

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA PARA LA COMPRENSIÓN
DE DIFERENTES SIGNIFICADOS DE FRACCIÓN CON BASE EN LA TEORÍA DE
REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA**



UNIVERSIDAD
DEL CAUCA

Karen Milena Melo Olivar

Julián Martínez Franco

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en matemáticas

Popayán, 2022

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIAS PARA COMPRESIÓN DE
DIFERENTES SIGNIFICADOS DE FRACCIÓN CON BASE EN LA TEORÍA DE
REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA**



UNIVERSIDAD
DEL CAUCA

Karen Milena Melo Olivar

Julián Martínez Franco

Director de Práctica: Mg. Ángel Hernán Zúñiga

Documento de sistematización, requisito parcial para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en matemáticas

Popayán, 2022

Dedicatoria

Para Glorianny y Santiago.

Agradecimientos

Agradecemos a nuestras familias y amigos por apoyarnos y animarnos a continuar.

Resumen

Gran parte de las dificultades que los estudiantes presentan respecto al concepto de fracción son producto de su descontextualización y reducción; por este motivo esta intervención pedagógica centra su propósito en reconocer en el proceso de resolución de problemas la comprensión de diferentes significados de fracción alcanzada por estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Cajete. Para esto durante la ejecución de la intervención se recopilaron registros de dieciséis actividades que consistían principalmente en procesos de transformación de registros de representación de una fracción, inmersas en situaciones problema contextualizadas de acuerdo al quehacer cotidiano del estudiante, que permitieran identificar presencia de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión. El análisis de la intervención se realizó bajo una metodología cualitativa y se obtuvieron datos descriptivos que permitieron elaborar conclusiones a partir de ellos y efectuar la evaluación del proceso de comprensión de significados de fracción de los estudiantes a lo largo la intervención. El análisis y evaluación de los resultados de la ejecución de la estrategia de resolución de problemas se hizo desde los planteamientos sobre comprensión establecidos en la Teoría de Registros de Representación Semiótica y permitieron identificar la comprensión de los significados de fracción como parte-todo, operador y cociente obtenida por los estudiantes.

Palabras clave: significado de fracción, tratamiento, conversión, comprensión, resolución de problemas.

Abstract

A large part of the difficulties that students present regarding the concept of fraction are the product of its decontextualization and reduction; For this reason, this pedagogical intervention focuses its purpose on recognizing in the problem-solving process the understanding of different fraction meanings reached by seventh grade students of the Cajete Educational Institution. For this, during the execution of the intervention, records of sixteen activities were collected, which consisted mainly of transformation processes of representation records of a fraction, immersed in problem situations contextualized according to the daily tasks of the student, which allowed to identify the presence of cognitive activities. treatment and conversion. The analysis of the intervention was carried out using a qualitative methodology and descriptive data were obtained that allowed drawing conclusions from them and carrying out the evaluation of the process of understanding the meanings of the fraction of the students throughout the intervention. The analysis and evaluation of the results of the execution of the problem-solving strategy was made from the comprehension approaches established in the Theory of Semiotic Representation Registers and allowed to identify the comprehension of the meanings of fraction as part-whole, operator and quotient obtained by the students.

Keywords: fraction meaning, treatment, conversion, comprehension, problem solving.

Tabla de contenido

Introducción	10
Escenario, inmersión y Docencia.	12
Escenario de práctica	12
Características del escenario	12
Organización curricular	12
Evaluación Institucional	14
Inmersión.	15
Caracterización de los estudiantes.	18
Metodología del profesor titular	19
Docencia	19
Planeación	20
Ejecución	24
Evaluación	27
Problemática, Marco Conceptual y Análisis de Registros	30
Problemática a reflexionar	30
Pregunta orientadora	32
Objetivo General	32
Objetivos específicos:	32
Marco conceptual	33
Número racional:	33

	8
Fracción Propia e Impropia	33
Significados de fracción	33
Comprensión desde la perspectiva semiótica.	35
Resolución de problemas	37
Fases de la resolución de problemas.	38
Metodología	39
Discusión de resultados	42
Actividad 1	43
Actividad 2	49
Actividad 3	56
Actividad 4	60
Actividad 5	65
Actividad 6	68
Actividad 7	74
Actividad 8	78
Actividad 11	86
Actividad 13	88
Actividad 15	97
Actividad 16	101
Conclusiones y recomendaciones.	111
Referencias Bibliográficas	113
Anexos	116
Anexo 1. Taller: Situaciones para representar fracciones de unidad simple.	116
Anexo 2. Taller: Ejercicios de representación de unidad compuesta.	116
Anexo 3. Taller: situaciones de unidad compuesta y unidad simple.	117

	9
Anexo 4. Taller: Primeros problemas con unidad compuesta	118
Anexo 5. Evaluación: Fracción como parte todo	118
Anexo 6. Taller: Problemas de fracción como operador y cociente con fracciones propias	119
Anexo 7. Taller: Problemas de fracción como operador y cociente con fracciones impropias	121
Anexo 8. Taller: Problemas de fracción como operador con fracciones propias e impropias	121
Anexo 9. Evaluación Fracción como operador y como cociente	123
Anexo 10. Taller final: Problemas de fracción como parte todo y operador	124

Introducción

Este es un documento de sistematización de práctica pedagógica, la cual fue realizada en el grado séptimo de la Institución Educativa Cajete, con el fin de reconocer en el proceso de resolución de problemas, apropiación de diferentes significados de fracción.

El presente documento, resultado de esta sistematización se ha organizado en los siguientes capítulos:

Un bloque descriptivo denominado escenario, inmersión y docencia el cual, describe las características principales del escenario, las actividades de inmersión realizadas en la institución a lo largo de dos periodos académicos con el acompañamiento del profesor de matemáticas de los grados sexto y séptimo: Adriana Orozco; y la fase de docencia directa que detalla la planeación, ejecución y evaluación de la intervención pedagógica señalando la cronología, las herramientas, estrategias y elementos, considerados en el diseño curricular, para llevarla a cabo.

Luego, después de realizar un acercamiento a la realidad institucional y conocer posibles situaciones a problematizar, se presenta el capítulo denominado problemática objetivos y marco conceptual, donde se refiere la problemática finalmente elegida y el respectivo marco conceptual para responder a los objetivos planteados en la intervención de dicha problemática. También se analizan los registros obtenidos a lo largo de la docencia directa, a partir del compendio de anotaciones asentadas en el diario de campo, mediante la teoría semiótica de representaciones determinando la apropiación o no apropiación de significados de fracción por parte de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Cajete; obedeciendo a la estructura propuesta en los objetivos específicos.

Por último, en el apartado de conclusiones y recomendaciones se presentan una síntesis de lo realizado y las principales inferencias a partir de todas las actividades realizadas descritas en los anteriores dos capítulos.

Escenario, inmersión y Docencia.

Escenario de práctica

La práctica tuvo la posibilidad de desarrollarse en el grado séptimo de la Institución Educativa Cajete, institución pública del suroccidente de Popayán,

Características del escenario

La Institución Educativa Cajete es una institución pública formal, ubicada en la zona rural del suroccidente de Popayán en la vereda Cajete. Esta ofrece los niveles de preescolar, básica y media académica y su plan de estudios está en proceso de articulación desde grado transición hasta el grado 11”. (Institución Educativa Cajete, 2015, p.7).

La naturaleza del escenario de práctica es de naturaleza escolar, comprendido por los grupos 1, 2 y 3 de grado séptimo de la institución.

Es un escenario apropiado para realizar una reflexión sobre el modo de aplicar los aprendizajes adquiridos puesto que las diferencias culturales no son tan marcadas; sin embargo, existen una multiplicidad de circunstancias e identidades que lo conforman, características como la historicidad, personalidad y forma de ver el mundo, de cada uno de los estudiantes, que influyen en su manera de aprender, hecho que vale la pena estudiar y analizar.

Organización curricular

El plan de área en matemáticas de grado séptimo de la institución, contempla las políticas del estado en formación matemática. Está dividido en tres unidades didácticas:

1. **Números enteros:** la cual contiene temas como, los números enteros; su orden y operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división entera y operaciones combinadas). Donde el objetivo principal es que los estudiantes puedan resolver problemas cotidianos donde se usen operaciones entre números enteros y den solución a las mismas de manera oral o escrita.
2. **Números racionales:** la cual contiene los siguientes temas: expresión decimal de los números racionales, fracción correspondiente a una expresión decimal, números racionales en la recta numérica, sistema de coordenadas cartesianas, operaciones en su representación de fracción y problemas que requieran el uso de fracciones, con el fin de que el estudiante sea capaz de resolver problemas cotidianos donde se usen operaciones entre números racionales.
3. **Proporcionalidad, ecuaciones, perímetros y áreas:** La cual aborda los siguientes temas: razones y proporciones, magnitudes correlacionadas, proporcionalidad directa, regla de tres simple directa, proporcionalidad inversa, regla de tres simple inversa, ecuaciones con estructura aditiva en los números enteros, ecuaciones con estructura multiplicativa en los números enteros, perímetros y áreas de figuras planas (triángulo, cuadrado, rectángulo, trapecio, rombo, paralelogramo, polígono regular, círculo).

Evaluación Institucional

Respecto a la evaluación la institución define tres periodos académicos, donde la calificación final de cada asignatura es el ponderado de tres partes del proceso formativo:

Ser: aludiendo a la parte humana y actitudinal del estudiante, evalúa su comportamiento, su formación en valores como la honestidad, el respeto hacia los demás miembros de la comunidad educativa y el cumplimiento del reglamento estudiantil. La cual equivale a un porcentaje de 25% de la calificación.

Hacer: se refiere a todas las actividades académicas realizadas en clase o en casa, tanto individuales como en grupo: como ejercicios escritos, resolución de talleres, participaciones en clase. Proporciona también el 25% de la calificación.

Saber: hace alusión a los resultados de pruebas escritas e individuales, propuestas al final de cada tema perteneciente al currículo académico que se esté desarrollando durante las clases. Corresponde al 50% de la calificación final.

En conclusión, la manera en que se organiza el plan de estudios, obedece a las políticas establecidas por el Ministerio de Educación Nacional lo que posibilita la inmersión y participación de la actividad curricular de la institución con el acompañamiento del docente titular.

Inmersión.

La Institución Educativa Cajete posibilita la realización de un mejor acercamiento a las características de la población estudiantil y de los maestros, a razón de que uno de los practicantes es exalumno de la institución y se ve asimismo inmerso en el entorno social, económico, cultural de los estudiantes y cuenta con conocimiento previo de las metodologías de enseñanza y evaluación de los profesores de la institución.

Se llevó a cabo una recopilación de documentación actualizada sobre la caracterización de los estudiantes y cómo se desarrolla el proceso de enseñanza por parte de los profesores actualmente, a qué modelo pedagógico se ve sujeto y los objetivos generales de la formación matemática realizada en la institución educativa; con el propósito de comenzar a reconocer las problemáticas en el contexto institucional.

Las situaciones que se presentan a nivel educativo son importantes para fortalecer el desarrollo de habilidades y competencias del practicante, por el hecho de generar preguntas como: ¿Qué estrategia utilizar para enseñar un tema en matemáticas? ¿Qué factores del aula y fuera de esta influyen en la comprensión o incomprensión de un tema? y ¿Cómo asociar un tema en matemáticas con un elemento o labor del contexto sociocultural del estudiante de tal manera que esta asociación pueda influir de manera positiva en la interiorización de aprendizajes?

Las preguntas anteriores son fundamentales para el diseño de una intervención pedagógica adecuada al contexto educativo de la institución. Por este motivo, al interior del escenario se realizaron actividades de inmersión con estudiantes de grado sexto y séptimo.

Las actividades de inmersión en la institución se realizaron en dos partes: la primera, en el último periodo del año lectivo 2021, en un entorno de regreso progresivo a la presencialidad, se realizaron actividades en los grupos 1, 2 y 3 de grado sexto y séptimo; y la segunda en el primer periodo del año lectivo 2022 en un entorno de completa normalidad, se realizaron observaciones a los grupos 1, 2 y 3 del grado séptimo de la institución.

Las actividades de inmersión realizadas durante la primera parte fueron las siguientes:

- Observación y registro de datos, se tomaron registros de la metodología usada por la profesora, de la forma en que se comunica, y pretende transmitir los contenidos a los estudiantes, metodología de evaluación, dinámicas del aula de clase y actitud de los estudiantes hacia la clase.
- Entrevista a los estudiantes, con el objetivo de familiarizarse con ellos y conocer algunos rasgos generales de su contexto personal, que pueden influir en su aprendizaje: dado que los tiempos reducidos en la institución no permiten identificar este tipo de rasgos. Frente a la entrevista la mayoría de los estudiantes se mostraron interesados y además permitió realizar un acercamiento a estos.
- Encuesta a los estudiantes, se usaron las planillas de cada salón, donde cada estudiante escribió al frente de su nombre los temas en los que más presentaban dificultades o que no entienden en su totalidad, los cuales fueron: fracciones, perímetro, área, volumen y división con decimales.

En la segunda parte de las actividades de inmersión se realizó una observación al trabajo de clase de los estudiantes y del profesor titular, enfocando la atención en los conceptos que presentaban mayor dificultad y los posibles aspectos en la metodología que podrían estar provocando las dificultades.

Estas actividades constituyeron un primer acercamiento a las posibles problemáticas objeto de intervención y permitieron concluir que los estudiantes presentan gran dificultad al abordar temas relacionados con fracciones.

Un segundo propósito de la inmersión fue conocer qué posibles estrategias o metodologías se pueden desarrollar con mira al proyecto de intervención, en ese sentido cabe resaltar que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Institución Educativa Cajete se enfocan en la resolución de problemas, acudiendo a situaciones reales que vayan de acuerdo a la geografía, costumbres e idiosincrasia de la comunidad con el fin de que los estudiantes adquieran dichas habilidades en cualquiera de estos aspectos. (Institución Educativa Cajete, 2017, p. 3-4)

Adicionalmente se analizaron diferentes aspectos de la actividad académica, el contexto social, económico y cultural, a través de la caracterización de los estudiantes tomada del plan de asignatura de la Institución Educativa Cajete. Además, se analizó la metodología empleada por el profesor de matemáticas de grado sexto y séptimo mediante las observaciones registradas durante las clases.

Caracterización de los estudiantes.

Respecto al contexto social, económico y cultural se encontró que dentro de la población estudiantil hay un 2,96% con ascendencia indígena, 21,13% son desplazados y un 1,4% presenta algún tipo de discapacidad, ya sea de tipo motriz o de problemas de aprendizaje; en cuanto a la estratificación, la mayor parte de los estudiantes, el 83,8%, tienen viviendas en estrato 1, el 10,45% en estrato 2; el 3,4% habita en viviendas sin estratificación, el 2,01% en estrato 3 y el 0,23% en estrato 4; no se encuentran estudiantes en estratos 5 y 6. Además el entorno social de los estudiantes es bastante heterogéneo, se puede afirmar que la mayor parte de ellos provienen de familias disfuncionales, con un gran número de hogares donde la madre es cabeza de familia,

y otros conviven con familiares distintos a sus padres. (Institución Educativa Cajete, 2017, p. 12-13)

En cuanto al rendimiento académico de los estudiantes de los grupos 1, 2 y 3 de grado sexto y séptimo se pudieron establecer unos niveles o categorías en los que se divide la totalidad de los estudiantes: estudiantes con rendimiento alto, medio, bajo y muy bajo.

Metodología del profesor titular

Durante el proceso de enseñanza en la primera parte de retorno a la presencialidad: La profesora titular tuvo en cuenta los conocimientos previos al nuevo tema a enseñar y conocimientos que se puedan tener a priori. Posteriormente explicó los temas descritos en la guía usando diferentes recursos didácticos, sobre todo el uso de situaciones cotidianas en las que se pueden aplicar los contenidos que estaban siendo impartidos. Respecto a la evaluación, los estudiantes entregaron las actividades de las guías resueltas y estas fueron calificadas por la profesora. En el caso de los estudiantes que debían guías, la profesora permitía presentarlas con retraso, pero estos debían presentar una sustentación de sus respuestas, donde se realizaban preguntas como: ¿Qué proceso usó para resolver este ejercicio?, ¿Cómo obtuvo este resultado?, ¿Qué significa este resultado obtenido? Además, es imprescindible el anexo de los procesos de multiplicación y división inmersos en el desarrollo de cada uno de los ejercicios propuestos en la guía.

Docencia

A continuación, se presenta una propuesta de intervención construida a partir del análisis y reflexión de las características de los procesos de enseñanza y aprendizaje del área de matemáticas y los sujetos que la conforman, la cual está constituida por profesores y estudiantes participantes del proceso educativo del grado séptimo de la Institución Educativa Cajete.

La intervención pedagógica enfatiza en el proceso de resolución de problemas, contextualiza el concepto de fracción y abarca algunos de sus significados de manera más completa por medio de problemas y actividades de representación, con diversas estructuras que requieren distintos planes de resolución.

Después de analizar los diferentes procesos institucionales se concluyó que es pertinente diseñar una intervención alrededor de diferentes significados de fracción; fracción como operador, fracción como parte-todo y fracción como cociente. Debido a que una de las principales temáticas que se abordan en grado séptimo son los números racionales y dado que la mayoría de estudiantes presentan dificultades en el concepto de fracción y temas que involucran números fraccionarios, es pertinente enfocar la intervención pedagógica, en hacer un reconocimiento de cómo el proceso de resolución de problemas, permite a estudiantes de grado séptimo dos y tres de la Institución Educativa Cajete, la comprensión de diferentes significados de fracción.

A continuación, se describe el proceso de docencia entendido como la planeación de la intervención pedagógica, su ejecución y evaluación del trabajo realizado por los estudiantes.

Planeación

La planeación se refiere a la parte reflexiva del diseño y conformación de la intervención; y la planificación de actividades que se ejecutaron posteriormente. Además, se establecieron los objetivos y se definió el marco conceptual para responder al cumplimiento de estos.

La estructura general de la intervención señala la presentación del concepto en este caso cada uno de los significados de fracción, seguido de actividades para reforzar estos conceptos y desarrollo de problemas respectivos a cada significado.

Por lo anterior, la planeación de la intervención pedagógica tuvo ocho momentos:

Definición de objetivos: Se fijó un objetivo general y los objetivos específicos de acuerdo a lo que el desarrollo de la intervención se propone respecto a la problemática. Para así determinar las actividades a desarrollar por parte de los practicantes en la ejecución y reflexión de la intervención

Consulta de definiciones y problemas: Se consultaron las definiciones de enfoques de fracción seleccionados para ser parte del desarrollo de la intervención y diferentes problemas, en páginas web y sistematizaciones anteriores de práctica pedagógica

Evaluación y clasificación de los problemas encontrados: se realizó una evaluación y una clasificación de los problemas hallados, de acuerdo a los significados de fracción correspondientes, y aquellos problemas que no correspondían a ninguno de los enfoques de fracción que se pretendían trabajar fueron descartadas.

Ejemplo: Manuel y Carlos han comprado un regalo a un amigo. Manuel ha puesto $\frac{5}{6}$ del precio. Si Carlos ha puesto 24 euros, ¿Cuánto ha puesto Manuel?

En el ejemplo anterior el problema enunciado no corresponde al tipo de problema buscado ya que su forma de solución no se relaciona directamente con los significados de fracción propuestos en la intervención

Ajuste de los problemas: los problemas encontrados se ajustaron o editaron de acuerdo al contexto socio-económico y cultural de los estudiantes

Ejemplo: Por un cuarto de jamón ibérico he pagado 45 euros. ¿Cuánto he de pagar por un kilo y 200 gr?

El enunciado anterior presenta términos que tal vez el estudiante no conozca como “jamón ibérico”, además se consideró adecuado cambiar la moneda por la usada en el contexto del estudiante es decir pesos.

El problema anterior fue modificado y quedó de la siguiente manera:

“El kilo de pollo cuesta \$13.000 si compró 1 kilo y $\frac{2}{3}$ de kilo ¿cuánto me costó el pollo que compré?”

Elaboración de problemas: Debido a que muchos de los problemas hallados no correspondían a la intención didáctica elegida fueron descartados y se procedió a elaborar una lista de problemas que sí permitiera el refuerzo de los enfoques de fracción seleccionados.

Ejemplo de un problema para significado parte-todo:

- Verificar si la siguiente situación es correcta.

Tengo un ramo con 14 flores, de las cuales $\frac{3}{7}$ son girasoles, $\frac{1}{2}$ tulipanes y $\frac{1}{14}$ son rosas.

Ejemplo de un problema para significado de operador:

- De un depósito, que estaba lleno, se han sacado esta mañana $\frac{5}{8}$ de su capacidad y por la tarde $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba. Si la capacidad del depósito es de 160 litros, ¿Cuántos le quedan?

Elaboración del material didáctico: se elaboró el material correspondiente al desarrollo curricular de cada enfoque, es decir: secuenciación de las actividades, elaboración de talleres y evaluaciones, organización de los problemas según su dificultad y método establecido de resolución, y organización de la presentación de cada concepto o enfoque y su explicación.

Definición del marco conceptual: Dada la finalidad de la intervención se consideró oportuno consultar las respectivas definiciones de los significados de fracción seleccionados, y de los elementos conceptuales fundamentales sobre los que se diseñó la intervención, como el proceso de resolución de problemas y la comprensión de los significados de fracción.

Elaboración del cronograma: Se elaboró una matriz con las actividades a efectuar y la fecha y tiempo estimado para su ejecución, incluyendo espacios a disposición por posibles inconvenientes o que el cubrimiento de un tema tome más tiempo del estipulado.

Figura 1

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	...	Sn
A11	X	X								
A12		X	X							
A13		X	X							
A14			X							
....										
A21				X	X	X				
A22				X	X	X	X	X		

Nota: Sn representa las semanas y Aij representa las actividades, donde la componente i: 1, 2, 3; indica cada momento de la intervención; y la componente j el número de actividad por cada momento de la intervención. Fragmento de la matriz usada para la planeación del cronograma de actividades. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Ejecución

La intervención pedagógica se llevó a cabo con la totalidad de los grupos de estudiantes de grado séptimo de la institución 7- 1, 7- 2, 7- 3, de los cuales solo se consideraron para la toma y discusión de registros los grupos 7-2 y 7-3 con los cuales se obtuvo suficientes datos.

Se realizaron las siguientes actividades de la siguiente forma:

Actividad 1: se presentó el concepto de fracción como parte-todo, se explicó el concepto mediante un breve ejemplo y se realizaron transformaciones de representaciones propuestas en carteleras de forma individual durante la clase.

Actividad 2: se propusieron cinco situaciones que refieren a fracciones de una unidad simple, para que los estudiantes realizaran la representación gráfica y numérica de las fracciones inmersas en dichas situaciones. (Anexo 1)

Actividad 3: Se presentó a los estudiantes el concepto de unidad compuesta mediante gráficos propuestos en carteleras y se propuso la realización de una representación de una fracción de una unidad compuesta.

Actividad 4: Se propusieron situaciones similares a la actividad N° 2, pero esta vez involucrando fracciones de una unidad compuesta. Se resolvieron durante la clase de forma individual. (Anexo 2)

Actividad 5: se propuso el primer problema por medio de un enunciado y una representación gráfica, para desarrollar como tarea en casa.

Actividad 6: Se dejó el primer taller para resolver en casa de forma individual con nueve situaciones para representar fracciones de unidades simples y compuestas. (Anexo 3)

Actividad 7: Se desarrolló un segundo taller en grupos de dos personas, sobre problemas de fracción como parte todo. (Anexo 4)

Actividad 8: Se realizó la evaluación de fracción como parte todo, de forma escrita e individual en un lapso de 2 horas. (Anexo 5)

Actividad 9: Se abordó el tema de multiplicación y división de fracciones, con el fin de que estas no representaran un obstáculo en el desarrollo de las actividades de los siguientes significados de fracción: fracción como operador y fracción como cociente; ya que estas operaciones no fueron cubiertas por el profesor titular en el currículo desarrollado anterior a la intervención. Se llevaron a cabo actividades como explicación del algoritmo correspondiente a la multiplicación y división de fracciones mediante ejemplos resueltos en clase, con las participaciones de los estudiantes. Además, se realizó nuevamente la explicación del procedimiento a seguir para realizar sumas y restas de fracciones con diferente e igual denominador ya que los estudiantes, aunque ya lo habían trabajado, no recordaban cómo se hacía.

También se dejó un taller para trabajar en casa de veintidós ejercicios de suma, resta, multiplicación y división de fracciones con el fin de que los estudiantes practiquen estas operaciones, posteriormente se realizó un examen corto con un ejercicio de cada operación, que debía resolverse en un lapso máximo de 30 minutos.

Como los estudiantes presentaron muy bajo rendimientos en el examen mencionado en el párrafo anterior; se realizó nuevamente una explicación de la forma que debía resolverse, usando los ejercicios propuestos en el examen realizado y se programó un nuevo examen para realizarse una semana posterior al primer examen.

Actividad 10: Se presentó el concepto de fracción como operador y se explicó por medio de un ejemplo para ilustrar mejor el procedimiento descrito en la definición presentada a los estudiantes.

Actividad 11: Se trabajaron cuatro ejercicios en clase de forma individual de hallar el resultado de multiplicar una cantidad por el numerador de una fracción y dividirla entre el denominador de ella.

Actividad 12: Se propuso el primer problema que involucró el concepto de fracción como operador, refiriéndose a fracciones propias para resolver en clase. Además, se explicó el concepto de fracción como cociente; el cual está involucrado en el desarrollo de problemas de fracción como operador, dando introducción a estos dos nuevos significados de fracción los cuales se van a ver inmersos en los problemas que se van a plantear en las actividades continuas a esta.

Actividad 13: Se resolvió un taller en clase con once problemas de fracción como operador durante dos clases, en grupos de dos personas. (Anexo 6)

Actividad 14: Se desarrollaron tres problemas de forma similar a la actividad 12 con la diferencia que los enunciados de los problemas hacían alusión al uso de una fracción impropia como operador. (Anexo 7)

Actividad 15: se propuso un taller con ocho problemas de fracción como operador con fracciones propias e impropias para resolver en clase de forma individual. (Anexo 8)

Actividad 16: se realizó la evaluación de fracción como operador, la cual comprendió en hallar una cantidad a partir de una fracción de un valor determinado y cuatro problemas de fracción como operador. (Anexo 9)

Actividad 17: se propone un taller final con problemas de fracción como parte-todo y operador. (Anexo 10)

Evaluación

Se evaluó la apropiación de los significados a través del desarrollo y resolución de problemas, en talleres en clase, tareas, evaluaciones escritas y salidas al tablero. Los criterios de evaluación considerados para emitir un juicio valorativo fueron principalmente, la originalidad del trabajo realizado, el cumplimiento de la entrega en los plazos establecidos y la apropiación de los significados de fracción trabajados.

La valoración del trabajo realizado por los estudiantes de ambos grupos se realizó según el sistema institucional de evaluación; se asignó una valoración numérica a cada actividad entregada por los estudiantes en un rango de 1 a 5 de acuerdo a los criterios anteriores de la siguiente forma:

Tabla 1

Rúbrica de evaluación para la calificación de las actividades.

Criterio	Excelente	Regular	Insuficiente	Nota
Originalidad	2	1	0	
	Desarrolló la actividad	Desarrolló parte la actividad	No desarrolló la actividad	
Apropiación de significados	2	1	0	
	Presenta adecuada apropiación de los significados sin dificultades operatorias	Presenta algunas dificultades operatorias o en la comprensión de los significados	Presenta numerosas dificultades operatorias y en la comprensión de los significados	
Entrega a tiempo	1	0.5	0	
	Entrega en el plazo establecido	Entrega poco tiempo después del plazo establecido	Entrega mucho tiempo después del plazo	

Nota: La rúbrica evalúa el desempeño de los estudiantes de acuerdo a tres criterios y cada uno de estos puede ser calificado como excelente, regular o insuficiente. La nota final de la actividad presentada por el estudiante es equivalente a la suma de la calificación obtenida en cada criterio.

K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Las calificaciones obtenidas por los estudiantes se entregaron al profesor titular para elaboración del informe y tomada en cuenta para la calificación total de la asignatura de matemáticas del segundo periodo y parte de la calificación del tercer periodo.

Cabe destacar que las actividades de resolución de problemas permitieron al estudiante acercarse a los significados de fracción como parte todo, operador y cociente; además, de realizar un repaso a las operaciones de suma resta multiplicación y división de fracciones, donde se identificaron varias dificultades de diferente índole que presentaron un obstáculo al momento de dar respuesta al problema planteado.

Problemática, Marco Conceptual y Análisis de Registros

En este apartado se presenta la reflexión realizada a la docencia descrita en el capítulo precedente y a las actividades que conformaron la inmersión; definiendo la problemática a intervenir y los objetivos que se pretenden satisfacer con dicha intervención, también el marco conceptual con el que se responde a los objetivos y establece el lenguaje en el que se explican, describen y analizan los registros obtenidos del trabajo realizado por los estudiantes.

Problemática a reflexionar

La dificultad principal observada a lo largo de todas las actividades de inmersión fue la presentada por los estudiantes de los grados sexto y séptimo; al encontrarse con temas o situaciones, que involucran fracciones. Asimismo, el plan de área en matemáticas aborda en grado séptimo los números racionales fundamentalmente en su forma de fracción, como se especifica en el plan de área caracterizado en el apartado de organización curricular.

Cabe destacar que la forma actual de orientar los procesos de enseñanza aprendizaje de los números racionales en la escuela, es fuente de conceptualizaciones erróneas por parte de los estudiantes (Obando, 2003), además, Gairín y Muñoz (2005), en un estudio realizado sobre libros de textos para la enseñanza de los racionales en el nivel de educación secundario en España, afirman que el concepto de número racional queda opacado por el estudio de aspectos procedimentales, haciendo difícil la transferencia de este concepto a problemas de la vida diaria. Vemos como en muchas ocasiones un número racional se reduce a solo un cociente de números enteros o naturales, dejando de lado otras formas de ver al número racional por ejemplo el fraccionamiento de una unidad o un reparto proporcional. Quispe y Gallardo (2009), al investigar

la comprensión del número racional positivo, encuentran que los estudiantes de secundaria tienen un conocimiento impreciso de número racional, consideran que los racionales están formados por cocientes de números enteros sin tener conciencia del porqué el denominador es diferente de cero.

La reducción del número racional a un cociente de números representa un gran problema en la interpretación y resolución de diferentes problemas, en los que se ven involucrados los números racionales y sus diferentes representaciones y significados.

Teniendo en cuenta la naturaleza y complejidad del número racional es necesario que en los procesos de enseñanza se posibilite su significación y comprensión desde el planteamiento de situaciones que involucren sus diferentes interpretaciones y representaciones principalmente la de fracción la cual es una de las más importantes curricularmente. Además, se requiere la explicitación de las relaciones entre estas.

Por lo anterior, y dada la preocupación por el fortalecimiento de competencias de resolución de problemas, manifestada por el cuerpo profesoral en las sesiones de evaluación institucional y la relevancia curricular del concepto de fracción; se considera pertinente enfocar la intervención pedagógica en cómo una estrategia basada en la resolución de problemas y todos los procesos cognitivos inmersos en esta actividad, permite al estudiante la comprensión de significados de fracción.

Pregunta orientadora

De la problemática planteada preliminarmente surge la siguiente pregunta: ¿Cómo una estrategia basada en la resolución de problemas en matemáticas permite la comprensión de diferentes significados de fracción?

Con el propósito de dar respuesta a la pregunta precedente, la intervención pedagógica plantea el siguiente objetivo general y sus correspondientes objetivos específicos.

Objetivo General

Reconocer en el proceso de resolución de problemas la comprensión de diferentes significados de fracción alcanzada por estudiantes de séptimo grado.

Objetivos específicos:

- Configurar problemas referidos a diferentes significados de fracción
- Examinar las actividades realizadas por los estudiantes en la resolución de problemas diseñados.
- Inferir de las actividades examinadas los significados de fracción comprendidos por los estudiantes de séptimo dos y tres de la Institución Educativa Cajete.

Marco conceptual

Número racional

El número racional se define como una pareja de números enteros llamados numerador y denominador, en donde en la relación a/b , b sea diferente de 0. Se escribirá así: a/b donde a es el numerador y b el denominador, además según Kieren (1988), “los números racionales” son los

números expresables como razón o cociente de dos números enteros, por consiguiente, entre ellos contamos con todas las fracciones, porcentajes y los decimales representables mediante fracciones, esto es, los decimales finitos y los periódicos. (Tamayo et al., 2011).

Kieren (1976, p. 133), hace referencia a siete formas de interpretar el número racional, entre ellas encontramos: fracciones, decimales, pares ordenados (clases equivalentes), medidas, cocientes, operadores y razones.

Fracción Propia e Impropia

Cuando el numerador de una fracción es mayor al denominador de la misma, decimos que la fracción es impropia. En otras palabras, si el cociente r de la fracción es mayor a 1, entonces la fracción es impropia. Por ejemplo, $\frac{9}{4}$ es una fracción impropia porque $9 > 4$. (Soto, 2011, p. 65) y $r > 1$.

Cuando el numerador de una fracción es menor al denominador de la misma, decimos que la fracción es propia. En otras palabras, si el cociente r de la fracción es menor a 1, entonces la fracción es propia. Por ejemplo, $\frac{2}{7}$ es una fracción propia porque $2 < 7$. (Soto, 2011, p. 65) y $r < 1$.

Significados de fracción

Significado Parte-Todo. Es el significado manifestado al considerar la fracción a/b como la relación existente entre dos cantidades específicas a y b , donde b es el número de partes en las que se divide el todo o unidad presentada en forma discreta o continua, y a es el número de partes tomadas del todo. Se conviene entonces que el denominador de la fracción indica el

número de partes en que está dividido dicho entero y el numerador las partes consideradas, haciéndose el paso de lo concreto a la representación matemática; así, la idea inicial de fracción consiste en dividir un todo en partes iguales o congruentes; ya sea discreto cuando involucra colecciones de objetos, o continuo si el todo es un segmento, un área o un volumen (Kieren, 1980)

Significado como Operador. Hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial; así, la fracción a/b empleada como operador, es el número que modifica un valor particular n multiplicándose por a y dividiéndolo por b . Con esta idea, la fracción actúa a partir de un estado inicial transformándolo en un estado final, asociándose directamente a multiplicaciones y divisiones sucesivas, independiente del orden. En este sentido, se puede hablar de la fracción como expresando un orden de ejecución, que al final de la transformación resulta ser indistinguible. Ejemplos de este uso de la fracción lo observamos en “los $3/5$ de una clase son niños”, o “el 20% de descuento”. Nótese que, en el segundo caso, el porcentaje también se asocia como operador, pues para hallar la cantidad a descontar será necesario multiplicar por 20 y dividir por 100. En general, de la fracción como operador se dice que actúa como reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica (Gairín y Sancho, 2002).

Significado como cociente. Esta noción hace referencia a repartir algo en partes equitativas, donde el resultado del reparto no es entero. En este sentido existen dos tipos de respuestas ante situaciones de reparto equitativo asociadas a la división de números enteras: aquellas donde el cociente o resultado de la división puede ser expresado como número decimal (por ejemplo: repartir 4 metros de tela para hacer 5 shorts; se utiliza para cada short $0,75$ ó $3/4$ m

de tela); y las respuestas donde el cociente no puede ser expresado como número decimal sino como una fracción (por ejemplo, al repartir 3 barras de chocolate entre cuatro niños a cada uno le toca $\frac{3}{4}$ de una barra de chocolate). A esta última noción la llamaremos división indicada (García, 2019).

Comprensión desde la perspectiva semiótica.

Según Raymond Duval

El aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemáticas conlleva que estas actividades cognitivas requieren además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. (2004)

Semiótica y noética. La semiosis y la noesis están estrechamente relacionadas ya que: Resulta conveniente analizar la diversidad de vías de acceso a un problema propuesto y la multiplicidad cognitiva de los alumnos en una misma clase, en consecuencia, se torna importante estudiar las condiciones de organización de los cambios de registros a los fines del aprendizaje.

Ahora bien, no hay noética sin semiótica, es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la adquisición, por parte del alumno, del concepto matemático, lo que se denomina noética. Es decir, no habrá aprendizaje sin el recurso de varios sistemas semióticos de representación lo que implica la coordinación entre los mismos por parte de los alumnos.

Cada concepto matemático: no es un objeto real y está obligado a utilizar representaciones de distintas naturalezas. (Oviedo y Kanashiro, 2012, p. 31)

Transformaciones entre representaciones:

La fracción es un sistema semiótico, tal y como lo define Duval (1998) citado por Oviedo y Kanashiro (2012): “Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite dos actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

Definidas por Duval como:

- 1) **Formulación:** Es la expresión de una representación
- 2) **Conversión:** Es la transformación de una representación que consiste en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar de la notación algebraica para una ecuación a su representación gráfica, pasando el enunciado de una relación en el lenguaje natural a su notación usando letras, etc. La conversión es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registros requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado. (2016, p. 74)
- 3) **Tratamiento:** Es la transformación de una representación que ocurre en el mismo registro; por ejemplo, realizar un cálculo mientras se permanece estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números, resolver una ecuación o sistema de ecuaciones, completar una figura usando criterios perceptuales de conectividad o simetría, etc. (2016, p. 72)

Comprensión.

En referencia a la comprensión de un objeto matemático desde la perspectiva de representación semiótica: “Un aprendizaje centrado en la conversión de las representaciones y por ende en la coordinación de diferentes tipos de registros semióticos produce una comprensión efectiva e integradora, que posibilita la transferencia de los conocimientos aprendidos y genera resultados positivos en las macro-tareas de producción y comprensión como lectura, escritura y resolución de problemas (Egret, 1989; Duval, 1991, citados en García & Perales, 2006).

Además “El papel fundamental, y verdaderamente importante, lo constituyen las transformaciones de unas representaciones en otras, ya que permiten obtener nueva información, y propiedades, y extraer nuevo conocimiento de los objetos, ideas y conceptos representados” (Duval, citado en Macías, 2014).

Hernández, Ordoñez, Cervantes y García afirman que:

Cada registro de representación resalta unas características y propiedades determinadas del objeto matemático, obteniendo como resultado una configuración del concepto en toda su extensión y profundidad. ...Según Duval se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo. (2017, p. 5-7)

Resolución de problemas

Se tomará como referente el proceso de resolución de problemas según Polya.

El método de Pólya es un método heurístico enfocado directamente a la solución de problemas lógico-matemáticos, donde uno de sus principales objetivos es formar una secuencia lógica del pensamiento para que el problema matemático pueda ser dividido en cuatro fases, es decir que el problema sea dividido en cuatro sub-problemas que puedan ser resueltos uno a uno para encontrar la solución del problema dado. (Breyer, 2007, p.)

“El método de Pólya contribuye a la enseñanza de la matemática ya que causa en el estudiante capacidad, habilidad y desarrollo del conocimiento para comprender y resolver problemas matemáticos” (Casimiro, 2017, p. 7)

Fases de la resolución de problemas.

Sánchez y Ovalle definen las fases de la resolución de problemas establecidos por Pólya como sigue:

Comprender el problema. Para poder comprender un problema se debe principiar con la lectura, análisis y la recaudación de datos que están dados. No puede solucionarse un problema si no se comprende lo que piden resolver, no importa la cantidad de veces que se necesite leer el problema para lograr entenderlo y así responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?, ¿Es posible cumplir con las condiciones?, ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita?, al finalizar con las preguntas se podrá dar lugar a la siguiente fase.

Realizar un plan. Hay diferentes maneras de encontrarle solución a un problema, en esta fase de Pólya se debe indicar la estrategia a utilizar para solucionar el problema. Existen

ciertas estrategias como, por ejemplo: ensayo y error, resolver un problema más sencillo o buscar un patrón entre otros.

Llevar a cabo el plan. Cuando se tiene comprendido el problema se debe realizar el plan y ejecutar la estrategia establecida durante la planificación del plan para finalmente poder solucionar el problema.

Verificación del resultado o retrosección. Se debe examinar el resultado para comprobar que satisfaga las necesidades del problema y así comprobar el éxito de la solución de los problemas de ecuaciones.(2014)

Metodología

La reflexión de la intervención se hizo bajo una metodología cualitativa que permitió obtener datos descriptivos; es decir “las propias palabras de las personas, habladas o escritas y la conducta observable” (Quecedo y Castaño, 2002). Se desarrollaron conclusiones a partir de estos datos partiendo de la pregunta orientadora y se analizó el proceso de los individuos seleccionados a lo largo de toda la intervención a través de sus productos escritos de las actividades propuestas y sus testimonios.

Se diseñaron y recopilaron problemas del significado de fracción como parte todo y fracción como operador que involucran el significado de fracción como cociente, de modo que tuvieran los elementos adecuados y propiciarán los procesos pertinentes para la comprensión de los significados de fracción mencionados, como la transformación de representaciones de

fracción en diferentes registros de representación durante las distintas fases de la resolución de problemas.

Cada actividad se constituyó con el fin de evocar distintos procesos que permitan el desarrollo de uno mayor: el proceso de comprensión de significados de fracción.

La ejecución de la intervención y toma de registros se dividió en 18 actividades. Un bloque de actividades, de la actividad 1 a la 8, para el significado de fracción como parte- todo; una actividad para el refuerzo de temas operatorios; otro bloque de actividades, de la actividad 10 a la 17, para el significado de fracción como operador y como cociente; finalmente una actividad con problemas de todos los significados abordados en la intervención.

La totalidad de los registros obtenidos se recopilaron, en archivos PDF, haciendo las respectivas anotaciones sobre las sesiones de clase, actividades, registros de hechos más significativos y testimonios de los estudiantes en el diario de campo.

Se tomaron registros de varios individuos pertenecientes a los grupos de estudiantes seleccionados y se clasificaron por actividad (actividad 1 - actividad 18).

Para el posterior análisis de los registros se realizó un proceso de selección donde se escogieron entre la totalidad de registros obtenidos, los que representaban mayor información relevante y completa, en cuanto al procedimiento llevado a cabo para obtener los resultados parciales del proceso de resolución de problemas y la obtención de la respuesta final.

Luego se elaboró una categorización de estudiantes para así hacer el seguimiento de los procesos de comprensión a individuos con características similares en cuanto a su desempeño en el aula de clase.

Categorización de los estudiantes. Los estudiantes fueron clasificados en cuatro categorías según su rendimiento académico dadas las actividades, interés en las clases, nivel de desarrollo en los saberes propuestos y existencia o no de dificultades operatorias observadas durante las fases de inmersión.

C1: Estudiantes con alto rendimiento, participación en las actividades de la clase y que no presentan mayores dificultades en el desarrollo de los conceptos ni dificultades operatorias

C2: Estudiantes de rendimiento medio, participan en la clase y presentan algunas dificultades en el desarrollo de los temas propuestos y tienen algunas dificultades operatorias

C3: Estudiantes de rendimiento bajo, que participan en la clase y presentan varias dificultades en el desarrollo de los temas propuestos y varias dificultades operatorias

C4: Estudiantes de rendimiento muy bajo, no presentan interés en las actividades académicas y presentan numerosas dificultades muy grandes en el desarrollo de los temas propuestos y actividades operatorias.

Las categorías en las que está dividida la población comprende a los estudiantes de los grupos 7-2 y 7-3 de grado séptimo, pero solo tres categorías fueron tomadas en cuenta para la recolección de registros y su posterior análisis. La categoría C4 no fue tomada en cuenta ya que

los registros de estos estudiantes en esta categoría no aportan información significativa al cumplimiento del objetivo de la intervención.

La discusión e inferencias sobre los registros se hicieron basándose en elementos conceptuales concretados en el marco conceptual y reflexionando sobre la actividad correspondiente y su propósito

Discusión de resultados

A continuación, se presenta el análisis de los registros más representativos de las actividades efectuadas en la docencia directa.

La discusión y análisis de resultados se hizo por actividades que presentan un mayor aporte a los objetivos establecidos. Para el análisis de las actividades se tendrá en cuenta siete estudiantes entre los dos séptimos, los cuales estarán denominados como E1 E2 E3 E4 E5 E6 E7, escogidos como representantes de los pertenecientes a las categorías mencionadas anteriormente como objeto de análisis.

Inicialmente E1, E2 y E3 pertenecen a la categoría C1; E6, E7 a C2 y E4 y E5 a C3

Es necesario destacar que para el análisis de cada actividad el número de estudiantes analizados varía en función de la información que brindan sus registros.

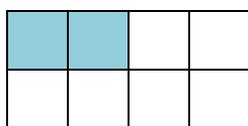
Actividad 1

Primeramente, se presentó la definición de fracción como parte-todo y se explicó el concepto mediante el siguiente ejemplo:

Considerando la fracción $\frac{2}{8}$. Dado que el denominador de la fracción representa el número de partes en las que está conformada la unidad, y el numerador las partes que se toman; la fracción anterior se puede representar como se observa en la figura 2

Figura 2

Representación gráfica de la fracción $\frac{2}{8}$.

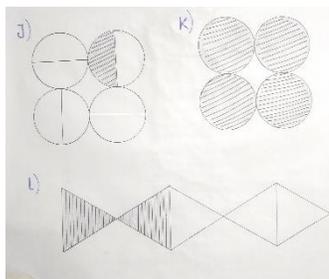
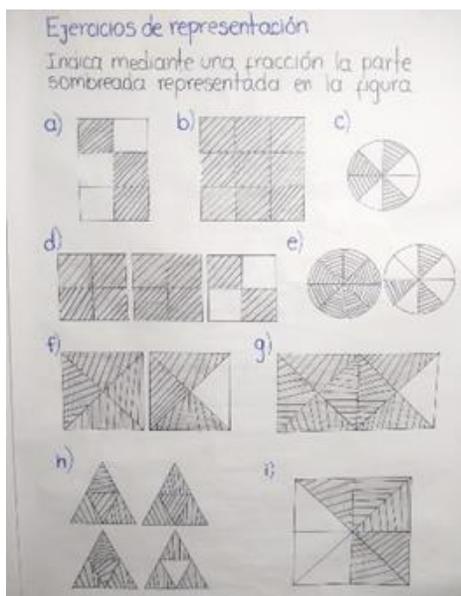


Nota: Se divide la figura en 8 partes y se sombrea 2. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Luego se propusieron las representaciones gráficas de la figura 3 para observar en el proceso de transformación de la representación gráfica a la representación numérica la congruencia entre la cantidad representada gráficamente y la representada numéricamente.

Figura 3

Representaciones gráficas de la actividad 1

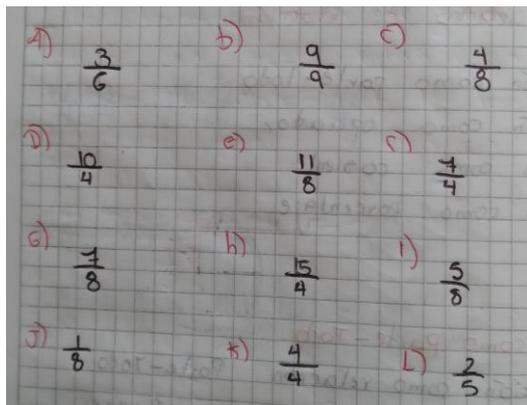


Nota: Las representaciones de los literales a, b, c, g, i, j, k y l refieren a fracciones propias y d, e, f y h, a fracciones impropias. Las representaciones utilizadas en los literales procuran ser diferentes al rectángulo que es la figura usada comúnmente. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

En los literales a, b, c, g, i, j, k y l, la transformación de la figura a una representación en el registro numérico realizada por la mayoría estudiantes fue congruente entre ambos registros de representación. Por ejemplo, en la figura 4 se observa cómo el estudiante E2 representante de C2, para representar la figura del punto b de forma numérica, reconoce que 9 es la cantidad de partes en las que está dividida la figura y que este número de partes representa el todo; también identifica que 9 es el número de partes sombreadas en la figura, es decir, en este caso el todo es igual a la parte y por esto la figura está sombreada en su totalidad; para el literal c, E2 realiza una transformación del registro de representación gráfico al numérico donde se puede inferir que hubo actividad cognitiva de conversión; el todo mostrado en la figura es congruente con el indicado en el denominador de la fracción $\frac{9}{9}$ y la parte sombreada es congruente con la cantidad indicada en el numerador de la fracción.

Figura 4

Solución de la actividad 1 de E2



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 06 de mayo de 2022).

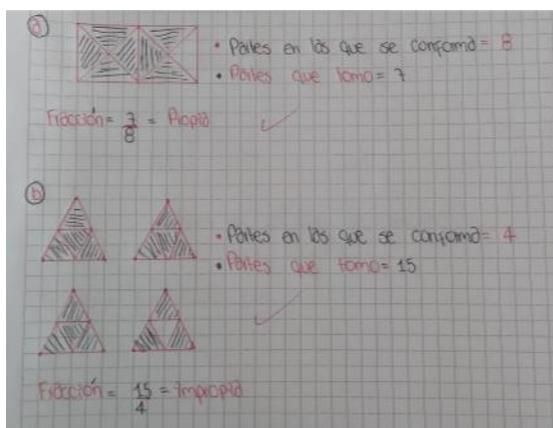
Además, puede reconocerse la actividad cognitiva de conversión cuando E2 realizó la transformación de todas las figuras comprendidas en la actividad a la representación numérica; por ejemplo, la solución del ítem d; su respuesta permitió inferir que E2 identificó como la unidad en este caso es cada uno de los cuadrados divididos en cuatro partes; por este motivo la cantidad especificada en el denominador es cuatro: la cantidad de partes que conforman la totalidad de la figura; además, identificó que lo sombreado excede a la unidad al ser una fracción impropia, así el numerador de la fracción es diez: el número de partes sombreadas en la figura del punto d.

También es el caso de E3 representante de C1, que dio respuesta al literal h con la fracción $\frac{15}{4}$, indicando en su representación que cuatro es el todo y quince es la parte, además indicó que la fracción es impropia como muestra la figura 5. Respuesta de la que se infiere que hubo actividad cognitiva de conversión en la transformación realizada de la representación

gráfica a una en el registro numérico, donde se presenta congruencia entre el significado de los dos registros de representación. Lo anterior ocurrió en la transformación de todas las representaciones gráficas incluyendo las de fracciones impropias

Figura 5

Solución a los puntos g y h de la actividad 1 por parte de E3



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 06 de mayo de 2022).

A diferencia de estudiantes como E4 y E5, representantes de la categoría C3 los cuales en las figuras de fracciones propias la expresión numérica respectiva a la representación gráfica es congruente con lo indicado en ésta, pero en las de fracciones impropias, vemos en la figura 6 como E4 para la figura h proporcionó la respuesta $\frac{15}{16}$, de la cual pudo interpretarse que el estudiante identificó el todo como el número de partes conformado por las partes de las cuatro unidades ilustradas en la figura de la fracción, es decir, dieciséis y la parte como el número total de partes sombreadas: quince. Se pierde elementos del significado de una representación a otra por esto no se conservó el mismo objeto matemático entre las representaciones; el estudiante

señalado no reconoció que cada triángulo dividido en cuatro partes es una unidad, de las cuales se hacen necesarias cuatro porque el número de partes requeridas es mayor al total de partes que componen la unidad, por lo tanto, no hubo conversión.

Figura 6

Desarrollo de la actividad 1 de E4

Handwritten mathematical work on grid paper showing fractions labeled a through s. The fractions are:

- a) $\frac{3}{6}$
- b) $\frac{9}{9}$
- c) $\frac{4}{8}$
- d) $\frac{10}{12}$
- e) $\frac{11}{16}$
- f) $\frac{7}{8}$
- g) $\frac{7}{8}$
- h) $\frac{15}{16}$
- i) $\frac{5}{8}$
- j) $\frac{7}{8}$
- k) $\frac{4}{4}$
- l) $\frac{2}{5}$

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 06 de mayo de 2022).

Figura 7

Desarrollo de la actividad 1 de E5

Handwritten mathematical work on grid paper showing fractions labeled a through l. The fractions are:

- a) $\frac{3}{6}$
- b) $\frac{4}{4}$
- c) $\frac{4}{8}$
- d) $\frac{10}{12}$
- e) $\frac{11}{16}$
- f) $\frac{4}{10}$
- g) $\frac{7}{8}$
- h) $\frac{14}{15}$
- i) 15
- j) $\frac{1}{8}$
- k) $\frac{4}{4}$
- l) $\frac{2}{5}$

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 06 de mayo de 2022).

En la figura 7 se observa cómo E5 también proporcionó una respuesta incorrecta para el literal h, ya que expresa que la representación dada es equivalente a la fracción $\frac{14}{15}$, de esta respuesta pudo inferirse que el estudiante incurrió en un error de conteo y en vez de dieciséis partes contó quince, al faltar una parte por sombrear el numerador sería catorce; o puede ser que

el estudiante identificó el todo como el total de partes sombreadas, o sea quince, y la parte como el número de partes que comprenden el todo menos una, es decir catorce.

En las respuestas dadas por estudiantes como E4 y E5 el todo cambió cuando hicieron la transformación de la representación.

De la actividad se concluyó que la mayoría de estudiantes no reconocen cuando una representación gráfica corresponde a una fracción propia o una fracción impropia, reconocer la unidad en una representación gráfica de fracciones impropias representa una dificultad, la cual implica que los estudiantes realicen transformaciones entre representaciones donde no se conserva el significado parte-todo.

Actividad 2

En la actividad 2 se propusieron situaciones con fracciones de una unidad simple, con el objetivo de que los estudiantes realizarán la representación gráfica y numérica de las fracciones inmersas en dichas situaciones. El desarrollo de las situaciones propuestas en los ítems observados en la figura 8 y 11, se plantearon debido a que requieren reconocer a que se refieren expresiones de este tipo, las cuales se ven a menudo inmersas en enunciados de problemas.

Cabe destacar que las situaciones dadas no se presentaron en su representación gráfica como se hizo en la actividad anterior, en su lugar la forma de mostrarlos fue en su sistema de representación verbal y la actividad demandaba al estudiante solo realizar representaciones, aún no involucraba el proceso de resolución de un problema en su totalidad.

Figura 8

Situación 1 y 2 de la actividad 2

1. Andrés reparte su torta de cumpleaños entre sus amigos, hermanos y tíos.

Represente gráficamente y numéricamente las siguientes situaciones:

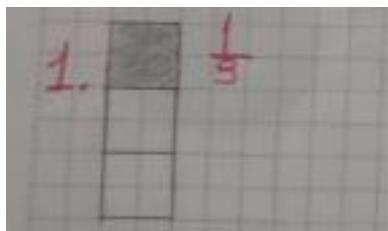
- a) Andrés reparte la mitad de la torta entre sus amigos
 - b) Andrés reparte la quinta parte entre sus hermanos
 - c) Andrés reparte la sexta parte entre sus tíos
2. Juana se ha comido dos tercios de una pizza.
Representar gráficamente y numéricamente la parte correspondiente a lo que quedo de la pizza

Nota: En este caso los ítems a, b, c del punto 1 y el punto 2 de la actividad hacen referencia a situaciones que involucran a una fracción propia. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

En lo planteado en primer punto del ítem 2 referido anteriormente en la figura 8, los estudiantes E6 y E7 representantes de C2 dibujaron un rectángulo y un círculo respectivamente como se observa en las figuras 9 y 10; lo dividieron en tres partes iguales, de estas tres partes sombrearon una y relacionaron la representación gráfica con la fracción $\frac{1}{3}$.

Figura 9

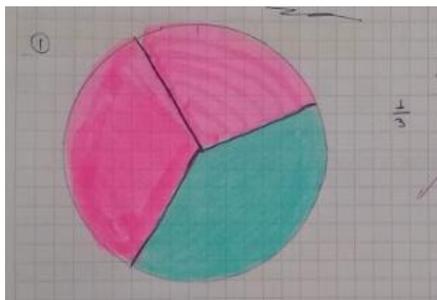
Representación realizada en el punto 2 de la actividad 2 por el estudiante E6



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 11 de mayo de 2022).

Figura 10

Representación realizada por E7 en el punto 2 de la actividad 2



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 11 de mayo de 2022).

El todo; que es la pizza, fue dividida en tres partes y de estas tres partes, dos es la cantidad de partes de la pizza que se comió Juana, por lo tanto, lo que queda es una de tres partes, es decir, $\frac{1}{3}$ de la pizza.

Los estudiantes llevaron la representación en el registro verbal al gráfico para llegar a la respuesta correcta e interpretaron que cuando el enunciado pide representar la parte sobrante de la pizza, el todo es la pizza y pasaron la fracción $\frac{2}{3}$ del registro de representación verbal al de representación gráfico dibujando una figura (E6 un rectángulo y E7 un círculo) dividida en tres partes de acuerdo al denominador de la fracción, donde representaron dos partes con un mismo color porque dos es la cantidad de partes de la pizza que se comió Juana; así, lo que queda es una de tres partes, la cual señalaron que numéricamente corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$, realizando nuevamente una transformación entre representaciones, esta vez de lo gráfico a lo numérico, donde se mantiene a la pizza como el todo y la parte es aquella que Juana todavía no se ha

comido por ende en ambos procesos de transformación se puede evidenciar que hubo actividad cognitiva de conversión.

E6 y E7 reconocieron cual es el todo y la parte que está siendo aludida en el enunciado, ya que no solo se trata de la apropiada división de la unidad, en este caso la pizza, sino de identificar cual es la parte que pedía representar el enunciado, es decir la que queda.

Figura 11

Ítem número 3 de la actividad 2

3. Representar Gráficamente y numéricamente la siguiente situación:

La hermana mayor de Juana se ha comido una pizza entera y un cuarto de otra de igual tamaño.

Nota: El ítem 3 refiere a una situación en que se debe representar una fracción impropia. K.

Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

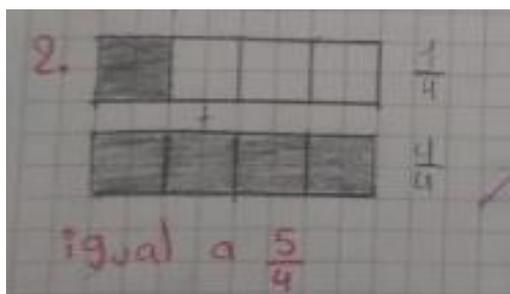
Para la tercera situación (figura 11), los estudiantes E6 y E7 dibujaron cada uno dos gráficas del mismo tamaño y ambas las dividieron en cuatro partes iguales, sombreando en una de las gráficas, la gráfica entera y en la otra solo una parte de las cuatro en las que estaba dividida.

El estudiante E6 indicó que la gráfica sombreada completamente es la representación gráfica de la fracción $\frac{4}{4}$ y la gráfica la cual solo se sombrea una parte es la representación gráfica de la fracción $\frac{1}{4}$ y que la suma de estas dos fracciones representa la cantidad de pizza que se comió Juana, es decir $\frac{5}{4}$ (observar figura 12). E6 manifestó que la suma de las cantidades $\frac{4}{4}$ y $\frac{1}{4}$,

la realizó sumando las partes sombreadas de los dos rectángulos y colocando dicha cantidad en el numerador y la cantidad en la que dividió cada rectángulo la colocó en el denominador.

Figura 12

Desarrollo del punto 3 de la actividad 2 por E6.



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 11 de mayo de 2022),

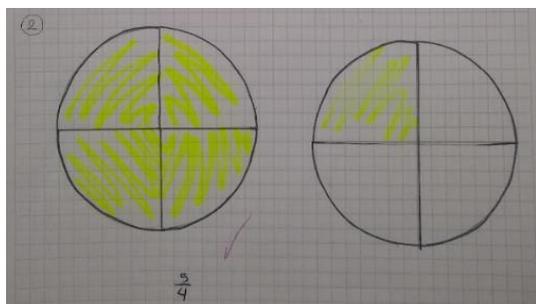
E6 reconoció que la cantidad de pizza que se comió Juana se trata de una fracción impropia. Identificó claramente a la unidad como la pizza y que se requiere más de una unidad para representarla por eso realizó la transformación del sistema de representación verbal al gráfico dibujando dos rectángulos cada uno dividido en cuatro partes como lo indicaba el denominador de la fracción $\frac{1}{4}$. De aquí, reconoció que la cantidad en que se divide la unidad es cuatro y las partes que se tomaban son cinco; porque se toman todas las partes de una unidad y una de la otra. Por lo tanto, 4 y 5 van en el denominador y numerador de la fracción respectivamente; fracción congruente con la cantidad de pizza que indicaba el enunciado que se comió Juana.

Por otro lado, el estudiante E7 realizó un proceso similar a E6 y relaciona la representación gráfica con la fracción $\frac{5}{4}$, de donde se intuyó que el estudiante consideró la

cantidad de pizza que se comió Juana como una fracción impropia; donde cada pizza se divide en 4 partes y de estas se deben tomar la primera pizza en su totalidad y una parte de las cuatro en que se divide la segunda, como se aprecia en la figura 13.

Figura 13

Solución al punto 2 de la Actividad 2 dada por E7



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 11 de mayo de 2022).

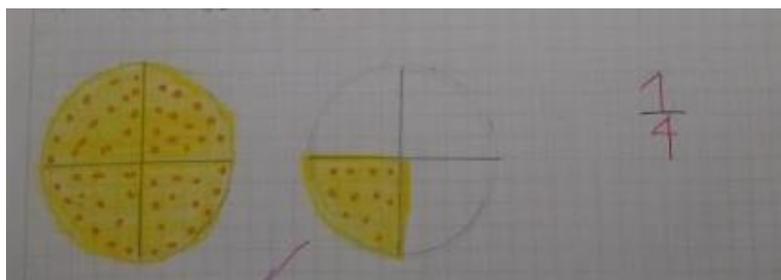
En el desarrollo anteriormente descrito pudo identificarse la actividad cognitiva conversión, además, los estudiantes dedujeron que, si una de las pizzas se dividió en cuatro partes, entonces una buena forma para representar de manera gráfica la situación, es dividir la pizza entera que se comió Juana en el mismo número de partes.

Por otro lado, algunos estudiantes presentaron dificultades para representar la situación gráficamente, por ejemplo, el estudiante E4 dibujó dos círculos, luego los dividió en cuatro partes, donde uno de estos lo sombrea completamente y del otro solo sombrea una cuarta parte. Sin embargo, no hubo conversión, porque, al momento de transformar la representación gráfica a la numérica el estudiante escribió que su forma numérica es $\frac{1}{4}$ como se puede observar en la figura 14, respuesta que no era congruente con el gráfico propuesto, ya que el número de partes

representadas en la figura no corresponden a las representadas numéricamente, pues E4 escribió 1 en vez de 5 en el numerador de la fracción que representa lo graficado.

Figura 14

Solución al punto 3 de la actividad 2 dada por E4



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 11 de mayo de 2022).

De lo anterior se determinó que el estudiante sigue teniendo problemas cuando debe representar gráficamente y numéricamente una fracción impropia esto debido a que el estudiante no le fue posible determinar correctamente cuál es la unidad indicada dada en la situación y como consecuencia no hay una.

Para finalizar esta actividad se explicó a los estudiantes que no comprendieron y se les preguntó cuál fue el error que cometieron en los pasos que siguieron para realizar las representaciones permitiendo que se dieran cuenta de los errores por sí mismos.

Actividad 3

En las actividades anteriores las situaciones propuestas para trabajar en clase solo hacían alusión a la unidad simple y cantidades continuas, mientras que en esta actividad se abordó la unidad compuesta.

Se presentó a los estudiantes el concepto de unidad compuesta mediante gráficos propuestos en las carteleras de la figura 15 con el fin de proponer una actividad de representación de una fracción de una unidad compuesta y que los estudiantes la realizaran basándose en los ejemplos mostrados en las carteleras.

Figura 15

Cartelera 1 y 2 de ejemplos ilustrados de unidad compuesta.

UNIDAD COMPUESTA

Observe las siguientes situaciones

1. 3 de los 5 pollitos son negros

Los $\frac{3}{5}$ del número de pollitos son negros

2. En una excursión participaron 6 personas de las cuales $\frac{1}{6}$ de las personas son mujeres

3. Pepito tiene 8 lapices de los cuales $\frac{1}{4}$ son rojos

4. Una niña guarda en su morral dos carritos dos pelotas y dos muñecas

$\frac{1}{3}$ de los objetos son muñecas, $\frac{1}{3}$ son pelotas y $\frac{1}{3}$ son carritos

Ejercicios

1. Encerrar las tres cuartas partes de los bombillos.

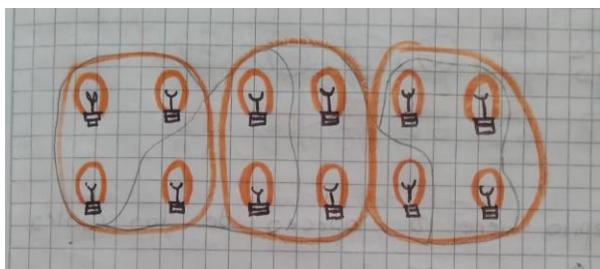
Nota: Se observa que la actividad de representación propuesta consiste en transformar la representación verbal en una representación numérica correspondiente. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

La actividad propuesta en la cartelera representó un nuevo reto para los estudiantes ya que no solo deben formar grupos iguales, sino también reconocer si la unidad es continua o discreta y dado el caso discreto determinar si es posible o no hacer la partición del todo.

Vemos en la figura 16 como el estudiante E2 para realizar la representación, dibujó doce bombillas, formó tres grupos de cuatro bombillas cada uno, los cuales encerró con color naranja.

Figura 16

Representación dada por E2 en la actividad 3.



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 17 de mayo de 2022).

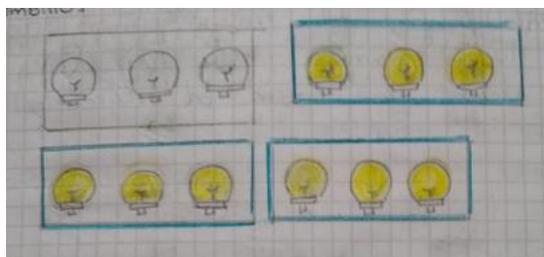
E2 interpretó la expresión tres cuartos asociada al enunciado de la actividad, como tres grupos de cuatro bombillas cada uno, lo cual es incorrecto. E2 no logra reconocer el todo en el caso de una unidad compuesta, a diferencia de la unidad simple donde anteriormente E2 realizó representaciones congruentes a las figuras propuestas, tanto de fracciones propias o impropias; la representación realizada por E2 permite inferir que inicialmente no hay actividad cognitiva de conversión ya que no se realizó la transformación adecuada. Sin embargo, E2 después de una breve explicación, entendió que la expresión tres cuartos al igual que en la unidad simple indica dividir el todo en cuatro partes y tomar tres, como se puede advertir también en la figura 16 donde encierra tres grupos de tres bombillas con una línea curva hecha a lápiz.

En el desarrollo presentado por el estudiante E2 del ítem 1 de la actividad, la representación gráfica elaborada no presentó congruencia con lo explicitado verbalmente, ya que E2 no representó correctamente la expresión tres cuartos, pero posteriormente realizó una representación gráfica de manera congruente al enunciado identificando el todo como los doce bombillos divididos en 4 grupos cada uno con tres bombillos, de los cuales tres grupos debían ser encerrados.

A diferencia de E2, la representación dada por E3 evidenció la actividad cognitiva de conversión desde el inicio; E3 dibujó cuatro grupos de tres bombillas cada uno y de estos cuatro grupos pintó las bombillas de tres de los grupos, indicando con esto que de las doce bombillas se toman tres cuartas partes, como se aprecia en la figura 17.

Figura 17

Solución dada por E3 del ítem 1 de la actividad 3



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 17 de mayo de 2022).

El estudiante reconoció el conjunto de los doce bombillos como el todo y representó la expresión tres cuartos dada en lenguaje natural de forma gráfica tomando el todo y dividiéndolo en cuatro grupos con la misma cantidad de bombillas, luego pintó solo los tres grupos para

mostrar los que deben ser tomados de acuerdo a la fracción inmersa en la expresión contenida en el enunciado.

En esta actividad se observó que los estudiantes presentaron dificultades al transformar las fracciones en el registro de representación verbal, dado que no es explícito el numerador y el denominador, por este motivo al final de esta actividad se hizo un repaso de la forma de realizar una representación gráfica de una fracción partiendo desde una representación en el registro verbal, para que los estudiantes pudieran posteriormente realizar esta actividad de forma que ambas representaciones conserven un mismo significado.

Actividad 4

En la actividad 4 se propusieron situaciones para realizar representaciones gráficas con fracciones de una unidad compuesta partiendo de representaciones numéricas a como se puede observar en la figura 18.

Figura 18

Ítems b y c de la actividad 4

- b) sobre la mesa hay 7 vasos, de los cuales $\frac{4}{7}$ tienen agua y el resto jugo de naranja
- c) En una excursión participaron 12 personas de las cuales $\frac{2}{6}$ son mujeres

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Lo que buscaba la actividad es que el estudiante realizara representaciones gráficas de una fracción cuando la unidad involucrada es un conjunto de elementos en vez de una única

figura continua que se puede dividir en un número de partes arbitrario a diferencia de un todo compuesto o discreto, donde se debe analizar si la división indicada por la fracción es posible o no sobre la unidad, dependiendo del número de elementos que la componen.

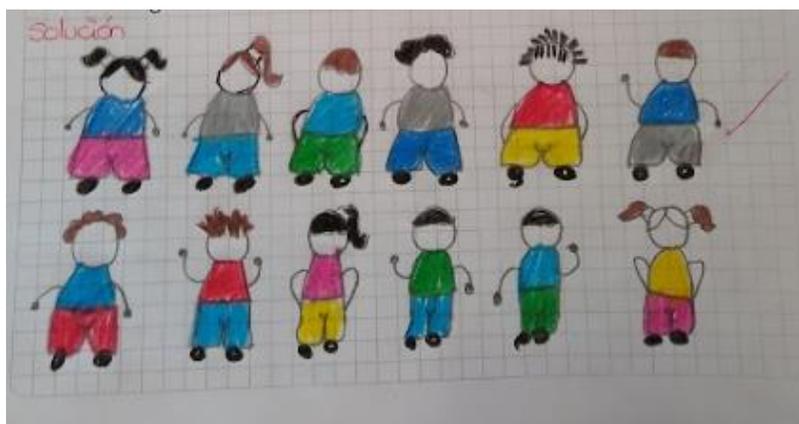
De las situaciones dadas en esta actividad la situación c ilustrada en la figura anterior fue objeto de análisis.

Para transformar lo enunciado en el punto c a un registro gráfico, los estudiantes E7 y E3 representan la situación descrita dibujando 4 mujeres y 8 hombres.

El estudiante E7 no formó grupos y solamente dibujó las personas, (ver figura 19) entonces se le preguntó cómo había llegado a la respuesta y este respondió: “como hay doce personas divido el grupo en seis partes iguales y dos grupos son mujeres, ósea cuatro porque en cada grupo hay dos mujeres”.

Figura 19

Solución del ítem c de la actividad 4 realizada por E7



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 23 de mayo de 2022).

El estudiante E3 dividió el número de participantes en seis grupos como lo indica el denominador de la fracción, y cada grupo lo formó de dos personas, dibujando en dos de estos grupos dos mujeres. (Ver figura 20)

Figura 20

Representación realizada por E3 para el literal c de la actividad 4.



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 23 de mayo de 2022).

Las representaciones del registro numérico y gráfico son correspondientes, la unidad compuesta descrita en la situación enunciada concuerda con el dibujo de las doce personas dividido en seis grupos de dos, presentado en la solución de la actividad; también E7 y E3 representan cuatro mujeres mostrando los dos grupos de seis que tenían esta característica, de acuerdo a los dos sextos señalados en el enunciado. Los estudiantes transformaron lo dicho en la situación a su respectiva representación gráfica; por eso en ambas respuestas se pudo observar la actividad cognitiva de conversión.

Sin embargo, algunos estudiantes presentaron dificultades para desarrollar la actividad, por ejemplo, el estudiante E4 dibujo doce personas y dado que la fracción es $\frac{2}{6}$, entonces formó seis grupos de dos personas cada uno (ver figura 21), representación que no presentaba congruencia con la parte mencionada en c, ya que el numerador de la fracción no indica el número de personas de cada grupo, sino que indica el número de grupos que son mujeres.

Por lo tanto, la actividad cognitiva de conversión no está presente en las transformaciones realizadas por E4. Lo representado gráficamente no es concordante con lo presentado en c y se deduce que el estudiante tenía dificultades con la definición de fracción como parte todo cuando la unidad es compuesta ya que no reconocía la parte que se va a tomar del todo y como consecuencia el objeto matemático graficado no corresponde a lo dado numéricamente.

Figura 21

Representación realizada por E4 para el ítem c de la actividad 4.



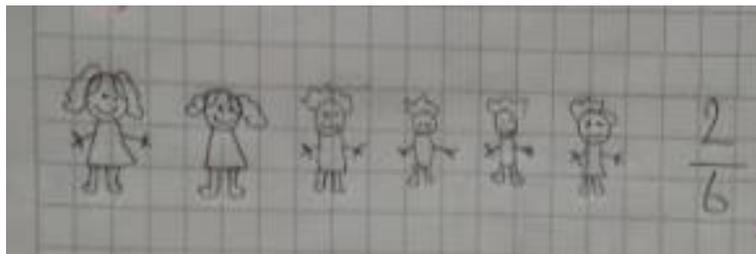
Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 23 de mayo de 2022).

Otra dificultad muy común fue la observada en el estudiante E5, el cual dibujó seis personas y de éstas sólo dos son mujeres como aprecia en la figura 22, de lo que se concluye que

el estudiante no interpretó correctamente la situación enunciada, ya que este no tuvo en cuenta que en la excursión participaron doce personas; en su lugar solo tuvo en cuenta la fracción $\frac{2}{6}$ para realizar la representación gráfica, es decir, tomó el todo de forma similar a como se toma en la unidad simple, conformado por seis elementos y no como unidad compuesta por doce personas; como consecuencia al realizar la transformación de la expresión numérica la cantidad que conforma el todo cambia en la representación gráfica y no coincide con lo expuesto numéricamente.

Figura 22

Gráfico correspondiente al literal c realizado por E5



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 23 de mayo de 2022).

De esta actividad se determinó que las dificultades más comunes de los estudiantes, están relacionadas con la comprensión lectora y con la elaboración de representaciones de fracción cuando las situaciones presentadas hacen referencia a unidades compuestas.

Actividad 5

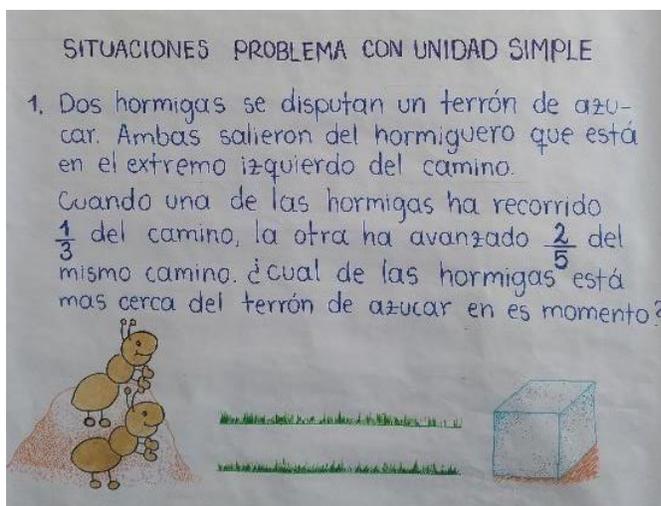
En las actividades previas se trabajó con enunciados donde los estudiantes debían reconocer en las representaciones gráficas y numéricas la fracción como parte-todo. Una vez aclarada todas las dudas surgidas en las actividades anteriores se hace un repaso en donde dada

una situación se elige a distintos estudiantes para salir al tablero a realizar la representación gráfica y numérica de ésta, y se les pregunta a los compañeros que estaban en sus sillas que pensaban de la solución si era correcta o incorrecta y en caso de que crean es incorrecta den una nueva respuesta. Además, se les hace preguntas como, por ejemplo: ¿Cuál es el todo? ¿Cuál es la parte? ¿La unidad es compuesta o simple y por qué? ¿La unidad es discreta o continua y por qué?, entre otras. Una vez realizada la retroalimentación se cree pertinente un primer acercamiento a un problema matemático, y para ello se propone esta quinta actividad.

La actividad 5 consistió en el desarrollo del primer problema. Como se indica en la figura 23, el problema se dio a conocer por medio de un enunciado y una representación gráfica, para que los estudiantes se apoyarán en el gráfico y tuvieran una mejor visión de lo planteado en el problema y las formas de solucionarlo.

Figura 23

Cartelera presentada a los estudiantes con el primer problema.



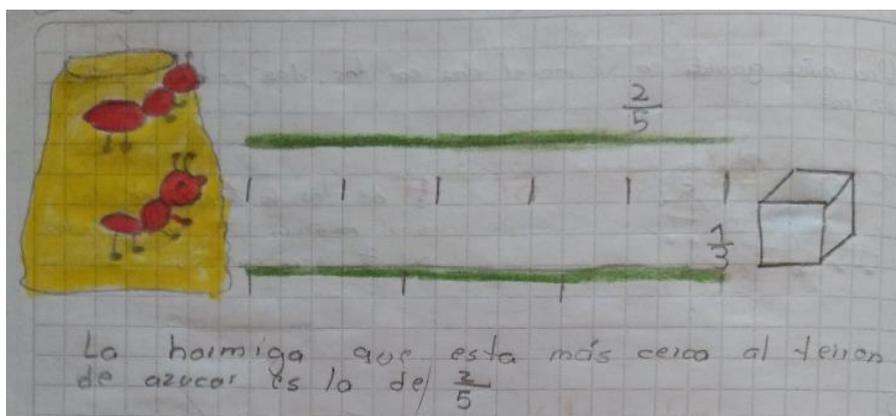
Nota: La actividad propuesta implica todas las fases de la resolución de problemas. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Esta es la primera actividad donde los estudiantes podían pasar por todas las fases de resolución de problemas para encontrar la respuesta.

A continuación, se presenta en la figura 24 una de las respuestas dada por uno de los estudiantes elegidos como representantes de la categoría C1:

Figura 24

Solución al primer problema realizada por E1



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 24 de mayo de 2022)

El estudiante E1 representante de C1, para dar solución al problema, como se puede observar en la figura 24, dibujó dos caminos iguales y en cada uno de estos representaron las fracciones dadas en el enunciado. Para representar la fracción $\frac{2}{5}$ dividió el camino en cinco partes como lo indica el denominador de la fracción e indicó que la fracción $\frac{2}{5}$ se encuentra en la cuarta posición dando a indicar que de las cinco partes tomó cuatro. A continuación, para la fracción $\frac{1}{3}$ dividió el camino en tres partes iguales y de estas tomó las tres partes. Finalizó respondiendo “La hormiga que está más cerca del terrón de azúcar es la de $\frac{2}{5}$ ”.

La respuesta dada por el estudiante E1 es correcta, sin embargo, no hay congruencia con la representación gráfica realizada que indica claramente que $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{2}{5}$. E1 dividió el segmento que ilustra el recorrido de la primera hormiga según el denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ y el de la segunda hormiga según el denominador de la fracción $\frac{1}{3}$; pero E1 no tuvo en cuenta el numerador de las fracciones, y las ubicó arbitrariamente sobre el segmento correctamente dividido.

Vemos como uno de los factores importante para comprender los problemas es el cuidado que el estudiante le da a la lectura de éste, en este caso y a pesar de que la representación gráfica dada por el estudiante presenta errores, se puede observar que el estudiante resolvió el problema teniendo en cuenta el contexto del enunciado.

Actividad 6

La actividad consistió en resolver cinco problemas durante la clase, en donde los estudiantes podían compartir sus ideas con sus compañeros y con los profesores.

Los problemas que se plantearon y fueron objeto de análisis en esta ocasión pueden observarse a continuación en la figura 25.

Figura 25

Literales c y d de la actividad 6

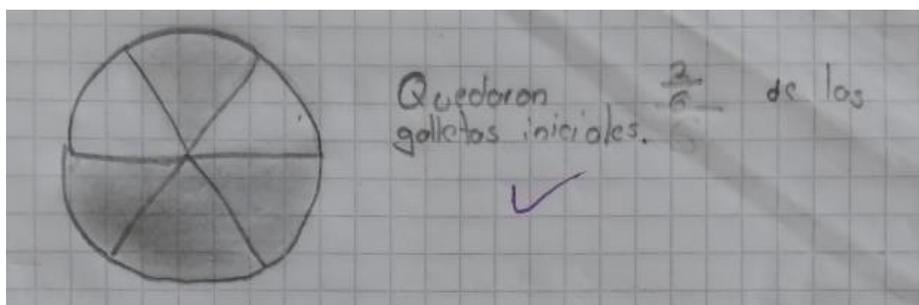
- c. Si de los 36 perros de un refugio 20 serán adoptados ¿Qué parte de los perros serán adoptados?
- d. Pedro se comió la mitad de las galletas de una lata y luego marta se comió $\frac{1}{3}$ de las galletas que quedaban ¿Qué fracción de las galletas que había al principio queda en la lata?

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Problema del literal d. Para darle solución el estudiante E1 dibujó un círculo y lo dividió en seis partes, además, el estudiante indicó que $\frac{2}{6}$ es la cantidad de galletas que quedaron (observar figura 26). E1, así como dividió la mitad en tres partes dividió la otra mitad también en tres para que todas sean iguales; finalmente sombreeo cuatro partes y señaló que $\frac{2}{6}$ es la cantidad de galletas que quedaron en la lata.

Figura 26

Desarrollo del literal d de la actividad 6 realizado por E1



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 25 de junio de 2022).

Cuando se le preguntó al estudiante sobre la representación que realizó, este expresó que el círculo lo dibujó como representante de la lata de galletas ya que ésta era como una galleta grande. También indicó que como Pedro se comió la mitad de la lata de galletas entonces se

dividió la figura en la mitad. Como Marta se comió $\frac{1}{3}$ de las galletas que quedaban, es decir $\frac{1}{3}$ de la mitad, dividió una la de las mitades de la figura en tres partes, luego para saber qué parte de la lata de galletas queda en relación con la cantidad inicial divide la otra mitad también en tres; obteniendo un todo dividido en seis partes de las cuales dos no han sido comidas, deduciendo así que quedaron $\frac{2}{6}$ de las galletas iniciales.

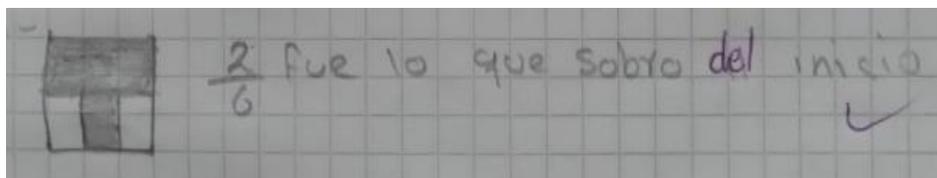
El estudiante E1 comprendió el problema y transformó la representación en el registro numérico al de representación gráfico ilustrando la lata de galletas dividida convenientemente para dar respuesta a la pregunta del problema, de lo cual pudo concluirse que hubo actividad cognitiva de conversión, además manipuló la representación gráfica, transformándola en una representación conforme al $\frac{1}{2}$ que se comió Pedro inicialmente y al $\frac{1}{3}$ de la mitad que después se comió María, haciendo clara la actividad cognitiva de tratamiento; proceso que le permitió identificar en la representación realizada que $\frac{2}{6}$ era lo que quedaba en la lata, aquí mismo vuelve a pasar del registro de representación gráfico al sistema de representación numérico de forma equivalente, debido a que representó las dos partes no sombreadas de seis como $\frac{2}{6}$ para dar respuesta a la pregunta en el registro numérico, donde se reconoció nuevamente actividad cognitiva de conversión.

Por lo tanto E1 comprendió el significado parte todo igualmente que E6 quien da solución al problema de la misma manera.

El estudiante E6, como se observa en la figura 27, también dibujó la lata como el todo y la dividió en seis partes, pero en este caso no dibujó un círculo sino un rectángulo e indicó que $\frac{2}{6}$ fue lo que sobró del inicio, haciendo referencia con esta frase a las galletas.

Figura 27

Desarrollo del literal d de la actividad 6 realizado por E6



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 25 de junio de 2022).

Algunos estudiantes no pudieron resolver el problema dado que la situación del enunciado era diferente a las trabajadas en clase, por ejemplo, el estudiante E4 no vio a la lata de galletas como la unidad y en su lugar dibujó nueve galletas (ver figura 28), E4 indicó que interpretó que cuando el enunciado dice “Marta se comió $\frac{1}{3}$ de las galletas que quedaban en la lata” el denominador de la fracción $\frac{1}{3}$ hacía referencia al número de grupos en que se dividen las galletas: tres; e ignoró por completo lo mencionado previamente sobre Pedro y la pregunta del problema

E4 comprendió que $\frac{1}{3}$ se refiere a dividir un conjunto de objetos en tres partes, pero no considero los demás elementos en el enunciado del problema, visto de otro modo el estudiante no comprendió el problema por ende el plan que elabora para resolverlo no conduce a una respuesta

correcta, porque lo realizado no conserva concordancia con lo descrito en el enunciado; el todo representado no coincide con el del problema.

Figura 28

Desarrollo del problema del ítem d de la actividad 6 realizado por E4



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 25 de junio de 2022).

Problema del literal c. La misma falta de comprensión del problema de E4 se presentó en el literal c de la actividad.

Figura 29

Desarrollo realizado por E4 del ítem c de la actividad 6



Nota: Se puede observar cómo el estudiante no tiene en consideración el todo del problema ni lo dicho en este ya que tomó veinte como el número total de perros mientras que el problema plantea que el total es treinta además dividió los veinte perros en dos partes cuando el enunciado en ningún momento menciona esto. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 25 de junio de 2022)

A diferencia de E4, E5 resolvió el problema de forma correcta. En la figura 30 se pudo observar que E5 comprendió el problema y reconoció en el enunciado que el número total de perros es 36 y los adoptados serán 20 y transformó lo descrito en el problema a la fracción $\frac{20}{36}$, además realizó una transformación de la representación numérica simplificando la fracción $\frac{20}{36}$ hasta su fracción equivalente $\frac{5}{9}$, por ende según lo definido por el significado de fracción como parte-todo y el resultado de la simplificación realizada expresó la parte que será adoptada es $\frac{5}{9}$ sin perder la correspondencia con el todo y la parte planteadas en el problema inicialmente. De esta forma se pudo inferir que hubo una actividad cognitiva de tratamiento

Figura 30

Desarrollo realizado por E5 al problema del ítem c de la actividad 6

3. La parte de los perros que serán adoptados es: $\frac{20}{36}$ igual a $\frac{10}{18}$ igual a $\frac{5}{9}$ ✓

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 25 de junio de 2022).

Actividad 7

Esta actividad fue realizada en casa por cada estudiante, abarcaba siete situaciones similares a las trabajadas en las clases anteriores que consistían en realizar transformaciones de una representación verbal a otra en el registro numérico o gráfico.

Figura 31

Puntos a y b de la actividad 7

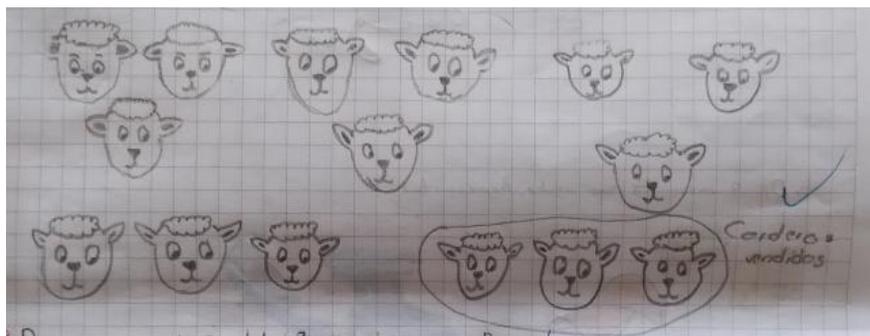
- Luis compró 22 frutas de las cuales 12 son manzanas y el resto peras. Representar gráficamente y numéricamente la cantidad de peras y de manzanas que compró Luis.
- Juan tiene 15 corderos y vendió $\frac{1}{5}$. representar gráficamente los corderos que vendió.

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Al igual que en la actividad 6 se escogió una de las situaciones del taller como objeto de análisis, en este caso la situación del punto b presentada en la figura 31.

Figura 32

Representación correspondiente al punto b de la actividad 7 realizada por E1

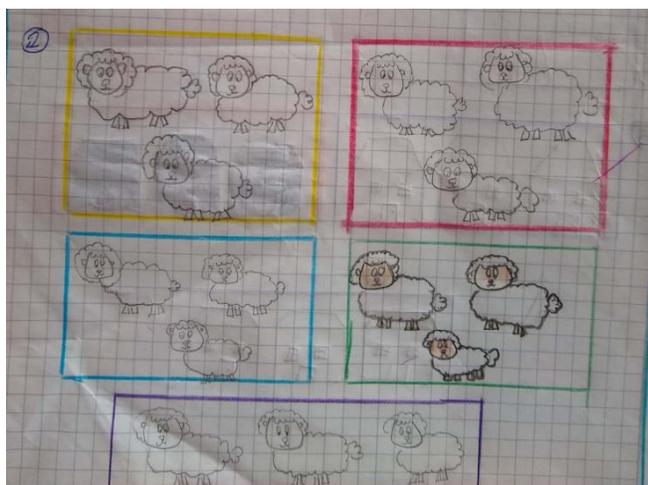


Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 01 de junio de 2022).

El estudiante E1 dibujó quince corderos los cuales distribuyó en cinco grupos de tres corderos cada uno y señaló a uno de los grupos como el grupo de los corderos vendidos. El estudiante reconoce que quince es el todo y que el denominador de la fracción $\frac{1}{5}$ indica que el conjunto de quince corderos se debe dividir en cinco partes y de estas se debe tomar una, es decir, se deben formar cinco grupos con el mismo número de corderos y un grupo de estos representa el total de corderos que vendió Juan.

Figura 33

Representación realizada por E3 en respuesta al punto b de la actividad 7



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 01 de junio de 2022).

El estudiante E3 dibujó quince corderos y formó cinco grupos, compuestos por tres corderos cada uno, además, uno de estos grupos está formado por corderos con la cabeza pintada como se observa en la figura 33, señalando que estos son los corderos vendidos, en otras palabras, que, de los quince corderos, tres fueron vendidos. Vemos que el estudiante E3 también

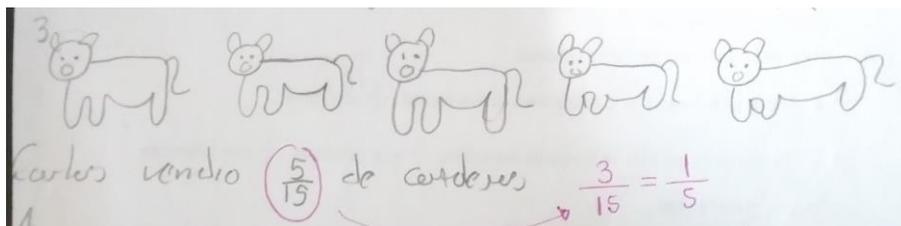
reconoció que quince corderos es el todo y la fracción $\frac{1}{5}$ indica que el todo debe dividirse en cinco grupos y un grupo de estos es el número de corderos que vendió Juan.

En el proceso de transformación llevado a cabo por E1 y E3 para responder al punto b es evidente la actividad cognitiva de conversión; E1 y E3 expresaron $\frac{1}{5}$ de los quince corderos gráficamente, se pudo observar cómo conservaron el todo del problema y dibuja quince corderos agrupados en cinco grupos encerrando tres corderos, además E1 escribe al lado del grupo señalado “corderos vendidos” para dar respuesta al problema.

Ahora veamos algunas dificultades que presentaron sujetos de las categorías C2 y C3, por ejemplo, el estudiante E5 dibujo cinco corderos y respondió que Carlos vendió $\frac{5}{15}$ de corderos como se observa en la figura 34. Como el enunciado de problema planteado dice “Juan tiene 15 corderos y vendió $\frac{1}{5}$ ”, se infiere que no hubo conversión y que el estudiante no reconoce la unidad como el conjunto de 15 corderos; en su lugar solo tiene en cuenta la fracción $\frac{1}{5}$ para realizar la representación gráfica, como el denominador de la fracción es 5, entonces el estudiante intuye que debe dibujar cinco corderos y se olvida por completo de los 15 corderos mencionados, sin embargo, para dar la respuesta sí tuvo en cuenta el total de corderos que tiene Juan, por lo que toma los 5 corderos dibujado como los corderos vendidos de los 15 que tenía Juan. Por lo tanto, el estudiante tiene problemas para identificar el todo en un contexto donde se presenta una unidad compuesta, razón por la cual el estudiante realiza transformaciones entre representaciones que no conservan el significado parte todo.

Figura 34

Representación realizada por E5 en respuesta al punto b de la actividad 7



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 01 de junio de 2022).

Actividad 8

Previamente a esta actividad se hace un repaso de los temas vistos con el objetivo de que los estudiantes superen las dificultades observadas en las actividades anteriores.

En esta actividad se realizó una prueba escrita de forma individual para evaluar la comprensión de los estudiantes del significado de fracción como parte-todo.

Las situaciones y problemas que constituyeron la evaluación fueron muy similares a las ya desarrollados (ver figura 35), con la intención de inferir de los desarrollos presentados por los estudiantes, si siguen o no teniendo las mismas dificultades.

Figura 35

Literales a, b, c y d de la evaluación del significado de fracción como parte-todo

1. Un corredor ha recorrido $\frac{7}{10}$ del camino de su casa hasta el polideportivo. Representar gráficamente y numéricamente la parte del camino que le falta por recorrer.
2. Carlos tiene 15 corderos de los cuales vendió $\frac{1}{5}$. Representar gráficamente los corderos que vendió.
3. Si tengo un pastel de cumpleaños. Representar la octava parte de la mitad del pastel.
4. En un grupo de 7 animales $\frac{3}{5}$ son jirafas. Determine si la afirmación anterior es posible o no, y por qué. Si es posible representar gráficamente.

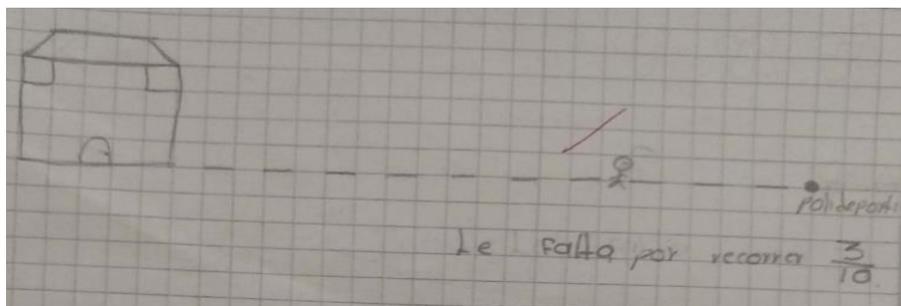
Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Para el análisis de los registros recolectados en la evaluación se seleccionan los desarrollos correspondientes a los literales a, c y e.

Literal a. E6 como representante de C2, representó la situación dada en el literal a con un dibujo de una casa y un polideportivo, entre estos dos dibujó diez segmentos del mismo tamaño dando a entender que este es el camino que hay entre estos dos lugares.

Figura 36

Desarrollo realizado por E6 para la solución del ítem a de la evaluación.



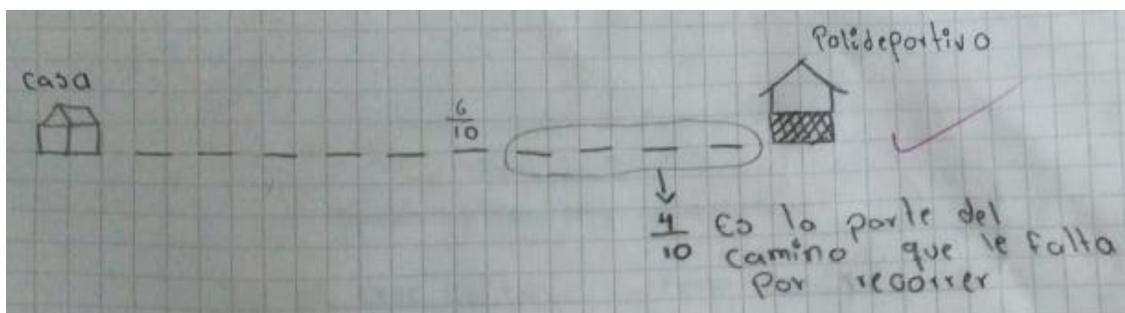
Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 07 de junio de 2022).

El estudiante E6 dibujó una persona entre la línea séptima y la línea octava, señalando que hasta ese punto es lo que ha recorrido el corredor y finaliza diciendo, “le falta por recorrer $\frac{3}{10}$ ”. (Ver figura 36).

En su lugar, el estudiante E2 encerró las últimas cuatro líneas e indicó que estas hacían referencia a los $\frac{4}{10}$ que le faltaba al corredor por recorrer (figura 37),

Figura 37

Desarrollo realizado por E2 para la solución del ítem a de la evaluación.



Nota: la representación proporcionada por E2 indicaba que el corredor había recorrido $\frac{6}{10}$ en vez de los $\frac{7}{10}$ dados en el primer literal de la figura 35. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 07 de junio de 2022).

Durante todo el proceso de resolución se mantuvo la congruencia del todo entre los distintos sistemas de representación; expresando en la respuesta que: “ $\frac{4}{10}$ es la parte del camino que falta por recorrer” y en la gráfica encerrando la cantidad faltante por recorrer en una línea curva

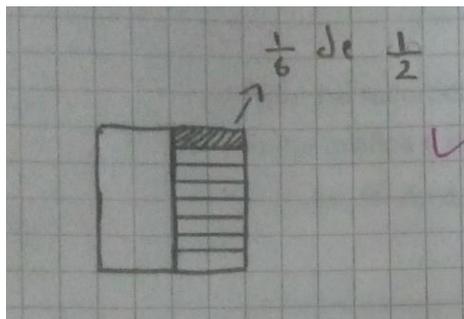
Los dos estudiantes reconocieron el recorrido existente entre la casa y el polideportivo como unidad continua y la actividad cognitiva de conversión se hizo presente en dos momentos del proceso de resolución del problema; primero al expresar el enunciado de manera gráfica, y segundo, cuando los estudiantes tomaron la representación gráfica de lo que le faltaba por recorrer al corredor y expresan esa longitud con un número. Es decir, los estudiantes comprendieron el significado de fracción como parte todo.

Literal c. En segundo lugar, se hizo un análisis de la situación dada en el literal c.

Los estudiantes como E2 dibujaron el pastel y lo dividieron a la mitad; una de las mitades la dividieron en ocho partes y de éstas sombrearon una de las partes (ver figura 38).

Figura 38

Representación realizada por E2 en el literal c de la evaluación.



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 07 de junio de 2022).

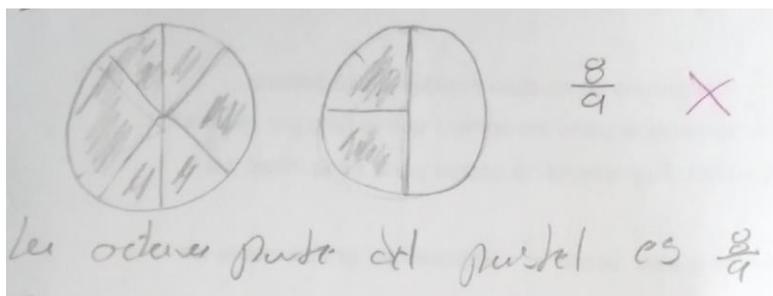
Se puede concluir que E2 comprendió que cuando el enunciado dice “representar la octava parte de la mitad del pastel”, reconoce el pastel como un todo continuo que puede dividirse a la mitad y seguidamente dividir una de las mitades en 8 partes iguales indicando además que

una de estas partes es $\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{2}$, de esta forma los estudiantes representaron gráficamente lo dado en forma verbal representando la misma situación con los mismos elementos. En conclusión, hay actividad cognitiva de conversión, por lo tanto, estudiantes como E2 comprendieron el significado de fracción como parte todo cuando la unidad es simple.

A diferencia de los estudiantes de C1 estudiantes de la categoría C2 y C3 como E5 no presentaron comprensión del significado parte todo como lo ilustra la figura a continuación:

Figura 39

Representación realizada por E5 en el literal c de la evaluación.



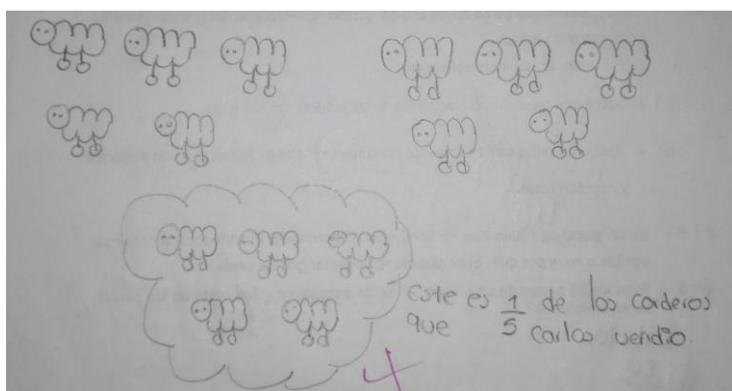
Nota: En la representación realizada por E5 se puede observar que no hubo equivalencia entre el pastel descrito en la situación como el todo a fraccionar. E5 representó dos círculos haciendo alusión a dos pasteles, dividiendo uno en seis partes de acuerdo al denominador de la fracción $\frac{2}{6}$, el otro lo dividió en tres partes desiguales y sombreado ocho de las nueve que tenía; por esto identificó su representación con la fracción $\frac{8}{9}$, la cual no concuerda con el registro gráfico que elaboró, por esto se deduce que no hubo conversión. Además, E5 escribió como respuesta que la octava parte del pastel es $\frac{8}{9}$ ratificando su dificultad en la transformación de representaciones en

el registro verbal, numérico y gráfico. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 07 de junio de 2022).

Cabe mencionar que E5 siguió presentando problemas para realizar representaciones cuando la unidad es compuesta al igual que los alumnos de C2 que como se observa en la siguiente figura el desarrollo llevado a cabo por E7 no es correspondiente a lo que el problema estipula.

Figura 40

Representación realizada por E7 en el literal c de la evaluación.



Nota: E7 no dividió el conjunto de corderos en cinco partes como lo determina el denominador de la fracción $\frac{1}{5}$, en vez de esto, toma cada grupo de cinco corderos y toma uno expresando de forma escrita que este es el equivalente a $\frac{1}{5}$ de los corderos vendidos, respuesta que no concuerda con lo que solicita el problema. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 07 de junio de 2022).

Literal e. Por último, se da a conocer el análisis de la segunda situación planteada en el literal d, de la evaluación (figura 39).

Figura 41

Enunciado del literal e de la evaluación de fracción como parte-todo

e. Representar la siguiente situaciones:

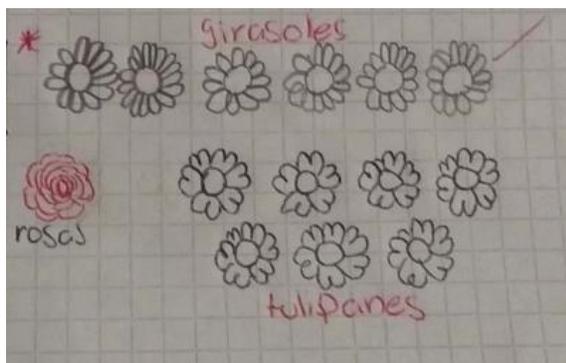
- Sobre una mesa hay 5 manzanas de las cuales $\frac{5}{5}$ son rojas.
- Tengo un ramo con 14 flores de las cuales $\frac{3}{7}$ son girasoles, $\frac{1}{2}$ son tulipanes y $\frac{1}{14}$ son rosas.

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Para este ítem de la evaluación el estudiante E3 representante de C1 presentó la siguiente respuesta: dibujó catorce flores de las cuales seis eran girasoles, siete tulipanes y una rosa (ver figura 42).

Figura 42

Solución de la segunda situación del punto e de la evaluación, dada por E3



Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 07 de junio de 2022).

El estudiante tuvo en consideración que la unidad era compuesta y por tanto para las fracciones $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{14}$ el denominador indica el número de grupos que se debía formar en el

conjunto compuesto por las catorce flores, por ejemplo, en la fracción $\frac{3}{7}$ el estudiante determinó que debía formar siete grupos y de los cuales tres grupos eran tulipanes, dado que hay catorce flores entonces cada grupo estaba formado por dos flores, es decir, como tres grupos son tulipanes entonces hay seis tulipanes en total, razón por la que el estudiante dibujó seis tulipanes.

Para cada fracción el estudiante realizó el mismo razonamiento y tuvo presente el todo aludido en cada fracción, en consecuencia, al hacer la representación gráfica de cada fracción en total la suma de flores dibujadas era catorce. El estudiante elaboró una representación gráfica de acuerdo a cada una de las tres fracciones inmersas en el planteamiento del literal e, en lo cual es evidente la actividad cognitiva de conversión; dado que el estudiante transformó las tres fracciones a un respectivo gráfico, hay coherencia del todo y la parte entre cada representación para cada fracción mencionada en el enunciado, por lo cual, se concluye que el estudiante comprendió el significado de fracción como parte todo cuando la unidad es compuesta.

De esta forma concluye el análisis de las actividades diseñadas para la comprensión del significado de fracción como parte todo. Vemos cómo los estudiantes E1, E2 y E3 lograron la comprensión completa del significado parte todo a lo largo del desarrollo de las actividades propuestas. Individuos como E6 y E7 presentaron dificultades en la comprensión, que no fueron superadas en las actividades desarrolladas y estudiantes como E5 y E4 no consiguieron una comprensión del significado presentando muchos inconvenientes en la transformación de diferentes representaciones de una fracción lo que permitió identificar que no hubo actividad de conversión y tratamiento en el proceso de resolución de problemas. No lograron entender la

fracción como la relación existente entre dos cantidades donde una representa el número de partes en las que se divide un todo y otra el número de partes tomadas de este.

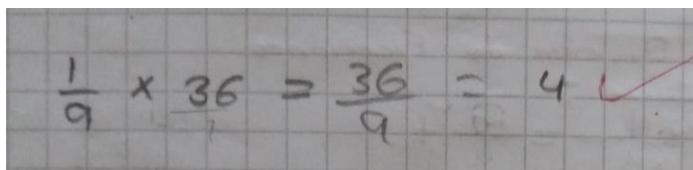
Las actividades siguientes giran en torno a los significados de fracción como operador y como cociente. Para el análisis de los registros fueron escogidos los mismos estudiantes que en el análisis anterior.

Actividad 11

En la actividad 11 se propusieron cuatro ejercicios que consistían en calcular por ejemplo $\frac{3}{5}$ de 20; sin considerar ningún contexto, con el fin de que los estudiantes tuvieran la oportunidad de utilizar a la fracción primeramente como un transformador y ver a la fracción resultante como un cociente debido a que en las actividades subsiguientes se tuvo que realizar este mismo proceso inmerso en el contexto de un problema matemático.

Figura 43

Procedimiento realizado por E1 al hallar $\frac{1}{9}$ de 36


$$\frac{1}{9} \times 36 = \frac{36}{9} = 4 \quad \checkmark$$

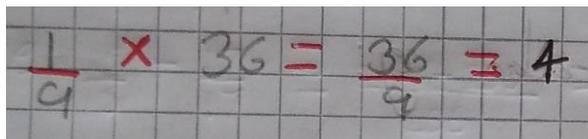
Nota: Esta operación daba como resultado un número entero. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 12 de julio de 2022).

En la figura 43 se puede ver como E1 manipuló la expresión $\frac{1}{9}$ de 36 y la convierte en $\frac{36}{9}$ usando el significado de fracción como operador, en otras palabras, identificó a la fracción $\frac{1}{9}$ como modificador del número 36. Después utilizó el significado de fracción como cociente y transformó la fracción $\frac{36}{9}$ en el número 4.

Como se puede advertir en la figura 44 estudiantes como E5 no tuvieron mayor dificultad en este tipo de procedimientos. Todas las transformaciones hechas a la representación conservan la coherencia con lo que inicialmente se tenía, a diferencia de cocientes donde cuyo resultado no era un número entero.

Figura 44

Procedimiento realizado por E5 al hallar $\frac{1}{9}$ de 36



$$\frac{1}{9} \times 36 = \frac{36}{9} = 4$$

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 12 de julio de 2022).

Se presentaron dificultades como la observada en la siguiente figura donde errores en el aspecto operacional impidieron la correcta transformación del registro y por consiguiente la comprensión del significado de fracción como operador y como cociente.

Figura 45

Procedimiento realizado por E5 al hallar $\frac{4}{6}$ de 92.

$$\frac{4}{6} \times 92 = \frac{368}{6} = 614\bar{6}$$

Nota: E5 no ubicó correctamente el punto que identifica a la cifra como un decimal e incurrió en errores de conteo al realizar la división consiguiendo un resultado incorrecto a la división y por ende una pérdida del significado de fracción como cociente. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 12 de julio de 2022).

Actividad 13

La actividad 13 consistió en el desarrollo de un taller de problemas de fracción como operador. Los problemas pertenecientes al taller comprendieron enunciados que permitieron y demandaron al estudiante considerar la fracción como transformador sobre una cantidad.

Figura 46

5. En un crucero viajan 3640 pasajeros. $\frac{3}{8}$ son alemanes, $\frac{2}{5}$ franceses, $\frac{1}{7}$ portugueses y el resto son españoles. ¿Cuántos viajeros hay de cada nacionalidad?
6. En una encuesta se ha observado que $\frac{3}{5}$ de los habitantes de una ciudad son aficionados del equipo de fútbol local. Si el total de habitantes de esta ciudad son 1.280.000. ¿Cuántos habitantes de esta ciudad son aficionados del equipo de fútbol local?
7. De un depósito de agua de 600L se han sacado $\frac{2}{5}$ del total y luego se sacaron $\frac{1}{4}$ del total, ¿Cuántos litros de agua quedan en el depósito?

Nota: Las fracciones de los problemas son fracciones propias. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

De los problemas que comprendieron la actividad se seleccionaron la 1, 2 y 11 para el análisis de los registros.

Problema 1: El problema 1 se presenta a continuación en la figura 47.

Figura 47

1. El kilo de pollo cuesta \$13.000 si compró 1 kilo y $\frac{2}{3}$ de kilo ¿cuánto me costó el pollo que compré?

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

La resolución dada por E7 al primer problema hizo evidente la actividad cognitiva de tratamiento; el estudiante E7 calculó $\frac{2}{3}$ de 13000, para ello dividió 13000 entre dos y obtuvo como resultado 4333. Seguidamente multiplicó el resultado de la división por dos, operación que es igual a 8666. En el proceso anterior el estudiante aplicó el significado de fracción como operador a la fracción $\frac{2}{3}$.

Para responder a la pregunta el estudiante le sumó a 13000 el valor obtenido en el proceso anterior y concluyó escribiendo que “compraron 21666,66 de pollo” (ver figura 48).

Figura 48

Solución dada por E1 al primer problema de la actividad 13

The image shows handwritten work on grid paper. At the top left, there is a long division: 13,000 divided by 3, with a quotient of 4,333 and a remainder of 1. To the right of this, there is a multiplication: 4,333 multiplied by 2, resulting in 8,666. Below these calculations, there is a handwritten note: "Plo: Compraron 21.666 de pollo". To the right of the note, there is an addition: 13,000 plus 8,666, resulting in 21,666 with a checkmark next to it.

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 09 de agosto de 2022).

El estudiante aplicó las operaciones básicas de multiplicación, división y suma para transformar la expresión numérica a otra en el mismo registro de representación de acuerdo a lo formulado en el problema.

Por otro lado, E3 y E4 para dar solución al problema calcularon $\frac{2}{3}$ de 13000 (ver figura 49), calculo que expresaron a través de una fracción donde el numerador era la multiplicación 13000 por dos y denominador era 3. El resultado de la multiplicación que había en el numerador fue 26000, por lo tanto, la fracción resultante al utilizar la fracción $\frac{2}{3}$ como operador fue $\frac{26000}{3}$.

Realizado el cociente $\frac{26000}{3}$ igual a 8666,6, se determinó que los estudiantes utilizaron el significado de fracción como cociente para expresar el resultado en forma decimal.

En lo realizado primeramente hubo actividad cognitiva de tratamiento, ya que, los estudiantes llevaron la representación numérica: $\frac{2}{3}$ de 13000, a su forma decimal 8666,6 mediante las reglas de la multiplicación y tomando la fracción como cociente indicado, es decir lo transformó en una expresión numérica equivalente.

Seguidamente, los estudiantes E3 y E4 sumaron el valor de los $\frac{2}{3}$ de kilo de pollo y el valor total del kilo de pollo con la finalidad de responder a la pregunta del problema con expresiones como: “el pollo que compró le costó 21666,6” y “el pollo que compré me costó 26666,6 pesos”.

En este último proceso el estudiante también realizó transformaciones sobre el registro de representación numérica, e hizo uso correctamente de las reglas de la adición para simplificar la

expresión y obtener un resultado que le permitiera dar respuesta a la pregunta formulada en el problema.

Figura 49

Solución dada por E3 al primer problema de la actividad 13

$$\textcircled{1} \frac{2}{3} \text{ de } 13.000 = \frac{13.000 \times 2}{3} = \frac{26.000}{3}$$

$$\begin{array}{r} 13.000 \\ \times 2 \\ \hline 26.000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26.000 \overline{) 3} \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 13.000,00 \\ \underline{8.666,6} \\ 21.666,6 \end{array}$$

R= El pollo que compró le costo 21.666,6

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 09 de agosto de 2022).

Figura 50

Solución dada por E4 al primer problema de la actividad 13.

$$\frac{2}{3} \times \frac{13.000}{1} = \frac{26.000}{3}$$

$$\begin{array}{r} 26'0'0'0 \overline{) 3} \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 13.000 \\ \underline{8.666,6} \\ 21.666,6 \end{array}$$

El Pollo que compré me Costo 21.666,6 Pesos

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 09 de agosto de 2022).

Problema 2: Análisis del segundo problema

Figura 51

Segundo problema del taller de la actividad 13.

2. En el colegio se seleccionan 90 estudiantes. $\frac{2}{5}$ son de séptimo, y el resto son de sexto.
¿Cuántos estudiantes hay de cada grado?

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Figura 52

Solución dada por E7 al segundo problema de la actividad 13

Handwritten solution for Figure 52:

$$\frac{2}{5} \times \frac{90}{1} = \frac{180}{5}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ 30 \overline{) 180} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

Below the division, there is a calculation: $90 \times 2 = 180$.

Below that, there is a long division: $\begin{array}{r} 190 \\ -36 \\ \hline 54 \end{array}$.

The final answer is written in red: "R: en el grado séptimo hay 36 estudiantes y en el grado sexto hay 54".

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 09 de agosto de 2022).

Figura 53

Solución dada por E4 al segundo problema de la actividad 13

Handwritten solution for Figure 53:

$$\frac{2}{5} \times \frac{90}{1} = \frac{180}{5} = 36$$

Below this, there are two long division problems:

$$\begin{array}{r} 180 \\ 30 \overline{) 180} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 36 \overline{) 90} \\ \underline{36} \\ 54 \end{array}$$

The final answer is written in red: "R... 36 estudiantes son de séptimo y 54 de sexto".

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 09 de agosto de 2022).

Como se observa en la figura 52 y 53 los estudiantes E7 y E4 multiplicaron $\frac{2}{5}$ por 90 correctamente y el resultado lo expresaron en la fracción $\frac{180}{5}$, esta fracción surgió del hecho de que los estudiantes usaron la fracción $\frac{2}{5}$ como operador. Seguidamente los estudiantes dividieron 180 entre cinco expresando la fracción resultante de la multiplicación como número entero, proceso en el que hicieron uso del significado de fracción como cociente. Luego, obtuvo 54 como resultado al restar 36 a 90; de lo cual es posible inferir que hubo actividad cognitiva de tratamiento al resolver el problema 2. Por último, los estudiantes respondieron al problema diciendo que 36 estudiantes son de séptimo y 54 son de sexto.

En la resolución del problema se puede observar que para llegar al valor 54 relacionado con la cantidad de estudiantes de séptimo, realizaron la resta de la cantidad de estudiantes de sexto a la cantidad total de estudiantes seleccionados; la cantidad de estudiantes de sexto es resultado de la aplicación de las definiciones de fracción como operador y cociente, y la manipulación de las expresiones numéricas mediante operaciones como multiplicación, división y adición.

Problema 11: Por último, se hace el análisis de uno de los desarrollos presentados por los estudiantes al problema 11 que enuncia lo siguiente: Un ganadero tiene 256 reses, si vende $\frac{5}{8}$ de las reses y al día siguiente vende $\frac{2}{6}$ de las reses, ¿cuántas reses vendió?

Figura 54

Solución dada por E1 al onceavo problema de la actividad 13

The image shows handwritten work on grid paper. At the top, the student calculates $\frac{5}{8} \times \frac{256}{1} = \frac{1280}{8}$. To the right, a long division shows $1280 \div 8 = 160$. Below this, the student calculates $\frac{2}{6} \times \frac{256}{1} = \frac{512}{6}$. To the right, a long division shows $512 \div 6 = 85$ with a remainder of 2. A red note says "Ya no quedan 256 Reses porque se vendieron 160". Below the division, a subtraction shows $\frac{160}{485} - \frac{160}{245}$. At the bottom, the student writes "R/A: El ganadero vendio 245 reses."

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 09 de agosto de 2022).

Como lo ilustra la figura el estudiante E7 realizó varios procesos con el fin de responder a la situación planteada. Calculó $\frac{5}{8}$ de 256 para saber cuántas reses se vendieron primero, para ello multiplicó 256 por ocho y obtuvo la fracción $\frac{1280}{8}$. Luego el estudiante dividió 1280 entre ocho, operación que fue igual a 160.

En este proceso el estudiante aplicó la definición de fracción como operador sobre la fracción $\frac{5}{8}$ y la definición de fracción como cociente a la fracción $\frac{1280}{8}$, además, hubo actividad cognitiva de tratamiento en el procedimiento realizado sobre las fracciones en el registro numérico: transformó la expresión dada en la descripción del problema en una multiplicación de fracciones, realizó dicha multiplicación y llevó la fracción $\frac{1280}{8}$ a su forma decimal.

Para calcular el número de reses que se vendieron al día siguiente multiplicó $\frac{2}{6}$ por 256 y usó las definiciones de fracción como operador y fracción como cociente obteniendo como resultado 85

Por último, el estudiante sumó los dos resultados de los dos procesos anteriores y le restó el valor resultante al número de reses que tenía al inicio y respondió a la pregunta diciendo que “el ganadero vendió 245 reses”.

En el proceso para calcular $\frac{2}{6}$ de 256 también hubo actividad de tratamiento, pero, E7 no se percató que para calcular el número de reses que se vendieron al día siguiente debía tener en cuenta que primero se vendieron 160 reses, de este modo para calcular cuántas reses se vendieron al día siguiente el todo al que debía aplicarse la fracción $\frac{2}{6}$ como operador era 256-160, por lo tanto, no hubo conversión en la transformación del enunciado del problema a un planteamiento numérico.

El problema 11 representó mayor dificultad para los estudiantes, debido a que el contexto demandaba un cambio en el todo y la mayoría de estudiantes presentaron la misma dificultad que E1.

Estudiantes como E1 no reconocieron que dado un contexto y una situación el todo puede cambiar, en conclusión, el estudiante perdió el significado al expresar numéricamente el enunciado, pues estos no concuerdan al no reconocer el cambio del todo inicial por otro, por esto estudiantes como E1 no comprendieron el significado de fracción como operador en este tipo de problemas.

Actividad 15

Esta actividad consistió de seis problemas y se llevó a cabo con el fin de observar el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para comprender y solucionar problemas con fracciones como operador y cociente, con fracciones propias e impropias y la forma en que cada uno de estos tipos de fracciones se comporta en el contexto de un problema.

Cabe resaltar que previo a esta actividad se realizaron ejemplos que presentaban contextos similares propios de los problemas en los cuales se observó mayor dificultad en la actividad 13, con el fin de que los estudiantes pudieran superar sus obstáculos.

Observemos en la siguiente figura el problema número 6 del taller propuesto en la actividad 15

Figura 55

Problema 6 de la actividad 15

6. Un comerciante ha comprado zumo de naranja y de limón. De naranja ha pedido $\frac{7}{12}$ del total y de limón $\frac{2}{7}$ de los litros encargados de zumo naranja, si en total ha encargado 168 litros de zumo, ¿Cuántos litros pidió de zumo de limón?

Nota: El problema número 6 demandaba al estudiante prestar atención al cambio de la cantidad que inicialmente es el todo debido a que ésta se modifica por otra cantidad. K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Como la mayoría de los alumnos presentaron la misma dificultad en la actividad 13 fue pertinente analizar cómo estos habían superado o no esta dificultad.

En el caso de individuos como E1, se puede inferir de los procesos de resolución llevados a cabo ya no presentaban esta dificultad y comprendieron el significado de fracción como operador de manera satisfactoria.

Como lo muestra la figura 56 el estudiante E1 para responder al problema realizó lo siguientes: En primer lugar, dividió 168 entre 12, luego multiplicó el resultado de esta división por 7, y obtuvo el número 98. En este primer proceso el estudiante reconoció que el todo es la cantidad de zumo total, es decir 168 litros de zumo, además aplicó la fracción $\frac{7}{12}$ como operador, dado que esta fracción representa la cantidad de zumo de naranja con respecto al total de zumo encargado. En segundo lugar, dividió 98 entre 7 y el resultado lo multiplicó por 2, y por último, respondió en base al producto obtenido: “El comerciante ha encargado 28 litros de zumo de naranja.

En el proceso de resolución proporcionado descrito anteriormente puede advertirse la actividad de tratamiento a lo largo de éste, el estudiante determinó que la frase “De naranja ha pedido $\frac{7}{12}$ del total y de limón $\frac{2}{7}$ de los litros encargados de zumo de naranja”, presente en el enunciado, indicaba que para calcular el total de zumo de limón la fracción $\frac{2}{7}$ debía actuar como operador sobre el total de zumo de naranja, es decir, que la fracción anteriormente mencionada no actuaba como operador sobre el total de zumo encargado.

Por tanto, el estudiante E1 reconoció que el todo sobre el que actuaba la fracción de zumo de limón no era el mismo sobre el que actuaba la fracción de zumo de naranja. También se puede destacar que hubo actividad de conversión cuando el estudiante utilizó el significado de fracción

como operador para representar lo planteado en el problema mediante operaciones entre fracciones, lo cual le permitió responder asertivamente al problema.

Figura 56

Solución realizada por E1 al literal 6 de la actividad 15

The image shows handwritten work on grid paper. It contains two division problems and a conclusion. The first division problem is $168 \div 12 = 14$, with a long division layout showing $168 \overline{) 12}$ and a result of 14. The second division problem is $98 \div 7 = 14$, with a long division layout showing $98 \overline{) 14}$ and a result of 14. Below these, there is a conclusion: "Atc: El comerciante ha encargado 28 litros de zumo de limón." The text is written in cursive and is underlined.

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 23 de agosto de 2022).

Igualmente, para el caso de estudiantes como E7, el cual transformó las expresiones numéricas manteniendo el significado y dio respuesta al problema dentro de su contexto.

Figura 57

Solución realizada por E1 al literal 6 de la actividad 15

The image shows handwritten work on grid paper. It contains two multiplication problems and two division problems. The first multiplication problem is $\frac{7}{12} \times \frac{168}{1} = \frac{1176}{12}$. The second multiplication problem is $\frac{2}{7} \times \frac{98}{1} = \frac{196}{7}$. The first division problem is $1176 \overline{) 12}$ with a result of 98. The second division problem is $196 \overline{) 7}$ with a result of 56. There is also a note: "R1 Quedaron 286 de zumo." written in red ink.

Nota: a diferencia de E1, E7 primero multiplicó la fracción 7 por 168 y luego lo dividió por 12 a diferencia de E1 que primero dividió 168 entre 12 y luego multiplicó por 7 el resultado. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 23 de agosto de 2022).

Actividad 16

En esta actividad se realizó la evaluación de fracción como operador para determinar la comprensión del significado de fracción como operador y como cociente de los estudiantes hasta ese momento.

La evaluación consistió en hallar una cantidad a partir de una fracción de un valor determinado y cuatro problemas de fracción como operador similares a las desarrolladas preliminarmente a esta actividad.

De la evaluación, se escogieron los problemas c, y d para el análisis de los registros recopilados.

Problema del ítem c:

Figura 58

Problema del ítem c de la evaluación de fracción como operador.

- c. Laura mide 165 cm si Cecilia mide $\frac{4}{5}$ de la estatura de Laura y Lady mide $\frac{7}{6}$ de la altura de Laura, entonces ¿cuánto mide Cecilia y cuanto mide Lady?

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

Figura 59

Solución dada por el estudiante E1 al ítem c de la evaluación.

Handwritten student work on grid paper showing two division and multiplication problems. The first problem shows $170 \div 5 = 34$, then $34 \times 4 = 136$, with the final answer "Cecilia mide 136 cm". The second problem shows $170 \div 6 = 28,3$, then $28,3 \times 7 = 196,1$, with the final answer "Lady mide 196,1 cm". Both problems are marked with red checkmarks.

ATA: Cecilia mide 136 cm, Lady mide 196,1 cm

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 31 de agosto de 2022).

El estudiante E1 para dar respuesta al problema realizó una transformación de la información dada para obtener los $\frac{4}{5}$ de 170 y los $\frac{7}{6}$ de 170; además dio respuesta a la pregunta del problema mediante dos procedimientos ilustrados en la figura 56 y descritos a continuación:

Inicialmente hubo una actividad cognitiva de conversión pues E1 transformó la expresión inicialmente dada en el enunciado, dividiendo 170 entre 5 como lo indicaba el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$ y el cociente fue igual 34. Seguidamente multiplicó 34 por el numerador de la fracción $\frac{4}{5}$ operación que arrojó como resultado 136. Por último, el estudiante escribió que “Cecilia mide 136 cm”.

En este proceso hubo también actividad de tratamiento, porque el estudiante tomó la representación en el registro numérico y lo configuró en otra expresión en el mismo sistema de

representación. Inicialmente usó el significado operador, luego como cociente y realizó estos procesos a través de las operaciones de división y multiplicación de forma correcta.

Para el segundo proceso realizó lo mismo que en el primero, pero en vez de usar la fracción $\frac{4}{5}$ como operador utilizó la fracción $\frac{7}{6}$ como operador sobre 170; y el resultado fue 196,1 y concluye este segundo proceso escribiendo que “Lady mide 196,1 cm”.

De lo anterior se puede decir que el estudiante comprendió el significado de fracción como operador y cociente, E1 utilizó la multiplicación y la división de forma pertinente para manipular las expresiones obtenidas conservando el significado de operador, de la misma forma realizó transformaciones tomando a la fracción como un cociente durante el proceso y respondió a la pregunta planteada en el problema de acuerdo a la situación descrita en su enunciado.

Problema del ítem d.

Figura 60

Ítem d del segundo punto de la evaluación de fracción como operador.

- d. Cristian tiene \$460.000 y se compra un pantalón, una camisa y unos zapatos. Si el pantalón vale $\frac{2}{8}$ y la camisa $\frac{3}{8}$, entonces ¿Cuánto le costaron los zapatos?

Nota: K. Melo, J. Martínez (Planeación 2022).

La comprensión alcanzada por estudiantes como E1 perteneciente a la categoría C1 también se puede apreciar en el desarrollo del problema d observado en la figura 57.

E1 para resolver el problema planteado, calculó el precio de los zapatos; para ello realizó varios procesos para llegar a la respuesta como muestra la figura 58.

Figura 61

Solución dada por el estudiante E1 al problema d de la evaluación.

Handwritten work on grid paper showing calculations for a problem. The work includes the following steps:

- Initial problem: $d. 460.000 \div 8$ (with a note "Pantalón: 115.000" written above).
- Division: $460.000 \div 8 = 57.500$.
- Multiplication: $57.500 \times 2 = 115.000$.
- Another multiplication: $57.500 \times 3 = 172.500$ (labeled "camisa 172.500").
- Summation: $115.000 + 172.500 = 287.500$.
- Subtraction: $460.000 - 287.500 = 172.500$.
- Final answer: "R.A: Los zapatos le costaron 172.500".

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 31 de agosto de 2022).

En primer lugar, para calcular el valor de los zapatos dividió el todo 460.000 entre denominador de la fracción $\frac{2}{8}$ y seguidamente multiplicó el valor resultante de la operación anterior es decir 57.500 por dos, proceso que dio como resultado 115.000 y escribe, “pantalón: 115.000.

En segundo lugar, usó la cifra 460000 y la dividió entre ocho, luego multiplicó por tres hallando así el precio de la camisa, en este caso escribe “camisa: 115000”.

Por último, para calcular el precio de los zapatos el estudiante sumó los precios de la camisa y el pantalón, suma que dio como resultado 287.500, se lo restó al todo y obtuvo 172.500, finalizó dando la siguiente respuesta: “los zapatos costaron 172500”.

El estudiante aplicó la definición de fracción como operador a lo descrito numéricamente en el problema y usó las operaciones multiplicación división suma y resta conservando el

significado por lo tanto hubo actividad cognitiva de tratamiento, además respondió al problema en las magnitudes del contexto del problema.

Al igual que E1 estudiantes como E6 pertenecientes inicialmente a la categoría C2 por presentar algunas dificultades en la comprensión de significado parte-todo, superaron las dificultades presentadas en el desarrollo de actividades anteriores y lograron una comprensión satisfactoria del significado de operador y cociente, como lo muestra el desarrollo realizado por E6 también al problema d mostrado en la figura 59.

Figura 62

Desarrollo realizado por el estudiante E6 al punto d de la evaluación.

Handwritten work on grid paper showing calculations for a problem. The work includes a list of items and their costs, multiplication of unit prices by quantities, and division of totals to find unit prices. Red checkmarks indicate correct steps.

$$\begin{array}{r} 65.000 \\ + 97.500 \\ \hline 162.500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 260 \\ 260 \\ 260 \\ \hline 780 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 520000 \\ 40 \\ 0 \\ 00 \\ \hline 63000 \end{array}$$

$$\frac{2}{8} \times 260.000 = \frac{520.000}{8} = 65.000 \text{ Pantalón}$$

$$\frac{3}{8} \times 260.000 = \frac{780.000}{8} = 97.500 \text{ camisa}$$

$$\begin{array}{r} 780000 \\ 60 \\ 40 \\ 00 \\ \hline 97500 \end{array}$$

A/A/Los zapatos le costaron 97.500

Nota: la imagen advierte cómo E6 realizó un proceso similar al llevado a cabo por E1 para resolver el problema d. K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 31 de agosto de 2022).

También estudiantes como E4 que aunque no lograron una comprensión del significado de fracción como parte todo lograron una comprensión del significado de fracción como operador y como cociente.

Figura 63

Solución dada por E4 al problema c del segundo tipo de evaluación.

The image shows handwritten work on grid paper. At the top left, the calculation is $\frac{4}{5} \times 165 = \frac{660}{5} = 1.32$, with a checkmark and the name 'Cecilia' written next to it. Below this is a vertical multiplication of 165 by 4, resulting in 660, followed by a division of 660 by 5, resulting in 132. To the right, the calculation is $\frac{7}{6} \times 132 = \frac{924}{6} = 154$, with a checkmark and the name 'Lady' written next to it. Below this is a vertical multiplication of 132 by 7, resulting in 924, followed by a division of 924 by 6, resulting in 154. At the bottom right, the student has written 'Cecilia mide 1.32 y Lady mide 1.54'.

Nota: E4 presentó una evaluación diferente a E6 y E1 ya que lo presentó en una fecha posterior a los demás, para E4 el punto c de la evaluación decía lo siguiente: Laura mide 165 cm si Cecilia mide $\frac{4}{5}$ de la estatura de Laura y Lady mide $\frac{7}{6}$ de la altura de Cecilia, entonces ¿cuánto mide Cecilia y cuanto mide Lady?, K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 31 de agosto de 2022).

En la imagen 63 se puede observar el proceso realizado por E4 para dar respuesta al ítem c. Indica que multiplicó $\frac{4}{5}$ por 165, y expresó el resultado como $\frac{660}{5}$, luego de multiplicar 165 por 4, dividió 660 entre 5 y obtuvo un primer resultado el cual señaló con una rayita y escribiendo el nombre Cecilia. Seguidamente el estudiante realizó un proceso similar al mencionado multiplicando $\frac{7}{6}$ por 132, ésta operación fue igual 154 y al lado de esta escribió Lady.

Finalmente, respondió diciendo que “Cecilia mide 1.32 y Lady 1.54”. En el primer proceso el estudiante comprende que la frase “Cecilia mide $\frac{4}{5}$ de la estatura de Laura”, indicaba que el todo es la estatura de Laura, es decir 165 cm y que es sobre este que va actuar la fracción

$\frac{4}{5}$ como operador, también reconoció que para el segundo proceso la oración “Lady mide $\frac{7}{6}$ de la estatura de Cecilia” hace referencia a que el todo sobre el que va actuar la fracción $\frac{7}{6}$ es la estatura de Cecilia, la cual es el resultado de realizar el primer proceso, es decir, 132 cm, de lo anterior se infiere que el estudiante interpretó el todo dependiendo del contexto donde se plantea el problema y no se limita a ver el todo como uno solo, sino que este puede variar dependiendo de la forma en que se suministre la información de un contexto.

Por otra parte, estudiantes como E5 siguieron presentando las mismas dificultades operatorias que impidieron una comprensión apropiada de los significados abordados en la evaluación.

Figura 64

Solución dada por el estudiante E5 al punto d, de la evaluación.

Handwritten work on grid paper showing two calculations:

Top calculation: $\frac{4}{5} \times \frac{180}{1} = \frac{720}{5} = 144$. The student has written $\frac{720}{5} = 145$ and circled 145. A handwritten note says "Cecilia mide 145 cm". There is a red "x4" written next to the result.

Bottom calculation: $\frac{7}{6} \times \frac{180}{1} = \frac{1260}{6} = 210$. The student has written $\frac{1260}{6} = 210$ and circled 210. A handwritten note says "Lady, mide 210 cm".

Nota: K. Melo, J. Martínez (Diario de campo, 31 de agosto de 2022).

Como se observa en la siguiente figura E5 mantuvo el significado de operador hasta el momento de la división entre 720 y 5, el numerador y denominador respectivos de la fracción

resultante de multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{180}{1}$, donde esta multiplicación representaba la expresión $\frac{4}{5}$ de 180. Sucedió igualmente, al hallar $\frac{7}{6}$ de 180.

Cuando E5 realizó la división incurrió en un error y ubicó una coma para indicar que la cifra hallada es decimal cuando no lo es: 1,45 en vez de 145, el valor encontrado no mantiene el significado de lo especificado inicialmente en el problema, en consecuencia, la actividad cognitiva de tratamiento no estuvo presente. También puede inferirse que al momento de elaborar la respuesta E6 no realizó una retrospectiva que le permitiera identificar que la respuesta era incorrecta, no consecuente en términos de las unidades de magnitud en el contexto del problema es decir E5 no advirtió que Cecilia no puede medir 1,45 cm, igualmente para Lady la cual no podría medir 2,10 cm.

De esta forma E5 no conservó el significado de la expresión inicial y por lo tanto no alcanza una comprensión.

Vemos como estudiantes como E4 que no alcanzó una comprensión del significado de fracción como parte todo si logró una comprensión del significado operador y cociente además de superar sus dificultades a nivel operatorio.

Estudiantes como E6 y E7 también lograron una comprensión y no presentaron mayores dificultades en la transformación de las expresiones y la comprensión de los significados y E1, E2 y E3 no presentaron dificultades operatorias en el proceso y alcanzaron una comprensión de los significados.

También se observó que sujetos como E5 no alcanzaron una comprensión de los significados, debido a que las dificultades operatorias presentadas no le permitían una transformación congruente de las representaciones en el mismo registro.

El uso de resolución de problema en matemáticas fue adecuada para llegar a una comprensión de significados de fracción, dado que demandaba a los estudiantes transformaciones de diferentes representaciones de fracción y también permitió el fortalecimiento de las aptitudes operatorias con las representaciones de número racional fraccionaria y decimal.

Conclusiones y recomendaciones.

- La elaboración de problemas contextualizados permiten a estudiantes la comprensión de los significados de fracción como parte todo, como operador y como cociente; los problema usados en la intervención pedagógica se diseñaron y editaron en la planeación de la intervención con el fin de que sus enunciados estuvieran de acuerdo al contexto de los estudiantes y que en su proceso de resolución se abarcaran procesos de transformación de los registros de representación en los cuales se pudieran identificar si hubieron o no, actividades cognitivas de conversión y tratamiento.
- Las dificultades en operaciones como multiplicación y división de fracciones representan un obstáculo en la comprensión del significado de fracción como operador y fracción como cociente; al usar a una fracción como un operador en un problema, es ineludible el uso de la multiplicación y división de fracciones para obtener una respuesta también es el caso, cuando se toma a una fracción como un cociente debe realizarse una división. Esta

situación se puede ver claramente reflejada en los desarrollos de E5, el cual no alcanzó una comprensión de los significados por las dificultades operatorias.

- La comprensión de un problema es una parte fundamental en la resolución ya que así se tenga comprensión sobre los significados de fracción se debe tener claridad sobre la situación del problema y lo que este pide; como es el caso de E4 en la resolución de problemas de fracción como parte-todo, E4 realizaba transformaciones de representaciones independientemente de lo formulado en el problema. Como se estableció en el marco conceptual lo primero que debe hacerse para dar respuesta a un problema es entenderlo
- El proceso de resolución de problemas permite al estudiante tomar en consideración el tipo de magnitud del todo de la representación que se está transformando, de acuerdo al contexto del problema. Al elaborar la respuesta el estudiante debe realizar una retrospectiva y verificar si la respuesta concuerda con los planteamientos del problema y lo que solicita en la magnitud correspondiente.
- Es recomendable llevar a cabo la enseñanza de las operaciones con fracciones inmersas en la resolución de problemas, en vez de efectuarse aislada de un contexto; las operaciones además de verse involucradas durante gran parte del proceso de resolución representan un aspecto crucial para dar una solución adecuada a un problema, por eso su enseñanza es necesaria durante el proceso ya que facilita el éxito en la resolución de un problema.

Referencias Bibliográficas

- Casimiro, M. (2017). Método de Pólya en la resolución de problemas de ecuaciones.
<http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2018/05/86/Casimiro-Maria.pdf>
- Díaz, R. O. M. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales*.
https://repositorio.autonoma.edu.co/bitstream/11182/531/1/Dificultades_errores_soluci%C3%B3n_problemas_n%C3%BAmeros_racionales.pdf
- Duval, R. Sáenz, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas perspectivas semióticas seleccionadas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fandiño Pinilla, M. I. (s/f). *LAS FRACCIONES: ASPECTOS CONCEPTUALES Y DIDÁCTICOS*. Magisterio.co. http://bibliotecadigital.magisterio.co/book-viewer/noetica_0.pdf/12585/2062/1
- García, Y. J. G. (2019). Diversas interpretaciones de las fracciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 141–150.
- Hernández, A., Ordoñez, J., Cervantes, J., y García, M. (2017), *Teoría de registros de representaciones semióticas*.
https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA
- Institución Educativa Cajete. (2018). *Plan de asignatura de matemáticas*.
<https://docs.google.com/document/d/1DoQgF6vW3zUYCNCf82ko-rujCBF8jeYJ/edit?rtpof=true>
- Institución Educativa Cajete. (2019). *Plan de aula por desempeño y secuencia didáctica grado sexto*.
<https://docs.google.com/document/d/1ykyN7Ns0jWdsBGNASxA5f2J37lx3Is1/edit>

- Institución Educativa Cajete. (2019). *Plan de aula por desempeño y secuencia didáctica grado séptimo*.
<https://docs.google.com/document/d/1ykyN7Ns0jWdsBGNsxA5f2J37lx3Is1/edit>
- Kieren T. 1983. Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. In: Carpenter T, Fennema E, Romberg E (Eds). *Rational numbers an integration of research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersey, USA, pp. 13-47.
- Macías Sánchez, J. (2014) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa. Conect@2*, 4(9). pp 27- 57
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, 8(2), pp. 157-182.
http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf
- Quecedo, R., Castaño, C. (2003). *Introducción a la metodología de investigación cualitativa*. *Revista de Psicodidáctica*, núm. 14, 2002, pp. 5-39.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402>
- Sánchez, J. y Ovalle C. (2014). *Estrategias de razonamiento*. Guatemala, Centroamérica: Serviprensa, S.A.
- Soto Apolinar, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. México. Recuperado el 04 de Agosto de 2018, de <http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf>
- Yapo, W. Q., & Gallardo, J. (s/f). *UNA APROXIMACIÓN A LA COMPRESIÓN DE LA FRACCIÓN EN PERÚ A TRAVÉS DE LOS LIBROS DE TEXTO*. Edu.co.
http://funes.uniandes.edu.co/1663/1/316_Quispe2009Unaaproximacion_SEIEM13.pdf

Anexos

Anexo 1. Taller: Situaciones para representar fracciones de unidad simple.

- a. Andrés reparte su torta de cumpleaños entre sus amigos, hermanos y tíos.

Represente gráficamente y numéricamente las siguientes situaciones:

- Andrés reparte la mitad de la torta entre sus amigos
- Andrés reparte la quinta parte entre sus hermanos
- Andrés reparte la sexta parte entre sus tíos

- b. Juana se ha comido dos tercios de una pizza.

Representar gráficamente y numéricamente la parte correspondiente a lo que quedó de la pizza

- c. Representar Gráficamente y numéricamente la siguiente situación:

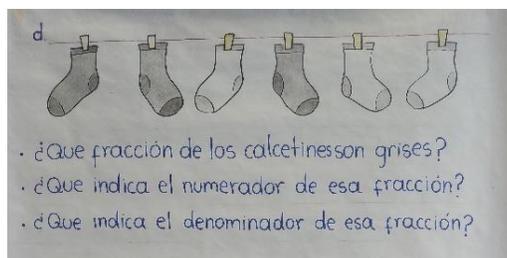
La hermana mayor de Juana se ha comido una pizza entera y un cuarto de otra de igual tamaño.

Anexo 2. Taller: Ejercicios de representación de unidad compuesta.

Representar

- a) Una bolsa con 5 esferas de las cuales $\frac{2}{5}$ son rojas.
- b) sobre la mesa hay 7 vasos, de los cuales $\frac{4}{7}$ tienen agua y el resto jugo de naranja
- c) En una excursión participaron 12 personas de las cuales $\frac{2}{6}$ son mujeres
- d)

Ilustración 1



Anexo 3. Taller: situaciones de unidad compuesta y unidad simple.

- a. Luis compró 22 frutas de las cuales 12 son manzanas y el resto peras. Representar gráficamente y numéricamente la cantidad de peras y de manzanas que compró Luis.
- b. Juan tiene 15 corderos y vendió $\frac{1}{5}$. representar gráficamente los corderos que vendió.
- c. Dado un grupo de 8 árboles $\frac{2}{4}$ son pinos. Representar.
- d. En un grupo de 6 animales domésticos $\frac{2}{3}$ son perros. Representar.
- e. De 9 cosas $\frac{1}{3}$ son azules. Representar.
- f. Un corredor ha recorrido $\frac{5}{8}$ del camino de su casa hasta el polideportivo. Representar la parte del camino que le falta por recorrer.
- g. Andrés se comió $\frac{2}{5}$ de un pastel. Representar la parte del pastel que no se ha comido.

Anexo 4. Taller: Primeros problemas con unidad compuesta

- a. Verificar si la siguiente situación es correcta.

Tengo un ramo con 14 flores, de las cuales $\frac{3}{7}$ son girasoles, $\frac{1}{2}$ tulipanes y $\frac{1}{14}$ son rosas.

- b. En un salón de clase hay 50 alumnos, de ellos 15 estudian inglés en un instituto. ¿Qué fracción de los alumnos estudian inglés en dicho instituto?
- c. Si de los 36 perros de un refugio 20 serán adoptados ¿Qué parte de los perros serán adoptados?
- d. Pedro se comió la mitad de las galletas de una lata y luego marta se comió $\frac{1}{3}$ de las galletas que quedaban ¿Qué fracción de las galletas que había al principio queda en la lata?
- e. José Luis compró una docena de huevos. Al salir de la tienda se cayó y se rompieron 7 huevos ¿Qué parte de la docena de huevos se rompió? ¿Qué parte de la docena de huevos no se rompió?

Anexo 5. Evaluación: Fracción como parte todo

- a. Un corredor ha recorrido $\frac{7}{10}$ del camino de su casa hasta el polideportivo. Representar gráfica y numéricamente la parte del camino que le falta por recorrer.
- b. Carlos tiene 15 corderos de los cuales vendió $\frac{1}{3}$. Representar gráficamente los corderos que vendió.
- c. Si tengo un pastel de cumpleaños. Representar la octava parte de la mitad del pastel.
- d. En un grupo de 7 animales $\frac{3}{5}$ son jirafas. Determine si la afirmación anterior es posible o no, y por qué. Si es posible representar gráficamente.
- e. Representar la siguiente situaciones:

- Sobre una mesa hay 5 manzanas de las cuales $\frac{5}{5}$ son rojas.
 - Tengo un ramo con 14 flores de las cuales $\frac{3}{7}$ son girasoles, $\frac{1}{2}$ son tulipanes y $\frac{1}{14}$ son rosas.
- f. Si de los 36 perros de un refugio, 20 serán adoptados ¿Qué parte de los perros no serán adoptados?

Anexo 6. Taller: Problemas de fracción como operador y cociente con fracciones propias

- a. El kilo de pollo cuesta \$13.000 si compré 1 kilo y $\frac{2}{3}$ de kilo ¿cuánto me costó el pollo que compré?
- b. En el colegio se seleccionan 90 estudiantes. $\frac{2}{5}$ son de séptimo, y el resto son de sexto. ¿Cuántos estudiantes hay de cada grado?
- c. Javier tiene \$8000, $\frac{1}{4}$ de su plata se lo gasta en golosinas y $\frac{1}{8}$ en un lápiz que necesitaba para hacer el dibujo de artística. ¿Cuánto dinero gastó Javier?
- d. En la clase de educación física se les pregunta sobre el deporte que desean jugar. $\frac{3}{5}$ escogieron fútbol, $\frac{1}{5}$ escogió baloncesto, si el total de estudiantes de la clase de educación física son 35, responda las siguientes preguntas:
- Cuántos estudiantes escogieron baloncesto
 - Cuántos estudiantes escogieron fútbol
 - Cuántos estudiantes no escogieron baloncesto
 - Cuántos estudiantes no escogieron ni baloncesto ni fútbol
- e. En un crucero viajan 3640 pasajeros. $\frac{3}{8}$ son alemanes, $\frac{2}{5}$ franceses, $\frac{1}{7}$ portugueses y el resto son españoles. ¿Cuántos viajeros hay de cada nacionalidad?

- f. En una encuesta se ha observado que $\frac{3}{5}$ de los habitantes de una ciudad son aficionados del equipo de fútbol local. Si el total de habitantes de esta ciudad son 1.280.000. ¿Cuántos habitantes de esta ciudad son aficionados del equipo de fútbol local?
- g. De un depósito de agua de 600L se han sacado $\frac{2}{5}$ del total y luego se sacaron $\frac{1}{4}$ del total, ¿Cuántos litros de agua quedan en el depósito?
- h. Dos atletas que están participando en una carrera de 500 metros han recorrido la siguiente cantidad: el corredor A ha recorrido $\frac{3}{8}$ de la carrera y el corredor B ha recorrido $\frac{12}{34}$ de la carrera. ¿Cuál de los dos corredores va primero?
- i. La cosecha de un campo se extiende en un total de 162 hectáreas, si mi papá cosecha $\frac{5}{8}$ del campo y yo cosecho $\frac{2}{9}$. ¿cuántas hectáreas nos falta por cosechar?
- j. Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{7}{40}$ litros, ¿cuántos frascos de perfume puedo llenar con 200 litros de perfume?
- k. Un ganadero tiene 256 reses, si vende $\frac{5}{8}$ de las reses y al día siguiente vende $\frac{2}{16}$ de las reses, ¿cuántas reses vendió?

Anexo 7. Taller: Problemas de fracción como operador y cociente con fracciones impropias

- a. Andrés está de cumpleaños y quiere repartir a cada invitado $\frac{1}{9}$ de torta, si hay 17 invitados ¿Cuántas tortas debe comprar?
- b. Juan organiza una fiesta para su hija que cumple quince años, si el total de personas que caben en el lugar de la fiesta son 80 y hay un total de $\frac{11}{8}$ de personas. Entonces, ¿Cuántas personas no pueden ingresar a la fiesta?

- c. Jules ganó \$30.000 en su trabajo y se dirige al supermercado a comprar lo que necesita para preparar un almuerzo y algunos implementos para el hogar. Al seleccionar todo lo que necesita se da cuenta que vale $\frac{5}{4}$ del dinero que tiene. ¿Cuánto dinero le falta a Jules para comprar lo que necesita?

Anexo 8. Taller: Problemas de fracción como operador con fracciones propias e impropias

- a) Andrés está de cumpleaños y quiere repartir a cada invitado $\frac{1}{9}$ de torta, si hay 17 invitados ¿Cuántas tortas debe comprar?
- b) Jules ganó \$30.000 en su trabajo y se dirige al supermercado a comprar lo que necesita para preparar un almuerzo y algunos implementos para el hogar. Al seleccionar todo lo que necesita se da cuenta que vale $\frac{5}{4}$ del dinero que tiene. ¿Cuánto dinero le falta a Jules para comprar lo que necesita?
- c) En un grupo de aficionados al fútbol 56 son aficionados al Manchester, $\frac{1}{4}$ de total del Real Madrid y el resto del Barcelona, si en total hay 84 aficionados ¿qué parte (fracción) son aficionados del Barcelona?
- d) De un depósito, que estaba lleno, se han sacado esta mañana $\frac{5}{8}$ de su capacidad y por la tarde $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba. Si la capacidad del depósito es de 160 litros, ¿Cuántos le quedan?
- e) En una reunión, $\frac{3}{5}$ de los asistentes están casados y de estos, $\frac{4}{9}$ son hombres, indica que parte del total está formado por mujeres casadas.

- f) Un comerciante ha comprado zumo de naranja y de limón. De naranja ha pedido $\frac{7}{12}$ del total y de limón $\frac{2}{7}$ de los litros encargados de zumo naranja, si en total ha encargado 168 litros de zumo, ¿Cuántos litros pidió de zumo de limón?
- g) Un recipiente de tres cuartos de litro de capacidad se encuentra lleno hasta una tercera parte, si su contenido se echa en otro recipiente de 1 litro de capacidad, ¿qué parte de la capacidad del segundo recipiente contendrá líquido.
- h) Un recipiente de tres cuartos de litro de capacidad se encuentra lleno hasta una tercera parte, si su contenido se echa en otro recipiente de 1 litro de capacidad que contiene la cuarta parte del líquido, ¿qué parte de la capacidad del segundo recipiente contendrá líquido?

Anexo 9. Evaluación Fracción como operador y como cociente

- a. Resolver cada ejercicio.
- $\frac{3}{4}$ de 24
 - $\frac{2}{8}$ de 36
 - $\frac{4}{7}$ de 63
 - $\frac{6}{8}$ de 125
 - $\frac{12}{9}$ de 18
- b. Lee cuidadosamente cada enunciado y responde cada pregunta, de igual manera escribe que significa la respuesta.
- Didier fue a vender 15 pescados y vendió $\frac{3}{5}$ de pescado. ¿Cuántos pescados vendió?
 - Clara se compró un pantalón, si tenía \$80.000 y el pantalón costó $\frac{7}{9}$, ¿Cuánto dinero le sobró?

- Camilo vendió su celular, si el celular valía $\frac{3}{7}$ de \$1.000.000, ¿por cuánto dinero vendió su celular?
- Cristian tiene \$260.000 y se compra un pantalón, una camisa y unos zapatos. Si el pantalón vale $\frac{2}{8}$ y la camisa $\frac{3}{8}$, entonces ¿Cuánto le costaron los zapatos?
- Laura mide 160 cm si Cecilia mide $\frac{3}{5}$ de la estatura de Laura y Lady mide $\frac{7}{6}$ de la altura de Laura, entonces ¿cuánto mide Cecilia y cuanto mide Lady?

Anexo 10. Taller final: Problemas de fracción como parte todo y operador

- a. Un recipiente está lleno de agua hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad, si se saca la mitad del agua que contiene ¿Qué fracción de agua se ha sacado?
- b. Tres pueblos se pusieron de acuerdo para repoblar un bosque, uno de ellos está dispuesto a repoblar $\frac{2}{5}$ y otro $\frac{3}{8}$ ¿Qué parte ha de repoblar el tercer pueblo?
- c. Una persona tiene $\frac{1}{4}$ de su fortuna en joyas $1\frac{2}{5}$ en terrenos ¿qué parte de su fortuna tiene entre joyas y terrenos? ¿Cuánto le falta o le sobra para llegar a la mitad de su fortuna?
- d. La nave espacial, Voyager III, salió de la tierra el 20 de agosto de 1997. Tardó en llegar al planeta Júpiter $1 + \frac{8}{9}$; de Júpiter a Saturno $2 + \frac{1}{8}$ de año; de Saturno a Urano $4 + \frac{3}{7}$ de año y de Urano a Neptuno $3 + \frac{4}{7}$ de año.
 - Cuántos años tardó en llegar a Neptuno
 - ¿Dónde estaba 5 años después de despegar?

- e. De los animales del zoo $\frac{2}{3}$ son mamíferos y $\frac{1}{5}$ son aves ¿Qué fracción representan conjuntamente los mamíferos y las aves?
- f. Violeta bebió $\frac{6}{8}$ de jugo en la mañana y $\frac{5}{8}$ de litro en la tarde ¿Cuánto jugo tomó en total?
- g. Pedro tiene $\frac{7}{3}$ de un metro de alambre y utiliza $\frac{4}{3}$ del alambre que tenía ¿Cuántos metros de alambre le quedan?
- h. En el cumpleaños de Ramiro, David comió $\frac{1}{8}$ de la torta, Alejandro $\frac{5}{14}$ y Ramiro $\frac{3}{7}$ ¿Cuánta torta comieron entre los tres? ¿Qué porción de torta sobró?
- i. Después de pintar su casa, a Jorge le sobraron 5 tarros de pintura, cada uno con $\frac{2}{9}$ del galón de pintura ¿Cuánta pintura le queda?
- j. Nos dicen que el resultado de un examen ha sido el siguiente: $\frac{1}{8}$ de los alumnos han obtenido insuficiente, $\frac{3}{7}$ suficiente, $\frac{3}{8}$ notable y $\frac{1}{10}$ sobresaliente. Comprueba si estos resultados son posibles.