

**IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS DE ZIPF COMO HERRAMIENTA PARA EL
ESTUDIO DE SISTEMAS BIOLÓGICOS**

JOSÉ ALEJANDRO MARTÍNEZ CERÓN



**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE BIOLOGÍA
POPAYÁN
2009**

**IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS DE ZIPF COMO HERRAMIENTA PARA EL
ESTUDIO DE SISTEMAS BIOLÓGICOS**

JOSÉ ALEJANDRO MARTÍNEZ CERÓN

Monografía para obtener el título de Biólogo



**Directora
MSc. PATRICIA EUGENIA VÉLEZ**

**Asesor
Ph. D. PEDRO A. MORENO**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE BIOLOGÍA
POPAYÁN
2009**

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Popayán, Noviembre 11 de 2009

DEDICATORIA

Dedico esta página a Dios, que es la fuente de toda fuerza y toda sabiduría interna, quien hizo posible la vida y la posibilidad de comprender el mundo que nos rodea.

Dedico, con amor incondicional y profundo respeto, este logro a mis padres, mi hijo y sobrinos por su comprensión, apoyo constante y por el amor que me profesan, sin el cual no hubiera sido posible seguir adelante.

A mis familiares y amigos que de una u otra forma contribuyeron a que este proyecto se materializara.

José Alejandro Martínez C.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis más sinceros agradecimientos, por su apoyo oportuno y por brindarme conocimientos invaluable que contribuyeron al desarrollo de este proyecto, a:

Mi familia, quien me alentó constantemente y me brindo su apoyo durante el tiempo que duró mi formación profesional.

Profesora MSc. Patricia Vélez, tutora de este proyecto, quien con su seriedad, profesionalismo, ideas y don de gente, fue invaluable en la cristalización de mi investigación.

Ph. D. Pedro Moreno, por su orientación, consejos e ideas reformadoras que aportaron de forma considerable en el proyecto.

Bióloga María Cristina Ordoñez por facilitarme las herramientas adecuadas para poner en marcha mi trabajo.

Profesores del programa de Biología por darme un norte para ahondar en diferentes tópicos de las ciencias.

Jurados de mi trabajo por tomarse el tiempo para hacer las correcciones pertinentes en pro de la excelencia.

Universidad del Cauca por el conocimiento, valores inculcados y experiencias de vida que trascienden el contexto académico y dejan huella para mis labores personales y profesionales.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	14
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	17
2. JUSTIFICACIÓN	19
3. OBJETIVOS	20
3.1. <i>OBJETIVO GENERAL</i>	20
3.2. <i>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</i>	20
4. MARCO TEÓRICO	21
4.1 ANTECEDENTES DE LA TEORÍA DEL CAOS	21
4.1.1 <i>Movimiento Browniano</i>	21
4.1.2 <i>Triángulo de Sierpinski</i>	22
4.1.3 <i>El conjunto de Julia</i>	23
4.1.4 <i>Ley de Zipf</i>	27
4.1.5 <i>Ley de Gutenberg-Richter</i>	28
4.1.6 <i>Estudio de la variación de los precios del algodón por Mandelbrot</i> 30	
4.1.7 <i>Estudio de la extinción biológica por David Raup.</i>	31
4.1.8 <i>Ruido 1/f</i>	33
4.2 TEORÍA DEL CAOS	35
4.3 CRITICALIDAD AUTO-ORGANIZADA (SOC).....	39
4.4 GEOMETRÍA FRACTAL	45
4.5 PROPIEDADES DE LOS FRACTALES.....	49
4.5.1 <i>Auto-similaridad</i>	49
4.5.2 <i>Escalamiento</i>	50
4.5.3 <i>Dimensión</i>	51
4.5.4 <i>Propiedades estadísticas</i>	52
4.5.5 <i>Fractales naturales y artificiales</i>	53
4.5.6 <i>Implicaciones de la autosimilaridad y el escalamiento fractal</i>	56
4.6 DIMENSIÓN FRACTAL.....	59
4.7 <i>DEFINICIONES ALTERNATIVAS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL</i> 64	
4.7.1 <i>Leyes de Potencia</i>	65
4.7.2 <i>Dimensión por medio del conteo de cajas (box-counting)</i>	67
4.8 LA IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS DE ZIPF	68

4.9	APLICACIÓN DE MÉTRICAS DEL PAISAJE	72
4.9.1	<i>Dimensión fractal como métrica de complejidad de los parches.</i>	72
4.9.2	<i>Niveles de análisis del paisaje</i>	73
4.9.3	<i>Elementos del paisaje</i>	74
4.9.4	<i>Fragmentación</i>	75
5.	METODOLOGÍA	76
5.1	TIPO DE INVESTIGACIÓN	76
5.2	ESTRATEGIA METODOLÓGICA.....	76
6.	RESULTADOS	78
6.1	ANÁLISIS DE ZIPF APLICADO AL CUENTO DE “BLANCA NIEVES” 78	
6.2	ANÁLISIS DE ZIPF POR BOX COUNTING	80
6.3	DISCUSIÓN DE UN ARTÍCULO EN EL CAMPO DE LA GEOMETRÍA FRACTAL.....	88
6.4	APLICACIÓN A LA ECOLOGÍA DEL PAISAJE	95
	CONCLUSIONES	102
	BIBLIOGRAFIA	104

TABLA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Movimiento browniano de una partícula de polvo.....	21
Figura 2. Formación del triángulo de Sierpinski.....	23
Figura 3. Plano complejo elegido para el conjunto de Julia.....	24
Figura 4. Conjunto de Julia.....	25
Figura 5. Fractal de Julia coloreado.....	26
Figura 6. Diferentes conjuntos de Julia variando el valor de C	27
Figura 7. Rangos de las palabras en el idioma inglés. La curva muestra cuántas palabras aparecen con más de una frecuencia dada. La gráfica se conoce como Ley de Zipf.....	28
Figura 8. a. Distribución de las magnitudes de sismos en la zona de Nuevo Madrid en el sureste de U.S. durante el periodo 1974-1983.....	29
Figura 9 .a. Variaciones mensuales de los precios del algodón durante un período de 30 meses. b. La curva muestra el número de meses donde la variación relativa excede de una fracción dada.	30
Figura 10. Extinciones biológicas durante los últimos 600 millones de años registradas por John Sepkoski quien durante 10 años recolectó los datos de registro de fósiles.....	31
Figura 11. Histograma de los eventos de extinción según Raup.	32
Figura 12. a. Luz emitida de un quásar durante un período de 80 años, 1887-1967.....	33
Figura 13. Procesos regulares versus caóticos.	35
Figura 14. Costa de Noruega. Nótese la jerarquía de geometría fractal, con fiordos y fiordos dentro de fiordos, etc. Mandelbrot señala que los paisajes son frecuentemente fractales.....	47

Figura 15. Longitud L de la costa al cubrir la costa con cajas como las mostradas en la fig. 14, con diversas longitudes δ . La línea recta indica que la costa es fractal. La pendiente de la línea proporciona la dimensión fractal de la costa de Noruega. $D=1.52$	48
Figura 16. Propiedad de auto-similaridad de los fractales (un brócoli)	49
Figura 17. Propiedad de auto-similaridad de un fractal (línea costera).....	50
Figura 18. Propiedad de escalamiento de un fractal.....	50
Figura 19. Ejemplo de dimensión fractal.....	51
Figura 20. Dimensión fractal de auto-similaridad.....	51
Figura 21. Propiedades estadísticas.....	52
Figura 22. Conjuntos con auto-similaridad bien conocida.....	53
Figura 23. Patrones complejos de ramificación en las dendritas cerebrales analizadas usando el método de dilación	54
Figura 24. Gráfica del diámetro promedio de las vías aéreas pulmonares humanas	55
Figura 25. Diámetro total e venas y arterias pulmonares versus sus diámetros medios en el análisis vascular pulmonar.....	56
Figura 26. La autosimilaridad es satisfecha por un escalamiento de ley de potencias	57
Figura 27. La autosimilaridad es satisfecha por escalamientos más complejos	58
Figura 28. Forma más común de las relaciones de escalamiento	59
Figura 29. Forma menos común de las relaciones de escalamiento	59
Figura 30. Gráfica de M_D que muestra el cambio que sufre M_d cuando d coincide con D	64
Figura 31. Estimación empírica de una dimensión de un conjunto F , asumiendo que se basa en la ley de potencias $M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$	65
Figura 32. Cinco formas de encontrar la dimensión de F usando cajas.	68

Figura 33. Conteo y aplicación de logaritmos aplicando Ley de Zipf al resultado dado por TextStat 2.0 en el cuento de Blanca Nieves.....	78
Figura 34. Distribución de Zipf hiperbólica del análisis textual de Blanca Nieves.....	79
Figura 35. Ley de Zipf para Blanca Nieves. La dimensión fractal $D=0.6527$	79
Figura 36. Figura empleada para el enfoque de Box Counting.....	80
Figura 37. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 20 pixeles.....	81
Figura 38. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 18 pixeles.....	82
Figura 39. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 12 pixeles.....	82
Figura 40. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 9 pixeles.....	83
Figura 41. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 7 pixeles.....	83
Figura 42. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 4 pixeles.....	84
Figura 43. Cálculos para los pixeles de color negro (NB)	84
Figura 44. Cálculos para los pixeles de color blanco (NW) y blancos con borde negro (NBW).....	85
Figura 45. Gráfica para NW y línea de tendencia	85
Figura 46. Gráfica para NBW y línea de tendencia.....	86
Figura 47. Gráfica para NB y línea de tendencia	86
Figura 48. Cálculo de la dimensión fractal usando HarFA. $D=1.2614\pm 0.04$	87
Figura 49. Área de estudio capturada con Google Earth.....	96
Figura 50. Contorno de bosque abierto	96

Figura 51. Contorno de bosque denso.....	97
Figura 52. Contorno bosque abierto en .bmp monocromático	97
Figura 53. Contorno de bosque denso en .bmp monocromático	98
Figura 54. Representación del análisis de Zipf para el bosque abierto generada con Fractalise. La línea de color rojo define estadístico de Zipf y la línea azul los datos experimentales.	99
Figura 55. Representación del análisis de Zipf para el bosque denso generada con Fractalise. La línea de color rojo define el estadístico de Zipf y la línea azul los datos experimentales.	100
Figura 56. Técnica de Box Counting usando la grid de Fractalise bosque abierto.....	101
Figura 57. Técnica de Box Counting usando la grid de Fractalise bosque denso.....	101

RESUMEN

Esta monografía se centra en la discusión teórica y la aplicación práctica de la herramienta denominada análisis de Zipf para el estudio de sistemas biológicos puesto que evidencia la relación existente entre la invariancia a gran escala encontrada en los sistemas de la realidad y los sucesos caóticos, propios de los sistemas altamente complejos, sometidos a una condición denominada criticalidad auto organizada (SOC), que los caracteriza, y que implica que una leve perturbación desde esta posición de equilibrio crítico desencadena caos y ajustes para retomar la invariancia de escala.

Así, SOC tiene que ver con el carácter probabilístico del comportamiento de los sistemas naturales y de su organización espacial, evidenciándose a través de la omnipresencia de las leyes de potencias como expresión de esta criticalidad y de las propiedades geométricas que le atañen, destacándose la necesidad de una nueva geometría para abordarlas.

De esta manera ejes centrales de la discusión teórica son la geometría fractal, la teoría del caos, la Ley de Zipf como caso especial de Ley de potencias y el concepto de dimensión fractal que evidencia la complejidad y equilibrio delicado del orden natural.

Precisamente desde la necesidad de determinar la fractalidad y de encontrar maneras de medir prácticamente la dimensión fractal en el estudio de sistemas biológicos se han establecido aplicaciones de técnicas concretas de estimación de la dimensión fractal a un texto del cuento de Blanca Nieves, a una imagen de un ojo y la discusión del contorno de un paisaje natural.

De igual manera se ha discutido un artículo sobre la posibilidad de mirar el código genético como un lenguaje genético regido por la Ley de Zipf y así mostrar la universalidad de las leyes de potencias y el carácter fractal.

De esto se deriva que para el biólogo es de suma importancia conocer los fundamentos básicos y las técnicas fundamentales de cálculo de la dimensión fractal al estudiar sistemas biológicos lo que equivale a utilizar el estadístico de Zipf y el software disponible que le ayuda en esta labor.

Palabras claves: Ley de Zipf, dimensión fractal, teoría del Caos, SOC, Ley de potencias.

ABSTRACT

This monograph is focused on theoretical discussion and practical application of so called Zipf analysis for studying biological systems stressing the existing relationship between long scale invariance found in real systems and chaotic events, inherent to complex systems, subjected to a characterizing so called SOC condition, implying a minor disturbance from this critical equilibrium position cause chaos and resetting for recovering scale invariance.

So, SOC is related to stochastic behavior character presented on natural systems spatial arrangement been clear by omnipresence of power laws as expression of this criticality and form geometrical properties implied for it, highlighting the need for a new type of geometry for dealing with them.

So, key theoretical discussion paradigms are fractal geometry, chaos theory, Zipf's Law as a special case of power Laws and fractal dimensión concept serving for explaining complex and critical equilibrium in natural order

Precisely, from this need for determining fractality and finding manners for practically measuring it in biological systems study, concrete application techniques has been applied for esteeming fractal dimensión in a Snow White text, an eye image and for discussing a natural landscape border .

In addition, an article standing choice to consider ADN as a genetic language has been discussed using Zipf's Law, showing so the Power Laws and fractal character pervasivity

It's derived from this the importance of knowing basic calculus techniques and background for determining fractal dimensión when biologists are studying biological systems , being this the same that using Zipf's stadigraph and the useful software for this job.

Keyword: Zipf's Law, Chaos Theory, SOC, Power Law, fractal dimension

INTRODUCCIÓN

La Teoría del Caos es uno de los campos de mayor investigación e importancia en la actualidad porque permite explicar el comportamiento de la naturaleza considerando que posee la capacidad para ajustarse por sí misma a condiciones de equilibrio críticas, es decir, existe en ella una criticalidad auto-organizada.

La Biología es uno de los campos donde se manifiesta con mayor énfasis esta característica de los fenómenos naturales que son muy complejos y que no obedecen leyes determinísticas ni tampoco a los criterios geométricos euclidianos comunes. Así, el estudio de la Naturaleza críticamente auto-organizada exige el desarrollo de nuevos conceptos, especialmente en lo que se refiere a la forma, a la dimensión, a la geometría.

Por esta razón, siguiendo las ideas de la Teoría del Caos, Mandelbrot crea la Geometría Fractal e introduce el concepto de Dimensión Fractal como medida de la complejidad de un sistema irregular, de un sistema fractal. Este concepto es de gran importancia en el estudio de sistemas biológicos.

Por otra parte, el lingüista George Kingsley Zipf, en 1949, en su obra "Comportamiento Humano y el Principio del Mínimo Esfuerzo" al contar qué tan a menudo se empleaba una palabra dada en un pedazo de literatura, como por ejemplo un artículo en un periódico, encontró que existía una relación bien definida entre el rango dado a la palabra y su frecuencia de uso en el idioma inglés. Sin importar el texto que se utilizara, siempre sucede lo mismo.

Zipf expresó este resultado, encontrado de forma empírica, diciendo que la frecuencia de uso o de aparición de las palabras en un texto dependía de forma inversa de una potencia del rango con el que aparecía. Graficando en escala logarítmica el rango contra la frecuencia, Zipf, siempre encontró líneas rectas. Este resultado se conoce como *Ley de Zipf*.

La Teoría del Caos demostró que el resultado obtenido por Zipf no era aislado y solo aplicable a la lingüística, a la bibliometría. Dedujo esta relación funcional a partir de las propiedades de auto-similaridad de los fractales, implicando que es consecuencia, u otra manera de expresar, la dimensión fractal.

Por tanto, la Ley de Zipf era un caso especial de ley de Potencia, y consecuencia de la relación de autosimilaridad fractal.

Sólo que la Ley de Zipf, y las leyes de potencia son más adecuadas para encontrar la dimensión fractal porque se realiza de una forma gráfica; de allí su importancia y popularidad.

Las leyes de Potencias poseen la característica de estar expresadas mediante distribuciones de densidad de probabilidad y por ello una aproximación conceptual general utiliza la teoría de probabilidades. Así, la Ley de Zipf se ha generalizado y asumido diferentes refinamientos pudiéndose citar como variaciones la Ley de Pareto, la Ley de Zipf-Mandelbrot, la Ley de Estoup-Zipf-Mandelbrot, etc.

Como consecuencia de estos refinamientos se ha desarrollado una Ley de Zipf Generalizada, que se puede aproximar por distribuciones de probabilidad de tipo hiperbólico. Esta generalización es de gran utilidad para la Biología porque se puede aplicar a fenómenos biológicos muy importantes no sólo para determinar parámetros tales como la Dimensión Fractal y el Coeficiente de Determinación, los cuales permiten analizar el orden fractal de la naturaleza en las estructuras biológicas de los seres vivos, donde aparecen en todas las escalas la irregularidad y el equilibrio crítico, acordes con la Teoría del Caos.

A partir de estos parámetros es posible que el biólogo pueda comprender mejor cómo funcionan los seres vivos y le es posible hacer predicciones y sugerir maneras de acción en diversos problemas tales como los relacionados con el sistema inmune, de vital importancia en la protección contra los agentes virales, y por tanto de gran valor en las terapias y medidas preventivas contra las infecciones y enfermedades.

En consecuencia, aplicar correctamente la Ley de Zipf cuando se puede aproximar como distribución hiperbólica es tan importante en Biología que se ha denominado Análisis de Zipf y se ha convertido en una herramienta muy poderosa que el biólogo debe saber aplicar.

En este documento se discute la importancia del Análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos a través de la discusión de un artículo científico sobre aplicación de esta herramienta de análisis en el estudio de las "Leyes de Estoup-Zipf-Mandelbrot y el Lenguaje Genético", junto con aplicaciones anexas de cómo se utiliza la Ley de Zipf para determinar la dimensión fractal del texto del cuento de Blanca Nieves, así como en el uso de la técnica de Box Counting para determinar la dimensión fractal de la de un ojo. Finalmente se realiza el proceso de determinación de la dimensión fractal para dos bosques, comparándolos para mirar el efecto de la acción antrópica.

La exposición inicia describiendo la situación problemática consistente en que el biólogo desconoce el análisis de Zipf y los conceptos que implica porque no existe una adecuada difusión del mismo. Luego, se hace énfasis en la importancia del análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos.

La metodología aplicada asume que se está realizando una Monografía sobre la importancia del Análisis de Zipf para el estudio de sistemas biológicos e implica realizar primero una revisión bibliográfica de la parte conceptual de manera que sea posible construir un marco teórico detallado y pragmático de utilidad para el biólogo involucrando conceptos tales como Teoría del Caos, criticalidad auto-organizada, fractal, dimensión fractal, Leyes de Potencias, Ley de Zipf, Ley de Zipf Generalizada, distribuciones hiperbólicas y las técnicas para la medición de objetos fractales. Se ilustra mediante procedimientos prácticos a un texto y una imagen.

Luego, se realiza una identificación, para el análisis y discusión crítica, de trabajos ya ejecutados en el marco de la Geometría Fractal, sobre sistemas biológicos. Se enfatizan aquellos relacionados con el código genético

Finalmente, se explica cómo en los trabajos seleccionados se aplica el análisis de Zipf y las implicaciones que tiene su aplicación dentro de la investigación particular. Con base en la discusión crítica de estos trabajos se brinda una perspectiva del análisis de Zipf como herramienta de análisis para el estudio e sistemas biológicos hacia el futuro. En este orden de ideas se aplica a la comparación de dos bosques para determinar el impacto de la actividad antrópica sobre la dimensión fractal.

Se espera que este documento permita al estudiante de Biología, así como al Biólogo, utilizar en su investigación el Análisis de Zipf como una herramienta de conocimiento y predicción sobre sistemas biológicos de importancia.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La representación de los objetos naturales o de series de ellos mediante modelos basados en la geometría euclidiana tradicionalmente han sido empleados en Biología, como se puede verificar cuando se considera la representación de las coníferas mediante conos, el hábitat de animales por medio de áreas simples y las membranas celulares por medio de curvas o superficies simples. En la actualidad, sin embargo, se acepta que tales estructuras naturales se representan mejor mediante geometría fractal.

Los procesos y sistemas biológicos se caracterizan por poseer muchas subestructuras, con el mismo patrón general repitiéndose en sucesión cada vez a menor escala. Esta dependencia de la escala tiene implicaciones profundas en áreas de la Biología como la Ecología, la Fisiología Humana, la Genética, etc. La importancia del escalamiento fractal se reconoce en todos los niveles de la organización biológica. Por tanto, la geometría fractal sirve como unificador en Biología porque hace posible generalizar conceptos fundamentales como dimensión y longitud de medida.

Si bien la geometría fractal está más cerca de la realidad presente en la naturaleza, su aplicación depende de los objetivos que se persigan. Si se trata con objetos muy complejos, es necesario aplicarla ya que se vuelve importante la dimensión fractal en la apreciación de los fenómenos a escala cada vez más reducida que obedecen una ley de potencias, o de escalamiento, lo que implica que no existen escalas preferidas. Así el fenómeno es válido a cualquier escala, o mejor, la validez del fenómeno es independiente de la escala y por tanto conserva todas sus características en todas las escalas en las que se le considere.

En los fenómenos que siguen una ley de escalamiento (ley de potencias) interactúan de forma no lineal múltiples elementos produciendo estructuras de nivel superior, estructuras complejas, dinámicas, que presentan la tendencia a organizarse a sí mismas en estados críticos de equilibrio dinámico en los que se presentan fluctuaciones de todos los tamaños, de todas las escalas, fluctuaciones que son regidas por una ley de potencias.

De allí que las leyes de potencias sean omnipresentes en las estructuras de fenómenos complejos donde es posible aplicar la criticalidad auto organizada, vale decir, en la Naturaleza, siendo una medida de la complejidad de estos sistemas la dimensión fractal.

Por tanto, al existir un vínculo tan evidente entre biología fractal, leyes de escalamiento, dimensión fractal y Teoría del Caos, es relevante hacer énfasis en que para analizar sistemas biológicos es necesario utilizar las leyes de potencias. Así, al ser la Ley de Zipf Generalizada una ley de potencias, es el análisis de Zipf una herramienta valiosa en la investigación Biológica.

La importancia de la Ley de Zipf se pone de manifiesto si se considera su utilidad en el estudio del número de transcritores y secuencias proteínicas codificadas en el genoma humano, en la determinación del comportamiento de escalamiento en el sistema inmune humano, en el estudio del tamaño teórico (número de especies) de la distribución de los géneros vivos, en el desarrollo de modelos para explicar el tamaño de la distribución de las familias de genes y proteínas, en el estudio de las estructuras que se repiten y no se repiten en el ADN humano y de ratones, en la creación de modelos para explicar comportamientos naturales y físicos escalables etc.

Así las cosas, es muy preocupante el desconocimiento que existe entre los biólogos del análisis de Zipf como herramienta para el estudio de los sistemas biológicos lo que implica desconocimiento de la Teoría del Caos, las leyes de escalamiento, la Dimensión fractal y en general, del comportamiento de la Naturaleza, de los sistemas biológicos fundamentales en Biología y de las investigaciones que se realizan en la actualidad.

Este documento difunde los principios básicos que hacen posible aplicar el análisis de Zipf como herramienta en el análisis de sistemas biológicos, resaltando su valor explicativo y sugestivo de nuevas estrategias en el estudio de sistemas biológicos fundamentales de actualidad.

2. JUSTIFICACIÓN

La Ley de Zipf, en su forma original, es decir referida al trabajo realizado por George Kingsley Zipf sobre la distribución estadística de las palabras, establece una sencilla relación entre el rango (posición ordinal asignada a las palabras, clasificadas según su longitud medida en caracteres, en un hipotética ranking jerárquico) y su tamaño o frecuencia de utilización empírica en diferentes muestras de producción textual. Mide utilizando un promedio estadístico la riqueza del vocabulario de un idioma particular. En su discusión se utiliza un parámetro o exponente característico de una función logarítmica que relaciona el tamaño o frecuencia de utilización de las palabras con su rango o posición relativa. Zipf estableció que tal exponente era la unidad. Se puede afirmar hoy que la Ley de Zipf es un caso especial de ley de potencias con dimensión fractal igual a la unidad. Mandelbrot extiende esta Ley para casos en los que la dimensión fractal (exponente de la ley de potencias) es menor que la unidad y además enfatiza en el comportamiento hiperbólico de la distribución estadística implicada en estos casos.

Así, dado que en la Naturaleza es muy común encontrar fenómenos que sigan el tipo de comportamiento escalable, zipfeano, porque la Naturaleza es de orden fractal, no es necesario recurrir a ejemplos muy complejos para ilustrar el hecho de la omnipresencia de las leyes de potencia

En consecuencia, abordar el tema actual sobre la importancia del análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos está más que justificado.

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GENERAL

Discutir el análisis de Zipf como herramienta valiosa en el estudio de sistemas biológicos enfatizando sus fundamentos teóricos desde la geometría fractal, SOC, las Leyes de Potencias y la teoría del caos aplicándola a situaciones concretas (textos, técnica box counting y métrica del paisaje).

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar la manera en que se relacionan la Teoría del Caos, la Geometría Fractal y las Leyes de Potencias enfatizando los conceptos claves necesarios para la aplicación del análisis de Zipf como herramienta de análisis para el estudio de sistemas biológicos
- Describir la aplicación del análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos a través de aplicaciones prácticas y la discusión de un trabajo ejecutado en el campo de la Geometría Fractal
- Analizar y exponer críticamente los aportes e implicaciones derivados de la aplicación del análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos.

4. MARCO TEÓRICO

4.1 ANTECEDENTES DE LA TEORÍA DEL CAOS

4.1.1 Movimiento Browniano

El botánico Robert Brown en 1827 observó como una partícula cualquiera fluía de manera aleatoria sobre un líquido.

Esta experiencia se puede tener por ejemplo cuando uno está sentado en el cine y observa como el polvo se mueve a través del haz de luz producido por el proyector. No sería más que anecdótico si no fuera porque si se apuntaran las coordenadas de una de esas motas de polvo en un instante corto se puede observar cómo al graficar se genera una curva con dimensión fractal. Si se intenta dibujar una tangente a esta curva, esto será imposible. Este fractal posee las siguientes características:

- Su dimensión estará entre alrededor de 2 ya que prácticamente rellena el plano complejo pero no del todo.
- No es autosimilar pero si infinito y complejo.

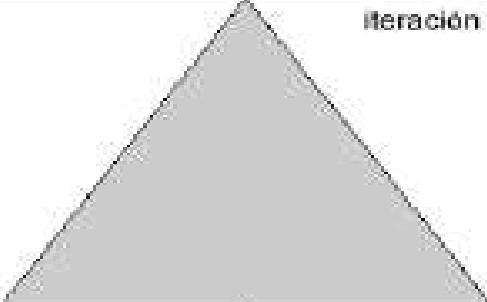
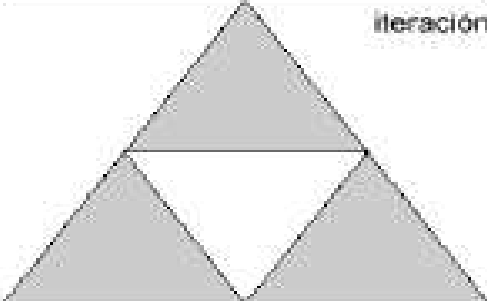
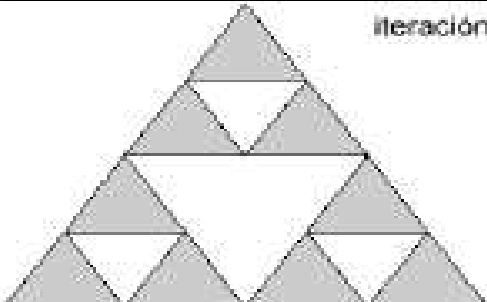
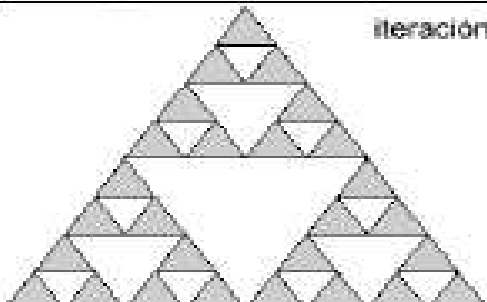
Este es posiblemente el objeto fractal más sencillo de dibujar



Figura 1. Movimiento browniano de una partícula de polvo

4.1.2 Triángulo de Sierpinski

El matemático polaco Waclaw Sierpinski introdujo esta estructura fractal en 1919. El método de dibujo es el siguiente:

 <p>iteración 0</p>	<p>Partamos (iteración $n=0$) de la superficie de un triángulo equilátero de lado unidad.</p>
 <p>iteración 1</p>	<p>Seguidamente (iteración $n=1$) tomemos los puntos medios de cada lado y construyamos a partir de ellos un triángulo equilátero invertido de lado $1/2$. Lo recortamos.</p>
 <p>iteración 2</p>	<p>Ahora (iteración $n=2$) repetimos el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado $1/2$ que nos quedan.</p>
 <p>iteración 3</p>	<p>Así que recortamos, esta vez, tres triángulos invertidos de lado $1/4$.</p>

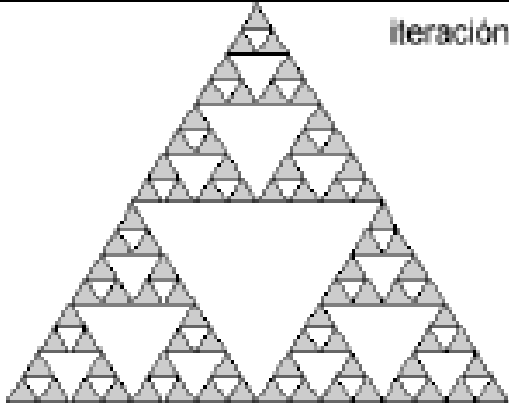
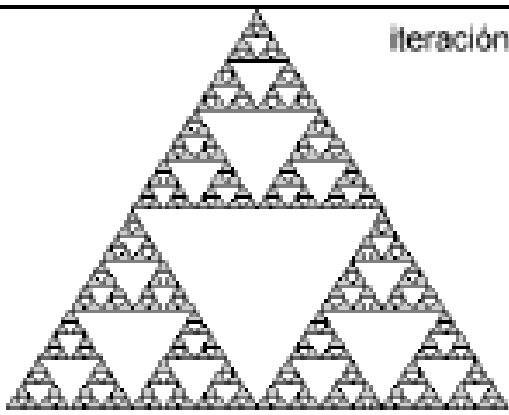
 <p>iteración 4</p>	<p>El proceso se repite infinitamente hasta obtener un triángulo de Sierpinski tan detallado como se desee.</p>
 <p>iteración 5</p>	<p>Después de 5 iteraciones se obtiene este resultado.</p>

Figura 2. Formación del triángulo de Sierpinski

En la figura se observan hasta cinco iteraciones sucesivas. Si se repite infinitamente el proceso se obtiene una figura fractal denominada triángulo de Sierpinski.

4.1.3 El conjunto de Julia

Iterar una función puede dar resultados muy extraños. Un ejemplo: Se parte de la función $f(x_n)=f(x_{n-1})^2 -1$, cuando se itera para los puntos iniciales comprendidos entre $[-\Phi, \Phi]$, es decir, los valores comprendidos entre el número áureo ($\Phi = (1+\sqrt{5})/2=1,618$) y su valor negativo tienden a un punto que no es infinito mientras que cuando se itera a partir de un número no comprendido entre el intervalo anterior la iteración tiende directamente al infinito. .

Para ilustrar el proceso, se elige un valor dentro del intervalo $[-\Phi, \Phi]$, por ejemplo $x=0$

x	f(x)
x = 0 El valor inicial para la iteración. Nótese que el valor está comprendido en el intervalo $[-\Phi, \Phi]$.	$f(0) = 0^2 - 1 = -1$
x = f(0) = -1	$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$
x = f(-1) = 0	$f(0) = 0^2 - 1 = -1$
...	

Ahora un valor **fuera** del intervalo $[-\Phi, \Phi]$, por ejemplo $x = -3$

x	f(x)
x = -3 El valor inicial para la iteración. Nótese que el valor no está comprendido en el intervalo $[-\Phi, \Phi]$.	$f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8$
x = f(-3) = 8	$f(8) = 8^2 - 1 = 63$
x = f(8) = 63	$f(63) = 63^2 - 1 = 3968$
...	

En la iteración 5, se tiene que $x = 6.5 \cdot 10^{28}$

Una vez visto el poder, de nuevo, que muestra una simple función polinómica iterada, se itera la función con números complejos y se representan en un plano complejo los resultados de la manera que sigue. La nueva función, ahora compleja, es $Z_n = Z_{n-1}^2 - 1$, que se dibuja de la forma siguiente:

1.- Se selecciona un área del plano complejo por ejemplo de $(10+10i)$, $(10-10i)$ a $(-10+10i)$, $(-10-10i)$.

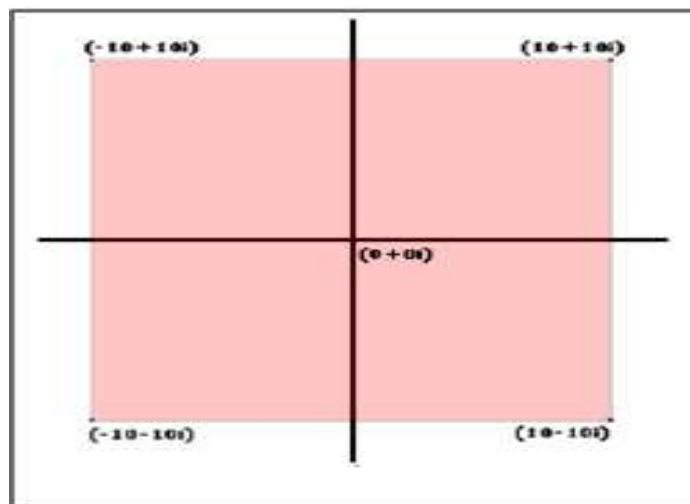


Figura 3. Plano complejo elegido para el conjunto de Julia

Recuerde que en el plano complejo en el eje x se representa la parte real del número complejo y en el eje y se representa el valor imaginario del número complejo.

2.- Se elige cada punto del plano complejo y se itera. El proceso iterativo consiste en escoger todos los puntos delimitados por nuestra área del plano complejo e introducirlos en la fórmula $Z_n = Z_{n-1}^2 - 1$. Para el primero proceso podría ser elegido el punto $(10+10i)$. La iteración sería aproximadamente

$$\begin{aligned} z_0 &= (10+10i)^2 - 1 = 100 + 100i + 100i + 100i^2 - 1 = (-1 + 200i) \\ z_1 &= (-1 + 200i)^2 - 1 = 1 - 200i - 200i + 400i^2 - 1 = (-400 - 400i) \\ z_2 &= (-400 - 400i)^2 - 1 \dots \end{aligned}$$

3.- Al realizar unas 1000 iteraciones se comprueba si el punto es próximo al infinito. Para ganar velocidad en el proceso de dibujo se suelen hacer unas 300 iteraciones. Si el módulo del número complejo z_n es inferior o igual a 2 se puede considerar que orbita alrededor de un punto que no tiende al infinito. Por órbita se entiende la serie de valores que toma la iteración de la función para un valor inicial. El conjunto de números que no tienden al infinito (su órbita no tienden al infinito) se denomina Conjunto de Julia.

4.- Si el módulo del número complejo obtenido después de iterar no supera 2 se representa en el plano complejo con un punto negro, si no, no se representa.

5.- Se pasa a otro punto de nuestro plano complejo, por ejemplo $(9+10i)$ y se continua con el proceso ad infinitum.

Si se itera una región grande del plano complejo y representamos sobre un plano complejo el conjunto de Julia se obtiene:

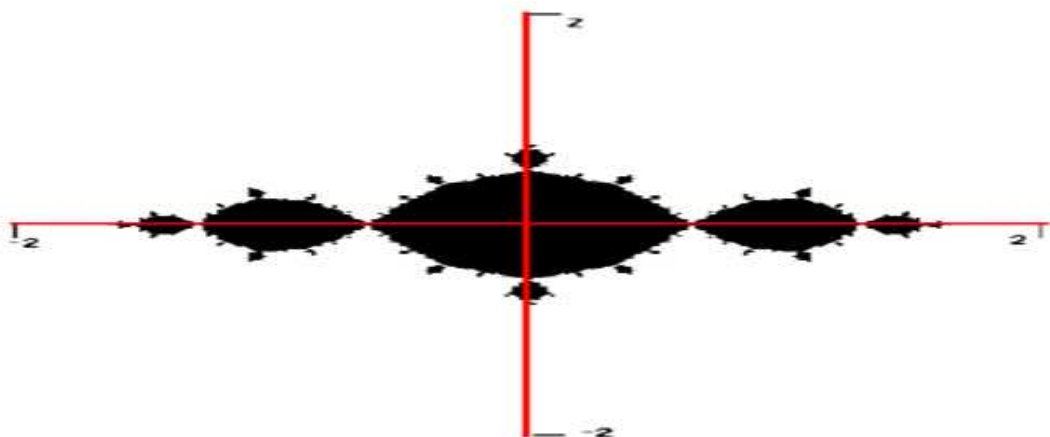


Figura 4. Conjunto de Julia

Esta es la representación del fractal de Julia cuando la fórmula es $Z_n = Z_{n-1}^2 - 1$

De forma genérica se puede escribir la fórmula como $Z_n = Z_{n-1}^2 - C$ donde Z y C son números complejos. Cabe destacar que el fractal de Julia comprende todo el plano complejo pero se trabaja con regiones delimitadas para agilizar la representación. El plano complejo formado por los vértices superiores $(-2+2i)$, $(2+2i)$ y los vértices $(-2-2i)$, $(2-2i)$ es suficiente para observar el conjunto.

Para conseguir colorido y efectos muy agradables se procede de la siguiente manera: una vez estudiada la órbita en un punto cualquiera se comprueba el número de iteraciones. Recuerde que una vez la fórmula iterada superaba el valor (en módulo) de 2 se cesaban las iteraciones y ese punto no era representado; en lugar de ello se representa ese punto con un color determinado. Por ejemplo si el punto tiende rápidamente al infinito se representa con el color azul, si el punto iterado tarda 120 iteraciones en sobrepasar el valor 2 se le asigna otro color etc. Una muestra de del fractal de Julia coloreado es la siguiente:

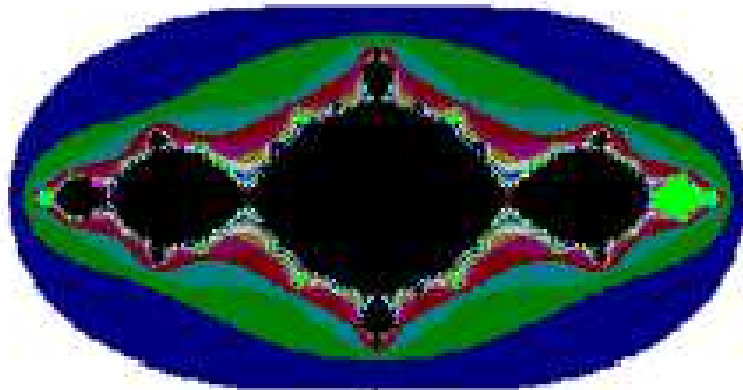


Figura 5. Fractal de Julia coloreado

A medida que varía el valor del parámetro C se obtienen diferentes fractales del tipo Julia. La serie de imágenes siguientes, con inversión e color muestran los diferentes fractales de Julia obtenidos al variar el valor del parámetro C .

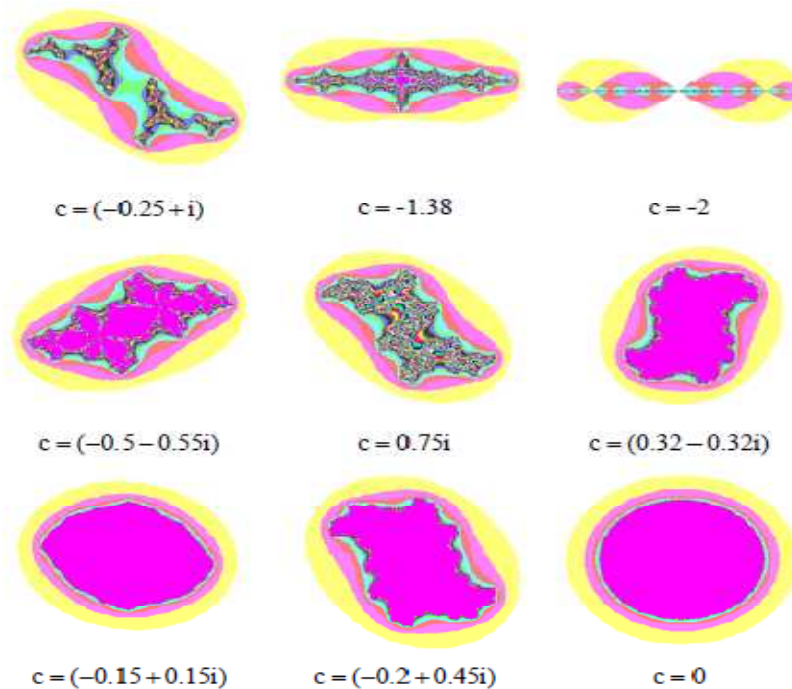


Figura 6. Diferentes conjuntos de Julia variando el valor de C

4.1.4 Ley de Zipf

Se origina en las extraordinarias observaciones sobre algunas regularidades simples en sistemas de origen humano que hizo en 1949 el profesor de la Universidad de Harvard **George Kingsley Zipf**, en su libro “Comportamiento Humano y el Principio del Mínimo esfuerzo”. Zipf contó que tan a menudo una palabra dada se empleaba en un pedazo de literatura como por ejemplo Ulises de James Joyce o un conjunto de periódicos. La décima palabra más frecuentemente usada (la palabra de rango 10) aparecía 2361 veces. La vigésima palabra más utilizada aparecía 1311 veces y la 20000ava palabra más frecuente aparecía solo una vez.

La figura 7 muestra la frecuencia de las palabras usadas en el idioma inglés en función de su rango. La palabra de rango 1, the, se usa con una frecuencia de 9%. La palabra de rango 10, I, tiene una frecuencia de 1%, la palabra de rango 100, say, se usa con una frecuencia de 0.1%, etc. Aparece de nuevo una notable línea recta. No importa si los datos se toman de un periódico, de la Biblia, o de Ulises, la curva es la misma. La regularidad expresada por líneas rectas en gráfica logarítmica del rango contra la frecuencia, con pendiente cercana a la unidad, se denomina **Ley de Zipf**.

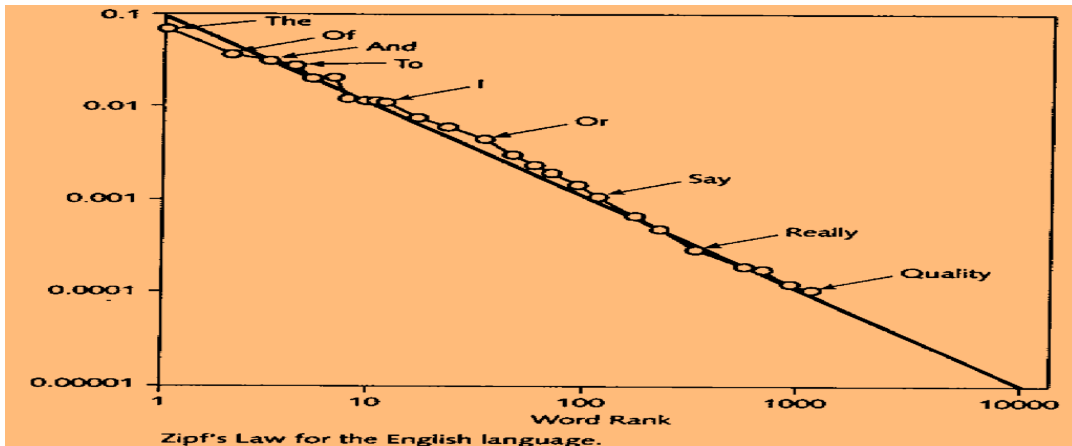


Figura 7. Rangos de las palabras en el idioma inglés. La curva muestra cuántas palabras aparecen con más de una frecuencia dada. La gráfica se conoce como Ley de Zipf.

Fuente: Zipf (1949)

Si bien Zipf sí hace alusión a la fuente de esta regularidad atribuyéndola al agente individual que trata de minimizar su esfuerzo, puesto que explora una teoría (**principio del mínimo esfuerzo**) basada en un proceso competitivo que equilibra la minimización del esfuerzo del hablante y del escucha, considerando las palabras como herramientas que se construyen y arreglan así para ser capaces de realizar la tarea de comunicación lo más eficiente que sea posible, asumiendo que quien habla debe construir un flujo continuo de expresiones que portan significados específicos, de tal manera que se minimice su esfuerzo como interlocutor de una comunicación efectiva respecto del oyente, al ser ella simplificada mediante la relación entre expresión y significado próximos uno del otro, no proporciona pistas de cómo pasar del nivel individual hasta las observaciones estadísticas.

4.1.5 Ley de Gutenberg-Richter

Las fracturas en la superficie terrestre se propagan de forma caótica para producir sismos, muchas veces con enorme energía. Sin embargo, fenómenos como los sismos poseen un mecanismo específico que permite describir cada evento de forma separada de los otros, situación que sucede aunque el número de sismos de magnitud dada siga una función de distribución simple conocida como la *ley Gutenberg-Richter*, mostrada en la figura 8.

Esta ley se manifiesta en la gráfica como una línea recta en escala logarítmica tanto horizontal como vertical y es sorprendente la forma en que describe la dinámica de todos los elementos de un sistema complicado como el de la corteza terrestre. Su importancia radica en que dice que los sismos grandes y los sismos pequeños siguen la misma ley. Pero es la observación precisamente de leyes empíricas simples como esta en la naturaleza la que motiva la investigación sobre una teoría de la complejidad.

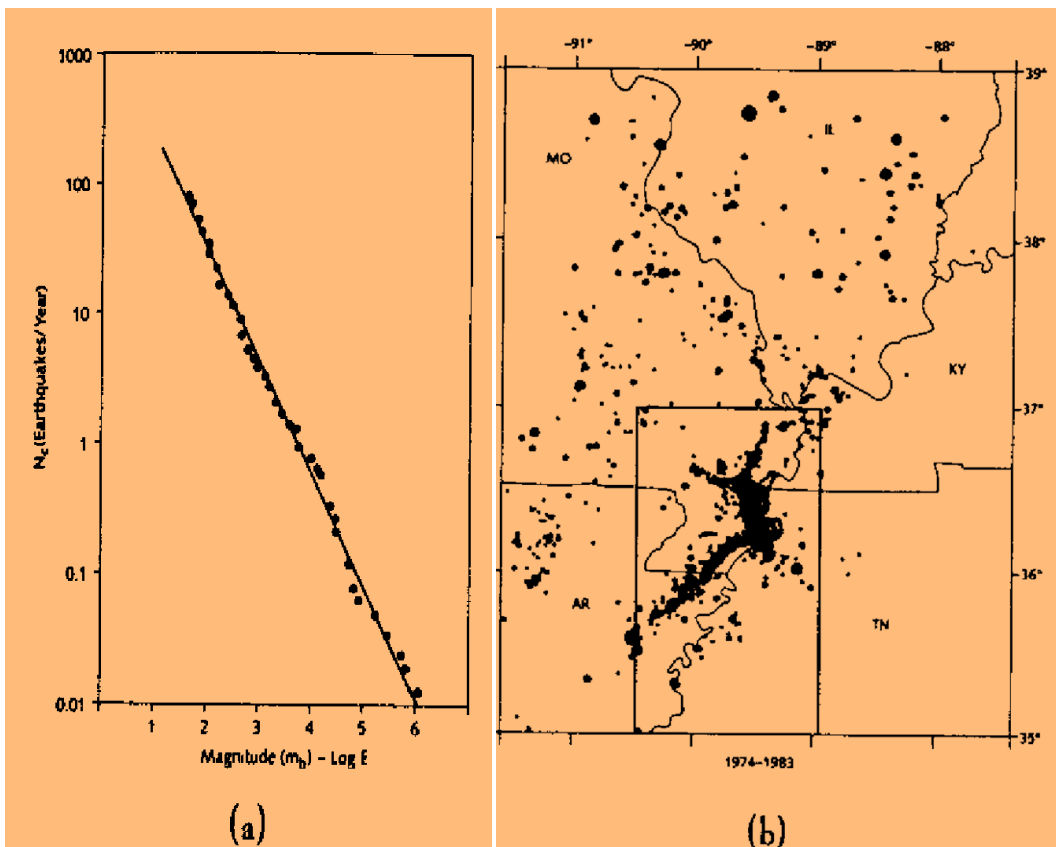


Figura 8. a. Distribución de las magnitudes de sismos en la zona de Nuevo Madrid en el sureste de U.S. durante el periodo 1974-1983. Los puntos muestran el número de sismos con una magnitud dada m . la línea recta indica una distribución de ley de potencia de los sismos. Esta ley simple se denomina ley de Gutenberg-Richter. b. localización de los sismos usados en la gráfica. El tamaño de los puntos indica la magnitud de los sismos.

Fuente: Johnston & Nava (1983).

4.1.6 Estudio de la variación de los precios del algodón por Mandelbrot

Benoit Mandelbrot, del Centro Watson T.J. de IBM en Nueva York, encontró en 1966 que la probabilidad de tener pequeñas y grandes variaciones del precio de las acciones, el algodón y otros valores sigue un patrón muy simple, conocido como la distribución de Levy. Mandelbrot había recolectado datos de cada variación de los precios del algodón mes a mes, durante varios años. Entonces, contó qué tan a menudo las variaciones mensuales estaban entre 10 y 20 %, que tan a menudo estaban entre 10 y 5%, etc. y graficó los resultados en escala logarítmica. Mandelbrot contó cuantos meses había con una variación de precio dado y notó transiciones suaves desde las variaciones pequeñas a las grandes y así la distribución de los precios cambia aproximadamente como una línea recta, una ley de potencia, como se muestra en la figura 9. La variación de los precios es entonces “independiente de la escala” sin ningún tamaño típico en la variación, de la misma manera en que los sismos no tienen ningún tamaño típico característico.

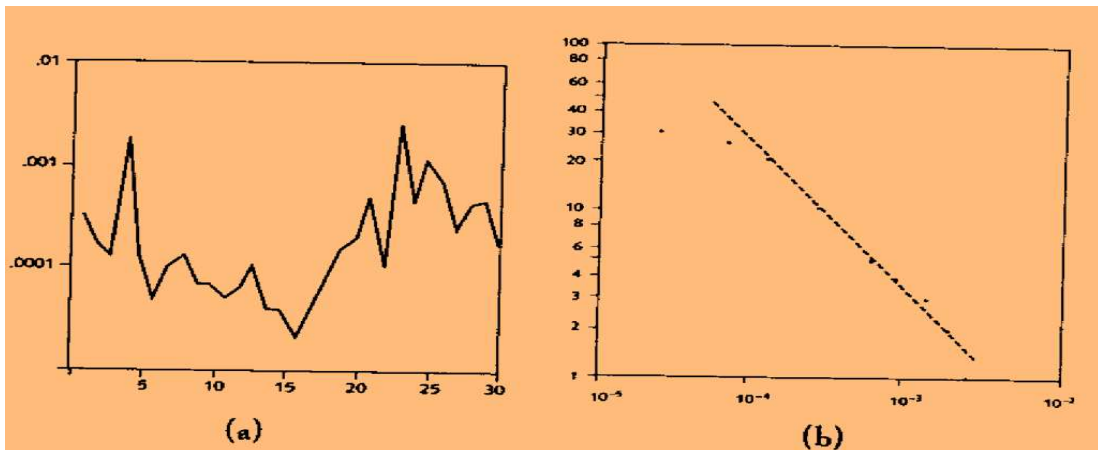


Figura 9 .a. Variaciones mensuales de los precios del algodón durante un período de 30 meses. b. La curva muestra el número de meses donde la variación relativa excede de una fracción dada. Se nota la transición suave desde las variaciones pequeñas hasta las grandes. La línea recta indica una ley de potencias. Otros artículos comerciales siguen un patrón semejante.

Fuente: Mandelbrot (1963)

4.1.7 Estudio de la extinción biológica por David Raup.

En la evolución biológica, el profesor David Raup encontró que la distribución de los eventos de extinción seguía una distribución suave donde los eventos prolongados, tales como la extinción de los dinosaurios y de muchas otras especies en el Cretácico, ocurrían con una probabilidad y regularidad bastante bien definidas. Utilizó para su trabajo la recopilación de 150 períodos consecutivos de cuatro millones de años.

Estimó para cada período que fracción de especies había desaparecido desde el período previo, como se muestra en la figura 10.

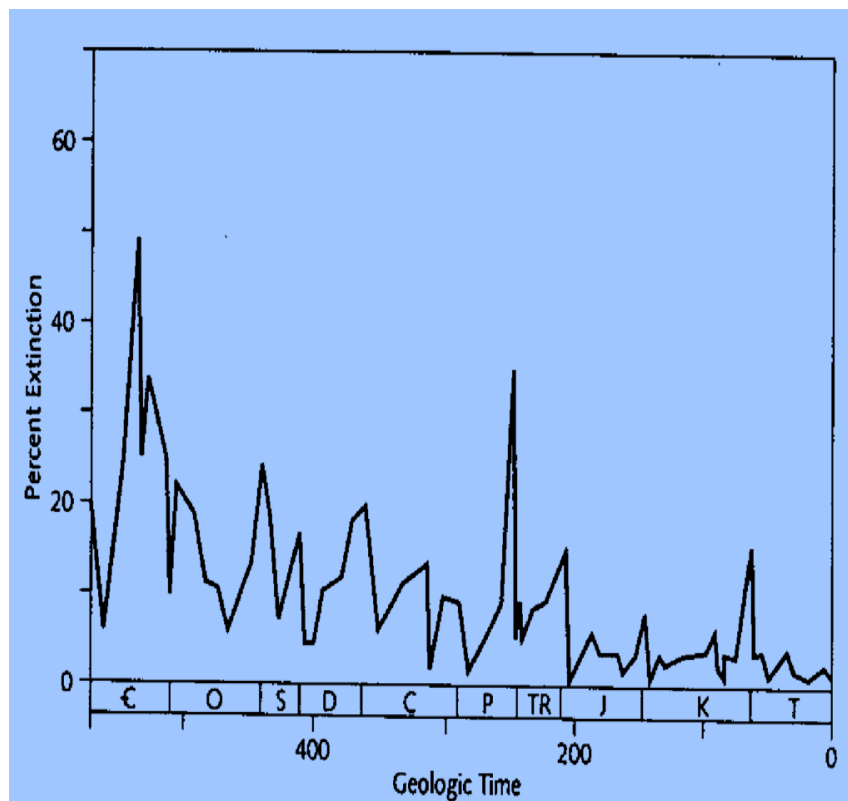


Figura 10. Extinciones biológicas durante los últimos 600 millones de años registradas por John Sepkoski quien durante 10 años recolectó los datos de registro de fósiles. La curva muestra el porcentaje estimado de familias que se extinguieron dentro en intervalos de aproximadamente 4 millones de años.

Fuente: Sepkoski (1993)

El resultado es una medida de la tasa de extinción. Algunas veces, había muy pocas extinciones, menos del 5%, y algunas otras había tasas de extinción del 50%. Raup contó el número de períodos en los que el número relativo de extinciones era menos del 10%, en cuántos períodos la variación estaba entre 10 y 20%, etc., y realizó un histograma, como se muestra en la figura 11. Este es el mismo tipo de análisis que hizo Mandelbrot para los precios del algodón. El histograma resultante forma una curva suave, extendiéndose los eventos prolongados suavemente desde los eventos de corta duración, mucho más frecuentes.

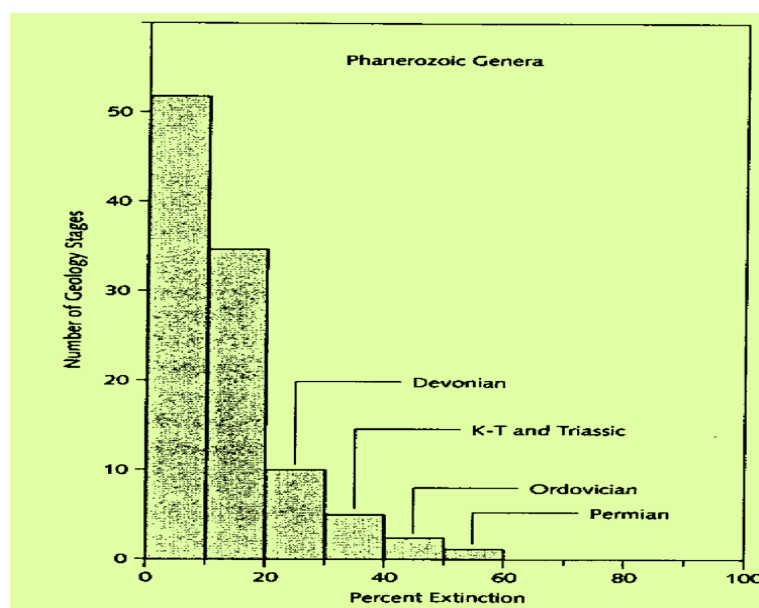


Figura 11. Histograma de los eventos de extinción según Raup. El diagrama muestra el número de períodos de cuatro millones de longitud donde la tasa de extinción estaba dentro de un rango dado. Aparecen en la cola de la curva los eventos de extinción de duración prolongada bien conocidos

Fuente: Raup (1986)

En estas situaciones, aunque los eventos ocurren con una probabilidad bien definida, esto no significa que sean cíclicos, aunque sucedan en algunos intervalos promedio, es decir, cada 30 años. Por tanto tienen cierta regularidad pero esto no se debe confundir con periodicidad. Esta regularidad significa que a todas las escalas está presente el mismo mecanismo y por tanto suceden las catástrofes, pero estos efectos son equilibrados de forma suficiente por la naturaleza.

4.1.8 Ruido 1/f

Se puede observar un fenómeno denominado *ruido 1/f* en sistemas tan diversos como el flujo del río Nilo, la luz que proviene de quásares, que son objetos lejanos y de gran tamaño del universo, y en el tráfico de automóviles. En la figura 12 a. se muestra la luz proveniente de un quásar medida durante 80 años. Existen características de todos los tamaños: variaciones rápidas que duran minutos y variaciones lentas que duran años. De hecho, parece existir una disminución gradual en todo el período de 80 años, que podría conducir a la identificación errónea de una tendencia general hacia el decrecimiento de la intensidad en el tiempo de vida de un ser humano, una tendencia que necesita explicación¹.

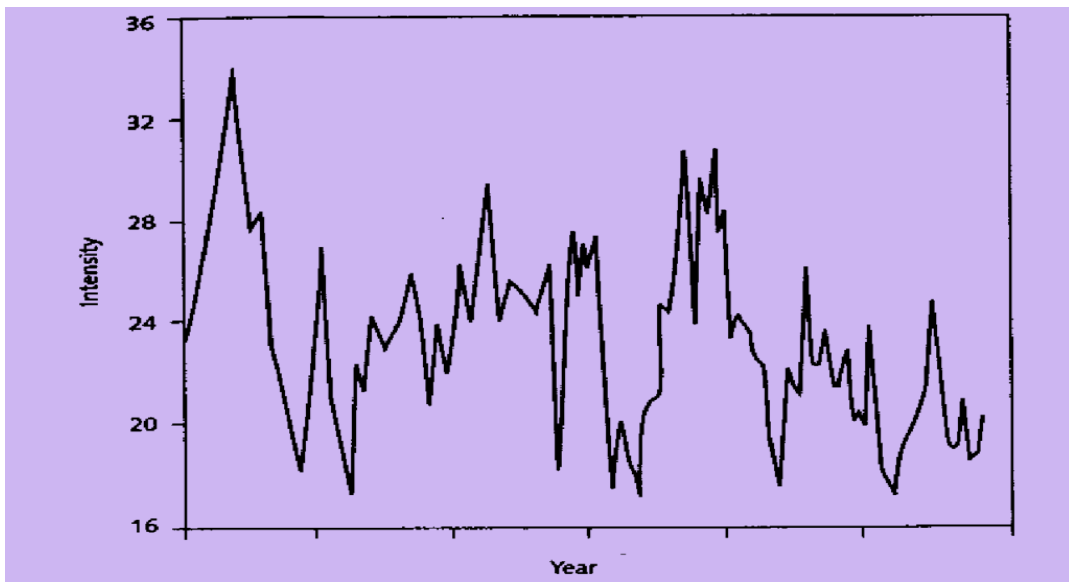


Figura 12. a. Luz emitida de un quásar durante un período de 80 años, 1887-1967. Se nota el patrón de fluctuaciones rápidas, lentas y de rango intermedio. Este tipo de señal se conoce como ruido 1/f y es muy común en la naturaleza.

Fuente: Press, 1978

La señal se puede considerar una superposición de ráfagas de ruido de todos los tamaños, asemejándose a un paisaje montañoso en el tiempo, en lugar de en el espacio. Se puede ver la señal, de forma equivalente, como la superposición de señales periódicas de todas las frecuencias. Esta es otra manera de afirmar que existen características en todas las escalas de tiempo. Una señal 1/f tiene ráfagas de ruido de todas las duraciones.

¹ PER, Bak P. How Nature Works. New York:Springer.1996, p 22

La intensidad o potencia de su componente de frecuencia es mayor para las frecuencias más pequeñas y es inversamente proporcional a la frecuencia f . esta es la razón por la que se llama ruido $1/f$, si bien pudiera ser errado llamarla ruido en lugar de señal

La figura 12 b. muestra el registro de la variación de temperatura global sobre la tierra en el mismo período. Este registro crece aproximadamente durante el mismo período en que la intensidad del quásar decrece. Se podría concluir que los cambios de la intensidad del quásar y de la temperatura global están correlacionados, pero la mayoría de las personas razonables no lo concluirían, aunque es evidente que las variaciones de temperatura se pueden interpretar como ruido $1/f$. además, el ruido $1/f$ es diferente del ruido blanco aleatorio, en el que no existe correlación entre el valor de la señal de un instante al siguiente.

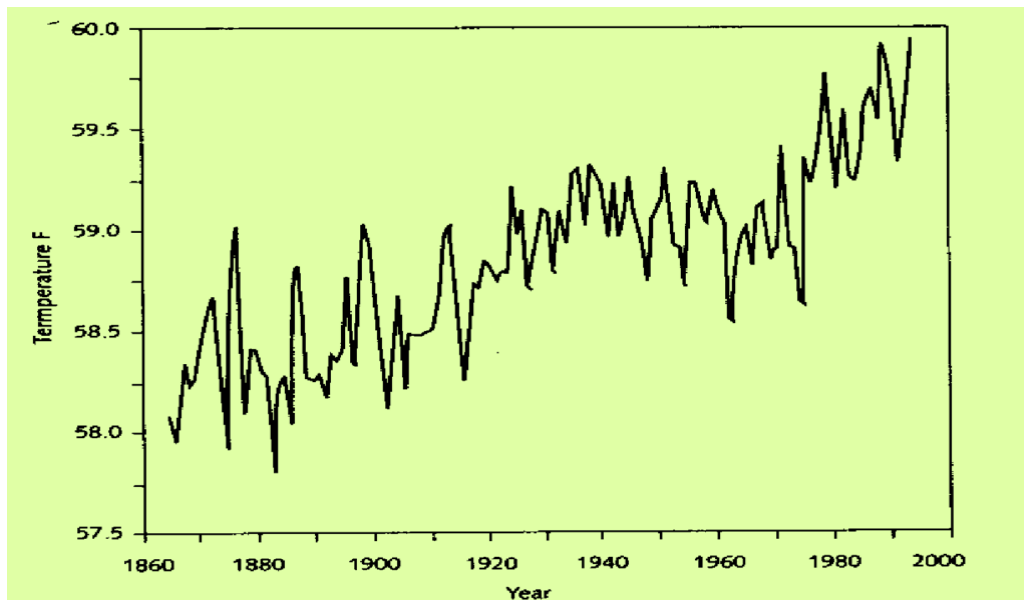


Figura 12 b. Temperatura global monitorizada desde 1865

Fuente: NASA

El ruido $1/f$ es interesante y complejo, y a pesar que está en todas partes no se tiene una comprensión completa de su origen, lo que se complica por el hecho que algunas veces el espectro no es $1/f$ sino $1/f^\alpha$, donde α es un exponente con un valor entre 0 y 2.

4.2 TEORÍA DEL CAOS

El término científico popular caos determinístico describe una evolución temporal irregular e impredecible de muchos sistemas dinámicos determinísticos simples, caracterizados el acoplamiento no lineal de sus variables. Dada una condición inicial, la ecuación dinámica determina el proceso dinámico, es decir, cada paso en la evolución. Sin embargo, cuando se magnifica la condición inicial, se revelan un conjunto de valores dentro de cierto límite de error.

Para un sistema dinámico regular, los procesos presentados desde el conglomerado están todos juntos, y el todo constituye un proceso predecible con un límite de error semejante a aquel de la condición inicial. En un sistema dinámico caótico, los procesos provenientes del conglomerado son todos divergentes unos de otros de forma exponencial y después de un tiempo el error se vuelve tan grande que la ecuación dinámica pierde su poder predictivo. Esto se puede apreciar en la figura

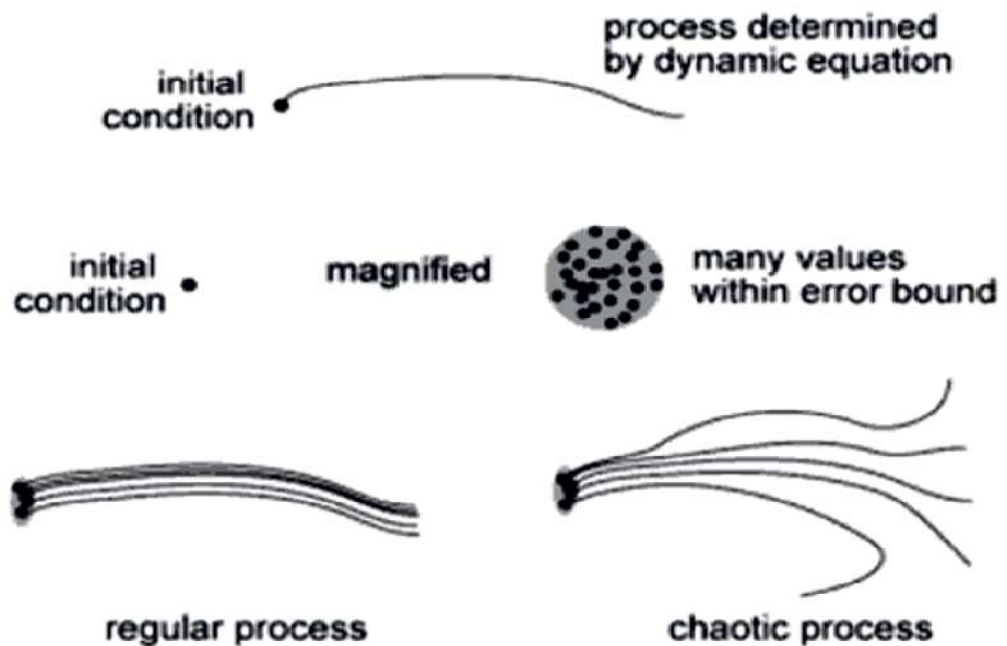


Figura 13. Procesos regulares versus caóticos.

Fuente: IVANCEVIC, Vladimir; IVANCEVIC, Tijana. Complex non linearity. Chaos, phase transitions, topology change and Path integrals. Germany: Berlin, Springer. 2008, p. 1-6.

Por ejemplo, en un juego de pinball, cualesquiera dos trayectorias que inicialmente están cerca la una de la otra, se apartan de forma exponencial con el tiempo, y en un número finito y en la práctica muy pequeño de rebotes su separación $\delta x(t)$ obtiene la magnitud, el grado lineal característico del todo el sistema.

Esta propiedad de sensibilidad a las condiciones iniciales se puede cuantificar como $|\delta x(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta x(0)|$, donde λ , la tasa media de separación de las trayectorias del sistema, se denomina exponente de Lyapunov. Para cualquier precisión finita $|\delta x(0)| = \delta x$ de los datos iniciales, la dinámica es predecible solo hasta un tiempo finito de Lyapunov $T_{\text{Lyap}} \approx (-1/\lambda) \ln |\delta x/L|$, a pesar de las leyes determinísticas y simples que regulan el movimiento del pinball.

En general, el número de trayectorias distintas con n rebotes se puede cuantificar como $N(n) \sim e^{hn}$, donde la entropía topológica h ($h = \ln 2$ en el caso actual) es la tasa de crecimiento de las distintas trayectorias topológicas.

Cuando un físico dice que cierto sistema “exhibe caos”, quiere decir que el sistema obedece leyes determinísticas de evolución, pero que el resultado es altamente sensible a pequeñas incertidumbres en la especificación del estado inicial. La palabra “caos” se toma en este contexto con un significado técnico restringido.

Si un sistema determinístico es localmente inestable (tiene un exponente de Lyapunov positivo) y está mezclado globalmente (tiene entropía positiva) se dice que es caótico. Si bien es matemáticamente correcta esta definición, la definición de caos como exponente de Lyapunov y entropía positivos no es útil en la práctica ya que la medida de estas cantidades es intrínsecamente asintótica y más allá de los sistemas observados en la naturaleza.

Más poderosa es la visión del caos debida a Poincaré, como el entrecruzamiento de inestabilidad local (órbitas periódicas inestables) y mezcla global (interapareamiento de las variedades estables e inestables). En un sistema caótico cualquier bola abierta de condiciones iniciales, no importa que tan pequeñas, se solapará en un tiempo finito con cualquier otra región finita y en este sentido se difunde sobre el rango del espacio-fase accesible asintóticamente. Una vez esto es comprendido, el enfoque de la teoría se desplaza desde los intentos predictivos de trayectorias individuales (lo que es imposible) hacia una descripción de la geometría del espacio de los posibles resultados y una evaluación de los promedios sobre este espacio².

² IVANCEVIC, Vladimir; IVANCEVIC, Tijana. Complex non linearity. Chaos, phase transitions, topology change and Path integrals. Germany: Berlin, Springer. 2008, p. 1-6.

De forma aproximada, un **atractor** es un “conjunto magnético” en el espacio-fase si casi todas las trayectorias del entorno convergen. Es decir, un **atractor** es el subconjunto del espacio-fase con las siguientes propiedades:

- Es un conjunto invariante, es decir una trayectoria que inicia en él permanece en él todo el tiempo
- Atrae todas las trayectorias que empiezan suficientemente cerca de él
- Es mínimo, es decir no puede contener uno o más atractores más pequeños

Los atractores regulares u ordinarios son puntos fijos estables que pueden existir en dominios dinámicos lineales y no lineales, y ciclos límite estables, que sólo existen en dinámica no lineal. Por otra parte, en la dinámica caótica los objetos geométricos más importantes son atractores extraños, denominados atractores caóticos o atractores fractales, es decir atractores sin dimensiones enteras, que son atractores especiales que exhiben una dependencia sensible a las condiciones iniciales. Un atractor extraño surge típicamente cuando el flujo-fase sufre estiramiento, contracción y plegamiento. Las trayectorias en un atractor extraño permanecen confinadas a una región limitada del espacio-fase, si bien se separan de sus vecinas de forma rápida y exponencialmente

Para el caos, la irregularidad es parte de la dinámica intrínseca del sistema, no influencias externas al azar, como por ejemplo las contracciones musculares en el movimiento humano. Sin embargo, los sistemas caóticos se pueden predecir en el corto plazo lo que es útil en diversos dominios. Se debe recordar que ciertos aspectos del caos se han conocido por más de cien años.

En 1963, Ed Lorenz del MIT demostró que el caos puede suceder en sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas, es decir sin dependencia explícita del tiempo, con al menos tres variables y dos linealidades no cuadráticas.

Para flujos continuos el teorema de Poincaré-Bendixon implica la necesidad de tres variables, y el caos requiere al menos una no linealidad. Más explícitamente el teorema establece que el límite a largo plazo de cualquier flujo bidimensional suave es un punto fijo o una solución periódica. Sin embargo, no se sabe aún las condiciones suficientes que deban cumplir estos sistemas.

Así, la condición necesaria para que la existencia del caos satisfaga cualquier sistema dinámico autónomo en tiempo continuo (un campo vectorial) de dimensión tres o superior, es que tenga al menos dos variables no lineales acopladas (por ejemplo, un punto de unión de un hombro o de la cadera determinado por tres ángulos y tres momentos angulares).

En el caso de sistemas de tiempo continuo no autónomos, el caos puede suceder en dimensión dos, en tanto que en el caso de sistemas en tiempo discreto, aún en una dimensión uno. Realmente, si el comportamiento (un flujo), de cualquier sistema será o no en verdad caótico depende de los valores de sus parámetros y/o de sus condiciones iniciales.

Usualmente, para algunos valores de los parámetros involucrados, el comportamiento del sistema es oscilante en régimen estable, en tanto que para otros valores de los parámetros el comportamiento se torna caótico, mostrando una bifurcación, o transición de fase, desde un régimen y fase a otros totalmente diferentes. Si un cambio en el comportamiento del sistema en el punto de bifurcación es realmente importante, se puede probablemente reconocer una de las célebres catástrofes polinomiales de R. Thom. Una serie de tales bifurcaciones normalmente ilustra una ruta hacia el caos.

La teoría del caos ha desarrollado procedimientos matemáticos especiales para comprender la irregularidad y la impredecibilidad de sistemas no lineales de pocas dimensiones, incluyendo las secciones de Poincaré, los diagramas de bifurcación, los espectros de energía, los exponentes de Lyapunov, duplicación del período, dimensión fractal, estiramiento y plegamiento, identificación especial y técnicas de estimación, etc.

La comprensión de este fenómeno ha permitido que la ciencia controle el caos y existen muchas razones prácticas para hacerlo, por ejemplo, puede ser útil en circunstancias tales como el caso en el que se puede estabilizar un ciclo límite inestable que caracteriza ciertos máximos del desempeño del sistema, de forma que conmutando de uno a otro de estos ciclos límite se obtienen comportamientos deseados.

Dentro del contexto de la dinámica del cerebro, existen sugerencias que el caos controlado del cerebro es más que un accidente secundario de la complejidad cerebral, incluyendo la multiplicidad de sus conexiones y que pudiera ser la propiedad que hace el cerebro al de una máquina artificial.

El denominado **anticontrol del caos** se ha propuesto para resolver el problema de la desviación de la dirección estable de las trayectorias del modelo del cerebro humano y, de aquí, fuera del equilibrio estable, en el caso de un equilibrio de tipo silla de montar, evitando así el comportamiento periódico de poblaciones neuronales en avalancha. Es decir, en una red neuronal in vitro que sufre avalanchas espontáneas, se puede demostrar el caos por la presencia de comportamientos inestables de punto fijo. Las técnicas de control del caos pueden aumentar la periodicidad de tal comportamiento neuronal de una población con avalanchas. Mantener el paso de forma periódica es también efectivo en el entrenamiento de tales sistemas, si bien en una manera cualitativamente diferente.

Empleando una estrategia de anticontrol tales sistemas pueden ser menos periódicos. Estas técnicas se pueden aplicar a los focos epilépticos en vivo.

Dentro del contexto de la dinámica cardíaca, la fisiología tradicional, indica que una dinámica saludable es regular y predecible, en tanto que la enfermedad, tal como una arritmia fatal, el envejecimiento y la toxicidad de los fármacos, se suponen que producen desorden e incluso caos. Sin embargo, en las dos últimas décadas, los estudios de laboratorio produjeron evidencias que demuestran que la compleja variabilidad de la dinámica saludable en varios sistemas fisiológicos posee características que recuerdan las del caos determinístico, y que una amplia clase de procesos patológicos, que incluyen el envejecimiento y la toxicidad de los fármacos, pueden realmente disminuir, aunque no eliminar completamente, la cantidad de caos o complejidad en sistemas fisiológicos(descomplejificación).

Estos postulados tienen implicaciones tanto en los mecanismos básicos en fisiología como en la monitoría clínica, incluyendo el problema de anticipar la muerte cardíaca súbita. En contraste con la creencia prevaleciente de los clínicos que los latidos cardíacos saludables son regulares, las investigaciones recientes sobre las variaciones del intervalo entre latidos en individuos sanos demuestran que una tasa cardíaca normal fluctúa aparentemente de una manera extremadamente errática. Esto es consistente con el caos determinístico.

De forma semejante a la dinámica del corazón y del cerebro, la biodinámica humana representa una dinámica muy no lineal con varios cientos de grados de libertad, muchos de los cuales están natural y no linealmente acoplados. Su sistema de control jerárquico, el controlador neuromotor, tiene necesariamente que lidiar con un caos muy dimensional. Pero, tanto si el propósito es reducir el caos “malo” o inducir los “buenos”, los investigadores sienten una gran necesidad de controlar en caos³.

4.3 CRITICALIDAD AUTO-ORGANIZADA (SOC)

El enfoque de la criticalidad auto-organizada parte de un escenario donde la naturaleza es vista perpetuamente fuera de equilibrio, pero organizada en un estado crítico donde es imposible que algo suceda sin el concurso de leyes estadísticas bien definidas. Por tanto el objetivo principal es examinar como asunto fundamental la razón por la cual la naturaleza es compleja y no es nada simple, como lo implican las leyes de la física.

³ IVANCEVIC, Vladimir; IVANCEVIC, Tijana. Complex non linearity. Chaos, phase transitions, topology change and Path integrals. Germany: Berlin, Springer. 2008, p. 7-8.

Entonces, la *criticalidad auto-organizada* explica algunos patrones ubicuos existentes en la naturaleza que se muestran complejos.

Dentro de estos patrones o regularidades están los eventos catastróficos y la estructura fractal y así, se puede abarcar desde el estudio de los pulsares y los agujeros negros hasta los sismos y la evolución de la vida.

Una interesante consecuencia de este enfoque es que pueden suceder las catástrofes sin ninguna razón o diseño externo, que la naturaleza llega a este estado delicado de auto-organización solo por las relaciones dinámicas que existen entre sus componentes, es decir, por medio del mecanismo de *criticalidad auto-organizada*. En consecuencia, si bien las leyes físicas tienen una expresión simple, dada en forma matemática, la naturaleza es compleja

El concepto de *complejidad* se refiere a sistemas con una gran variabilidad, que puede darse en un amplio espectro de escalas de longitud porque si se hace una magnificación a escala cada vez más pequeña o cada vez mayor se encuentran cada vez nuevos detalles, que revelan que la naturaleza tiene complejidad a gran escala.

La complejidad tiene sustratos diferentes como aquellos encontrados en la vida biológica, que ha evolucionado en miríadas de especies distintas, cada una con millones de individuos, que compiten e interactúan los unos con los otros y con el entorno. Una de esas especies es el ser humano, distinto cada uno, con su cerebro y sistemas a su vez muy complejos. De manera que el mundo que se observa alrededor parece muy alejado de las leyes físicas básicas que lo sustentan.

En Biología se considera el asunto de cómo se puede originar complejidad a partir de leyes físicas simples gracias a que se cuenta hoy con sistemas informáticos capaces de efectuar los cálculos implicados en los modelos de la complejidad de diversos fenómenos, cálculos en los que se involucran cantidades apreciables de variables que son imposibles de reducir utilizando el enfoque mecanicista de la física a unas cuantas ecuaciones específicas.

En razón de su naturaleza compleja, los sistemas pueden exhibir un comportamiento catastrófico cuando una parte del sistema afecta a otras por medio de un efecto dominó. Esta complejidad puede estudiarse a partir de las muchas observaciones empíricas ubicuas y generales en ciencias individuales que no se pueden considerar dentro de un conjunto de referencias desarrollado al interior de dominios científicos específicos. Estos fenómenos son aquellos que suceden en los grandes eventos catastróficos, los fractales, el ruido que varía inversamente con f , y la Ley de Zipf.

Por esta razón se hace necesaria una teoría general de la complejidad, que necesariamente debe ser abstracta, muy general, una teoría estadística, incapaz de producir detalles específicos, sujeta a un problema de impredecibilidad. Entonces ¿Si esa teoría no puede explicar cualquier detalle específico, qué explica? ¿Cómo se puede contrastar dicha teoría con la realidad?

Para responder a estos interrogantes se debe partir del estudio de los sistemas dinámicos fuera de equilibrio y de los sistemas heterogéneos ha hecho popular el concepto de sistemas complejos y la importancia de los enfoques sistémicos con gran número de partes interactuantes, que intercambian materia y energía o información con su entorno, auto organizando sus estructuras internas y su dinámica con propiedades macroscópicas nuevas y en algunos casos sorprendentes.

El enfoque de los sistemas complejos que involucra ver interconexiones y relaciones, tanto el todo como las partes componentes, está hoy en todas partes en el control moderno de dispositivos ingenieriles y en la gestión de negocios. Juega también un papel creciente en la mayoría de disciplinas científicas, incluyendo la biología (redes biológicas, ecología, evolución, origen de la vida, inmunología, neurobiología, biología molecular, etc.), economía y ciencias sociales.

Una propiedad central de un sistema complejo es la posible ocurrencia de comportamientos colectivos coherentes a gran escala con una estructura muy rica que resulta de las interacciones repetitivas no lineales entre sus constituyentes: el total se convierte en algo mucho más que la suma de las partes.

La dinámica puntuada parece ser un proceso esencialmente dinámico para sistemas evolutivos que se vuelven complejos, con un comportamiento específico que es fuertemente contingente a lo largo de su historia. Las puntuaciones corresponden a transiciones raras y repentinas que se producen a intervalos de tiempo que son cortos comparados con las escalas características de tiempo de su evolución posterior. Eventos prolongados tales expresan más que todo, las fuerzas fundamentales que se ocultan usualmente bajo un equilibrio casi perfecto.

Proporcionan el potencial para una mejor comprensión científica de los sistemas complejos. Estas crisis poseen impactos sociales importantes y abarcan desde las grandes catástrofes naturales tales como terremotos, erupciones volcánicas, huracanes y tornados, deslizamientos, avalanchas, rayos, impactos de asteroides y meteoritos, eventos catastróficos de degradación ambiental hasta la falla de estructuras ingenieriles, las crisis de la bolsa de valores, enfermedades y epidemias, etc.

Es esencial darse cuenta que el comportamiento a largo plazo de estos sistemas complejos está controlado en gran medida por estos eventos extraños.

La **criticalidad auto organizada (SOC)** considera estos grandes eventos como elementos de la organización natural no lineal de los sistemas complejos. Los grandes eventos se consideran como resultado de la ley de potencias de decaimiento de largo alcance de las correlaciones espaciales y temporales, y de las distribuciones de ley de potencia de cola larga de los tamaños semejantes.

Tales propiedades son compartidas también por sistemas en equilibrio en transiciones críticas de fase. Los eventos desencadenantes en el estado de criticalidad auto organizada son críticos en el sentido de un proceso de reacción nuclear en cadena.

En un sistema supercrítico, un solo evento local, como la inyección de un neutrón, lleva a un proceso explosivo exponencial. Un proceso subcrítico posee una actividad que decae exponencialmente, siempre amortiguándose. En el estado crítico, la actividad es apenas capaz de continuar indefinidamente, con los tiempos de pausa distribuidos como ley de potencias, reflejando las correlaciones de ley de potencias en el sistema.

La criticalidad auto organizada describe sistemas complejos que se sitúan en un delicado extremo de balance entre el orden y el desorden en un estado crítico de auto organización. Sólo en el estado crítico existe un compromiso realmente entre orden y desorden (fluctuaciones) que se puede describir como verdaderamente un comportamiento complejo. Debido a que las correlaciones son muy grandes, no se pueden aislar los grados de libertad individuales. La infinidad de grados de libertad que interaccionan mutuamente no se puede reducir a un escaso número, lo que hace complejos a los sistemas críticos.

En la literatura el término “criticalidad auto organizada” no siempre se utiliza en el mismo sentido y, en algunos casos, es mal interpretado. Para que sea útil, este término se debe especificar con precisión y relacionado con situaciones bien definidas basadas en mecanismos físicos más que en observaciones.

En particular, un sistema no está auto organizado críticamente sólo porque exhiba un comportamiento de distribución en ley de potencias de los tamaños de los eventos, ya que existen otros mecanismos que llevan a tales situaciones.

Los sistemas que son propuestos como resultado de una dinámica críticamente auto organizada incluyen las redes de fallas y de sismicidad, las redes fluviales, la propagación de incendios en los bosques y los procesos de evolución biológica. Se debate todavía si SOC se aplica a cada uno de estos sistemas y cuáles son los mecanismos físicos subyacentes.

En un sentido amplio, SOC se refiere a la organización espontánea de un sistema que es impulsado desde afuera hacia un estado estacionario global, que se caracteriza por distribuciones auto semejantes de tamaño de los eventos y propiedades geométricas fractales. Este estado estacionario es de naturaleza dinámica y está definido por medio de fluctuaciones estadísticas, a las cuales se denomina genéricamente como “avalanchas”.

El término “criticalidad auto organizada” contiene dos partes. La palabra “criticalidad” se refiere a un estado de un sistema en un punto crítico en el cual la longitud de la correlación y la susceptibilidad se vuelven infinitos en el límite infinito del tamaño. El término “auto organizada” se aplica de forma indiscriminada a la formación de un patrón entre muchos elementos interactuantes.

El concepto es que la estructuración, los patrones y la organización a gran escala parecen espontáneos. Sin embargo, existe cierta difusibilidad en lo que significa el término espontáneos. En un sistema de Ising, la magnetización parece provenir, a gran escala, de las interacciones entre los espines individuales. Sin embargo no se hace referencia a esta situación como auto organizada a pesar que lo es en un sentido. La noción de auto organización es así relativa a la ausencia de parámetros de control que se consideran artificiales y por tanto dependen en algún grado tanto de la maduración histórica del campo científico y del nivel de comprensión de los mecanismos subyacentes. En SOC, existe una especificidad mayor a medida que se coloca énfasis en los mecanismos que mantiene el sistema en estado crítico.

Muchas perspectivas diferentes se han expresado sobre SOC desde la introducción del modelo de la pila de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld en 1987. No existe consenso porque la falta de una comprensión general impide la construcción de un marco de trabajo unificado.

Lo que puede ser “universal” es la organización jerárquica resultante, que involucra muchas escalas, y que es común a todos los sistemas complejos. Además, todas las escalas no juegan el mismo papel; un conjunto especial de niveles discretos juegan frecuentemente papeles especiales en la jerarquía global. Ejemplos de estos son los ciclones, los tornados, las fallas geológicas.

El **modelo de la pila de arena** introducido por Bak et al considera que si una pila de arena se forma sobre una base circular con una distribución inicial arbitraria de los granos de arena, una pila de arena de forma cónica fija (estado estable) se forma lentamente añadiendo granos de arena uno detrás de otro (excitación externa). En estado estable, la superficie de la pila de arena hace en promedio un ángulo constante con el plano horizontal, conocido como ángulo de reposo. La adición de cada grano de arena da como resultado cierta actividad en la superficie de la pila; se sigue una avalancha de arena que se propaga sobre la superficie de la pila. En régimen estable, las avalanchas son de muchos tamaños diferentes y Bak, Tang y Wiesenfeld arguyen que tendría una distribución de ley de potencias.

Si se inicia con un estado no crítico, inicialmente la mayoría de las avalanchas son pequeñas, pero el rango de tamaños de las avalanchas crece con el tiempo. Después de largo tiempo, el sistema llega a un estado crítico, en el cual las avalanchas se extienden por todas las escalas de longitud y de tiempo

Una subclase importante de SOC está constituida por sistemas fuera de equilibrio impulsados a rata constante y formados por muchos componentes interactivos, la cual posee las siguientes propiedades fundamentales: un comportamiento altamente no lineal, es decir, esencialmente una respuesta de umbral; una tasa de impulsión muy lenta; un régimen global estacionario, definido por propiedades estadísticas y, distribuciones de potencias de tamaño de eventos y propiedades **geométricas fractales**, incluyendo correlaciones de largo alcance.

El umbral desempeña un papel crucial como rigidez local que permite discriminar escalas de tiempo y, de igual importancia, producir una gran cantidad de estados metaestables. La dinámica lleva el sistema de uno de estos estados metaestables hasta otro. Se piensa que la separación de las escalas de tiempo y la metaestabilidad son esenciales para la existencia de invarianza de escala en esta clase de sistemas. Un ejemplo de estos sistemas es el de los incendios forestales⁴.

El problema de explicar las características estadísticas observadas de los sistemas complejos se puede trasladar al problema matemático de explicar el fundamento de las características geométricas fractales observadas en los fenómenos de la naturaleza, en los que sin duda juegan importante papel el caos y SOC. Es necesario explicar desde la perspectiva geométrica la irregularidad, la complejidad y el comportamiento SOC de los sistemas naturales

⁴ SORNETTE, D. Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos , fractals, self-organization and disorders: concepts and tools. Germany, Berlin: Springer,2006, p 395-435.

4.4 GEOMETRÍA FRACTAL

Hacia 1975 Benoit Mandelbrot empezó a forjar una nueva geometría que pudiera explicar las irregularidades y propiedades de independencia de la escala de los objetos complejos que se encontraban en la naturaleza.

La necesidad de fundamentar una nueva geometría se basaba en los antecedentes de la Teoría del Caos, en las concepciones e implicaciones de SOC y en que la geometría euclídeana, inconvencional por más de 2000 años, trataba objetos hechos por el ser humano, en función de ciertos axiomas y de fórmulas específicas, asumiendo que los objetos no son irregulares, es decir que poseen una dimensión entera, y por tanto era inadecuada para abordar las propiedades irregulares de los objetos de la Naturaleza.

Argumentaba que la geometría euclídeana era estéril por su incapacidad para describir la forma de una nube, una montaña, un perfil costero o un árbol puesto que las nubes no son esferas, las montañas no son conos, los perfiles costeros no son círculos y la corteza no es suave ni hace su viaje luminoso en una línea recta.

Por esta razón cuando empezó a concebir y desarrollar sistemáticamente la naciente geometría de la irregularidad, utilizó el vocablo latino para “irregular y fracturado”, es decir, *fractus*, acuñando para esta geometría el término fractal, porque fue uno de los primeros en hacer la extraordinaria observación que la naturaleza es generalmente fractal, que en el mundo real la irregularidad está por todas partes.

Mandelbrot creó entonces la Geometría Fractal, definida en la actualidad como el primer enfoque metodológico sistémico y cuantitativo para estudiar la *irregularidad*, tanto en las matemáticas puras como aplicadas. Las últimas incluyen la naturaleza (turbulencia, conglomerados de física estadística, sólidos fracturados, ruido, distribuciones de galaxias, geomorfología) y la cultura del ser humano (finanzas, lenguaje hablado, internet, el arte).

Antes de Mandelbrot esta irregularidad no se había tomado en cuenta porque era difícil encontrar una forma de medirla, pero Mandelbrot se dio cuenta que en muchos casos obedecía diversas reglas de escalamiento geométrico que se podían explicar mediante una invarianza de dilación.

Existen tres formas de invarianza de dilación. Un fractal cuya estructura detallada es una imagen a escala reducida de la forma total, quizás estadísticamente deformada, denominada “auto-afín”.

Si el fractal tiene razones de reducción diferentes en distintas direcciones, se denomina “auto-semejante” y, por último, si el fractal posee razones de reducción que varían de punto a punto, se tiene “multifractalidad”.

Por esta razón el término fractal caracteriza fenómenos espaciales o temporales que son continuos pero no diferenciables. A diferencia de de las construcciones euclidianas más familiares, cada intento de dividir un fractal en piezas más pequeñas da como resultado la resolución de más estructuras.

Los procesos y objetos fractales se dicen por tanto que presentan propiedades auto-invariantes (autosemejantes o auto-afines). Los objetos auto-semejantes son isótropos en el re-escalamiento, mientras que el re-escalamiento de objetos auto-afines es anisotrópico, es decir dependiente de la dirección.

Así, el trazado de un movimiento browniano particular en el espacio de dos dimensiones es auto semejante mientras que la gráfica de la coordenada x de la partícula como función del tiempo es auto-afín.

Un punto clave que es parte de la geometría fractal consiste en identificar y clasificar los casos gobernados por alguna de estas formas de invarianza de dilación.

Un segundo punto clave se origina en el hecho que la invarianza de dilación proporciona al estudio de la irregularidad un gran número de herramientas cuantitativas intrínsecas comenzando con distintas clases de dimensión fractal. Por esto, la invarianza de dilación es el ingrediente que hace la irregularidad manejable y así la geometría fractal es una primera gran aproximación a la irregularidad.

Para ilustrar el hecho de la necesidad de un nuevo tipo de geometría Mandelbrot aborda el ejemplo del análisis de la costa de Noruega, la cual es un conjunto de fiordos. Cada fiordo es a su vez un conjunto de fiordos y un fiordo de este conjunto es un conjunto de fiordos, etc. Por tanto la línea costera es una estructura jerárquica de fiordos dentro de fiordos. La cuestión es qué longitud se le puede asignar a tal estructura o cuál es la longitud típica de uno de tales fiordos.

Pero no existe respuesta a esta inquietud porque esta es una situación, un fenómeno “con escala libre”. Si se examina parte de un fiordo o de la línea costera no es posible saber su longitud a menos que se tuvieras una escala de medición sobre una gráfica de la costa, como la que se muestra en la figura 14.

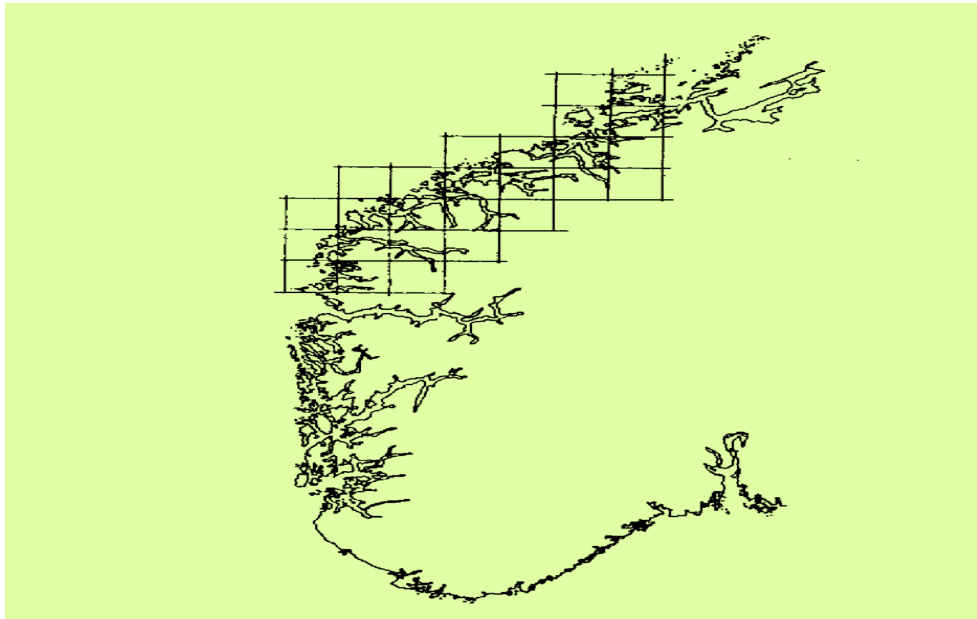


Figura 14. Costa de Noruega. Nótese la jerarquía de geometría fractal, con fiordos y fiordos dentro de fiordos, etc. Mandelbrot señala que los paisajes son frecuentemente fractales.

Fuente: Feder(1988)

Por otra parte, la longitud es función de la resolución de la escala de la medición ya que una escala muy grande proporciona un estimado mucho menos preciso que una escala fina. Por tanto, para enfrentar este problema una manera es determinar cuántas cajas de tamaño δ son necesarias para recubrir la costa.

En la figura 15 se muestra el logaritmo de la longitud L medida con cajas de tamaño δ . Habiendo sido la costa una línea recta de dimensión t , el número de cajas habría sido inversamente proporcional a δ , de manera que las longitudes medidas hubieran sido independientes de δ y la curva sería plana. Si se mide la longitud de una línea recta no importa cuál es el tamaño de la escala. Sin embargo, el número de cajas crece mucho más rápido que eso porque las cajas deben seguir las arrugas de la línea costera de manera que línea recta tiene una pendiente negativa.

La pendiente negativa de la línea proporciona la *dimensión fractal* de la costa. Esto pone de relieve que la dimensión topológica no es la dimensión fractal ya que en general no es un entero. Se encuentra de aquí que $D=1.52$, mostrando que la costa es algo entre una línea recta y una superficie.

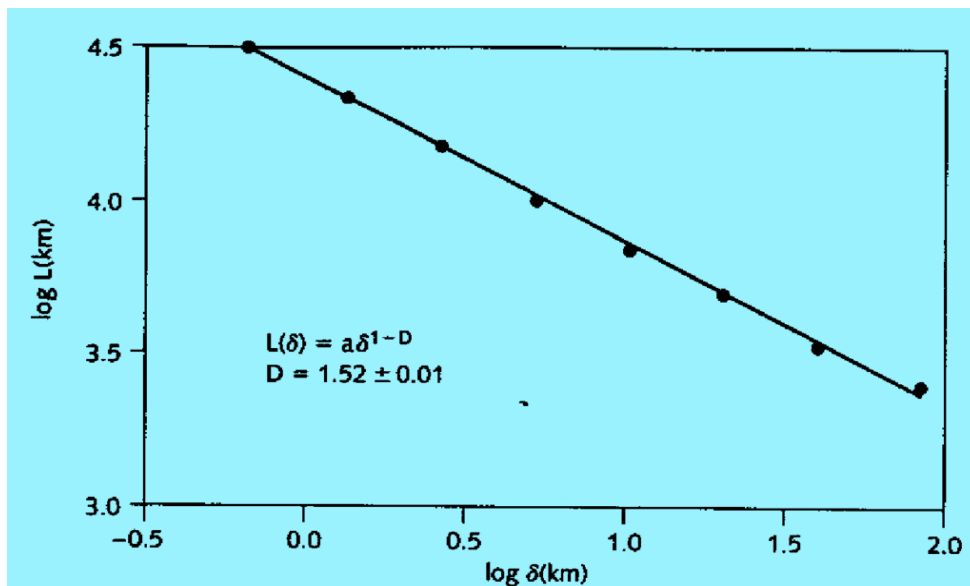


Figura 15. Longitud L de la costa al cubrir la costa con cajas como las mostradas en la fig. 14, con diversas longitudes δ . La línea recta indica que la costa es fractal. La pendiente de la línea proporciona la dimensión fractal de la costa de Noruega. $D=1.52$
 Fuente: Bak (1996)

El concepto de *dimensión fractal*⁵ es de importancia capital para la geometría fractal. Algunos conjuntos de fractales son curvas o superficies, otros son “nubes de polvo” desconectadas y otros poseen formas tan extrañas que no existe denominación una adecuada denominación para ellos ni en las artes ni en las ciencias.

El concepto de dimensión como el número de coordenadas es inadecuado cuando se aborda el estudio de lo irregular y lo fragmentado. Para tener una idea de dimensión se necesita de una teoría de la dimensión de tantas posibles ya que se puede partir del concepto básico pero llegar a resultados matemáticos diferentes. La geometría de Euclides se limita a conjuntos para los cuales todas las dimensiones útiles coinciden, por lo cual se pueden denominar conjuntos dimensionalmente concordantes.

Por otra parte, las dimensiones de los conjuntos de la geometría fractal no coinciden por lo que son dimensionalmente discordantes. Estos conjuntos ayudan a transformar el concepto de fractal llevándolo de lo intuitivo a lo matemático.

⁵ HAUSDORFF, F. Dimension aus äusseres Mass. *Mathematische Annalen* 79. 1919, p 157-179

4.5 PROPIEDADES DE LOS FRACTALES

Mandelbrot en su primera definición de fractal, dada en 1975, da de forma explícita las propiedades de un fractal, diciendo que un fractal es un conjunto de formas generadas normalmente por procesos matemáticos repetitivos y que se caracterizan por:

- Tener el mismo aspecto a cualquier escala de observación
- Tener longitud infinita
- No ser diferenciables
- Tener dimensión fractal
-

4.5.1 Auto-similaridad.

Una línea costera luce llena de irregularidades y a veces se piensa que si se magnifica un pedazo de la línea costera las irregularidades serán resueltas y la línea costera parecería suave. Pero esto no sucede. No importa cuánto amplifique la línea costera ésta siempre lucirá irregular. La línea costera es similar a sí misma a diferentes grados de magnificación. Esto es lo que se denomina auto-similaridad

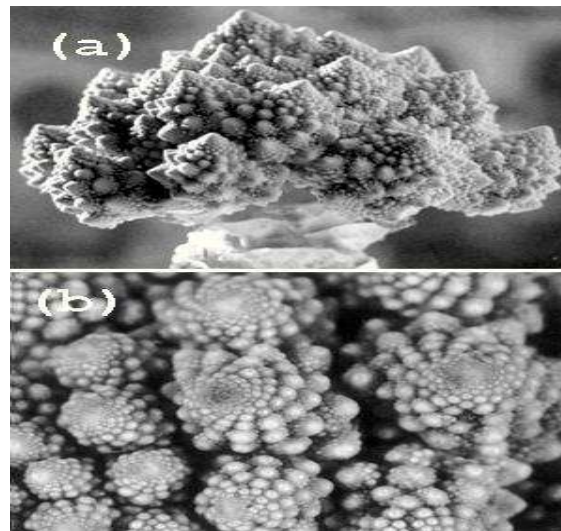


Figura 16. Propiedad de auto-similaridad de los fractales (un brócoli)

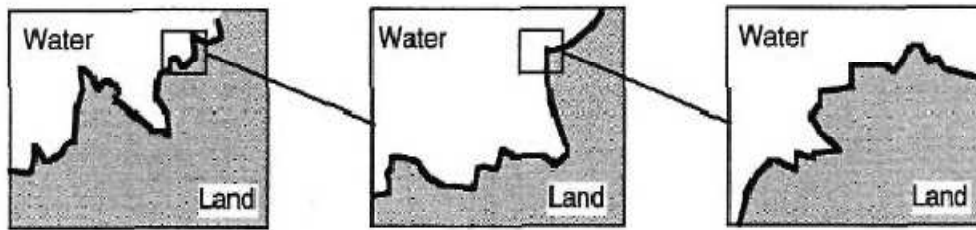


Figura 17. Propiedad de auto-similaridad de un fractal (línea costera)

Fuente: LIEBOVITCH, Larry. Fractals and Chaos Simplified for the Life sciences .Oxford University Press,1998, p 2-6

4.5.2 Escalamiento

Debido a la auto-similaridad , las características encontradas en un nivel de resolución están relacionadas con las características encontradas a otros niveles de resolución. Las longitudes medidas a resoluciones más finas serán más largas porque incluyen estas características más finas. La manera en que las longitudes dependen de la resolución empleada para realizar las mediciones es lo que se denomina relación de escalamiento

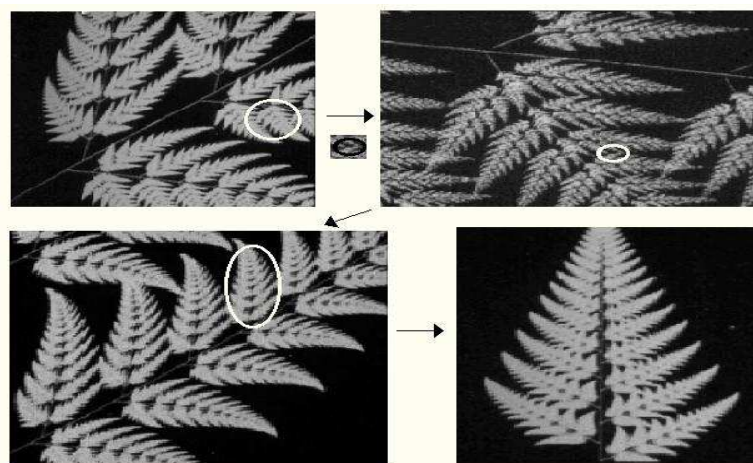


Figura 18. Propiedad de escalamiento de un fractal

Fuente: LIEBOVITCH (1998)

4.5.3 Dimensión

Es una medida cuantitativa del escalamiento y al autosimilaridad y nos dice cuántas piezas nuevas de un objeto se revelan cuando es visto a una mayor magnificación.

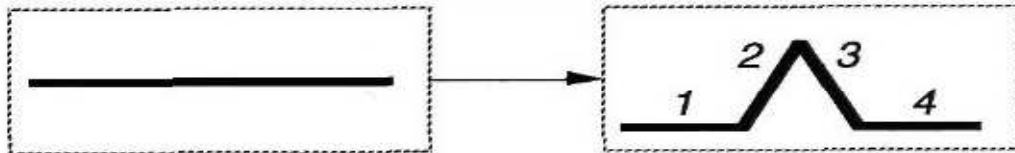


Figura 19. Ejemplo de dimensión fractal

Fuente: LIEBOVITCH (1998)

La dimensión fractal describe las propiedades de despliegue espacial de un objeto y por tanto existen diversas dimensiones fractales que caracterizan cada una las propiedades e despliegue espacial de un objeto de forma ligeramente diferente. La dimensión fractal más simple se denomina dimensión de autosimilaridad

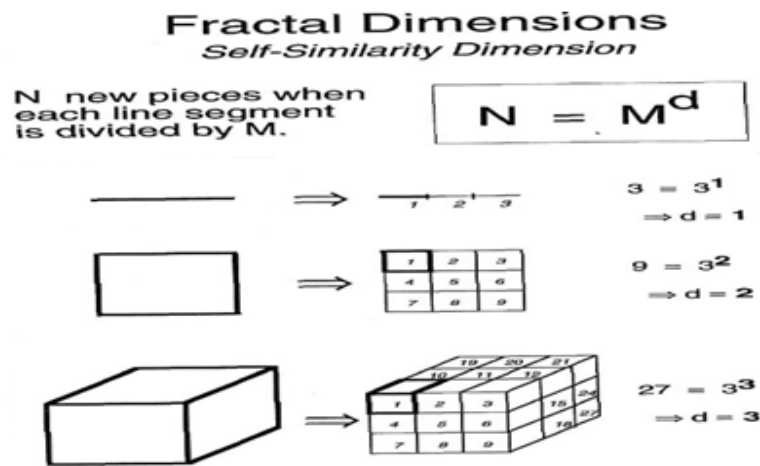


Figura 20. Dimensión fractal de auto-similaridad

Fuente: LIEBOVITCH (1998)

4.5.4 Propiedades estadísticas

Los fractales gozan de propiedades estadísticas que son sorprendentes y que necesitan una teoría estadística avanzada para alcanzar su explicación. Una de las propiedades estadísticas más importantes es la autosimilaridad estadística. Esto se evidencia especialmente en especímenes biológicos reales donde no se tiene que las copias más pequeñas sean exactamente copias del objeto total. De manera que geoméricamente no son autosimilares.

Sin embargo, las pequeñas piezas de los especímenes biológicos reales pueden parecerse a sus contrapartes de mayor tamaño. Las propiedades estadísticas de las pequeñas piezas pueden ser geoméricamente semejantes a las propiedades estadísticas de las grandes piezas. Esto se denomina autosimilaridad estadística. Por ejemplo la propiedad estadística podría ser la longitud del parámetro de un órgano.

La autosimilaridad estadística significa que la longitud medida a una resolución es geoméricamente similar, es decir, proporcional a la longitud medida a otras resoluciones. Si $Q(r)$ es la longitud medida a la resolución r y $Q(ar)$ es la longitud medida a la resolución ar , entonces $Q(ar) = kQ(r)$ donde k es una constante de proporcionalidad. Las propiedades estadísticas de un objeto se describen por el número de piezas de cada tamaño que constituyen el objeto.

La función que dice cuántas piezas lo constituyen se denomina función de densidad de probabilidad (pdf). Formalmente entonces la autosimilaridad estadística es que la pdf a la resolución r es geoméricamente similar, es decir, tiene la misma forma que la pdf a la resolución ar .⁶

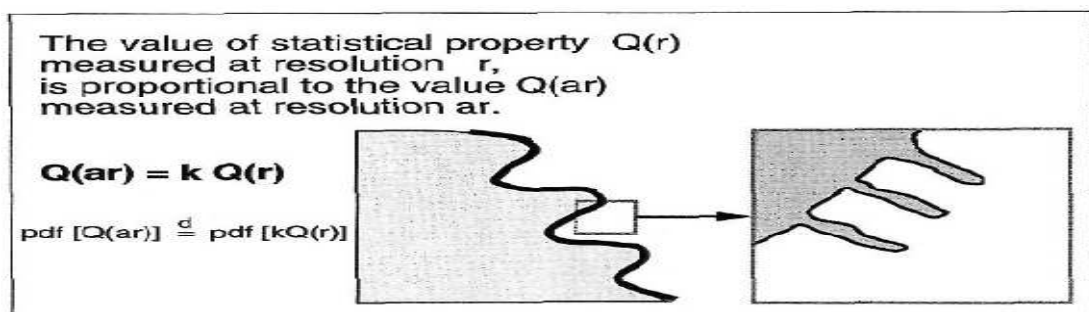


Figura 21. Propiedades estadísticas

Fuente: LIEBOVITCH(1998)

⁶ LIEBOVITCH, Larry. Fractals and Chaos Simplified for the Life sciences .Oxford University Press,1998, p 2-6

4.5.5 Fractales naturales y artificiales

Entre los fractales artificiales se pueden destacar la curva de Von Koch, el conjunto del tercio medio de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la alfombra de Sierpinski

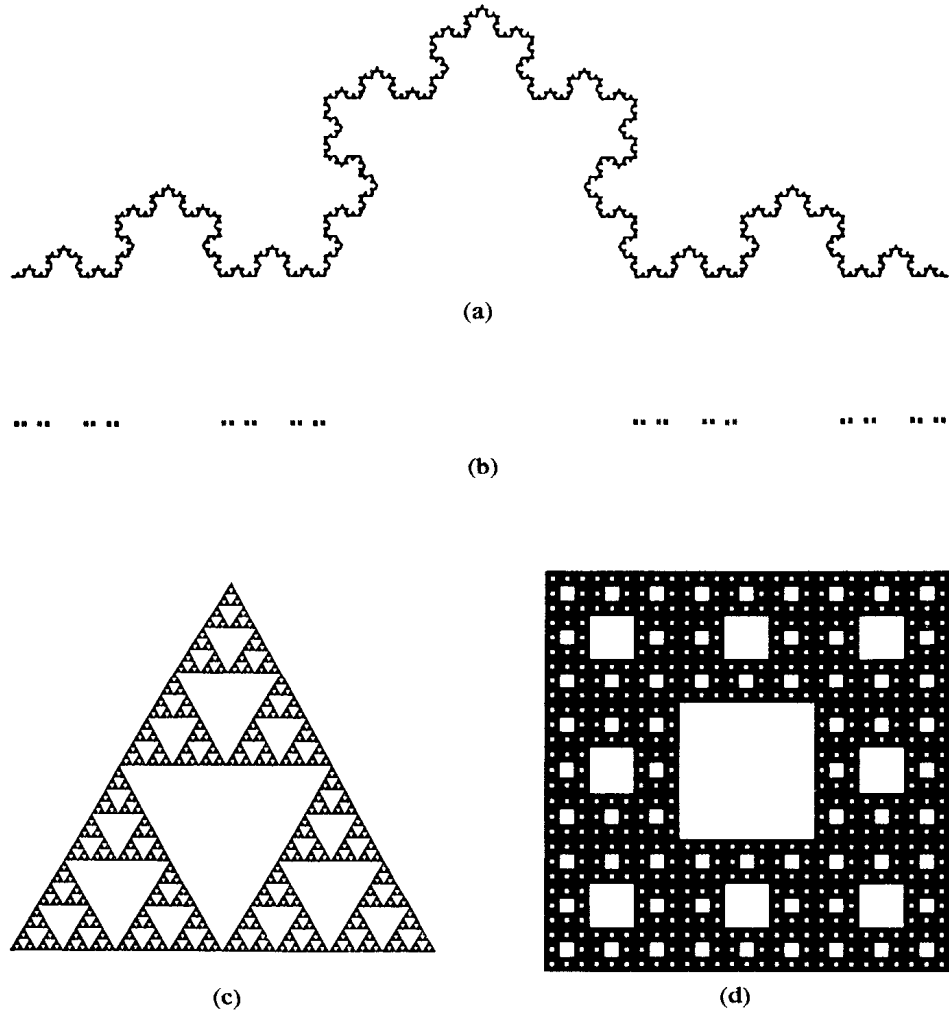


Figura 22. Conjuntos con auto-similaridad bien conocida. a) curva de Koch(dimensión $\log 4 / \log 3 = 1.262$), b) conjunto del tercio medio de Cantor(dimensión $\log 2 / \log 3 = 0.631$), c) Triángulo de Sierpinski(dimensión $\log 3 / \log 2 = 1.585$), d) alfombra de Sierpinski(dimensión $\log 8 / \log 3 = 1.893$)

Fuente: FALCONER (2003)

Entre los fractales naturales se pueden destacar algunos que se encuentran en sistemas vivos y de interés para la Biología, tales como los siguientes:

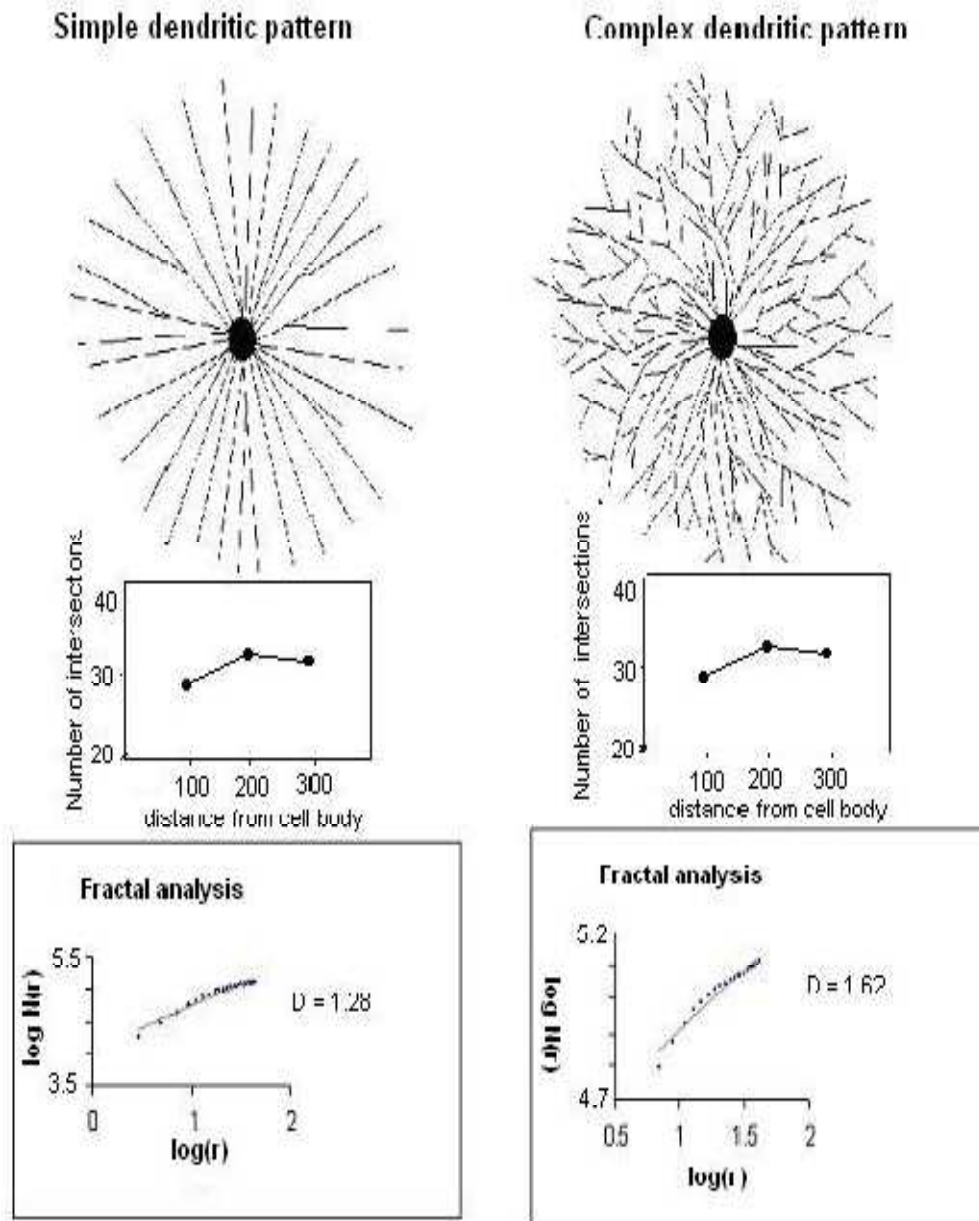


Figura 23. Patrones complejos de ramificación en las dendritas cerebrales analizadas usando el método de dilación

Fuente: LOSA; MERLINI; NONNENMACHER; WEIBEL(2005)

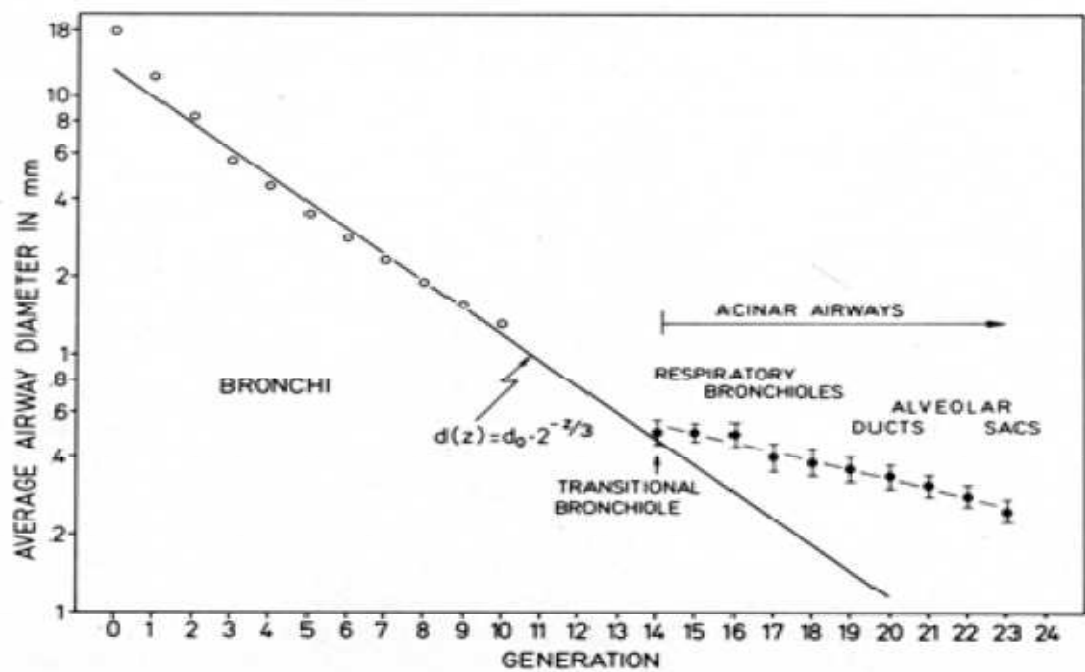
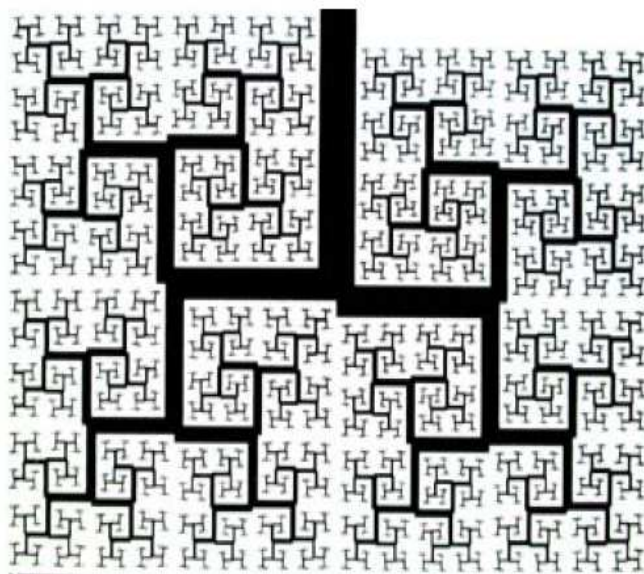


Figura 24. Gráfica del diámetro promedio de las vías aéreas pulmonares humanas

Fuente: LOSA; MERLINI; NONNENMACHER; WEIBEL (2005)

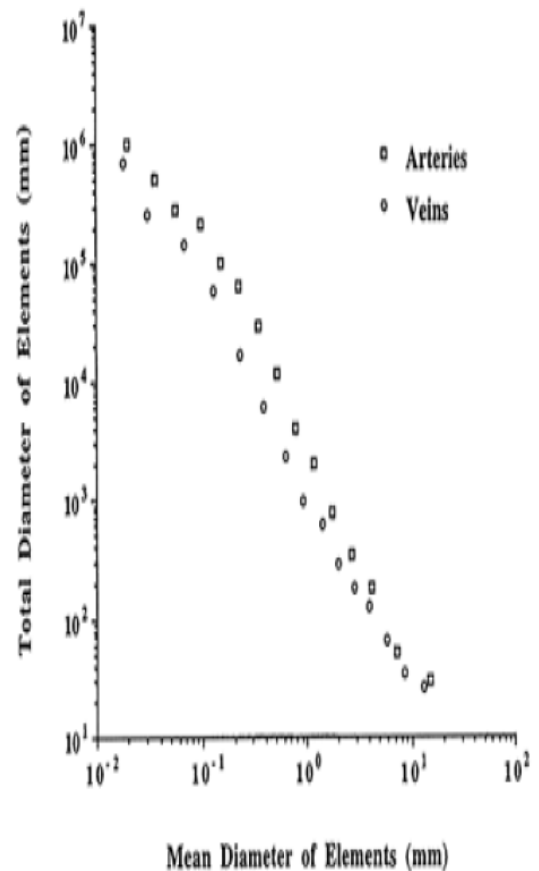
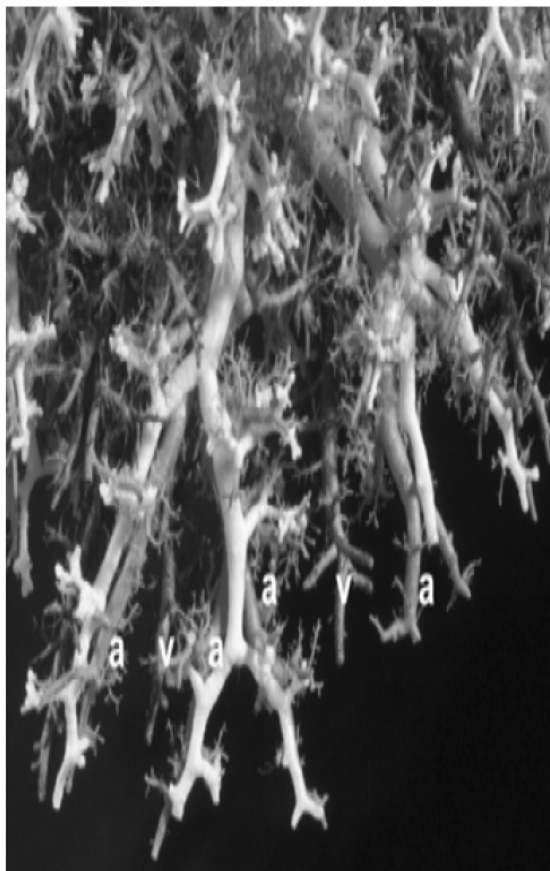


Figura 25. Diámetro total e venas y arterias pulmonares versus sus diámetros medios en el análisis vascular pulmonar

Fuente: LOSA; MERLINI; NONNENMACHER; WEIBEL(2005)

4.5.6 Implicaciones de la autosimilaridad y el escalamiento fractal

Un objeto no fractal, considerado por la geometría euclídeana ordinaria no revela ninguna característica particular cuando es amplificado y las dimensiones topológicas de tales objetos son números enteros positivos. La medida es por tanto entera y positiva.

Por otra parte un fractal, cada vez que es amplificado revela detalles cada vez más finos que se asemejan en su forma a los detalles más grandes.

Esta propiedad de los fractales que permite hacer sus detalles más finos visibles a mayores resoluciones implica que las mediciones hechas a esas resoluciones más finas incluyen más detalles y así el valor medido de una propiedad, tal como longitud, superficie o volumen dependerá de la resolución empleada para hacer la medición.

Esta dependencia se denomina relación de escala. Además, a autosimilaridad específica cómo estas pequeñas piezas están relacionadas con las grandes y por tanto determina la relación de escala. La forma matemática de la autosimilaridad determina la forma matemática de la relación de escala y se especifica en la autosimilaridad estadística, lo que implica que la relación de escala se puede dar de dos formas específicas.

La forma más simple de la relación de escala es aquella en la que un valor de una propiedad $Q(r)$ depende de la resolución empleada para realizar la medición a través de una **ley de potencias** $Q(r) = Br^b$, con B y b constantes. Estas se grafican en una gráfica del logaritmo de la propiedad medida, $\log Q(r)$, contra el logaritmo de la resolución utilizada para realizar la medición, $\log(r)$, lo que pone en evidencia que esta relación de escala es una línea recta.

Self-Similarity \leftrightarrow Scaling

$$Q(ar) = k Q(r)$$

$$Q(r) = B r^b$$

$$Q(r) = B r^{b f(\text{Log}[r]/\text{Log}[a])}$$

Self-Similarity can be satisfied by the power law scaling:

$$Q(r) = B r^b$$

Proof:

Using the scaling relationship to evaluate $Q(r)$ and $Q(ar)$,

$$Q(r) = B r^b$$

$$Q(ar) = B a^b r^b$$

$$\text{If } k = a^b \text{ then } Q(ar) = k Q(r)$$

Figura 26. La autosimilaridad es satisfecha por un escalamiento de ley de potencias

Fuente: LIEBOVITCH (1998)

La forma completa de la relación de escala es $Q(r) = Br^{bf(1+\log(r)/\log(a))}$, donde B, b y a son constantes y $f(x)$ es una función periódica de período L . En una gráfica del logaritmo de la propiedad medida, $Q(r)$ contra la resolución usada para hacer la medición, $\log(r)$, esta relación de escala es una línea recta con una oscilación irregular periódica

Self-Similarity can be satisfied by the more complex scaling:

$$Q(r) = B r^b f\left(\frac{\log r}{\log a}\right) \text{ where } f(1+x) = f(x)$$

Proof:

Using the scaling relationship to evaluate $Q(a)$ and $Q(ar)$,

$$Q(r) = B r^b f\left(\frac{\log r}{\log a}\right)$$

$$Q(ar) = B a^b r^b f\left(\frac{\log ar}{\log a}\right) = B a^b r^b f\left(\frac{\log a + \log r}{\log a}\right)$$

$$= B a^b r^b f\left(1 + \frac{\log r}{\log a}\right) = B a^b r^b f\left(\frac{\log r}{\log a}\right)$$

If $k = a^b$ then $Q(ar) = k Q(r)$

Figura 27. La autosimilaridad es satisfecha por escalamientos más complejos

Fuente: LIEBOVITCH (1998)

Scaling Relationships

most common form:

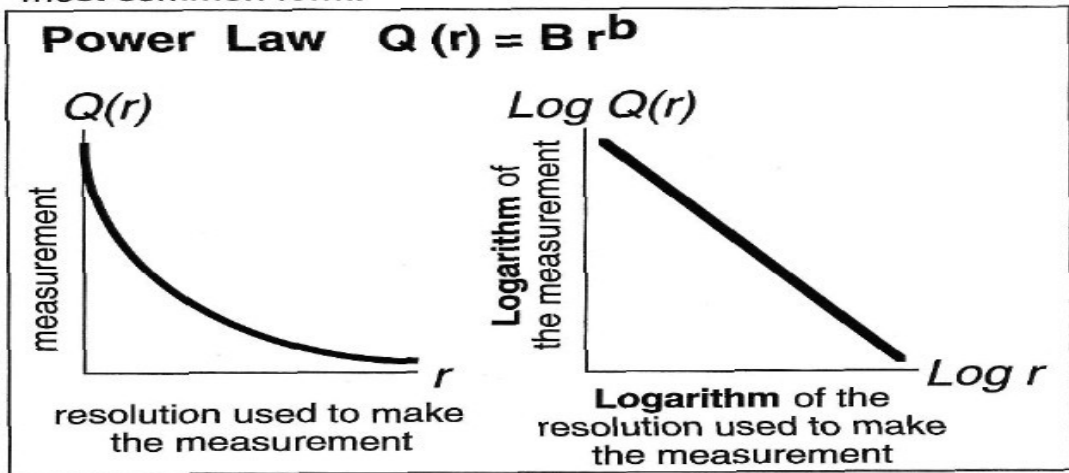


Figura 28. Forma más común de las relaciones de escalamiento

Fuente: LIEBOVITCH (1998)

less common, more general form:

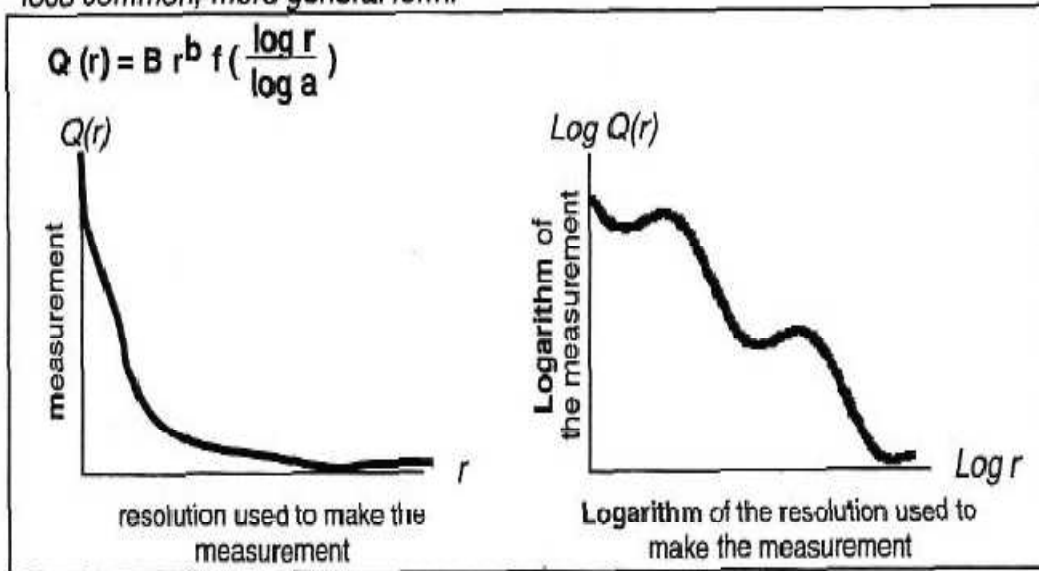


Figura 29. Forma menos común de las relaciones de escalamiento

Fuente: LIEBOVITCH (1998)

4.6 DIMENSIÓN FRACTAL

Antes que existiera la teoría de conjuntos se tenía una concepción matemática imprecisa del concepto de dimensión y se decía que una configuración era n -dimensional si n era el mínimo número de valores reales que se necesitaban para describir sus puntos.

Esta concepción es puesta en entredicho por las correspondencias uno a uno (funciones biyectivas) entre puntos de una línea y puntos de un plano establecidas por Cantor, y el mapeo continuo de un intervalo sobre todo un cuadrado hecho por Peano, aportes hechos a fines del siglo XIX.

El aporte de Cantor pone de manifiesto que un plano es más rico en puntos que una línea y demuestra que la dimensión puede cambiarse utilizando funciones biyectivas. El aporte de Peano contradice la creencia que la dimensión de un espacio se podía definir como el menor número de parámetros reales continuos requeridos para describir el espacio y demostraba que la dimensión podía derivarse de una transformación continua univaluada.

En 1911 Brouwer responde la pregunta de si era posible establecer una correspondencia entre el espacio euclideo n -dimensional y espacios euclideos de m dimensiones, combinando las características de las construcciones de Cantor y de Peano, es decir correspondencias continuas uno a uno, demostrando que no existe un homeomorfismo entre estos espacios a menos que sus dimensiones fueran iguales.

Lebesgue afirmaba que siempre existirían en un espacio euclideo n -dimensional, recubierto por pequeños "ladrillos", $n+1$ ladrillos con un punto en común. Brouwer demostró esta suposición y a partir de ella se pudo afirmar que la dimensión era topológicamente invariante.

Este hecho revolucionó la topología e hizo claro cómo asignar una dimensión a cualquier objeto, por complicado que fuera, dado que se podía generalizar el concepto de dimensión de un espacio como el menor entero n con la propiedad que el espacio se pueda descomponer en pequeños dominios de tal forma que no más de $n+1$ se toquen.

Cuando se trataba de precisar la percepción intuitiva que la dimensión está asociada con la palabra unidimensional, si el objeto tiene longitud (o medida lineal), con la palabra bidimensional, si el objeto tiene área o medida bidimensional, etc., se encontraba el obstáculo que dimensión es un concepto topológico mientras que medida es un concepto métrico y no existía entonces forma de relacionar la dimensión topológica con la medida.

Una medida es sólo una manera de adscribir un tamaño numérico a los conjuntos, de tal forma que si un conjunto se descompone en un número finito o contable de pedazos de manera razonable, el tamaño de todo el conjunto es la suma de los tamaños de las partes. Por eso se puede decir que una medida m en \mathbb{R}^n si m asigna un número no negativo, posiblemente infinito, a cada subconjunto de \mathbb{R}^n tal que:

- $m(\emptyset)=0$;
- $m(A)\leq m(B)$, si $A\subset B$
- Si A_1, A_2, \dots es una sucesión finita o contable de conjuntos, entonces se cumple que

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

La igualdad se cumple solo si los conjuntos son conjuntos disjuntos de Borel. La clase de conjuntos de Borel es la colección más pequeña de subconjuntos de \mathbb{R}^n con las siguientes propiedades:

- Cada conjunto abierto y cada conjunto cerrado es un conjunto de Borel
- La unión de cada colección finita o contable de conjuntos de Borel es un conjunto de Borel y la intersección de cada colección finita o contable de conjuntos de Borel es un conjunto de Borel⁷

Fue Hausdorff quien considerando un espacio métrico X , con todas las métricas compatibles con su estructura topológica, encontró que la dimensión de X se podía definir como el número real más grande p para el cual X , en cada metrización, tenía una medida Hausdorff p -dimensional positiva⁸.

En consecuencia, dado cualquier espacio métrico arbitrario X se denota la dimensión de Hausdorff de X como el supremo de todos los números reales p tales que la p -medida de X sea positiva, es decir, $m_p(X)>0$. Puesto que si X es un espacio topológico de dimensión $0\leq n\leq\infty$, su medida es positiva, o sea $m_n>0$, se sigue que la dimensión de Hausdorff de X es mayor o igual a la dimensión topológica de X .

⁷ FALCONER, Kenneth. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. England, West Sussex: Wiley, 2003, p. 7.

⁸ HUREWICZ, Witold; WALLMAN, Henry. Dimension Theory. Princeton University Press, N.J., 1941. p. 3-8.

La dimensión de Hausdorff de un espacio no necesita ser un entero; sin embargo, si un espacio X posee una dimensión menor o igual a n existe un homeomorfismo h de X en I_{2n+1} tal que para cada número real $r > n$, $m_r(h(X)) = 0$, por lo cual si X' se hace recorrer todos los espacios homeomórficos para un espacio X dado, se sigue que el ínfimo de la dimensión de Hausdorff para X' es igual a la dimensión de X , es decir, \inf de la dimensión de Hausdorff $X' = \dim X$.⁹

La relación entre dimensión y dimensión de Hausdorff que colocaba en conexión las dimensiones de espacios euclidianos y de espacios métricos revelaba que podían existir espacios que no obedecían el esquema euclidiano y cuya dimensión no era un entero positivo. Besicovitch interesado en los resultados de Hausdorff desarrolló la teoría geométrica de la medida mediante y amplió el alcance de la dimensión de Hausdorff. En este sentido se puede decir que si se sabe que X es bidimensional, es suficiente evaluar la dimensión de Hausdorff para $h(r) = \pi r^2$, pero la definición de la medida de Hausdorff está construida para que no sea necesario saber con antelación la dimensión.

De aquí que si se enfrenta una forma normalizada de dimensión desconocida se debe probar con cada función e prueba $h(r) = \gamma(d)r^d$, donde d es un entero. Si la longitud es infinita y el volumen es cero, la forma solo puede ser bidimensional. Besicovitch extendió la esencia de este último razonamiento a números d que no fueran enteros y a forma X que no fueran normalizadas. Se puede entonces concluir que para cada conjunto X existe un valor real D tal que la d -medida es infinita para $d < D$ y se anula para $d > D$. este valor real D se denomina dimensión de Hausdorff-Besicovitch de X . para un físico esta dimensión es un valor crítico. Ahora la dimensión D puede ser infinita, cero o un número real positivo. Hausdorff solo había considerado números reales positivos para la dimensión, pero Besicovitch extendió su alcance de esta manera¹⁰.

Pero ¿qué significaba, desde el punto de vista real y práctico, que existieran dimensiones de Hausdorff Besicovitch que eran números reales no enteros?

Se debe enfatizar que la geometría euclidea había simplificado las irregularidades, linealizado las leyes naturales, aproximándolas y regularizando las formas geométricas, suponiendo suaves o lisas superficies que en realidad no lo eran. Pero existían antecedentes claros que la naturaleza era irregular. En ella existían comportamientos deterministas y caóticos.

⁹ HUREWICZ, Witold; WALLMAN, Henry, op cit p 102-107

¹⁰ MANDELROT, Benoit. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1983, p. 364.

Se veía la necesidad de una geometría que incluyera el comportamiento caótico de la naturaleza y a la vez su irregularidad. Esta fue la razón por la que Benoit Mandelbrot propusiera y desarrollara una nueva geometría denominada Geometría Fractal

El concepto de *dimensión fractal* es fundamental y se puede exponer en términos simples de la manera siguiente¹¹:

Para medir una línea curva de longitud L_0 , se cubre esta con $N(\delta)$ segmentos (reglas) de longitud δ , entonces: $N(\delta) = L_0/\delta^1$. Si se realiza la sumatoria de todas las reglas, se tiene: $L = \sum \delta^1 = N(\delta) (\delta^1) = L_0 \delta^0$. Esto quiere decir que si se toma el límite cuando δ tiende a cero (se hace la regla infinitamente pequeña), da la longitud que se quiere medir, L_0 .

De igual forma para una superficie de dimensión A_0 , que se mide con $N(\delta)$ segmentos de área de dimensión δ^2 entonces: $N(\delta) = A_0/\delta^2$, y si se considera la sumatoria para $A = \sum \delta^2 = N(\delta) (\delta^2) = A_0 \delta^0$, que al hacer que δ tienda a cero, resulta ser el área que se quiere medir A_0 .

Esto implica que si se quiere medir un objeto de una dimensión se utiliza una regla de una dimensionalidad 1, porque si se usa una de mayor dimensionalidad el resultado es indeterminado y si se usa una de menos dimensionalidad el resultado es cero. Por tanto solos e puede utilizar una regla de la misma dimensionalidad del objeto si se quiere obtener un resultado esperado.

Para generalizar estas observaciones, se define un objeto con magnitud M_D de dimensionalidad D y que se mide con la unidad de medida δ de dimensionalidad d , entonces $M_D = \sum \gamma_d \delta^d = N(\delta) \gamma_d \delta^d$, siendo γ_d un factor geométrico relacionado con la forma de la unidad de medida (Por ejemplo, Línea $\gamma_d=1$, disco $\gamma_d=\pi/4$ o esfera $\gamma_d=\pi/6$). Así, al calcular M_D para diferentes valores de d , se encuentra que:

- $M_D \rightarrow \infty \leftrightarrow d > D$
- $M_D \rightarrow M_D \leftrightarrow d = D$
- $M_D \rightarrow 0 \leftrightarrow d < D$

Estos casos de M_D se aprecian en la figura que se da a continuación.

¹¹ GONZÁLEZ, Virgilio; GUERRERO, Carlos. Fractales, Fundamentos y aplicaciones. Ingenierías. Enero-Marzo, 2001, Vol IV, No 10.

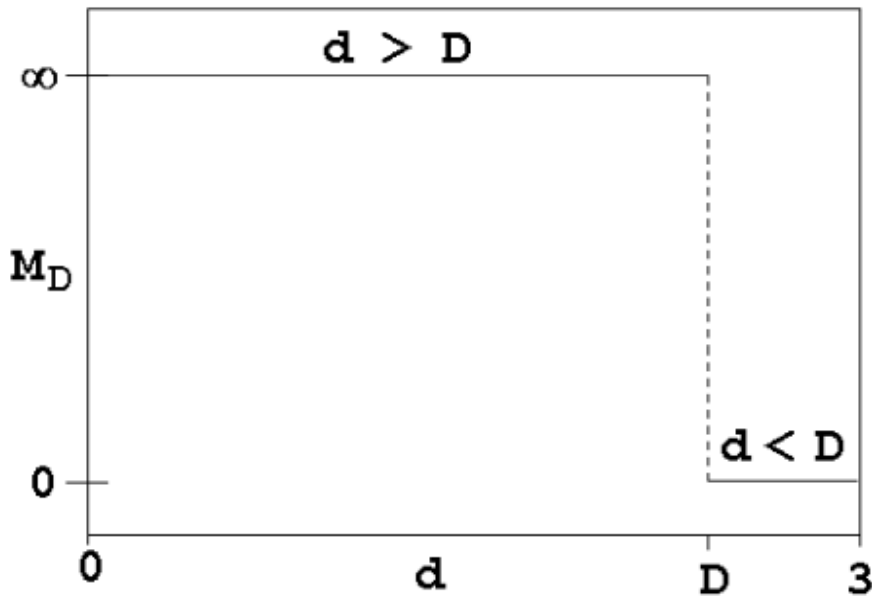


Figura 30. Gráfica de M_D que muestra el cambio que sufre M_d cuando d coincide con D .

Fuente: GONZÁLEZ & GUERRERO (2001).

Se puede interpretar la dimensión de Hausdorff Besicovitch o dimensión fractal D como el valor de d cuando M_d pasa de infinito a cero ($d=D$).

4.7 DEFINICIONES ALTERNATIVAS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

A pesar que la dimensión de Hausdorff es la más fundamental, tiene la desventaja de ser poco apta para los cálculos computacionales, razón por la cual existen algunas formas específicas de medir la dimensión, que son más apropiadas.

Sin embargo, lo fundamental a la mayoría de las definiciones es la idea de medición a la escala δ , de manera que para cada δ , se mide un conjunto de una manera que ignora las irregularidades de tamaño menores a δ y se examina la manera en que estas irregularidades se comportan cuando $\delta \rightarrow 0$.

4.7.1 Leyes de Potencia

Por ejemplo si F es una curva plana, nuestra medición, $M_{\delta}(F)$, podría ser el número de pasos requeridos por un par de conjuntos de divisores de longitud δ para atravesar F . se determina entonces una dimensión de F mediante la **ley de potencias**, si la hay, a la que obedece $M_{\delta}(F)$, mientras $\delta \rightarrow 0$. Si $M_{\delta}(F) \sim c\delta^{-s}$, para constantes c y s , se puede decir que F posee una dimensión de divisor s , siendo considerada c la longitud s -dimensional de F .

Tomando logaritmos, se obtiene: $\log M_{\delta}(F) \simeq \log c - s \log \delta$, en el sentido que la diferencia de los dos lados tiende a cero con δ , y además:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\log M_{\delta}(F) / -\log \delta)$$

Estas expresiones son atractivas para los, propósitos experimentales o computacionales, ya que s se puede estimar como menos el gradiente de una gráfica log-log dibujada sobre un dominio apropiado de δ

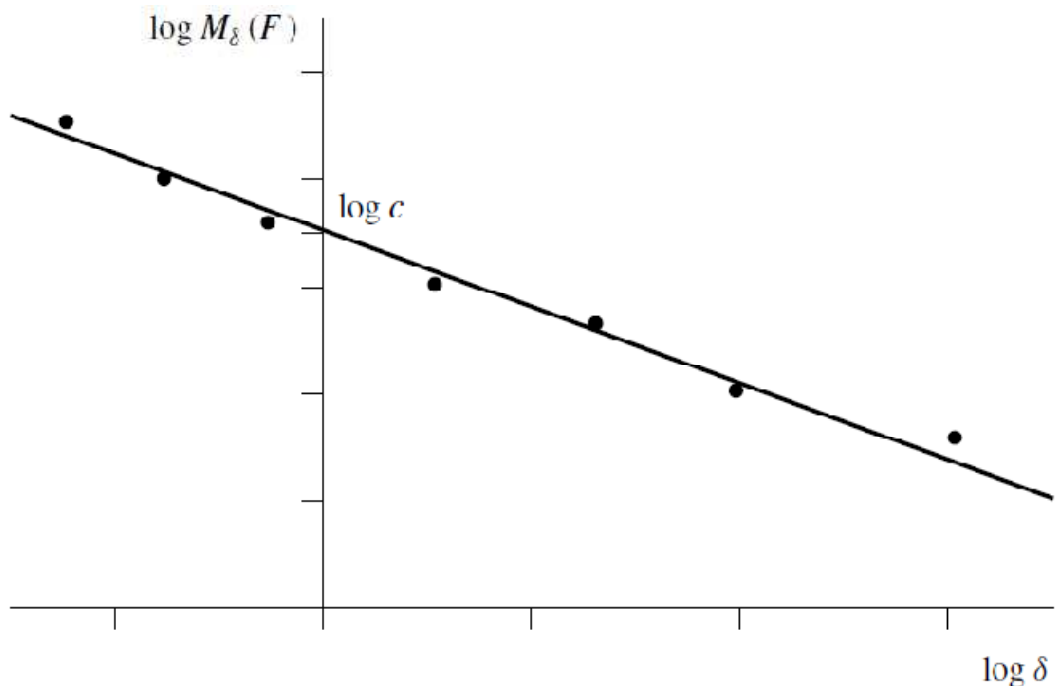


Figura 31. Estimación empírica de una dimensión de un conjunto F , asumiendo que se basa en la ley de potencias $M_{\delta}(F) \sim c\delta^{-s}$

Fuente: FALCONER (2003)

Por supuesto que para fenómenos reales, se puede solamente trabajar con un dominio finito de δ ; el experimento y la teoría divergen antes que se alcance una escala atómica. Por ejemplo, si F es la línea costera de Gran Bretaña, dibujando una gráfica $\log.\log$ para δ entre 20 m y 200 km da la dimensión de divisor de F de casi 1.2. No existe una ley de potencias exacta para $M_\delta(F)$ y lo más cerca que se puede estar de la expresión para s , son los límites inferior y superior.

Para que el valor de s dado por $M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$ se comporte como una dimensión, el método de medición necesita guardar escala con el conjunto, de manera que si se dobla el tamaño de F y al mismo tiempo se dobla la escala con la que se realiza la medición, no se afecta la respuesta, es decir, se necesita que $M_\delta(\delta F) = M_1(F)$, para todo δ . Si se modifica la situación y se redefine $M_\delta(F)$ como la suma de las longitudes de paso de los divisores entonces $M_\delta(F)$ es homogéneo de grado 1, es decir, $M_\delta(\delta F) = \delta^1 M_1(F)$ para $\delta > 0$ y esto se debe tener en cuenta cuando se defina la dimensión. En general, si $M_\delta(F)$ es homogéneo de grado d , esto es, $M_\delta(F) = \delta^d M_1(F)$, entonces una ley de potencias de la forma $M_\delta(F) \sim c\delta^{d-s}$ corresponde a una dimensión s .

No existen reglas fáciles y sin dificultad para decidir si una cantidad puede ser asumida de forma razonable como dimensión. Existen muchas definiciones que no están de acuerdo de forma exacta con las anteriores, dadas en un escenario más bien simplificado. Los factores que determinan la aceptabilidad de una dimensión se reconocen en gran parte por la intuición y la experiencia.

En general, se busca cierta clase de comportamiento dependiente de la escala, una naturalidad de la definición en un contexto particular y propiedades típicas de las dimensiones, ya que para evitar malas concepciones, se debe derivar las propiedades de cualquier dimensión a partir de su definición. Inclusive para los conjuntos más "elegantes". Las propiedades de la dimensión de Hausdorff, no son válidas necesariamente para otras dimensiones. Pero es de utilidad preguntarse cuáles son las propiedades deseables de una dimensión y esas son las que se derivan de la dimensión de Hausdorff, las cuales son:

- Monotonicidad. Si $E \subset F$ entonces $\dim_H E \leq \dim_H F$
- Estabilidad. $\dim_H(E \cup F) = \max(\dim_H E, \dim_H F)$.
- Estabilidad contable. $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(F_i)$
- Invarianza geométrica. $\dim_H f(F) = \dim_H F$, si f es una transformación de R^n tal como una traslación, una rotación, semejanza o afinidad.
- Invarianza de Lipschitz. $\dim_H f(F) = \dim_H F$ si f es una transformación bi-Lipschitz
- Conjuntos contables. $\dim_H F = 0$, si F es finito o contable.

- Conjuntos abiertos. Si F es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n entonces $\dim_{\text{H}} F = n$
- Variedades suaves. $\dim_{\text{H}} F = m$ si F es una variedad m -dimensional suave (curva, superficie, etc).

Todas las definiciones de dimensión son monótonas, la mayor parte estables, pero como se verá ciertas fallan en exhibir estabilidad contable y pueden tener conjuntos contables de dimensión positiva.

Todas las dimensiones usuales son invariantes Lipschitz, y por lo tanto, geoméricamente invariantes. Las propiedades de conjuntos abiertos y las variedades suaves aseguran que la dimensión es una extensión de la definición clásica. Se debe notar que diferentes definiciones de dimensión pueden proporcionar diferente información acerca de cuáles conjuntos son equivalentes Lipschitz.

4.7.2 Dimensión por medio del conteo de cajas (box-counting)

La dimensión por conteo de cajas o dimensión por cajas es una de las dimensiones más ampliamente utilizadas. Su popularidad se debe a su relativa facilidad de cálculo matemático y de estimación empírica. La definición se remonta por lo menos hasta 1930. Sea F cualquier subconjunto no vacío limitado de \mathbb{R}^n y sea $N_\delta(F)$ el número más pequeño de subconjuntos con diámetros a lo más δ que puede cubrir F . las dimensiones de F inferior y superior por contero de cajas se definen respectivamente como

$$\underline{\dim}_{\text{B}} F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_{\text{B}} F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Si estas son iguales se denomina su valor común como dimensión por conteo de cajas o dimensión por cajas de F .

$$\dim_{\text{B}} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Se supone que $\delta > 0$ es suficientemente pequeña para asegurar que $-\log \delta$ y cantidades semejantes son estrictamente positivas. Para evitar problemas con $\log 0$ o $\log \infty$, se considera generalmente la dimensión por cajas sólo para conjuntos limitados no vacíos.

$N_\delta(F)$ es cualquiera de lo siguiente(referirse a la figura):

- i. El número más pequeño de bolas cerradas de radio δ que cubren F
- ii. El número más pequeño de cubos de lado δ que cubren F
- iii. El número más pequeño de cubos de malla δ que intersectan F
- iv. El número más pequeño de conjuntos de diámetro a lo más δ que cubren F
- v. El número más grande de bolas disjuntas de radio δ con centros en F ¹²

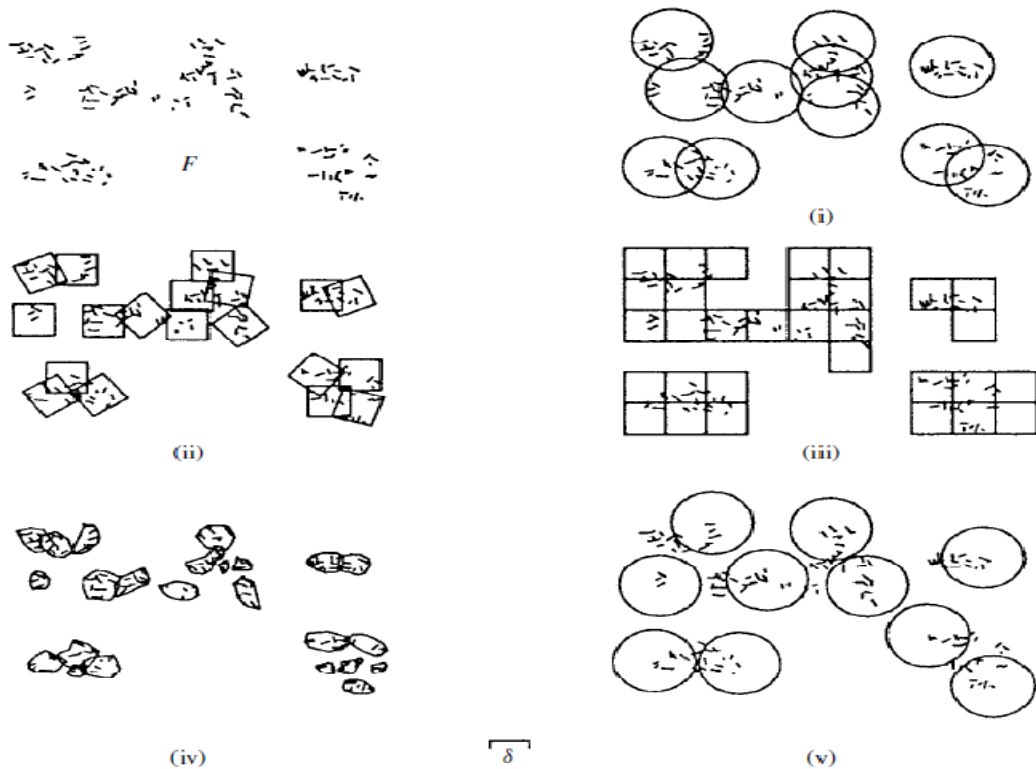


Figura 32. Cinco formas de encontrar la dimensión de F usando cajas.

Fuente: FALCONER (2003)

¹² FALCONER, Kenneth. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. England, West Sussex: Wiley,2003, p 40-46

4.8 LA IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS DE ZIPF

La Ley de Zipf, fue enunciada por el lingüista norteamericano George Kingsley Zipf, profesor de Harvard dedicado desde los años 1920 a estudiar las restricciones en las expresiones cotidianas y el uso del vocabulario en la expresión escrita del idioma inglés. En su obra más conocida denominada "Comportamiento Humano y el Principio del Menor esfuerzo", publicada en 1949, expuso sus observaciones.

Zipf esencialmente determinó la reducción en fonemas y morfemas en el uso del inglés utilizando la correlación entre brevedad de forma y frecuencia de uso. Así, la palabra más frecuente es la que es más breve en general, de donde se deduce que es la de morfología y fonología más reducida.

Por tanto, Zipf correlacionó el tamaño de las palabras y la frecuencia de uso de las mismas en Inglés recalcando el hecho que las palabras más cortas son más frecuentes que las más largas en general, y por tanto su expresión formal a menudo tenderá a abreviarse porque el uso frecuente permite que se gane en significado léxico.

En consecuencia, desde el punto de vista gramatical las categorías gramaticales más frecuentes de clases cerradas son más frecuentes que sus contrapartes de poca frecuencia. Los verbos auxiliares se reducen y contraen a menudo en comparación con los verbos léxicos, cada uno de los cuales posee una frecuencia significativamente menor que la de los verbos auxiliares. Los pronombres son en general más cortos que las frases con nombres léxicos, cada uno de los cuales será menos frecuente que un pronombre gramaticalizado.

Cuando surgen, históricamente, los artículos definidos e indefinidos a partir de los demostrativos y los numerales respectivamente, la mayor frecuencia de los artículos se logra por medio de una reducción en la estructura fonológica y/o en la morfológica. Los patrones sintácticos de alta frecuencia son también mínimos respecto a los patrones de menor frecuencia.

Las cláusulas intransitivas son mucho más frecuentes que las transitivas y poseen mucha menor complejidad interna. Las cláusulas relativas que se refieren a posición del sujeto son más frecuentes que las que hacen relativizaciones de objetos¹³.

¹³ HAWKINGS, John A. Efficiency and Complexity in Grammars. UK: Oxford University Press, 2004, p. 27-42.

Zipf pudo determinar una relación matemática precisa entre la frecuencia de uso de una palabra y el rango o número de orden de la palabra con respecto a la lista de todas las palabras consideradas en un texto determinado, ordenadas en orden decreciente de frecuencias de aparición u ocurrencia. La observación hecha por Zipf indicaba que la frecuencia de aparición de una palabra en particular era inversamente proporcional a su rango (orden de aparición), es decir, que el producto de la frecuencia de aparición por el rango de la palabra era una constante, independientemente de la palabra particular considerada. Por tanto, si se identifica una palabra en particular con un índice s , de forma que s sea igual al rango y se designa con $f(s)$ la frecuencia normalizada de aparición de la palabra, es decir el número de veces que aparece en el texto dividido por el número total de palabras, la Ley de Zipf se puede expresar aproximadamente $f(s)=c/s^\alpha$, donde c es una constante de normalización y α es un exponente que asume un valor ligeramente mayor que la unidad.

Si bien la expresión original de la Ley de Zipf dada antes es aplicable a muchos idiomas humanos, es necesario realizar algunas observaciones. En primer lugar, la expresión original de la Ley de Zipf solo puede explicar el comportamiento estadístico de las frecuencias de las palabras en una zona que se limita a los rangos medios y pequeños.

Aun cuando los textos sean extensos, esta ley proporciona un ajuste aceptable para valores de s en una ventana entre 100 y 2000, lo que no representa una fracción significativa de ningún vocabulario literario. En segundo lugar, Mandelbrot utilizando argumentos basados en la estructura fractal de los árboles léxicos modifica la expresión original mejorando su desempeño para valores de rango más pequeños que $s < 100$.

Sin embargo, el comportamiento para rangos muy altos permite afirmar que en estos casos no se sigue la Ley de Zipf¹⁴. Así, la Ley de Zipf como originalmente se planteó y a pesar de la modificación de Mandelbrot necesita que se redefina en un marco de referencia de trabajo matemático de forma que sea válida para todo valor de rango. Por eso se recurre a las distribuciones de probabilidad de tipo hiperbólico.

La Ley de Zipf de frecuencia de las palabras asume que una palabra es simplemente una secuencia de letras adecuadas terminadas en espacio. En este caso r designa el rango de una palabra de probabilidad P y el término distribución de frecuencia de palabra denota la relación entre r y P . La relación encontrada por Zipf y denominada distribución de Zipf, independiente de los parámetros, es universal y se puede expresar por $P \propto 1/r$.

¹⁴ MONTEMURRO, Marcelo A. Beyond the Zipf-Mandelbrot Law in quantitative linguistics. Arxiv: cond-math/0104066 v 2, 2001.

Mandelbrot al intentar deducir la Ley de Zipf utilizó el modelo $P=F(r+V)^{-1/D}$, que teniendo en cuenta que la suma de probabilidades P da uno, pone en claro que los parámetros F , D y V se relacionan por medio de $F^{-1}=(r+V)^{-1/D}$, donde F es un prefactor o factor de escala; esta expresión proporciona en términos de estos parámetros, de los que el más importante es D , la riqueza del vocabulario empleado por una persona. Esto pone en evidencia que la **Ley de Zipf es aproximadamente hiperbólica**.

Además, partiendo del concepto de árbol con escalamiento, se puede llegar a una forma generalizada de la Ley de Zipf, como se plantea Mandelbrot. Un árbol con escalamiento es aquel en el que cada una de sus ramas por sí misma es en algún sentido una versión en escala reducida del árbol mismo, de manera que al truncarlo equivale a suprimirle una rama. Por tanto el árbol con escalamiento más simple corresponde al discurso, que es una secuencia de letras estadísticamente independientes, siendo la probabilidad de cada letra apropiada $r < 1/N$, y la del espacio $1-Nr$, donde N es el número de letras apropiadas. En este caso el k -ésimo nivel tiene propiedades tales como: $P=(1-Nr)r^k=P_0r^k$, con r variando en el intervalo $((N^k-1)/(N-1), (N^{k+1}-1)/(N-1))$

Si se escribe $D=\log N/\log(1/r) < 1$ y $V=1/(N-1)$ y se inserta $k=\log(P/P_0)/\log r$ en cada frontera, es decir en las expresiones de los extremos del intervalo dado, se obtiene que $P^{-D}P_0^{D-1} < r/V \leq N(P^{-D}P_0^D)-1$, de manera que si r se aproxima al promedio de sus límites se tiene el resultado deseado. Así que los árboles con escalamiento más simples corresponden a secuencias de letras generadas por otros procesos aleatorios estacionarios tales como las cadenas de Markov y son luego cortados por las recurrencias del espacio. Pero entonces se debe averiguar si se puede deducir a partir de los datos de Zipf si el árbol lexicográfico que emplea letras ordinarias es escalado. Pero por supuesto que no porque muchas secuencias cortas de letras nunca se presentan y muchas secuencias largas son medianamente comunes, de manera que el árbol lexicográfico está lejos de ser estrictamente escalado, pero el argumento dado es suficiente para explicar la validez de la **Ley de Zipf generalizada** $P=F(r+V)^{-1/D}$.

Se debe tener en cuenta que D es la dimensión fractal y que si $D < 1$ se tiene un caso que no se cumple universalmente. La ley generalizada de Zipf es válida e incuestionable en casos donde $D > 1$. El caso en que $D=1$, implica que la ley generalizada es válida solo si $r=r^* < \infty$. Esto significa que $F > 0$ y que $r^* < \infty$, es decir que el diccionario debe contener un número finito de palabras. Solo en casos donde el vocabulario es limitado de forma artificial se encuentra que $D > 1$, como por ejemplo cuando se inserta Latín en un texto que no está en latín, pero en este caso D no se puede interpretar como una dimensión fractal.

4.9 APLICACIÓN DE MÉTRICAS DEL PAISAJE

A partir de una imagen satelital considerada como una representación digital el mosaico que forma un determinado paisaje pueden medirse las relaciones espaciales entre los elementos de ese mosaico, denominadas en ecología del [paisaje manchas o parches (patches)]. Siendo una imagen digital las medidas que permiten evaluar la manera en que se configuran las coberturas en un territorio concreto, las métricas del paisaje, pueden aplicarse ya sea sobre las bandas originales, sobre algunas transformaciones de ellas o sobre una imagen ya clasificada.¹⁵

Según Frohn se pueden elaborar medidas cuantitativas de los patrones espaciales encontrados en un mapa o en imágenes satelitales aplicando diversas métricas del paisaje.¹⁶ La aplicación práctica de la cuantificación de los patrones del paisaje es muy útil en el análisis de su estructura y necesaria en el análisis de los patrones y la interacción de estos con los procesos del paisaje¹⁷

Las métricas de área consideran el área de cada tipo de cobertura, el porcentaje de paisaje y el tamaño promedio del parche. Las medidas de la configuración espacial implican la consideración del número total de parches para cada tipo de cobertura y el cálculo de índice de diversidad de Shannon. Las métricas de complejidad de los parches hacen referencia a la densidad de bordes y a la *dimensión fractal*.

4.9.1 Dimensión fractal como métrica de complejidad de los parches

Esta métrica ha sido utilizada en el análisis de ecosistemas para cuantificar la complejidad de las formas de los parches en un paisaje. Ha sido empleada para medir el grado de disturbio humano en el paisaje.

La premisa es que los límites naturales tales como los de la vegetación tienen formas más complejas que los que son el resultado de la actividad humana, como los cultivos. Cuando los disturbios humanos se incrementan la dimensión fractal decrece. La dimensión fractal ha sido utilizada para mediciones, simulaciones y como una herramienta analítica espacial¹⁸

¹⁵ CHUBIECO, E. Teledetección ambiental. La observación de la tierra desde el espacio. Barcelona: Ariel. 2002.

¹⁶ FROHN.R.C. Cesando remoto para la ecología del paisaje: Nuevos indicadores métricos para el modelado y la evaluación de ecosistemas. New York: Lewis Publishers.1998.

¹⁷ GERGEL,S.E;TURNER, M.G. Aprendiendo ecología del paisaje: una guía práctica a los conceptos y las técnicas. New York: Springer.2002.

¹⁸ FROHN.R.C.,op cit 1999.

Según Frohn numerosos estudios han encontrado que la dimensión fractal del paisaje varía de acuerdo al tipo de uso de la tierra. Por ejemplo: áreas de bosques tienden a tener más formas complejas y manifestar alta dimensión fractal, mientras que las áreas de agricultura tienden a tener formas más simples y de este, modo tiene dimensión fractal más baja. El valor de la dimensión está entre 1 (cuando son formas más simples) y 2 (cuando son formas más complejas). La complejidad de los parches puede ser medida por la regresión del logaritmo del perímetro de los parches de cierto tipo de cobertura con el logaritmo del tamaño del parche S^{19} .

Dimensión Fractal= $2s$, donde s es la pendiente de la regresión

4.9.2 Niveles de análisis del paisaje

Los niveles de análisis del paisaje atienden el modelo conceptual de Noss²⁰ empleado por el IAVH²¹. Para efectuar el Proyecto Diseño e Implementación del Sistema Indicadores de Seguimiento de Política de Biodiversidad en la Amazonia Colombiana; este referente conceptual propone cuatro niveles de organización y resume las jerarquías de estudio del paisaje por atributos primarios tales como, composición, estructura, función y cambio.

Tabla 1. Indicadores del paisaje de acuerdo a los atributos del ecosistema

	COMPOSICIÓN	ESTRUCTURA	FUNCIÓN	CAMBIO
Paisaje Regional-Ecosistema (semidetalado)	Tipos y extensión del ecosistema.	Conectividad, heterogeneidad, fragmentación, yuxtaposición, patrón de distribución del hábitat.	Dispersión, procesos de perturbación, tendencias de uso de la tierra.	Imágenes de sensores remotos, SIG e índices de paisaje.
Ecosistema-Comunidad (detallado)	Identidad, abundancia relativa, frecuencia y diversidad de especies.	Variables del sustrato, pendiente y fisonomía de la vegetación.	Biomasa, productividad, de recursos, tasa de herbivoría, dinámica de fragmentos.	Fotografías aéreas, inventarios de recursos, censos e inventarios biológicos.
Especie-Población	Abundancia, frecuencia, densidad, IVI y biomasa.	Dispersión, estructura de la población, variables de hábitat.	Procesos demográficos, dinámica metapoblacional y fisiología y fenología.	Censos, índices de adecuación de hábitat y modelos de especie-hábitat.
Genético	Diversidad de alelos, variantes cariotípicas.	Censo y tamaño efectivo de la población, heterogeneidad.	Tasa de cruces entre subespecies, tasa de mutación, tasas de deriva genética.	Electroforesis, secuencia de hábitat y modelos de especie-hábitat.

Fuente: NOSS (1990)

¹⁹ FARINA, A. Principios y métodos en ecología del Paisaje. Holanda: Kluwer. 2000.

²⁰ NOSS, R.F. Indicators for monitoring biodiversity: a hierarchical approach. En: Conservation Biology. Vol. 4, No 4. 1990 p.355-364.

²¹ Instituto de Investigaciones de Recursos Biológicos Alexander Von Humboldt (IAVH)

4.9.3 Elementos del paisaje

Los elementos principales del paisaje son los parches, corredores y matriz, los cuales constituyen la composición del paisaje a cualquier escala, controlando fuertemente todos los movimientos, flujos y cambios de los sistemas naturales y de la población “matriz-parche-corredor”

La matriz es el área predominante del paisaje, comprende la forma de los parches y su extensión, su número, la dinámica interna y la conexión que existe entre ellos; las características de la matriz varían en función del grado y uso antrópico que se haga sobre ella. La matriz puede incrementar la funcionalidad de los fragmentos al actuar como área de amortiguación, además de aportar conectividad al paisaje y entre los fragmentos ²²

Un parche es un área homogénea que se diferencia de sus alrededores; puede clasificarse por su tamaño, forma, contenido, duración, complejidad estructural y propiedades de borde. Los parches se pueden clasificar de la siguiente manera. a) *Parches de perturbación*; resultan de la perturbación de un área pequeña, pueden ser de origen natural o antrópico. b) *Parches remanentes*; originados por una perturbación extensa, que forma islas, su magnitud es severa, y puede crear la extinción de especies. c) *Parches de recursos ambientales*; se dan por diferencias en las condiciones del sustrato en cuanto al material parental o a la hidrología. Se caracteriza por bordes abruptos o graduales, entre mayor es el cambio de parche a matriz mayor es el movimiento de especies. d) *Parches introducidos*, originados por actividades humanas como la introducción de especies animales o vegetales durante las actividades agropecuarias o de urbanización, detienen el proceso de sucesión natural ²³

Los corredores se identifican generalmente como tiras que ayudan en flujos entre los parches. Facilitan la conectividad entre el paisaje, favoreciendo la preservación de la diversidad biótica en ecosistemas muy fragmentados. Los corredores desempeñan un número importante de funciones, incluyendo dispersión ²⁴.

²² MUGICA et al. Integración territorial de espacios naturales protegidos y conectividad ecológica en paisajes mediterráneos. Disponible en: http://www.juntadeandalucia.es/medioambiente/web/Bloques_Tematicos/Publicaciones_Divulgacion_Y_Noticias/Documentos_Tecnicos/Integracion_y_conectividad/PDFs

²³ ETTER, A. Caracterización ecológica de dos reservas nacionales naturales de la Amazonia Colombiana. En: Ambiente y desarrollo. (2001); p.1-18.

²⁴ LINDENMAYER, D.B. (1994). Wildlife corridors and the mitigation of logging impacts in wood-production forests in south-eastern Australia: a review. En: Wildlife Research Vol. 21. p. 323–340.

4.9.4 Fragmentación

Es la transformación de un bosque continuo en diversas unidades más pequeñas y aisladas entre sí, cuya extensión agregada de superficie es mucho menor que la del bosque original y que se puede considerar como un proceso dinámico mediante el cual el hábitat se va fragmentando o reduciendo a islas de menor tamaño, más o menos conectadas entre sí, configurando una matriz de hábitat diferente a la original, implicando efectos espaciales que se pueden resumir así:

- *Disminución de la superficie de hábitat.* Los procesos de fragmentación llevan asociados una pérdida de las cubiertas naturales en favor de usos antrópicos del territorio (urbanísticos, industriales, infraestructuras, agricultura, etcétera).
- *Reducción del tamaño de los fragmentos,* por la división de superficies más o menos amplias en fragmentos de menor tamaño.
- *Aislamiento de los fragmentos en el paisaje,* provocada por una destrucción intensa de las superficies naturales aumentando la distancia entre los fragmentos de hábitat natural. El aislamiento puede medirse a través de índices que miden la distancia al fragmento más próximo. Este efecto tiene una componente funcional importante ya que la matriz o área alterada puede ser más o menos permeable según las especies

Las variables que permiten describir un paisaje fragmentado son: el tamaño y número de los fragmentos, su forma, el tipo de matriz o ambiente que rodea a los fragmentos y la distancia entre ellos. La distancia y el tipo de matriz determinarán el grado de aislamiento entre fragmentos ²⁵

²⁵ ORDOÑEZ DIAZ, María Cristina. Estudio espacio temporal del proceso de fragmentación sobre la cobertura boscosa en la cuenca del río Palacé. [Trabajo de Grado]. Popayán: Universidad del Cauca, Departamento de Biología ; 2008.

5. METODOLOGÍA

5.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este documento es una Monografía sobre la importancia del Análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos. Trata por tanto de los conceptos que a esta temática concierne buscando la información más relevante y actualizada. Se clasifica entonces como investigación bibliográfica en el campo de la aplicación de la Geometría Fractal a la Biología.

5.2 ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Esta Monografía se realiza siguiendo los siguientes pasos metodológicos:

- Revisión bibliográfica para adquirir conocimiento acerca de los conceptos involucrados en la utilización del Análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos.
- Identificación de trabajos ya ejecutados en el campo de la Geometría Fractal sobre sistemas biológicos para análisis y discusión crítica, con lo cual se demuestra cómo se aplica el Análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos
- Discusión crítica sobre el empleo del Análisis de Zipf como herramienta para el estudio de sistemas biológicos y sus proyecciones en el futuro.

5.3 PLAN DE ACCIÓN

Esta Monografía se desarrolla siguiendo el siguiente plan de acción:

- Se aplica la Ley de Zipf al cuento de Blanca Nieves determinado la dimensión fractal correspondiente. Para ello se utilizan las herramientas informáticas Microsoft Excel y el software libre Textstat 2.0

- Se aplica la técnica de Box counting para determinar la dimensión fractal de una imagen de un ojo. Se utilizan las herramientas informáticas de bcomet.exe para el conteo de cajas, Microsoft Excel para la discusión de la dimensión fractal y el software Harfa para comprobar nuestros resultados.
- Se estudian mediante la técnica de box counting dos bosques diferentes que se comparan utilizando la dimensión fractal respecto al impacto de las acciones antrópicas sobre su estructura.
- Se discuten los artículos científicos, cuyos abstract se suministran, desde un punto de vista crítico constructivo y expositivo

6. RESULTADOS

6.1 ANÁLISIS DE ZIPF APLICADO AL CUENTO DE “BLANCA NIEVES”

Para aplicar el estadístico de Zipf al cuento de “Blanca Nieves” se procede de la siguiente manera:

- Para el conteo de las frecuencias se utiliza el software libre denominado TextStat 2.0; El texto de del cuento se obtiene de Internet.
- TextStat 2.0 permite exportar los resultados del conteo a Excel o a Word. Se exportaron a Excel.
- Se eliminaron las palabras con frecuencia igual excepto la última, sin alterar los rangos
- Se obtuvo entonces la correlación de frecuencia de aparición vs número de rango (rank). Se obtiene una distribución hiperbólica de cola larga, que se ajusta exponencialmente
- Se aplica luego el estadístico de Zipf, es decir, se grafica en log-log la curva de logaritmo natural de número de rango vs el logaritmo natural de la frecuencia de aparición de las palabras
- Se ajusta con mínimos cuadrados y el valor absoluto de la pendiente es la dimensión fractal D. en este caso $D=0.1925$

Los resultados se pueden apreciar a continuación:

rango	frecuencia	palabra	ln(rango)	ln(frecuencia)	palabra
1	26	la	0,000	3,258	la
2	19	y	0,693	2,944	y
5	17	que	1,609	2,833	que
6	14	a	1,792	2,639	a
7	12	el	1,946	2,485	el
8	10	del	2,079	2,303	del
10	9	se	2,303	2,197	se
11	8	un	2,398	2,079	un
12	7	los	2,485	1,946	los
16	6	una	2,773	1,792	una
20	5	su	2,996	1,609	su
25	4	reino	3,219	1,386	reino
35	3	príncipe	3,555	1,099	príncipe
65	2	Y	4,174	0,693	Y
237	1	volvió	5,468	0,000	volvió

Figura 33. Conteo y aplicación de logaritmos aplicando Ley de Zipf al resultado dado por TextStat 2.0 en el cuento de Blanca Nieves

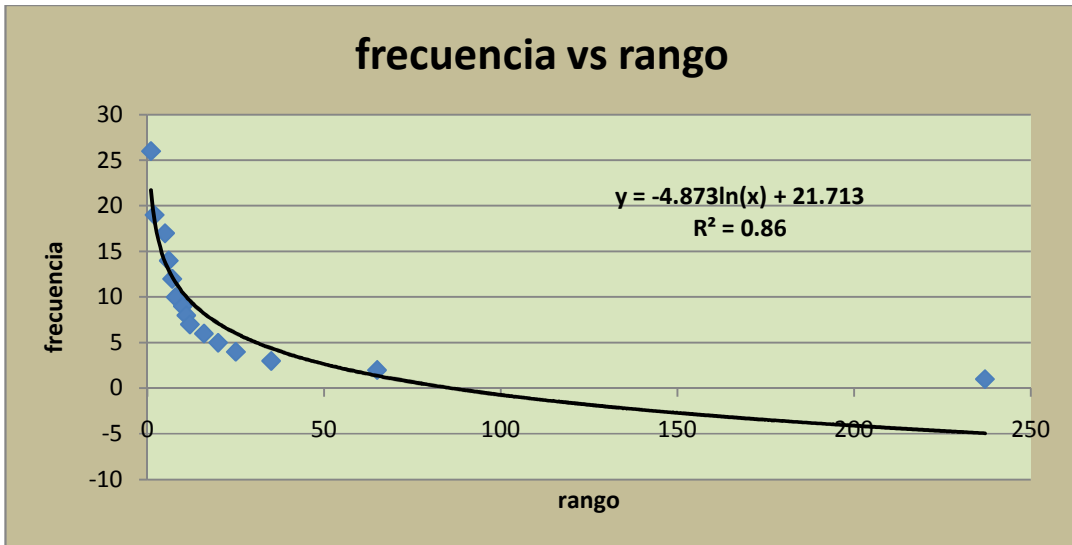


Figura 34. Distribución de Zipf hiperbólica del análisis textual de Blanca Nieves

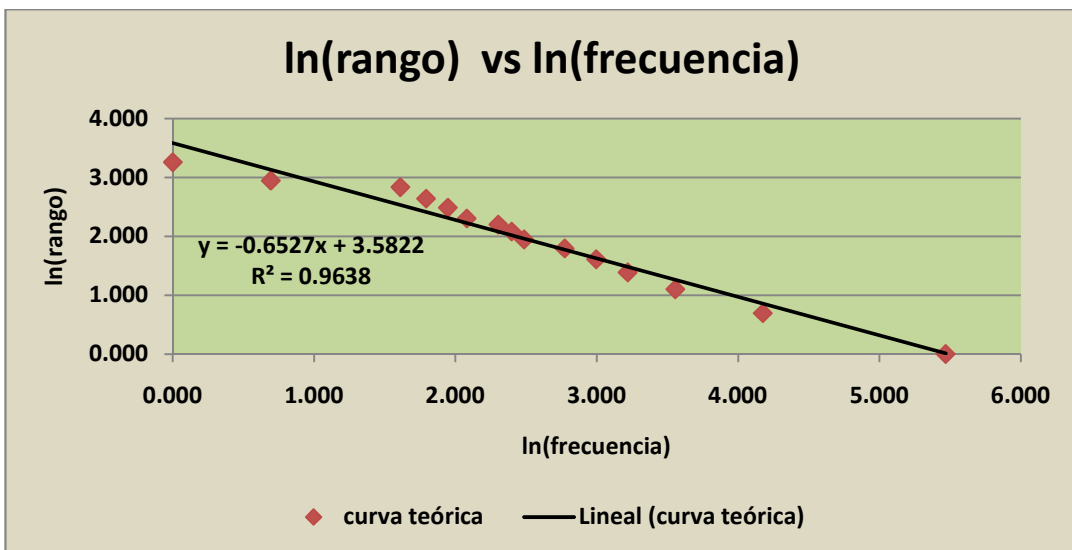


Figura 35. Ley de Zipf para Blanca Nieves. La dimensión fractal $D=0.6527$

6.2 ANÁLISIS DE ZIPF POR BOX COUNTING

La técnica del Box Counting se utiliza para medir la dimensión fractal de una curva, como por ejemplo de una costa, pero se puede aplicar también a curvas que se superponen y a estructuras que no poseen una estricta auto semejanza tales como la vegetación.

Consiste en superponer una rejilla de pixel de longitud δ o de círculos de radio δ necesarios para cubrir un objeto, o contar el número C de pixeles de longitud δ que están ocupados

El proceso se repite usando diferentes valores de δ y la relación de potencias que define el proceso está dada por $C=K*\delta^{-D}$, donde D es la dimensión fractal

Se empleará el software libre `bcmet.exe` que realiza el análisis de la dimensión fractal de figuras fractales en blanco y negro, utilizando el enfoque clásico de box counting ideado por Mandelbrot. Se aplica a la figura de un ojo y su entorno.



Figura 36. Figura empleada para el enfoque de Box Counting

Al montar la imagen en el programa, el primer recubrimiento se muestra como en la figura 37, con un tamaño de grid de 20 pixeles para el lado del cuadro.

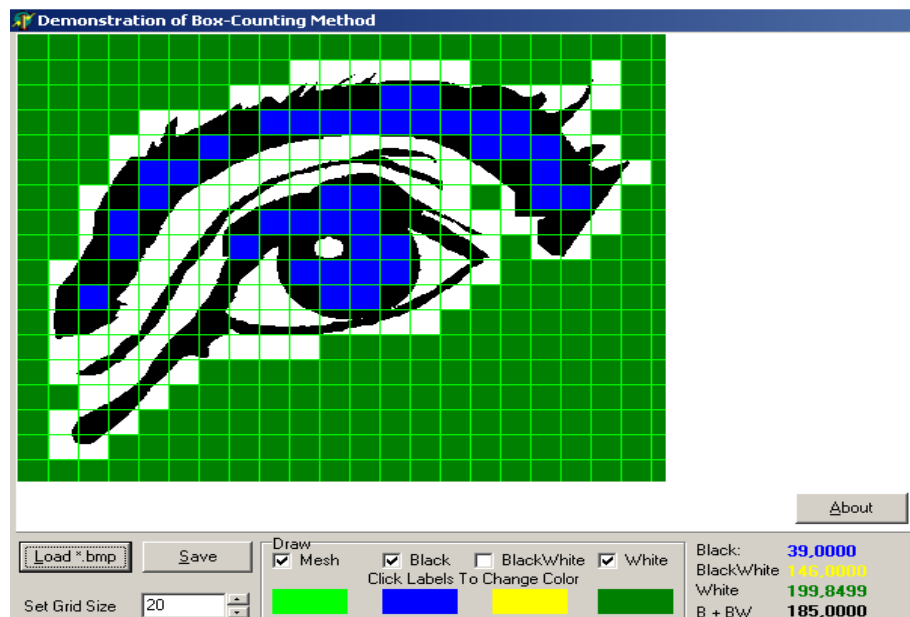


Figura 37. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 20 pixeles

Los recubrimientos continúan utilizando tamaños de rejilla (grid) cada vez menores para obtener una aproximación a las irregularidades cada vez mayor y precisar de mejor manera la dimensión fractal. Así, se ajusta sucesivamente el tamaño de grid a 18, 15, 12, 9, 7 y 4 pixeles para el lado del cuadro.

Con base en estos conteos de boxes sucesivos, tanto de las cajas negras, como de las blancas y de las que tienen negro y blanco, se crean las tablas respectivas para cada clase de pixeles.

Se trata ahora de utilizar estos conteos de boxes para hallar la dimensión fractal de la figura utilizando la expresión $NB(r) = DB(\log(1/r)) + kB$, donde r es el tamaño de cada cuadro de la cuadrícula en pixeles. La misma expresión se usa para NW y NBW . Se graficarán entonces las tres gráficas y la que tiene menor pendiente da la dimensión fractal.

Los resultados y el cálculo de la dimensión fractal se muestran en la serie de figuras siguientes.

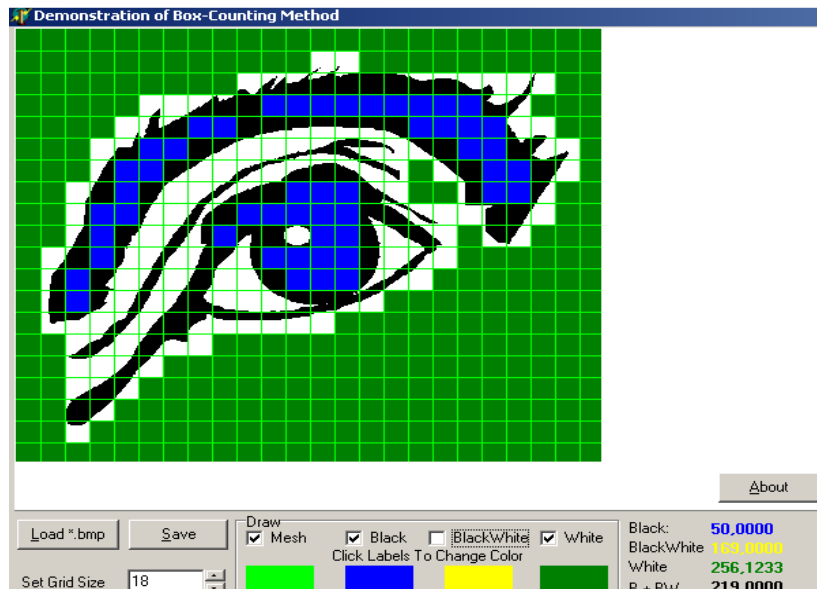


Figura 38. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 18 pixeles

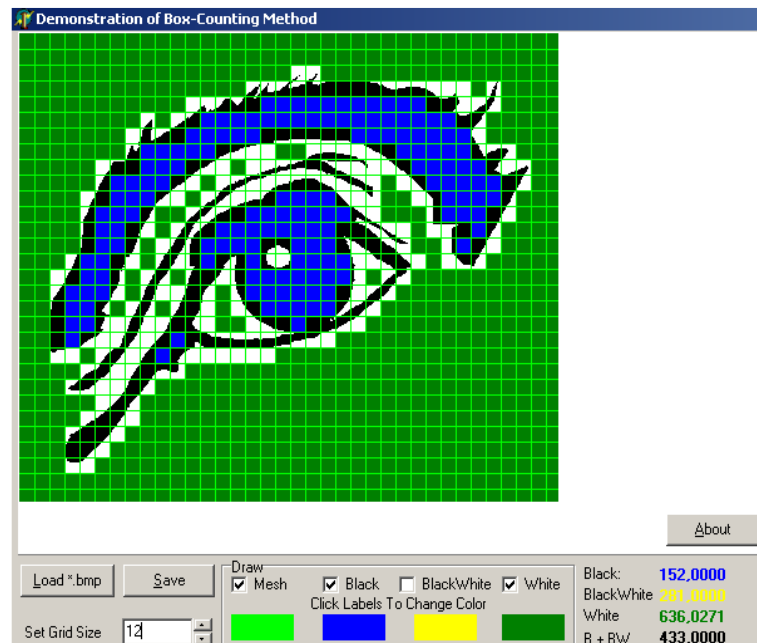


Figura 39. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 12 pixeles

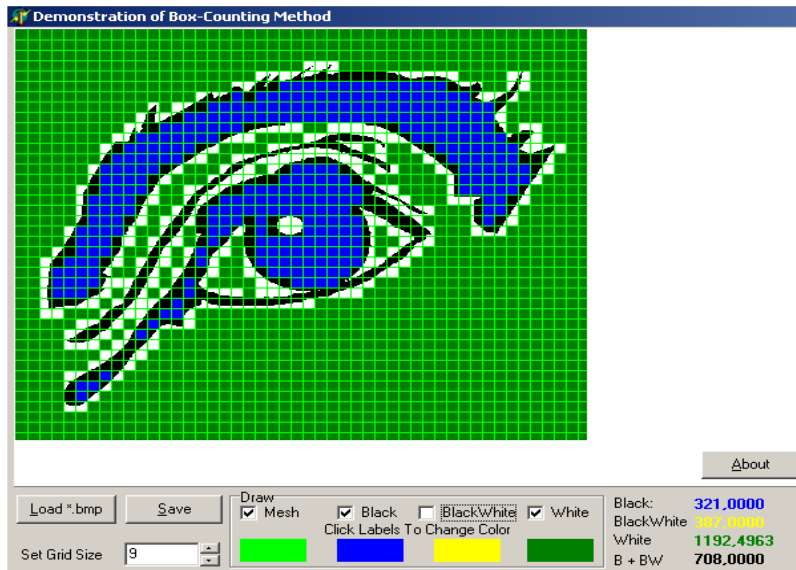


Figura 40. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 9 pixeles.

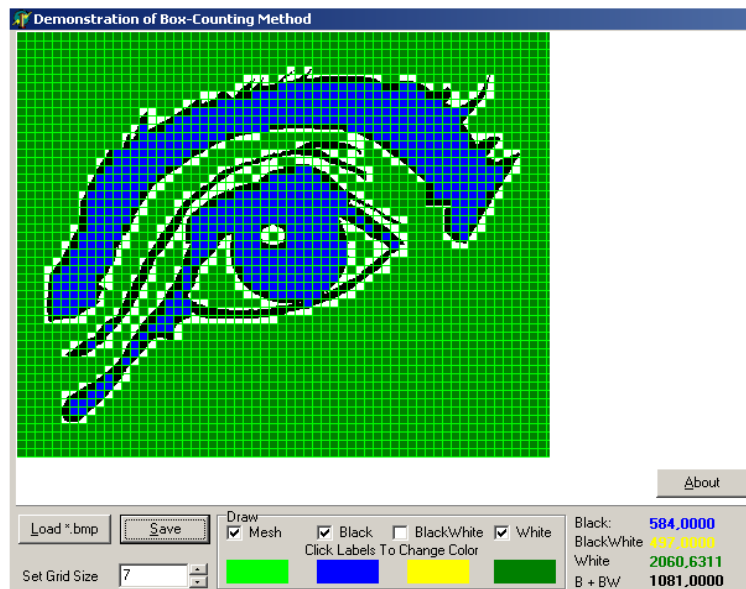


Figura 41. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 7 pixeles

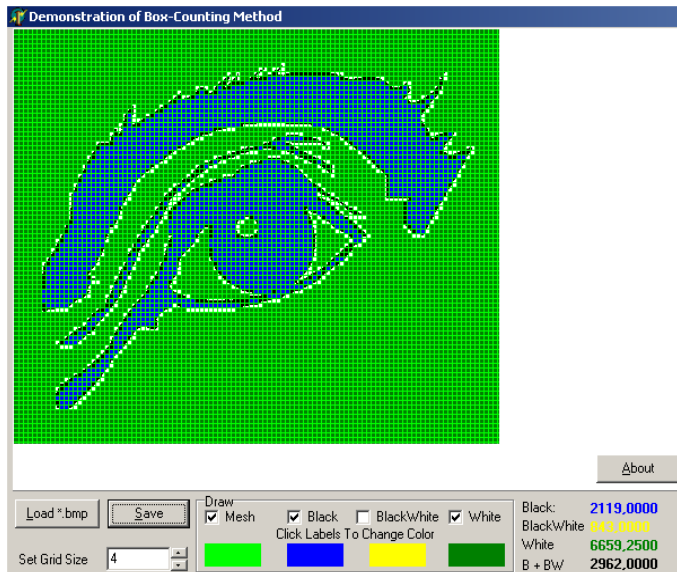


Figura 42. Recubrimiento de la imagen con una rejilla con tamaño de grid de 4 pixeles

Se trata ahora de utilizar estos conteos de boxes para hallar la dimensión fractal de la figura utilizando la expresión $NB(r) = DB(\log(1/r)) + kB$, donde r es el tamaño de cada cuadro de la cuadrícula en pixeles. La misma expresión se usa para NW y NBW . Se graficarán entonces las tres gráficas y la que tiene menor pendiente da la dimensión fractal

$\ln(1/r)$	$\ln(NB)$
-2,99573227	3,66356165
-2,89037176	3,91202301
-2,7080502	4,49980967
-2,48490665	5,02388052
-2,19722458	5,77144112
-1,94591015	6,36990098
-1,38629436	7,65869956

Figura 43. Cálculos para los pixeles de color negro (NB)

$\ln(1/r)$	$\ln(NW)$
-2,99573227	5,29756658
-2,89037176	5,54565897
-2,7080502	5,95370505
-2,48490665	6,45524117
-2,19722458	7,08380412
-1,94591015	7,63076757
-1,38629436	8,80376214

$\ln(1/r)$	$\ln(NBW)$
-2,99573227	4,98360662
-2,89037176	5,12989871
-2,7080502	5,34233425
-2,48490665	5,63835467
-2,19722458	5,95842469
-1,94591015	6,20859003
-1,38629436	6,73696696

Figura 44. Cálculos para los pixeles de color blanco (NW) y blancos con borde negro (NBW)

Las gráficas respectivas, así como su correlación se muestran a continuación.

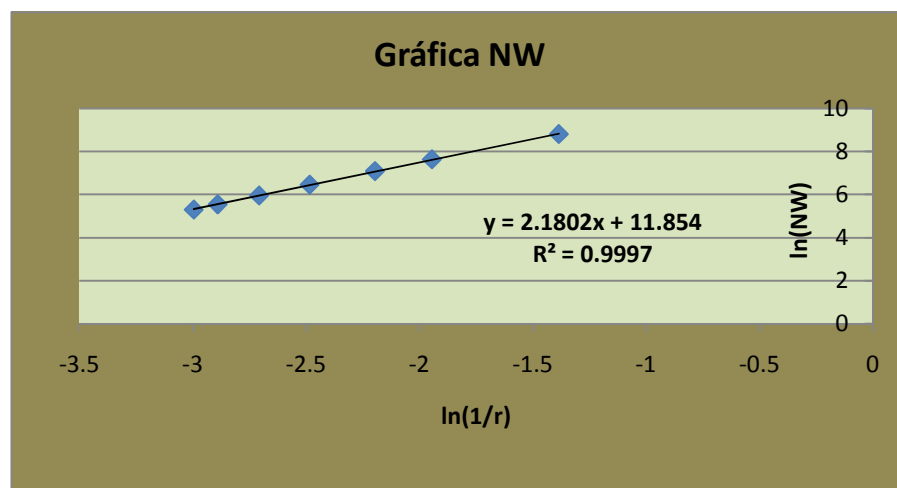


Figura 45. Gráfica para NW y línea de tendencia

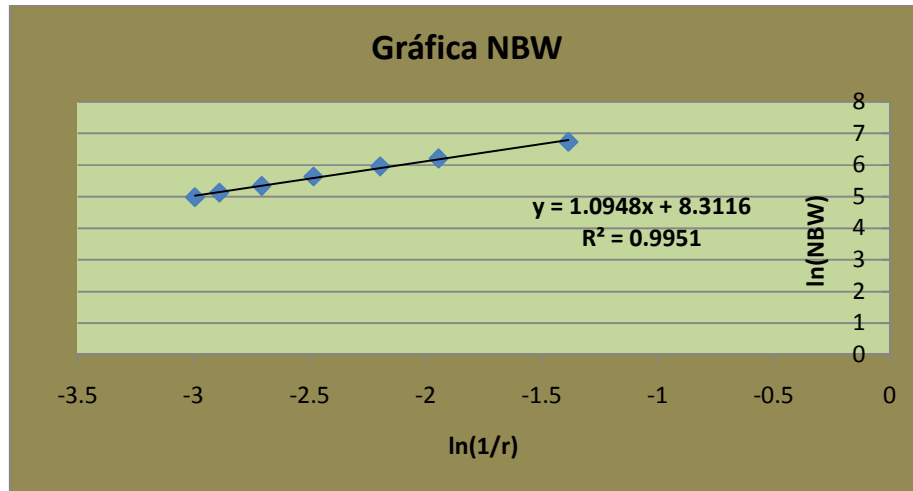


Figura 46. Gráfica para NBW y línea de tendencia

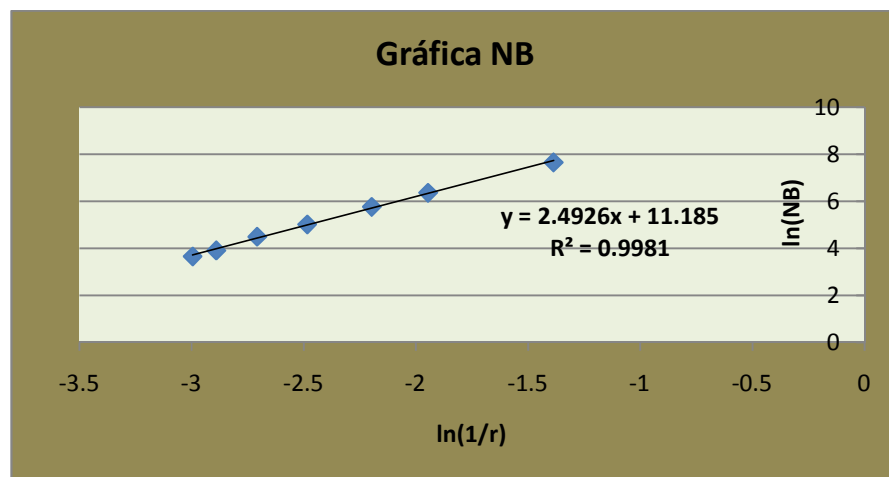


Figura 47. Gráfica para NB y línea de tendencia

La dimensión fractal encontrada es de $D=1.0948$ que corresponde a la curva NBW con menor coeficiente de dispersión R.

Se realizan los cálculos con el software gratuito HarFA y se encuentra que $D=1.2614 \pm 0.04$.

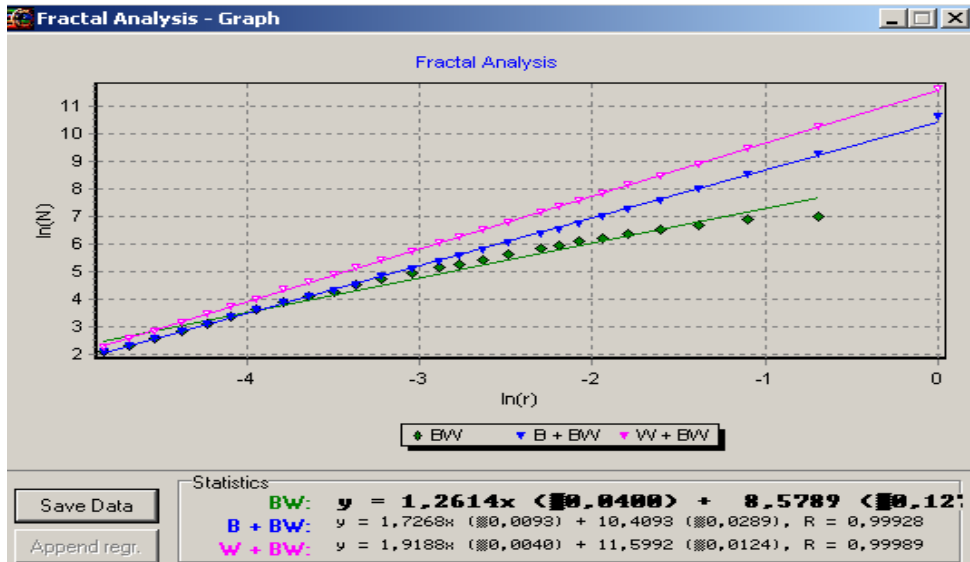


Figura 48. Cálculo de la dimensión fractal usando HarFA. $D=1.2614\pm 0.04$

La conclusión es que el valor obtenido sin HarFA tiene un error aproximado de 10% con respecto al valor arrojado por el programa. Esto se debe a que se han tomado pocos datos para realizar la estimación, pero el error es aceptable para tener una idea de la complejidad del sistema bajo estudio por lo menos con seguridad hasta la primera cifra decimal.

6.3 DISCUSIÓN DE UN ARTÍCULO EN EL CAMPO DE LA GEOMETRÍA FRACTAL²⁶

En este apartado se discute un artículo relacionado con la dimensión fractal en el campo de la Biología, donde es necesario aplicar la Ley de Zipf o para mayor generalidad el análisis de Zipf, es decir, las diversas técnicas que se pueden emplear para la estimación de la dimensión fractal y lo que significan en este contexto biológico particular

El resumen del artículo “Leyes de Estoup - Zipf – Mandelbrot y el Lenguaje Genético” se proporciona a continuación.

- **Resumen**

El código genético, podría compararse con un código de lenguaje escrito, de manera que las cuatro bases nitrogenadas, podrían equipararse con letras, los tripletes (agrupación de estas bases en grupos de tres), podrían llamarse palabras de tres letras, y el ordenamiento de tripletes que lleva la información, para el ordenamiento de aminoácidos en la proteína, podría compararse con una frase del lenguaje.

El gene, entonces, puede ser asemejado a una oración de palabras de tres letras, el cual da un sentido correcto cuando se leen sus instrucciones y son puestas en ejecución con la construcción de una molécula de proteína designada para una tarea específica en la vida de una célula.

En otras palabras, cada genoma es un texto diferente

²⁶ SASTRE VÁZQUEZ, Patricia; CAÑIBANO, Alejandra. ; BOUBEÉ, Carolina; REY, Graciela.; SUHURT, Valeria ; SCEMPIO, Viviana. Leyes de Estoup - Zipf – Mandelbrot y el Lenguaje Genético. En: Unicen.edu.ar

- **Discusión y análisis**

En este artículo los autores inician con un recuento de la discusión hecha por George K. Zipf de cómo en el lenguaje se observa que la frecuencia de una palabra es inversamente proporcional a su fila en una lista (rango), lo que se conoce hoy como Ley de Zipf; dice que el producto de la frecuencia o del rango es aproximadamente constante con independencia de los usuarios de la lengua, los tipos de texto y los idiomas.

Esta ley fue interpretada por Zipf (1949) como una evidencia de la existencia de un principio de mínimo esfuerzo en el lenguaje natural consistente en el equilibrio entre la necesidad de quien habla por utilizar la menor cantidad de palabras para expresarse y la de quien escucha que para la máxima claridad requiere la mayor cantidad de palabras diferentes. Es decir, que en el lenguaje natural es más probable encontrar con mayor frecuencia palabras cortas, como artículo, que palabras largas.

Los autores, abordan luego la modificación de la Ley de Zipf hecha por Mandelbrot (1954) quien sugirió que la noción esencial era la aparición aleatoria de espacios en blanco entre las palabras, con lo cual el autor del texto es considerado como un dispositivo estocástico que genera sucesiones largas de cadenas y por tanto sus palabras siguen la ley de rango frecuencia.

Pero, Mandelbrot así como Zipf estaban conscientes que los idiomas evolucionan hacia un estado de máxima eficacia y por tanto no siempre es posible encontrar que las palabras más cortas sean las más frecuentes porque las letras (o fonemas) no son las unidades apropiadas por las que se deba medir una palabra de allí que Mandelbrot haga la hipótesis que la estructura de discurso de palabra está influenciada por algún otro de código.

En la actualidad la Ley de Zipf ha sido abordada desde la teoría de las probabilidades y han llegado a una explicación clara que apunta a que las curvas de Zipf son solo una manera para expresar una consecuencia correspondiente a una fuente del mensaje a su vida como un proceso estocástico; es decir, que es una consecuencia de la complejidad de un sistema estocástico caótico. Para Zipf el exponente del rango era aproximadamente -1 para todos los casos prácticos con excepción del conteo de las frecuencias del lenguaje de los esquizofrénicos para los cuales encontró un exponente (pendiente) ligeramente mayor que -1 (-1.04).

Esto lleva a Mandelbrot a generalizar la Ley de Zipf estudiando las variaciones del exponente (pendiente) estableciendo que esta varía inversamente a la diversidad del texto.

Explica su modificación la ley de rango frecuencia considerando el costo de comunicación de las palabras en términos de las letras que contienen y de los espacios que las separan, de manera que si el rango crece esto implica que existe una desagregación suficiente que garantiza el número de letras como su frecuencia sea numeroso y por tanto la gráfica en papel Log- Log de la expresión matemática de la ley se asemeja cada vez a una línea recta.

Estas ideas son extendidas para tratar las instrucciones genéticas almacenadas en el ADN como un lenguaje genético, las letras utilizadas para formar las palabras en este lenguaje, son las bases nitrogenadas Adenina, Citocina, Guanina y Timina, las cuales tienen un apareamiento definido ya que solo puede darse entre Adenina y Timina y entre Citocina y Guanina.

Se cita la definición de lenguaje genético de Ratner²⁷ (como un conjunto de estados de codificación de la memoria genética, que ha existido, existe o probablemente puede existir en la naturaleza, en los sistemas genéticos de la materia viva en la tierra”).

Así, el código genético del ADN se puede describir como un lenguaje genético que emplea un alfabeto de cuatro diferentes nucleótidos que son las letras del ADN, mediante las cuales se puede conformar veinte palabras de tres letras cada una (codones).

Cada una de estas palabras corresponde a uno de los aminoácidos esenciales necesarios para la síntesis de cadenas polipeptídicas de proteína, mediante las cuales pueden escribirse un número ilimitado de frases (proteínas) para conformar textos diferentes (cada una de los individuos genéticamente irrepetibles).

Por tanto, un gene que codifica una proteína determinada, está compuesto de una cadena de palabras (codones) de tres letras de código cada uno, las cuales son transcritas por los mecanismos de traducción de la célula a una cadena polipeptídica que contiene los correspondientes aminoácidos.

²⁷ RATNER, H. Progress in Theoretical Biology. Londres: Academic Press.1974

El gene se asemeja entonces a una oración de palabras de tres letras que da sentido correcto cuando al leerse sus instrucciones y ser puestas en ejecución generan la construcción de una molécula de proteína diseñada para una tarea específica en la vida una célula(garantizando que cada genoma es un texto diferente).

Se debe tener en cuenta que el ADN esta en el núcleo de la célula pero el encargado de transmitir la información a la mitocondria es el mARN (ARN mensajero), el cual está constituido por Guanina, Citocina, Adenina y Uracilo, que se encarga de transmitir la información de la timina, con lo cual se puede decir que el Uracilo y la timina son sinónimos.

Los autores afirman que las reglas para relacionar secuencias de nucleótidos en el RNA con la secuencia de aminoácidos en la proteína son parecidas en todos los seres vivos con pequeñas excepciones, siendo los codones del m RNA contiguos, no superpuestos y sin separación por espaciadores. Luego se puede afirmar que el alfabeto genético para el ADN es la tétrada G,C,T,A; y para el RNA lo es la tétrada GCUA, donde G denota la Guanina, C la Citocina, A la Adenina, T la Timina y U el Uracilo.

Para discutir los resultados expuestos por los autores es necesario recurrir a la combinatoria elemental.

Se sabe que cada codón está conformado por tres aminoácidos diferentes de los cuatro posibles; así que existen para cada posición dentro del codón cuatro posibilidades. Aplicando la regla de la multiplicación esto quiere decir que hay $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ posibles combinaciones o codones. Sin embargo los aminoácidos básicos son 20 y no 64, lo que indica que el código genético posee redundancia es decir "sinónimos". Esto quiere decir que el código es degenerado, es decir que un aminoácido es especificado por más de un codón, sin presentarse codones ambiguos (cada uno especifica un solo aminoácido).

Luego, podría pensarse, ya que existen cuatro codones con funciones especiales, que en los 60 restantes cada tres especifican un aminoácido, es decir que la frecuencia de repetición es la misma para cada aminoácido. Sin embargo, es interesante notar que esto no es cierto como se puede observar en la Tabla siguiente tomada del artículo que está en discusión y elaborada por los autores de dicho documento

Tabla 2. Diccionario del código genético

Diccionario del código genético

	CODON	AMINOACIDO		CODON	AMINOACIDO
1	UUA	Leucina	33	UAU	Tirosina
2	UUG	Leucina	34	UAC	Tirosina
3	CUU	Leucina	35	UAA	Terminación
4	CUC	Leucina	36	UAG	Terminación
5	CUA	Leucina	37	UGA	Terminación
6	CUG	Leucina	38	CAU	Histidina
7	AUU	Isoleucina	39	CAC	Histidina
8	AUC	Isoleucina	40	CAA	Glutamina
9	AUA	Isoleucina	41	CAG	Glutamina
10	GUU	Valina	42	AAU	Asparagina
11	GUC	Valina	43	AAC	Asparagina
12	GUA	Valina	44	AAA	Lisina
13	GUG	Valina	45	AAG	Lisina
14	UCU	Serina	46	GAU	Ácido Aspártico
15	UCC	Serina	47	GAC	Ácido Aspártico
16	UCA	Serina	48	GAA	Ácido Glutámico
17	UCG	Serina	49	GAG	Ácido Glutámico
18	AGU	Serina	50	UGU	Cisteína
19	AGC	Serina	51	UGC	Cisteína
20	CCU	Prolina	52	UGG	Triptofano
21	CCC	Prolina	53	CGU	Arginina
22	CCA	Prolina	54	CGC	Arginina
23	CCG	Prolina	55	CGA	Arginina
24	ACU	Treonina	56	CGG	Arginina
25	ACC	Treonina	57	AGA	Arginina
26	ACA	Treonina	58	AGG	Arginina
27	ACG	Treonina	59	UUU	Fenilalanina
28	GCU	Alanina	60	UUC	Fenilalanina
29	GCC	Alanina	61	GGU	Glicina
30	GCA	Alanina	62	GGC	Glicina
31	GCC	Alanina	63	GGA	Glicina
32	AUG	Metionina	64	GGG	Glicina

Además, es importante notar que el cambio de solo uno de los aminoácidos dentro de un codón da lugar a nueve nuevos codones porque hay $3 \times 3 = 9$ posibilidades, tres maneras de cambiar una posición del codón y tres posibilidades por posición.

En realidad solo 61 de los 64 codones especifican aminoácidos ya que los tres restantes son señales de terminación de la traducción, por tanto una mutación aleatoria ocasionará $61 \times 9 = 549$ posibles alteraciones que pueden clasificarse en sinónimos, no sinónimos, con sentido erróneo o mal sentido, y sin sentido. Se puede al efecto observar la Tabla suministrada por los autores del artículo tomada de Li & Graur (1999)

Tabla 3. Mutaciones por cada posición del codón

Tabla 3: Mutaciones por cada posición del codón.
Li and Graur(1999)²

TIPO	NUMERO	PORCENTAJE
En todos los Codones	549	100
Sinonimas	134	25
No sinonimas	415	75
Mal sentido	392	71
Sin sentido	23	4
Primera Posición	183	100
Sinonimas	8	4
No sinonimas	175	96
Mal sentido	166	91
Sin sentido	9	5
Segunda Posición	183	100
Sinonimas	0	0
No sinonimas	183	100
Mal sentido	176	96
Sin sentido	7	4
Tercera Posición	183	100
Sinonimas	126	69
No sinonimas	57	31
Mal sentido	50	27
Sin sentido	7	4

El artículo demuestra que una gran variedad de fenómenos naturales se puede definir por medio de un comportamiento de ley de potencia de sus parámetros es decir por la propiedad de escala.

Esta propiedad es omnipresente en la naturaleza y se puede retomar su rastro, se considera por ejemplo las leyes de Kepler o la ley de gravitación universal de Isaac Newton, eventos estos del siglo IX. También se encuentra en las leyes de potencias que describen los fenómenos presentados en diversos sistemas alrededor de puntos críticos, sean sistemas puramente geométricos redes aleatorias, partículas como líquidos o imanes. La omnipresencia de estas leyes ha originado el interés sobre la geometría fractal de la naturaleza.

Sin embargo uno de los misterios más sobresalientes y que como biólogos revisten interés es el que se relaciona con los genomas de los organismos eucarióticos, ya que exhiben la propiedad que gran parte de su DNA no se utiliza para codificar proteína o RNA. En el genoma humano este ADN "basura" constituye el 97% de la longitud total del genoma que es igual a 3 mil millones de nucleótidos denominados también pares de bases; así el papel del DNA que no codifica no se comprende lo suficiente aunque parece que evoluciona de acuerdo a sus propias leyes que no se restringen a una función biológica específica, dado que esas leyes se fundamentan sobre las probabilidades de mutaciones diversas.

El artículo es una afirmación que es posible aplicar el análisis de correlación a las secuencias de ADN, ya que para un físico, un biólogo o un matemático una secuencia de ADN se asemeja a un texto escrito en un lenguaje desconocido, el cual se codifica en un alfabeto de cuatro letras: A,C,G,T. Cada letra en este texto corresponde a una base de un par de bases de ADN.

El problema tratado en el artículo se puede abordar mediante la consideración del problema implicado al tratar de responder que fracción o frecuencia de cada letra en este texto existe con respecto al total. Este asunto es fácil de responder hoy cuando se ha realizado la secuenciación de todo el genoma humano y se puede afirmar que la frecuencia del total para la Adenina y la Timina es de aproximadamente el 29.5% y las frecuencias respectivas de la Guanina y la Citocina son alrededor del 20.5%.

En general la estructura compleja de mosaico del DNA es conocida y compuesta de elementos estructurales tales como isocores, secuencias intergénicas, exones, intrones y repetidores en tándem etc., que poseen diferentes tamaños de distribución, frecuencias de nucleótidos y leyes de evolución molecular, de forma que las correlaciones en la secuencia de ADN poseen estructuras muy complejas son diferentes para las diversas especies y no se pueden definir por medio del exponente de una ley de potencias universal. Sin embargo la caracterizaciones en la secuencia de ADN son de importancia para un biólogo que se propone comprender la evolución molecular de la secuencias de ADN y una de las herramientas fundamentales más simples para tener una idea que pueda explicar las diferencias observadas en las distribuciones en las palabras de n letras en ADN codificado y no codificado.

6.4 APLICACIÓN A LA ECOLOGÍA DEL PAISAJE

Se estudiaron dos bosques situados en la zona de la parte media de la cuenca del río Palacé (paisaje regional-ecosistema) entre los municipios de Popayán, Totoró y Cajibío, con ubicación geográfica $2^{\circ} 31' 22.23''$ N y $76^{\circ} 31' 06.74''$ O y una elevación de 2004 m.

Se dibujaron los contornos de dos bosques, uno abierto y otro cerrado utilizando la opción de ruta de Google Earth. Se exportó a Paint y se selección el contorno con la selección e forma libre; luego se guardó como imagen en formato .bmp monocromático para que se pudiera realizar el cálculo computarizado de la dimensión fractal utilizando el software denominado Fractalise.

El cálculo de la dimensión fractal utiliza la técnica de box Counting para mirar que tan “rugosa” es la curva del contorno de los dos bosques. Se espera que en un bosque denso, cerrado en el que no existen intervenciones o actividad humana exista gran cantidad de irregularidades en el contorno porque hay mucha variabilidad del ecosistema, con lo cual la dimensión fractal del contorno de este bosque debe ser mayor a la de un bosque abierto donde es evidente que existe actividad antrópica y las fronteras son más uniformes y definidas, es decir, son más regulares.

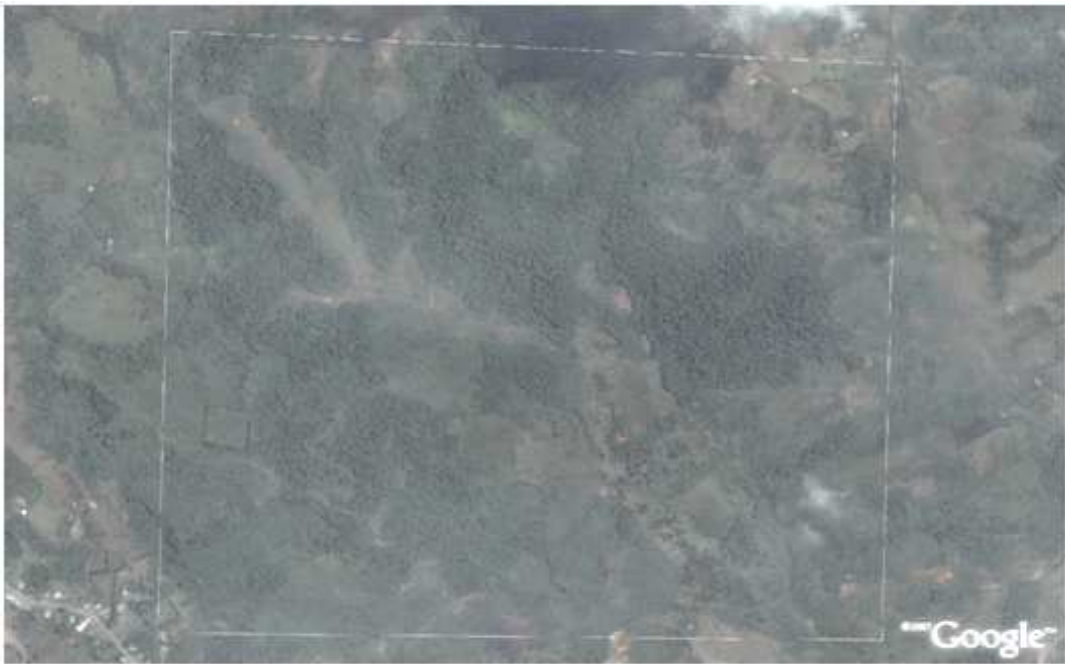


Figura 49. Área de estudio capturada con Google Earth



Figura 50. Contorno de bosque abierto



Figura 51. Contorno de bosque denso



Figura 52. Contorno bosque abierto en .bmp monocromático



Figura 53. Contorno de bosque denso en .bmp monocromático

Al exportar los contornos monocromáticos en .bmp a Fractalise, se utiliza este programa para generar la gráfica en log-log característica del análisis de Zipf, dando click en analyse, box, box size exponencial2 y en algoritmo se selecciona grid y se acepta.

Fractalise genera la curva de Zipf e indica en el gráfico la dimensión fractal y el coeficiente de correlación para indicar respectivamente la complejidad de la curva y que tan bueno es el ajuste utilizado para aproximarla.

Para el bosque denso se encuentra que la dimensión fractal es de 1.776 con un coeficiente de correlación $c=-0.11$; para el bosque abierto, la dimensión fractal fue de 1.646 y el coeficiente de correlación fue de $c=-0.15$.

Las gráficas generadas por Fractalise para estos dos bosques se pueden ver abajo.

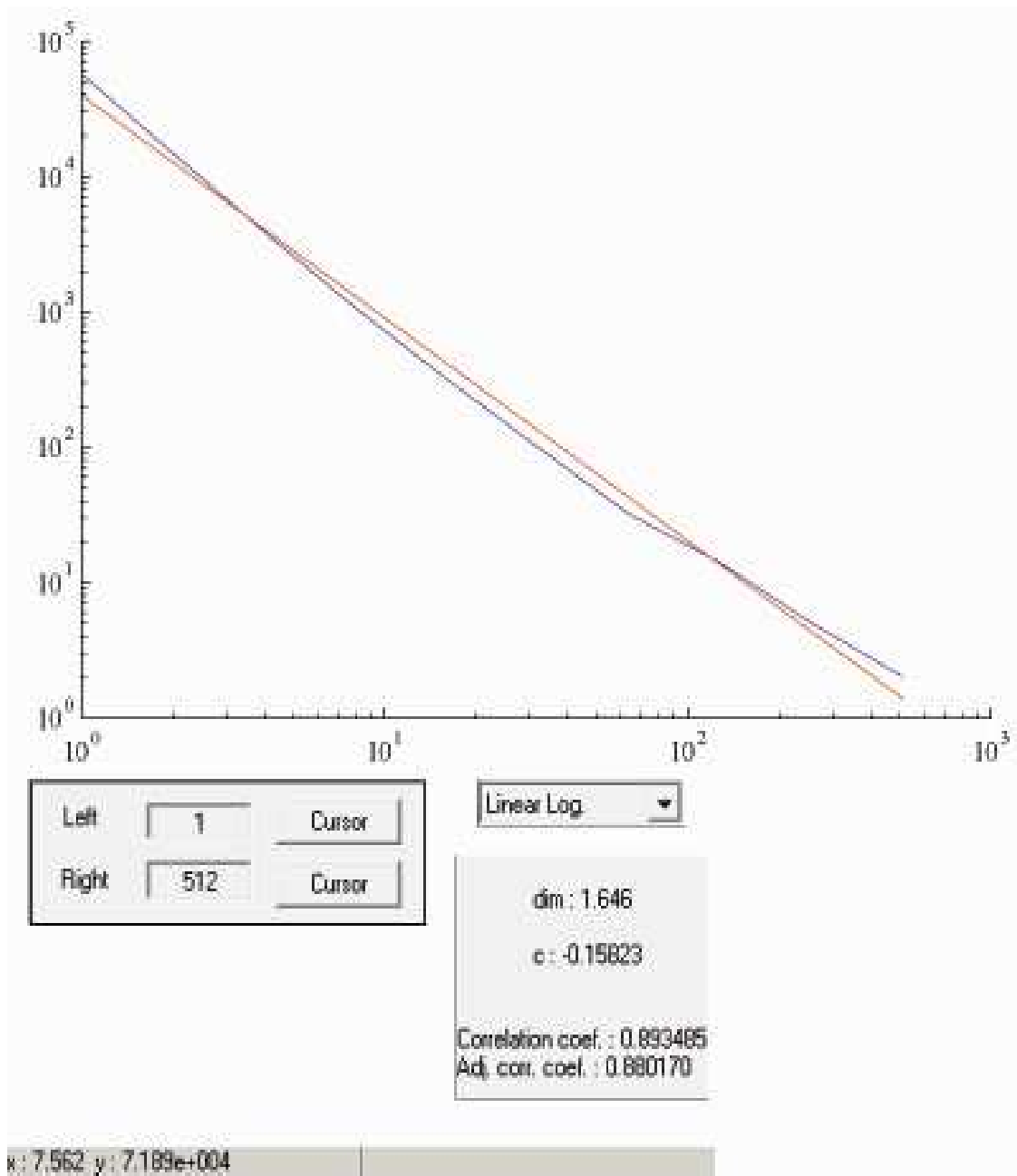


Figura 54. Representación del análisis de Zipf para el bosque abierto generada con Fractalise. La línea de color rojo define estadístico de Zipf y la línea azul los datos experimentales.

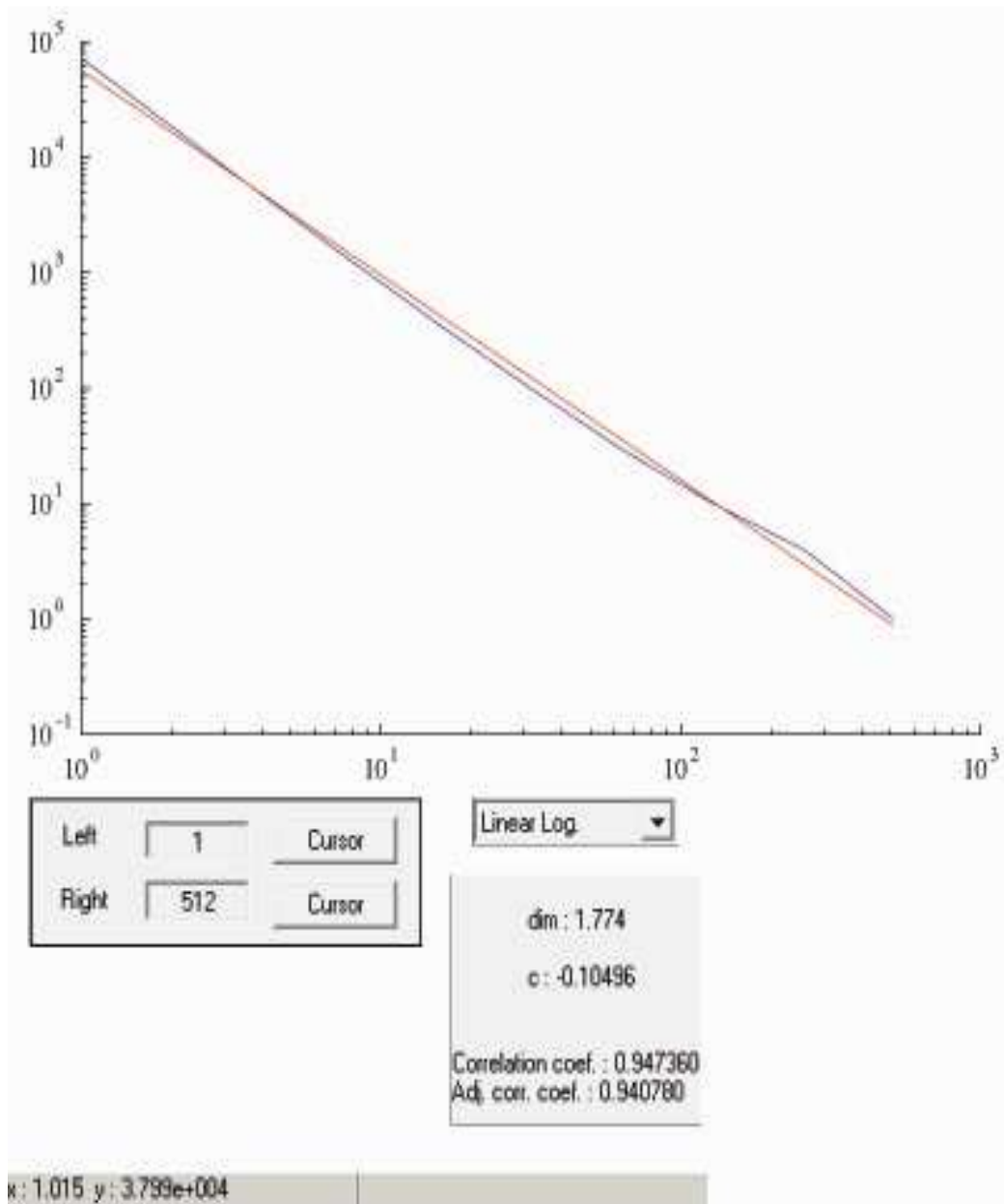


Figura 55. Representación del análisis de Zipf para el bosque denso generada con Fractalise. La línea de color rojo define el estadístico de Zipf y la línea azul los datos experimentales.

Fractalise realiza sus cálculos con base en el recubrimiento de las imágenes utilizando la técnica de Box Counting como se muestra abajo

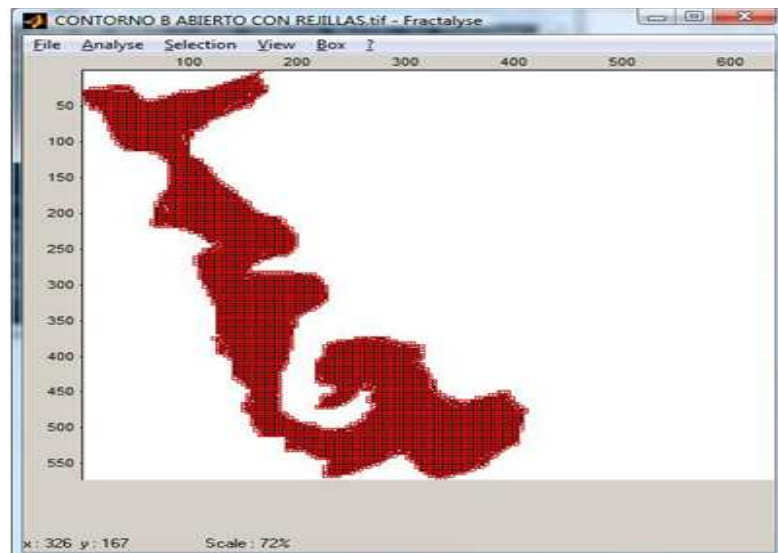


Figura 56. Técnica de Box Counting usando la grid de Fractalise bosque abierto

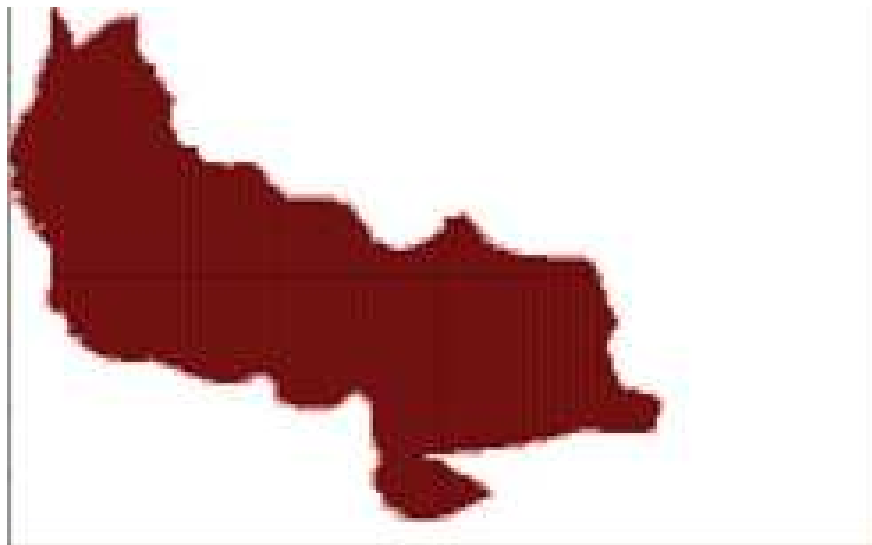


Figura 57. Técnica de Box Counting usando la grid de Fractalise bosque denso

CONCLUSIONES

- El análisis de Zipf es una herramienta que es útil en gran variedad de campos de la actividad humana y en especial en Biología al ser adecuado para estudiar la fractalidad del orden natural.
- En Biología, donde muchos sistemas obedecen el concepto de SOC consecuencia de los sistemas caóticos complejos y de fronteras con muchos puntos críticos, el análisis de Zipf es un auxiliar poderoso porque puede aplicarse utilizando técnicas adecuadas a cada situación como por ejemplo el box Counting.
- El análisis de Zipf permite determinar la complejidad de un sistema biológico a través del cálculo sencillo de la dimensión fractal la cual se puede determinar a partir de la pendiente de la curva de Zipf en escala log-log
- Un caso clásico de aplicación el análisis de Zipf es la denominada Ley de Zipf la cual surge en el campo de la Lingüística develando la relación entre la complejidad textual en función de una ley de potencias entre la frecuencia de aparición de las palabras en el texto y el rango de las mismas. Para resaltar este hecho se aplicó el análisis de Zipf al texto del cuento de Blanca Nieves, utilizando TextStat 2.0 y Excel
- La técnica del Box Counting se ilustró aplicándola a una imagen particular (un ojo y su entorno) obteniendo de forma simple y operativa la dimensión fractal con el empleo de software como Excel, BCmet y HarFA.
- Se aplicó el análisis de Zipf a un caso en Ecología del Paisaje, utilizando el análisis box Counting de las fronteras de dos bosques, uno abierto y otro denso o cerrado de una región de la geografía caucana y se determinó la dimensión fractal con Fractalise. Se pudo constatar que el bosque denso sin intervención antrópica posee una dimensión fractal superior a la de un bosque menos denso, más abierto, con intervención antrópica y menos biodiversidad

- Se discutió el artículo “Leyes de Estoup - Zipf – Mandelbrot y el Lenguaje Genético” en el cual se plantea la posibilidad de interpretación del código genético utilizando la Ley de Zipf suponiendo que existen redundancias de codones y contribuciones de las mutaciones. El análisis de Zipf demuestra que en efecto existe una proporción de frecuencias similar para los pares base A y T, y de igual forma para los G y C, pero que no existe explicación adecuada en el código genético correspondiente al denominado ADN “basura”
- El análisis de Zipf demuestra ser una herramienta poderosa en diversos campos de las Ciencias Biológicas y es un llamado a los biólogos a que se preocupen por utilizarlo en su trabajo cotidiano.
- El valor numérico de dimensión fractal más alto (1.774) , corresponde al bosque denso lo que revela un comportamiento más aleatorio y correspondería a una más alta variabilidad de especies, sin la intervención antrópica demostrando que mantiene sus condiciones y procesos naturales.

BIBLIOGRAFÍA

- BAK P Per. How Nature Works. Nueva York: Springer, 1996, p 20
- CHUBIECO, E. Teledetección ambiental. La observación de la tierra desde el espacio. Barcelona: Ariel. 2002
- ETTER, A. Caracterización ecológica de dos reservas nacionales naturales de la Amazonia Colombiana. En: Ambiente y desarrollo. (2001); p.1-18.
- FALCONER, Kenneth. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. England, West Sussex: Wiley,2003
- FARINA,A. Principios y métodos en ecología del Paisaje.Holanda: Kluwer.2000
- FEDER J. Fractales. Nueva York: Plenum. 1988
- FROHN.R.C. Cesando remoto para la ecología del paisaje: Nuevos indicadores métricos para el modelado y la evaluación de ecosistemas. New York: Lewis Publishers.1998
- GERGEL,S.E;TURNER, M.G. Aprendiendo ecología del paisaje: una guía práctica a los conceptos y las técnicas. New York: Springer.2002
- GONZÁLEZ, Virgilio; GUERRERO, Carlos. Fractales, Fundamentos y aplicaciones. Ingenierías. Enero-Marzo, 2001, Vol IV, No 10.
- GONZÁLEZ, Virgilio; GUERRERO, Carlos. Fractales: Fundamentos y aplicaciones. Ingenierías. Enero-Marzo, 2001, Vol. IV, No 10.
- HAUSDORFF, F. Dimension aus äusseres Mass.Matematische Annalen 79. 1919, p 157-179
- HAWKINGS, John A. Efficiency and Complexity in Grammars. UK: Oxford University Press,2004, p 27,42
- HUREWICZ, Witold; WALLMAN, Henry. Dimension Theory. Princeton University Press, N.J., 1941. p. 3-8
- Instituto de Investigaciones de Recursos Biológicos Alexander Von Humboldt (IAVH)

- IVANCEVIC, Vladimir; IVANCEVIC, Tijana. Complex non linearity. Chaos, phase transitions, topology change and Path integrals. Germany: Berlin, Springer. 2008, p. 1-6
- LIEBOVITCH, Larry. Fractals and Chaos Simplified for the Life sciences .Oxford University Press,1998, p 2-6
- LINDENMAYER, D.B. (1994). Wildlife corridors and the mitigation of logging impacts in wood-production forests in south-eastern Australia: a review. En: Wildlife Research Vol. 21. p. 323–340.
- LOSA, Gabriele; MERLINI, Danilo ; NONNENMACHER, Theo; WEIBEL, Ewald. Fractals in Biology and Medicine, vol IV. Bonn: Birkhäuser, 2005, p 6-10
- MANDELBROT B. Variación de ciertos precios especulativos. Revista de negocios de la Universidad de Chicago 36. 1963, p 307
- MANDELBROT, Benoit. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1983, p 364
- MONTEMURRO, Marcelo A. Beyond the Zipf-Mandelbrot Law in quantitative linguistics. Arxiv: cond-math/0104066 v 2, 2001.
- MUGICA. Integración territorial de espacios naturales protegidos y conectividad ecológica en paisajes mediterráneos. Disponible en: http://www.juntadeandalucia.es/medioambiente/web/Bloques_Tematicos/Publicaciones_Divulgacion_Y_Noticias/Documentos_Tecnicos/Integracion_y_conectividad/PDFs
- NOSS, R. F. Indicators for monitoring biodiversity: a hierarchical approach. En: Conservation Biology. Vol. 4, No 4. 1990 p.355.364.
- ORDOÑEZ DIAZ, María Cristina. Estudio espacio temporal del proceso de fragmentación sobre la cobertura boscosa en la cuenca del río Palacé. [Trabajo de Grado]. Popayán: Universidad del Cauca, Departamento de Biología ; 2008.
- PER, Bak P. How Nature Works. New York: Springer. 1996, p 22
- RAUP D.M. Extinción Biológica en la Historia de la Tierra. Science 231. 1986, p 1528
- SEPKOSKI J Jr. Diez años en la Biblioteca: nuevos datos confirman patrones paleontológicos. Paleobiología 19. 1993, p 43

SEPKOSKI J JR. Diez años en la Biblioteca: nuevos datos confirman patrones paleontológicos. *Paleobiología* 19. 1993, p 43

SORNETTE, D. *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos , fractals, self-organization and disorders: concepts and tools.* Germany: Berlin. Springer,2006, p 395-435