitas en el gráfico y plantearon un sistema de ecuaciones que resolvieron de manera rápida y correcta.

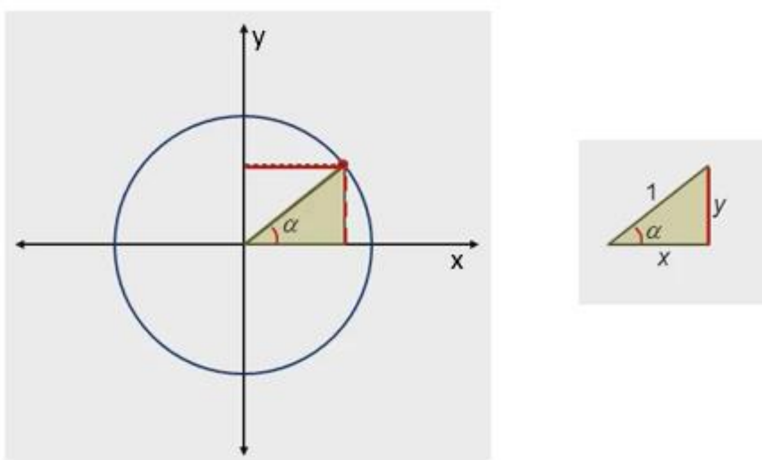
Segundo momento: Funciones trigonométricas.

En este segundo momento, se comentó a los estudiantes que las funciones trigonométricas, según Islas, et al. (2017) son establecidas con el fin de extender la definición de las razones trigonométricas. ¿Cómo se hace esta extensión? Las razones trigonométricas son cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo asociados a un ángulo, de manera que las funciones trigonométricas son extensión de este concepto, pues estas se definen por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores del ángulo. Para lograr una mejor comprensión de lo anterior, se mostró un video publicado por Tuprofevirtual (2015), en el cual se explicó lo siguiente:

Con el fin de llegar a las definiciones de las funciones trigonométricas, el video inicia dibujando un círculo con centro en el origen del plano y radio uno, en el cual se traza un radio y haciendo el respectivo triángulo se puede inferir las dimensiones de este con respecto al ángulo α, tal y como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 59.

Circulo unitario



Fuente: Elaboración propia

Luego, se aplican las razones trigonométricas a este triángulo respecto al ángulo α, donde:

Figura 60.

Relaciones entre funciones trigonométricas

$$sen(\alpha) = \frac{y}{1} = y$$

$$cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x$$

$$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

$$cot(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{cos\ (\alpha)}{sen(\alpha)}$$

$$sec(\alpha) = \frac{1}{x} = \frac{1}{cos(\alpha)}$$

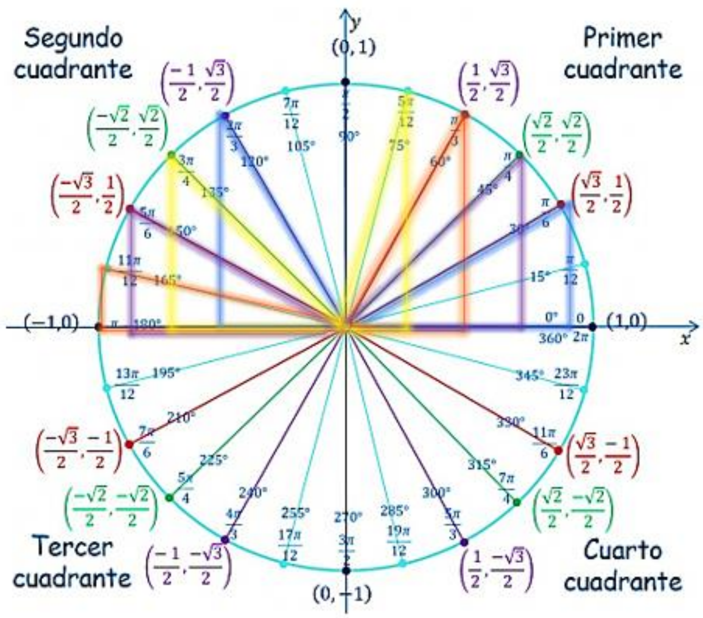
$$csc(\alpha) = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen(\alpha)}$$

Fuente: Elaboración propia

Vale la pena resaltar que los estudiantes una vez copiaron estas funciones también las relacionaron como lo hicieron con las razones trigonométricas. Seguidamente, se explicó cómo las funciones seno y coseno toman valores en el círculo trigonométrico en los cuatro cuadrantes del plano xy y se comentó que tomando como hipotenusa el radio y como lado opuesto el segmento que cae desde el punto de la circunferencia al eje x, se forman triángulos rectángulos tal y como lo muestra la siguiente figura:

Figura 61.

Circulo trigonométrico

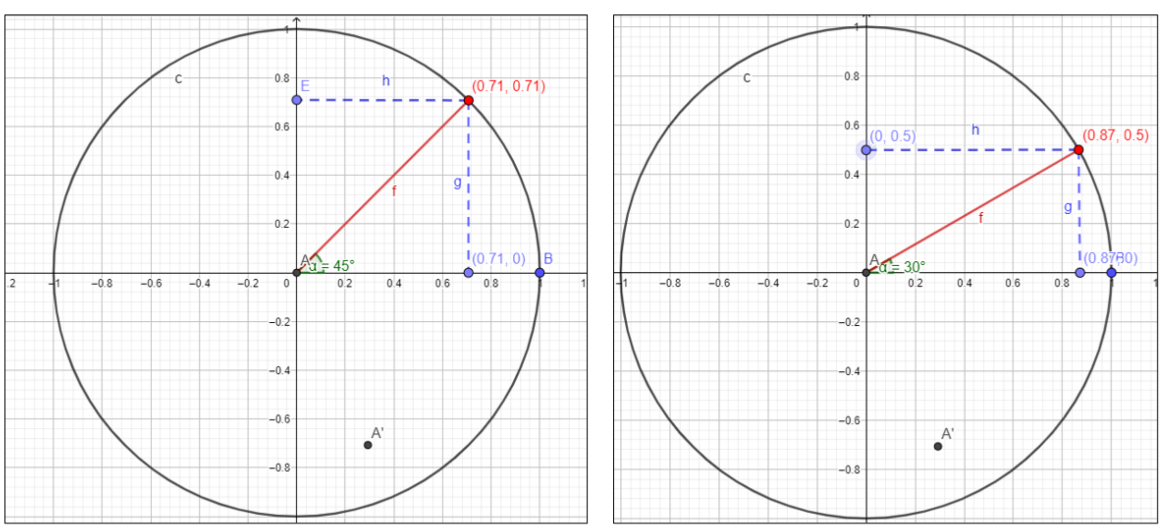


Fuente: Elaboración propia

Además, en la anterior figura se explicó que la longitud de los lados opuestos de cada triángulo corresponde al seno del ángulo y cada longitud de los lados adyacentes corresponde al coseno, además se mostró ejemplos en GeoGebra:

Figura 62.

Ejemplos en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Tomando como ejemplo el ángulo de 30°, los estudiantes notaron que el sen (30°) correspondía a la medida del cateto opuesto del triángulo, es decir, la longitud de g que es 0,5 y el cos (30°) correspondía a la medida del cateto adyacente, en este caso, la longitud de h que es 0,87. En este punto, los estudiantes recordaron el círculo trigonométrico donde se tenían las coordenadas $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $aprox(0.87, 0.5)$ como lo mostramos en GeoGebra, con lo que aclararon todas sus dudas con respecto a este tema.

Graficación de las funciones trigonométricas.

Explicada la anterior parte, se graficó las funciones trigonométricas seno y coseno, primeramente, se hizo una tabla de valores, la cual los estudiantes completaron de la siguiente forma:

Figura 63.

Tabla de valores de la función seno

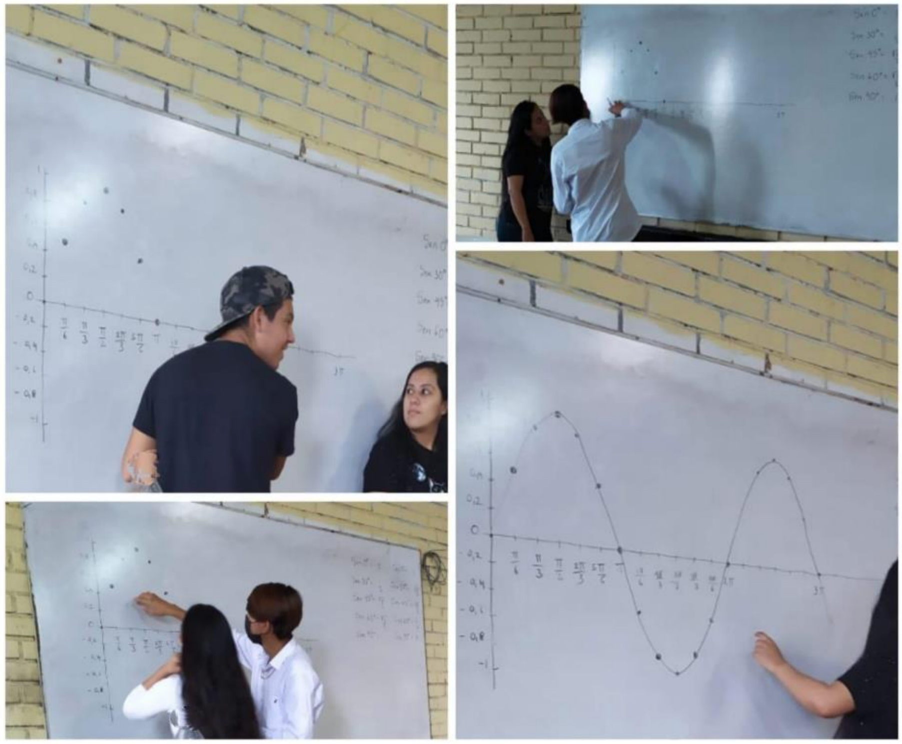
α	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Fuente: Elaboración propia

Para graficar la función seno se llamó a los estudiantes al tablero, donde cada uno graficó un punto en el plano cartesiano, para finalmente trazar toda la función.

Figura 64.

Evidencias fotográficas



Fuente: Elaboración propia

Por consiguiente, se completó la tabla de valores de la función coseno y se la comparó con la tabla de la función seno, donde los estudiantes pudieron notar que las imágenes de la función coseno seguían la misma secuencia de la función seno desde la imagen de $\frac{\pi}{2}$, del siguiente modo:

Figura 65.

Comparación de las tablas de valores de la función coseno y seno

α	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

...

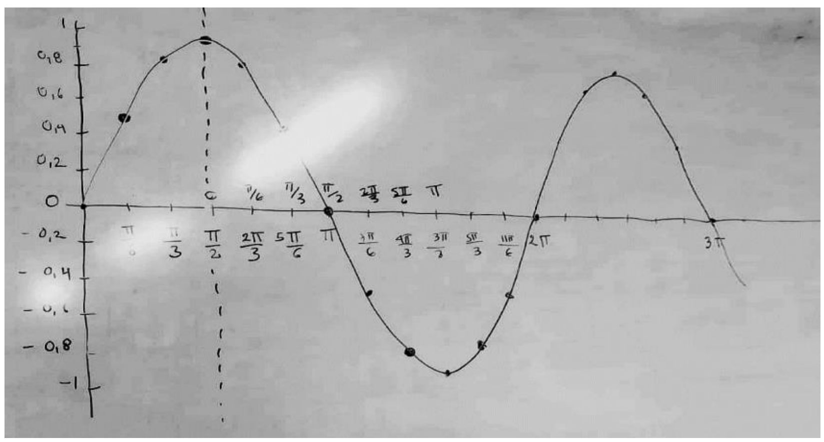
α	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Fuente: Elaboración propia

Con esto se explicó, que la diferencia entre las gráficas de la función coseno y la función seno tienen un desfase, es decir, que la gráfica de la función coseno se la puede obtener de grafica de la función seno. Por tanto, se graficó en el tablero la función coseno sobre la función seno, colocando el origen en donde para la gráfica de la función seno era $\frac{\pi}{2}$ de la siguiente forma:

Figura 66.

Graficas de la función seno y coseno

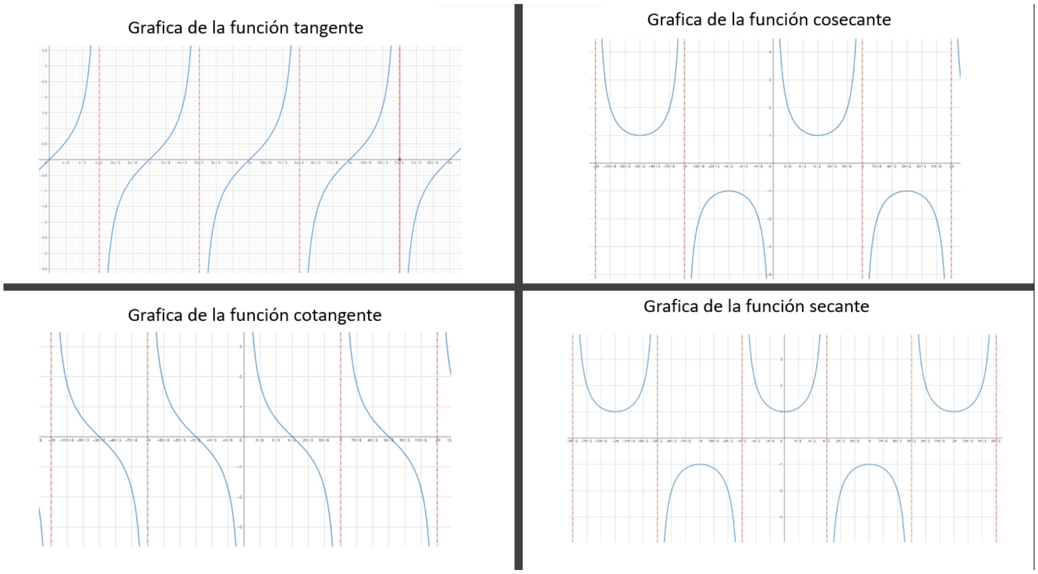


Fuente: Elaboración propia

Para tabular la función tangente, se recordó que $tan\ (x) = \frac{sen(x)}{cos\ (x)}$, de este modo, se pidió a los estudiantes que completaran la tabla de tabulación. No se hizo mucho énfasis en completarla, ya que solo requería de la división de números fraccionarios, así que se mostró las diferentes gráficas de las funciones que faltaban, haciendo alusión a que en algunas gráficas hay valores indeterminados, como en el caso de la función tangente cuando el coseno vale 0.

Figura 67.

Graficas de las funciones trigonométricas en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Aplicación de las funciones trigonométricas.

En esta parte se preguntó a los estudiantes si conocían o podían relacionar estas funciones con el mundo real según lo que han aprendido en física o en otras áreas, a lo cual contestaron que tal vez estas funciones tenían que ver con las ondas del sonido, por lo que se reforzó la idea de que las funciones trigonométricas ayudan a modelar fenómenos físicos como el de la propagación del sonido, los movimientos circulares y el movimiento de los péndulos.

Tercer momento: Funciones trigonométricas inversas

Visto el tema de las funciones trigonométricas se pasó al tema de las funciones trigonométricas inversas, para esto se inició con el caso de la función arcoseno, la cual se explicó de la siguiente forma:

$si\ arcsen(x)=\alpha,\ entonces\ sen(\alpha)=x$

Luego, se comentó que el arcoseno y el seno son funciones inversas, por lo que su composición es la identidad, esto es:

$arcsen(sen(\alpha)) = \alpha$

Y, además, su abreviatura es $arcsen$ o sen^{-1}

Dicho esto, se explicó de la misma manera las funciones arcocoseno y arcotangente como inversas de las funciones coseno y tangente respectivamente, además se mostraron sus respectivas gráficas.

De este modo:

$$si\ arccos(x) = \alpha,\ \ entonces\ \ cos(\alpha) = x$$

$$si\ arctan(x) = \alpha,\ \ entonces\ \ tan(\alpha) = x$$

Además:

$$arccos(cos(\alpha)) = \alpha$$

$$arctan(tan(\alpha)) = \alpha$$

Donde sus abreviaturas son: arccos o cos^{-1} y arctan o tan^{-1}

Por último, se dijo que, así como hay funciones inversas para el seno, coseno y tangente, también las hay para la secante, cosecante y cotangente que también cumplen con todo lo anterior. Es importante resaltar que en este momento también se aclaró la siguiente notación en la que los estudiantes se suelen confundir:

$$sen^{-1}x \neq \frac{1}{senx}$$

Y para terminar esta parte se propuso los siguientes problemas:

Problema 1

El siguiente ejercicio es planteado por Paramatematicas125 (2020): Imagine que usted es un pasajero de avión y la azafata pregunta:

- ¿Alguno de ustedes sabe matemática?

Usted se levanta para ver qué se le ofrece, y le dice:

- Tal vez yo la puedo ayudar, ¿cuál es el problema?

- Estamos volando actualmente a una altitud de aproximadamente 10 kilómetros y experimentamos dificultades técnicas –sobrecargo

Usted comprende que se necesita su ayuda, así que toma su calculadora y camina hacia el frente del avión para ofrecer su colaboración al piloto, que parece un poco enfermo y desorientado.

- Me estoy sintiendo muy mal y no puedo pensar –el piloto

- ¿Qué puedo hacer para ayudar? –pregunta usted

- Necesito deducir cuándo debe comenzar el descenso. ¿Qué tan lejos del aeropuerto debe de estar el avión, si quiero descender con un ángulo de 3°? -piloto-.

El piloto se observa peor cada segundo transcurrido.

- ¡Eso es fácil! –exclama usted. Veamos. Estamos a una altitud de 10km y queremos aterrizar en la pista con un ángulo de 3°. Hmmmm

¿Qué tan lejos del aeropuerto le dijo usted al piloto que empezará el descenso?

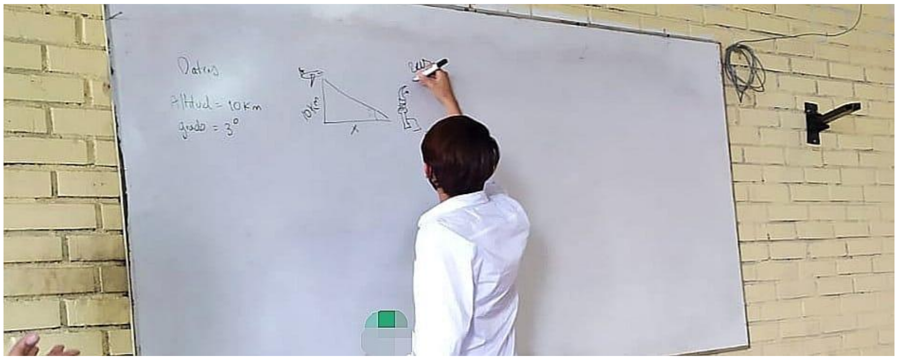
Continuando con la metodología de Pólya, tenemos los siguientes pasos para resolver este problema:

- Comprensión del problema

En primer lugar, los estudiantes leyeron el problema para lograr entenderlo, y se prosiguió a hacer el gráfico correspondiente para identificar datos e incógnitas en el tablero, de modo que los estudiantes propusieron lo siguiente:

Figura 68.

Evidencias fotográficas

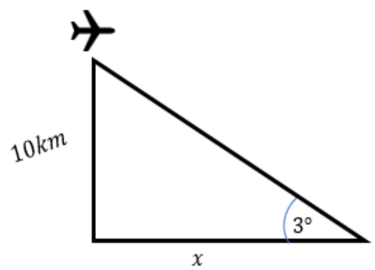


Fuente: Elaboración propia

Se noto que los estudiantes identificaron como incógnita el lado adyacente del triángulo construido, ampliando la imagen se tiene:

Figura 69.

Representación geométrica del problema



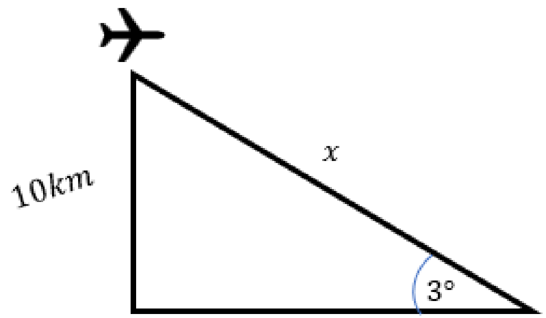
Fuente: Elaboración propia

Luego, se pidió a los estudiantes verificar si esto es lo que pedía el problema, al inicio pensaron que sí, así que, se les volvió a leer la pregunta del problema: ¿Qué tan lejos del aeropuerto debe de estar el avión, si quiero descender con un ángulo de 3°?, por lo que se dieron cuenta de que la incógnita debía ser la hipotenusa, puesto que les están pidiendo la distancia del avión al aeropuerto y se explicó que si se tomaba la distancia como el lado adyacente del triángulo construido sería como si el avión estuviera en el suelo.

De este modo, cambiaron su grafico al siguiente:

Figura 70.

Representación geométrica del problema 2



Fuente: Elaboración propia

- Concepción de un plan

En la concepción del plan los estudiantes tenían claro que debían usar el seno del ángulo para hallar la hipotenusa del triángulo y así la distancia que se pedía.

- Ejecución del plan

$$sen(3°) = \frac{10}{x}$$

$$x = \frac{10}{sen(3°)} = 191.07\ km$$

Por tanto, la distancia del avión al aeropuerto para que éste descienda con un ángulo de 3° es de 191.97 km.

- Verificación

En este paso, los estudiantes mencionaron otra forma de solucionar el problema a través de la secante, solución que hicieron mentalmente.

Al respecto conviene decir que con este problema nos devolvimos al tema de razones trigonométricas y confirmamos un buen aprendizaje de ellas, en la mente de nuestros estudiantes quedó que siempre deben buscar una razón trigonométrica que relacione los datos e incógnita que les dé un problema, esta parte fue satisfactoria porque ya no recurrieron a ver las razones trigonométricas en su cuaderno, sino que las supieron decir naturalmente. Sin embargo, cuando terminamos este problema, nos dimos cuenta de que no utilizamos el tema de funciones trigonométricas inversas y este problema tenía el fin de reforzar este tema, por lo que se propuso a los estudiantes modificar el problema de manera que utilicen alguna función trigonométrica inversa recordándoles que el uso de estas funciones es para hallar ángulos, pues si se tiene el seno o coseno de algún ángulo y se le aplica su función inversa, el resultado es el ángulo. Algunos ejemplos con lo que se explicó lo anterior fueron:

$$sen(\theta) = 0{,}5$$

$$sen^{-1}(sen(\theta)) = sen^{-1}(0{,}5)$$

$$\theta = 30°$$

$$cos(\theta) = 0{,}5$$

$$cos^{-1}(cos(\theta)) = cos^{-1}(0{,}5)$$

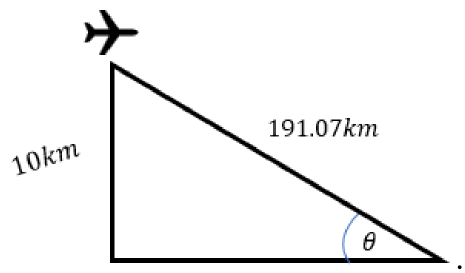
$$\theta = 60°$$

Con esto los estudiantes propusieron que el problema debería dar el seno del ángulo, y pedir el ángulo, sin embargo, se comentó que en un problema no se debería de dar este tipo de información, por lo que se recordó que el seno de un ángulo es cateto opuesto sobre hipotenusa, por tanto, el problema debía dar esos lados. De manera que la pregunta del problema quedó de la siguiente forma:

¿Con qué ángulo debe descender el avión si se encuentra a una altura de 10 km y a una distancia de 191,07 km del aeropuerto?, de este modo el gráfico quedó de la siguiente forma:

Figura 71.

Representación geométrica del problema



Fuente: elaboración propia

Y usando el seno del ángulo se tuvo que:

$$sen(\theta) = \frac{10}{191.07}$$

$$sen^{-1}sen(\theta) = sen^{-1}\left(\frac{10}{191.07}\right)$$

$$\theta = 3°$$

Con esto los estudiantes confirmaron que el ángulo de descenso era 3° como en el problema inicial.

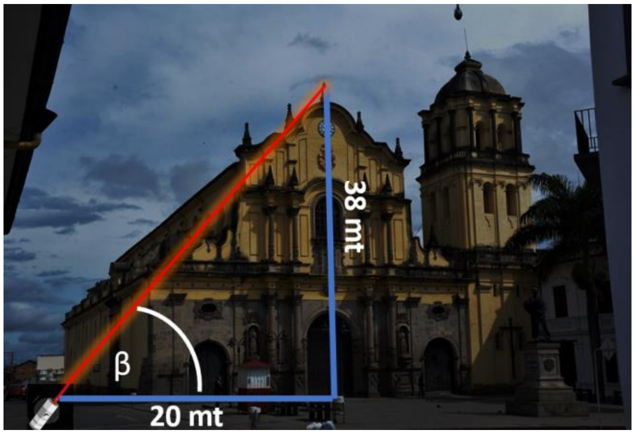
Problema 2

Para usar nuevamente estas funciones trigonométricas inversas en un problema diferente se retomó el siguiente problema del primer taller.

Un niño ubicado a 20 metros de la iglesia de San Francisco apunta con un láser el pico de la iglesia tal como lo muestra la figura, sabiendo que la altura de la iglesia de San Francisco de Popayán mide 38 mt, calcule el ángulo(β) de inclinación del láser con el piso.

Figura 72.

Imagen de contexto



Fuente: Elaboración propia

Continuando con la metodología de Pólya se siguió con los siguientes pasos.

- Comprensión del problema

En este problema la imagen que lo contextualiza dejó claro los siguientes datos e incógnitas del problema.

Datos: h=38 m, d=20 m, Incógnita: β=?

- Concepción del plan

En este paso los estudiantes ya tenían la idea de que este problema se solucionaría de la misma forma que el anterior, por lo que luego de identificar los datos y la incógnita no les fue difícil encontrar el plan a seguir y se propuso que una de las estudiantes salga a hacerlo en el tablero con ayuda de los demás, encontrando que las razones trigonométricas que relacionan el lado adyacente con el opuesto en este triángulo son la cotangente o la tangente, por lo que decidieron usar la primera.

Figura 73.

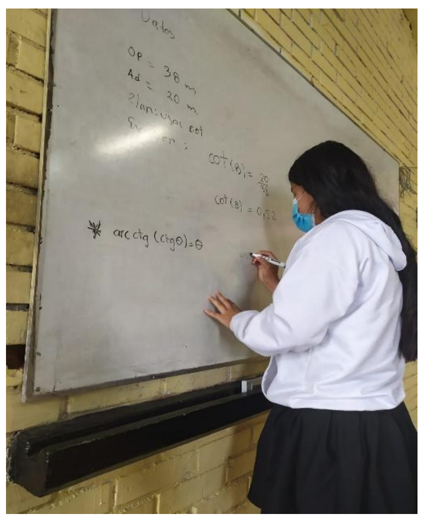
Evidencias fotográficas

Fuente: Elaboración propia

- Ejecución del plan

Figura 74.

Evidencias fotográficas



Fuente: Elaboración Propia

$$cot(\theta) = \frac{20}{38} = 0{,}52$$

$$cot^{-1}cot(\theta) = cot^{-1}(0{,}52)$$

$$\theta = cot^{-1}(0{,}52)$$

En este momento los estudiantes comentaron que en la calculadora no encontraban esta función inversa, sin embargo, notaron que la función tan^{-1} sí estaba, por lo que procedieron a hacer el mismo procedimiento con la tangente.

$$tan(\theta) = \frac{38}{20} = 1.9$$

$$tan^{-1}cot(\theta) = tan^{-1}(1{,}9)$$

$$\theta = tan^{-1}(1.9) = 62{,}24$$

De donde, se concluyó que:

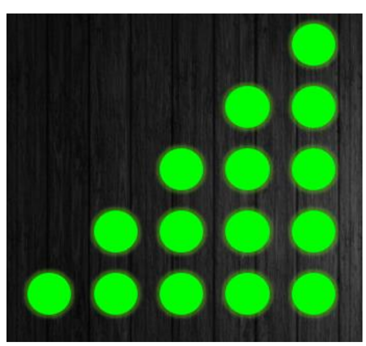
$$cot^{-1}(0{,}52) = \theta = tan^{-1}(1.9) = 62{,}24$$

Cuarto momento: Actividad recreativa "El nim"

Como actividad recreativa se presentó a los estudiantes el juego que describe Zurditorium (2010) llamado NIM, este es un juego del siglo XVI que se cree se originó en china, pero realmente su origen es incierto. Primeramente, se explicó a los estudiantes que este es un juego de estrategia para dos personas que consiste en retirar, alternativamente, piezas de una serie de montones o hileras hasta que desaparezcan todas, donde estas hileras están ubicadas de la siguiente forma:

Figura 75.

El Nim



Fuente: Elaboración propia

Para jugar el nim, se recurrió a material didáctico en donde a cada pareja de estudiantes se les entregó 15 fichas que se organizaron en 5 montones, como en la figura anterior.

Figura 76.

Foto de clases

Fuente: Elaboración propia

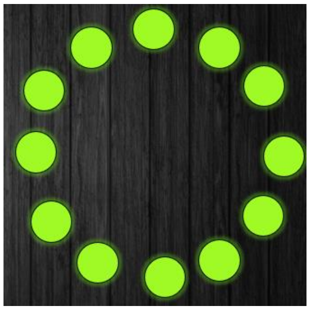
Mientras los estudiantes jugaban se pidió que analizaran la posibilidad de una estrategia ganadora. La primera idea planteaba que el jugador que inicia quitando las fichas siempre gana, sin embargo, rápidamente observaron que esta estrategia no era correcta, pues hubo juegos en los que el primer jugador no ganó. Luego, para motivar a los estudiantes a pensar en otras estrategias ganadoras, se propuso un juego más sencillo llamado:

El juego de las 12 monedas

Este juego tomado de Aprendemos Juntos (2018) consiste en ubicar doce monedas como lo muestra la siguiente figura, donde cada jugador debe retirar una o dos monedas que se encuentren juntas, y gana el que retire la última moneda.

Figura 77.

Las doce monedas

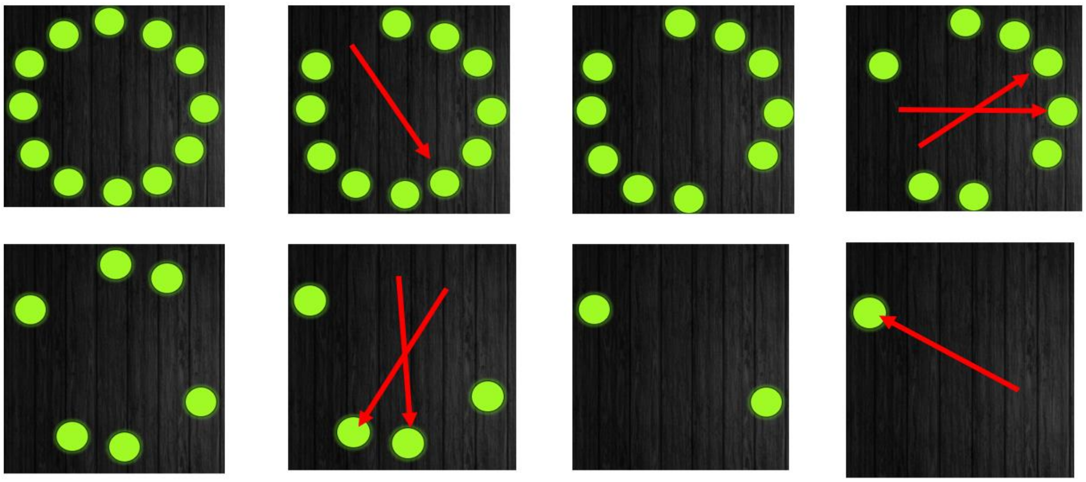


Fuente: Elaboración propia

Luego, se pasó a jugar al tablero con los estudiantes aplicando la estrategia ganadora para después preguntarles el motivo de nuestras consecutivas victorias, ellos no tardaron en descubrir la razón, pues este juego tiene estrategia ganadora para el segundo jugador, cuando el primer jugador retira una ficha o dos, el segundo jugador retira la ficha o las fichas que se encuentren diametralmente opuestas lo que le permite ganar, como se indica a continuación:

Figura 78.

Estrategia ganadora del juego de las doce monedas

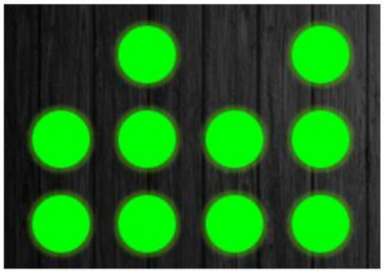


Fuente: Elaboración propia

Este juego de las doce monedas tuvo el fin de mostrar a los estudiantes que algo similar ocurre en el juego del nim, puesto que después de algunos pasos la figura del nim también se vuelve simétrica y lo único que se puede hacer es seguir los pasos del otro jugador para ganarle. Por ejemplo, en la siguiente jugada:

Figura 79.

El Nim en jugada simétrica



Fuente: Elaboración propia

Hasta ese momento la estrategia de los estudiantes se basó en llegar a este tipo de figuras en el nim para luego seguir los movimientos de su contrincante para ganar.

Estrategia ganadora del Nim

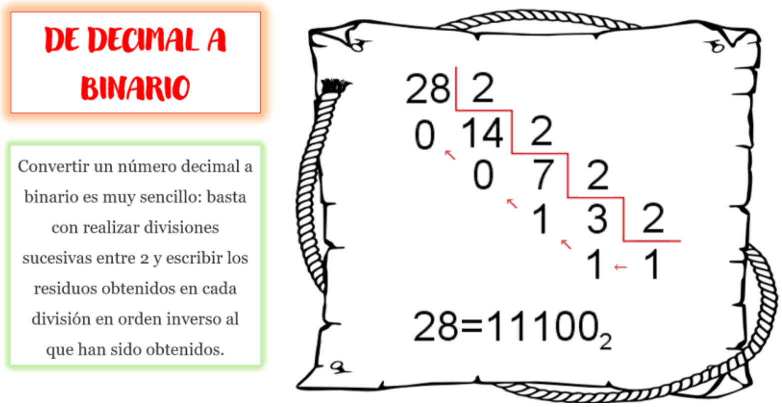
Luego de analizar estas estrategias, se expuso la estrategia ganadora en la cual se empleaban los números binarios. En primer lugar, se explicó que el sistema de numeración binario es un sistema de numeración que utiliza dos símbolos 0 (cero) y 1 (uno), denominados dígitos binarios, por tanto, su base es 2 y cualquier número puede expresarse tanto en el sistema decimal como en el binario.

Conversiones de base binaria a decimal y viceversa.

Dicho esto, primero se enseñó a los estudiantes a pasar números de base decimal a sistema binario de la siguiente forma:

Figura 80.

Conversiones base decimal a binaria

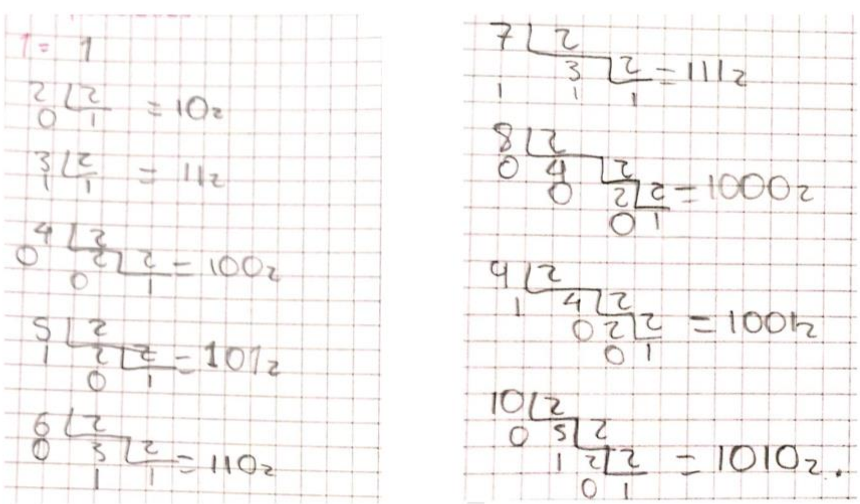


Fuente: Elaboración propia

Para ejercitar este proceso se pidió a los estudiantes pasar los números del uno al diez a base binaria, algunas de las respuestas de los estudiantes fueron:

Figura 81.

Ejercicio de los estudiantes

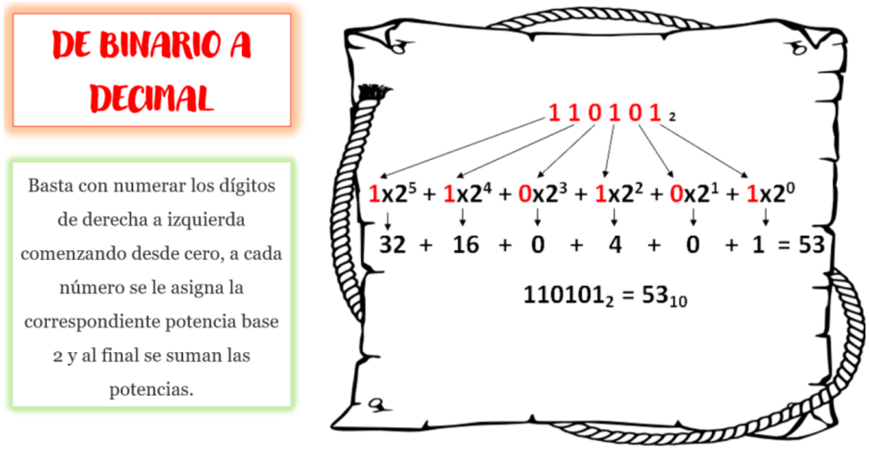


Fuente: Estudiantes de grado décimo Institución Alejandro de Humboldt

Luego, se procedió a explicar la conversión de binario a decimal:

Figura 82.

Conversiones base binaria a decimal

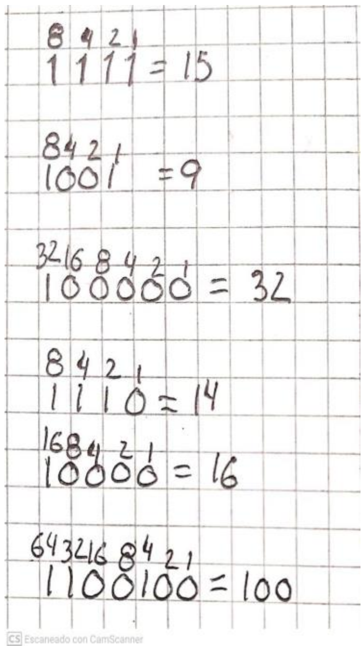


Fuente: Elaboración propia

Además, se enseñó a los estudiantes una forma rápida de hacer este proceso, esta forma consistía en escribir la sucesión $1, 2, 4, 8, \ldots$, es decir, la sucesión 2^n encima de los números que forman el número binario de derecha a izquierda y sumar los números que se encuentran encima de cada 1 para obtener el número en base diez tal y como lo muestra la siguiente imagen:

Figura 83.

Ejercicio de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia

Explicado esto, se presentó la estrategia ganadora de la siguiente forma:

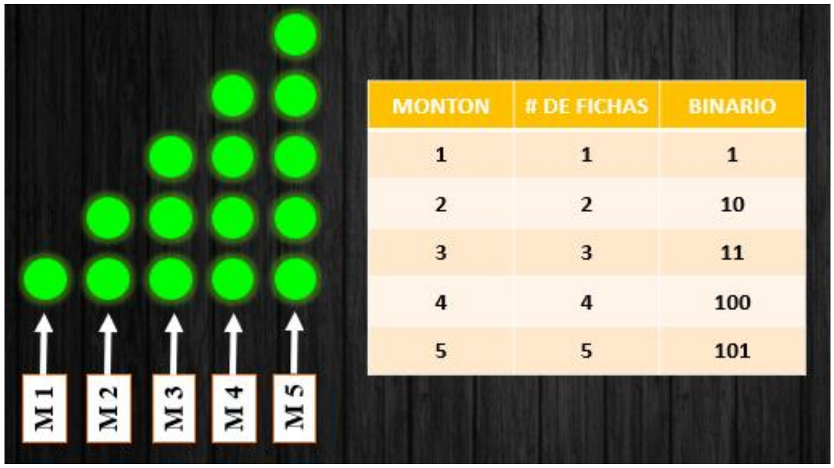
Pasos para ganar en el Nim

En este juego se define posición ganadora a aquella posición del juego que permite aplicar una estrategia ganadora contra su adversario y posición perdedora a aquella posición del juego que no lo permite. Sin embargo, ¿Cómo saber si una posición es perdedora o ganadora?

- Primero: escribir en binario el número de fichas que tiene cada montón en la siguiente tabla:

Figura 84.

Tabla del Nim

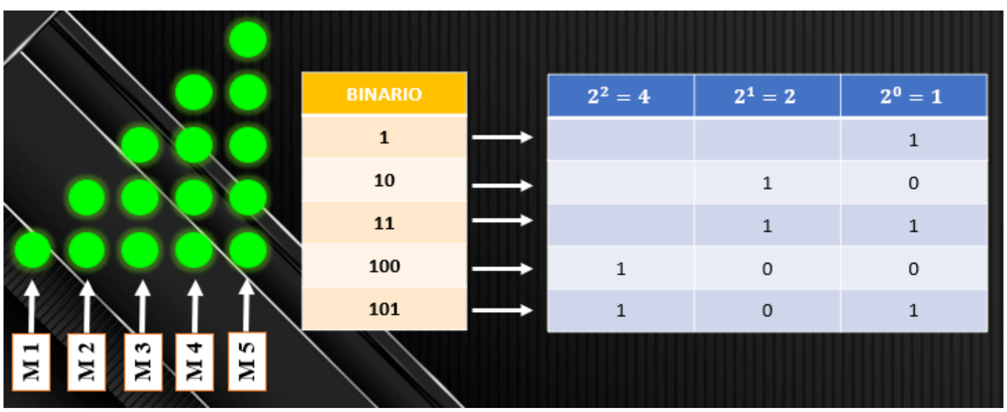


Fuente: Elaboración propia

- Segundo: colocar los números en binario uno encima de otro de forma que la cifra de la derecha de cada número esté en la misma columna como en la siguiente imagen:

Figura 85.

Señalamiento de columnas en la tabla del Nim



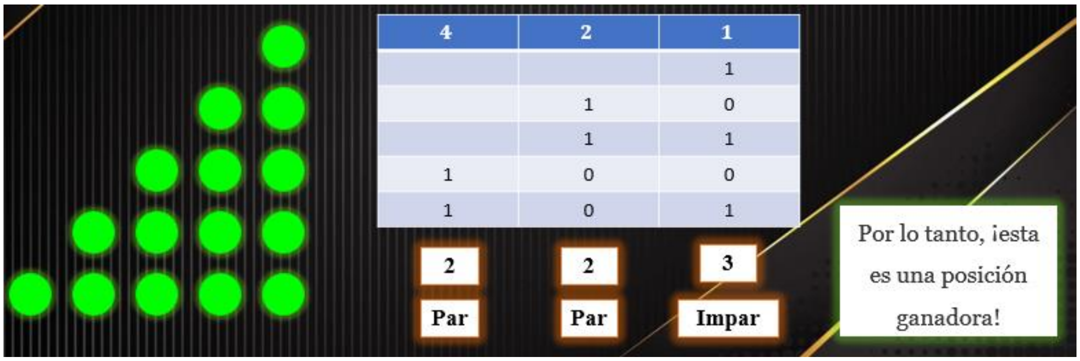
Fuente: Elaboración propia

Se marcan las 3 columnas con los números 4, 2 y 1 con el fin de señalar el valor de cada posición en binario, por ejemplo, en el grupo de 5 fichas aparece un 1 en las columnas del 4 y del 1 y efectivamente 4+1=5.

- Tercero: Contar el número de 1 que hay en cada columna. Si resulta que en todas las columnas hay un número par de 1, esta posición es perdedora y si al menos en una columna hay un número impar de 1, la posición es ganadora. La siguiente imagen muestra un ejemplo de una posición ganadora:

  Figura 86.

  Posición ganadora del Nim



  Fuente: Elaboración propia

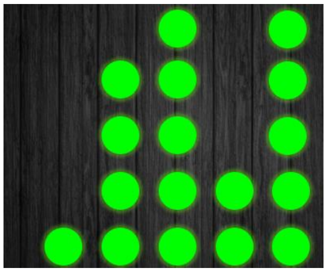
- Cuarto: si en un turno se tiene una posición ganadora, se debe jugar de forma que la posición que le quede al contrincante sea perdedora. Al repetir esto en todos tus turnos terminaras ganando.

Terminado de ver esta estrategia, surgió la pregunta ¿Qué hacer si les toca una posición perdedora?, a lo cual se contestó que el único paso a seguir es simplemente jugar esperando a que el contrario no conozca la estrategia ganadora y en algún momento les deje en una posición ganadora. Explicado esto, se procedió a aplicar la estrategia con el ejemplo hipotético propuesto en el Taller 4 (Anexo A).

Además, para lograr una mejor comprensión de la estrategia se jugó en el tablero, primero jugamos entre profesores, luego se invitó a un estudiante a jugar contra uno de nosotros y finalmente sugerimos que dos de ellos pasarán al tablero a jugar el nim, pero este no era como se lo presentó inicialmente, sin embargo, la estrategia debía seguir funcionando. El nim presentado a los estudiantes fue el siguiente:

Figura 87.

Otro Nim



Fuente: Elaboración propia

Esta actividad recreativa fue una de las más extensas, pero a la vez agradable, pues logró capturar la atención de todos los estudiantes en cada paso, se entusiasmaron al jugar y tratar de entender todas las tablas. Fue un logro ver a los estudiantes usar la estrategia ganadora correctamente, ellos analizaron, pensaron, calcularon, se emocionaron, compitieron y se divirtieron con este juego matemático.

Figura 88.

Evidencias fotográficas

Fuente: Elaboración propia

Bitácora #5: Conociendo las identidades trigonométricas

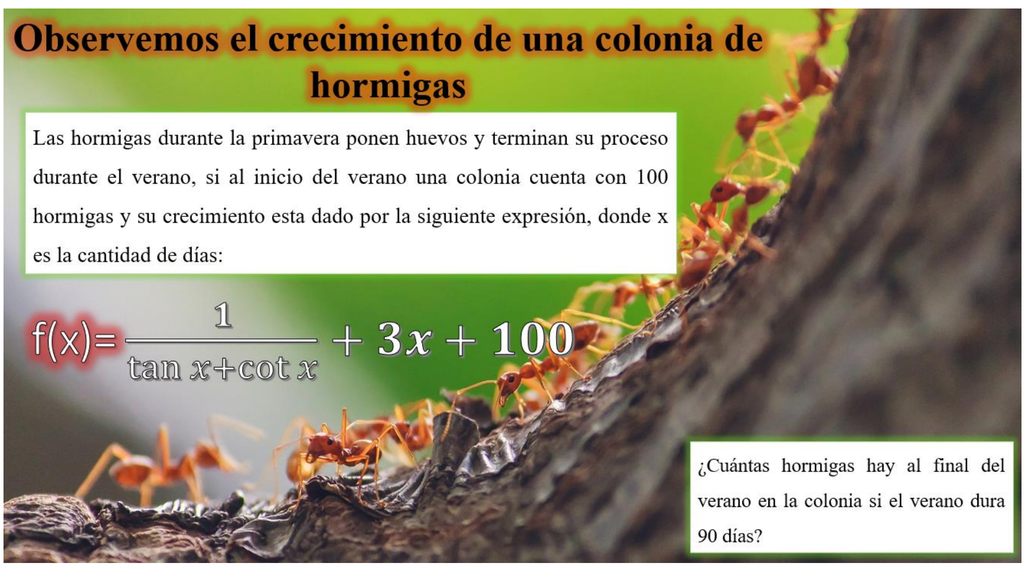
En este taller se presentó las identidades trigonométricas como igualdades que relacionan las funciones trigonométricas vistas en el anterior taller y se buscó que los estudiantes reconozcan que estas identidades se usan para simplificar expresiones trigonométricas con el objetivo de analizarlas o solucionar algún problema. Por lo tanto, se realiza la reflexión de este taller en los siguientes momentos:

Primer momento: Identidad trigonométrica fundamental.

Para un primer acercamiento a las identidades trigonométricas, se presentó un problema en el cual se debía hacer uso de la identidad trigonométrica fundamental, el problema planteado fue el siguiente:

Figura 89.

Observemos el crecimiento de una colonia de hormigas



Fuente: Elaboración propia

En primer lugar, los estudiantes leyeron el problema y entendieron que este les facilitaba una función que tenía una incógnita y como dato los 90 días que dura el verano. De modo que, propusieron remplazar la variable x por 90 en la función dada y así el problema estaría resuelto. Por tanto,

$$f(x) = \frac{1}{\tan(x)+\cot(x)} + 3x + 100 \quad \rightarrow \quad f(90) = \frac{1}{\tan(90)+\cot(90)} + 3(90) + 100$$

En este momento los estudiantes recurrieron a hacer este cálculo en su calculadora, sin embargo, se encontraron con la indeterminación de la $tan(90)$, les dio “Error”, en este punto se recordó que la tangente de 90 es indeterminada, puesto que $\tan(90) = \frac{sen(90)}{cos(90)}$ y, por tanto, $\tan(90) = \frac{1}{0}$ lo que lleva a la indeterminación, puesto que si $\frac{1}{0}$ diese como resultado un número, dicho número al multiplicarlo por cero, daría 1, pero todo número al multiplicarlo por cero es cero, esto es:

$$\frac{1}{0} = x \quad \rightarrow \quad 1 = x(0) = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$$

Luego de esta explicación, los estudiantes notaron que este problema no se podía resolver como lo planearon, por lo que se explicó un proceso de simplificación en la función dada comentándoles que el objetivo de este taller era ver la utilidad de usar algunas identidades trigonométricas para simplificar expresiones como la anterior. De manera que, se procedió a mostrar el siguiente proceso:

$$f(x) = \frac{1}{\tan(x) + \cot(x)} + 3(x) + 100$$

Como:

$$\tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \; y \cot(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$$

Entonces,

$$f(x) = \frac{1}{\frac{sen(x)}{cos(x)} + \frac{\cos(x)}{sen(x)}} + 3(x) + 100$$

$$f(x) = \frac{1}{sen(x) \cdot sen(x) + \cos(x) \cdot \cos(x)} + 3(x) + 100$$

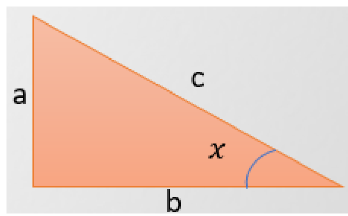
$$f(x) = \frac{1}{sen^2(x) + \cos^2(x)} + 3(x) + 100$$

En ese momento, se tomó de referencia a Figueroa (2010) para explicar a los estudiantes como surge la identidad trigonométrica fundamental con los siguientes pasos:

Paso 1. Apoyémonos en el siguiente triángulo rectángulo:

Figura 90.

Triángulo rectángulo



Fuente: Elaboración propia

Paso 2. Hallemos el seno y coseno del ángulo x y los elevamos al cuadrado:

$$\text{Sin}\, x = \frac{a}{c}\ y\ \cos x = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{a^2}{c^2}\ y\ \cos^2 x = \frac{b^2}{c^2}$$

Paso 3. Sumemos el seno y coseno elevados al cuadrado y simplifiquemos haciendo uso del teorema de Pitágoras:

Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Por lo tanto,

$$sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

En este punto, se comentó que la anterior identidad es conocida como la identidad trigonométrica fundamental, la cual es una de las más usadas en matemáticas.

Con todo y lo anterior, se regresó al problema, donde:

$$f(x) = \frac{1}{sen^2(x) + \cos^2(x)} + 3(x) + 100$$

$$f(x) = \frac{1}{1} + 3(x) + 100 = 3(x) + 101$$

Luego, sencillamente se remplazó la x por 90 y se tuvo el resultado de 370, por lo que se concluyó que al final del verano la colonia contaba con 370 hormigas.

Segundo momento: ¿Cómo se obtienen algunas identidades trigonométricas?

Vista la identidad trigonométrica fundamental, se mostró otras identidades importantes como las siguientes:

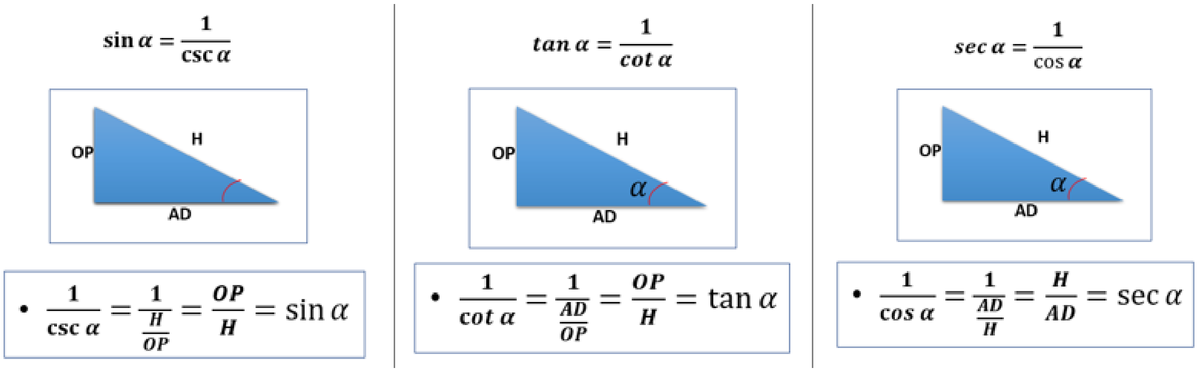
Identidades trigonométricas reciprocas.

$\sin x = \frac{1}{\csc x}$	$sec\, x = \frac{1}{\cos x}$
$csc\, x = \frac{1}{sen\, x}$	$\tan x = \frac{1}{cot\, x}$
$cos\, x = \frac{1}{\sec x}$	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

En esta parte, los estudiantes observaron el surgimiento de estas identidades a partir del triángulo rectángulo de la siguiente forma:

Figura 91.

Prueba de algunas identidades trigonométricas



Fuente: Elaboración propia

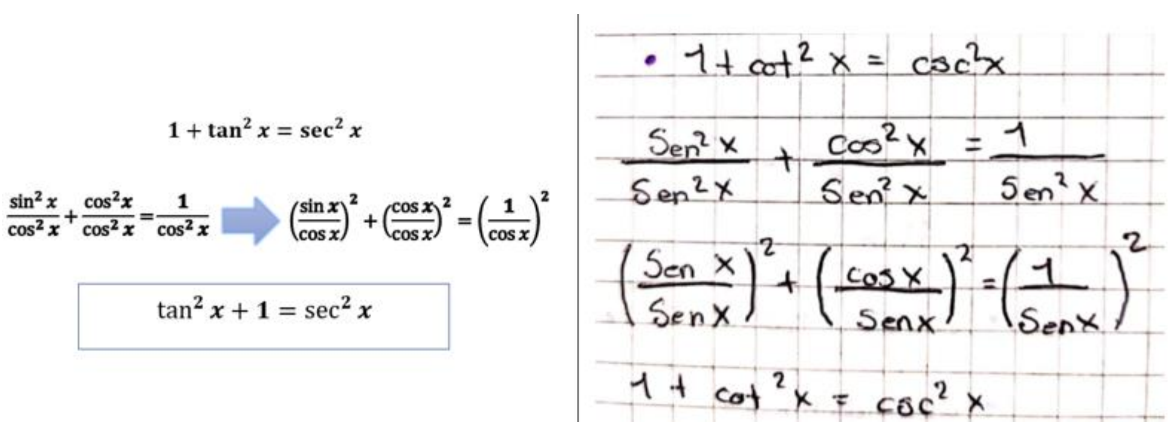
Continuando con el tema, también se presentó las identidades trigonométricas pitagóricas:

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$	$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

En este momento se explicó la obtención de una de las anteriores identidades y se dejó que los estudiantes obtuvieran análogamente la otra identidad.

Figura 92.

Prueba y solución de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia

Luego, se presentó las siguientes identidades para valores negativos:

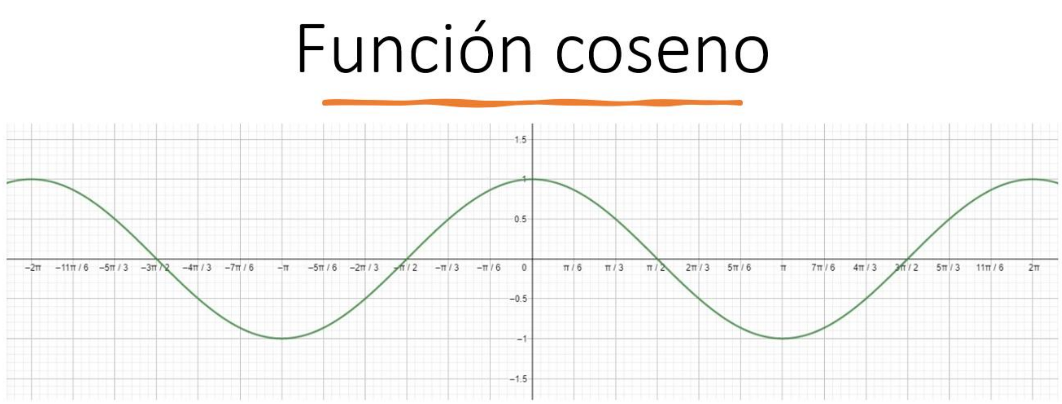
$cos(-x) = \cos x$ $sen(-x) = -\operatorname{sen} x$ $tan(-x) = -\tan x$	$sec(-x) = -\sec x$ $csc(-x) = -csc\, x$ $cot(-x) = -\cot x$

En este momento se recurrió a las definiciones de función par e impar, por lo que se explicó que las funciones pares son aquellas que son simétricas con respecto al eje y, de manera que todo lo que está a la derecha del eje y, se refleja hacia la izquierda, generando un efecto tipo espejo, además una función es par si, para cada x en el dominio de $f, f\ (-\ x)\ =\ f\ (x)$. En cambio, aquellas funciones que son impares tienen una simetría de 180°, es decir, que lo que se encuentra a la derecha del eje y, también está en el lado izquierdo pero girado 180°, además una función es impar si, para cada x en el dominio de $f, f\ (-\ x)\ =\ -\ f\ (x)$.

Enseguida, se mostró a los estudiantes algunas gráficas de las funciones trigonométricas en las cuales debían identificar si correspondían a funciones pares o impares.

Figura 93.

Función coseno



Fuente: Elaboración propia

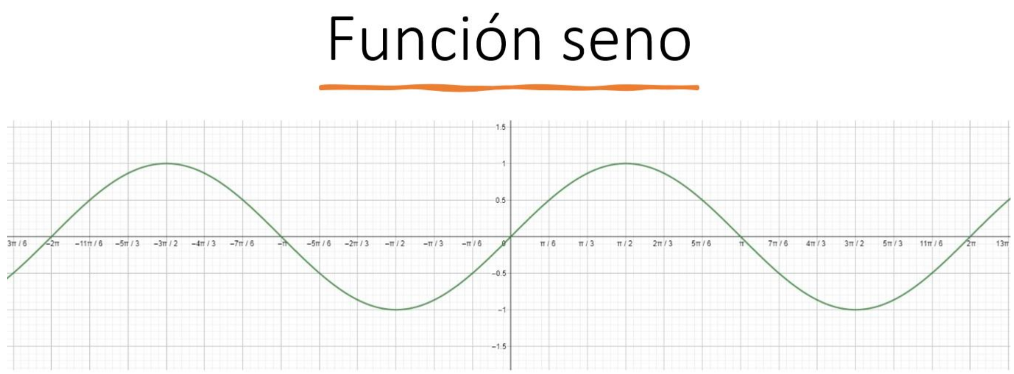
En la anterior función los estudiantes reconocieron el efecto espejo, por lo que la identificaron como una función par, de manera que $cos(-x) = cos(x)$, comprobando que, en efecto esto se cumplía tomando algunos ejemplos como:

$$cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$cos(-\pi) = -1 = cos(\pi)$$

Figura 94.

Función seno

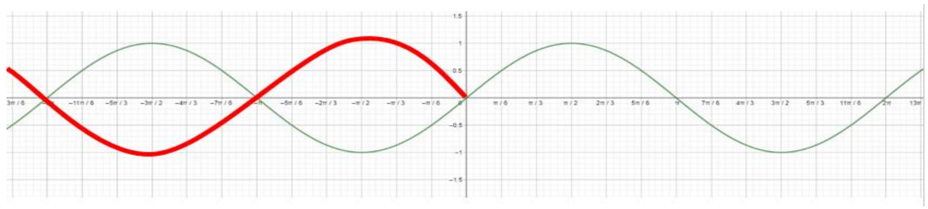


Fuente: Elaboración propia

La anterior función generó controversia en los estudiantes, ya que no fue sencillo identificar si la función era par o impar, puesto que algunos miraron la misma figura a la izquierda como a la derecha del eje y. En este punto, se recordó que una función par es aquella que genera el efecto espejo teniendo como referencia el eje y, por lo que se pidió que observaran que del origen hacia la derecha la función empieza tomando valores positivos en y, sin embargo, del origen hacia la izquierda empieza tomando valores negativos, además, se indicó que si esta función fuese par debería pasar por la línea roja en la parte izquierda respecto al eje y:

Figura 95.

Función par o impar

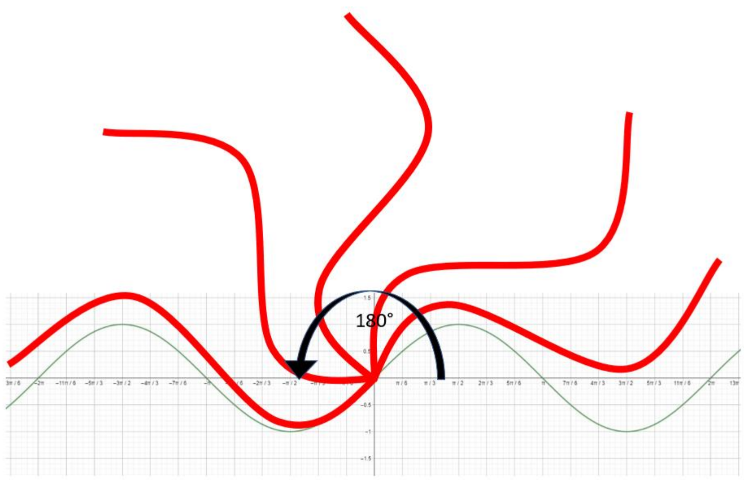


Fuente: Elaboración propia

Por consiguiente, se revisó si la función seno era impar, se recordó que una función es impar si la gráfica rota simétricamente 180° con respecto al origen, por lo que fue necesario apoyarse de la siguiente ilustración:

Figura 96.

Prueba y solución de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia

En efecto, se observó que la gráfica cumplía con la definición de función impar y también se comprobó que $sen(-x) = -sen(x)$ con algunos ejemplos:

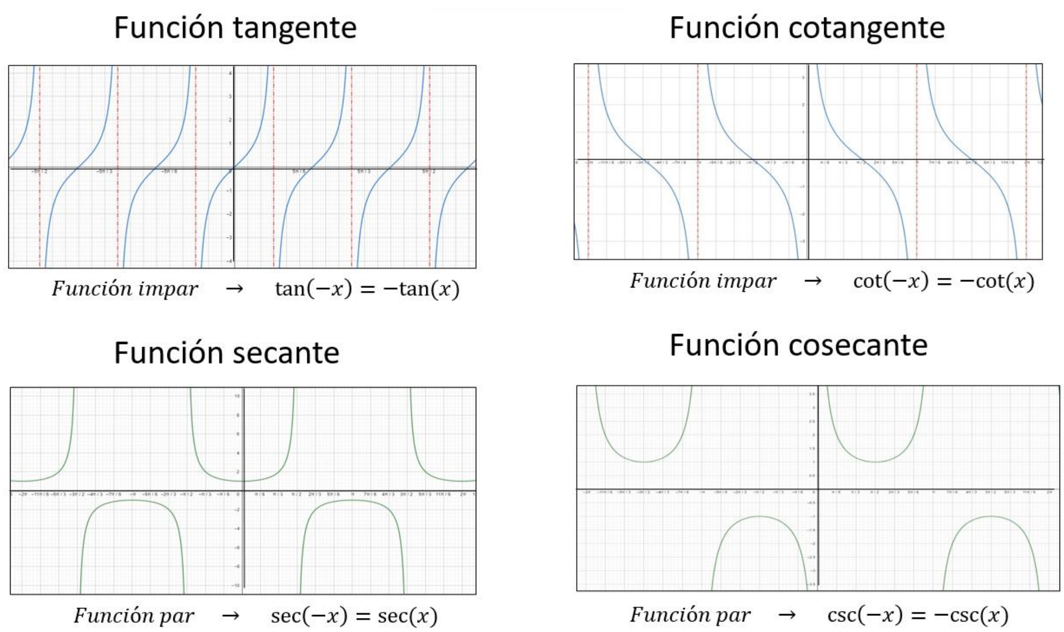
$$sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$sen(-\pi) = 0 = -sen(\pi)$$

Por último, se mostró otras graficas donde los estudiantes identificaron de la misma forma si una función era par o impar.

Figura 97.

Graficas de funciones trigonométricas



Fuente: Elaboración propia

Con respecto a estos ejercicios fue placentero observar cómo los estudiantes interiorizaron estas definiciones, pues para identificar cuando una función es par, lo asociaron al efecto espejo y para el caso de la función impar fue interesante ver como intentaban girar la función a 180° respecto al origen, tal y como se lo mostró en la figura explicativa.

Finalmente, se mostró las siguientes identidades trigonométricas que les sirvieron más adelante para desarrollar la actividad final.

Identidades trigonométricas de la suma.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Identidades trigonométricas del ángulo doble.

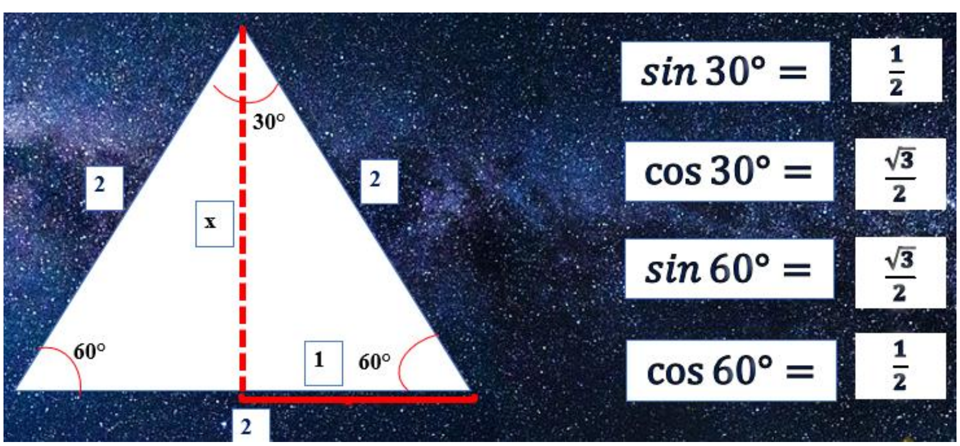
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$	$\cos(2x) = 1 - \sin^2 x$ $tan(2x) = \dfrac{2\,tanx}{1 - tan^2 x}$

Tercer momento: ¿Cómo obtener el seno y coseno de los ángulos notables sin el uso de calculadora?

En este momento se comentó a los estudiantes que los ángulos notables son aquellos ángulos más usados que aparecen en muchos problemas de la vida cotidiana, como en carpintería, topografía, construcción, etc. Estos ángulos son los de 0°, 30°, 45°, 60° y 90°, en este taller los estudiantes aprendieron a obtener estos ángulos de forma sencilla. Por consiguiente, se procedió a explicar este tema basado en Islas, et al. (2017) de la siguiente forma:

Figura 98.

Como hallar el sen y cos de 30° y 60° sin calculadora

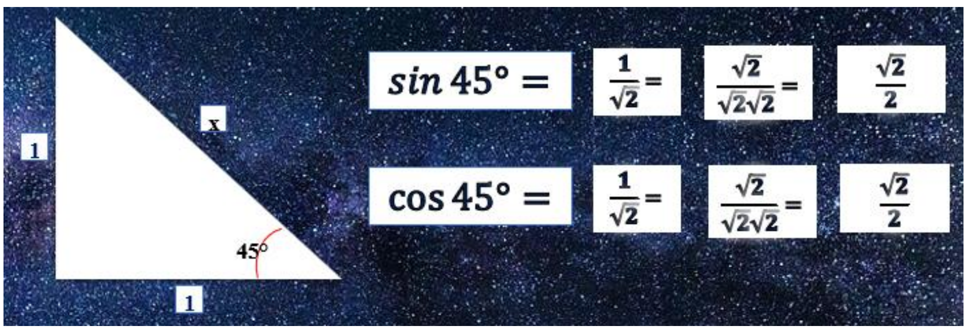


Fuente: Elaboración propia

Con la anterior imagen se explicó que para hallar el seno y coseno de 30° y 60° primeramente debemos apoyarnos en un triángulo equilátero de lado 2, se recurrió a este triángulo porque tiene todos sus lados y ángulos iguales, además, la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° por lo que cada ángulo del triángulo equilátero mide 60°. En segundo lugar, bisecamos un ángulo de forma que quedan dos triángulos rectángulos tal y como lo indica la figura anterior, obteniendo así ángulos de 30° y 60°, a los cuales se les puede encontrar el seno y coseno por medio de las razones trigonométricas. Este procedimiento no fue difícil pues los estudiantes ya estaban familiarizados con estas definiciones, por lo que se halló primero el seno y coseno de 30° y los estudiantes encontraron el seno y coseno de 60° sin ningún problema.

Figura 99.

Como hallar el sen y cos de 45° sin calculadora

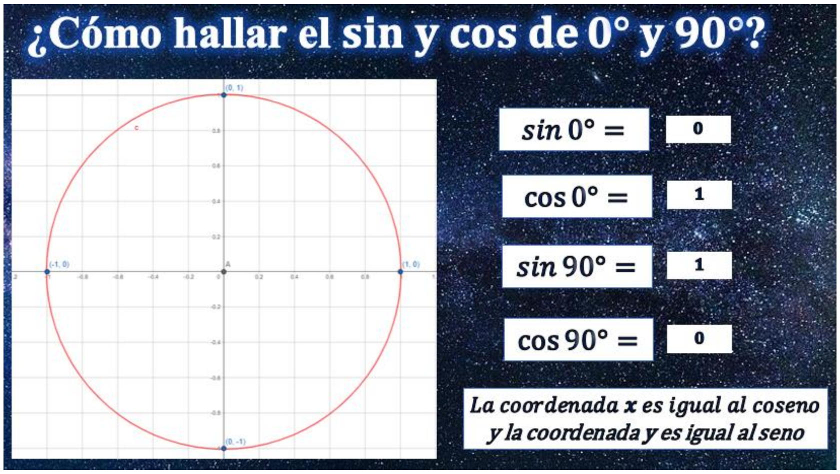


Fuente: Elaboración propia

Después, para hallar el seno y coseno de 45° se recurrió a un triángulo rectángulo de base y altura 1, puesto que este es un triángulo isósceles y además rectángulo, este tiene dos ángulos iguales y uno recto, es decir, un ángulo de 90° y dos de 45°. Luego, se aplicó la definición de las dos razones trigonométricas sin ningún problema, sin embargo, los estudiantes notaron que las respuestas que se obtuvo no eran las mismas que las indicadas en el círculo trigonométrico, por lo que se explicó que mediante el proceso de racionalización se llega a esas respuestas, este proceso consiste en eliminar las raíces que se encuentran en el denominador, multiplicando por esta misma raíz en el numerador y denominador tal y como lo mostró la figura anterior.

Figura 100.

Como hallar el sen y cos de 0° y 90° sin calculadora



Fuente: Elaboración propia

Para hallar el seno y coseno de 0° y 90° se recurrió al círculo trigonométrico y se recordó a los estudiantes lo visto en el anterior taller con respecto a que el seno corresponde a la coordenada y y el coseno a la coordenada x. De modo que, cuando el ángulo es 0° las coordenadas correspondientes son $(1,0)$ entonces el $sen(0°)$ es 0 y el $cos(0°)$ es 1 y para el ángulo de 90° las coordenadas serian $(0,1)$ y, por tanto, $sen(90°)$ es 1 y $cos(90°)$ es 0.

Explicada esta parte, se proyectó un video publicado por Pi-ensa Matematik. (2019) en clases donde se sugería un método sencillo para recordar cómo hallar las anteriores razones trigonométricas de los ángulos notables de otra forma.

Este método consistió en realizar un cuadro como el de la figura N° 101. En primer lugar, se colocan los números del 0 al 4 de derecha a izquierda en la primera fila y de izquierda a derecha en la segunda fila, luego, se saca la raíz cuadrada de todos los números, se divide cada raíz entre 2 y finalmente, se simplifica.

Figura 101.

Cuadro para hallar el sen y cos de los ángulos notables

	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	$\frac{\sqrt{0}}{2}=\frac{0}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$
Coseno	$\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$

Fuente: Elaboración propia

Cuarto momento: Sección de problemas.

En este momento se planteó algunos problemas para que los estudiantes apliquen todo lo visto en este taller, cabe resaltar que ellos recibieron una ficha donde se encontraban todas las identidades trigonométricas vistas anteriormente.

Problema 1

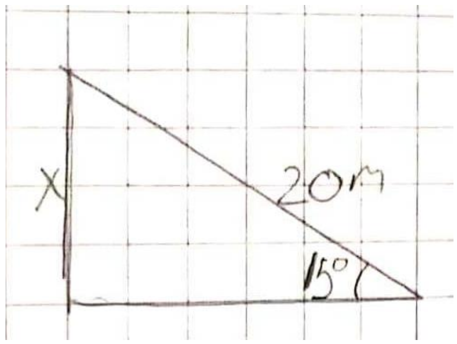
Una escalera de 20 metros se encuentra apoyada sobre una pared con un ángulo de inclinación de 15° con respecto al suelo. ¿Cuánto mide la pared en la que está apoyada la escalera?

- Comprensión del problema.

En este paso, los estudiantes recurrieron a la siguiente interpretación gráfica para identificar los datos e incógnita:

Figura 102.

Representación geométrica del problema



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

- Concepción de un plan.

Los estudiantes sabían claramente que la razón trigonométrica para solucionar este problema es $sen(15°)$ donde $sen(15°) = \frac{x}{20}$. En este punto se les pidió resolver el problema sin ayuda de la calculadora, utilizando los ángulos notables y las identidades trigonométricas vistas en el taller. Por lo que, se les hizo las siguientes preguntas: ¿podrían aplicar alguna función trigonométrica para resolver este problema?, ¿ayudara el saber las razones del seno y coseno de los ángulos notables?, a lo cual, los estudiantes no pudieron contestar, en este momento se encontraron perdidos, por lo que se procedió a ayudarles. Primeramente, se pidió que piensen el número 15 como la suma o resta de ángulos notables, a lo cual contestaron rápidamente:

$$60 - 45 = 15$$

$$45 - 30 = 15$$

Luego, se los invitó a revisar en su ficha que identidad trigonométrica trabaja con suma y restas de ángulos, a lo cual encontraron las siguientes:

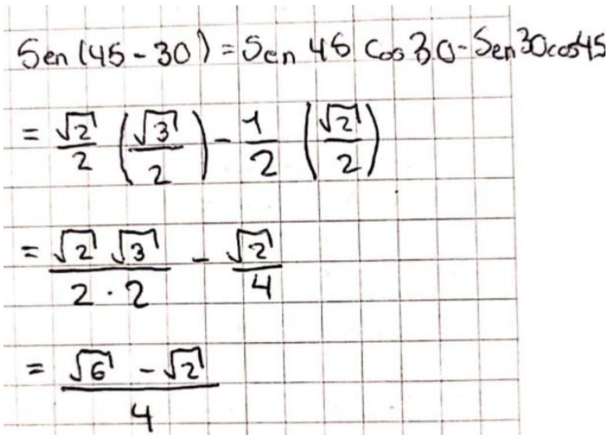
$$* \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm sin\, y\, cos\, x \qquad * \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp sin\, x \sin y$$

Fácilmente, identificaron que se debía usar la primera identidad para hallar el $sen(15°)$.

- Ejecución del plan.

Figura 103.

Solución de los estudiantes

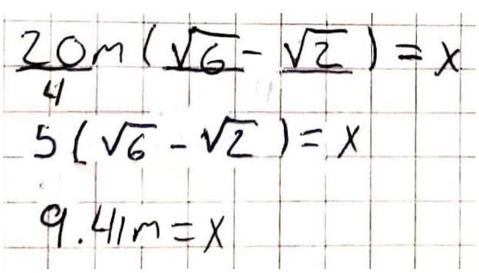


Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Teniendo el anterior resultado, los estudiantes procedieron a remplazar el $sen(15°)$ en la razón trigonométrica propuesta inicialmente donde $20 \cdot sen(15°) = x$

Figura 104.

Solución de los estudiantes



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

- Verificación.

En este paso se comentó que bastaba con indicar el resultado sin uso de la calculadora, su respuesta de $5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ estaba correcta y si alguno de ellos no tiene la posibilidad de calcular estos resultados algún día con ayuda de calculadora, está bien dejar respuestas expresadas de esa forma y un claro ejemplo es en sus próximas pruebas Icfes en las cuales no iban a poder usar calculadora, además la calculadora aproxima y no da un resultado exacto.

Problema 2

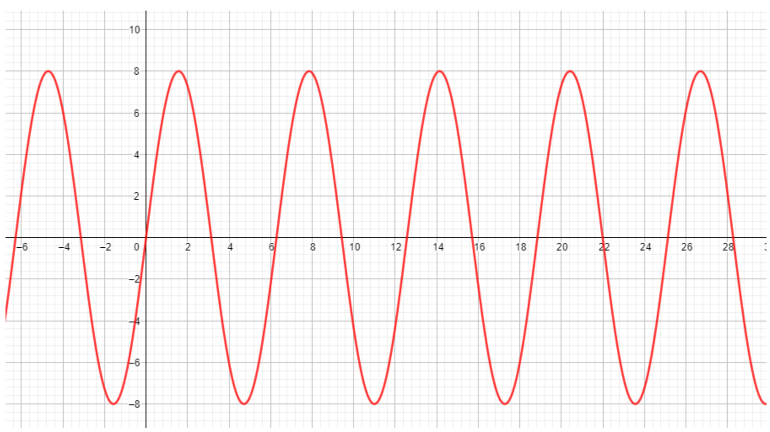
Un cuerpo vibra de manera vertical, con la ecuación: $y = 8 \cdot sen(x)$ donde y está en centímetros y x en segundos. ¿En qué posición se encuentra el cuerpo dentro de 120 segundos?

- Comprensión del problema

En este paso se pidió a los estudiantes que recordaran la gráfica de la función seno para que lograran asociar el movimiento del cuerpo a esta, ellos tenían claro la gráfica y el movimiento, sin embargo, recurrimos a indicársela en GeoGebra.

Figura 105.

Representación geométrica del problema



Fuente: Elaboración propia

Además, en este problema reconocieron la siguiente información:

$$y = 8 \cdot sen(x)$$

$$x = 120\ seg$$

- Concepción de un plan

Los estudiantes notaron que el plan era remplazar 120 en la ecuación dada. Por lo que:

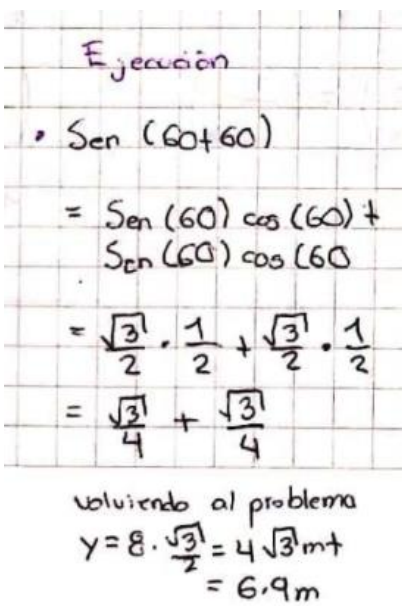
$$y = 8 \cdot sen(120)$$

El problema nuevamente consistió en hallar el $sen(120)$ sin usar la calculadora. A lo cual los estudiantes rápidamente se remitieron al anterior problema y sugirieron ver el número 120 como la suma de 60+60 para usar la misma identidad trigonométrica.

- Ejecución del plan

Figura 106.

Solución de los estudiantes



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Finalmente, se verifico la respuesta en la gráfica. En esta gráfica los estudiantes se dieron cuenta de que el cuerpo oscila entre los valores de -8 y 8 en el eje y, en donde a los 120 segundos el cuerpo se encuentra aproximadamente a 6.9 metros del origen.

- Verificación

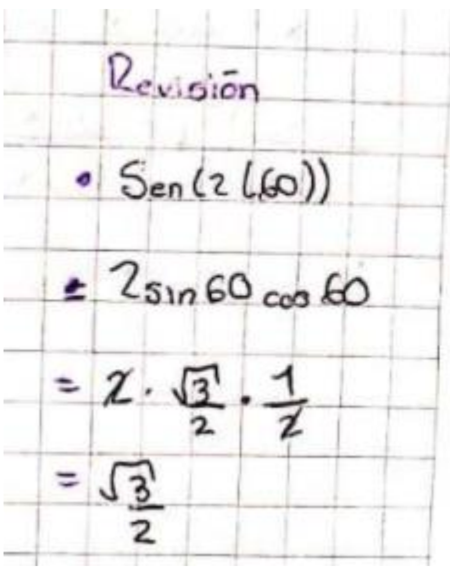
Este problema fue planteado con el fin de que los estudiantes usaran la identidad trigonométrica del ángulo doble, por lo que se mostró la obtención de la fórmula del ángulo doble a partir de la identidad trigonométrica de la suma:

$$sen(\theta + \theta) = sen(\theta)\, cos(\theta) + cos(\theta)\, sen(\theta) = 2sen(\theta)\cos(\theta) = sen(2\theta)$$

De manera que, los estudiantes usaron esta identidad para nuevamente solucionar el problema.

Figura 107.

Solución del problema por medio de identidades trigonométricas



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Quinto Momento: Actividad recreativa "Cuatro en raya"

En este quinto taller se presentó la actividad recreativa tomada de García (2017) llamada "Cuatro en raya trigonométrico". Este juego tenía el objetivo de divertir a los estudiantes mientras utilizan las identidades trigonométricas.

En este juego se usó el tablero de la figura N° 108, se estableció el orden de jugada usando una moneda y se lo explicó a los estudiantes de la siguiente forma: quien coloque 4 fichas en línea vertical, horizontal o diagonalmente gana. Cada jugador según su orden elige una casilla del tablero, para ocuparla debe hallar el valor de la razón que aparece o simplificar la expresión trigonométrica de la casilla y los jugadores implicados deciden si el valor hallado por cada estudiante es correcto o no. Si la respuesta es correcta, el jugador ocupa la casilla, si no lo es, el jugador pierde su turno. Gana el que consigue hacer "Cuatro en raya".

Figura 108.

Cuatro en raya trigonométrico

$sin^2 x + \cos^2 x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\sin 75°$	$\cos 75°$	$1 + tan^2 x$	$\frac{1}{sen\, x}$
$\frac{1 + cos(2x)}{2}$	$1 - sin^2 x$	$\frac{1 - cos(2x)}{2}$	$\tan 60°$	$\frac{tan\, x \pm tan\, y}{1 \mp tan\, x\, tan\, y}$	$\cos 120°$
$csc^2 x$	$\frac{1}{sen\, x}$	$\sin x \cdot \cot x$	$sin(-x)$	$\sec 30°$	$tan(2x)$
$sin(x \pm y)$	$\csc 60°$	$\sin 360°$	$cos(x \pm y)$	$\cos 15°$	$\frac{1}{csc\, x}$
$\cos(-x)$	$\frac{1 - cos(2x)}{1 - cos(2x)}$	$\frac{1}{cos\, x}$	$cos^2 x - sin^2 x$	$\tan 15°$	$\tan(-x)$
$\frac{1}{cot\, x}$	$sec(-x)$	$\cos x \cdot \tan x$	$\cos 135°$	$sin(2x)$	$\tan 120°$

Fuente: Elaboración propia

Ejecución del juego

Figura 109.

Evidencias fotográficas

Fuente: Elaboración propia

Mientras los estudiantes jugaban se dieron cuenta que este juego se parecía al famoso "triqui" por lo que en cada jugada trataban de dañar el camino de su rival y esto lo conseguían respondiendo correctamente a lo que se les pedía. Es importante mencionar que tuvieron que recurrir a su ficha de identidades trigonométricas y también al cuadro de ángulos notables para responder correctamente.

Esta actividad fue exitosa porque se logró que los estudiantes resolvieran todas las casillas del juego, se divirtieron buscando las respuestas, aprendieron, y además compitieron con sus compañeros hasta que hubo un ganador. Cabe resaltar que no todos llegaron a la respuesta rápidamente y fue en esos momentos en los que se los apoyó para que encontraran la respuesta correcta y no perdieran su turno.

Bitácora #6: Descubramos la ley de senos y cosenos

En este último taller se dio a conocer a los estudiantes el surgimiento de la ley de senos y cosenos. Anteriormente, se vio que las razones trigonométricas sirven para la resolución de triángulos rectángulos, sin embargo, con estas leyes se mostró a los estudiantes que también se pueden solucionar triángulos que no necesariamente sean rectángulos.

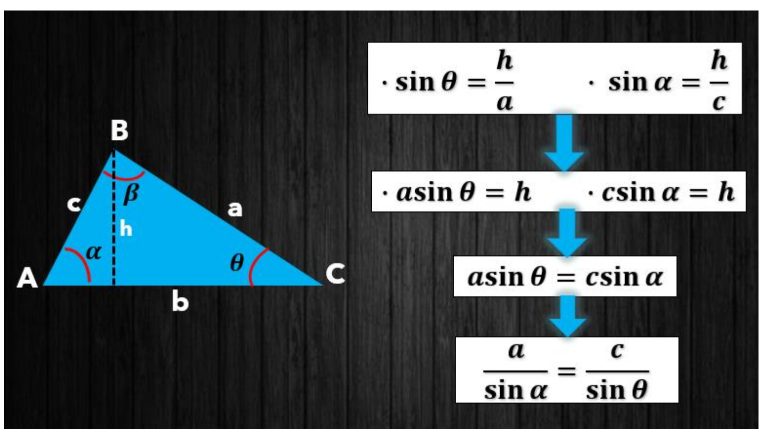
Por consiguiente, se presenta la respectiva reflexión de este taller en cuatro momentos:

Primer momento: Descubriendo la ley de senos y cosenos.

En este primer momento, se guio a los estudiantes para la obtención de la ley de senos y cosenos basados en la información expuesta por Figueroa (2010). Para llegar a la ley de senos, en primer lugar, se tomó un triángulo cualquiera en el cual se identificaron ángulos, lados y vértices, en segundo lugar, se trazó una altura del triángulo, la cual lo dividió en dos triángulos rectángulos, en tercer lugar, se pidió a los estudiantes que hallen el seno de dos determinados ángulos de los triángulos rectángulos, para así, continuar despejando y llegar a la primera igualdad de la ley de senos, este proceso lo indica la siguiente figura:

Figura 110.

Prueba de la ley de senos, parte 1

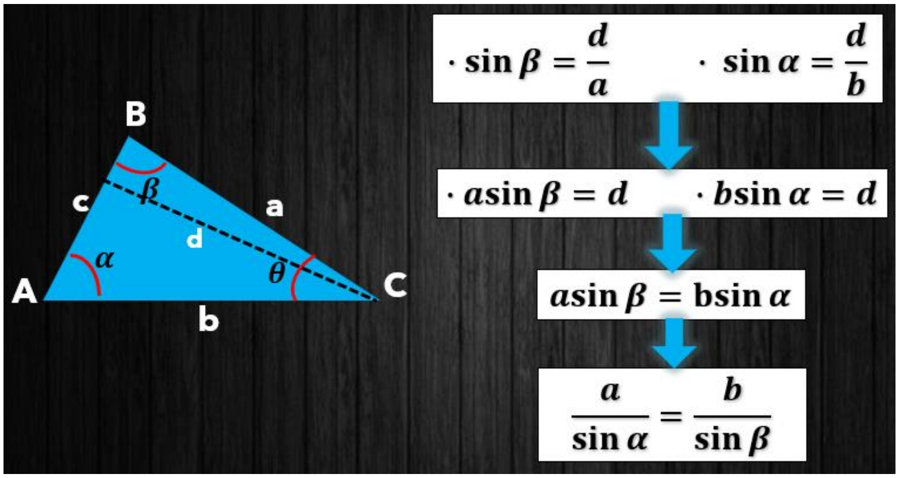


Fuente: Elaboración propia

Al llegar a este punto, se comentó a los estudiantes que en la ley de senos faltaba una igualdad que tiene relación con el ángulo β y para llegar a ella, lo primero que se hizo fue tomar otra altura en el triángulo original y seguir el mismo proceso anterior de la siguiente forma:

Figura 111.

Prueba de la ley de senos, parte 2

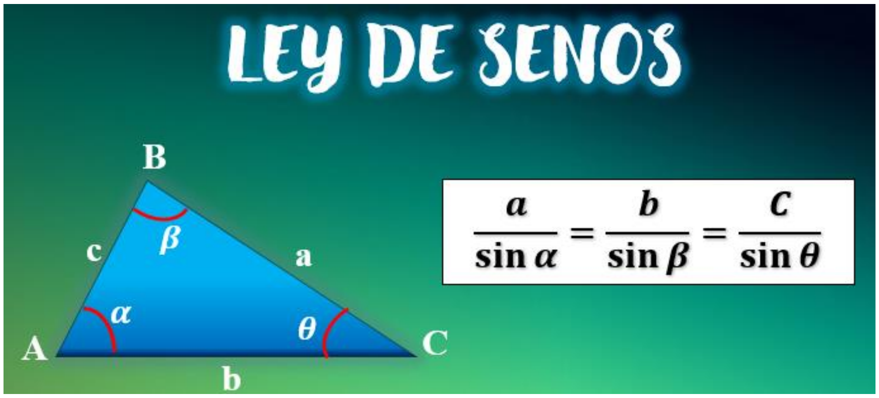


Fuente: Elaboración propia

De modo que, la ley de senos se enunció de la siguiente forma:

Figura 112.

Ley de senos

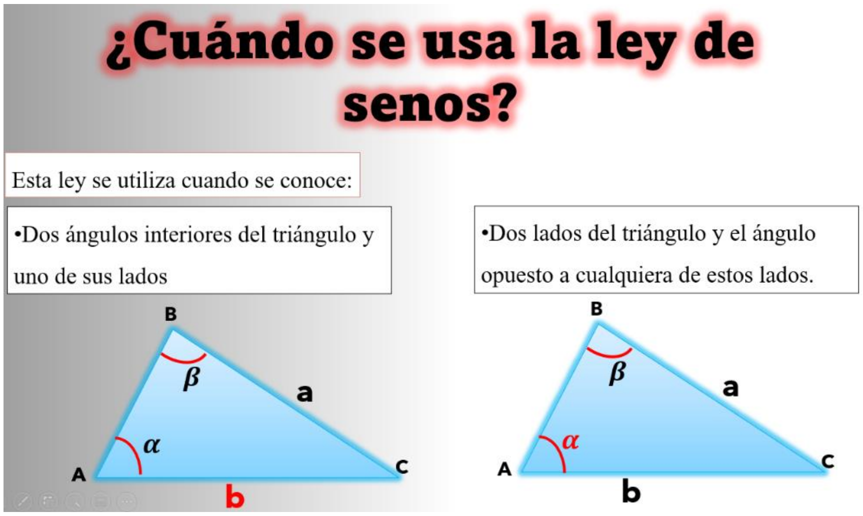


Fuente: Elaboración propia

Luego, para que los estudiantes recuerden esta ley, se comentó que, un lado del triángulo sobre el seno de su ángulo opuesto es igual a otro lado sobre el seno de su respectivo ángulo opuesto y se enfatizó en los casos en los que se usa esta ley de senos de la siguiente manera:

Figura 113.

Uso de la ley de senos

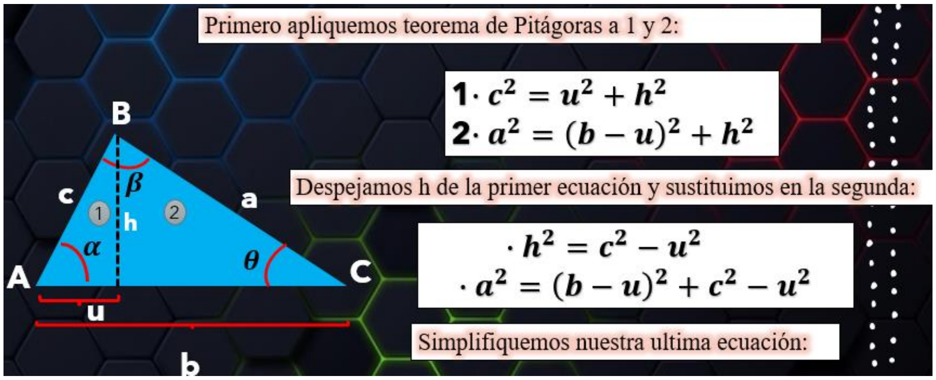


Fuente: Elaboración propia

Por consiguiente, se guio a los estudiantes para hallar la ley de cosenos de la misma forma, haciendo uso de los siguientes pasos:

Figura 114.

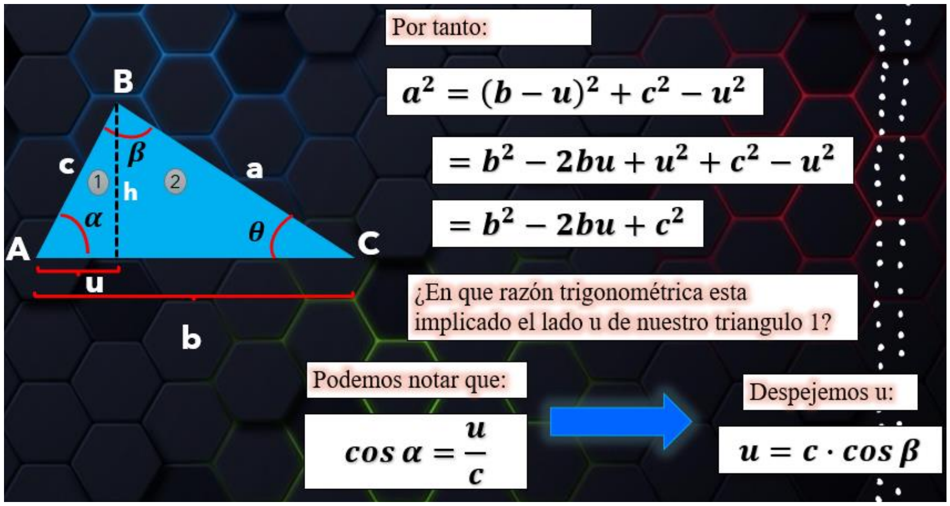
Prueba de la ley de cosenos, Parte 1



Fuente: Elaboración propia

Figura 115.

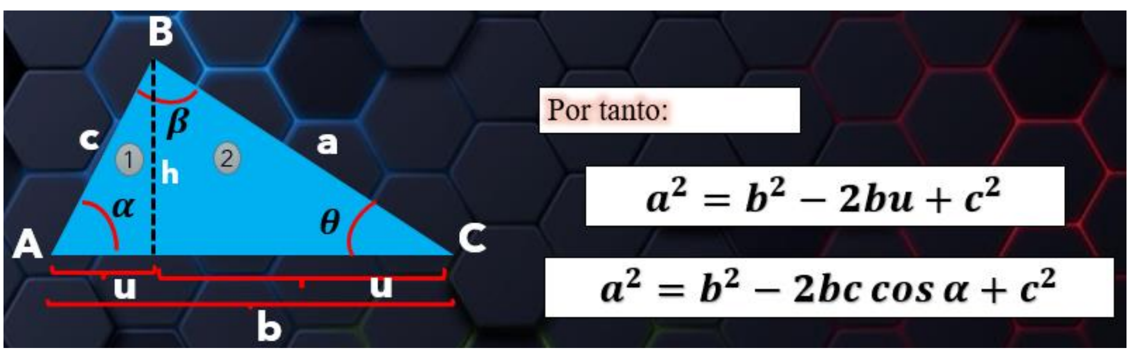
Prueba de la ley de cosenos, parte 2.



Fuente: Elaboración propia

Figura 116.

Prueba de la ley de cosenos, parte 3



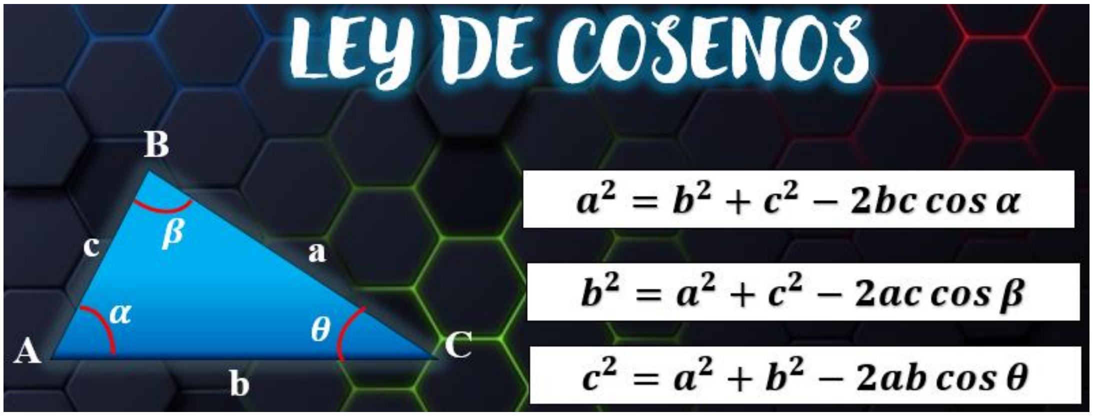
Fuente: Elaboración propia

Cabe resaltar que la obtención de las otras dos fórmulas de esta ley de cosenos es análoga y no se procedió a desarrollarlas detalladamente para no alargar este taller, sin embargo, se comentó a los estudiantes que bastaba con “girar” el triángulo para hallar las demás ecuaciones, de manera que, si se cambia a por b, b por c, c por a y α por β se obtiene la segunda ecuación $b^2 = a^2 - ac \cdot cos\ cos\ \beta\ + c^2$. Y análogamente se obtiene la última.

De modo que, la ley de senos se enunció de la siguiente forma:

Figura 117.

Ley de cosenos



Fuente: Elaboración propia

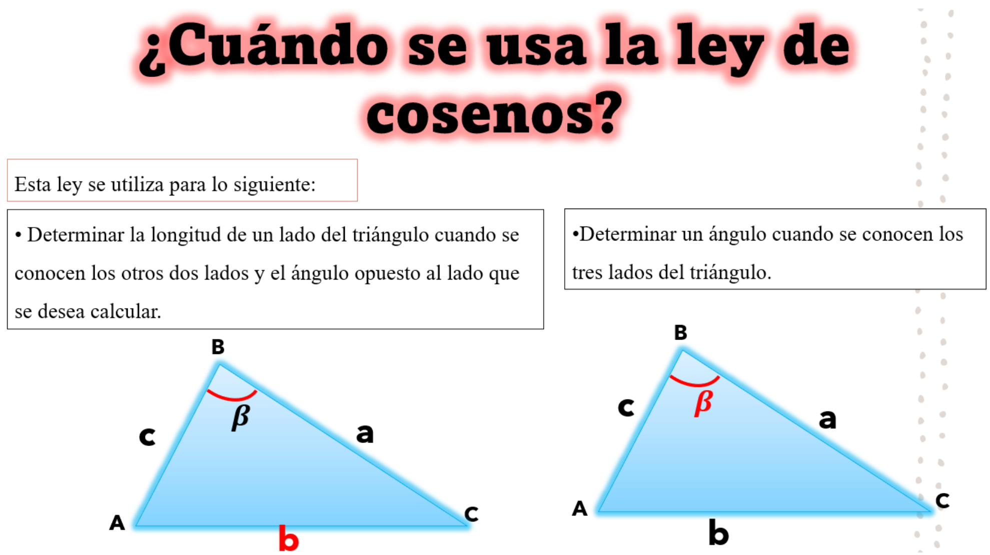
En este momento se advirtió a los estudiantes la importancia de no simplemente memorizar una fórmula, sino de entender lo que estas dicen. Así, se comentó que la ley de cosenos permite encontrar un lado al cuadrado sumando los cuadrados de los otros dos lados y restando el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

Luego, se propuso hallar esta ley de cosenos con un triángulo en el cual las letras eran todas diferentes a las usadas anteriormente, esto levantó gran controversia entre los estudiantes pues, creemos que no se habían enfrentado a un ejercicio de este tipo, pero finalmente hubo un acuerdo cuando acudieron al significado explicado anteriormente sobre la ley del coseno pues comprendieron que un lado al cuadrado independientemente del nombre se lo puede hallar en función de los otros dos lados y el ángulo entre ellos.

Por último, se presentó los casos en los que se usa esta ley de cosenos de la siguiente manera:

Figura 118.

Uso de la ley de cosenos



Fuente: Elaboración propia

Segundo momento: Resolución de problemas.

En esta sección los estudiantes aplicaron las leyes de senos y cosenos en los siguientes problemas:

Problema 1

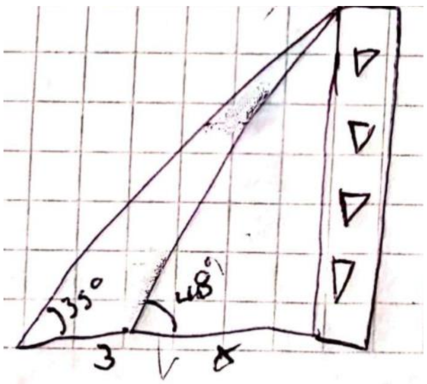
El siguiente problema es tomado de Sensei Math (2020): Una persona observa la cima de un edificio con un ángulo de elevación de 35º, luego camina 3 metros hacia el edificio y vuelve a observar la cima, pero ahora con un ángulo de elevación de 48º. Determinar la distancia que le falta recorrer para llegar al edificio.

- Comprensión del problema

En este paso los estudiantes notaron que este problema es similar a uno solucionado anteriormente en el Taller 4 (Anexo A), en dicho problema un montañista tomaba un ángulo de elevación a una montaña y luego al acercarse 200 m más hacia esta, medía nuevamente el ángulo con el fin de hallar su altura, la diferencia con este problema es que en lugar de buscar la altura se pretende hallar la distancia hacia un objeto. Con lo anterior, los estudiantes hicieron la siguiente representación donde identificaron los datos e incógnitas del problema:

Figura 119.

Representación geométrica



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

En este problema los estudiantes reconocieron dos triángulos rectángulos donde el lado común es la altura del edificio, al respecto se comentó que independientemente de que se centren en ver triángulos rectángulos para resolverlos se den cuenta que también pueden resolver cualquier triángulo que no necesariamente sea rectángulo con ayuda de la ley de senos y cosenos.

- Concepción de un plan

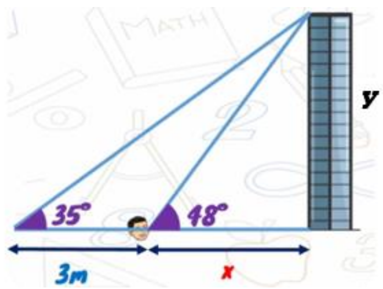
En este paso, se pidió a los estudiantes pensar en cómo solucionar este problema con la información aprendida hasta el momento, en este punto se hizo algunas preguntas como: ¿Es suficiente la información que da el problema para solucionarlo?, ¿se puede usar alguna razón trigonométrica?, ¿será que la ley de senos y cosenos ayuda a solucionar este problema? Y ¿será que este problema se soluciona de la misma manera que el de la montaña o se puede usar otro plan de solución? A lo cual, los estudiantes contestaron que posiblemente este problema se soluciona de la misma forma que el de la montaña usando un sistema de ecuaciones de dos por dos, ellos recordaron que era necesario usar la razón trigonométrica de la tangente aplicada a los dos triángulos rectángulos y luego resolver el sistema de ecuaciones, por lo que se procedió a hacerlo en el tablero con ayuda de todos.

- Ejecución del plan

En primer lugar, se representó el problema con la siguiente gráfica:

Figura 120.

Representación geométrica



Fuente: Sensei Math (2020)

$$tan\ (35°)\ = \frac{y}{3+x} \quad \rightarrow \quad y = tan\ (35°) \cdot (3+x)$$

$$tan\ (48°)\ = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = tan(48°)x$$

Luego, se igualó ambas ecuaciones y se despejó x.

$$tan\ (35°)\ \cdot (3+x) = tan(48°) \cdot x$$

$$0{,}70 \cdot (3+x) = 1{,}11 \cdot x$$

$$0{,}70 \cdot 3 + 0{,}70 \cdot x = 1{,}11 \cdot x$$

$$2.1 = 1{,}11x - 0{,}70x$$

$$2.1 = 0{,}41x$$

$$\frac{2.1}{0{,}41} = x$$

$$5.12mt = x$$

Por tanto, la distancia que le falta recorrer a la persona para llegar al edificio es de 5.12 metros.

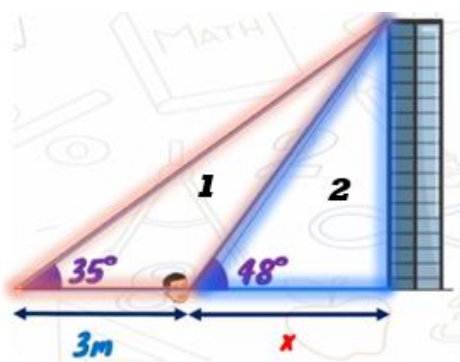
- Verificación

En este paso, se comentó a los estudiantes que su solución era correcta, sin embargo, estos problemas tenían el fin de reforzar la ley de senos y cosenos, por lo que se pidió pensar en otra forma de solucionar este problema aplicando esta temática.

Posteriormente, se centró a los estudiantes para que no vieran la figura N° 120 como dos triángulos rectángulos, sino como los siguientes dos triángulos que se podían solucionar con la ley de senos y cosenos:

Figura 121.

Representación geométrica



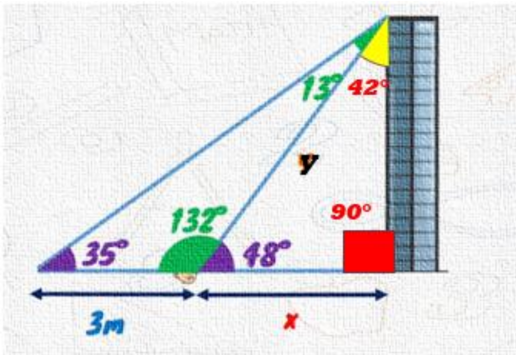
Fuente: Elaboración propia

Dicho esto, se recordó los casos donde usar las leyes de senos y cosenos anteriormente explicadas, sin embargo, se notó que los datos del problema no eran suficientes para aplicar las dos leyes directamente, por lo que se sugirió a los estudiantes buscar otros datos implícitos dados en la figura, por ejemplo, el ángulo de 90° del triángulo 2.

Lamentablemente, los estudiantes no tuvieron idea para hallar otro ángulo o lado en ese triángulo. Aquí es de gran importancia mencionar que en los talleres desarrollados se les había comentado en varias ocasiones que los ángulos suplementarios son los que sumados dan un ángulo de 180° y que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°. Esta información era la necesaria para encontrar otros datos en el gráfico, pero no la recordaron, por lo que se las recordó con representaciones gráficas y pudieron identificar los datos que faltaban en la siguiente figura:

Figura 122.

Representación geométrica



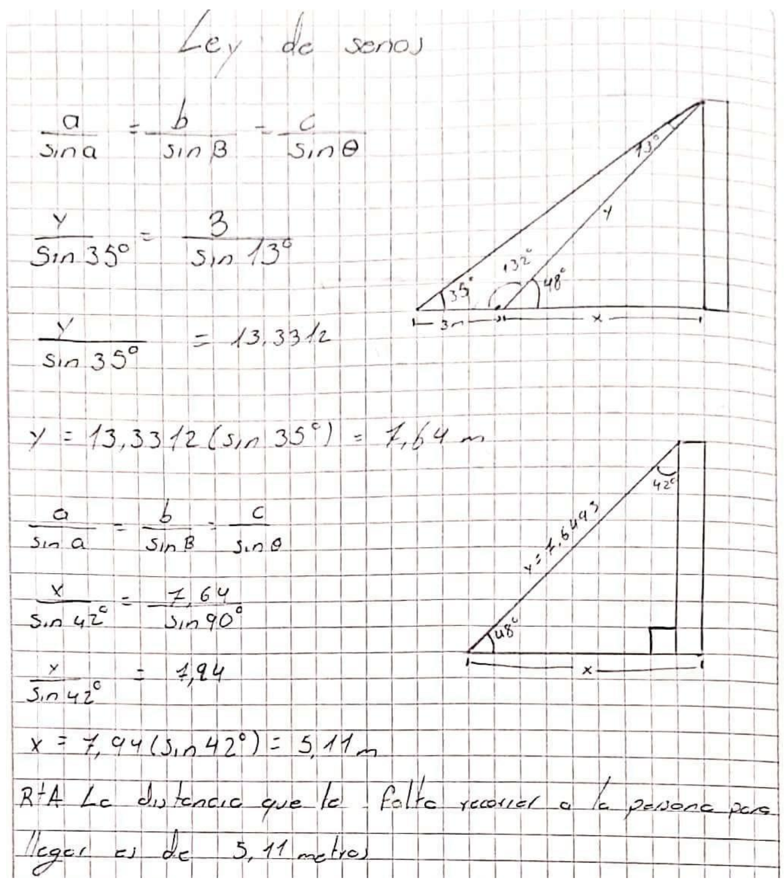
Fuente: Elaboración propia

Como breve conclusión de este problema creemos que, en algunas ocasiones, es necesario recordar a los estudiantes conocimientos que para nosotros son básicos, pero que para ellos no, pues en varias ocasiones no ven tan sencilla una solución como nosotros, con lo que nos dimos cuenta que siempre es necesario colocarnos en el papel de los estudiantes.

Por consiguiente, se insistió en la idea de un plan para solucionar el problema, por lo que se volvió a los casos de uso de las leyes de senos y cosenos, con lo que finalmente los estudiantes propusieron aplicar la ley de senos en el triángulo 1 para encontrar el lado y, y posteriormente utilizar esta misma ley en el triángulo 2 para encontrar el valor de x, de la siguiente forma:

Figura 123.

Solución de los estudiantes



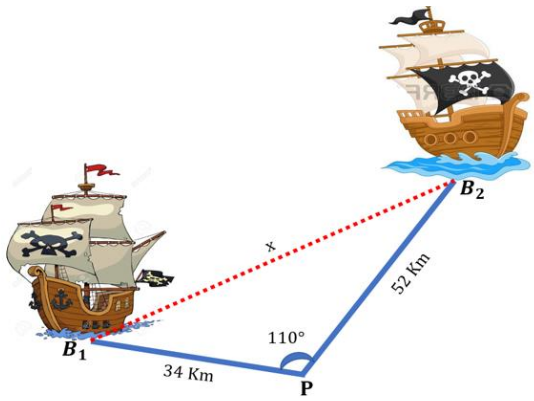
Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Problema 2

El siguiente problema fue tomado de Devia, E. & Luna, E. (s.f.): Dos barcos piratas salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110º. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto, como lo indica la figura siguiente. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?

Figura 124.

Representación gráfica del problema



Fuente: Elaboración propia

- Comprensión del problema

En este paso los estudiantes notaron que la figura formada por los barcos es un triángulo no rectángulo, por lo que las razones trigonométricas vistas en los anteriores talleres no se podían aplicar a este problema, también recordaron que la ley de senos y cosenos se aplican a todo tipo de triángulo. Además, reconocieron los siguientes datos e incógnita:

Datos: lado 1$= 34\ km$, lado 2 $= 52\ km$, ángulo $= 110°$ e Incógnita $= x$

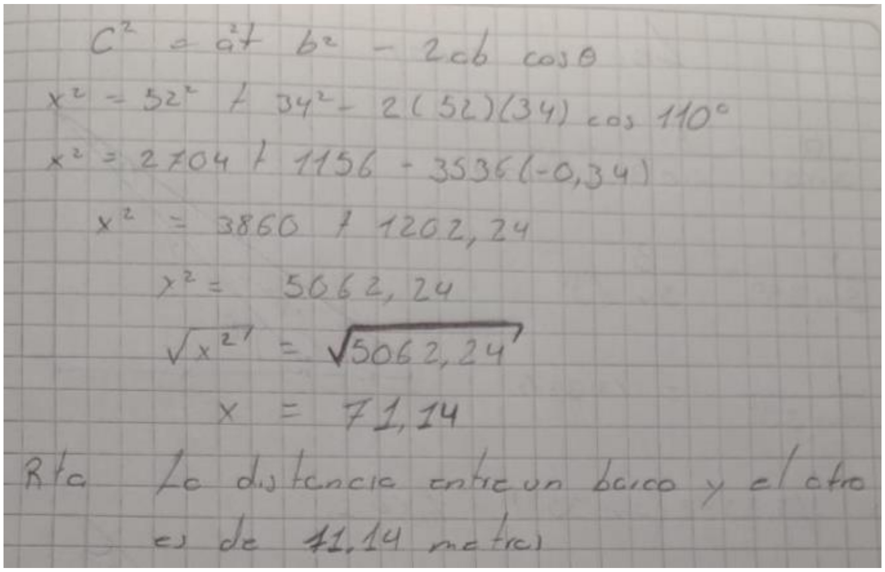
- Concepción de un plan

Los estudiantes tenían claro que se debían aplicar la ley de senos y cosenos para estos problemas, y visto que en el anterior ejercicio se recordaron los casos en los cuales se pueden aplicar estas leyes, no les fue difícil identificar que en este triángulo se tenían dos lados y el ángulo entre ellos que es justamente un caso en el que se puede aplicar la ley de cosenos, por lo que el plan fue usar esta ley para hallar la distancia entre los dos barcos.

- Ejecución del plan

Figura 125.

Solución de los estudiantes



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

- Verificación

En esta parte, se preguntó a los estudiantes si este problema se podría solucionar usando la ley de senos, a lo cual se revisó los casos para usarla y se llegó a que se necesitaba conocer otro ángulo para poder aplicarla.

Problema 3

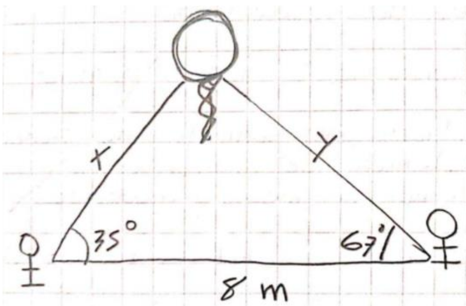
El siguiente ejercicio es planteado por Sensei Math (2020): Dos niños de la misma altura ven pasar un globo por encima de ellos con ángulos de elevación de 35° y 67º respectivamente. Si los niños están separados por una distancia de 8 metros, ¿a qué distancia se encuentra el globo de cada uno de ellos?, ¿a qué altura se encuentra el globo?

- Comprensión del problema

Luego de leer el problema cuidadosamente, los estudiantes propusieron hacer una representación gráfica para identificar los datos e incógnitas, de este modo la ilustración fue la siguiente:

Figura 126.

Representación geométrica



Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Es importante mencionar que los estudiantes al inicio pensaron que la altura del globo era la distancia de cada uno de los niños a este, por lo que se les comentó que esto no era correcto, puesto que el globo no estaba directamente sobre cada uno de ellos.

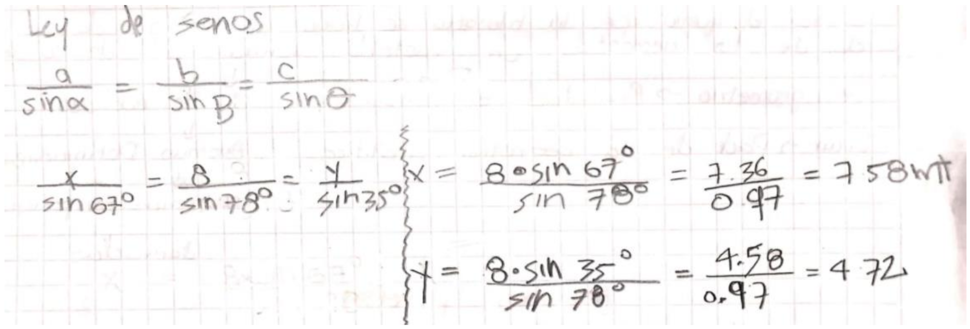
- Concepción de un plan

Dado que los estudiantes ya estaban familiarizados con los casos en los cuales se debe aplicar la ley de senos y cosenos, se decidieron a usar la ley de senos, puesto que el problema les brinda dos ángulos y un lado del triángulo. Y para hallar la altura del globo, sugirieron trazar una perpendicular al piso que pasara por el globo.

- Ejecución de un plan

Figura 127.

Solución de los estudiantes



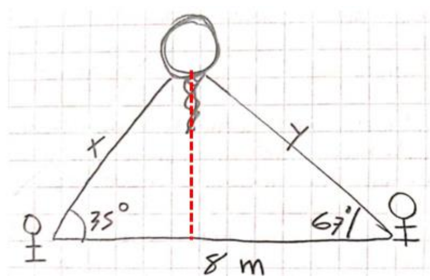
Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Por lo que las distancias de cada niño al globo fueron de 7.58 y 4.72 metros.

Luego, para hallar la altura del globo, propusieron la siguiente representación gráfica:

Figura 128.

Representación gráfica



Fuente: Elaboración propia

Dado que los estudiantes ya tenían los datos de x y y, procedieron a usar la razón trigonométrica del seno para hallar esta altura.

$$sen(35°) = \frac{h}{7.58} \quad \rightarrow \quad h = sen(35°)(7.58) = 4.34\ mt$$

Por lo que, la altura del piso al globo fue de 4.34 mt.

- Verificación

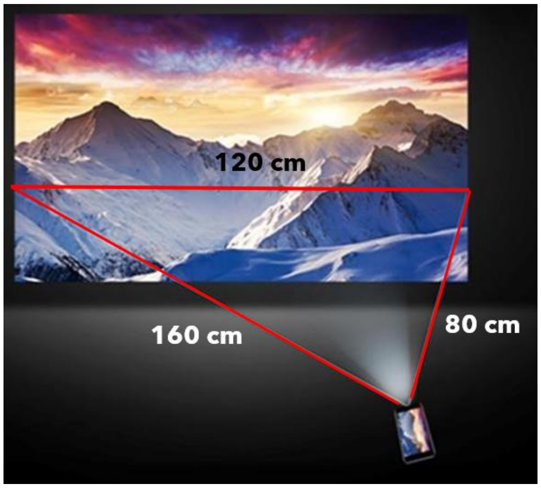
En esta parte se revisó que todos los pasos que hicieron los estudiantes estuvieran correctos, por lo que podemos inferir que muchos errores de los estudiantes han sido corregidos a lo largo de todos los problemas, teniendo éxito en estos últimos, sin indicar mayores dificultades.

Problema 4

Un proyector de películas proyecta una imagen tal y como lo muestra la figura. ¿Bajo qué ángulo el proyector está presentando la imagen?

Figura 129.

Representación gráfica del problema

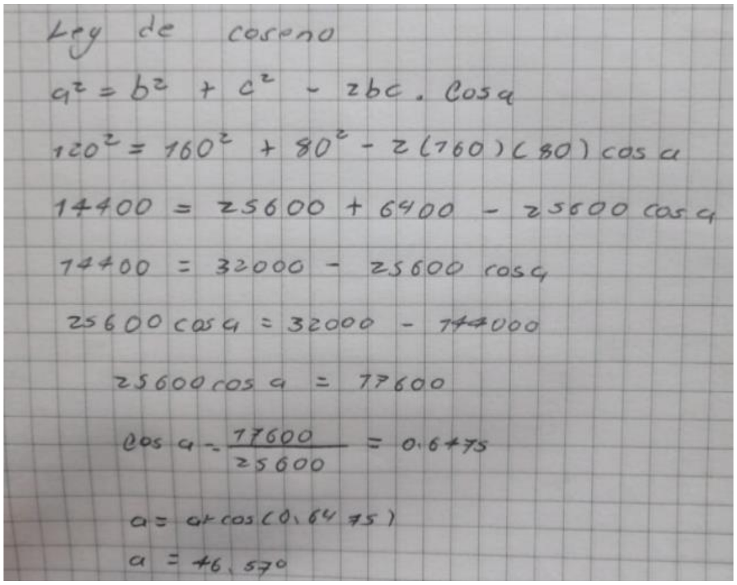


Fuente: Elaboración propia

En este problema los estudiantes identificaron los datos e incógnita, notando que se conocen los tres lados del triángulo, por lo que decidieron aplicar la ley de cosenos para encontrar el ángulo pedido. De modo que, la solución fue la siguiente:

Figura 130.

Solución de los estudiantes



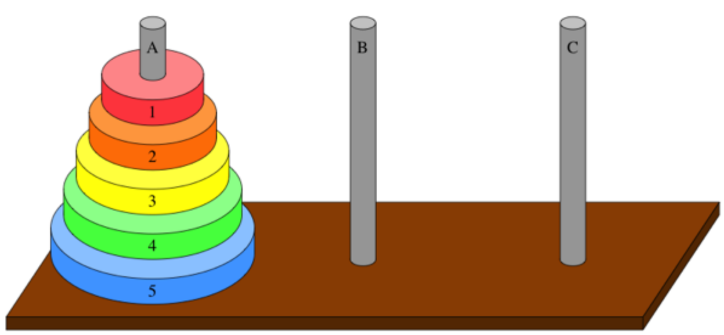
Fuente: Estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt

Tercer momento: Actividad recreativa "torres de Hanói"

Como actividad final se presentó el juego descrito por Torres de Hanói (2009), este consiste en pasar todos los discos de la primera torre hacia la tercera siguiendo solo tres reglas, la primera, solo se puede mover un disco a la vez, la segunda, un disco de mayor tamaño no puede estar sobre uno más pequeño que él mismo y la tercera, solo se puede desplazar el disco que se encuentre arriba en cada torre.

Figura 131.

Torres de Hanói



Fuente: Khan academy. (s.f.).

Para el desarrollo de este juego se recurrió a la aplicación llamada "tower of Hanoi" del creador Moller (2011), la cual se instaló en cada uno de los celulares de los estudiantes, esta aplicación tenía la siguiente interfaz:

Figura 132.

Interfaz de la aplicación "tower of Hanoi"

Nota. La aplicación cuenta la cantidad de movimientos hechos por el jugador. *Fuente:* Moller (2011)

Luego de instalar esta aplicación, se dio el tiempo necesario para jugar este juego, cabe resaltar que la aplicación permitía escoger el número de discos, por lo que todos los estudiantes iniciaron con tres discos y a medida que solucionaban el juego, pasaban a solucionar uno con mayor cantidad de discos. Todos lograron completar el juego con cuatro discos, cabe mencionar que un solo estudiante no se rindió y logró pasar los cinco discos en casi 300 movimientos, sin embargo, no pudieron encontrar una estrategia que les ayude a mover los discos con la menor cantidad de movimientos.

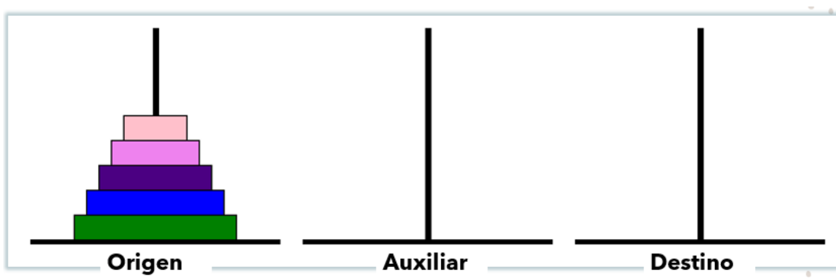
En esta actividad fue interesante ver competir a los estudiantes mientras se divertían jugando, a pesar de que hubo momentos en los que caían en un bucle del que no podían salir y optaban por reiniciar el juego, se puede inferir que, este juego desarrolló la agilidad, el proceso de modelación y el pensamiento matemático de los estudiantes buscando una estrategia ganadora que les ayude a pasar todos los discos de la primera torre a la última.

Luego de jugar entretenidamente el juego, se explicó dos estrategias ganadoras, según Torres de Hanói (2009), la estrategia ganadora depende del número de discos del problema:

Si se tiene un número par de discos, el primer movimiento debe ser colocar el disco más pequeño en la torre auxiliar, y en cada paso impar se le mueve a la siguiente torre a su derecha (o a la torre origen si está en la torre destino). La secuencia será: auxiliar, destino, origen, auxiliar, destino, origen, etc. Por otro lado, si se tiene un número impar de discos, el primer movimiento debe ser colocar el disco más pequeño en la torre destino, y en cada paso impar se le mueve a la siguiente pila a su izquierda (o a la torre destino si está en la pila origen). La secuencia será: destino, auxiliar, origen, destino, auxiliar, origen, etc. Las torres son nombradas de siguiente forma:

Figura 133.

Estrategia ganadora de las torres de Hanói



Fuente: Elaboración propio

Además, para obtener una solución más corta, es necesario mover el disco más pequeño en todos los pasos impares, mientras que en los pasos pares solo existe un movimiento posible que no lo incluye. El problema se reduce a decidir en cada paso impar a cuál de las dos pilas posibles se desplazará el disco pequeño.

Explicado lo anterior, se procedió a jugar las torres de Hanoi con la estrategia ganadora, haciendo uso del video beam en clases y recurriendo a la siguiente página web para jugar en línea con todos los estudiantes: https://www.ajedrezeureka.com/torres-de-hanoi/

Figura 133.

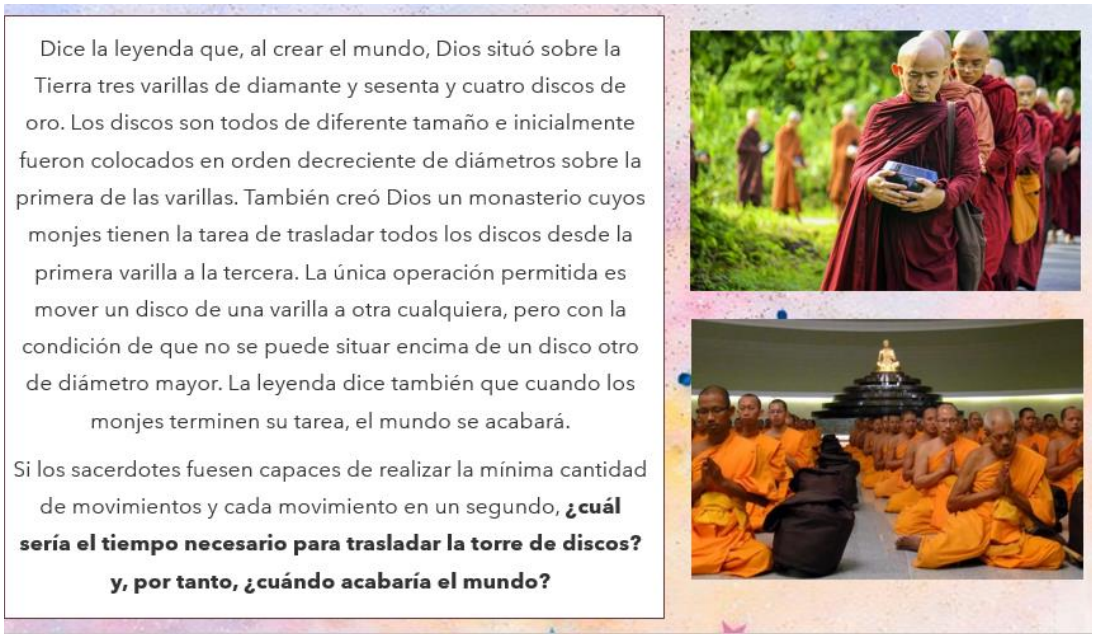
Aplicación de la estrategia ganadora con los estudiantes

Fuente: Elaboración propia

Luego de aplicar la estrategia ganadora, se procedió a leer la leyenda de las torres de Hanoi en la siguiente imagen:

Figura 134.

Leyenda de las torres de Hanói



Fuente: Elaboración propia

Con esta leyenda se explicó a los estudiantes la parte matemática de este juego, la cual tiene que ver con la cantidad mínima de movimientos para pasar una cantidad de discos hacia la última torre. En primer lugar, se hizo notar a los estudiantes que cuando se mueve 1 solo disco del origen al destino, se requiere hacer un solo movimiento, cuando se mueven dos discos, se requiere hacer tres movimientos, y así sucesivamente hasta cinco, la siguiente tabla indica estos resultados:

Figura 135.

Tabla de movimientos de las torres de Hanói

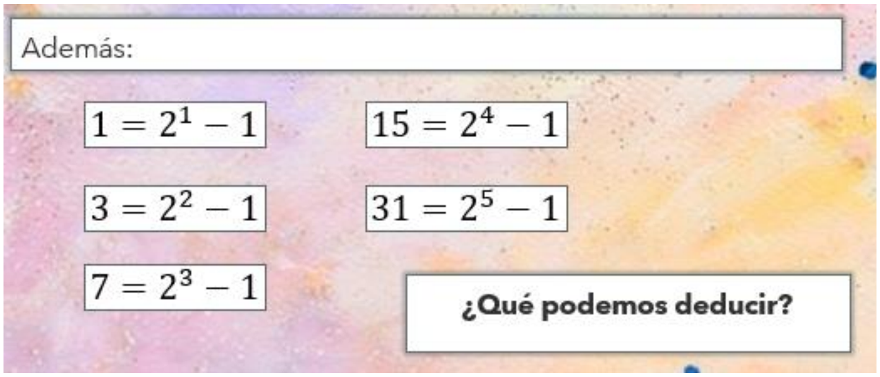
Numero de discos	Menor cantidad de movimientos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Fuente: Elaboración propia

En segundo lugar, se explicó a los estudiantes que la siguiente secuencia representa la menor cantidad de movimientos para solucionar el juego.

Figura 136.

Secuencia de la menor cantidad de movimientos en las torres de Hanói



Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la pregunta de la figura anterior, los estudiantes lograron fácilmente notar que el número 2 estaba elevado a la cantidad de discos del juego, por lo que para hallar la mínima cantidad de movimientos en un juego con n discos la fórmula sería la siguiente: $2^n - 1$.

Volviendo al problema de la leyenda, para el caso de 64 discos bastó reemplazar 64 en la anterior fórmula, por tanto, el tiempo necesario que necesitan los monjes para trasladar la torre de discos es de: $2^{64} - 1 = 1.8446 \times 10^{19}$. Lo cual haciendo las conversiones necesarias es aproximadamente 585.000 millones de años. Por otro lado, la edad de la tierra es de, 4543 millones de años, por lo que faltarían 580.457 millones de años para que se acabe el mundo, según la leyenda.

Conclusiones

En el desarrollo de este proyecto se tuvo la oportunidad de interactuar con aproximadamente diez estudiantes de grado décimo en un ambiente extra-clase. Inicialmente, se indagó sobre las actitudes y conocimientos previos de los estudiantes, donde se evidenció que los estudiantes participantes presentaban dificultades tanto conceptuales como prácticas en trigonometría y álgebra, a pesar de haber visto estas asignaturas como parte de su proceso de enseñanza en el colegio, cabe resaltar que los estudiantes debido a la pandemia se encontraban recibiendo únicamente guías que priorizaban algunos temas de matemáticas, lo cual justificó que los estudiantes presentaran dificultades en varios temas desarrollados en los talleres.

Luego de observar la actitud y aptitud de los estudiantes, se inició el desarrollo de talleres abordando la historia de la trigonometría, un tema que muchas veces es olvidado en las aulas de clases, con ello se confirmó que abordar esto promueve el interés de los estudiantes en el aula, contextualiza históricamente diferentes conceptos matemáticos para mejorar su comprensión y explica como las matemáticas no son solo cálculos, algoritmos y fórmulas, sino que surgen de las necesidades del ser humano, ayudándole a resolver problemas y permitiéndole evolucionar como especie.

Un eje central de nuestro proyecto es la resolución de problemas trigonométricos usando la metodología de Pólya, el resolver problemas a través de este método nos permitió enseñarles a los estudiantes un orden para el momento de enfrentarse a un problema, puesto que muchas veces ellos tratan de usar los datos de un problema y hacer operaciones mecánicas sin lograr una verdadera comprensión de este. Es así como nuestros estudiantes lograron apropiarse del método del Pólya para resolver cada problema que se planteó en clases, los estudiantes antes de usar alguna fórmula se enfocaban en entender y comprender el problema, en como hallar datos e incógnitas para así pasar a una concepción del plan donde todas sus ideas fueran desarrolladas y revisadas. Aquí es importante mencionar que todos los problemas planteados a lo largo del desarrollo del proyecto tenían prevista su solución en nuestras diapositivas, sin embargo, fue satisfactorio ver que la mayoría de los problemas fueron resueltos con ideas planteadas por los estudiantes que no coincidían con nuestras soluciones, pero que eran totalmente válidas, evidenciando su comprensión en los temas explicados en clase.

La metodología de resolución de problemas permitió a los estudiantes relacionar la trigonometría con aspectos del mundo real y su vida cotidiana, de forma que dejaron de ver las matemáticas como un mundo aislado, y empezaron a verla como una herramienta que pueden utilizar para solucionar sus problemas, desarrollando también su capacidad crítica frente a toda situación que se les presente.

Por otro lado, las actividades de matemáticas recreativas, les permitió fortalecer algunos conocimientos tanto de trigonometría como de matemáticas en general, como también hizo posible un mayor acercamiento a los estudiantes y reforzó la comunicación entre ellos mientras construían conocimiento resolviendo nuestros diversos juegos matemáticos. Con esta experiencia pudimos observar que como docentes tenemos la oportunidad de crear un ambiente divertido donde se pueda aprender matemáticas, dejando atrás los diferentes dogmas negativos que las rodean, como, por ejemplo, los pensamientos de que las matemáticas son aburridas y accesibles solo para algunos pocos genios. En nuestra opinión, el uso de las matemáticas recreativas en clases es indispensable para poder cambiar la perspectiva de los estudiantes hacia las matemáticas, logrando una mayor predisposición para aprenderlas.

En general, todo nuestro ejercicio docente fue satisfactorio, puesto que logramos atraer la atención de varios estudiantes y cambiar su forma de pensar hacia las matemáticas y en especial hacia la trigonometría, mostrándoles la importancia de ellas en su vida cotidiana a través de la resolución de problemas, además, pudimos generar muchos espacios donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de expresarse libremente aportando a las diferentes actividades que se plantearon en las sesiones. Para concluir podemos decir que con este proyecto tuvimos la oportunidad de ver como a lo largo de las sesiones los estudiantes fueron construyendo aprendizaje significativo, que esperamos les sirva más adelante en su vida cotidiana y profesional.

Bibliografía

Abonia, L. y Miranda, W. (2017). Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula. [Trabajo de grado para optar el título de Licenciados en Matemáticas y Física. Universidad del Valle, Colombia]. http://funes.uniandes.edu.co/11099/1/Abonia2017Un.pdf

Alegría, P. (2009). La magia de los cuadrados mágicos. Sigma, Revista de matemáticas Matematika Aldizkaria. 34, 107-128. http://www.ehu.eus/~mtpalezp/descargas/magiacuadrada.pdf

Aprendamos Juntos. (2018, 11 de junio). V. completa. “Las matemáticas nos hacen más libres y menos manipulables”. Eduardo Sáenz de Cabezón. [video] https://www.youtube.com/watch?v=BbA5dpS4CcI&t=1992s

Bustos, J. (2015, 9 de Julio). Sucesiones con el juego las torres de Hanói. APA Style Blog. https://www.compartirpalabramaestra.org/matematicas/sucesiones-con-el-juego-las-torres-de-hanoi?__cf_chl_managed_tk__=pmd_8960f5b79836dc2b7d2e105ab9bfd73f3623de3d-1627105628-0-gqNtZGzNAvijcnBszQi6

Cabello, G. (2014). Matemática recreativa y resolución de problemas en la educación primaria. Revistas de investigación Universidad Nacional Mayor de San Marcos. 7. (10), 66-73. https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8153/7110

Centro de Innovación Educativa Regional-Sur. (2017, 24 de mayo). Historia de la trigonometría. [video]. https://www.youtube.com/watch?v=Xh73G2rVFfo

Cerón, S. (2013, 13 de septiembre). Problemas en educación Matemática. Adivina, adivinador. [Presentación de diapositivas].

CirculoA1. (2018, 14 de febrero). Juego matemático – trigonometría. [video]. https://www.youtube.com/watch?v=oRWdocmXuHk

De Camino, T. (2017, 10 de septiembre). La fascinante trigonometría de Babilonia. APA Style Blog. https://medium.com/@TomasDeCamino/la-fascinante-trigonometr%C3%ADa-de-babilonia-b7f9c230e782

De Guzmán, M. (1986). Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Santa Cruz de Tenerife del 10 al 14 de septiembre de 1984, 15-448. Juegos matemáticos en la enseñanza (pp. 49-86). Editorial Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.

Devia, E. & Luna, E. (s.f.). Asignatura matemáticas razones trigonométricas curso 2medio. [presentación de diapositivas]. SlideToDoc. https://slidetodoc.com/colegio-numancia-asignatura-matemticas-razones-trigonomtricas-curso-2medio-3/

EasyLMS. (2020, 22 de julio). ¿Cuáles son los tipos de evaluación? APA Style Blog. https://www.onlineassessmenttool.com/es/centro-de-conocimiento/centro-de-conocimiento-evaluaciones/cuales-son-los-tipos-de-evaluacion/item10637

Fernández, L. (s.f.). Sistema de numeración posicional de babilonia. [presentación de diapositivas]. https://www.uco.es/users/ma1fegan/Comunes/recursos-matematicos/Sistemas-numeracion/Sistema-de-numeracion-Babilonia.pdf

Figueroa, M. (2010). Geometría y trigonometría. Trigonometría, (pp. 81-125). Firmas Press.

Flores, J. (2019, 20 de julio). Número Pi, una cifra para casi todo. National Geographic España. https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/actualidad/numero-pi-una-cifra-para-casi-todo_10210

García, A. (2020, 24 de noviembre). Sudomates de trigonometría. APA Style Blog. https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2020/11/24/3758/

García, A. (2017, 20 de junio). Cuatro en raya trigonométrico. APA Style Blog. https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2017/06/20/cuatro-en-raya-trigonometrico/#:~:text=Reglas%20del%20juego%3A%20El%20juego,casillas%20y%20jugar%C3%A1%20el%20primero.

Gardner, M. (1979). Circo matemático. Editorial Alianza, 251. http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/pdf/Circo%20matematico%20-%20Martin%20Gardner.pdf

Gardner, M. (2007). Matemáticas para divertirse. Ediciones Granica, 11-88. https://academia2011.files.wordpress.com/2010/07/matematicas-para-divertirse-de-martin-gadner.pdf

Gaussianos. (2011, 15 de diciembre). Demostración sin palabras de la fórmula para calcular el área de un círculo. APA Style Blog. https://www.gaussianos.com/demostracion-sin-palabras-de-la-formula-para-calcular-el-area-de-un-circulo/

Islas, C. Colín, M. & Morales, F. (2017). Geometría y trigonometría. Trigonometría, (pp. 103-156). Grupo Editorial Éxodo, 169.

La Luz, J. (s.f.) Taller 1: conociendo los números reales y sus propiedades. Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico en Bayamón, 1-43. http://docs.uprb.edu/deptmate/material%20suplementario/CIME/7mo%20a%209no/T1%3B%20Conociendo%20Los%20N%FAmeros%20Reales%287mo%20a%209no%29.pdf

López, D. (2021). Grados y radianes en la circunferencia goniométrica. APA Style Blog. https://matematicasies.com/Grados-y-radianes-en-la-circunferencia-goniometrica

Moller, J. (2011, 24 de abril). Tower of Hanoi. [aplicación móvil]. https://play.google.com/store/apps/details?id=johan.moller.towerofhanoi

Mulcahy, C. y Richards, D. (2014). Cien años con Martin Gardner. Revista Investigación y Ciencia. (457). https://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/el-agujero-negro-en-el-origen-del-tiempo-609/cien-aos-con-martin-gardner-12443

Paramatematicas125. (2020, 24 de octubre). Trigonometría. [Presentación de diapositivas]. Genially. https://view.genial.ly/5f944c2042a7e67a196df718/interactive-content-trigonometria

Pi-ensa Matematik. (2019, 23 de febrero). Seno y Coseno de los ángulos 0°, 30°, 45°, 60° y 90° sin calculadora. [video]. https://www.youtube.com/watch?v=dEve7g_dEuI

Pólya, G. (1981). Cómo plantear y resolver problemas (9ª edición). Editorial Trillas México.

Profesor10demates (2015, 23 de julio). Resolución de triángulos rectángulos, trigonometría 17 Problemas topográficos. [video]. https://www.youtube.com/watch?v=SchfJQ_q0yE

Ramírez, M. (2011). Álgebra y Trigonometría. Bases de trigonometría: ángulos, (pp. 211-215). Editorial Lasallista.

Requena, B. (s. f.). Trigonometría. APA Style Blog. https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/

Sánchez, N. (2013). El juego y la matemática. juegos de matemáticas para el alumnado del primer ciclo de e. primaria. [Trabajo Fin de Grado. Universidad de Valladolid, España]. https://educrea.cl/wp-content/uploads/2018/05/DOC1-juego-y-matematica.pdf

Sensei Math. (2020, 28 de septiembre). Aplicación de la ley de senos y cosenos en la vida diaria. [video]. https://www.youtube.com/watch?v=u-3aJWybkKk

Sociedad Matemática Mexicana (s.f.). Dia de pi. APA Style Blog. https://www.smm.org.mx/eventos/pi/

Torres de Hanói. (2009, 19 de febrero). Torres de Hanói. APA Style Blog. http://estructuradedatos-grupo1.blogspot.com/2009/02/torres-de-hanoi.html

Tuprofevirtual (2015, 19 de abril). Trigonometría en el plano cartesiano, círculo trigonométrico, identidades trigonométricas. [video] https://www.youtube.com/watch?v=nEaIhfyhH5A

Villatoro, F. (2017, 7 de septiembre). El significado matemático de la tablilla babilónica Plimpton 322. APA Style Blog. https://francis.naukas.com/2017/09/07/el-significado-matematico-de-la-tablilla-babilonica-plimpton-322/

Vitual. (2016, 7 de octubre). Convertir un Ángulo a Grados, Minutos y Segundos | Video 6. [video]. https://www.youtube.com/watch?v=DTvGy4v6lKE

Zago, M. (2012, 15 de octubre). Los radianes y sus aplicaciones. [Presentación de diapositivas]. Issuu. https://issuu.com/margaritazagomazzocco/docs/radianes1/6

Zurditorium (2010, 6 de junio). Estrategia ganadora para el Nim. APA Style Blog. https://www.zurditorium.com/estrategia-ganadora-para-el-nim

Anexo A. Documento de talleres.

El presente anexo contiene la planeación de los seis talleres que se propusieron a los estudiantes de grado décimo de la Institución Alejandro de Humboldt, estos talleres guiaron la ejecución de este proyecto de aula, en ellos se planificó la explicación de temas trigonométricos, se presentó los distintos problemas relacionados con cada temática y las actividades recreativas.

Taller 1: ¿Qué tanto saben nuestros estudiantes?

Hoy en día la matemática conserva la fama de ser una de las asignaturas más difíciles en la escuela, por ello creemos que es prioritario modificar en los estudiantes su actitud frente a ella, pues muchas veces les resulta aburrida y no se insiste en su importancia. Las matemáticas en la educación son fundamentales, esto se debe a que tienen un gran valor formativo porque son las que desarrollan tanto las capacidades del razonamiento lógico, como pensamiento numérico, geométrico y variacional mediante la búsqueda de soluciones de manera coherente y efectiva, además, las matemáticas también desarrollan el pensamiento analítico, puesto que nos impulsan a investigar profundamente los temas en búsqueda de la verdad y agiliza nuestra mente manteniéndonos alerta al error mejorando la toma de decisiones frente a las diferentes circunstancias que presenta la vida.

El propósito de este taller es indagar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, como también reconocer algunos de sus conocimientos en temas de trigonometría.

Reglas para la resolución de taller:

Para que este taller introductorio sirva a nuestros propósitos de introducir temas de la trigonometría, esperamos que los estudiantes se acojan a los siguientes requerimientos:

- El taller es individual
- En las respuestas se pueden expresar de manera libre las ideas con respecto al tema.
- Es indispensable que el taller no sea copiado; en él se debe expresar el conocimiento individual sobre el tema.
- Se debe intentar exponer de la manera más clara posible las ideas

Primer momento: Presentación

Este es nuestro primer encuentro con los estudiantes, por lo que se hará una presentación contándoles sobre que trata el proyecto de aula en el que participaran.

Segundo momento: ¿Cómo es mi actitud hacia las Matemáticas?

En cada uno de los siguientes puntos los estudiantes deberán responder las preguntas de forma clara y justificada, en sus respuestas pueden incluir ejemplos, ideas, posturas a favor o en contra de forma libre.

1. ¿Qué son las matemáticas para usted?
2. ¿Es divertido para usted aprender matemáticas?
3. Según su criterio ¿Para qué son útiles las matemáticas?
4. ¿Dónde pueden encontrar las matemáticas en la vida real?
5. ¿Cómo le gustaría que le enseñen matemáticas?

Tercer momento: Taller diagnostico

Este taller consta de nueve problemas, con los cuales se quiere indagar sobre sus conocimientos en trigonometría. De este modo, el taller es:

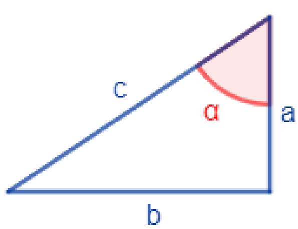
Conteste la siguiente pregunta y solucione los diferentes problemas presentados a continuación:

- ¿Qué es la trigonometría y para qué sirve?

Problema 1.

Complete el espacio con el lado correspondiente a cada enunciado escribiendo a, b o c.

<u>*Triángulo 1:*</u>

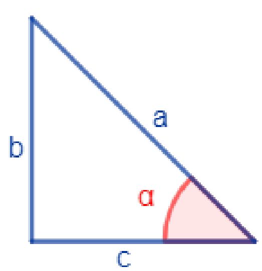


El lado _____ es el opuesto al ángulo α

El lado _____es adyacente al ángulo α

El lado _____ es la hipotenusa del triángulo 1

<u>*Triángulo 2:*</u>



El lado _____es el opuesto al ángulo α

El lado _____ es adyacente al ángulo α

El lado _____ es la hipotenusa del triángulo

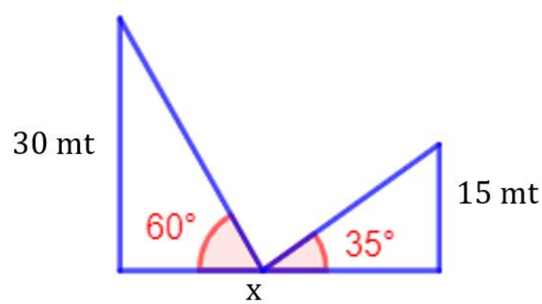
Problema 2.

Relacione las siguientes razones trigonométricas con su definición:

$Seno$	$\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
$Coseno$	$\dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
$Tangente$	$\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$
$Secante$	$\dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
$Cosecante$	$\dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$
$Cotangente$	$\dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

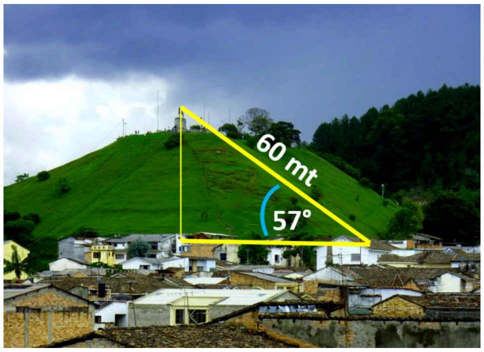
Problema 3.

Calcule la base (lado x) de la siguiente figura construida con dos triángulos rectángulos:



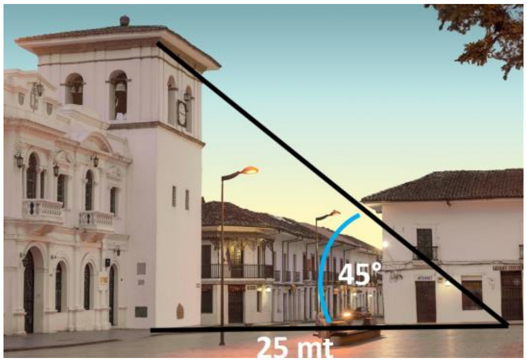
Problema 4.

Calcule la altura del morro de Popayán, sabiendo que el ángulo de elevación es de 57 º y la inclinación de 60 metros:



Problema 5.

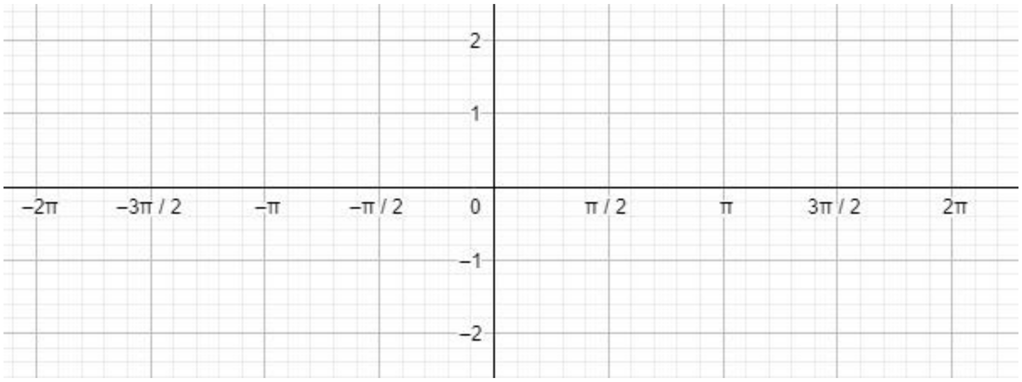
Calcule la atura de la torre del reloj de Popayán:



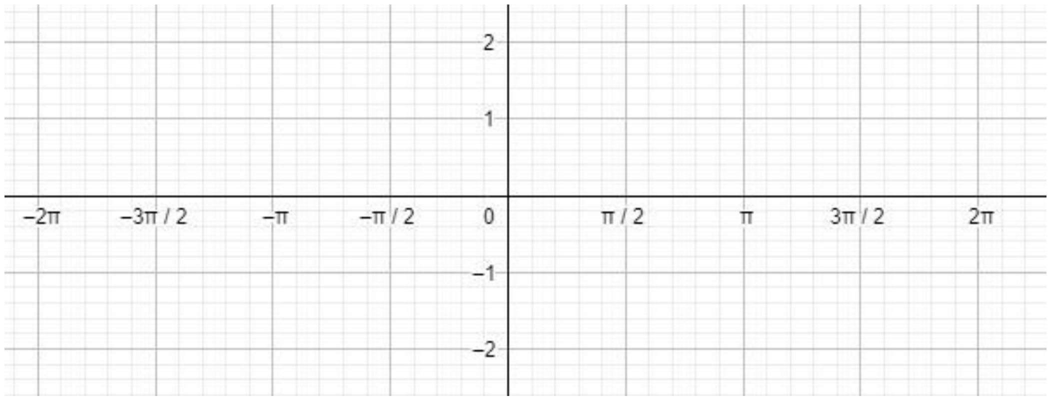
Problema 6.

Grafique las siguientes funciones en el plano cartesiano de números reales:

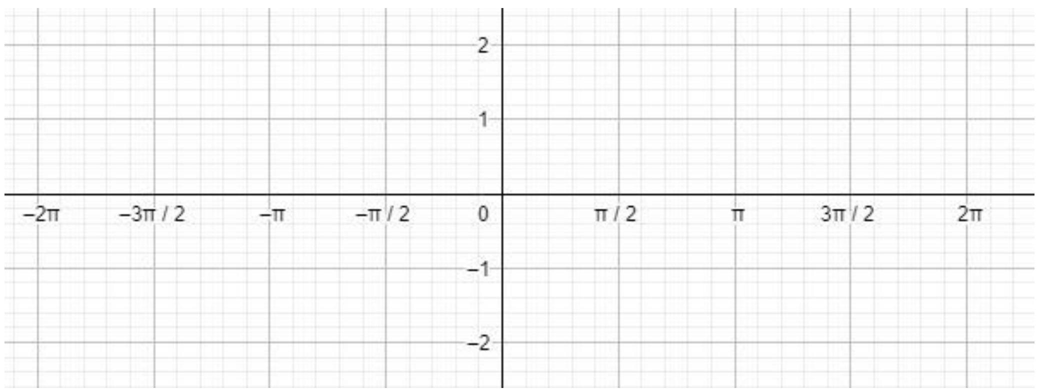
- **Función seno**



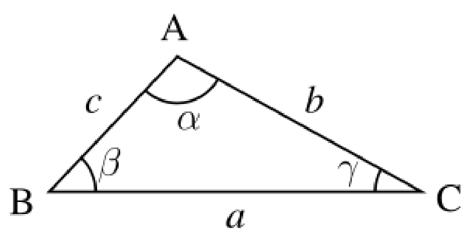
- **Función coseno**



- **Función secante**



Problema 7.



Teorema del seno: En un triángulo cualquiera, las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto son iguales:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

Teorema del coseno: El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos:

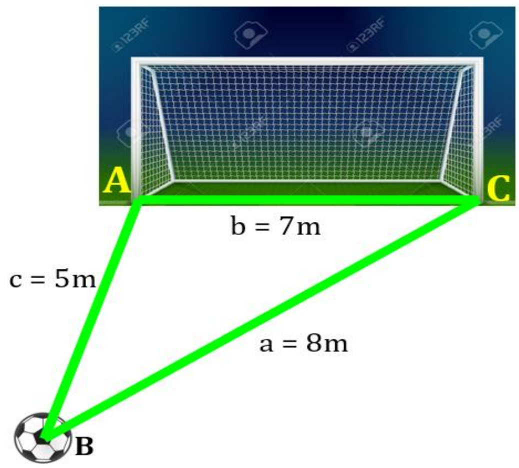
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

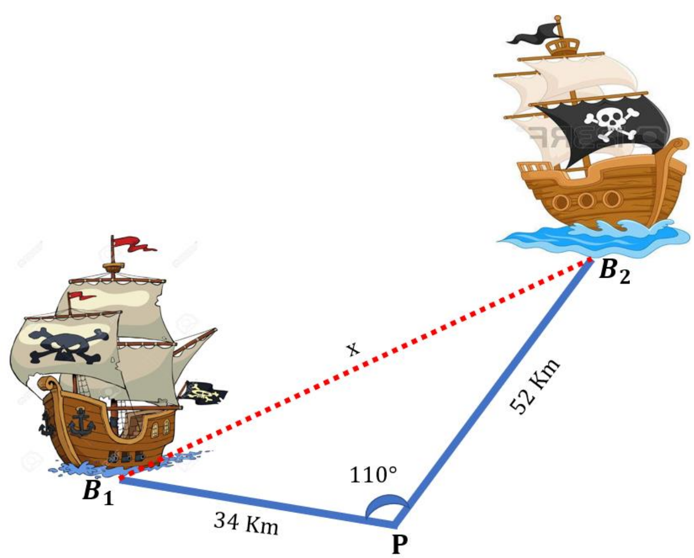
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Utilizando el teorema del seno o del coseno resuelva los siguientes problemas:

1. En un entrenamiento de futbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



2. Dos barcos piratas salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110º. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto, como lo indica la figura siguiente. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?



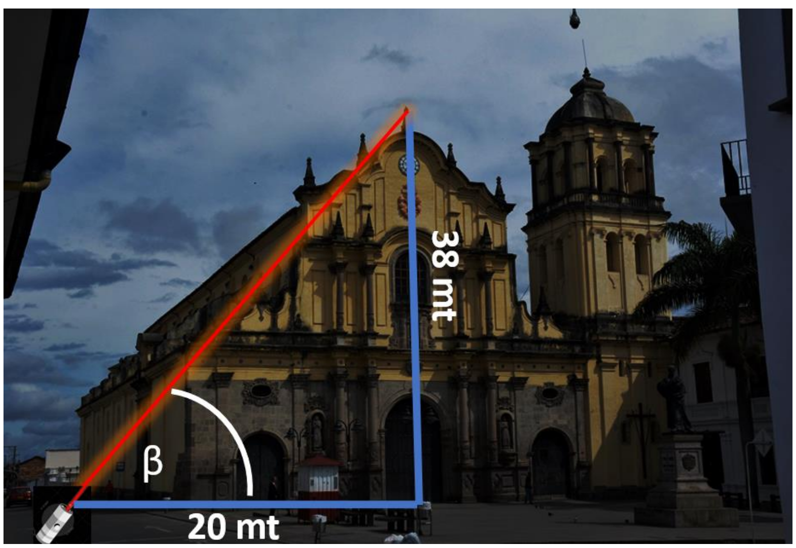
Problema 8.

Relacione las siguientes identidades trigonométricas:

1	$\cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin 2x$	$\dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
$\cos 2x$	$\sin^2 x + \cos^2 x$
$\sin^2 x$	$2 \sin x \cos x$

Problema 9.

Un niño ubicado a 20 metros de la iglesia de san francisco apunta con un láser el pico de la iglesia tal como lo muestra la figura, sabiendo que la altura de la iglesia de San Francisco de Popayán mide 38 mt, calcule el ángulo(β) de inclinación del láser con el piso.

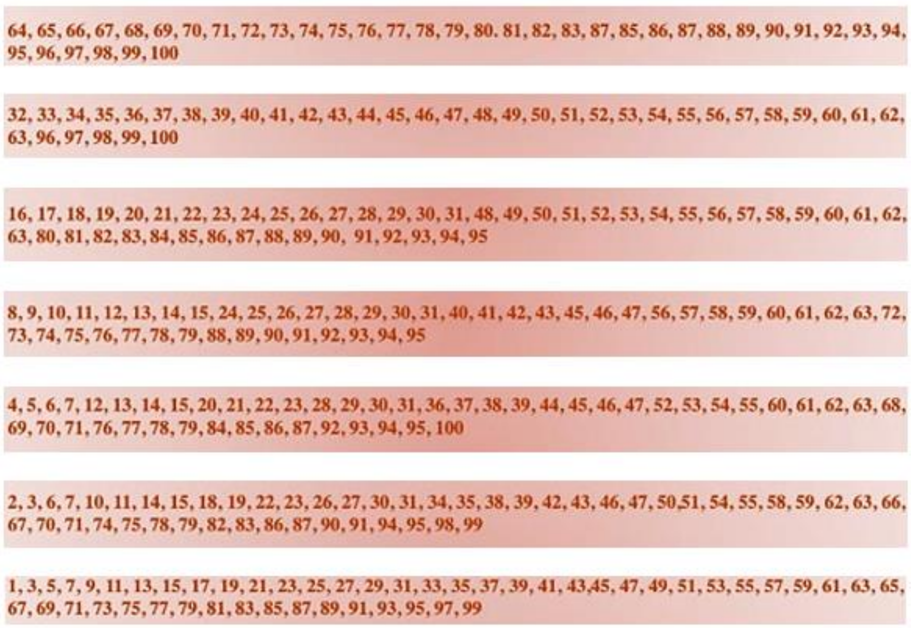


Cuarto momento: Actividades recreativas

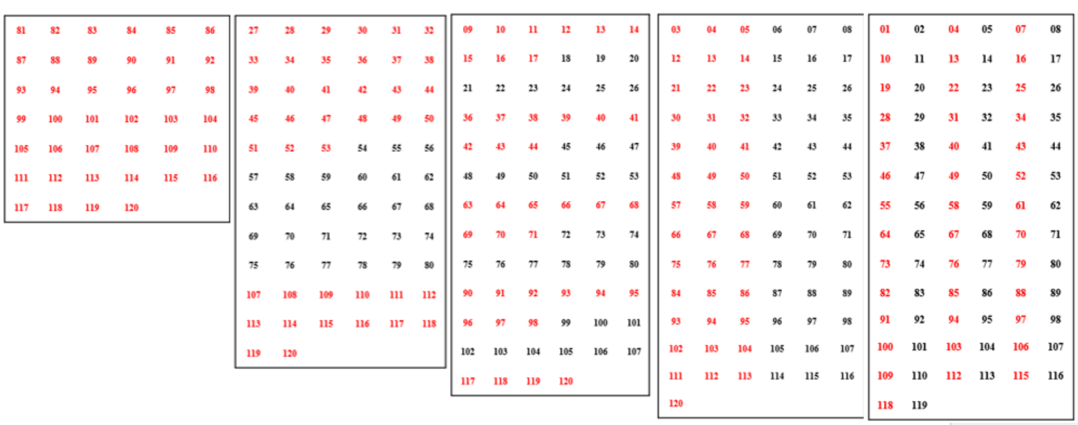
Como actividades lúdicas en este taller se proponen las siguientes:

Cartas mágicas

Fernández (s.f.) explica que este juego consiste en adivinar números entre 0 y 100 con ayuda de la siguiente imagen:



La siguiente actividad es una expansión del anterior juego tomada de S. Cerón (Comunicación personal, 2021), aquí se pedirá adivinar el número pensado preguntando si el número está o no en cada una de las cartas y de qué color es, con la siguiente imagen



Cuadrados mágicos

Alegría (2009) nos dice que un cuadrado mágico es una tabla que tiene la misma cantidad de filas como de columnas donde en cada casilla se asigna un número, de tal manera que la suma de cada una de sus filas, columnas y diagonales principales da como resultado el mismo valor, llamado constante mágica.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Con esta actividad lúdica se quiere que los estudiantes se diviertan aprendiendo acerca de los cuadrados mágicos, su definición, su arte y resolución, para ello hemos preparado una serie de diapositivas en las que iremos explicando lo anterior y simultáneamente resolviendo algunos problemas con respecto a esto. Estas diapositivas contienen la siguiente información:

Problema 1.

Construya un cuadrado mágico de orden 3, con los números del 1 al 9 cuya constante mágica sea 15.

Problema 2.

Construya un cuadrado mágico de orden 4, con los números del 1 al 16, cuya constante mágica sea 34.

Cuadrados mágicos en el arte.

La melancolía de Alberto Durero: Alegría (2009) comenta que en el Renacimiento se utilizaron cuadrados mágicos con fines terapéuticos. Por esto, como amuleto para ahuyentar la melancolía, los astrólogos de la época “recetaban” cuadrados mágicos de orden cuatro. Muestra de ello es la pintura del alemán Alberto Durero, quien puso un cuadrado mágico de cuarto orden en posición dominante en su grabado Melancolía.

"Melancolía"- Alberto Durero

En dicho cuadrado existen hasta 86 diferentes combinaciones de cuatro números cuya suma es el número mágico 34. Pero tiene más propiedades mágicas: la suma de los cuadrados de los números de las dos primeras filas (o columnas) es igual a la suma de los cuadrados de los números de las dos últimas filas (o columnas). Además, la suma de los cuadrados de los números de filas (o columnas) alternadas (primera y tercera, segunda y cuarta) es la misma.

Otro hecho asombroso es que la suma de los cuadrados de los números situados sobre las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los números no situados sobre las diagonales, propiedad que también se cumple con los cubos.

La fachada de la pasión de la sagrada familia por Josep Subirachs: Alegría (2009) nos cuenta que su característica principal consiste en que la suma de las filas y columnas es 33, la supuesta edad de Cristo en el momento de su muerte.

"Sagrada familia" - Barcelona

Templo de la virgen del calvario, Zurgena – España: Barrios (2021) nos cuenta las curiosidades detrás de este cuadrado mágico, estas son:

- Este cuadrado mágico contiene los 49 primeros números naturales.

- Este cuadrado tiene un cuadrado mágico de orden 3, de constante mágica 75, que contiene los números desde el 21 hasta el 29.
- Contiene otro cuadrado mágico de orden 5, de constante mágica 125, que contiene en su interior el cuadrado mágico de orden 3 y, en las filas y columnas exteriores, los números desde el 13 hasta el 20 y desde el 30 hasta el 37.
- También contiene el cuadrado mágico de orden 7, de constante mágica 175, que contiene en su interior, el cuadrado mágico de orden 5 y, en las filas y columnas exteriores, los números desde el 1 hasta el 12 y desde el 38 hasta el 49.
- La suma de los números situados en las casillas exteriores del cuadrado de orden 3 es 200, las del cuadrado de orden 5 es 400 y las del cuadrado de orden 7 es 600.
- Si se combinan dos de estas parejas, se obtienen grupos de cuatro números cuya suma es 100. Si se le añade la casilla central, la suma sería 125.

Constante mágica

Las diferentes formas de encontrar la constante mágica en un cuadro mágico son:

- Sumar todos los números que se colocarán en el cuadrado y dividir el resultado entre el orden de este. Los estudiantes verificaron esta forma haciendo el siguiente procedimiento en un cuadrado de 3x3 y 4x4:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

$$\frac{45}{3}=15$$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16=136$$

$$\frac{136}{4}=34$$

- Acomodar en la cuadrícula los números que se van a utilizar en su orden natural (no en forma de cuadrado mágico) y sumar los números de cualquiera de las diagonales; el resultado será la constante mágica de ese cuadrado.
- En general, la fórmula para encontrar la constante mágica de un cuadrado mágico de orden n es:

$$\frac{n(n^2+1)}{2}$$

Esta fórmula parte de la fórmula de Gauss para sumar consecutivamente los primeros números naturales, la cual es: $\frac{a(a+1)}{2}$.

Si queremos sumar la cantidad de números en un cuadrado mágico de orden nxn se tendría que los números a sumar son $1+2+\cdots+n^2$. Ahora, remplazando n^2 en la fórmula de Gauss se tiene: $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$, y como anteriormente habíamos mencionado: esta suma debe dividirse entre el orden del cuadrado, entonces dividimos entre n: $\frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$

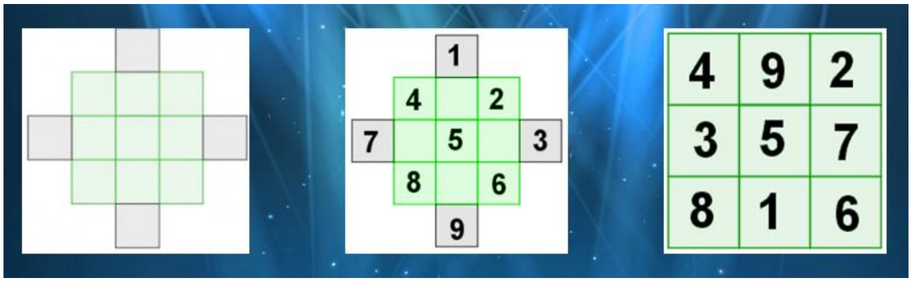
- Si el cuadrado se conoce, Basta sumar cualquier fila o columna o diagonal.

Métodos de construcción de cuadrados mágicos

Justo (s.f.) describe los siguientes métodos de construcción de cuadrados mágicos:

Cuadrados mágicos de orden impar

El ejemplo más sencillo es un cuadrado de orden 3, el más pequeño posible, se usarán los números del uno al 9. Se empieza dibujando el esqueleto del cuadrado mágico, después se añade casillas en todos los laterales hasta formar un rombo, ahora, se colocan los números en orden en el extremo superior comenzando con el uno y colocando todas las cifras siguiendo las diagonales alternas formadas en el rombo. Las Casillas que quedan en blanco se rellenan colocando los números que están en las casillas exteriores al cuadrado al lugar que les corresponde dentro utilizando simetría horizontal, es decir, las celdas externas de la parte superior pasan a completar la parte inferior y las de la parte inferior pasan a la parte superior, de la misma forma se usa después una simetría vertical, obteniendo el cuadrado mágico, tal y como lo indica la siguiente imagen:



Cuadrados mágicos de orden par

El cuadrado más sencillo es el de orden cuatro, se empieza dibujando el esqueleto del cuadrado mágico, luego se sitúa el número uno en el extremo superior izquierdo, después nos desplazamos como si escribiéramos las cifras correspondientes hacia la derecha, pero anotando solo las cifras que forman las dos diagonales principales del cuadrado, tal y como lo muestra la siguiente imagen:

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Por último, para rellenar las casillas en blanco nos desplazaremos de derecha a izquierda desde la última fila escribiendo los números que faltan en orden, como lo muestra la imagen de la derecha.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Taller 2: Historia de la trigonometría

Suele pasar que al enseñarle a los estudiantes sobre técnicas, procedimientos o conceptos matemáticos no se explica la génesis ni las motivaciones que dieron lugar a las ramas de las matemáticas que se les está enseñando y, por tanto, se ven enfrentados a un cúmulo de conocimientos sin sentido y aislado de toda relación con los componentes históricos y sociales que tiene todo saber humano, por ello, para que tengan una perspectiva completa de los contenidos que se desarrollan en esta teoría es importante dar a conocer algunos elementos históricos de la evolución de la trigonometría.

En este taller se hará un breve recorrido histórico sobre la forma como surgió la trigonometría y la manera como fue evolucionando, puesto que, muchas de las cosas en la actualidad emergieron de varios estudios antiguos que no podremos entender sin pensar en el contexto en que emergieron, por ello, la historia ayuda a entender como la trigonometría es una actividad ligada a un contexto cultural cambiante de acuerdo con las necesidades y curiosidades del mundo real.

Este taller, a diferencia del anterior, se hará de forma grupal. Iniciará con una presentación histórica sobre la trigonometría y los estudiantes deberán estar atentos, pues los problemas se desarrollarán sincrónicamente.

Primer momento: La trigonometría en la antigüedad

En esta parte se expondrá a los estudiantes aspectos importantes de la evolución de la trigonometría en el mundo, queriendo fomentar motivación e interés en esta rama de las matemáticas.

Se hablará brevemente de la historia de la trigonometría en las siguientes culturas:

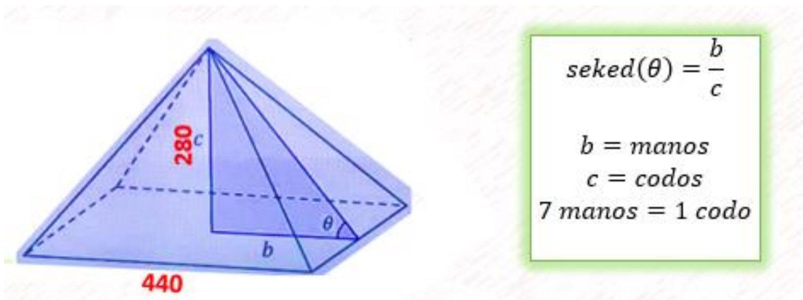
- Egipcia (1800 a. C)
- Babilónica (1600 a. C)
- Griega (200 a. C)
- India (400)
- Árabe (700)
- Europea (1200)

Para esta exposición se usará material audiovisual en Power Point.

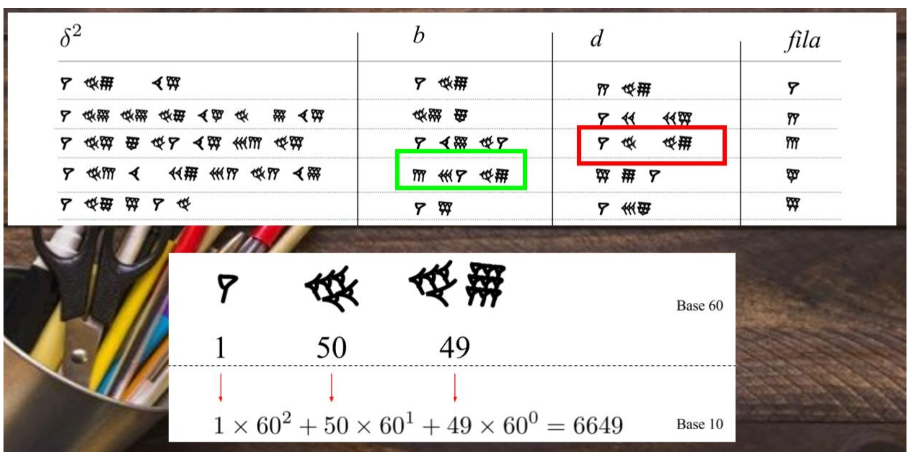
Para interactuar con los estudiantes en medio de la presentación se realizarán algunos problemas relacionados sobre la exposición, su resolución se hará guiada de manera sincrónica y colectiva, promoviendo la participación de los estudiantes en cada respuesta.

Lista de problemas:

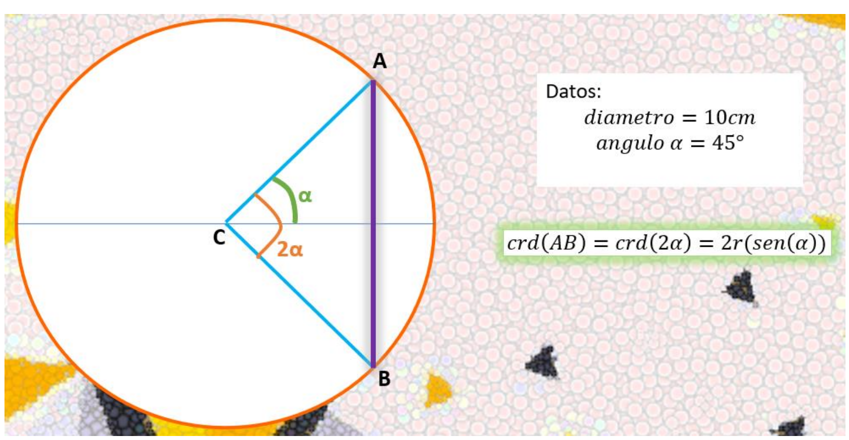
1. Problema 56 del papiro de Rhind: ¿Cuál es el seked de una pirámide de 280 codos de altura y 440 codos de lado en la base?



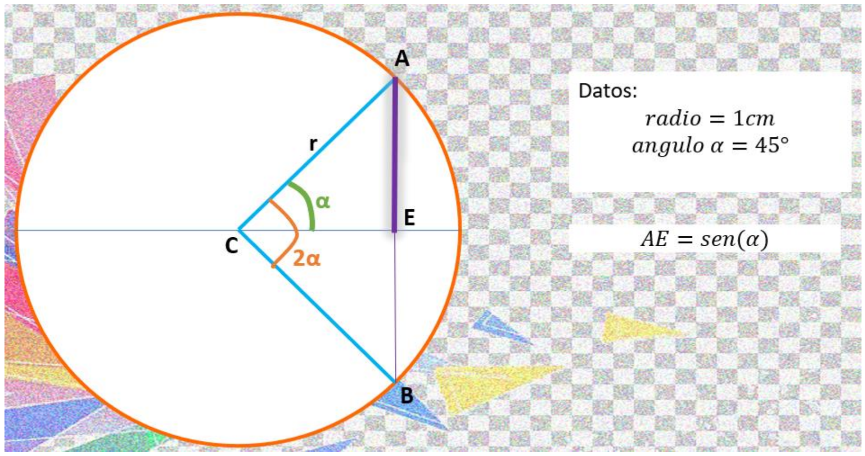
2. Ejercicio de conversión de la tablilla Plimpton: Luego de la explicación de conversiónes, pasemos el número escrito cuneiformemente del recuadro verde a base 10.



3. Calculemos la cuerda AB, según la relación moderna establecida:



4. Calculemos la semicuerda AE, según la relación moderna establecida en la trigonometría hindú:



Segundo momento: Video y ejercicio matemático.

Luego de la exposición y haciendo uso de las herramientas tecnológicas y audiovisuales se proyectará un video acerca del teorema de Pitágoras y el teorema de Tales de Mileto, este video ayudará a resolver el siguiente ejercicio:

- Sean, y, z reales positivos tal que:

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}=10$$

$$x+y+z=8$$

Calcule el valor de x usando el teorema de Pitágoras y de tales.

Para resolver este ejercicio en clase de forma colectiva se guiará a los estudiantes con los siguientes pasos:

Paso #1:

Halle los catetos de los siguientes triángulos rectángulos, dadas su diagonal.

Use el teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir, $h^2 = a^2 + b^2$ *donde h es la diagonal y a, b son catetos.*

El estudiante debe llegar a soluciones relacionadas de este tipo:

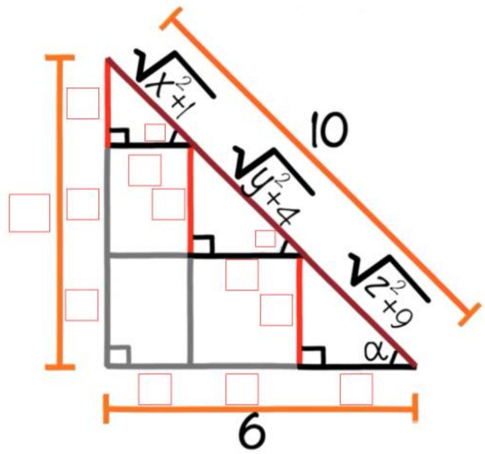
$$h = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$h^2 = x^2 + 1^2$$

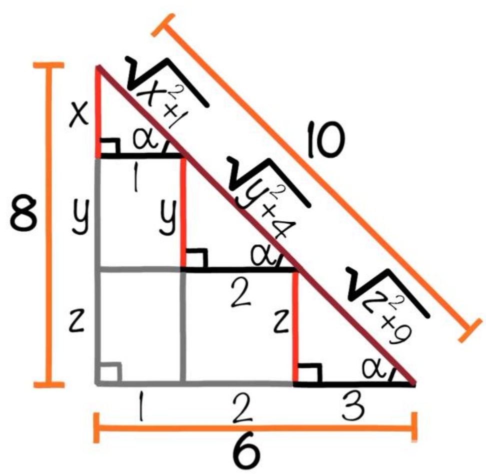
$$por\ tanto, los\ lados\ son: a = x\ y\ b = 1$$

Paso #2:

Complete el siguiente triángulo con los datos obtenidos anteriormente:

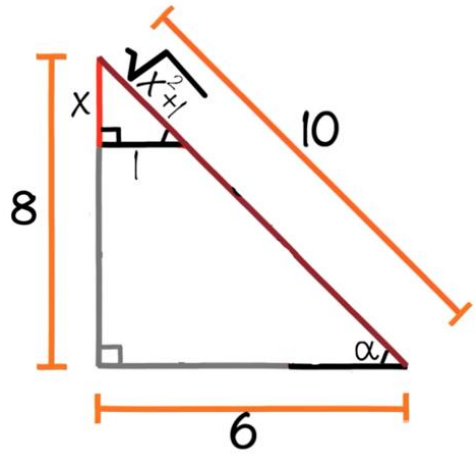


El estudiante debe llegar a:



Paso #3:

Use el teorema de tales para calcular el valor de x en la siguiente figura:



Teorema de tales

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

El estudiante debe llegar a:

$$\frac{8}{x} = \frac{6}{1}$$

$$8 = 6x$$

$$\frac{4}{3} = x$$

Tercer momento: Actividad recreativa

Como actividad final se presentará la actividad llamada “TU DIA PI”, dado que en este taller se presentan algunos números irracionales. Esta actividad tiene el objetivo de hablar sobre algunos de ellos y en especial sobre el número pi.

Formalmente, el concepto de número irracional se establece en el siglo XIX, desde nuestra vista moderna un número irracional es un valor que no puede ser expresado de la forma:

$$\boldsymbol{\frac{m}{n}\ donde\ m,\ n\ \in \mathbb{Z}\ y\ n \neq 0}$$

Por tanto, un número irracional es un decimal infinito aperiódico.

La explicación de lo anterior se hará detalladamente en clases para dar paso a la siguiente imagen que muestra algunos ejemplos de números irracionales:

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots$$

$$e = 2.71828182845904523536\ldots$$

$$\varphi = 1.61803398874989484820\ldots$$

$\sqrt{}$ como $\sqrt{3} = 1.7320508075687729 \ldots$

$\sqrt{99} = 3.94987437106619954 \ldots$

Es importante mencionar, que se hablará sobre todos estos números para luego adentrarnos en el número pi.

Por consiguiente, con respecto al número e se explicará su origen en torno al siguiente ejemplo: Si se ingresa en un banco 1€ al 100% de interés anual, al cabo de un año se obtendría 1+1=2 €. Si el abono de intereses se realiza en 2 pagos al 50% de interés, al cabo del año se tiene 1€ más el 50% de un 1€ es decir se tiene 1.5€ más el 50% de 1.5€ es decir sumamos 0.75€ de manera que el total es 1€+0.5€+0.75€=2.25€ dado que el resultado obtenido es mayor que el caso anterior. Se mostrará a los estudiantes lo que pasaría si se dieran 4 pagos cada 3 meses al 25% de interés ayudados por la siguiente fórmula:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Para n=4

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{4} = 2.4441 \ldots$$

Dado que el número sigue aumentando, se lo hace en el caso de que cada día se reciba un pago con el respectivo interés, de manera que la cantidad al final del año sería la siguiente:

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}7145 \ldots$$

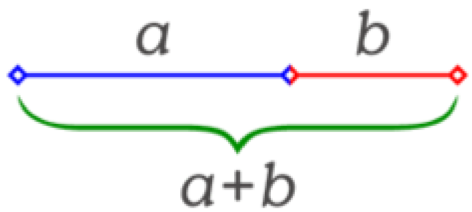
Luego de observar que el número obtenido ya no aumenta demasiado, se explicara que cuándo n tiende al infinito el número al que tiende el resultado es e.

También se comentará que el número e es el resultado de la siguiente suma

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots = e$$

Con respecto al número ϕ o número de oro también se explicará su origen de la siguiente forma:

Imaginemos 1 trozo de cuerda y se corta la cuerda en un punto en el que se guarda la siguiente proporción: “La cuerda total es al trozo de cuerda más grande, lo mismo que el trozo más grande es al pequeño” donde la siguiente imagen y fórmula muestran dicha proporción



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

De donde:

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Luego llamando ϕ a a/b se tiene que

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

Obteniendo

$$\phi^2 = \phi + 1$$

Es decir

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Luego utilizando la fórmula cuadrática nos da como resultado

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180 \ldots$$

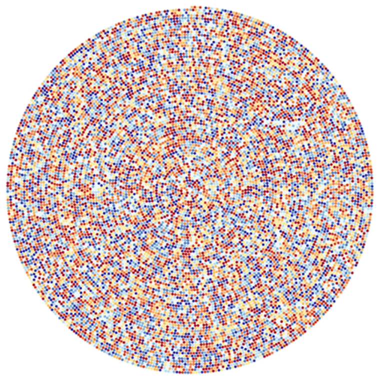
De esta forma se obtiene el número de oro. Es importante mencionar que la explicación se hará detalladamente en clases.

Por consiguiente, se hablará sobre el número pi, su definición y algunas curiosidades. Este número indica la relación entre el perímetro (P) y el diámetro (D) de una circunferencia. Así, $\pi = P/D$.

Para interesar aún más a los estudiantes por este número, les contaremos como pi guarda muchas curiosidades:

- Los científicos no se han conformado con averiguar pocos decimales de este número. Ya que, el último récord fue batido en 2021, con 62.8 billones de dígitos. Este cálculo fue realizado con una computadora de alto rendimiento después de 108 días y 9 horas.

- Pi transformado en arte: Pi en una espiral con cada dígito de un color / Martin Krzywinski

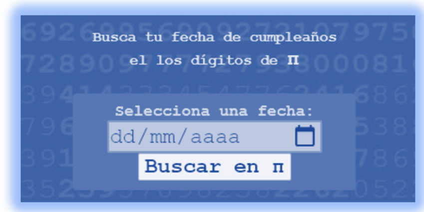


- Michael Blake, asignó una nota musical a cada número y posteriormente tocó la melodía del número pi con un gran éxito en las redes sociales.
- En el año 2002 el japonés Akira Haraguchi rompió el récord mundial recitando 83 431 dígitos del número pi sin parar. Luego, en el año 2006, Haraguchi volvió a romper su propio récord recitando 100 000 dígitos del número pi.
- La probabilidad de que dos enteros positivos escogidos al azar sean primos entre sí es $6/\pi$^2.
- Que dos números sean primos entre sí, significa que no tienen un divisor en común, por ejemplo, el 8 y el 15, mientras que el 4 y el 6 no son primos entre sí, ya que el número 2 es un divisor en común. De manera que la probabilidad al escoger dos números enteros al azar sea primos entre si es del 60% aproximadamente, ya que $6/\pi$^2=0,6079 aproximadamente.
- El 14 de marzo de cada año se celebra el Día Mundial del Número Pi. Esta festividad nació en Estados Unidos en 1988 y ha ido ganando en popularidad desde entonces y desde 2009 tiene su propio día oficial por decisión de la Cámara de Representantes de Estados Unidos

Posteriormente, finalizaremos con el juego de “encuentra tu día de pi” de la siguiente forma en su respectivo enlace:

El juego consiste en buscar un numero entre los decimales de Pi, en especial en este juego buscaremos en qué posición de los decimales del número π está la fecha de tu cumpleaños.

Con este buscador de números en los dígitos de Pi puedes buscar tu día de Pi. Eso sí, entre los primeros dos mil millones de decimales (2.000.000.000). Así que, aunque puedan parecer muchos, puede ser que no esté en esta parte inicial de la infinita cadena de decimales de π, pero por algún lugar de ella andará.



Taller 3: Resolvamos problemas con la regla de tres.

Los ángulos es uno de los temas más importantes en nuestra vida cotidiana, los encontramos en muchos lugares a nuestro alrededor y en distintos sectores de trabajo, de una u otra manera la medición de los ángulos dan total perfección en las tareas que nos propongamos, ya sea tareas de casa, de construcción, topografía, aviación, navegación, arquitectura y demás.

Este taller tiene el fin de aclarar a los estudiantes como se miden los ángulos, se dará conocer las diferencias e importancia de medir en grados o radianes para así poder incorporar de la mejor manera estos sistemas de medición en la vida cotidiana y ante cualquier situación o problema que se presente.

Primer momento: Aclarando conceptos

Primero, para interactuar con los estudiantes, este taller iniciará con el planteamiento de la siguiente pregunta: ¿Qué son los grados y los radianes? Esperamos que este tema no sea aislado de sus conocimientos, puesto que la medición de ángulos en grados se mira desde cursos escolares primarios.

Luego de conversar un poco con los estudiantes responderemos esta pregunta y se explicará que es un grado, un radián y sus equivalencias.

Segundo momento: Ejercicios matemáticos de conversión

En esta parte queremos que los estudiantes aprendan a convertir las unidades de grados a radianes y viceversa con ayuda de la regla de tres, para ello se explicara que: 1 vuelta completa de la circunferencia = 360º = $2 \cdot \pi$ radianes. Además, se propondrán los siguientes ejercicios mecánicos para que ejerciten esta parte:

Escribir en grados los siguientes ángulos dados en radianes: $\boldsymbol{\pi/2}$, $\boldsymbol{\pi/3}$.

Escribir en radianes los siguientes ángulos dados en grados: $\mathbf{10°}$, $\mathbf{100°}$.

Tercer momento: Sección de problemas

En esta parte se plantearán algunos problemas en los cuales los estudiantes tendrán que hacer uso de lo aprendido en las anteriores secciones de este taller, su resolución se hará guiada de manera sincrónica y colectiva, promoviendo la participación de los estudiantes en cada respuesta.

Lista de problemas:

1. Un arqueólogo encuentra restos de una antigua construcción, se puede notar que esta construcción era circular pues la parte que encontró forma un arco de circunferencia que equivale a 70° de la circunferencia completa, al medir el contorno de este fragmento encontrado dio como resultado 24 mt. Ayuda al arqueólogo a hallar el radio de la circunferencia formada por la construcción si esta estuviera completa.
2. Una correa conecta dos poleas de radios r=10cm y r=25 cm. Si la grande da un giro completo, ¿qué ángulo expresado en grados y radianes habrá girado la pequeña?
3. Un aspersor funciona con un mecanismo que le produce un movimiento de giro de ida y vuelta de 60º. Si el chorro de agua alcanza 16 metros, halla el área de la superficie de césped regada.

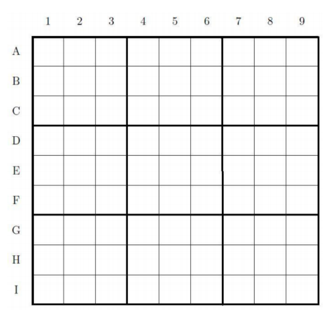
Cuarto momento: Sudomates

Como actividad recreativa se presentará a los estudiantes el juego de SudoMates, que da lugar a un sudoku clásico de 81 casillas que se deben rellenar con números del 1 al 9. Los Sudokus se suelen estructurar en cuadrículas divididas en cajas de 3x3 celdas en las que hay algunos números escritos de antemano. Para jugar, simplemente se debe rellenar las celdas en blanco de tal forma que cada fila, columna y caja de 3x3 no tenga números repetidos.

Con este juego queremos trabajar el cambio de las unidades de ángulos: de grados a radianes y de radianes a grados para reforzar los conocimientos adquiridos previamente.

Esta actividad se desarrollará en dos Fases:

Primera fase: Los alumnos deben rellenar algunas de las casillas de este tablero de sudoku completamente vacío, haciendo cada conversión que se pide y, a continuación deben colocar en las casillas correspondientes el resultado.



PREGUNTAS:

A3, B8, C4, D7, F6, H5: Convertir $\frac{1080}{\pi}$ grados a radianes. RTA 6

B6, E8: Convertir $\frac{2\pi}{45}$ radianes a grados. RTA 8

B1, C5, D4, E9, G8: Convertir $\frac{\pi}{36}$ radianes a grados. RTA 5

C9, E4, H6: Convertir $\frac{\pi}{60}$ radianes a grados. RTA 3

B9, D2, G3, I4: Convertir $\frac{\pi}{45}$ radianes a grados. RTA 4

C6, G4, H9: Convertir $\frac{180}{\pi}$ grados a radianes. RTA 1

E6, F3, G5, H2: Convertir $\frac{1260}{\pi}$ grados a radianes. RTA 7

C7, D3, F9, H1: Convertir $\frac{360}{\pi}$ grados a radianes. RTA 2

E1, I3: Convertir $\frac{1620}{\pi}$ grados a radianes. RTA 9

De esta forma se consigue colocar 33 números, todos del 1 al 9 en las casillas del SUDOKU.

Segunda fase: En esta fase, los alumnos deben acabar de rellenar las casillas, siguiendo las reglas clásicas de los SUDOKUS.

Éste es el SUDOKU acabado:

7	1	6	2	3	4	5	9	8
5	2	3	7	9	8	1	6	4
4	9	8	6	5	1	2	7	3
8	4	2	5	1	9	6	3	7
9	6	1	3	2	7	4	8	5
3	5	7	8	4	6	9	1	2
6	8	4	1	7	2	3	5	9
2	7	5	9	6	3	8	4	1
1	3	9	4	8	5	7	2	6

Taller 4: Sumergiéndonos en el mundo de la trigonometría.

Con base en el anterior recorrido histórico, es evidente que, desde la antigüedad, la trigonometría dio solución a múltiples problemas de medida, astronomía, cálculo, medición de triángulos, ángulos y sus relaciones. Es por ello por lo que se la define como la rama de las matemáticas que estudia la relación entre los lados y ángulos de los triángulos y se ocupa, por tanto, de las razones y funciones asociadas a los ángulos, denominadas funciones trigonométricas.

Por consiguiente, este taller está enfocado en abordar los principales conceptos de trigonometría, como lo son las razones y las funciones trigonométricas, en primer lugar expondremos a los estudiantes la definición de estos conceptos con el fin de recordárselos, y, posterior a ello, se plantearán diferentes problemas en los cuales apliquen los conceptos dados, esto con el fin de que a través de su resolución, el estudiante comprenda por sí mismo la importancia de la trigonometría en el mundo real y en su vida diaria.

Primer momento: Razones trigonométricas

En esta parte expondremos a los estudiantes las definiciones de las razones trigonométricas y la relación entre ellas. También haremos uso de un trabajo realizado por Sandra María Morales en GeoGebra, ubicado en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/JZ6kv7VZ, con el cual se quiere observar cómo varía el seno y el coseno en un triángulo cuando se alteran sus dimensiones.

Posteriormente, para interactuar con los estudiantes se plantearán algunos problemas relacionados con el tema, donde su resolución será guiada de manera sincrónica y colectiva, promoviendo la participación de los estudiantes en cada respuesta.

Lista de problemas:

1. Carlos ha ido de vacaciones a París y se encuentra a 87 metros delante de la torre. Es preciosa y lo impresiona muchísimo, en un momento el faro que se encuentra en lo alto de la torre apunta directamente sus pies, sabiendo que la altura de la torre es de 300mt, calcule el ángulo de inclinación con el que desciende el rayo del faro hacia los pies de Carlos.

2. En la llanura desde un punto medimos el ángulo de elevación a una montaña y se obtiene 35º Acercándose a la montaña una distancia de 200 m se vuelve a medir el ángulo y se obtienen 55º. ¿cuál es la altura de la montaña?

Segundo momento: Funciones trigonométricas.

En esta parte se explicará a los estudiantes el tema de funciones trigonométricas y su definición a partir de las razones trigonométricas, apoyándonos en el video publicado por Tuprofevirtual (2015) que se verá en clase, explicando algunos detalles con ayuda de GeoGebra.

Por consiguiente, llenaremos con los estudiantes las tablas de valores de las funciones seno y coseno, para luego llamarlos al tablero a graficarlas:

α	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
Sen(α)													

α	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
cos(α)													

Luego, se mostrarán las gráficas de las funciones sec, csc, tan y cot, para hablar sobre las aplicaciones de estas funciones en el mundo físico.

Por último, explicaremos las funciones trigonométricas inversas de la siguiente forma:

$$si\ arc\text{sen}(x) = \alpha, \quad entonces\ sen(\alpha) = x$$

$$si\ arccos(x) = \alpha, \quad entonces\ \ cos(\alpha) = x$$

$$si\ arctan(x) = \alpha, \quad entonces\ \ tan(\alpha) = x$$

Por último, enfatizaremos en el siguiente error, con el fin de que nuestros estudiantes no lo cometan:

$$sen^{-1}(x) \neq \frac{1}{sen\ (x)}$$

Tercer momento: sección de problemas

3. Imagine que usted es un pasajero de avión y la azafata pregunta:

   - ¿Alguno de ustedes sabe matemática?

   Usted se levanta para ver qué se le ofrece, y le dice:

   - Tal vez yo la puedo ayudar, ¿cuál es el problema?

   - Estamos volando actualmente a una altitud de aproximadamente 10 kilómetros y experimentamos dificultades técnicas –sobrecargo

Usted comprende que se necesita su ayuda, así que toma su calculadora y camina hacia el frente del avión para ofrecer su colaboración al piloto, que parece un poco enfermo y desorientado.

- Me estoy sintiendo muy mal y no puedo pensar –el piloto

- ¿Qué puedo hacer para ayudar? –pregunta usted

- Necesito deducir cuándo debe comenzar el descenso. ¿Qué tan lejos del aeropuerto debe de estar el avión, si quiero descender con un ángulo de 3°? -piloto-.

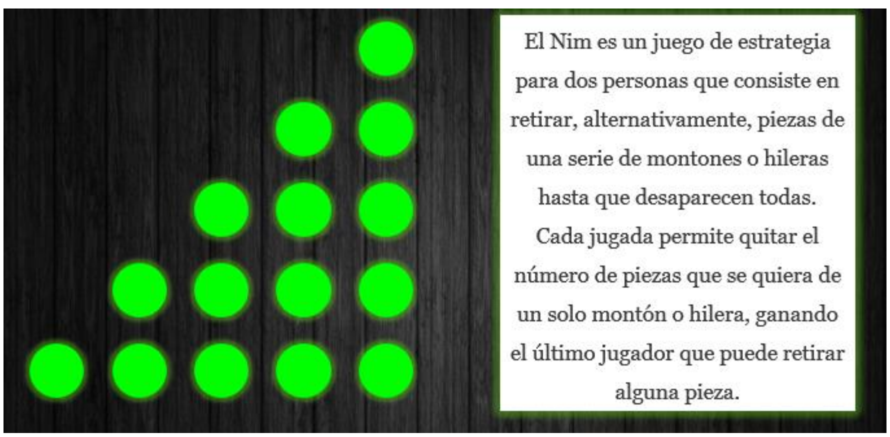
El piloto se observa peor cada segundo transcurrido.

- ¡Eso es fácil! –exclama usted. Veamos. Estamos a una altitud de 10km y queremos aterrizar en la pista con un ángulo de 3°. Hmmmm

¿Qué tan lejos del aeropuerto le dijo usted al piloto que empezara el descenso?

Cuarto momento: Actividad recreativa "el nim"

Como actividad recreativa se presentará a los estudiantes el juego llamado NIM, este es un juego muy famoso y antiguo.

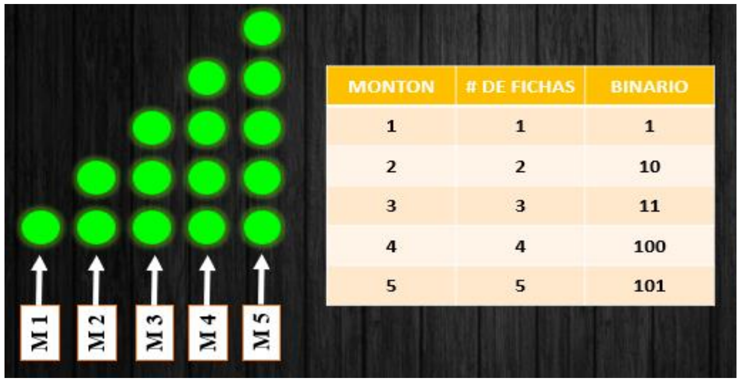


Posteriormente, se hará que los estudiantes jueguen al Nim, traten de encontrar una estrategia ganadora y, luego, se comprobara si sus estrategias funcionan. Después, se presentará una estrategia ganadora que se basa en el código binario. Por último, los estudiantes podrán jugar y comprobar la efectividad de la estrategia presentada.

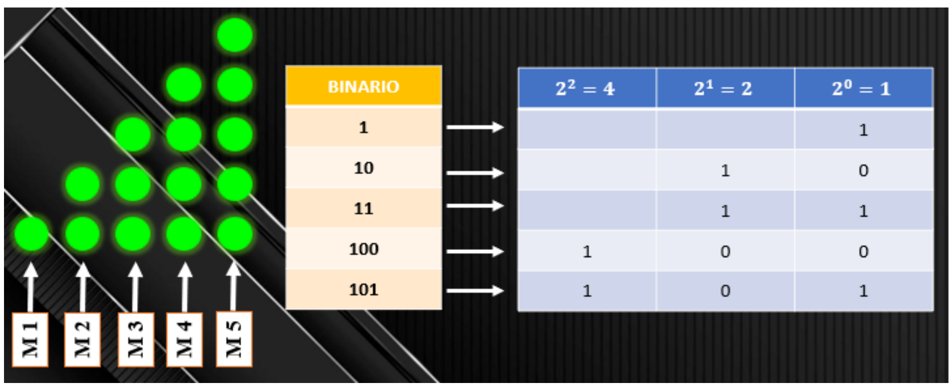
Pasos para ganar el Nim

En este juego se define posición ganadora a aquella posición del juego que permite aplicar una estrategia ganadora contra su adversario y posición perdedora a aquella posición del juego que no lo permite. Sin embargo, para saber si una posición es perdedora o ganadora, se deben seguir los siguientes pasos:

- Primero: escribir en binario el número de fichas que tiene cada montón en la siguiente tabla:

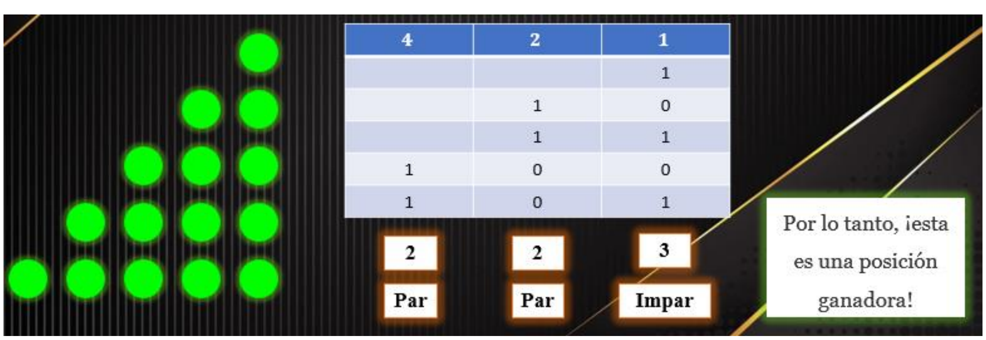


- Segundo: colocar los números en binario uno encima de otro, de forma que la cifra de la derecha de cada número esté en la misma columna como en la siguiente imagen:



Se marcan las 3 columnas con los números 4, 2 y 1 con el fin de señalar el valor de cada posición en binario, por ejemplo, en el grupo de 5 fichas aparece un 1 en las columnas del 4 y del 1 y efectivamente 4+1=5.

- Tercero: Contar el número de 1 que hay en cada columna. Si resulta que en todas las columnas hay un número par de 1, esta posición es perdedora y si al menos en una columna hay un número impar de 1, la posición es ganadora. La siguiente imagen muestra un ejemplo de una posición ganadora:



- Cuarto: si en un turno se tiene una posición ganadora, se debe jugar de forma que la posición que le quede al contrincante sea perdedora. Al repetir esto en todos tus turnos terminarás ganando.

Aplicación de la estrategia en el aula

Luego, se aplicará la estrategia ganadora del Nim con un ejemplo hipotético siguiendo los anteriores pasos de la siguiente forma:

La siguiente tabla muestra los datos al inicio del juego:

MONTON	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	1	1			1
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	4	100	1	0	0
5	5	101	1	0	1
			PAR	PAR	IMPAR

En primer lugar, observemos qué columnas son impares. En este caso hay una columna, la correspondiente al 1. Y quedémonos con uno de los montones que tenga ahí un 1. En este caso se puede elegir entre los montones 1, 3 y 5, en la siguiente imagen se señalan los montones de los cuales podemos elegir:

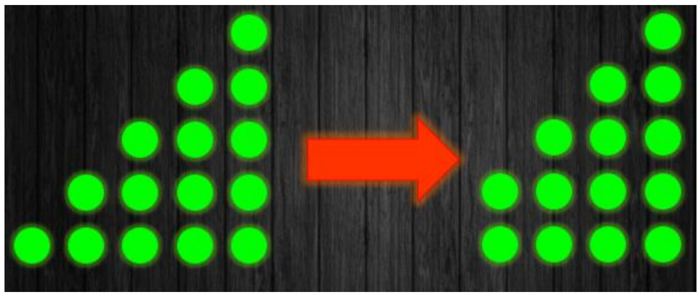
MONTON	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	1	1			1
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	4	100	1	0	0
5	5	101	1	0	1
			PAR	PAR	IMPAR

Ahora, elijamos el montón 1 para cambiar sus dígitos de manera que la columna 1 tenga un número par de 1. Es decir, en este caso cambiamos el número 1 por 0. Y, por tanto, procedemos a quitar una ficha del montón 1, de modo que, la tabla se altera de la siguiente forma:

MONTON	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	1	1			1
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	4	100	1	0	0
5	5	101	1	0	1
			PAR	PAR	IMPAR

MONTON	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	0	0			0
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	4	100	1	0	0
5	5	101	1	0	1
			PAR	PAR	PAR

Donde el Nim queda de la siguiente forma:



Luego, supongamos que nuestro contrincante quita 1 ficha del montón cuatro, quedando el juego y la tabla de la siguiente forma:

MONTON	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	0	0			0
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	4	100	1	0	0
5	5	101	1	0	1
			PAR	PAR	PAR

MONTON	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	0	0			0
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	3	11	0	1	1
5	5	101	1	0	1
			IMPAR	IMPAR	IMPAR

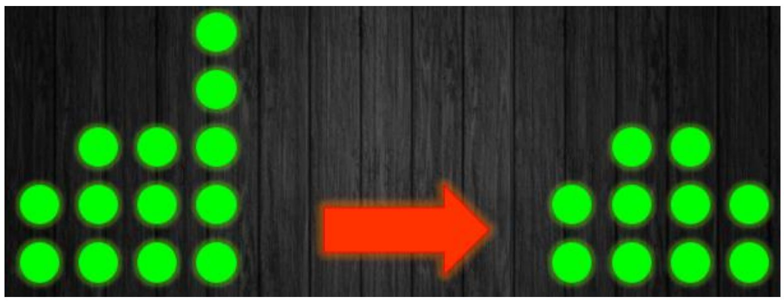
En este paso, lo que se hace es volver a observar qué columnas son impares, en este caso todas las columnas lo son, las correspondientes a 1, 2 y 4. De estas columnas nos quedamos con la que está más a la izquierda (en este caso la columna correspondiente a 4). Y nos quedamos con uno de los montones que tenga ahí un 1. En este caso se puede elegir solo el montón 5.

Luego, para conseguir que este montón cambie todas sus columnas a un número par de unos debemos cambiar cada número correspondiente a una columna impar, es decir, si en una columna impar se tiene un 1 lo cambiamos a 0 y si es 0 a 1, por tanto, proseguimos de la siguiente forma en la tabla:

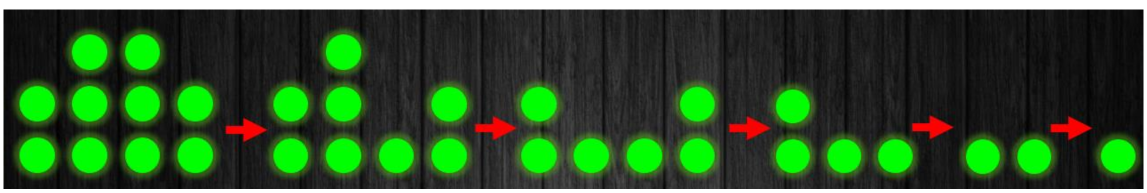
MONTO N	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	0	0			0
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	3	11	0	1	1
5	5	101	1	0	1
			IMPAR	IMPAR	IMPAR

MONTO N	# DE FICHAS	# EN BINARIO	4	2	1
1	0	0			0
2	2	10		1	0
3	3	11		1	1
4	3	11	0	1	1
5	2	10	0	1	0
			PAR	PAR	PAR

Esto significa que debemos quitar 3 fichas del montón 5, ya que el número de fichas en el montón 5 son 5 y necesitamos que solo queden 2 fichas, por tanto, el Nim debe alterarse de la siguiente forma:



Llegado a este punto, notemos que las fichas del nim forman una figura simétrica, de manera que debemos aplicar la primera estrategia ganadora sugerida.



Finalmente, se explicará el motivo por el cual esta estrategia funciona de la siguiente forma:

Si su rival tiene una posición perdedora, haga lo que haga, no podrá hacer que les toque una posición perdedora. Ya que al jugar solo se modifica uno de los números en binario y como en alguna cifra de ese número se debe cambiar un 0 por un 1 o al revés, la columna correspondiente a esa cifra tendrá un 1 más o menos que antes, por lo que, si antes había una cantidad par, ahora será impar. Así, si les toca jugar y su posición no es perdedora, siempre existirá una jugada que les permitirá dejarle una posición perdedora a su rival, es decir, aplicando la estrategia. Y, por tanto, si su rival no consigue nunca dejarles en una posición perdedora, no les podrán ganar, ya que llevarse la última ficha es dejar al rival en una posición perdedora (ya que no quedaría ningún 1 en ninguna columna).

Taller 5: Conociendo las Identidades Trigonométricas

Este taller está enfocado en la enseñanza de las identidades trigonométricas, las cuales son igualdades que relacionan las funciones trigonométricas, estas son muy importantes en la matemática, física, etc. Dichas identidades se utilizan para simplificar expresiones y poder obtener una más sencilla o conveniente para analizarla.

Como material lúdico para este taller se incorpora el juego llamado "Cuatro en Raya", el cual para poder solucionarlo los estudiantes deberán usar lo enseñado en clases, con este juego se pretende despertar el interés por las identidades trigonométricas de una forma divertida en la que los estudiantes pongan a prueba sus destrezas al buscar diferentes formas de solucionarlo.

Primer momento: Identidad trigonométrica fundamental.

Para adentrarse en el tema de las identidades trigonométricas, primero se dará a conocer que es una identidad trigonométrica, para posteriormente plantear un problema a los estudiantes en donde miren la importancia de usar la identidad fundamental de la trigonometría, luego se hará una prueba de esta identidad.

Segundo momento: ¿Cómo se obtienen algunas identidades trigonométricas?

Existen varias identidades trigonométricas, en esta sección se presentarán algunas de las identidades trigonométricas más comunes y usadas, y simultáneamente se explicarán algunas de sus pruebas y otras se dejará como tarea a los estudiantes, esto con el fin de mostrar la obtención de las principales identidades que se usaran en este taller**.**

Tercer momento: ¿Cómo obtener el seno y coseno de los ángulos notables sin el uso de calculadora?

Los ángulos notables son aquellos que aparecen más frecuentemente en la resolución de problemas, estos ángulos son los que miden 0°, 30°, 45°, 60° y 90°. En esta sección se enseñará a los estudiantes a como obtener el valor del seno y coseno de los anteriores ángulos sin el uso de calculadora.

Cuarto momento: Sección de problemas

En esta parte se plantearán algunos problemas en los cuales los estudiantes tendrán que hacer uso de lo aprendido en las anteriores secciones de este taller, su resolución se hará guiada de manera sincrónica y colectiva, promoviendo la participación de los estudiantes en cada respuesta.

Lista de problemas:

1. Una escalera de 20 metros se encuentra apoyada sobre una pared con un ángulo de inclinación de 15° con respecto al suelo. ¿Cuánto mide la pared en la que está apoyada la escalera?
2. Un cuerpo vibra de manera vertical, con la ecuación: $y = 8 \sin x$ donde y está en centímetros y x en segundos. ¿En qué posición se encuentra el cuerpo dentro de 120 segundos?
3. Simplifique $\cos^2 x + (\cot x \cdot \cos x)^2$

Quinto momento: Cuatro en raya trigonométrico

Finalmente, se presentará el juego cuatro en raya, este es el juego perfecto para divertirse mientras se aprende más sobre las identidades trigonométricas.

$\sin^2 x + \cos^2 x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\sin 75°$	$\cos 75°$	$1 + \tan^2 x$	$\frac{1}{\operatorname{sen} x}$
$\frac{1 + \cos(2x)}{2}$	$1 - \sin^2 x$	$\frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\tan 60°$	$\frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	$\cos 120°$
$\csc^2 x$	$\frac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\sin x \cdot \cot x$	$\sin(-x)$	$\sec 30°$	$\tan(2x)$
$\sin(x \pm y)$	$\csc 60°$	$\sin 360°$	$\cos(x \pm y)$	$\cos 15°$	$\frac{1}{\csc x}$
$\cos(-x)$	$\frac{1 - \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\cos^2 x - \sin^2 x$	$\tan 15°$	$\tan(-x)$
$\frac{1}{\cot x}$	$\sec(-x)$	$\cos x \cdot \tan x$	$\cos 135°$	$\sin(2x)$	$\tan 120°$

Material necesario:

- Un tablero como el de la figura adjunta.
- 10 fichas por jugador/ - un dado para establecer el orden

El objetivo del juego es muy sencillo: colocar 4 fichas en línea vertical, horizontal o diagonalmente. Parece fácil, pero un movimiento en falso puede acabar drásticamente con las posibilidades de ganar.

Reglas del juego:

- Juego para dos o tres jugadores.
- Se tira un dado para decidir el orden en el que jugaran los jugadores.
- Según el orden, cada jugador elige una casilla del tablero. Para ocuparla debe hallar el valor de la razón que aparece o simplificar la expresión trigonométrica de la casilla.
- Los jugadores implicados deciden si el valor hallado por cada estudiante es correcto o no.
- Si la respuesta es correcta, el jugador ocupa la casilla, si no lo es, el jugador pierde su turno.
- Gana el que consigue hacer "Cuatro en raya".

Taller 6: Descubramos la ley de senos y cosenos

Las matemáticas están presentes en todos los ámbitos de la vida, es por eso por lo que en esta ocasión se resaltará la importancia de las leyes de senos y cosenos, ya que estas dos leyes son de gran utilidad en variedad de situaciones tanto de la vida diaria como en ambientes más profesionales como lo son las ingenierías, arquitectura, electrónica, mecánica, física, matemáticas, entre otras.

Durante el desarrollo de este taller se pretende que el estudiante llegue por sí mismo a las leyes de senos y cosenos y comprenda como y cuando usar estas relaciones para su beneficio, mostrando una vez más la afinidad que tiene la trigonometría con la vida real.

Primer momento: Descubriendo las leyes de senos y cosenos

Para dar comienzo a este taller se quiere que los estudiantes utilicen lo aprendido en los anteriores talleres como herramienta para descubrir cómo surgen estas relaciones entre ángulos y lados de un triángulo, a las cuales se les llama leyes de senos y cosenos.

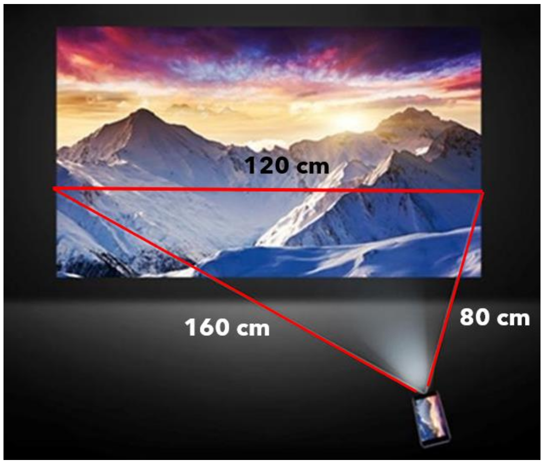
Además, en muchas ocasiones ocurre que los estudiantes tienen las fórmulas, pero no comprenden como y cuando usarlas, es por ello por lo que en esta sección también se quiere explicitar cuando es útil usar cada una de las leyes de senos y cosenos.

Segundo momento: Resolución de problemas

En esta parte los estudiantes harán uso de las leyes de senos y cosenos para resolver una serie de problemas que podrían encontrarse en la vida real y su resolución se hará guiada de manera sincrónica y colectiva para promover la participación de los estudiantes:

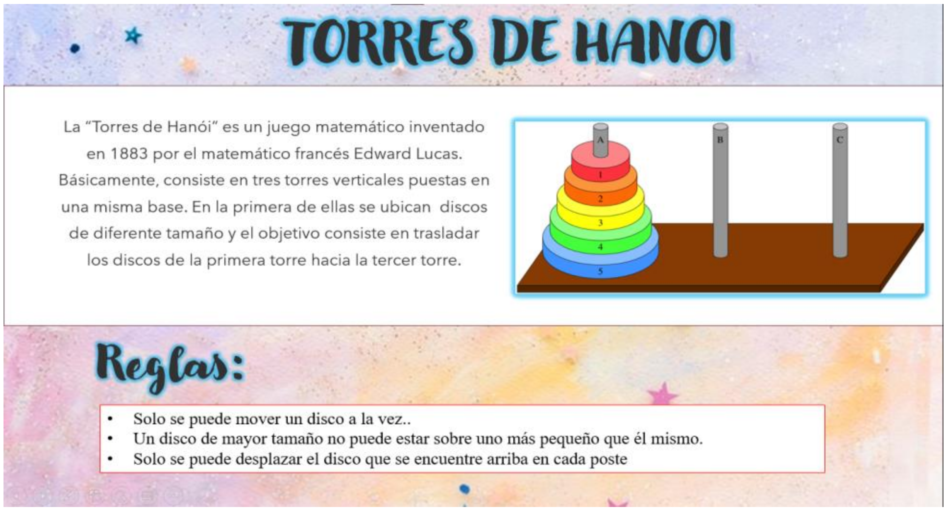
Lista de problemas:

1. Una persona observa la cima de un edificio con un ángulo de elevación de 35º, luego camina 3 metros hacia el edificio y vuelve a observar la cima, pero ahora con un ángulo de elevación de 48º. Determinar la distancia que le falta recorrer para llegar al edificio.
2. Dos barcos piratas salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110º. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto, como lo indica la figura siguiente. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?
3. Un proyector de películas proyecta una imagen tal y como lo muestra la figura. ¿Bajo qué ángulo el proyector está presentando la imagen?



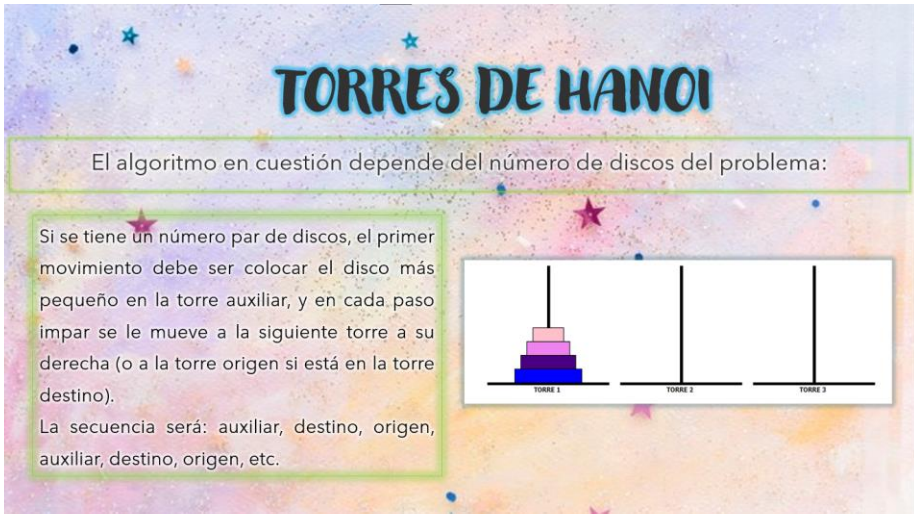
Tercer momento: Torres de Hanói

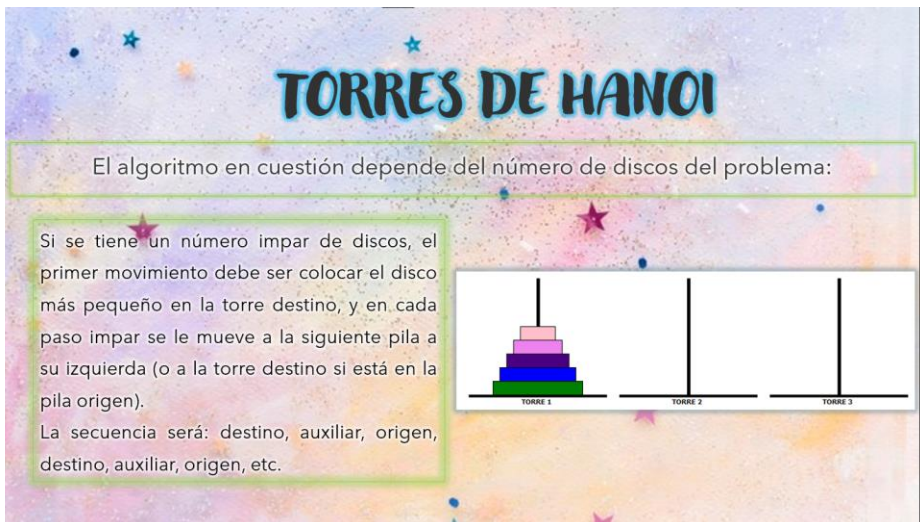
Como actividad final, se quiere que los estudiantes se diviertan jugando las "Torres de Hanói". Con este juego se espera que los estudiantes fomenten su creatividad, ingenio e imaginación y a la vez desarrollen su capacidad de resolución de problemas.



El siguiente enlace permite jugar en línea: http://www.uterra.com/juegos/torre_hanoi.php

Posteriormente de hacer que los estudiantes jueguen de manera libre se pasara a la pregunta: ¿HAY UNA ESTRATEGIA DE SOLUCION?, a la cual podrán responder de manera libre sus métodos de resolución, luego, se pasara a la explicación de la respuesta a la pregunta:





Finalmente, se contará la leyenda de las “Torres de Hanói”, esto con el fin de explicar la teoría matemática detrás de la mínima cantidad de movimientos para pasar los discos de una torre a otra. A continuación, se presenta la leyenda:

Dice la leyenda que, al crear el mundo, Dios situó sobre la Tierra tres varillas de diamante y sesenta y cuatro discos de oro. Los discos son todos de diferente tamaño e inicialmente fueron colocados en orden decreciente de diámetros sobre la primera de las varillas. También creó Dios un monasterio cuyos monjes tienen la tarea de trasladar todos los discos desde la primera varilla a la tercera. La única operación permitida es mover un disco de una varilla a otra cualquiera, pero con la condición de que no se puede situar encima de un disco otro de diámetro mayor. La leyenda dice también que cuando los monjes terminen su tarea, el mundo se acabará.

Si los sacerdotes fuesen capaces de realizar la mínima cantidad de movimientos y cada movimiento en un segundo, **¿cuál sería el tiempo necesario para trasladar la torre de discos? Y, por tanto, ¿cuándo acabaría el mundo?**