ÁLGEBRAS GRADUADAS VÍA DERIVACIONES

MIGUEL ANGEL BERNAL ÑAÑEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN CAUCA

2023

ÁLGEBRAS GRADUADAS VÍA DERIVACIONES

MIGUEL ANGEL BERNAL ÑAÑEZ

Trabajo de grado

Directora.
Dra. SAMIN INGRITH CERON BRAVO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN CAUCA

2023

Nota de aceptación

Firma del jurado

Dr. Carlos Andrés Martos Ojeda.

Firma del jurado

Dr. Wilson Arley Martinez Flor.

Firma de la directora

Dra. Samin Ingrith Ceron Bravo.

Firma del coordinador de Matemáticas

Dr. Carlos Andrés Arias Torres.

Lugar y fecha de sustentación: Popayán 16 de Marzo de 2023.

AGRADECIMIENTOS

Primero quisiera agradecer a mis padres Luis de Jesus Bernal Pinzon y Amparo Ñañez Urquina, ya que son los que me han dado el apoyo económico para poder realizar esta carrera y apoyo mental para esforzarme al máximo afrontando los retos que esta carrera abarca e intentar conseguir esta meta. Espero poder retribuirles el apoyo brindado. En segundo lugar agradecer al resto de mi familia que también han creído en mi, lo cual ha sido fundamental en mi desarrollo universitario porque me he sentido respaldado en todo momento.

También quisiera agradecer a mis amigos, ya que la compañía de ellos también es importante para afrontar este reto, por la ayuda que se ofrece al estudiar en compañía y por los buenos tiempos en camaradería los cuales ayudan bastante para despejar la mente cuando uno se siente triste, ya sea por situaciones de la vida o malos resultados en los parciales, la compañía levanta mucho el ánimo para seguir adelante a pesar de las caídas.

En tercer lugar agradecer a la planta de profesores, ya que fueron los guías en este proceso de formación académica con su labor, paciencia y esfuerzo enseñan sus conocimientos para nuestro aprendizaje incluso sacando tiempo de ellos para resolver dudas de los estudiantes y gracias a los profesores he aprendido muchas cosas a través de esta gran carrera que elegí por amor a las matemáticas y por ellos no me arrepiento de dicha elección.

Por último agradecer a mi directora Samin Ingrith Ceron Bravo y al profesor Wilson Arley Martinez Flor, ya que ellos me han guiado con paciencia y esfuerzo para culminar este trabajo de grado y dar este paso tan importante en mi vida que marcará mi futuro tanto en mi vida profesional como en mi vida cotidiana. Por sus orientaciones en diferente cursos obtuve el gusto por está rama de la matemática la cual estoy orgulloso.

GLOSARIO Y NOTACIÓN

$\mathbb{K}[x]$ Anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$.

$\mathbb{R}[x]$ Anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$.

$M \otimes_R N$ Producto tensor bajo el anillo R entre los módulos M y N.

Δ Grupo abeliano, con función de paridad, es decir que pueda decidir si un elemento es par o impar, normalmente se puede sustituir por $\mathbb{Z}$.

$V = \bigoplus_{i \in \Delta} V^i$ Módulo graduado indexado por Δ.

$Hom_R(V, W)$ Transformaciones lineales entre V y W módulos bajo la acción del anillo R.

$|v|$ Grado de un elemento de un módulo graduado.

f^j Función j-ésima de una familia de funciones entre módulos graduados o álgebras graduadas.

$|f|$ Grado de una función.

$A = \bigoplus_{i \in \Delta} A^i$ Álgebra graduada indexada por Δ.

A^α Álgebra que pertenece a la familia de A que se encuentra en la posición α.

$|a|$ Grado de un elemento de un álgebra graduada.

$Lin_R(M \otimes N, Q)$ Funciones lineales de $M \otimes N$ en Q.

$Bil_R(M, N; Q)$ Funciones bilineales de $M \times N$ en Q.

$Hom(V, V)$ Funciones lineales de V en V puede ser denotada por $End(V)$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ Extensión del campo $\mathbb{Q}$ dada por las raíces del polinomio $x^2 - 2$.

$[\ ,\ ]$ Corchete de Lie o producto conmutador, se usa también como corchete de Lie graduado o producto conmutador graduado.

E Usualmente se usa para denotar un álgebra de Lie graduada.

$gl(V)$ Es el álgebra resultante de aplicar el corchete de Lie graduado a $End(V)$.

$\boldsymbol{ad_a}$ Función adjunta de a.

$sl(2, \mathbb{R})$ Álgebra de Lie de matrices de tamaño 2×2, tal que su traza es cero.

$sl(3, \mathbb{R})$ Álgebra de Lie de matrices de tamaño 3×3, tal que su traza es cero.

$C(A)$ Centro del álgebra graduada A.

$< X >$ Generado de X.

$tr(M)$ Traza de una matriz M.

$\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$ Álgebra de matrices diagonales de tamaño $n \times n$.

RESUMEN

En este documento inicialmente se introduce los conceptos de módulos, álgebras y álgebras de Lie, enunciando algunas de sus propiedades, con el fin de generalizar estas definiciones en el sentido graduado, con este propósito se introduce la definición de módulo graduado, seguidamente se particulariza a la definición de espacio vectorial graduado para llegar a la definición de álgebra graduada, específicamente álgebras de Lie graduadas, también se encuentran ejemplos con ciertas construcciones.

Seguidamente se presenta la definición de derivación sin graduar y derivación graduada, funciones que se aplicarán sobre álgebras graduadas objeto principal de estudio de este trabajo, con el fin de construir una álgebra graduada a través de una derivación.

Finalmente, se analizan álgebras graduadas sobre campos de característica dos que nos brindan nuevas definiciones como débil conmutatividad, débil anticonmutatividad, fuerte conmutatividad, fuerte anticonmutatividad, derivación débil y derivación fuerte. Una vez estudiados estos conceptos, se analizan algunas derivaciones sobre estas álgebras y se revisan sus propiedades.

Palabras Clave: Álgebra graduada, Álgebra de Lie graduada, Derivación.

ABSTRACT

In this document, we start to speak about modules, algebras, and Lie algebras, enunciating some of its properties, with the objective of generalize this definitions on the subject graduate, so we introduce the definition of graded modules particularizing to graded vectorial space with the objective of arrive at the definition of graded algebras specifically graded Lie algebras, examples are found with certain constructions.

Next, the definition of ungraded and graduated derivation is presented, functions applied to graded algebras that are objects of study of this work with the purpose of build to graded algebra through a derivation

Finally, graded algebras are analyzed on fields of characteristic two which give us new definitions how weak commutative, weak anticommutative, strong commutative, strong anticommutative, weak derivation and strong derivation. Once they studied these concepts, some derivations on these algebras were analyzed and their properties are checked.

Keywords Graduate algebra,Graduate Lie algebra, Derivation

INTRODUCCIÓN

Este documento inicia con algunos preliminares que se relacionan con la definición de **álgebra** que es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, provisto de una aplicación bilineal llamada producto. En el desarrollo de este trabajo se pretende construir un **álgebra graduada** de tipo Δ sobre un campo $\mathbb{K}$ que es un espacio vectorial graduado $A = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} A^{\alpha}$ sobre $\mathbb{K}$, al cual se le da una estructura algebraica compatible con su estructura bajo un producto bilineal tal que $A^{\alpha}A^{\beta} \subseteq A^{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \Delta$, con Δ un grupo abeliano.

Esta construcción se realiza a través de una **derivación** que sobre un álgebra A es un homomorfismo $D : A \longrightarrow A$ tal que $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ para todo $a, b \in A$ y en el caso graduado una **derivación graduada** sobre un álgebra graduada A es una transformación lineal de grado k tal que $D(ab) = D(a)b + (-1)^{k|a|}aD(b)$ para todo $a, b \in A$.

Para este fin se estudia el concepto de álgebra de Lie graduada. Particularmente la función adjunta se introduce sobre álgebras de Lie graduada. Finalmente exploran álgebras graduadas sobre campos de característica dos y se introducen los conceptos de débil y fuerte derivación.

El trabajo de grado está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presentan definiciones sobre módulos y álgebras sin graduar, como también de funciones bilineales, teniendo en cuenta la definición de módulo y sus propiedades dadas en [2].

En el segundo capítulo se estudian álgebras graduadas, identificando primero módulos graduados y sus propiedades dados en [1, 6]. Este último brinda propiedades de álgebras graduadas sobre campos de característica 2 y a su vez la definición de álegbra de Lie graduada. Estos son elementos básicos para las construcciones que aquí se presentan.

En el tercer capítulo se estudia derivación graduada y sin graduar, una vez definidos se construyen ejemplos y se determinan si algunas de estas derivaciones aplicadas a álgebras graduadas sobre campos de característica 2 son fuertes o débiles según [6].

TABLA DE CONTENIDO

1. PRELIMINARES

En este capítulo se abordan conceptos y propiedades acerca de módulos, álgebras y algunas funciones especiales que son necesarias para luego introducir estos tópicos a nivel graduado.

1.1. Módulos

Los módulos se pueden ver como una generalización de espacios vectoriales, ya que en módulos se define una acción de un anillo R sobre un conjunto, la cual cumple ciertas propiedades y si R es un campo las propiedades de módulos son las mismas que las de espacios vectoriales.

Definición 1.1.1. *Sea $(R, +_R, *)$ un anillo (no necesariamente conmutativo ni con 1). Un **R-Módulo a izquierda** es un conjunto M junto con*

a. *Una operación binaria suma $(+)$ en M, con la cual M es un grupo abeliano.*

b. *Una acción de R en M, esto es*

$$\begin{aligned} \cdot\ :\ R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longrightarrow rm \end{aligned}$$

tal que satisface las siguientes condiciones

- ***b.1.*** $(r + s)m = rm + sm$ *para todo* $r, s \in R$ *y para todo* $m \in M$.
- ***b.2.*** $(r * s)m = r(sm)$ *para todo* $r, s \in R$ *y para todo* $m \in M$.
- ***b.3.*** $r(m + n) = rm + rn$ *para todo* $r \in R$ *y para todo* $m, n \in M$.

Si el anillo R tiene 1 y cumple la condición adicional ***b.4*** *entonces M se llama módulo unitario*

- ***b.4*** $1m = m$ *para todo $M \in A$.*

Análogamente se define un R-Módulo a derecha y además si R es conmutativo se tiene que M es R-módulo a derecha y a izquierda bajo la acción $rm = mr$.

en efecto, cumple la condición **a** de la **Definición 1.1.1**, por ser R-módulo a izquierda.

b.1 Sean $r, s \in R$ y $m \in M$, entonces.

$m(r + s) = (r + s)m$ por acción.

$= rm + sm$ por ser R-módulo a izquierda.

$= mr + ms$ por acción. Así se cumple **b.1** de la **Definición 1.1.1**.

b.2 Sean $r, s \in R$ y $m \in M$, entonces.

$m(r * s) = (r * s)m$ por acción.

$= r(sm)$ por ser R-módulo a izquierda.

$= r(ms)$ por acción.

$= (rm)s$ por ser R-módulo.

$= (mr)s$ por acción. Así se cumple **b.2** de la **Definición 1.1.1**.

b.3 Sean $r \in R$ y $m, n \in M$, entonces.

$(m + n)r = r(m + n)$ por acción.

$= rm + rn$ por ser R-módulo a izquierda.

$= mr + nr$ por acción.

Así se cumple **b.3** de la **Definición 1.1.1** y por tanto se tiene que M es R-módulo a derecha y a izquierda si R es conmutativo.

Nota Cuando M es un R-módulo a izquierda, se dirá simplemente que M es un R-módulo. Salvo que se indique lo contrario.

Definición 1.1.2. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Un* ***R-submódulo*** *de M es un subgrupo N de M con la suma, el cual es cerrado bajo la acción de R, es decir $rn \in N$*

para todo $r \in R$ y para todo $n \in N$.

Ejemplo 1.1.1. ($\mathbb{Z}$-*módulos*)

Sean el anillo $R = \mathbb{Z}$ y $(G,+)$ un grupo abeliano, se define una acción de $\mathbb{Z}$ en G, dada por:

$$\begin{aligned} \cdot\ : \mathbb{Z} \times G &\longrightarrow G \\ (n,g) &\longrightarrow ng \end{aligned}$$

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g+g+\cdots+g}_{n-veces} & si \quad n>0 \\ 0 & si \quad n=0 \\ \underbrace{-g-g-\cdots-g}_{|n|-veces} & si \quad n<0 \end{cases}$$

Esto es una acción de $\mathbb{Z}$ sobre G, en efecto

*La condición **a** de la **Definición** **1.1.1** se cumple pues $(G,+)$ es un grupo abeliano*

***b*.1** *Sean $r,s \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$, entonces*

$rg + sg = \underbrace{g+g+\cdots+g}_{r-veces} + \underbrace{g+g+\cdots+g}_{s-veces}.$

$= \underbrace{g+g+\cdots+g}_{r+s-veces} = (r+s)g$. *Así se cumple* **b.1** *de la* ***Definición*** **1.1.1**.

***b*.2** *Sean $r,s \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$, entonces*

$(rs)g = \underbrace{g+g+\cdots+g}_{rs-veces}.$

$= \underbrace{sg+sg+\cdots+sg}_{r-veces} = r(sg)$. *Así se cumple* **b.2** *de la* ***Definición*** **1.1.1**.

***b*.3** *Sean $r \in \mathbb{Z}$ y $g_1, g_2 \in G$, entonces*

$r(g_1+g_2) = \underbrace{g_1+g_2+\cdots+g_1+g_2}_{r-veces}.$

$= \underbrace{g_1+g_1+\cdots+g_1}_{r-veces} + \underbrace{g_2+g_2+\cdots+g_2}_{r-veces} = rg_1 + rg_2$, *ya que G es un grupo abeliano. Así se cumple* **b.3** *de la* ***Definición*** **1.1.1**.

Esta definición convierte a G en un $\mathbb{Z}$-módulo donde ng es la acción de $\mathbb{Z}$ sobre G.

De aquí, si G es abeliano entonces aplicando la acción anterior se convierte en un $\mathbb{Z}$-módulo y si G es $\mathbb{Z}$-módulo entonces por la condición ***a*** de la **Definición 1.1.1** G es abeliano.

Ejemplo 1.1.2. ($\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$-*módulo*)

Si $\mathbb{K}$ es un campo, x una indeterminada, R el anillo de polinomios $\mathbb{K}[x]$, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y T una transformación lineal de V en V. Entonces V es un $\mathbb{K}[x]$-módulo.

En efecto, como V es un espacio vectorial, entonces V es un $\mathbb{K}-$módulo y por medio de la transformación lineal T, se obtendrá que V es un V es un $\mathbb{K}[x]$-módulo.

Considerando cualquier polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{K}$, $0 \leq i \leq n$ con $a_n \neq 0$. Se define:

$$\begin{aligned} \bullet\ :\ \mathbb{K}[x] \times V &\longrightarrow V \\ (p(x), v) &\longrightarrow p(x)v = a_n T^n(v) + a_{n-1} T^{n-1}(v) + \cdots + a_0 I(v) \end{aligned}$$

Se puede probar que si T es transformación lineal, entonces T^n es transformación lineal. Además, esta acción satisface los axiomas de R-módulo puesto que:

a. *$(V, +)$ es abeliano porque V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

b.1 *Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $v \in V$, con $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $a_n \neq 0$, $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ y $b_m \neq 0$.*
Sin perdida de generalidad se puede asumir que $n \geq m$, entonces

$$\begin{aligned} (p(x)+q(x))v &= a_n T^n(v) + \cdots + (a_m + b_m) T^m(v) + \cdots + (a_0 + b_0) I(v). \\ &= a_n T^n(v) + \cdots + a_0 I(v) + b_m T^m(v) + \cdots + b_0 I(v). \\ &= p(x)v + q(x)v. \end{aligned}$$

b.2 *Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $v \in V$, con $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $a_n \neq 0$,*

$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ *y* $b_m \neq 0$*, entonces*

$(p(x)q(x))v = a_n b_m T^{n+m}(v) + \cdots + (\sum_{i+j=m} a_i b_j) T^m(v) + \cdots + a_0 b_0 I(v).$

por otra parte

$$\begin{aligned} p(x)(q(x)v) &= a_n T^n(b_m T^m(v) + \cdots + b_0 I(v)) + \cdots + a_0 I(b_m T^m(v) + \cdots + b_0 I(v)). \\ &= a_n b_m T^{n+m}(v) + \cdots + (\textstyle\sum_{i+j=m} a_i b_j) T^m(v) + \cdots + a_0 b_0 I(v). \end{aligned}$$

b.3 *Sean* $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ *y* $v_1, v_2 \in V$*, con* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *y* $a_n \neq 0$*, entonces*

$$\begin{aligned} p(x)(v_1 + v_2) &= a_n T^n(v_1 + v_2) + \cdots + a_0 I(v_1 + v_2). \\ &= a_n T^n(v_1) + \cdots + a_0 I(v_1) + a_n T^n(v_2) + \cdots + a_0 I(v_2). \\ &= p(x)v_1 + p(x)v_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto V *en un* $\mathbb{K}[x]$*-módulo, bajo la acción anterior.*

Teorema 1.1.1. *Sean* R *un anillo y* M *un* R*-módulo. Un subconjunto* N *de* M *es* R*-submódulo si y solo si*

1. $N \neq \varnothing$

2. $x + ry \in N$ *para todo* $x, y \in N$*, y todo* $r \in R$*.*

Demostración.

Si N es un R-submódulo de un R-módulo M, entonces $0 \in N$, por tanto $N \neq \varnothing$ y también es cerrado bajo la acción de R. Recíprocamente suponiendo que se cumplen las condiciones 1 y 2, al considerar $r = -1$ y $x = y$, entonces $0 \in N$ y se aplica el criterio de subgrupos de M. Por último si $x = 0$ con la segunda hipótesis se obtiene que N es cerrado bajo la acción de R y por tanto N es un R-submódulo de M.

$\square$

Ejemplo 1.1.3. *Sea el anillo* $\mathbb{Z}$ *y* G *el grupo abeliano* $\mathbb{Z}_8$ *como se vio en el* ***Ejemplo 1.1.1*** G *es un* $\mathbb{Z}$*-módulo.*

Ahora sea $N = \{0, 2, 4, 6\}$ *un subconjunto de* G*, entonces* N *subgrupo de* G*, en efecto*

$+$	0	2	4	6
0	0	2	4	6
2	2	4	6	0
4	4	6	0	2
6	6	0	2	4

- *$N \neq \varnothing$ pues $N = \{0, 2, 4, 6\}$.*
- *Sea $x, y \in N$ y $r \in \mathbb{Z}$, entonces*
  $x + ry = x + \underbrace{y + y + \cdots + y}_{r-veces} \in N$, porque N es cerrado bajo la suma por la tabla anterior y por lo tanto $x + ry \in N$.

Así, N es un $\mathbb{Z}$-submódulo de G.

Definición 1.1.3. *Sea R un anillo, M y N R-módulos, una función $\varphi : M \longrightarrow N$ es un **homomorfismo entre R-módulos** o **función lineal entre R-módulos** si cumple*

- *$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.*
- *$\varphi(rx) = r\varphi(x)$.*

El conjunto de todos los homomorfismos entre los R-módulos de M en N se denota por $Hom_R(M, N)$, cuando $M = N$, $Hom_R(M, M)$ será denotado por $End_R(M)$ y se llama el conjunto de endomorfismos.

Definición 1.1.4. *Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de R-módulos, se define el **núcleo** de φ como el conjunto formado por los elementos $m \in M$ tales que $\varphi(m) = 0_N$ y se define la **imagen** de φ como el conjunto de los elementos $n \in N$ tales que $\varphi(m) = n$, para algún $m \in M$.*

Ejemplo 1.1.4. *Sean R un anillo, $M = R^n$ y $N = R$, la proyección*

$$\begin{array}{rccc} \Pi_i : & R^n & \longrightarrow & R \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longrightarrow & \Pi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i \end{array}$$

es un homomorfismo sobreyectivo con núcleo igual al R-submódulo de n-uplas con la posición i-ésima igual a cero.

En efecto, sean $x, y \in R^n$, entonces

$$\Pi_i(x+y) = x_i + y_i = \Pi_i(x) + \Pi_i(y) \quad y \quad \Pi_i(rx) = rx_i = r\Pi_i(x)$$

por tanto Π_i es homomorfismo.

Además, si $z \in R$, existe $x = (x_1, \cdots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \cdots, x_n)$, tal que $\Pi_i(x) = z$ y por tanto Π es sobreyectiva.

Ahora el núcleo de Π_i son los $x \in R^n$ tal que $\Pi_i(x) = 0$, ahora como $\Pi_i(x) = x_i$, para que sea cero entonces $x_i = 0$ y por tanto con núcleo igual al R-submódulo de n-uplas con la posición i-ésima igual a cero.

Teorema 1.1.2. *Sean R un anillo, M un R-módulo y N un R-submódulo de M, el grupo cociente M/N puede ser transformado en un R-módulo definiendo una acción de R dada por*

$$\begin{aligned} \cdot \ : R \times M/N &\longrightarrow M/N \\ (r, x+N) &\longrightarrow rx + N \end{aligned}$$

Demostración.
El grupo cociente M/N es abeliano y por tanto cumple la condición $\boldsymbol{a}$ de la **Definición 1.1.1**

b.1 Sean $r, s \in R$ y $x + N \in M/N$, entonces
$(r+s)x + N = (r+s)x + N = (rx + sx) + N$.
Por otra parte $rx + N + sx + N = (rx + sx) + N$.
Así cumple **b.1** de la **Definición 1.1.1**.

b.2 Sean $r, s \in R$ y $x + N \in M/N$, entonces
$(rs)x + N = r(sx) + N = r(sx + N) = r(s(x+N))$.
Así cumple **b.2** de la **Definición 1.1.1**.

b.3 Sean $r \in R$ y $x+N, y+N \in M/N$, entonces

$r(x+N+y+N) = r(x+y)+N = (rx+ry)+N$.

Por otra parte $rx+N+ry+N = (rx+ry)+N$.

Así cumple **b.3** de la **Definición 1.1.1** y por tanto M/N es un R-módulo.

$\square$

Ejemplo 1.1.5. *Como $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo y $3\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo dado por la acción $r(x+3\mathbb{Z}) = rx+3\mathbb{Z}$ para todo $r \in \mathbb{Z}$ y $x+3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Definición 1.1.5. *La suma de dos R-submódulos N_1 y N_2 de un módulo M definida $N_1+N_2 = \{n_1+n_2 : n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$ es de nuevo un R-submódulo de M y es el más pequeño que contiene a N_1 y N_2.*

La suma puede ser extendida a un conjunto finito de submódulos.

Definición 1.1.6. *Sea $M_1, \ldots, M_k$ una colección de R-módulos. La colección de k-uplas $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ donde $m_i \in M_i$ y $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$, con la adición y la acción de R*

$$\begin{array}{rcl} \cdot \; : \; R \times (M_1 \times \cdots \times M_k) & \longrightarrow & (M_1 \times \cdots \times M_k) \\ (r, (m_1, \ldots, m_k)) & \longrightarrow & (rm_1, \ldots, rm_k)) \end{array}$$

*es llamado **producto directo**.*

Ejemplo 1.1.6. *Se considera $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_4$ dos $\mathbb{Z}$-módulos, el producto directo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ es un $\mathbb{Z}$-módulo y su suma esta dada por $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ con $a, c \in \mathbb{Z}_3$ y $b, d \in \mathbb{Z}_4$ y la acción de $\mathbb{Z}$ dada por*

$$\begin{array}{rcl} \cdot \; : \; \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4) \\ (r, (a,b)) & \longrightarrow & (ra, rb) \end{array}$$

Permite identificar el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

Definición 1.1.7. *Sea M un R-módulo, se dice que M es **módulo libre** sobre un conjunto $A \subset M$ si para todo elemento no cero de M existen únicos elementos*

*$a_1, \ldots, a_n \in A$ y $r_1, \ldots, r_n \in R$ tal que $x = r_1a_1 + \cdots + r_na_n$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. En este caso se dice que A es una **base** para M y si R es conmutativo la cardinalidad de A es llamada **rango** de M.*

1.2. Funciones Bilineales

Las funciones bilineales se usan en geometría para modelar las simetrías de un objeto, en álgebra se usan para representar ecuaciones, en análisis sirven para aproximar localmente funciones. Los productos son funciones bilineales que permiten generar la estructura de un álgebra.

Definición 1.2.1. *Sean M, N módulos sobre un anillo R, $\delta : M \times M \longrightarrow N$, es una **función bilineal** si satisface:*

- *$\delta(rm_1, m_2) = r\delta(m_1, m_2)$ y $\delta(m_1 + m_2, m_3) = \delta(m_1, m_3) + \delta(m_2, m_3)$ para todo $m_1, m_2, m_3 \in M$ y $r \in R$.*
- *$\delta(m_1, rm_2) = r\delta(m_1, m_2)$ y $\delta(m_1, m_2 + m_3) = \delta(m_1, m_2) + \delta(m_1, m_3)$ para todo $m_1, m_2, m_3 \in M$ y $r \in R$.*

δ es una función bilineal si es función lineal con respecto a sus dos argumentos.

Ejemplo 1.2.1. *Si $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ con $v = (x, y)$, $w = (z, t)$, el producto escalar es una función bilineal.*

$$\delta(v, w) = v \bullet w = xz + yt$$

En efecto, sean $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, $w_1 = (z_1, t_1)$, $w_2 = (z_2, t_2) \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$\delta(kv_1, w_1) = kx_1z_1 + ky_1z_1 = k\delta(v_1, w_1)$.

$\delta(v_1 + v_2, w_1) = (x_1 + x_2)z_1 + (y_1 + y_2)t_1$.

$$= x_1z_1 + y_1t_1 + x_2z_1 + y_2t_1 = \delta(v_1, w_1) + \delta(v_2, w_1).$$

$\delta(v_1, kw_1) = x_1kz_1 + y_1kz_1 = k(x_1z_1 + y_1z_1) = k\delta(v_1, w_1)$.

$\delta(v_1, w_1 + w_2) = x_1(z_1 + z_2) + y_1(t_1 + t_2)$.

$$= x_1z_1 + y_1t_1 + x_1z_2 + y_1t_2 = \delta(v_1, w_1) + \delta(v_1, w_2).$$

Así, δ es una función bilineal.

1.3. Producto Tensorial

El producto tensorial en módulos surge de la necesidad de extender un R-módulo a un S-módulo, donde R es un subanillo de S. Lo cual se denotará como $S \otimes_R N$ y estará dado por $(S \times N)/H$ donde H es el subgrupo con elementos de la forma

$$< (s_1 + s_2, n) - (s_1, n) - (s_2, n),$$

$$(s, n_1 + n_2) - (s, n_1) - (s, n_2),$$

$$(rs, n) - (n, rs) >$$

es llamado producto tensor de S sobre R, donde se consideran las siguientes relaciones:

$$(s_1 + s_2) \otimes n = s_1 \otimes n + s_2 \otimes n$$

$$s \otimes (n_1 + n_2) = s \otimes n_1 + s \otimes n_2$$

$$rs \otimes n = n \otimes rs$$

Ahora se define el producto tensor de manera general sin depender de que un anillo este contenido dentro de otro anillo. Para esto se caracterizan las funciones F_0 como se sigue.

Sean R un anillo conmutativo con unidad, M, N R-módulos, se denota $F_0(M \times N, R)$ al conjunto de las funciones $f : M \times N \longrightarrow R$ no nulas excepto para un número finito de elementos de $M \times N$. Al definir las funciones

$$\delta_{(a,b)}(m,n) = \begin{cases} 1_R & \text{si } \ a = m, b = n \\ 0_R & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene que, $\delta_{(a,b)} \in F_0(M \times N, R)$ y el conjunto $F_0(M \times N, R)$ está generado por $\delta_{(m,n)}$ en efecto, si $h \in F_0(M \times N, R)$, entonces h es de la forma

$$h(x,y) = \sum_{(m,n) \in S(h)} h(m,n)\delta_{(m,n)}(x,y)$$

donde $S(h)$ es el subconjunto de $M \times N$ tal que $h(m,n) \neq 0$.

Así, $F_0(M \times N, R)$ es un módulo con la suma usual de funciones y producto por escalar, el cual es libre sobre el conjunto $\{\delta_{(m,n)} : (m,n) \in M \times N\}$. Ahora se considera el submódulo B de $F_0(M \times N, R)$ generado por todos los elementos de $F_0(M \times N, R)$ de los siguientes tipos:

$$\delta_{(m+m',n)} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m',n)},$$

$$\delta_{(m,n+n')} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m,n')},$$

$$r\delta_{(m,n)} - \delta_{(rm,n)}, \qquad r\delta_{(m,n)} - \delta_{(m,rn)}$$

para todo $r \in R$, $m, m' \in M$ y $n, n' \in N$.

Definición 1.3.1. *Se define el **Producto tensorial** como el módulo*

$$M \otimes_R N := F_0(M \times N, R)/B$$

y cada clase cociente $\delta_{(m,n)} + B$ se denota por $m \otimes n$.

Los elementos de $m \otimes n$ generan a $M \otimes_R N$ como R-módulo, además por propiedades del cociente.

$$\begin{cases} (m+m')\otimes n = m\otimes n + m'\otimes n & \textbf{(a)} \\ m\otimes(n'+n) = m\otimes n + m\otimes n' & \textbf{(b)} \\ r(m\otimes n) = (rm)\otimes n = m\otimes(rn) & \textbf{(c)} \end{cases} \tag{1}$$

para todo $r \in R$, $m, m' \in M$ y $n, n' \in N$.

De lo cual, todo elemento de $M \otimes_R N$ se escribe como:

$$\sum_{i=1}^{L} r_i(m_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^{L} \bar{m}_i \otimes n_i$$

donde $\bar{m}_i = r_i m_i$ por la propiedad **c** de (1).

Ejemplo 1.3.1. *Sean $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_5$ dos $\mathbb{Z}$-módulos.*

$\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_5 = 0,$ *en efecto*

$$\begin{aligned} m\otimes n &= (6-5)(m\otimes n). \\ &= 6(m\otimes n) - 5(m\otimes n). \\ &= (6m\otimes n) - (m\otimes 5n) \quad \textit{por item } \textbf{\textit{(c)}} \textit{ de (1).} \\ &= 0-0=0, \textit{ pues } 6\equiv 0 \pmod 3 \textit{ y } 5\equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

Ahora, al considerar M, N, Q R-módulos, $Bil_R(M, N; Q)$ denota el conjunto de funciones bilineales de $M \times N \longrightarrow Q$, entonces $Bil_R(M, N; Q)$ es un grupo abeliano con la suma de funciones y un R-módulo bajo la acción de R dada por

$$\begin{array}{rccc} \cdot & : R\times Bil_R(M,N;Q) & \longrightarrow & Bil(M,N;Q) \\ & (r,f) & \longrightarrow & rf \end{array}$$

en efecto

$$\begin{aligned} r'f(rm_1+sm_2,n) &= r'rf(m_1,n) + r'sf(m_2,n). \\ &= r(r'f(m_1,n)) + s(r'f(m_2,n)). \end{aligned}$$

Análogamente se tiene:

$r'f(m, rn_1 + sn_2) = r(r'f(m, n_1)) + s(r'f(m, n_2))$.

para todo $r, r', s \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$ y $n, n_1, n_2 \in M$.

Así rf es bilineal.

Ahora como $f(M \times N)$ es un R-submódulo de Q, entonces se cumplen las propiedades de R-módulo en $f(M \times N)$ y por tanto $Bil_R(M, N; Q)$ es un R-módulo.

Teorema 1.3.1. (*Propiedad universal*)

Sean M, N, Q R-módulos con R anillo conmutativo con unidad, entonces existe una única función $\bar{f}$ R-lineal tal que $\bar{f}(m \otimes n) = \bar{f}(\Pi(m, n)) = f(m, n)$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\Pi"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

Demostración.

Para garantizar la existencia de la función $\bar{f}$ se define la función H, extendida mediante linealidad

$$\begin{array}{rcl} H \quad : \; F_0(M \times N, R) & \longrightarrow & Q \\ \delta_{(m,n)} & \longrightarrow & f(m, n) \end{array}$$

es decir forma un homomorfismo de R-módulos y se considera el submódulo B de $F_0(M \times N, R)$ generado por todos los elementos de $F_0(M \times N, R)$ de los siguientes tipos:

$$\delta_{(m+m',n)} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m',n)},$$

$$\delta_{(m,n+n')} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m,n')},$$

$$r\delta_{(m,n)} - \delta_{(rm,n)}, r\delta_{(m,n)} - \delta_{(m,rn)}$$

para todo $r \in R$, $m, m' \in M$ y $n, n' \in N$.

Los elementos de este submódulo B se anulan al aplicar H, puesto que f se bilineal entonces:

$$H(\delta_{(m+m',n)} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m',n)}) = f(m+m',n) - f(m,n) - f(m',n) = 0$$

$$H(\delta_{(m,n+n')} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m,n')}) = f(m,n+n') - f(m,n) - f(m,n') = 0$$

$$H(r\delta_{(m,n)} - \delta_{(rm,n)}) = rf(m,n) - f(rm,n) = 0$$

$$H(r\delta_{(m,n)} - \delta_{(m,rn)}) = rf(m,n) - f(m,rn) = 0$$

Lo que induce un homomorfismo $\bar{f}$ de $M \otimes_R N$ en Q tal que $\bar{f}(m \otimes n) = f(m,n)$ es decir, $f = \bar{f} \circ \Pi$. Como Π es una función sobreyectiva y $M \otimes_R N$ es generado por los elementos de la forma $m \otimes n$ se tiene la unicidad de la función $\bar{f}$. $\square$

Teorema 1.3.2. *Sean M, N, Q R-módulos, entonces $Bil_R(M,N;Q)$ y $Lin_R(M \otimes_R N, Q)$ son isomorfos.*

Demostración. Usando la propiedad universal expuesta antes se define la función

$$\begin{aligned} S \quad : Bil_R(M,N;Q) &\longrightarrow Lin_R(M \otimes_R N, Q) \\ f \qquad &\longrightarrow \quad \bar{f} \end{aligned}$$

tal que $f = \bar{f} \circ \Pi$, la función S es una función inyectiva, ya que por la propiedad universal, para cada función bilineal f existe una única función lineal $\bar{f}$.

La sobreyectividad, se garantiza porque si $g \in Lin_R(M \otimes_R N, Q)$, se tiene que la función $f = g \circ \Pi \in Bil_R(M,N;Q)$, en efecto $S(g) = f$ y si $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} f(m_1+m_2,n_1) = g((m_1+m_2) \otimes n_1) &= g(m_1 \otimes n + m_2 \otimes n_1). \\ &= g(m_1 \otimes n_1) + g(m_2 \otimes n_1). \text{ Por linealidad de } g. \\ &= f(m_1,n_1) + f(m_2,n_1). \end{aligned}$$

También $f(rm_1,n_1) = g(r(m_1 \otimes n_1)) = g(r(m_1 \otimes n_1)) = rg(m_1 \otimes n_1) = rf(m_1,n_1)$.

Análogamente se obtiene que:

$f(m_1, n_1 + n_2) = f(m_1, n_1) + f(m_1, n_2)$ y $f(m_1, rn_1) = rf(m_1, n_1)$.

En consecuencia existe una función f bilineal que es preimagen de una función g lineal, más aún S es un homomorfimso de $R-$módulos. $\square$

1.4. Álgebras

En esta sección se estudia como construir un álgebra de Lie a partir de un álgebra asociativa, para la posterior construcción de ejemplos a los cuales se aplica una derivación.

Definición 1.4.1. *Se define un* ***álgebra*** *como un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, provisto de una aplicación bilineal llamada producto definido de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \cdot \quad : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

Si para todo $a, b, c \in A$ se cumple que $(ab)c = a(bc)$, se dice que A es un **álgebra asociativa**.

Ejemplo 1.4.1. *Considerando $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathbb{R}$ es un álgebra, en efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $ab \in \mathbb{R}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, así $\mathbb{R}$ es un álgebra.*

Ejemplo 1.4.2. *Considerando el conjunto de matrices diagonales de orden n denotadas por $\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$, como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es un álgebra, en efecto, sean $A, B \in \mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces $AB \in \mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para todo $A, B \in \mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$, por tanto $\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es un álgebra.*

Ejemplo 1.4.3. *Considerando $\mathbb{R}[x]$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathbb{R}[x]$, es un álgebra, en efecto si $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $p(x)q(x) \in \mathbb{R}[x]$, por lo tanto $\mathbb{R}[x]$ es un álgebra.*

Según las notas de álgebra de Lie [8]:

Definición 1.4.2. *Sea A un álgebra, si cumple:*

(i) $\quad aa = 0$. *Para todo* $a \in A$.

(ii) $\quad (ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$. *Para todo* $a, b, c \in A$, *conocida como la identidad de Jacobi.*

*Se dice que A es un **álgebra de Lie**.*

De (i) se tiene que $xy = -yx$. Haciendo $a = x + y$ conocida como anticonmutatividad.

En efecto
$(x + y)(x + y) = xx + xy + yx + yy = 0.$
$(x + y)(x + y) = xy + yx = 0.$
Luego $xy = -yx$.

Teorema 1.4.1. *Sea A un álgebra asociativa, al definir una nueva operación*

$$\begin{array}{rcl} [\ ,\ ]\ :\ A \times A & \longrightarrow & A \\ (a, b) & \longrightarrow & [a, b] = ab - ba \end{array}$$

*conocido como **corchete de Lie** o **conmutador**, entonces $(A, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie.*

Demostración.
Se verifica la definición anterior:
(i) Sea $a \in A$, entonces $[a, a] = aa - aa = 0$.

(ii) se tiene que $[[a, b], c] = [ab - ba, c] = abc - cab - bac + cba$.

Similarmente se tiene que:
$[[b, c], a] = bca - abc + acb - cba$ y $[[c, a], b] = cab - bca - acb + bac$.

Así sumando los términos $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ y por tanto se cumple (ii).

$\square$

Ejemplo 1.4.4. *Considerando el álgebra asociativa* $\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *con el producto conmutador del* ***Teorema* 1.4.1**, *se obtiene que* $(\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{R}), [\ ,\ ])$ *es un álgebra de Lie.*

2. MÓDULOS Y ÁLGEBRAS GRADUADAS

En este capítulo se presenta la construcción de la definición de álgebra graduada, que es uno de los principales objetos de estudio de este trabajo. Luego, se estudian conceptos sobre álgebras de Lie graduada y álgebras graduadas sobre campos de característica dos, identificando algunos ejemplos.

2.1. Módulos graduados

Se inicia con la definición de módulo graduado según [1] y [6] con el fin de consolidar ideas básicas en términos de graduaciones.

Definición 2.1.1. *Sea Δ un grupo abeliano, un* ***módulo graduado*** *V de tipo Δ, es una familia $\{V^i\}_{i\in\Delta}$ de módulos sobre un anillo R, es decir V^i es un R-módulo para todo $i \in \Delta$, bajo la indexación de Δ se tiene $V = \bigoplus_{i\in\Delta} V^i$. Se dice que un elemento es de grado i si $v \in V^i$ y se puede denotar por $|v| = i$.*

Un módulo graduado de tipo $\mathbb{Z}_2$, es un súper módulo graduado.

Ejemplo 2.1.1. *Sea M un módulo graduado tipo $\mathbb{Z}$, esto es $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, esto induce una $\mathbb{Z}_2$ graduación dada por $M^0 = \bigoplus_{i\in 2\mathbb{Z}} M^i$ y $M^1 = \bigoplus_{i\in 2\mathbb{Z}+1} M^i$, así $M = M^0 \bigoplus M^1$.*

Ejemplo 2.1.2. *Al considerar el conjunto $\mathbb{Z}_i = \{a + bi :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, se puede escribir $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}i$, así se tiene un súper módulo graduado, donde*
$(\mathbb{Z}_i)^0 = \mathbb{Z}$ y $(\mathbb{Z}_i)^1 = \mathbb{Z}i$.

Definición 2.1.2. *Sean V, W módulos graduados de tipo Δ. Se dice que W es un* ***submódulo graduado*** *de tipo Δ de V si $W^i \subseteq V^i$ para todo $i \in \Delta$.*

Ejemplo 2.1.3. *Al considerar el conjunto de* $2\mathbb{Z}_i = \{2a + 2bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$, *se puede escribir* $2\mathbb{Z}_i = 2\mathbb{Z} \bigoplus 2\mathbb{Z}i$, *entonces* $(2\mathbb{Z}_i)^0 = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} = (\mathbb{Z}_i)^0$ *y* $(2\mathbb{Z}_i)^1 = 2\mathbb{Z}i \subseteq \mathbb{Z}i = (\mathbb{Z}_i)^1$, *así* $2\mathbb{Z}_i$ *es un submódulo graduado de* $\mathbb{Z}_i$ *bajo el anillo* $\mathbb{Z}$.

Definición 2.1.3. *Sean* V *un módulo graduado de tipo* Δ *y* W *un submódulo graduado de* V, *entonces el* ***cociente graduado*** *estará dado por la familia* $V/W = \{V^i/W^i\}_{i\in\Delta}$ *para todo* $i \in \Delta$.

Ejemplo 2.1.4. *Haciendo el cociente entre* $\mathbb{Z}_i$ *y* $2\mathbb{Z}_i$ *se tiene el módulo graduado* $(\mathbb{Z}_2)_i = \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2 i$, *con* $[(\mathbb{Z}_2)_i]^0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *y* $[(\mathbb{Z}_2)_i]^1 = \mathbb{Z}i/2\mathbb{Z}i$.

Definición 2.1.4. *Un módulo graduado* V *de tipo* Δ *es* ***libre*** *si cada* V^i *es un módulo libre para todo* $i \in \Delta$. *En este caso la unión disyunta de bases de* V^i *es llamada base para* V.

Definición 2.1.5. *Sean* V, W *módulos graduados de tipo* Δ *sobre una anillo* R, *entonces una* ***función lineal de grado i*** *es una familia de funciones lineales de módulos:*

$$\{f^j : V^j \longrightarrow W^{j+i}\}$$

El conjunto de funciones lineales de grado i, *con operación binaria la suma de funciones y acción dada por* $(r, f) \mapsto r(f(m))$ *es un módulo, así se obtiene el módulo graduado cuyos elementos son funciones lineales de todos los grados es decir* $\bigoplus_{i\in\Delta}(Hom(V, W))^i$ *el cual se nota* $Hom(V, W)$.

Para el caso que V y W sean módulos de tipo $\mathbb{Z}$ se puede representar una función lineal de grado i por medio del siguiente gráfico:

$$\begin{tikzcd}
f: & V = \arrow[d] & \cdots & V^j \arrow[dr, "f^j"] & V^{j+1} \arrow[dr, "f^{j+1}"] & V^{j+2} \arrow[dr, "f^{j+2}"] & \cdots & \\
 & W = & & \cdots & W^{j+i} & W^{j+1+i} & W^{j+2+i} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.1.5. *Si se considera el módulo graduado* $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}i$ *de tipo* $\mathbb{Z}_2$ *y la función* *lineal*

$$\begin{aligned} f \ &: \mathbb{Z}_i \longrightarrow \mathbb{Z}_i \\ &\quad x \longrightarrow f(x) = xi \end{aligned}$$

entonces f es una función lineal de grado 1, pues

$$\begin{tikzcd}
f: & \mathbb{Z}_i = \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[dr, "f^0"'] & \mathbb{Z}i \arrow[dr, "f^1"] & \\
 & \mathbb{Z}_i = & & \mathbb{Z}i & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Definición 2.1.6. *Sea $\varphi : V \longrightarrow W$ una función lineal de grado i entre módulos graduados de tipo Δ. Se define el **núcleo de** φ como el conjunto de los elementos de V tales que $\varphi(v) = 0_W$, ahora como φ es una familia de funciones $\varphi = \{\varphi^i\}_{i\in\Delta}$ entonces se induce una familia de núcleos donde $(ker\varphi)^i = ker\varphi^i$, para $i \in \Delta$. Se define la **imagen de** φ como el conjunto de todos los $w \in W$ tal que $\varphi(v) = w$ para algún $v \in V$, ahora como φ es una familia de funciones, entonces se induce una familia de imágenes donde $(im\varphi)^j = im\varphi^{j-i}$, ya que $\varphi^{j-i}(V^{j-i}) \subseteq W^j$ además se tiene que el núcleo de φ es un submódulo de V y la imagen de φ es un submódulo de W.*

Definición 2.1.7. *El **producto tensor** de dos módulos graduados de tipo Δ, V y W se denota por $V \otimes W$ es definido por $(V \otimes W)^i = \bigoplus_{j+k=i} V^j \otimes W^k$.*

Ejemplo 2.1.6. *Si $M = M^0 \bigoplus M^1$ y $N = N^0 \bigoplus N^1$ son súper módulos entonces el producto tensorial también lo es, pues*
$M \otimes N = (M \otimes N)^0 \bigoplus (M \otimes N)^1$. *Donde.*
$(M \otimes N)^0 = M^0 \otimes N^0 \bigoplus M^1 \otimes N^1$.
$(M \otimes N)^1 = M^0 \otimes N^1 \bigoplus M^1 \otimes N^0$.

Por otra parte, si $f : V \longrightarrow V'$ y $g : W \longrightarrow W'$ son funciones lineales de grado p y q respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} f \otimes g : \quad V \otimes W \quad &\longrightarrow \quad V' \otimes W' \\ (v \otimes w) \quad &\longrightarrow \quad (-1)^{|v||g|} f(v) \otimes g(w) \end{aligned}$$

es una función lineal de grado $p+q$. En efecto, si $v\otimes w \in (V\otimes W)^i = \bigoplus_{n+m=i} V^n \otimes W^m$ como f de grado p y g de grado q, entonces $(f\otimes g)(v\otimes w) = (-1)^{|v||g|} f(v)\otimes g(w)$ con $f(v)\in V^{n+p}$ y $g(w)\in W^{m+q}$, así $f(v)\otimes g(w) \in (V\otimes W)^{i+(p+q)}$. Por lo tanto $f\otimes g$ es de grado $p+q$.

Definición 2.1.8. *Un **diferencial** en un módulo graduado de tipo $\mathbb{Z}$, $V = \{V^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una función lineal de grado i tal que $d\circ d = 0$ y el par (V,d) es llamando **módulo graduado diferencial de tipo** $\mathbb{Z}$. El módulo graduado cociente $H(V,d) = Kerd/Imd$, donde $H^n(V,d) = Kerd^n/Imd^{n-1}$ es la **cohomología** de V. A menudo se simplifica por $H(V)$.*

$$\begin{tikzcd}
d\circ d: & \cdots & V^n \arrow[dr, "d^n"] & V^{n+1} \arrow[dr, "d^{n+1}"] & V^{n+2} \arrow[dr, "d^{n+2}"] & \cdots & & \\
& & \cdots & V^{n+1} \arrow[dr, "d^{n+1}\circ d^n"] & V^{n+2} \arrow[dr, "d^{n+2}\circ d^{n+1}"] & V^{n+3} \arrow[dr, "d^{n+3}\circ d^{n+2}"] & \cdots & \\
& & & \cdots & V^{n+2} & V^{n+3} & V^{n+4} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Un morfismo de módulos graduados diferenciales de tipo $\mathbb{Z}$, $\varphi : (V,d_V) \longrightarrow (W,d_W)$ es una función lineal de grado cero $\varphi : M \longrightarrow N$ que satisface $\varphi\circ d_W = d_V \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & V^i \arrow[r, "d_v^i"] \arrow[d, "\varphi^i"'] & V^{i+1} \arrow[r, "d_v^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"'] & V^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{i+2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & W^i \arrow[r, "d_W^i"] & W^{i+1} \arrow[r, "d_v^{i+1}"] & W^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

más generalmente $d_W^i \circ \varphi^i = \varphi^{i+1}\circ d_V^i$ para todo $i\in\Delta$.

Teorema 2.1.1. *Sean (V,d_V) y (W,d_W) módulos graduados diferenciales de tipo $\mathbb{Z}$, entonces $Hom(V,W)$ y $V\otimes W$ son módulos diferenciales graduados. Dados por*

$$d(f) = d\circ f - (-1)^{|f|} f\circ d, \quad \textit{para} \;\; f\in Hom(V,W) \;\; \textit{y}$$

$$d(v\otimes w) = d(v)\otimes w + (-1)^{|v|} v\otimes d(w) \quad \textit{para} \;\; v\in V \;\; \textit{y} \;\; w\in W$$

Demostración.

Para el módulo $Hom(V, W)$, se tiene que $d(d(f)) = d(d \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d)$, si se denota $\eta = |d \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d|$.

$$d(d(f)) = d \circ (d \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d) - (-1)^{\eta}(d \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d) \circ d.$$

$$= d \circ d \circ f - (-1)^{|f|} d \circ f \circ d - (-1)^{\eta}(d \circ f \circ d - (-1)^{|f|} f \circ d \circ d).$$

$$= -(-1)^{|f|} d \circ f \circ d - (-1)^{\eta} d \circ f \circ d \quad \text{pues } d \circ d = 0.$$ Además, $\eta = |f| + 1$, pues $d \circ f$ es de grado $|f| + 1$.

Si $|f|$ es par, entonces $d(d(f)) = -d \circ f \circ d + d \circ f \circ d = 0$. Si $|f|$ es impar, entonces $d(d(f)) = d \circ f \circ d - d \circ f \circ d = 0$.
Por tanto, d es diferencial sobre $Hom(V, W)$.
Por otra parte:
$d(d(v \otimes w)) = d(d(v) \otimes w + (-1)^{|v|} v \otimes d(w))$.

$$= d(d(v)) \otimes w + (-1)^{|d(v)|} d(v) \otimes d(w) + (-1)^{|v|}(d(v) \otimes d(w) + (-1)^{v} v \otimes d(d(w))).$$

$$= (-1)^{|v|+1} d(v) \otimes d(w) + (-1)^{|v|} d(v) \otimes d(w) = 0.$$

la última igualdad se tiene, ya que $d \circ d = 0$. Por lo tanto d es diferencial sobre $V \otimes W$.

$\square$

2.2. Álgebra graduada

Para presentar el concepto de álgebra graduada tomando como referencias [1] y [6], primero se identifica el concepto de espacio vectorial graduado que es un caso particular de módulos graduados sobre un campo $\mathbb{K}$, así un espacio vectorial graduado V de tipo Δ sobre el campo $\mathbb{K}$ es una familia de espacios vectoriales $\{V^{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$ cada uno sobre el campo $\mathbb{K}$ bajo la indexación de Δ, tal que V es la suma directa de dicha familia.

Los elementos de V^{α} son llamados homogéneos de grado α. Un subespacio vectorial graduado de V es la suma directa de subespacios W^{α}, tales que $W^{\alpha} \subseteq V^{\alpha}$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Ahora una función lineal f de un espacio vectorial graduado $V = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} V^{\alpha}$ en el espacio vectorial graduado $W = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} W^{\alpha}$ se dice homogénea de grado β si para cada $\alpha \in \Delta$ se tiene $f(V^{\alpha}) \subseteq W^{\alpha+\beta}$; cuando esto sucede el núcleo (Respectivamente imagen) es un subespacio vectorial graduado de V (Respectivamente de W).

Para definir el concepto de álgebra graduada necesitamos de un grupo abeliano Δ que tenga un homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi \quad &: \Delta \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ par} \\ 1, & \text{si } x \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

de paridad, tales que los elementos de $\psi^{-1}(0)$ son llamados los elementos pares y $\psi^{-1}(1)$ son los llamados los elementos impares. En particular para los grupos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$, con n par, al considerar el homomorfimo ψ tal que $\psi(1_{\Delta}) = 1_{\mathbb{Z}_2}$, entonces la paridad $\mathbb{Z}$ es la usual y para $\mathbb{Z}_n$ la paridad está dada por la paridad (usual) del residuo, en efecto:

para $n = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2k-1\}$ y se define la función $\psi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, donde $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(2) = 0$,. . . ,$\psi(2k-1) = 1$. Sean $a, b \in \mathbb{Z}_n$, si a, b son pares, entonces $a = 2x$ y $b = 2y$, para algunos x, y enteros, entonces $a \equiv 2x \; mod \; 2k$ y $b \equiv 2y \; mod \; 2k$, entonces $a + b \equiv 2(x + y) \; mod \; 2k$, así $\psi(a + b) = 0$ y $\psi(a) + \psi(b) = 0 + 0 = 0$. Análogamente, para a, b impares y a, b de paridad distinta se obtiene el resultado y por tanto ψ es un homomorfismo de paridad sobre $\mathbb{Z}_n$.

Ahora surge la pregunta ¿porque para los impares no funciona el homomorfismo de paridad ψ? Por ejemplo para $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ con función de paridad $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ y $\psi(2) = 0$, por una parte $\psi(2+2) = \psi(4) = \psi(1) = 1$ y por otra parte $\psi(2)+\psi(2) = 0$, así ψ no es un homomorfismo de paridad sobre $\mathbb{Z}_3$ y en general sobre $\mathbb{Z}_n$ con n impar.

Los ejemplos que se analizarán en el siguiente capítulo, están graduados sobre alguno de estos grupos abelianos anteriormente mencionados.

Definición 2.2.1. *Un **álgebra graduada** de tipo Δ sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial graduado $A = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} A^\alpha$ sobre $\mathbb{K}$, al cual se le da una estructura algebraica compatible con su estructura bajo un producto bilineal*

$$\begin{aligned} \cdot \ : A\times A &\longrightarrow A \\ (a,b) &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

tal que $A^\alpha A^\beta \subseteq A^{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \Delta$.

Nota Un álgebra graduada de tipo $\mathbb{Z}_2$, sobre un campo $\mathbb{K}$ se dice que es una súper álgebra [3]. Un morfismo de álgebras graduadas $\varphi : A \longrightarrow B$ es una función lineal de grado cero tal que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Definición 2.2.2. *Un álgebra graduada de tipo Δ sobre un campo $\mathbb{K}$ se dice **concentrada en grado cero**, si $A^0 = A$ y $A^i = 0$, para todo $i \in \Delta - \{0\}$.*

Definición 2.2.3. *Un **álgebra graduada asociativa** es un álgebra graduada de tipo Δ sobre un campo $\mathbb{K}$, que satisface la condición $(ab)c = a(bc)$ para todo $a, b, c \in A$.*

Sean $V = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} V^\alpha$ un espacio vectorial graduado de tipo Δ sobre un campo $\mathbb{K}$ y f, g funciones lineales de grado α y β respectivamente, entonces $f \circ g$ es una función lineal de grado $\alpha+\beta$, pues si $w \in V^i$ entonces $f\circ g(w) = f(g(w)) \in V^{i+(\alpha+\beta)}$. Así se tiene que $Hom(V, V)$ es un álgebra graduada asociativa de tipo Δ sobre un campo $\mathbb{K}$ denotada por $End(V)$.

Ejemplos 2.2.1.

- *Al identificar los números complejos $\mathbb{C} = \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{R}i$, y considerar $A^0 = \mathbb{R}$ y $A^1 = \mathbb{R}i$, entonces $\mathbb{C}$ es un módulo de tipo $\mathbb{Z}_2$ graduado. A continuación se verifica que $\mathbb{C}$ es un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$.*
  Si $A^0 = \mathbb{R}$ y $A^1 = \mathbb{R}i$, entonces:

$A^0A^1 := \{abi : a, b \in \mathbb{R}\} = A^1 \subseteq A^{1+0}$. Por otra parte:

$A^1A^1 := \{(ai)(bi) : a, b \in \mathbb{R}\} = A^0 \subseteq A^{1+1}$.

Así finalmente se tiene que $\mathbb{C}$ es un álgebra graduada de tipo $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Q}$.

- *Un ejemplo de subálgebra graduada. Sea $B = B^0 \bigoplus B^1$, donde $B^0 = \mathbb{Q}$ y $B^1 = \mathbb{Q}i$, se puede comprobar que B es cerrado bajo el producto, además $B^0 = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = A^0$ y $B^1 = \mathbb{Q}i \subseteq \mathbb{R}i = A^1$.*

  Así finalmente se tiene que B es subálgebra graduada de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{Q}$.

- *Se pueden construir álgebras graduadas con las extensiones de campo de $\mathbb{Q}$. Por ejemplo $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} \bigoplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$ es graduado sobre $\mathbb{Q}$, haciendo un proceso similar al de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{R}i$.*

Definición 2.2.4. *Sea A un álgebra graduada de tipo Δ sobre un campo de característica distinta de dos y con función de paridad ψ, se dice que A es **conmutativa** si para cada par de elementos homogéneos $x \in A^\alpha$ y $y \in A^\beta$ se cumple que $xy = (-1)^{\psi(x)\psi(y)}yx$.*

Definición 2.2.5. *Sea A un álgebra graduada de tipo Δ sobre un campo de característica distinta de dos, y con función de paridad ψ, se dice que A es **anticonmutativa** si para cada par de elementos homogéneos $x \in A^\alpha$ y $y \in A^\beta$ se cumple que $xy = -(-1)^{\psi(\alpha)\psi(\beta)}yx$.*

La clásica notación de conmutatividad y anticonmutatividad son obtenidas tomando ψ trivial esto es $\psi(\Delta) = 0$. Si Δ es el grupo aditivo de los números enteros y la función de paridad es la función canónica caracterizada por $\psi(0_{\mathbb{Z}}) = 0_{\mathbb{Z}_2}$, $\psi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathbb{Z}_2}$, se tiene que para $x \in A^\alpha$ y $y \in A^\beta$, $(-1)^{\psi(\alpha)\psi(\beta)} = (-1)^{\alpha\beta}$; por abuso de notación en este documento se escribe $(-1)^\alpha\beta$ en general para Δ y ψ, así $(-1)^{\alpha\beta} = -1$ si ambos α y β son impares, en otro caso $(-1)^{\alpha\beta} = 1$. Además, se considera $\mathbb{Z}$ como una grupo conmutativo con paridad la función canónica.

Sea A un álgebra graduada de tipo Δ. Un A-módulo (a izquierda) es un módulo graduado M de tipo Δ junto con una acción de A, definida por $A \times M \longrightarrow M$ tal que

$(x, m) \longrightarrow xm.$

Sea A un álgebra conmutativa de tipo Δ y M, N A-módulos de tipo Δ. Una función A-lineal de grado i, es una función lineal $f : M \longrightarrow N$ de grado i como módulos, tal que $f(xm) = (-1)^{i|x|}xf(m)$, para elementos homogéneos $x \in A$ y $m \in M$.

Estas funciones A-lineales forman un submódulo graduado de módulo $Hom(M, N)$ y se notan por $Hom_A(M, N)$, puesto que $(Hom_A(M, N))^i \subseteq (Hom(M, N))^i$

A continuación se observa que $Hom_A(M, N)$ es un A-módulo con la acción:

$$(xf)(m) = (-1)^{|x||f|}f(xm)$$

En efecto, como f es función A-lineal: Si $x, y \in A$ y $f \in Hom_A(M, N)$, entonces
$[(x + y)f](m) = [xf + yf]f(m).$

$= [xf](m) + [yf](m).$

$= (-1)^{|x||f|}f(xm) + (-1)^{|y||f|}f(ym).$

Además, $(xy)f(m) = (-1)^{|xy|}f(xym) = (-1)^{|x|+|y|}f(xym)$. Por otra parte
$x(yf)(m) = x(-1)^{|y|}f(ym) = (-1)^{|x|}(-1)^{|y|}f(xym) = (-1)^{|x|+|y|}f(xym).$

Sea $x \in A$ y $f, g \in Hom_A(M, N)$ con $|f| = |g|$, entonces
$(x(f + g)(m)) = x(f + g)(m) = (-1)^{|x||f+g|}(f + g)(xm) = (-1)^{|x||f|}[f(xm) + g(xm)].$
por otra parte
$xf(m) + xg(m) = (-1)^{|x||f|}f(xm) + (-1)^{|x||g|}g(xm).$

$= (-1)^{|x||f|}[f(xm) + g(xm)].$

Por lo tanto $Hom_A(M, N)$ es un A- módulo.

2.3. Álgebra de Lie graduada

Esta sección trata acerca de álgebras de Lie graduadas y de su construcción, ya que en estas álgebras se basan las construcciones de los ejemplos de derivaciones por medio de la función adjunta de la cual se tratará más adelante.

Definición 2.3.1. *Un **álgebra de Lie graduada** de tipo Δ sobre un campo $\mathbb{K}$ de característica distinta de dos, es un espacio vectorial graduado $E = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} E^{\alpha}$ sobre $\mathbb{K}$ junto a una función bilineal*

$$\begin{array}{rcl} [\ ,\ ]\ :\ E\times E & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longrightarrow & [a,b] \end{array}$$

la cual satisface las siguientes condiciones:

1. *$[E^{\alpha},E^{\beta}] \subseteq E^{\alpha+\beta}$, para $\alpha,\beta\in\Delta$.*
2. *Si $a\in E^{\alpha}$ y $b\in E^{\beta}$, entonces $[a,b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b,a]$.*
3. *Si $a\in E^{\alpha}$, $b\in E^{\beta}$ y $c\in E^{\gamma}$, entonces*
$(-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c] + (-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a] + (-1)^{\gamma\beta}[[c,a],b] = 0$.

El producto conmutador se define sobre un álgebra asociativa (sin graduar) para darle estructura de álgebra de Lie como se vio en el **Teorema 1.4.1**, de manera similar se obtiene el siguiente teorema para álgebras graduadas asociativas, al tomar un producto conmutador graduado.

Teorema 2.3.1. *Sea $A = \bigoplus_{\alpha} A^{\alpha}$ un álgebra graduada asociativa. El espacio vectorial graduado subyacente de A con el producto definido por $[a,b] = ab-(-1)^{\alpha\beta}ba$ para $a\in A^{\alpha}$, $b\in A^{\beta}$, es un álgebra de Lie graduada.*

Demostración.
1. Sean $a\in A^{\alpha}$ y $b\in A^{\beta}$, entonces $[a,b] = ab-(-1)^{\alpha\beta}ba$, ahora como A es álgebra graduada entonces ab y $ba\in A^{\alpha+\beta}$ y por la cerradura de la suma $[A^{\alpha},A^{\beta}]\subseteq A^{\alpha+\beta}$.

2. Sean $a\in A^{\alpha}$, $b\in A^{\beta}$, luego $[b,a] = ba-(-1)^{\alpha\beta}ab$, así

$$-(-1)^{\alpha\beta}[b,a] = -(-1)^{\alpha\beta}(ba - (-1)^{\alpha\beta}ab).$$

$$= -(-1)^{\alpha\beta}ba + (-1)^{(\alpha\beta)}(-1)^{(\alpha\beta)}ab.$$

$$= ab - (-1)^{\alpha\beta}ba.$$

$$= [a,b].$$

3. Se inicia calculando $(-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c]$, esto es

$$(-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c] = (-1)^{\alpha\gamma}[ab - (-1)^{\alpha\beta}ba, c].$$

$$= (-1)^{\alpha\gamma}([ab,c] - (-1)^{\alpha\beta}[ba,c]).$$

$$= (-1)^{\alpha\gamma}abc - (-1)^{\beta\gamma}cab - (-1)^{\alpha\beta+\alpha\gamma}bac + (-1)^{\alpha\beta+\gamma\beta}cba.$$ Similarmente se obtiene:

$$(-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a] = (-1)^{\alpha\beta}bca - (-1)^{\alpha\gamma}abc - (-1)^{\beta\gamma+\alpha\beta}cba + (-1)^{\alpha\beta+\beta\alpha}acb.$$

$$(-1)^{\gamma\alpha}[[c,a],b] = (-1)^{\gamma\beta}cab - (-1)^{\alpha\beta}bca - (-1)^{\alpha\beta+\gamma\beta}acb + (-1)^{\alpha\gamma+\alpha\beta}bac.$$ Así sumando las expresiones anteriores $(-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c] + (-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a] + (-1)^{\gamma\beta}[[c,a],b] = 0$ se tiene que se cumple **3.** $\square$

Como ejemplo particular sea $V = \bigoplus_\alpha V^\alpha$ un espacio vectorial graduado. Como se vio antes $End(V)$ tiene una estructura de álgebra graduada asociativa con la composición de funciones, aplicando el **Teorema 2.3.1** a esta estructura, se obtiene el álgebra de Lie graduada derivada de $End(V)$, es denotado por $gl(V) = \bigoplus gl^\alpha(V)$.

Note que si f, g son endomorfismos de V de grado impar, entonces $[f,g] = f \circ g + g \circ f$; así que este caso $[f,g]$ no es similar al caso de álgebras de Lie sin graduar, ya que en álgebras de Lie sin graduar se tiene que $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

2.4. Álgebras graduadas sobre campos de característica dos

El concepto de álgebra graduada que se presentó en la **Definición 2.2.1** sobre campos de característica dos no cambia, pero se puede observar que se debe ajustar la definición de conmutatividad y anticonmutatividad, ya que toda álgebra conmutativa va a ser anticonmutativa y viceversa, ya que $1 \equiv -1 \mod 2$, por eso se introducen conceptos de débil conmutatividad, débil anticonmutatividad, fuerte conmutatividad y fuerte anticonmutatividad.

Definición 2.4.1. *Un álgebra graduada es llamada* ***débilmente conmutativa*** *si $ab = ba$ para todo $a, b \in A$ y $aa = 0$ para todo $a \in A^\alpha$ y α impar; un álgebra es llamada* ***débilmente anticonmutativa*** *si $ab = ba$ para todo $a, b \in A$ y $aa = 0$ para todo $a \in A^\alpha$ y α par.*

Definición 2.4.2. *Un álgebra graduada* ***fuertemente conmutativa*** *es un álgebra graduada sobre un campo $\mathbb{K}$ de característica 2 en la cual además del producto bilineal se define una función*

$$\begin{aligned} Q \ : A' &\longrightarrow A \\ a &\longrightarrow Q[a] \end{aligned}$$

donde $A' = \bigoplus_{\alpha \in P} A^\alpha$ y $\bar{A} = \bigoplus_{\alpha \in I} A^\alpha$, donde P son los elementos pares de Δ e I son los elementos impares de Δ que satisface:

$$\begin{cases} \mathbf{1}. \ \ ab = ba & \text{para todo } a, b \in A. \\ \mathbf{2}. \ \ aa = 0 & \text{para todo } a \in A^\alpha \text{ y } \alpha \text{ impar.} \\ \mathbf{3}. \ \ Q[A^\alpha] \subseteq A^{2\alpha} & \text{para } \alpha \text{ par.} \\ \mathbf{4}. \ \ Q[ka] = k^2 Q[a] & \text{para } k \in \mathbb{K}\ ,\ a \in A'. \\ \mathbf{5}. \ \ Q[a+b] = Q[a] + Q[b] + ab & \text{para todo } a, b \in A'. \end{cases} \tag{2}$$

De manera análoga se define ***fuertemente anticonmutativa*** *cambiando en (2) la condición* **2** *por α par la condición* **3** *por α impar y las condiciones* **4** *y* **5** *reemplazar A' por $\bar{A}$.*

De la condición **5.** con $a = b$ se tiene que $aa = Q[2a] + 2Q[a] = 0$ para $a \in A'$. En efecto

$Q[a + a] = Q[a] + Q[a] + aa$. Por (2)
$Q[0] = aa$. Pues $\mathbb{K}$ es de característica 2.
Por otra parte por la propiedad **4** de (2), si $w \in A'$, entonces $Q[0w] = Q[0] = 0$.

Por tanto, $aa = Q[2a] + 2Q[a] = 0$.

También, de manera similar se satisface $aa = Q[2a] + 2Q[a] = 0$ para $a \in \bar{A}$.
En el siguiente capítulo se ofrecen algunos ejemplos al respecto de estas últimas definiciones.

3. DERIVACIONES

Las derivaciones son funciones importantes por sus diversas aplicaciones, una de ellas es para calcular máximos y mínimos de funciones, tanto en una variable como en multivariable, sin embargo en este capitulo, se toman en consideración derivaciones aplicados principalmente a álgebras graduadas y sus propiedades, las cuales son una generalización de las derivadas.

3.1. Derivación sin graduar y graduada

En esta sección se definen las derivaciones, sus propiedades principales, así en base a estas funciones se construyen álgebras graduadas para aplicar estas derivaciones y se intenta generalizar una derivación en una derivación graduada.

Según las notas de álgebra de Lie [8]:

Definición 3.1.1. *Sea A un álgebra. Una* ***derivación*** *es un homomorfismo $D : A \longrightarrow A$ tal que*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{3}$$

Para todo $a, b \in A$

Ejemplo 3.1.1. *Sea F el conjunto de las funciones diferenciales en $\mathbb{R}$, F es un álgebra con el producto de funciones ya que satisface la* ***Definición 1.4.1****. Aplicando*

$$\begin{aligned} D \ : F &\longrightarrow F \\ f &\longrightarrow f' \end{aligned}$$

es una derivación, pues satisface (3)*.*

Ejemplo 3.1.2. *Sea* $\mathbb{R}[x]$ *el álgebra con el producto de polinomios, aplicando*

$$\begin{array}{rcl} D \ : \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ q(x) & \longrightarrow & q'(x) \end{array}$$

es una derivación, ya que satisface (3)*.*

Definición 3.1.2. *Sea* A *un álgebra graduada. Una* ***derivación graduada*** *es una transformación lineal de grado* k *tal que*

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{k|a|}aD(b) \tag{4}$$

Para todo $a, b \in A$*.*

Ejemplo 3.1.3. *El objetivo de este ejemplo es construir un álgebra graduada mediante un álgebra sin graduar y además construir una derivación graduada en base de una derivación sin graduar.*

En este ejemplo se considera el subconjunto A *de matrices cuadradas de orden 3 con entradas reales* (*ver* [5])

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} y & y & 0 \\ n & n & 0 \\ r & r & 0 \end{pmatrix} : r, n, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Este conjunto es un álgebra bajo el producto usual de matrices, en efecto

- *Sean* $A_0, A_1 \in A$*, con* $A_0 = \begin{pmatrix} y_0 & y_0 & 0 \\ n_0 & n_0 & 0 \\ r_0 & r_0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $A_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & 0 \\ n_1 & n_1 & 0 \\ r_1 & r_1 & 0 \end{pmatrix}$

  con $y_i, n_i, r_i \in \mathbb{R}$*,* $i = \{0, 1\}$*, entonces*

$$A_0A_1 = \begin{pmatrix} y_0y_1 + y_0n_1 & y_0y_1 + y_0n_1 & 0 \\ n_0y_1 + n_0n_1 & n_0y_1 + n_0n_1 & 0 \\ r_0y_1 + r_0n_1 & r_0y_1 + r_0n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, $A_0A_1 \in A$*, por lo tanto es cerrado bajo el producto usual de matrices.*

Ahora se considera el elemento

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ e & f & g \end{pmatrix}$$

el cual satisface $XU = 0$ *y* $UX \in A$ *para todo* $X \in A$ *en efecto:*

Sea $X = \begin{pmatrix} y & y & 0 \\ n & n & 0 \\ r & r & 0 \end{pmatrix}$*, entonces*

$$XU = \begin{pmatrix} y & y & 0 \\ n & n & 0 \\ r & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ e & f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ya - ya & yb - yb & 0 \\ na - na & nb - nb & 0 \\ ra - ra & rb - rb & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

por lo anterior se define la función $D : A \longrightarrow A$ *dada por*

$$D(X) = UX = \begin{pmatrix} ay + bn + cr & ay + bn + cr & 0 \\ -ay - bn - cr & -ay - bn - cr & 0 \\ ey + fn + gr & ey + fn + gr & 0 \end{pmatrix}$$

que satisface (3)*, en efecto*

- *Sean* $X, Y \in A$*, entonces* $D(X + Y) = U(X + Y) = U(X) + U(Y)$*, para todo* $X, Y \in A$*.*

- *Sean* $X \in A$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces* $D(\alpha X) = U(\alpha X) = \alpha UX = \alpha D(X)$ *para todo*

$X \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Sean* $X, Y \in A$, *inicialmente* $D(XY) = UXY$.
  Luego $D(X)Y + XD(Y) = UXY + (XU)Y = UXY$, *por* $(*)$.

Para pasar al caso graduado se define la siguiente estructura, sea $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$, *donde*

$$A^i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

para los $i < 3$ *y*

$$A^i = \left\{ \begin{pmatrix} y & y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r & r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{i \times i} : y, n, r \in \mathbb{R} \right\}$$

para $i \geq 3$.

Sea $B \in A^i$, $C \in A^j$ *con* $i \geq j$ *entonces* C *será representado en* A^i *completando con ceros y se efectúa la suma componente a componente, es decir* $B +_A C \in A^i$.

Sea $B \in A^i$, $C \in A^j$ *con* $i < j$ *entonces* B *será representado en* A^j *completando con ceros y se efectúa la suma componente a componente, es decir* $B +_A C \in A^j$.

Sea $B \in A^i$, $C \in A^j$ *con* $i \geq j$ *entonces* C *será representado en* A^i *completando con ceros y se efectúa el producto usual de matrices y luego se representa en* A^{i+j}, *es decir* $B \bullet_A C \in A^{i+j}$.

Sea $B \in A^i$, $C \in A^j$ *con* $i < j$ *entonces* B *será representado en* A^j *completando con* *ceros y se efectúa el producto usual de matrices y luego se representa en A^{i+j}, es decir $B \bullet_A C \in A^{i+j}$.*

Se identifica que cada A^i es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, pues cada A^i cumple con la definición de espacio vectorial con la suma $+_A$ y producto por escalar usual de matrices. Ahora como $A^i \bullet_A A^j \subseteq A^{i+j}$, se tiene que A es un álgebra graduada sobre $\mathbb{R}$.

Además se observa que el unitario a derecha para A^3 es el elemento

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $X = \begin{pmatrix} y & y & 0 \\ n & n & 0 \\ r & r & 0 \end{pmatrix}$, *entonces*

$$XI_3 = \begin{pmatrix} y & y & 0 \\ n & n & 0 \\ r & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & y & 0 \\ n & n & 0 \\ r & r & 0 \end{pmatrix}$$

Al considerar $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ e & f & g \end{pmatrix}$ *y $X \in A^3$, como se vío antes $UX \in A^3$, ahora el objetivo es extender a U para definir una derivación graduada en A, por tanto se nota* *por U_i al elemento U extendido a tamaño $i \times i$ dado de la siguiente manera.*

$$U_i = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & -b & -c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e & f & g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{i\times i}$$

Para A sin graduar, $D(X) = UX$ es una derivación.

Para subir este concepto al álgebra graduada A se define la siguiente función lineal D donde $D(B) = U_i B$ para $B \in A^i$, donde se representa la matriz U en el tamaño requerido, así D es de grado cero, pues $D(A^i) \subseteq A^i$ para todo $i \geq 3$, con $i \in \mathbb{Z}$.

La función lineal D se puede ilustrar como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccc} D: & \dots & 0 & 0 & A^3 & A^4 & \dots & A^n & \dots \\ & & \downarrow{\scriptstyle D^1} & \downarrow{\scriptstyle D^2} & \downarrow{\scriptstyle D^3} & \downarrow{\scriptstyle D^4} & & \downarrow{\scriptstyle D^n} & \\ & \dots & 0 & 0 & A^3 & A^4 & \dots & A^n & \dots \end{array}$$

Ahora se verifica que esta nueva derivación es graduada, Por medio del siguiente resultado.

Resultado 3.1.1. *Sea $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$, donde*

$$A^i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

para $i < 3$ y

$$A^i = \left\{ \begin{pmatrix} y & y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r & r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{i\times i} : y, n, r \in \mathbb{R} \right\}$$

para $i \geq 3$. El álgebra definida anteriormente, entonces $B \bullet_A (U_j C) = (BU_i) \bullet_A C = 0$. Para todo $B \in A^i$, $C \in A^j$ con $i, j \geq 3$.

Demostración.

Se consideran los cálculos para $X, Y \in A^3$, ya que los otros casos son extensiones de ceros en filas y columnas.

Sean $X = \begin{pmatrix} y_0 & y_0 & 0 \\ n_0 & n_0 & 0 \\ r_0 & r_0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & 0 \\ n_1 & n_1 & 0 \\ r_1 & r_1 & 0 \end{pmatrix}$ y $U_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ e & f & g \end{pmatrix}$

Por una parte $(XU_3) \bullet_A Y = 0$, ya que $XU = 0$, para todo $X \in A$

Por otra parte $U_3 Y = \begin{pmatrix} ay_1 + bn_1 + cs_1 & ay_1 + bn_1 + cs_1 & 0 \\ -ay_1 - bn_1 - cs_1 & -ay_1 - bn_1 - cs_1 & 0 \\ dy_1 + en_1 + fs_1 & dy_1 + en_1 + fs_1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea $q_0 = ay_1 + bn_1 + cs_1$ y $q_1 = dy_1 + en_1 + fs_1$, entonces

$$X \bullet_A (U_3 Y) = \begin{pmatrix} y_0q_0 - y_0q_0 & y_0q_0 - y_0q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_0q_0 - n_0q_0 & n_0q_0 - n_0q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_0q_1 - s_0q_1 & s_0q_1 - s_0q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Corolario 3.1.1 *La función $D : A \longrightarrow A$ dada por*

$$D(B) = U_i B$$

para todo $B \in A^i$ y todo $i \geq 3$ con $i \in \mathbb{Z}$, es una derivación graduada

Demostración.

- Sea $X \in A^i$, $Y \in A^j$ con $i \geq j$, entonces $X +_A Y \in A^i$, así $D(X +_A Y) = U_i X +_A U_i Y$, como $i \geq j$ entonces $U_i Y$ no se puede resolver bajo la operación usual de matrices, pero se identifica a U_i borrando filas y columnas de ceros hasta obtener U_j y así poder operar con el producto usual de matrices. así, $U_i X +_A U_j Y = D(X) +_A D(Y)$ para todo $X, Y \in A$.

- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X \in A^i$, entonces $D(\alpha X) = U_i \alpha X = \alpha U_i X$. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X \in A$.

- Sea $X \in A^i$, $Y \in A^j$ con $i \geq j$, entonces $X \bullet_A Y \in A^{i+j}$, por una parte $D(X \bullet_A Y) = U_{i+j}(X \bullet_A Y)$, por otra parte $D(x) \bullet_A Y +_A X \bullet_A D(Y) = (U_i X) \bullet_A Y +_A (-1)^{|D||x|} X \bullet_A (U_j Y) = (U_i X) \bullet_A Y +_A 0$.

La ultima igualdad se obtiene por **Resultado 3.1.1**, así se cumple (4).

□

Así, se obtuvo una derivación graduada para el álgebra graduada que se describió anteriormente.

3.2. Construcciones en base a álgebras de Lie

En esta sección el objetivo es obtener una derivación en base a la construcción de álgebras de Lie graduadas, ya que con esto se verifica que el adjunto de un elemento es una derivación graduada y se construirá un álgebra de Lie graduada a partir de un álgebra graduada asociativa. Y una vez obtenida el álgebra de Lie graduada, se aplica el adjunto de un elemento.

Ejemplo 3.2.1. *Sea el álgebra graduada asociativa definida en el* ***Ejemplo 2.2.1*** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}\bigoplus\mathbb{Q}\sqrt{2}$, *y al aplicar el corchete de Lie graduado visto en la* ***Teorema 2.3.1****. Se tiene que* $(Q(\sqrt{2}), [\ ,\ ])$ *es un álgebra de Lie graduada. Se observa a continuación casos particulares de las las tres condiciones vistas en la* ***Definición 2.3.1*** *que en efecto se satisfacen:*

$$\begin{array}{rcl} [\ ,\ ]\ :\ \mathbb{Q}(\sqrt{2})\times\mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ (a,b) & \longrightarrow & [a,b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba \end{array}$$

- Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces $[a,b] = ab - ba = 0$.
- Si $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, entonces $[a,b] = ab - ba = 0$.
- Si $a, b \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, entonces $[a,b] = ab + ba = q \in \mathbb{Q}$.

Además, se tiene que $[a,b] = -(-1)^{|a||b|}[b,a]$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, puesto que:

- Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces

  $-(-1)^{|a||b|}[b,a] = -(-1)^{(0)(0)}[b,a] = -(ba - (-1)^{(0)(0)}ab) = 0 = [a,b]$.

- Si $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$ entonces

  $-(-1)^{|a||b|}[b,a] = -(-1)^{(0)(1)}[b,a] = -(ba - (-1)^{(0)(1)}ab) = 0$.

- Si $a, b \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, entonces

  $-(-1)^{|a||b|}[b,a] = -(-1)^{(1)(1)}[b,a] = ba - (-1)^{(1)(1)}ab) = [a,b]$.

Y se cumple la identidad de Jacobi extendida a álgebras graduadas,$(-1)^{\alpha\gamma}[[a,b],c] + (-1)^{\beta\alpha}[[b,c],a] + (-1)^{\gamma\beta}[[c,a],b] = 0$ en particular:

- Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$, entonces

  $(-1)^{(0)(0)}[0,c] + (-1)^{(0)(0)}[0,a] + (-1)^{(0)(0)}[0,b] = 0$.

- Si $a, b \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$ y $c \in \mathbb{Q}$, entonces

  $(-1)^{(0)(1)}[ab + ba, c] + (-1)^{(0)(0)}[0, a] + (-1)^{(1)(0)}[0, b] = 0.$

  ya que $ab + ba \in \mathbb{Q}$.

- Si $a, b, c \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, entonces

  $(-1)^{(0)(1)}[ab + ba, c] + (-1)^{(0)(0)}[bc + cb, a] + (-1)^{(1)(0)}[ca + ac, b] = 0.$

  ya que $ab + ba$,$bc + cb$ y $ca + ac$ pertenecen a $\mathbb{Q}$.

Cabe resaltar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ visto con la estructura de campo es conmutativo, pero no lo es como álgebra graduada, ya que si lo fuera, se cumpliría que $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y por ejemplo

$$(\sqrt{2})(3\sqrt{2}) \neq (-1)^{|\sqrt{2}||3\sqrt{2}|}(3\sqrt{2})(\sqrt{2}),$$

ya que $|\sqrt{2}| = |3\sqrt{2}| = 1$ y por tanto $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ como álgebra graduada no es conmutativa.

Ahora al considerar $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} \bigoplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$ como álgebra graduada de tipo $\mathbb{Z}_2$ y al definir la función

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{ad_a} & : & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & & b & \longrightarrow & [a, b] \end{array} \tag{5}$$

conocida como el **adjunto de $\boldsymbol{a}$**, se garantizan dos clases de derivaciones en el corolario **3.2.1**. En general se tiene el siguiente resultado para álgebras de Lie graduadas.

Teorema 3.2.1. *Sea $(E, [\ ,\ ])$ un álgebra de Lie graduada, entonces $\boldsymbol{ad_a}$ es una derivación graduada de grado $|a|$.*

Demostración.

Primero se observa que para todo $a, b, c \in E$ se satisface que $|\boldsymbol{ad_a}| = |a|$, en efecto, $\boldsymbol{ad_a}(b) = [a, b] \in E^{|b|+|a|}$ y según la **Definición 3.1.2**, para demostrar que $\boldsymbol{ad_a}$ es una derivación graduada se debe probar que

$$\boldsymbol{ad_a}(bc) = \boldsymbol{ad_a}(b)c + (-1)^{|\boldsymbol{ad_a}||b|}b\boldsymbol{ad_a}(c)$$

Para el primer lado de la igualdad: $\boldsymbol{ad_a}(bc) = [a, bc] = a(bc) - (-1)^{|a|(|b|+|c|)}(bc)a.$

Para el segundo lado de la igualdad:
$\boldsymbol{ad_a}(b)c + (-1)^{|a||b|}b\boldsymbol{ad_a}(c).$
$= [a, b]c + (-1)^{|a||b|}b[a, c].$
$= (ab - (-1)^{|a||b|}ba)c + (-1)^{|a||b|}b(ac - (-1)^{|a||c|}ca).$
$= (ab)c - (-1)^{|a||b|}(ba)c + (-1)^{|a||b|}(ba)c - (-1)^{|a|(|b|+|c|)}(bc)a.$
$= (ab)c - (-1)^{|a|(|b|+|c|)}(bc)a.$
en consecuencia $\boldsymbol{ad_a}$ es una derivación de grado $|a|$. □

Corolario 3.2.1. *Sea $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} \bigoplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$ considerada como álgebra graduada de tipo $\mathbb{Z}_2$. Si $a \in \mathbb{Q}$, entonces $\boldsymbol{ad_a}$ es una derivación de grado cero y si $a \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, entonces $\boldsymbol{ad_a}$, es derivación de grado 1.*

Demostración. Por teorema anterior $\boldsymbol{ad_a}$ es de grado cero, cuando a es de grado cero, aunque esta representa una derivación trivial.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{ad_a}: & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[d, "\boldsymbol{ad_a}^0"'] & \mathbb{Q}\sqrt{2} \arrow[d, "\boldsymbol{ad_a}^1"] \\
& \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = & \mathbb{Q} & \mathbb{Q}\sqrt{2}
\end{tikzcd}$$

Por teorema anterior $\boldsymbol{ad_a}$ es de grado uno, cuando $a \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{ad_a}: & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[dr, "\boldsymbol{ad_a}^0"'] & \mathbb{Q}\sqrt{2} \arrow[dr, "\boldsymbol{ad_a}^1"] & \\
& \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = & & \mathbb{Q}\sqrt{2} & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

□

Ejemplo 3.2.2. ***Representación adjunta de*** $\boldsymbol{sl(2,\mathbb{R})}$

Considerando [7] *para la representación adjunta de* $sl(2,\mathbb{R})$*, se tiene que:*

$$sl(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Este conjunto de matrices de orden 2 de traza cero, es un álgebra asociativa con el producto de matrices, ya que satisface la ***Definición* 1.4.2***; por tanto al aplicar el* ***Teorema* 1.4.1** *se genera un álgebra de Lie con producto binario: el corchete de Lie.*

Una base de $sl(2,\mathbb{R})$ *es el conjunto* $\{X,Y,H\}$*. Donde*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Pues para todo $W \in sl(2,\mathbb{R})$ *con* $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$*, se tiene que* $W = bX + aH + cY$*, así* $sl(2,\mathbb{R}) =< X > \bigoplus < H > \bigoplus < Y >$*.*

El álgebra de lie $sl(2,\mathbb{R})$ *satisface las siguientes condiciones*

$$\begin{cases} [X,Y] = H \quad y \quad [Y,X] = -H & (6,1) \\ [H,Y] = -2Y \quad y \quad [Y,H] = 2Y & (6,2) \\ [H,X] = 2X \quad y \quad [X,H] = -2X & (6,3) \\ [W,0] = 0 \quad y \quad [0,W] = 0 & (6,4) \end{cases} \tag{6}$$

Con la relación (6) *se puede identificar a* $sl(2,\mathbb{R})$ *como un álgebra graduada de tipo* $\mathbb{Z}$ *asumiendo:*

$g^{-1} =< X >$*,* $g^0 =< H >$ *y* $g^{-1} =< Y >$ *y* $g^j = 0_{sl(2,\mathbb{R})}$ *para* $j \leq -2$ *y* $j \geq 2$ *con* $j \in \mathbb{Z}$

ya que:

$$\begin{cases} [g^{-1}, g^{0}] \subseteq g^{-1} & de \quad (6{,}1) \\ [g^{0}, g^{1}] \subseteq g^{1} & de \quad (6{,}2) \\ [g^{1}, g^{-1}] \subseteq g^{0} & de \quad (6{,}3) \\ [g^{j}, g^{k}] = 0 \subseteq g^{j+k}, j \in \mathbb{Z} \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)), k \in \mathbb{Z} & de \quad (6{,}4) \end{cases}$$

así $sl(2, \mathbb{R})$ *es un álgebra graduada tipo* $(I, +)$, *donde* $I = \{-1, 0, 1\}$.

Por tanto, $sl(2, \mathbb{R}) = \cdots = 0 \bigoplus g^{-2} \bigoplus g^{-1} \bigoplus g^{0} \bigoplus g^{1} \bigoplus g^{2} \bigoplus 0 \cdots$.
Se estudiará la derivación adjunta similar a (5) para cada uno de los elementos de la base, es decir se identifica $\boldsymbol{ad_X}$, $\boldsymbol{ad_H}$, $\boldsymbol{ad_Y}$.

$\boldsymbol{ad_X}$ *se define de la siguiente manera.*

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{ad_X} & : sl(2, \mathbb{R}) & \longrightarrow & sl(2, \mathbb{R}) \\ & B & \longrightarrow & [X, B] \end{array}$$

Cumple las siguientes relaciones

- $\boldsymbol{ad_X(X)} = [X, X] = 0X + 0H + 0Y$.
- $\boldsymbol{ad_X(H)} = [X, H] = -2X + 0H + 0Y$.
- $\boldsymbol{ad_X(Y)} = [X, Y] = 0X + H + 0Y$.

Así la representación matricial de la derivación $\boldsymbol{ad_X}$ *es*

$$\boldsymbol{ad_X} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

donde las columnas son los escalares de la representación adjunta en la base X, Y, H.

así se tiene que.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{ad_X} : & sl(2,\mathbb{R}) = \arrow[d] & < X > & < H > \arrow[dl] & < Y > \arrow[dl] \\
 & sl(2,\mathbb{R}) = & < X > & < H > & < Y >
\end{tikzcd}$$

La pregunta que se desea responder es ¿$\boldsymbol{ad_X}$ *puede generalizarse a derivación graduada de grado* -1*?*

Se debe probar que se cumple la ***Definición*** **3.1.2**. *En particular debe cumplirse la igualdad*

$$\boldsymbol{ad_X}([X,Y]) = [\boldsymbol{ad_X}(X), Y] + (-1)^{|\boldsymbol{ad_X}||X|}[X, \boldsymbol{ad_X}(Y)]$$

Al analizar cada lado de la igualdad se tiene

$\boldsymbol{ad_X}[X,Y] = [X,H]$.
$[[X,X],H] + (-1)^{|X||X|}[X,[X,Y]] = -[X,H]$.
$[X,H] \neq -[X,H]$.
Por lo tanto, $\boldsymbol{ad_X}$ *no es una derivación de grado* -1 *sobre* $sl(2,\mathbb{R})$.

Nota *Con la respuesta anterior se garantiza que* $sl(2,\mathbb{R})$ *vista como álgebra graduada de tipo* $(I,+)$ *no es álgebra de Lie graduada por el contra recíproco del* ***Teorema*** **3.2.1**. *Sin embargo, se continua con el análisis de* $\boldsymbol{ad_H}$ *y* $\boldsymbol{ad_Y}$.

Se define $\boldsymbol{ad_H}$ *de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ad_H} \; : \; sl(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow sl(2,\mathbb{R}) \\ B &\longrightarrow [H,B] \end{aligned}$$

Cumple las siguientes relaciones

- $\boldsymbol{ad_H(X)} = [H,X] = 2X + 0H + 0Y$.
- $\boldsymbol{ad_H(H)} = [H,H] = 0X + 0H + 0Y$.

- $\boldsymbol{ad_H(Y)} = [H, Y] = 0X + 0H - 2Y.$

Así la representación matricial de la derivación $\boldsymbol{ad_H}$ se obtiene de manera análoga a la anterior.

$$\boldsymbol{ad_H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

así se tiene que.

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{ad_H}: & sl(2,\mathbb{R}) = & <X> & <H> & <Y> \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & sl(2,\mathbb{R}) = & <X> & <H> & <Y> \end{array}$$

La pregunta que se desea responder es ¿$\boldsymbol{ad_H}$ puede generalizarse como derivación graduada de grado 0?

*Se debe probar que se cumple la **Definición 3.1.2**. Sean $A, B \in sl(2,\mathbb{R})$, entonces*

$$\boldsymbol{ad_H}([A,B]) = [\boldsymbol{ad_H}(A), B] + (-1)^{|\boldsymbol{ad_H}||A|}[A, \boldsymbol{ad_H}(B)]$$

Esto es $[H,[A,B]] = [[H,A],B] + (-1)^{0|A|}[A,[H,B]]$.

*Lo cual se satisface por la identidad de Jacobi ítem ii) de la **Definición 1.4.2** y por **Teorema 1.4.1**, en efecto*

$[[H,A],B] + [[A,B],H] + [[B,H],A] = 0.$
$-[H,[A,B]] - [[H,A],B] - [A,[H,B]] = 0.$

Por lo tanto $\boldsymbol{Ad_H}$ puede generalizarse como derivación graduada de grado 0 sobre $sl(2,\mathbb{R})$.

Por último $\boldsymbol{ad_Y}$ *se define como*

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{ad_Y} & : sl(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & sl(2,\mathbb{R}) \\ & B & \longrightarrow & [Y,B] \end{array}$$

Cumple las siguientes relaciones

- $\boldsymbol{ad_Y(X)} = [Y,X] = 0X - 1H + 2Y.$
- $\boldsymbol{ad_Y(H)} = [Y,H] = 0X + 0H + 2Y.$
- $\boldsymbol{ad_Y(Y)} = [Y,Y] = 0X + 0H + 0Y.$

En representación matricial de la derivación $\boldsymbol{ad_Y}$ *se obtiene de manera análoga a las anteriores.*

$$\boldsymbol{ad_Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

así se tiene que.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{ad_Y}: & sl(2,\mathbb{R}) = \arrow[d] & < X > \arrow[dr] & < H > \arrow[dr] & < Y > \\ & sl(2,\mathbb{R}) = & < X > & < H > & < Y > \end{tikzcd}$$

La pregunta que se desea responder es ¿$\boldsymbol{ad_Y}$ *puede generalizarse como derivación de grado 1?*

Se debe probar que se cumple la ***Definición 3.1.2***. *En particular debe cumplirse la igualdad*

$$\boldsymbol{ad_Y}([X,H]) = [\boldsymbol{ad_Y}(X), H] + (-1)^{|\boldsymbol{ad_Y}||A|}[X, \boldsymbol{ad_Y}(H)]$$

Calculando cada lado de la igualdad, se tiene:

$\boldsymbol{ad_Y}([X,H]) = [Y,-2X] = -2[Y,X].$

$[[Y,X],H]-[X,[Y,H]]=[-H,H]-[X,2Y]=2[Y,X].$

Así $\boldsymbol{ad_H}$ *no es derivación graduada de grado 1 sobre* $sl(2,\mathbb{R})$.

Según el ejemplo se tiene que un álgebra de Lie al hacer la representación de manera graduada, no necesariamente se obtiene un álgebra de Lie graduada, además que una derivación en un álgebra graduada no necesariamente es graduada.
A continuación, se usarán las tres derivaciones sin graduar para llegar a una subálgebra graduada de $sl(3,\mathbb{R})$ con el corchete de Lie.

Sea

$$A=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \gamma & -\beta\end{pmatrix}$$

con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Al considerar

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{AD}\ :\ sl(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & sl(3,\mathbb{R})\\ A & \longrightarrow & \boldsymbol{AD}(A)=\alpha\boldsymbol{ad_X}+\beta\boldsymbol{ad_H}+\gamma\boldsymbol{ad_Y}\end{array}$$

Con las matrices $\boldsymbol{ad_X}$, $\boldsymbol{ad_H}$, $\boldsymbol{ad_Y}$ descritas en (7), (8), (9)

$$\boldsymbol{AD}(A)=\begin{pmatrix}2\beta & -2\alpha & 0\\ -\gamma & 0 & \alpha\\ 0 & 2\gamma & -2\beta\end{pmatrix}$$

La función $\boldsymbol{AD}$ es un homomorfismo entre álgebras graduadas

$$\boldsymbol{AD}([A,B])=[\boldsymbol{AD}(A),\boldsymbol{AD}(B)]$$

en efecto

$$\text{Sea } A=\begin{pmatrix}\beta_0 & \alpha_0\\ \gamma_0 & -\beta_0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \alpha_1\\ \gamma_1 & -\beta_1\end{pmatrix}$$

$$[A,B]=\begin{pmatrix} \alpha_0\gamma_1-\alpha_1\gamma_0 & 2(\beta_0\alpha_1-\beta_1\alpha_0) \\ 2(\beta_1\gamma_0-\gamma_1\beta_0) & -(\alpha_0\gamma_1-\alpha_1\gamma_0) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{ad}[A,B]=\begin{pmatrix} 2(\alpha_0\gamma_1-\alpha_1\gamma_0) & -2(2\beta_0\alpha_1-2\alpha_0\beta_1) & 0 \\ -2\beta_1\gamma_0+2\gamma_1\beta_0 & 0 & 2\beta_0\alpha_1-2\beta_1\alpha_0 \\ 0 & 2(2\beta_1\gamma_0-2\gamma_1\beta_0) & -2(\alpha_0\gamma_1-\alpha_1\gamma_0) \end{pmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{ad}A=\begin{pmatrix} 2\beta_0 & -2\alpha_0 & 0 \\ -\gamma_0 & 0 & \alpha_0 \\ 0 & 2\gamma_0 & -2\beta_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{ad}B=\begin{pmatrix} 2\beta_1 & -2\alpha_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 2\gamma_1 & -2\beta_1 \end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{ad}A,\boldsymbol{ad}B]=\begin{pmatrix} 2(\alpha_0\gamma_1-\alpha_1\gamma_0) & -2(2\beta_0\alpha_1-2\alpha_0\beta_1) & 0 \\ -2\beta_1\gamma_0+2\gamma_1\beta_0 & 0 & 2\beta_0\alpha_1-2\beta_1\alpha_0 \\ 0 & 2(2\beta_1\gamma_0-2\gamma_1\beta_0) & -2(\alpha_0\gamma_1-\alpha_1\gamma_0) \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\boldsymbol{AD}$ no es un isomorfismo entre álgebras graduadas, pues hay elementos en $sl(3,\mathbb{R})$ que no tienen un elemento en $sl(2,\mathbb{R})$, por ejemplo, para

$$B=\begin{pmatrix} 2\beta & -2\alpha & 1 \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ 0 & 2\gamma & -2\beta \end{pmatrix}\in sl(3,\mathbb{R})$$

no existe

$$A=\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \gamma & -\beta \end{pmatrix}\in sl(2,\mathbb{R})$$

tal que $\boldsymbol{AD}(A)=B$. Así, se obtiene que la imagen del homomorfismo se puede graduar, por tanto se encuentra una subálgebra de $sl(3,\mathbb{R})$ que es posible graduar vía $\boldsymbol{AD}$ construida en base a las derivaciones $\boldsymbol{ad_X}$, $\boldsymbol{ad_Y}$, $\boldsymbol{ad_H}$.

3.3. Derivaciones en álgebras graduadas sobre campos de característica dos

En esta sección se estudian las derivaciones definidas anteriormente para determinar si un álgebra sobre un campo de característica 2 cumple otras propiedades para recibir el nombre de fuerte derivación o débil derivación.

Definición 3.3.1. *Una **débil derivación** de un álgebra graduada A sobre un campo de característica dos, es una transformación lineal de grado k $D : A \longrightarrow A$ que satisface*

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{k|a|}aD(b) = D(a)b + aD(b)$$

*Como en la **Definición 3.1.2**. Una **fuerte derivación** de una álgebra graduada fuertemente conmutativa o fuertemente anticonmutativa A, es una función $D : A \longrightarrow A$ que satisface*

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{k|a|}aD(b) = D(a)b + aD(b)$$

Y además cumple la condición

$$D(Q[a]) = D(a)a \tag{10}$$

*para $a \in A'$. Con Q descrita en **Definición 2.4.2**.*

A continuación se presentan ejemplos de débil derivación y fuerte derivación en algunas álgebras sobre $\mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.3.1. *Al Considerar el conjunto $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ con producto binario*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \\ & ((a,b),(c,d)) & \longrightarrow & (ad + bc, 0) \end{array}$$

Se tiene que:

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *es un espacio vectorial con suma y producto por escalar usual.*

- *El producto es bilineal, en efecto*

  sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *y* $k \in \mathbb{Z}_2$, *entonces*

  $\varphi((ka_1, ka_2), (b_1, b_2)) = (ka_1b_2 + ka_2b_1, k0) = k(a_1b_2 + a_2b_1, 0) = k\varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)).$

  Sean $(a_1, a_2), (a_3, a_4), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, *entonces*

  $$\begin{aligned}\varphi((a_1, a_2) + (a_3, a_4), (b_1, b_2)) &= ((a_1 + a_3)b_2 + (a_2 + a_4)b_1, 0).\\ &= (a_1b_2 + a_3b_2 + a_2b_1 + a_4b_1, 0).\\ &= \varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) + \varphi((a_3, a_4), (b_1, b_2)).\end{aligned}$$

  De manera análoga se cumple:
  $\varphi((a_1, a_2), (kb_1, kb_2)) = k\varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ *y*
  $\varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2) + (b_3, b_4)) = \varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) + \varphi((a_1, a_2), (b_3, b_4)).$

  Así φ *es bilineal.*

- *Por definición del producto, se tiene que* $\varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Por tanto se cumplen la ***Definición* 1.4.1**, *de lo cual* $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ *es un álgebra y al considerar* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \cdots \bigoplus 0 \bigoplus 0 \bigoplus \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \bigoplus 0 \bigoplus 0 \bigoplus \cdots$, *se tiene que* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *es un álgebra graduada concentrada en grado cero.*

Al definir la función

$$\begin{aligned} Q \ : (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) &\longrightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)\\ (a, b) &\longrightarrow (a^2 + b^2 - ab, 0) \end{aligned} \qquad [4]$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *es un álgebra fuertemente conmutativa, en efecto*

1. *Sean* $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, *entonces*

   $\varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = (a_1b_2 + a_2b_1, 0) = (b_1a_2 + b_2a_1, 0) = \varphi((b_1, b_2), (a_1, a_2)).$

2. *Como las posiciones impares corresponden al cero, entonces* $\varphi((0,0),(0,0) = (0,0)$.

3. *Sea* $A^0 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*, entonces por la definición de álgebra* $Q(A^0) \subseteq A^{2*0} = A^0$.

4. *Sea* $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *y* $k \in \mathbb{Z}_2$*, entonces*

   $$Q(ka_1, ka_2) = ((ka_1)^2 + (ka_2)^2 + k^2 a_1 a_2, 0) = k^2(a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2, 0) = k^2 Q(a_1, a_2).$$

5. *Para* $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *se tiene que* $Q(a+b) = Q(a) + Q(b) - ab$*, en efecto*

   $$\begin{aligned} Q(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= ((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_1 + b_1)(a_2 + b_2), 0). \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2), 0). \\ &= (a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2, 0) + (b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2, 0) - (a_1 b_2 + a_2 b_1, 0). \\ &= Q(a_1, a_2) + Q(b_1, b_2) + \varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)). \end{aligned}$$

Así se tiene que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *es un álgebra fuertemente conmutativa.*

Ahora se define el corchete de Lie, como en el ***Teorema* 1.4.1** *para* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *de la siguiente manera:*

$[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = \varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) - \varphi((b_1, b_2)(a_1, a_2))$ *y función adjunta* $\boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}((b_1, b_2)) = [(a_1, a_2), (b_1, b_2)]$ *para todo* $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *como en el ejemplo* 3.2.1.

Al calcular $\boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}(Q(b_1, b_2))$*, se verifica que la derivación* $\boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}$ *es una fuerte derivación, en efecto*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}(Q((b_1, b_2))) &= \boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}(b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2, 0). \\ &= [(a_1, a_2), (b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2, 0)]. \\ &= (a_2(b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2), 0) - ((b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) a_2, 0). \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}(b_1,b_2))(b_1,b_2) &= \varphi(\varphi((a_1,a_2),(b_1,b_2)) - \varphi((b_1,b_2)(a_1,a_2)),(b_1,b_2)).\\
&= \varphi((a_1b_2 + a_2b_1, 0) - (b_1a_2 + b_2a_1, 0),(b_1,b_2)).\\
&= (0,0).
\end{aligned}
$$

Así se cumple la definición de derivación fuerte, pues $(\boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}(b_1,b_2))(b_1,b_2) = \boldsymbol{ad_{(a_1,a_2)}}(b_1^2 + b_2^2 - b_1b_2, 0)$. *Los resultados de esta construcción siempre arrojan el valor* $(0,0) = D(Q(a_1,a_2)) = (D(a_1,a_2))(a_1,a_2)$.

Este resultado conduce al siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.2. *Al considerar la derivación* UX *definida en el* ***Ejemplo* 3.1.3** *pero con entradas en* $\mathbb{Z}_2$ *para el álgebra*

$$
A = \left\{ \begin{pmatrix} y & y & 0 \\ r & r & 0 \\ s & s & 0 \end{pmatrix} : r, s, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}
$$

al definir la función

$$
\begin{aligned}
F \; : \; A \times A &\longrightarrow A\\
(A_1, A_2) &\longrightarrow A_1^2 + A_2^2 - A_1A_2
\end{aligned}
$$

se tiene que esta función satisface las siguiente condición

$$
\begin{aligned}
D(F(A_1,A_2)) &= D(A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2).\\
&= U(A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2).\\
&= U(A_1)A_1 + U(A_2)A_2 + U(A_1)A_2 + A_1U(A_2).\\
&= U(A_1)(A_1 + A_2) + U(A_2)A_2.
\end{aligned}
$$

En particular para $A_1 = A_2$ *o* $A_2 = 0$.

$D(F(A_1,A_2)) = U(A_1)(A_1)$.

Y se considera función

$$\begin{array}{rcl} Q \; : \; A & \longrightarrow & A \\ B & \longrightarrow & F(B,B) \end{array} \tag{11}$$

Al considerar el álgebra graduada $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ *en general no es conmutativa, entonces se estudiará la derivación* U_iX *como se definió en el* ***Ejemplo 3.1.3*** *sobre el centro de* A *que se denota por* $C(A)$.

La subálgebra graduada $C(A)$, *esta dada de la siguiente manera*

$C(A) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(A)^i = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(A^i)$, *en efecto*

Si $B, C \in C(A)^i$, *esto es* $B \in A^j$ *y* $C \in A^k$, *tal que* $j + k = i$, *para que* $B \bullet_A C = C \bullet_A B$ *se debe cumplir* (12) *y por definición del álgebra* $B \bullet_A C \in A^i$ *y* $C \bullet_A B \in A^i$, *entonces* $B, C \in C(A^i)$. *Recíprocamente si* $B, C \in C(A^i)$, *es porque* $B \bullet_A C = C \bullet_A B$, *para todo* $B, C \in A$ *tales que* $B \bullet_A C \in A^i$, *esto es* $B, C \in C(A)^i$.

Así el $C(A) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(A)^i = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(A^i)$, *el producto* $\bullet_A$ *y función* Q *definida para grados pares obtenemos un álgebra fuertemente conmutativa ya que satisface* (2) *y con la derivación* U_iX *se obtiene una fuerte derivación graduada sobre un álgebra fuertemente conmutativa.*
El centro de el álgebra A *hace referencia al subconjunto más grande de* A, *donde* A *cumple la propiedad conmutativa.*

Sea $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & 0 \\ r_1 & r_1 & 0 \\ s_1 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} y_2 & y_2 & 0 \\ r_2 & r_2 & 0 \\ s_2 & s_2 & 0 \end{pmatrix}$, *entonces*

$$B \bullet_A C = \begin{pmatrix} y_1y_2 + y_1r_2 & y_1y_2 + y_1r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1y_2 + r_1r_2 & r_1y_2 + r_1r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1y_2 + s_1r_2 & s_1y_2 + s_1r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y$$

$$C \bullet_A B = \begin{pmatrix} y_1y_2 + y_2r_1 & y_1y_2 + y_2r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_2y_1 + r_1r_2 & r_2y_1 + r_1r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_2y_1 + s_2r_1 & s_2y_1 + s_2r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De lo cual para que $BC = CB$ se deben cumplir las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} y_1r_2 = y_2r_1 & \text{(1)} \\ s_2(y_1 + r_1) = s_1(y_2 + r_2) & \text{(2)} \end{cases} \tag{12}$$

Ahora como $B \in A$, y A es un álgebra graduada sobre $\mathbb{Z}_2$, entonces se tienen ocho combinaciones posibles para los valores $\{y, r, s\}$ y son las siguientes:

$$\{\{0,0,0\}, \{0,0,1\}, \{0,1,0\}, \{0,1,1\}, \{1,0,1\}, \{1,1,0\}, \{1,1,1\}, \{1,0,0\}\}$$

El $\{0,0,0\}$ cumple las condiciones (12) con todas sus combinaciones, ya que es el cero.

Ahora se mostrará dos a dos cuales elementos cumplen (12) y los que satisfagan esa condición serán los coeficientes para obtener el álgebra fuertemente conmutativa $C(A)$ con la función Q.

Coeficiente $\{0,0,1\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ con $\{0,1,0\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $0 * 0 = 1 * 0$.

- $0 * (0 + 0) \neq 1 * (1 + 0)$.

Así, los coeficientes $\{0, 0, 1\}$ *y* $\{0, 1, 0\}$ *al menos uno no pertenece al centro de* A.

Coeficiente $\{0, 1, 1\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ *con* $\{1, 0, 1\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $0 * 0 \neq 1 * 1$.

Luego, los coeficientes $\{0, 1, 1\}$ *y* $\{1, 0, 1\}$ *al menos uno no pertenece al centro de* A.

Coeficiente $\{1, 1, 0\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ *con* $\{1, 1, 1\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $1 * 1 = 1 * 1$.
- $0 * (1 + 1) = 1 * (1 + 1)$.

Entonces, los coeficientes $\{1, 1, 0\}$ *y* $\{1, 1, 1\}$ *pertenecen al centro de* A.

Ahora, se identifica si alguno de los anteriores elementos que no cumplieron (12)*, lo cumplen con los candidatos anteriormente escogidos para pertenecer al centro de* A.
Coeficiente $\{1, 1, 0\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ *con* $\{0, 0, 1\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $1 * 0 = 0 * 1$.
- $0 * (0 + 0) = 1 * (1 + 1)$.

Por lo cual, los coeficientes $\{0, 0, 1\}$ *por ahora pertenecen al centro de* A*, ya que depende de que* $\{0, 1, 0\}$ *no cumpla* (12)*, con al menos uno de los otros dos candidatos, ya que no están en el centro simultáneamente.*

Coeficiente $\{0, 1, 0\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ *con* $\{1, 1, 0\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $0 * 1 \neq 1 * 1$.

Por tanto, definitivamente $\{0, 1, 0\}$ *no pertenece al centro de* A.

Coeficiente $\{0, 1, 1\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ *con* $\{1, 0, 0\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $0 * 1 \neq 1 * 1$.

En consecuencia, $\{0,1,1\}$ *no pertenece al centro de* A.

Coeficiente $\{1,0,1\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ *con* $\{1,1,0\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $1 * 1 \neq 1 * 0$.

De lo cual, $\{1,0,1\}$ *no pertenece al centro de* A.

Coeficiente $\{1,0,0\} = \{y_1, r_1, s_1\}$ *con* $\{1,1,0\} = \{y_2, r_2, s_2\}$

- $1 * 1 \neq 1 * 0$.

Entonces, $\{1,0,0\}$ *no pertenece al centro de* A.

Así por los cálculos anteriores se tiene que el $C(A) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(A^i)$ *está dado por los siguientes coeficientes:*

$\{\{0,0,0\}, \{1,1,0\}, \{1,1,1\}, \{0,0,1\}\}$.

De esto se tiene el siguiente resultado.

Resultado 3.3.1. *Sea* $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ *con producto* $\bullet_A$ *como se definió en el* ***Ejemplo 3.1.3*** *con entradas en* $\mathbb{Z}_2$. *El álgebra graduada centro de* A, $C(A)$ *con la función* Q *definida antes para los grados pares es fuertemente conmutativa.*

Demostración.

1. Sean $A_1, A_2 \in C(A)$, como están en el centro de A, entonces

   $A_1 A_2 = A_2 A_1$, para todo $A_1, A_2 \in C(A)$.

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet_A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet_A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con estas dos primeras condiciones, $C(A)$ es débilmente conmutativa.

3. Sea $B \in C(A)^i = C(A^i)$, entonces

   $Q(B) = F(B, B) = B \bullet_A B \in A^{2i}$, así $Q(C(A^i)) \subseteq C(A^{2i})$.

4. Sean $B \in C(A)$ y $k \in \mathbb{Z}_2$, entonces

   $Q(kB) = F(kB, kB) = k^2B^2 = k^2F(B, B) = k^2Q(B)$.

5. Sean $B, C \in C(A)$, entonces

   $Q(B + C) = F(B + C, B + C) = (B + C)^2$.

   por otra parte

   $Q(B) + Q(C) + B \bullet_A C = B^2 + C^2 + B \bullet_A C$.

   Ahora como $B \bullet_A C = 0$, para todo $B, C \in C(A)$, entonces

   $0 = Q(B + C) = Q(B) + Q(C) + B \bullet_A C$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet_A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, la derivación graduada $D(X) = U_iX$ sobre el álgebra graduada fuertemente conmutativa $C(A)$. Permite identificar a $D(X)$ como una derivación fuerte. $\square$

4. CONCLUSIONES

- Fue posible construir un álgebra graduada a partir de un álgebra no graduada, la cual se presenta en el **Ejemplo 3.1.3 y ejemplo 3.2.2**. Se dotó de una estructura de álgebra de Lie graduada a$(\mathbb{Q}\bigoplus\mathbb{Q}\sqrt{2},[\ ,\ ])$ usando el **Teorema 2.3.1**, se identifica a $sl(2,\mathbb{R})$ como un álgebra graduada. Lo anterior con el fin de analizar las derivaciones sobre estas estructuras, como la derivación $D(X)=U_iX$ dada en el **Ejemplo 3.1.3** y la derivación $\boldsymbol{ad_a}$ vista en el **Ejemplo 3.2.1** sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y en el **Ejemplo 3.2.2** sobre $sl(2,\mathbb{R})$.

- Al estudiar la derivación $D(X)=U_iX$ definida sobre el álgebra fuertemente conmutativa $C(A)=\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty}C(A^i)$, permite identificar a $D(X)$ como una derivación fuerte.

- La derivación adjunta fue una herramienta útil para llegar a una subálgebra graduada de $sl(3,\mathbb{R})$ en relación a $sl(2,\mathbb{R})$. así se obtuvo un álgebra graduada vía la adjunta, presentada en el **Ejemplo 3.2.2**.

4.1. Posibles trabajos futuros

- Estudiar extensiones de campos para establecer un posible criterio que permita verlas como álgebras graduadas.

- Estudiar en general si es posible graduar el álgebra $sl(n,\mathbb{R})$, para todo $n\in\mathbb{N}$, en particular estudiar $sl(2,\mathbb{Z}_2)$ con sus respectivos adjuntos.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] FÉLIX, Yves, Halperin Stephen y THOMAS Jean-Claude. Rational homotopy theory. New York, NY: Springer New York, 2001. 539 p.

[2] FOOTE, David S. Dummit; Richard M. Abstract algebra. John Wiley and Sons Ltd, 2003. 944 p.

[3] GONZALEZ, Gil. Estructuras geométricas en súperálgebras de lie basadas en gln y asociadas a la representación adjunta. Tesis doctoral. Guanjato: CIMAT, 2001. 58 p.

[4] MORENO, Agustín; FERNÁNDEZ, Pedro Fernando y BRAVO, Gabriel. Wargaming with quadratic forms and brauer configuration algebras. En: Mathematics [en línea]. 25, febrero, 2022. vol. 10, no. 5 [consultado el 23, noviembre, 2022], p. 729. Disponible en Internet: <https://doi.org/10.3390/math10050729>.

[5] MARTINEZ, Wilson y CERON, Samin. Pre-print Construction Of Lie Algebras And Pre-Lie Algebras From Associative Algebras, 2022.

[6] NIJENHUIS, Albert. y RICHARDSON JR., R. W. Cohomology and deformations in graded Lie algebras. En: Bulletin of the American Mathematical Society [en línea]. 1, enero, 1966. vol. 72, no. 1 [consultado el 22, noviembre, 2022], p. 1-30. Disponible en Internet: <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1966-11401-5>.

[7] OLAYA, Angie Paola. Caracterización de las álgebras de Lie nilpotentes y solubles. Trabajo de grado. Villavicencio: Universidad de los llanos, 2018. 68 p.

[8] SAMELSON, Hans. Notes on Lie algebras. New York: Springer-Verlag, 1990. 162 p.