SIMETRÍAS Y PERPENDICULARIDAD EN EL PLANO

EDUAR LASSO GÓMEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2004

SIMETRÍAS Y PERPENDICULARIDAD EN EL PLANO

(Enmarcado en el proyecto "Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría")

EDUAR LASSO GÓMEZ

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de Seminario presentado como requisito parcial para optar al titulo de Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas

DIRECTORA
ESPC. YENY L. ROSERO R.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2004

Nota de aceptación

____

____

____

____

Directora **Especialista** Yeny L. Rosero R.

Comité evaluador

____

Doctor Carlos Trujillo

____

Magister Angel Hernán Zúñiga

____

Especialista Elkin Cárdenas Díaz

Fecha de Sustentación: Popayán, 10 de Febrero de 2004

A mis padres:

Por su amor y ejemplo para mi vida.

A mi hermana:

Por su cariño y ayuda incondicional.

A la mujer:

Que inspira mis locuras.

A mis amigos:

Por su colaboración y apoyo.

A mis profesores:

Los conocimientos.

A mi universidad:

La gratitud.

Y a mis familiares y demás personas:

Que me ayudaron a alcanzar este logro.

A todos ellos ... Y sobre todo a DIOS

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de todo corazón a:

Yeny L. Rosero R. Secretaria Académica de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación y directora del seminario de grado, por su valiosa colaboración y orientación.

Alba L. Silva Silva, profesora de Matemáticas por sus valiosos aportes a la construcción de este trabajo.

Carlos Trujillo, profesor de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Hernán Zúñiga, profesor de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Elkin Cárdenas Díaz, profesor de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

José Ignacio Téllez, profesor de Matemáticas por su interés y oportunos concejos en el transcurso de mi carrera universitaria.

Edwin Rengifo, profesor de Matemáticas por su constante apoyo y motivación.

Fabián E. Martínez, Luz Edith Muñoz, Mirtha Dorelli Muñoz, Jimy Muñoz, Walter Muñoz compañeros de este Seminario por su gran colaboración y apoyo para el desarrollo de este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo contiene las etapas, actividades de aprendizaje y la temática propuesta en el plan de trabajo correspondiente a “Simetrías y Perpendicularidad en el Plano”, desarrollada durante el segundo período académico de 2003. Trabajo que se llevo a cabo con un grupo de estudiantes del curso de geometría euclidiana del programa de Ingeniería Civil de la Universidad del Cauca, matriculados en éste período.

Este trabajo busca adecuar ambientes de aprendizaje que puedan contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico en los que estudian Geometría Euclidiana a nivel Superior, mediante el uso de herramientas computacionales “software Cabri Géomètre" como mediadoras del conocimiento y analizados a la luz de los planteamientos considerados en el Modelo de Van Hiele para el Pensamiento Geométrico. El trabajo se desarrollo en cinco etapas en las cuales los estudiantes participaron activamente a partir de unas pruebas clasificadas propuestas por el modelo de Van Hiele. Este ha surgido como profundización en “Desarrollo Curricular” e “Investigación Pedagógica” ejes planteados en el proyecto “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas”, que viene desarrollando el Ministerio de Educación Nacional.

El trabajo del estudiante se centra en interpretar matemáticamente los fenómenos nuevos que aparecen en la pantalla. Estos nuevos sistemas de representación permiten al estudiante trabajar un problema desde diferentes enfoques cognitivos; él tendrá la posibilidad de representar un problema en diversos sistemas de representación y de interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor del que disponga. En conclusión, estos nuevos sistemas hacen posible un campo de experiencias que no estaban disponibles para los estudiantes. Las representaciones ejecutables necesitan la mediación de un procesador sintáctico, como es un lenguaje de programación. Allí se transforma el trabajo cognitivo, la actividad de construcción de significados se torna central. El estudiante ante un problema en contexto, podrá interpretar, darle significado e intentar resolverlo.

El entorno computacional al que se enfrenta el estudiante, puede servir para lograr modificaciones en sus concepciones matemáticas, ya que, la tecnología informática ha empezado ha revolucionar el conocimiento matemático abriendo nuevos caminos a la investigación matemática .y como la matemática es un campo del conocimiento en el cual el reto de dirigir el aprendizaje hacia la búsqueda de estructuras cognitivas preparadas para la indagación genuina es fundamental entonces se hace necesario el acompañamiento a estos estudiantes en el desarrollo de todo el curso de geometría.

1. JUSTIFICACIÓN

La iniciativa para el desarrollo de este trabajo surge del estudio del curso de computación educativa del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, y de la participación en el grupo de estudio de geometría conformado por profesores de Educación Media y Superior y estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas asesorado por el Doctorante en Didácticas de las Matemáticas Martín Acosta Gempeler y de la vinculación al proyecto "Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de la Geometría" formulado por las profesoras Alba Lorena Silva Silva y Yeny Leonor Rosero Rosero del Departamento de Matemáticas. La participación en estos espacios académicos nos permite reconocer la importancia que tiene la geometría como componente fundamental en los programas académicos de niveles de educación básica y media de Colombia y, por tanto, la necesidad de hacer énfasis en el estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área con el propósito de contribuir al mejoramiento de los mismos y cualificarnos como futuros docentes de Matemáticas.

2. OBJETIVOS

2.1 Explorar la geometría euclidiana a través del Software: Cabri Géomètre.

2.2 Diseñar situaciones didácticas que ayuden al estudiante a la construcción de conocimiento matemático, específicamente en lo geométrico.

2.3 Lograr en el estudiante un cambio en cuanto a la concepción de la geometría y a la forma de desarrollar un quehacer matemático en el aula y, en consecuencia, mejorar su competencia en el aprendizaje de esta disciplina.

3. MARCO TEÓRICO

La incorporación de las herramientas computacionales en la enseñanza de las matemáticas no trae de manera automática cambios curriculares. Estos se producen después de haber realizado un proceso de concientización de la necesidad de cambio en tales estructuras y establecer la pertinencia del mismo. Este proceso es lento ya que cualquier necesidad de cambio produce tensiones. Esto quizá indique que un cambio central dentro de la educación consistirá en abandonar el objetivo tradicional de la fluidez algorítmica, y sustituirlo por el objetivo de la fluidez representacional. Esto es, que el estudiante pueda representar un problema en diversos sistemas de representación y sea capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor que disponga y que el estudiante no se centre tan solo en encontrar la solución de un problema de un modo puramente mecánico y en un numero finito de pasos. Este instrumento ejecutor, influirá en la actividad cognitiva del estudiante entendido como mediador instrumental, debido a la presencia del instrumento se hace evidente un principio de mediación general, sistematizado en el trabajo de Wertsch (1993): “Toda acción cognitiva es un acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos”.

Una de las herramientas computacionales es el software Cabri Géomètre, el cual es un programa que permite diagnosticar las habilidades iniciales, planificar un aprendizaje paso a paso, evaluar los procesos y tomar decisiones que reorienten la enseñanza de muchos temas geométricos y al contar con un “sub-menú histórico” , las acciones realizadas en las fases de construcciones geométricas pueden ser retomadas por los estudiantes, siendo posible así analizar el desarrollo de los procesos mentales. El análisis de situaciones métricas con Cabri permite llevar a cabo el siguiente proceso:

Diseñar $\rightarrow$ *Explorar* $\rightarrow$ *Modelizar* $\rightarrow$ *Conjeturar* $\rightarrow$ *Definir* $\rightarrow$ *Argumentar* $\rightarrow$ *Demostrar,*

para inducir descubrimientos.

Por otra parte, Cabri es una herramienta matemática que está muy difundida en instituciones de educación Media en muchos países tales como: Francia, España , Estados Unidos, Brasil y Argentina, entre otros.

En la necesidad de mejorar los resultados del aprendizaje en los estudiantes, hemos optado por desarrollar situaciones didácticas mediante el modelo de Van Hiele, por cuanto éste presenta la característica de explicar al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible potenciar la calidad de éste.

Pierre M. y Dina Van Hiele exponen por primera vez, en sus tesis doctórales leídas en 1957, un modelo que explica al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible ayudar a los estudiantes a mejorar su razonamiento. Este modelo estratifica el conocimiento en cinco niveles y dentro de cada nivel en una serie de fases que permiten analizar el aprendizaje de la geometría.

3.1 NIVELES DE ENTENDIMIENTO

A los cinco niveles de entendimiento se les denomina de la siguiente manera: “visualización”, “análisis”, “deducción informal”, “deducción formal” y “rigor”, que describen características del proceso de pensamiento. Auxiliado por experiencias instruccionales adecuadas, en él se afirma que el aprendiz se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización), donde la actividad es simplemente observar las propiedades de las figuras que no son reconocidas explícitamente a través de la secuencia anteriormente planeada; hasta llegar al más alto (rigor), el cual se relaciona con los aspectos abstractos formales de la deducción. Algunos estudiantes son expuestos al último nivel o tienden a él. . A continuación se presenta una sinopsis de los niveles.

3.1.1 Nivel 0 (nivel básico): Visualización o reconocimiento. En esta primera etapa, los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales como algo provisto de componentes o atributos. Las figuras geométricas, son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades. Una persona que funciona a este nivel puede aprender un vocabulario geométrico, identificar formas especificadas y, dada una figura, reproducirla.

En este nivel el estudiante:

- Percibe los objetos en su totalidad y como unidades

- Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica con base en semejanzas y diferencias físicas globales entre ellos.
- No reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos.

3.1.2 Nivel 1: Análisis. En nivel 1 comienza un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas. Es notorio que las figuras tienen partes y son reconocidas mediante ellas. Las relaciones entre propiedades, aún no pueden ser explicadas por los estudiantes en este nivel, en el cual todavía no se ven las interrelaciones entre las figuras, ni se entienden las definiciones.

En este nivel el estudiante:

- Percibe los objetos como formados por partes dotadas de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas.
- Puede describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.
- Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

3.1.3 Nivel 2: Clasificación / deducción informal. Aquí, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras (por ejemplo: en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo por que tienen todas sus propiedades).

Así, se pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases. Las definiciones adquieren significado. Sin embargo, el estudiante en este nivel, no comprende el significado de la deducción como un todo, ni el rol de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes no ven como el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares.

En este nivel el estudiante:

- Realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio del razonamiento informal.
- Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de esos pasos ni la estructura de una demostración.
- No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.

3.1.4 Nivel 3: Deducción formal. En este nivel se entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica con un sistema axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Una persona puede construir, y no sólo memorizar demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distingue entre una afirmación y su recíproca. En este nivel el estudiante:

- Es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- Comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.
- Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.).

3.1.5 Nivel 4: Rigor. En esta etapa el aprendiz puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclidianas y compararse diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

Este es el nivel final que se desarrolla en los trabajos originales y ha recibido poca atención por parte de los investigadores. Como la mayoría de los cursos de geometría del nivel medio son planeados en el tercero, no es sorprendente que la mayoría de los investigadores estén también concentrados en los niveles inferiores. Quizás, como el modelo Van Hiele se ha extendido a otras áreas (esta siendo aplicado a la economía y la química en Holanda), el último nivel adquirirá posteriormente mayor notoriedad.

En este nivel el estudiante:

- Es capaz de analizar con alto grado de rigor los sistemas deductivos y utilizar los diferentes sistemas axiomáticos.
- Puede manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías.

3.2 PROPIEDADES DEL MODELO

La descripción anterior de los niveles de razonamiento pone de manifiesto las propiedades del Modelo, cuya importancia radica en que muestra las líneas básicas a seguir si se quiere aplicar este modelo en la enseñanza de la Geometría.

Una breve descripción de estas propiedades.

3.2.1 Recursividad*:* Los elementos implícitos en el razonamiento del Nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N+1.

3.2.2 Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores. Pasar o no de un nivel a otro depende mas del contenido y los métodos de instrucción recibidos que de la edad. Ningún método lleva a un estudiante a brincar un nivel, algunos incrementan los progresos, mientras que otros los retardan o incluso previenen un movimiento entre niveles.

3.2.3 Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para comunicarse y un significado específico del lenguaje matemático, de forma que dos personas que utilicen lenguajes de diferentes niveles no podrán entenderse. Así una relación que es “correcta” en un nivel puede ser modificada en otro.

3.2.4 Continuidad: La experiencia de quienes han utilizado este modelo muestra que el tránsito entre los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, con una duración variable que puede llevar años en el caso de los niveles 3 y 4.

3.2.5 Falta de concordancia*:* Si un estudiante está en un nivel y la instrucción que recibe en otro, el aprendizaje y el progreso deseado puede o no ocurrir.

3.2.6 Localidad: Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

Mientras que los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global, el objetivo de las fases de aprendizaje es favorecer el desplazamiento del estudiante de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje, lo que ha permitido que el modelo tuviera una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países como es el caso de la Unión Soviética, E.E.U.U., Países Bajos, etc.

3.3 FASES APRENDIZAJE

Las actividades de enseñanza, se organizarán a través de una secuencia cíclica de cinco *fases de aprendizaje*, se hará seguimiento a los estudiantes con el fin de progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. Aunque las fases son las mismas para todos los niveles, los contenidos, el lenguaje empleado y la forma de resolver los problemas son diferentes para cada nivel; la metodología de trabajo se mantiene, pero cambia su contenido concreto.

A continuación exponemos las *fases de aprendizaje*, propuestas por el Modelo de Van Hiele:

3.3.1 Información. Al empezar a desarrollar un nuevo tema, el docente informará a los estudiantes acerca del campo en que se va trabajar y cuáles son los problemas que se van a tratar de resolver. Esta fase permite que el profesor se entere de los conocimientos previos que poseen, sus estudiantes, sobre el tema y en caso que tengan algunos conocimientos organizados, cuál es su calidad y en qué nivel de razonamiento son capaces de desenvolverse. La información obtenida sirve al profesor de punto de partida para afianzar conceptos y empezar a modificar los errores detectados y a los estudiantes en que dirección dará el estudio posterior del mismo.

3.3.2 Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes exploran el campo temático por medio de las actividades suministradas por su profesor. Estas actividades van dirigidas al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del tema que se está estudiando, tienen objetivos y directrices claras y se presentan al estudiante de forma progresiva. Esas actividades podrían revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel.

3.3.3 Explicitación. Esta fase es fundamentalmente de diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario. En esta fase se busca que los estudiantes reflexionen "en voz alta" sobre le trabajo que están haciendo, sus soluciones, dificultades , métodos, etc. Este debate entre compañeros enriquece el conocimiento de cada estudiante, pues les obliga a organizar sus ideas y a expresarlas con claridad , además pone de manifiesto los métodos y resultados incorrectos, permitiendo al docente la oportuna corrección.

Un objetivo muy importante de esta fase es lograr que las experiencias adquiridas, por los estudiantes, se unan a los símbolos lingüísticos para que aprendan a expresarse con precisión (dentro de las características del nivel de razonamiento en que están) en el transcurso de las discusiones que tienen lugar en el aula.

Así en esta tercera fase se forma parcialmente la nueva red de relaciones entre los conceptos propios del área de estudio.

3.3.4 Orientación libre. El profesor asignara a sus estudiantes tareas, que puedan desarrollarse de diversas formas o que conduzcan a diferentes soluciones, donde el estudiante pueda aplicar los conocimientos adquiridos, afianzar los que aún no estén firmes y completar sus propios conocimientos.

Las actividades y problemas propuestas a los estudiantes serán menos dirigidas que las planteadas en la segunda fase, pues en ese momento se buscaba el aprendizaje de unos conocimientos concretos, mientras que en la fase de orientación libre se persigue que el estudiante profundice en dichos conocimientos, que relacione unos con otros y que descubran y aprendan algunas propiedades que por su complejidad no pueden ser estudiadas antes.

3.3.5 Integración. Con el trabajo realizado en las fases anteriores el estudiante ha adquirido nuevos conocimientos y habilidades de razonamiento, pero todavía le falta adquirir una visión general de los métodos que tiene a su disposición. Por ello en esta fase, el profesor trata de resumir en un todo, el campo que ha explorado con sus estudiantes para que ellos integren lo que acaban de aprender en una red de conocimientos relacionados con el campo de estudio anterior. El docente puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas compresiones no le aporten ninguna novedad al estudiante. Solamente deben ser una acumulación de las cosas que ya conoce.

Las fases de aprendizaje tienen, por los objetivos de cada una, una secuencia lógica que no se puede alterar. La única excepción es la tercera fase, de explicitación; ésta no tiene un período de tiempo entre las fases segunda y cuarta, sino que hay que entenderla como una dinámica continúa, presente en todas las clases, de dialogo y de reflexión común después de cualquier tipo de actividad, sea de la fase que sea. De esta manera, la fase de explicitación estaría "sobrevolando" las otras fases y entremezclada con cada una de ellas.

Las fases no tienen una duración determinada, puede que una fase de un determinado nivel no requiera actividades específicas, pues el profesor ya sabe qué conocimientos y nivel de razonamiento tienen sus estudiantes y puede ser suficiente hacer algunos comentarios o preguntas para re-tomar el tema y comenzar con las actividades de la siguiente fase.

Al finalizar la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento que reemplazará al viejo y estarán listos para repetir las fases de aprendizaje en el siguiente nivel[1].

Se espera que la concepción que se tiene de la geometría haya sufrido un cambio es decir; que logre diferenciar su concepción al inicio y al final del curso, entendiendo dicha concepción como el pensamiento, concepto o idea que tiene el estudiante acerca de esta área, además que el estudiante desarrolle su quehacer matemático lo que es entendido como la participación activa en el transcurso del curso y la analogía que él hace con los otros cursos. En consecuencia buscamos que el estudiante a medida que se va desenvolviendo en

[1] ROSERO, R. Yeny. SILVA S. Alba L. Proyecto de Investigación Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría. VRI 1131. Universidad del Cauca.

el curso esté vaya mejorando su capacidad de razonamiento geométrico específicamente en este tema, lo que es entendido como la competitividad adquirida por el estudiante.

La exploración de la geometría a través del software Cabri Géomètre es una de las formas de dar cuenta de las fases de aprendizaje que hizo el estudiante.

En la totalidad del trabajo cuyo tema es “Simetrías y Perpendicularidad en el Plano”, se desarrollaran actividades de aprendizaje a través del software, aquí el estudiante podrá confrontara, verificar, generalizar, o manipular los objetos construidos con lápiz y papel, además de intuir caminos de solución o elaborar nuevas condiciones al planteamiento de una situación problema.

4. METODOLOGÍA

La propuesta de seminario de grado se llevó a cabo con un grupo de estudiantes del grupo C de geometría euclidiana del programa de Ingeniería Civil de la Universidad del Cauca, matriculados en el segundo período académico de 2003 para lo cual se requirió un acompañamiento durante el estudio del tema tanto en el aula como en las asesorias, con el fin de determinar la evolución de su pensamiento geométrico. No obstante se siguió una línea de acción conforme al modelo de razonamiento de Van Hiele utilizando como herramienta tecnológica el software dinámico Cabri-Géomètre.

En el diseño y aplicación de cada una de las actividades de enseñanza y aprendizaje propuestas a los estudiantes, se tuvo en cuenta las propiedades y las fases de aprendizaje formuladas por el modelo de Van Hiele de tal manera que a través de ellas, éstos fueran conscientes de utilizar los elementos implícitos en sus razonamientos de manera correcta y voluntaria garantizando así su acceso a un nivel de razonamiento superior al que se encontraban.

Se evitó proponer actividades que condujeran al aprendizaje memorístico ya que esta práctica suele coincidir con el aprendizaje mecánico de ciertas formas de actuar y de resolver los ejercicios propios del lenguaje matemático formalizado dando la impresión de que el estudiante se encuentra en el cuarto nivel, cuando en realidad esta muy lejos de este tipo de razonamiento.

La muestra analizada consta de 9 estudiantes del curso, escogidos al azar, de los demás se tuvo en cuenta algunas características sobresalientes que se presentaron en el desarrollo de las actividades respectivas. El desarrollo de este trabajo se adelantó a través de las siguientes etapas:

4.1 ETAPA DIAGNÓSTICA

El proceso se inició aplicando a todos los estudiantes una prueba diagnóstica. Prueba que contiene planteamientos e interrogantes generales de geometría euclidiana y se aplicó por única vez al inicio de este curso. El objetivo de ésta fue establecer un diagnóstico sobre los conocimientos que los estudiantes alcanzaron en su formación básica y media en ésta área. (Ver Anexo B).

4.2 ETAPA DE PREPARACIÓN

En esta etapa se escribieron, paralelamente al desarrollo de la prueba diagnostica, notas de clase sobre los siguientes temas: axiomas sobre puntos, rectas, planos, segmentos, semirrectas, entre otros. Posteriormente y con base en los resultados de la prueba diagnóstica se escribieron notas de clase del tema propuesto en el plan de trabajo, “Simetrías y Perpendicularidad en el Plano” (ver anexo A), las cuales se enviaron a los estudiantes a sus e-mail respectivos para ser estudiadas previamente. Mediante la ayuda del

Software se resolvieron dudas e inquietudes que los estudiantes plantearon. Además se diseñaron 3 pruebas, en los cuales se formularon situaciones problema para ser trabajados tanto en lápiz y papel como con el software Cabri Géomètre siguiendo lógicamente unas pautas concretas.

4.2.1 Primera prueba. Considerada de nivel cero**,** por que contiene aspectos generales de Simetría axial y central. Esta prueba tuvo como objetivo identificar de manera intuitiva algunos aspectos relacionados con conceptos geométricos que se abordaran en la temática planteada. (Ver anexo D).

4.2.2 Segunda prueba. Considerada de nivel uno**,** en el cual se plantearon situaciones mas avanzadas con relación a la prueba anterior. Esta prueba tuvo como objetivo determinar avances en el razonamiento geométrico por parte de los estudiantes relacionados con la temática planteada, aplicando lógicamente la ayuda del software Cabri Géomètre. (Ver Anexo F).

4.2.3 Tercera prueba. Considerada de nivel dos, contiene situaciones problema que permiten al estudiante explorar y proponer soluciones diversas. El objetivo de esta prueba fue determinar la comprensión de conceptos y propiedades de la temática planteada. (Ver anexo H).

4.3 ETAPA DE APLICACIÓN

Las pruebas mencionadas en la etapa anterior se aplicaron de la siguiente manera:

4.3.1 Prueba de nivel cero. Fue trabajada después de estudiar los temas iniciales del curso de geometría euclidiana mencionados al inicio de la etapa anterior y antes de formalizar los conceptos de "Simetrías y Perpendicularidad en el Plano". Esta prueba se aplicó sin utilizar la herramienta tecnológica, el software dinámico Cabri Géomètre.

4.3.2 Prueba de nivel uno. Fue trabajada después de estudiar la formalización de los conceptos del tema planteado con el fin que los estudiantes pudieran aplicarlos. Después de resolver la prueba, se les dió a conocer por lo menos una solución a los puntos y se vislumbraron otras posibles soluciones que se podían encontrar con apoyo del software Cabri Géomètre. Es aquí donde se inicia la incorporación de la tecnología en la enseñanza de esta área. Cabe aclarar que a los estudiantes no se les hizo ningún curso de inducción para uso del software, esto lo fueron aprendiendo en la medida que se resolvieron los ejercicios en el aula.

4.3.3 Prueba de nivel dos. Fue trabajada en grupos de tres estudiantes, quienes resolvieron tres situaciones problemas escogidos aleatoriamente. Los grupos se organizaron con el propósito de crear una situación de aprendizaje diferente a las anteriores en la que cada integrante tuvo la oportunidad de expresar su punto de vista para la solución a los problemas planteados; en esta actividad contaron con el software dentro del aula para explorar, comprobar soluciones planteadas, hacer conjeturas, etc. Esta fue una de las pruebas mas importantes ya que el estudiante tuvo la oportunidad de explorar distintas soluciones y a la vez iniciar en el proceso de demostraciones “casi” formales. En esta etapa se pudo vislumbrar un aprendizaje colaborativo.

4.4 ETAPA DE SOCIALIZACIÓN DE RESULTADOS

Una vez analizadas las pruebas se mencionó a los estudiantes: lo mas sobresaliente de la prueba, tipo de errores encontrados, soluciones de los diferentes puntos con base en los resultados obtenidos.

De esta etapa también hace parte la socialización pública que se hizo ante el jurado de este seminario y la comunidad universitaria interesados en el desarrollo de este trabajo.

4.5 ETAPA DE EVALUACIÓN Y ANÁLISIS

Una vez aplicadas las pruebas se evaluaron y analizaron de la siguiente manera:

4.5.1 Prueba diagnostica. En el análisis se establecieron las siguientes categorías: *argumentación de las respuestas, manejo de conceptos, y la utilización de sistemas de representación*, destacando lo más sobresaliente y con ello poder determinar los conocimientos previos de los estudiantes antes de iniciar el curso de geometría euclidiana. Esta prueba es independiente del proceso que se realiza en el tema de “Simetrías y Perpendicularidad en el Plano”.

Para las siguientes pruebas, se establecen categorías determinadas a partir de las características propuestas en cada nivel del modelo de Van Hiele.

4.5.2 Prueba de nivel cero. Las categorías de análisis establecidas fueron: *visualización, reconocimiento de formas y figuras, reproducción de figuras, creatividad, percepción de objetos y propiedades de ellos.*

4.5.3 Prueba de nivel uno. Se analizó a partir de las siguientes categorías: *comprensión de los conceptos de simetría, caracterización del movimiento, relaciones entre las propiedades, manejo y significado de definiciones.*

4.5.4 Prueba de nivel dos. Se analizó de acuerdo con las siguientes categorías: aprendizaje colaborativo, *razonamiento lógico, cognición distribuida, comprensión y significado de los conceptos.*

Después de analizar la prueba diagnostica, detectamos una falla en la formulación de la primera pregunta. Más adelante en el análisis de los resultados de esta prueba veremos el por qué de dicha falla.

4.5.5 Para cumplir con el tercer objetivo especifico del presente trabajo se prevé que la recolección de algunas informaciones y apreciaciones que fueron suministradas por algunos estudiantes mediante diálogos directos, es decir, sin entrevista hablada o escrita; nos sirve como apoyo para la verificación de esté; dicha verificación se baso en concepciones hechas a través de las observaciones que se hacen en el aula, mediante la participación activa en clase, en las horas de consulta y en el desarrollo de actividades propuestas. además de incorporar a su pensamiento nuevo conocimiento para que el pueda abordar un problema desde distinto punto de vista.

Cabe resaltar que las informaciones dadas por los estudiantes para este objetivo se trataran en un capitulo aparte para analizarlas detenidamente y colocarlas como evidencias.

El papel del software como explorador o verificador de soluciones a las situaciones problema se verifica en consideraciones de las situaciones de aprendizaje (ver capitulo 9),

El siguiente capítulo se inicia con la aplicación de la prueba diagnostica, resultados y análisis de esta prueba.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNOSTICA

5.1 RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados obtenidos de aplicar esta prueba se enmarcan en las siguientes categorías:

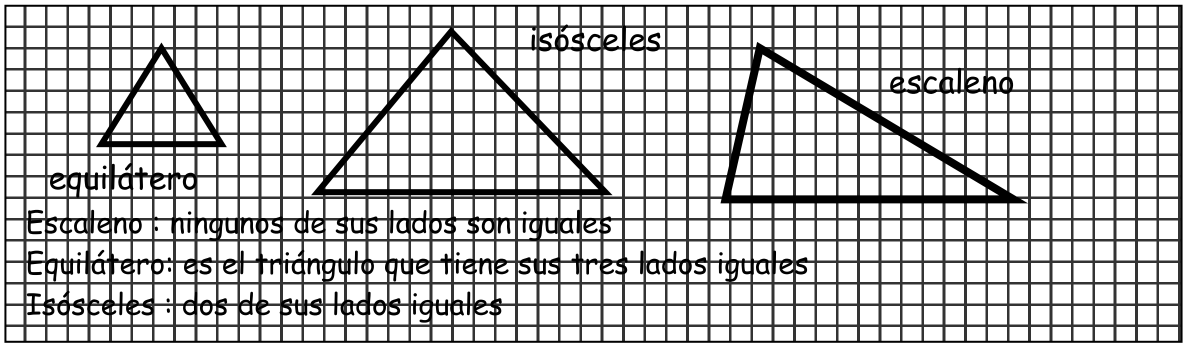
5.1.1 **Manejo de conceptos**. En relación con esta categoría se observa que:

- Algunos estudiantes tienen imprecisión de algunos conceptos geométricos. Por ejemplo, al definir círculo y circunferencia, afirman que "*círculo es la línea, mientras que circunferencia es el área o espacio*"; otros asumen que: "*estos dos conceptos no tienen ninguna diferencia".*

- Hubo estudiantes para quienes los conceptos de igualdad y congruencia entre figuras geométricas no tienen ninguna diferencia.

- Con relación a la primera pregunta (ver anexo B) la mayoría de los estudiantes definen las clases de triángulos utilizando el concepto de igualdad mas no el de congruencia. Esto se puede evidenciar en el siguiente caso:

Figura 1. Evidencia del punto 1 sobre la definición de algunos triángulos



5.1.2 Utilización sistemas de representación. En esta categoría se establece que:

➢ Algunos estudiantes hacen una buena representación de algunos objetos geométricos que se establecen en esta prueba; mientras que otros tienen incoherencia entre las representaciones gráficas y las definiciones de estos objetos, esto último se puede evidenciar en los siguientes ejemplos:

Figura 2. Evidencias del punto 1 sobre triángulos rectángulos.

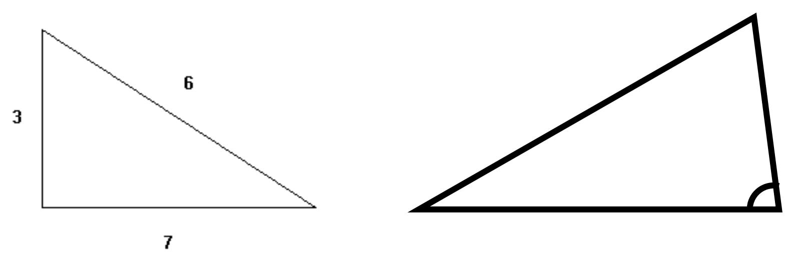


Figura 3. Evidencias del punto 2 sobre rectas perpendiculares

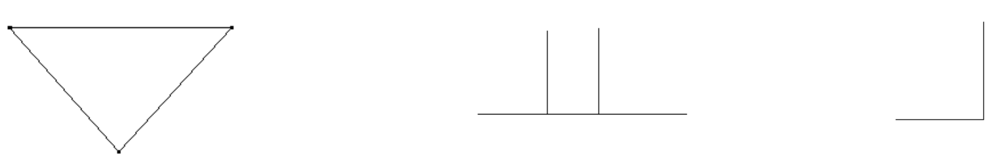
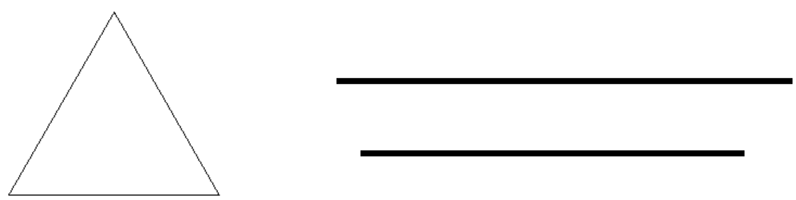


Figura 4. Evidencias del punto 2 sobre rectas que no son paralelas ni perpendiculares.

- Todos los estudiantes utilizan un único modelo para la representación de un triángulo equilátero, y para la representación de rectas paralelas. Esto se puede ver en las siguientes gráficas:

Figura 5. Evidencia del punto 1 y 2 sobre el triángulo equilátero y rectas paralelas.



5.1.3 Argumentación de las respuestas. En esta categoría se establece que:

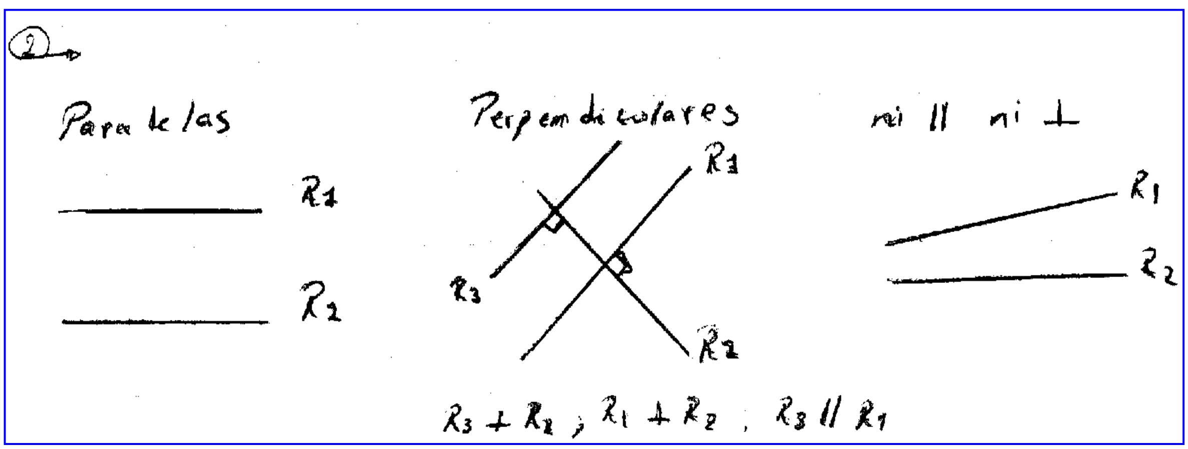
- La mayoría de los estudiantes recuerdan los nombres de algunos objetos geométricos más no su definición (y viceversa). Por ejemplo los términos: triángulo equilátero, isósceles, rectas paralelas, perpendiculares, entre otros; no son asociados o no corresponden a sus definiciones.

- En la mayoría de los casos el concepto de paralelogramo no se establece ni tampoco se realiza su representación grafica.

- Algunos estudiantes no presentaron una argumentación correcta en la solución de los problemas planteados. Por ejemplo: cuando en la pregunta tres (ver anexo B), afirman que "*el triángulo ABG y el triángulo GBC poseen los mismos ángulos y los lados miden igual*", o que "*un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto y dos de 45 grados*". Otros estudiantes no presentaron ninguna argumentación con relación a esta pregunta.

- Hubo algunos estudiantes que realizaron una representación gráfica y simbólica correcta con relación al punto dos (Ver anexo B). Esto se puede evidenciar en el siguiente caso:

Figura 6. Evidencia del punto 2 sobre rectas paralelas, rectas perpendiculares y rectas secantes.



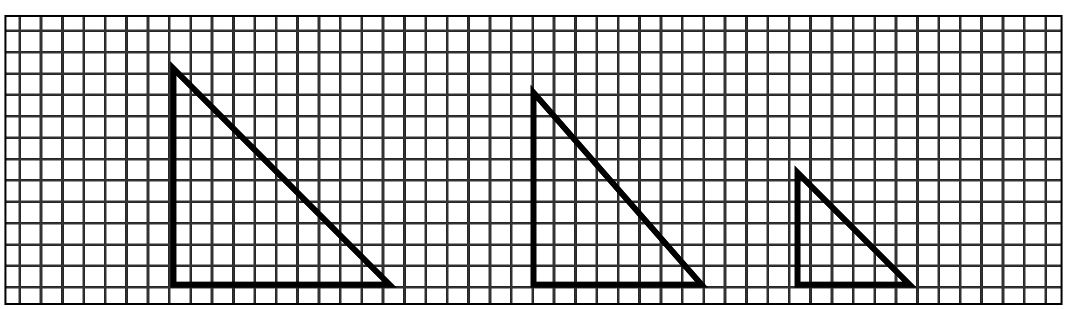
5.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNOSTICA

5.2.1 De los resultados obtenidos es posible determinar que la mayoría de los estudiantes, no tienen una conceptualización clara de geometría euclidiana, de ahí que podemos inferir algunas hipótesis sobre los diferentes errores o dificultades que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de esta prueba, estas hipótesis se pudieron complementar a partir de conversación directa con los estudiantes. Por ejemplo, que:

- Hay una deficiente orientación de esta materia.
- El proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes es mecánico.
- Esta área o asignatura es tratada como un complemento de la asignatura de matemáticas.
- Falta motivación en la orientación de esta asignatura.
- No han estudiando el curso de geometría.

5.2.2 En la pregunta número uno de esta prueba (ver anexo B), uno de los estudiantes hizo la representación de esta manera:

Figura 7. Evidencia del punto 1 sobre triángulos de distinto tamaño



Este resultado nos permite reconocer que hubo un error en la formulación de esta pregunta. Como podemos ver esta es una respuesta correcta; son tres triángulos diferentes en relación con su tamaño y por tanto cabe dentro de las soluciones a este punto.

Lo anterior significa que en algunas situaciones problemas que se le plantean al estudiante, la respuesta que nos presenta puede ser distinta a la esperada. La ambigüedad en la formulación de las preguntas puede implicar muchas veces cometer errores en la evaluación del estudiante.

5.2.3 Sobre los conceptos de igualdad y congruencia podemos afirmar que los estudiantes están errados, por que para nosotros el concepto de congruencia es una relación entre figuras; mientras que la igualdad es una relación que se da entre magnitudes.

Aunque se aplicó esta prueba, nuestro interés no es conocer la(s) causa(s) de los resultados obtenidos sino desarrollar otros métodos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente en la temática planteada.

Después de haber visto los temas iniciales del curso de geometría euclidiana, pasamos a desarrollar las actividades de aprendizaje correspondientes al tema: “Simetrías y Perpendicularidad en el Plano”. Para cada una de las actividades de aprendizaje se tienen en cuenta las fases de aprendizaje descritas por el modelo de Van Hiele, posteriormente se presentan los resultados obtenidos y por ultimo el análisis de los resultados de cada prueba.

6. PRIMERA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

“PRUEBA DE NIVEL CERO”

6.1 FASES DE APRENDIZAJE

6.1.1 Fase 1. Información. Al empezar el tema “Simetrías y Perpendicularidad en el Plano”, se informó a los estudiantes acerca de la metodología utilizada para su desarrollo, y se les propuso iniciar con situaciones problemas de *nivel cero* (ver anexo D) de acuerdo con los niveles establecidos en el modelo de Van Hiele. El objetivo de esta prueba es enterarnos de los conocimientos previos e intuitivos que poseen los estudiantes acerca de este tema.

6.1.2 Fase 2. Orientación Dirigida. El desarrollo de esta fase se inicia con la aplicación de la prueba que contiene cinco puntos (ver anexo D); las actividades que tienen que realizar son: división de un segmento en dos partes sin medida alguna, encontrar la imagen de un objeto a través de un espejo representado por una recta o un punto, completar la grafica de: una cancha, una mariposa, un pino, en donde el estudiante las podía asimilar con objetos de la vida real. Aquí el estudiante empieza a trabajar de manera individual y se apoya en los conocimientos que se le enseñaron en la primera unidad de geometría euclidiana y en conceptos que han aprendido en educación media con respecto a esta asignatura, además cuentan con la asesoría de la profesora y nosotros como monitores.

6.1.3 Fase 3. Explicitación[2]. En esta fase los estudiantes después de haber trabajado durante un tiempo individualmente, pasan a confrontar con sus compañeros, sus soluciones, dificultades obtenidas con algunas situaciones problema; es ahí donde podemos determinar que empieza a presentarse un aprendizaje colaborativo entre los estudiantes, pero cabe destacar que el grupo estaba iniciando semestre por lo tanto aún no tenían la suficiente confianza para la confrontación de sus soluciones o problemas a nivel del curso sino en pequeños grupos.

Con lo anterior nos dimos cuenta que los estudiantes empiezan a mejorar, enriquecer y consolidar su vocabulario, con relación al que tenían, además van comprendiendo otras soluciones por parte de sus compañeros.

6.1.4 Fase 4. Orientación Libre. En la prueba hay situaciones problemas relacionadas con temas vistos anteriormente y que el estudiante debe tratar de resolverlos. Esto se utiliza para inducir al tema que se va a desarrollar.

6.1.5 Fase 5. Integración. Con el trabajo realizado en las fases anteriores se ha evidenciado que el estudiante tiene unas ideas intuitivas del movimiento de simetría axial, faltando la formalización de los conceptos y propiedades sobre el mismo; mientras que en el movimiento de simetría central y perpendicularidad en el plano no tienen mayor claridad conceptual.

[2] Hoffer ([6], p. 208) observa que la tercera fase de aprendizaje – la de explicitación- no debe confundirse con las explicaciones dadas por el maestro, pues lo esencial en esta fase son las observaciones que los estudiante formulan explícitamente más que las lecciones que reciben.

Esto hace que en el desarrollo de las actividades de aprendizaje posteriores se haga mayor énfasis en este tema.

6.2 RESULTADOS OBTENIDOS

A partir de los resultados obtenidos en esta prueba de nivel cero del modelo de Van Hiele, se establecieron las siguientes categorías:

6.2.1 Visualización. En esta categoría se establece que**:**

- Todos los estudiantes identifican algunos objetos geométricos estudiados en clase, o en otras materias. Por ejemplo: segmentos, rectas, semiplanos, rombos, etc; es decir objetos muy comunes que el estudiante en su proceso de aprendizaje ha captado, pero no los relaciona con la definición o propiedades correspondientes.

- Todos los estudiantes perciben o detectan que hay algunas propiedades implícitas en las situaciones planteadas pero aún no las definen.

6.2.2 Reconocimiento de formas y figuras. En esta categoría se establece que:

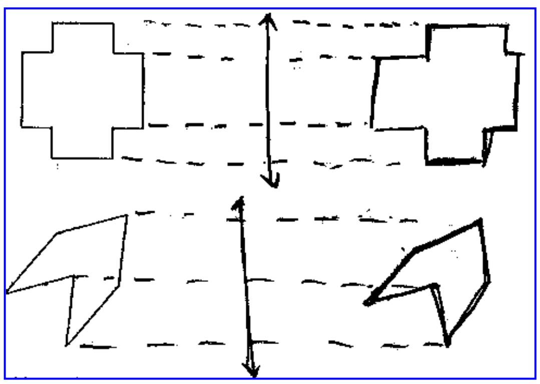
- Todos los estudiantes reconocen el segmento, y comprenden su definición.

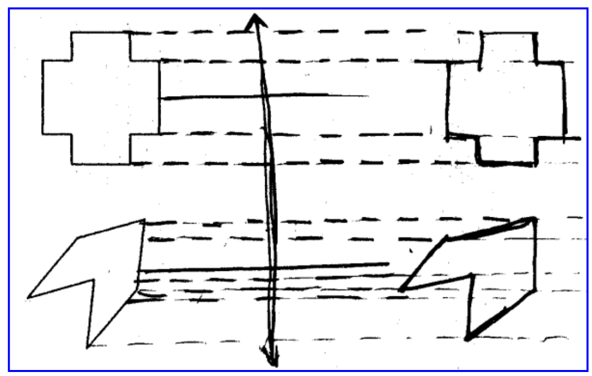
- Algunos estudiantes tienen dificultad para formarse una idea intuitiva del plano, mientras que otros estudiantes conciben al plano como algo ilimitado.

- Todos los estudiantes identifican que un semiplano se determina a partir de una recta que divide a un plano. Por ejemplo en el punto dos (ver anexo D) de esta prueba afirman que "*la recta ℓ divide al plano ABCD en dos semiplanos*".

- Reconocen el papel que juega el espejo, representado por un eje; pero se le dificulta dibujar la imagen a través de este eje. Por ejemplo,

Figura 8. Evidencias del punto 4.

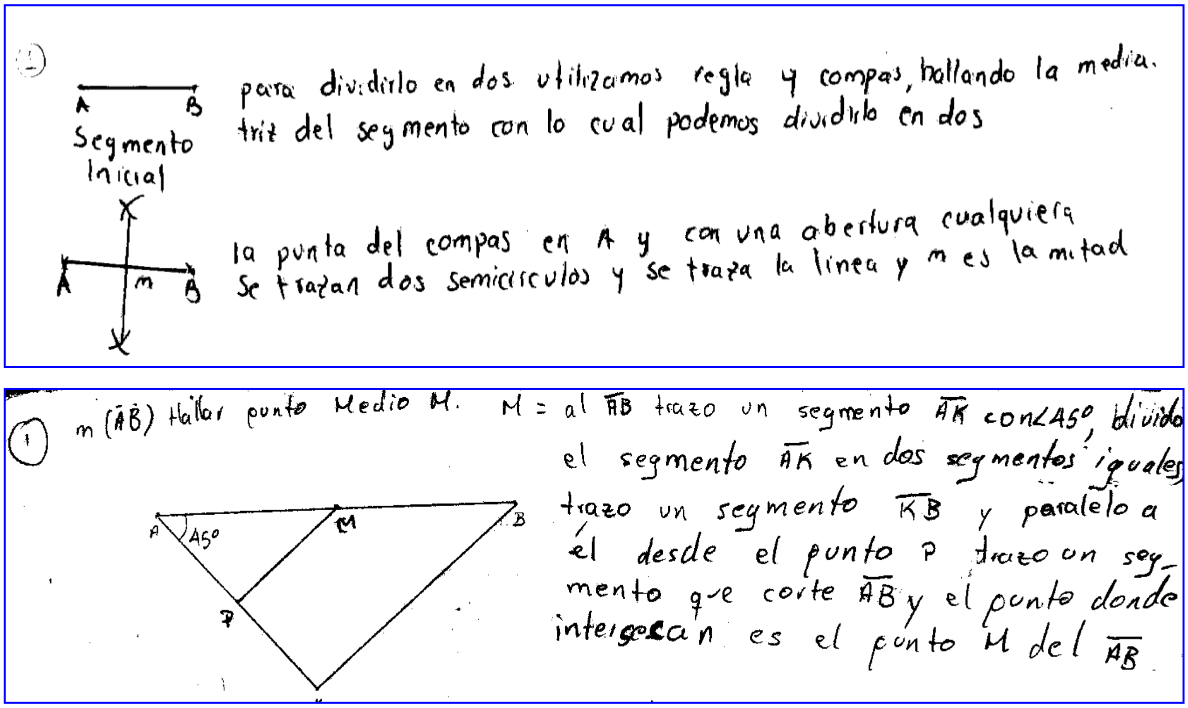




- La mayoría de los estudiantes con relación a la pregunta dos (ver anexo D), sobre la identificación de objetos o figuras geométricas acertaron positivamente, y podemos afirmar que esto se debió a que éstos ya se habían visto en el inicio del curso.

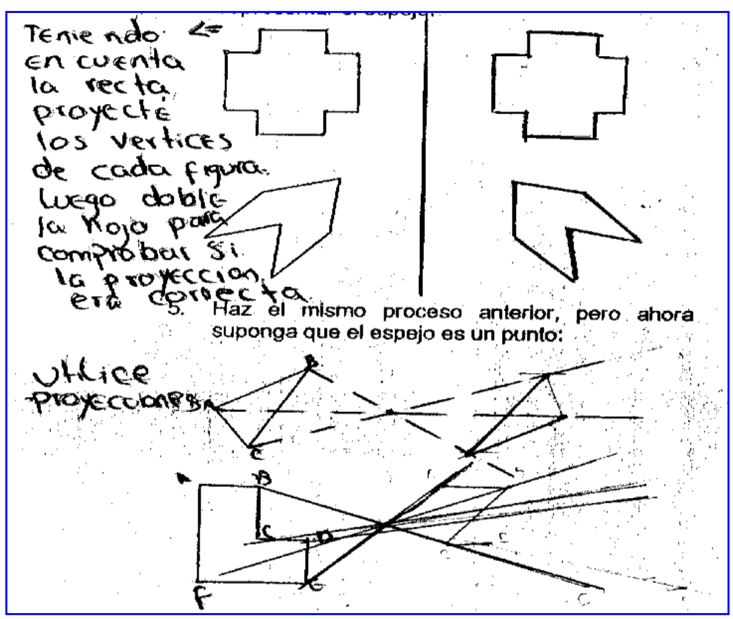
- Algunos estudiantes resolvieron el punto uno (ver anexo D) con técnicas vistas en educación media o en otras áreas de su carrera universitaria. Esto se puede evidenciar en las siguientes figuras:

Figura 9. Evidencias del punto 1



- Un estudiante resolvió los puntos cuatro y cinco (ver anexo D), aplicando una técnica distinta a las usadas anteriormente. Por ejemplo,

Figura 10. Evidencias del punto 4 y 5.



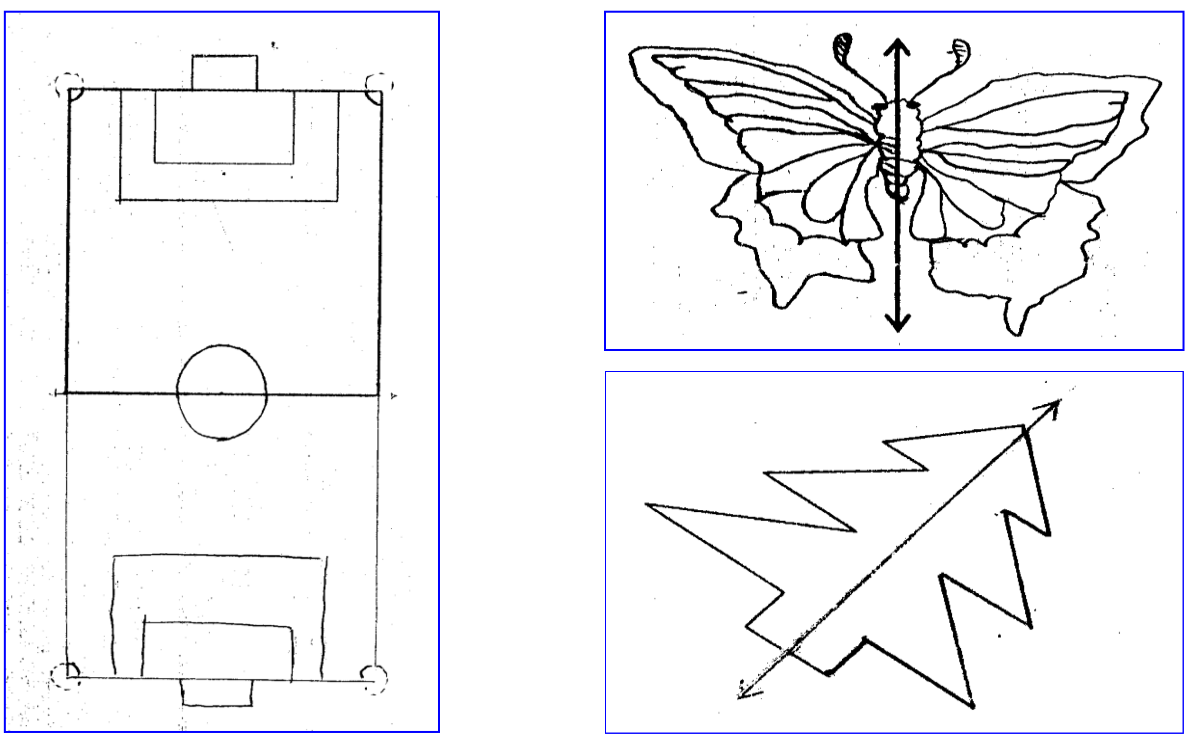
6.2.3 Reproducción de figuras. En esta categoría se establece que:

- La mayoría de los estudiantes hicieron la representación geométrica del segmento.

- Todos los estudiantes tienden a reproducir figuras conocidas previamente, relacionadas con la realidad, o simplemente las reproducen sin ninguna técnica especial.

- En el punto tres de la prueba (ver anexo D) la mayoría de los estudiantes completan la figura de manera intuitiva porque no muestran evidencias de lo que sucede, además la otra mitad de la figura no es simétrica con respecto a la mitad de la figura dada. Por ejemplo,

Figura 11. Evidencias del punto 3.

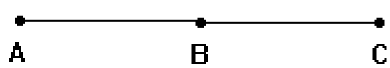


6.2.4 Percepción de objetos y propiedades de ellos. En esta categoría se establece que:

- Algunos estudiantes ven al plano como algo limitado, de ahí que confundan la representación del plano con la de un cuadrado, rectángulo o rombo. En el punto dos (ver anexo D) aseguran que "*el rombo EFGH es un plano contenido en el plano más grande que es el rectángulo ABCD*".

- Reconocen propiedades del segmento como son: extremos, magnitud y existencia de su punto medio; también reconocen la propiedad que tiene este punto. Por ejemplo,

Figura 12. Propiedad del punto medio del segmento



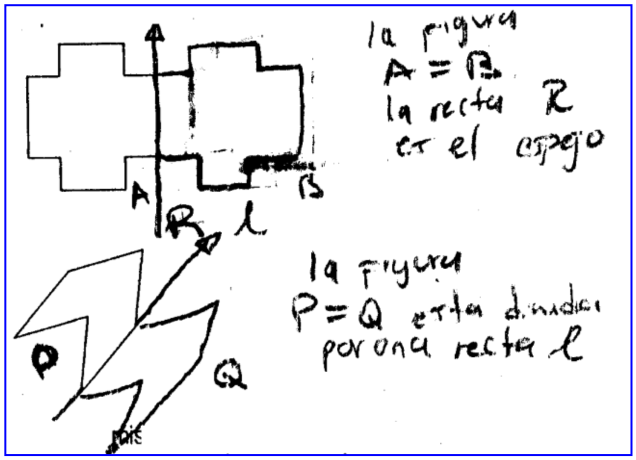
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

- Todos los estudiantes reconocen que dos puntos determinan una recta.

- Hay un caso en el que un estudiante escribe propiedades a un objeto geométrico. Por ejemplo que: "*un cuadrado esta determinado por cuatro puntos, y las magnitudes de los lados son congruentes lo mismo que sus ángulos*".

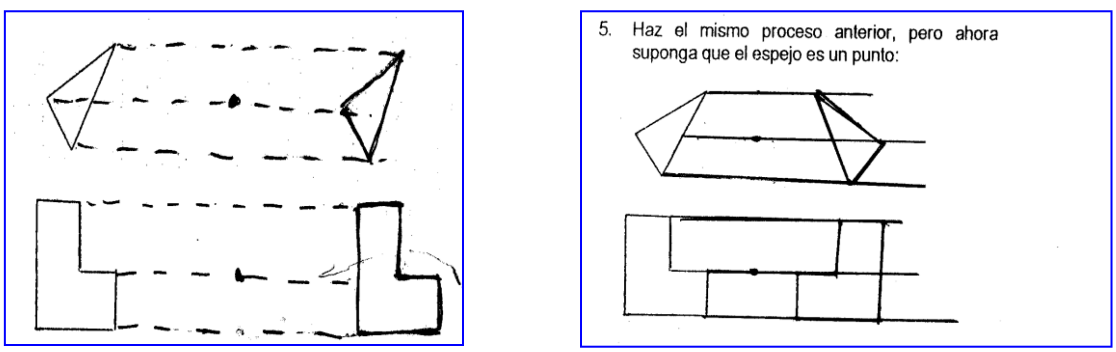
- La mayoría de los estudiantes confunden los conceptos de congruencia e igualdad entre figuras. Por ejemplo,

Figura 13. Evidencia del punto 4.



➢ Todos los estudiantes tuvieron dificultades para poder determinar la imagen simétrica de la figura original respecto a un punto. Esto se puede evidenciar en las siguientes figuras:

Figura 14. Evidencias del punto 5.



➢ Con relación a la pregunta dos (ver anexo D), algunos estudiantes establecen que "*una recta o un segmento que atraviesa de manera horizontal al rectángulo lo separa en dos rectángulos*", mientras que otros estudiantes, establecen que "*la recta divide al plano ABCD en dos semiplanos*".

- Los resultados de los estudiantes evidencian que el trazo o la construcción de las figuras congruentes, sencillamente, se hace de una manera mecánica. Esto se puede ver en las figuras: 8, 10, 11, 13 y 14.

6.2.5 Creatividad. En esta categoría se establece que:

- Se usa la escuadra como un espejo para completar la figura. Esto se evidenció en una estudiante quien para obtener la otra mitad de las figuras dadas, utilizó el reflejo dado por la escuadra, al colocarla perpendicular a la recta que dividía la figura en distinto plano.

- Algunos estudiantes doblan la hoja por la recta o segmento que divide la figura para completar la otra mitad de ésta.

- Cuando se les pide que dividan el segmento en dos partes congruentes:

- Algunos estudiantes aplican técnicas estudiadas en otras áreas como dibujo técnico.
- Otros aplican técnicas vistas en el colegio. Por ejemplo la construcción de la mediatriz de un segmento.
- Doblan la hoja tratando de que los extremos del segmento coincidan.
- Una estudiante utilizó un cabello para medir el segmento que había dibujado, haciendo un doblez de tal manera que las puntas coincidieran y así encontrar el punto medio del cabello y por ende el del segmento.

6.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DE NIVEL CERO

Con los resultados obtenidos y teniendo en cuenta las categorías que se presentan en esta prueba, podemos establecer algunos aspectos generales que se encontraron.

6.3.1 Inicialmente los estudiantes no relacionan conceptos estudiados previamente en clase con algunas de las situaciones que se plantean en esta prueba, por ejemplo: con relación al punto dos (ver anexo D) al referirse al plano, éstos lo ven como algo limitado afirmando que "*el plano ABCD y el plano EFGH son diferentes y que uno esta contenido en el otro*".

6.3.2 En la mayoría de los casos las diferentes construcciones son muy subjetivas, pero cabe resaltar que para completar las figuras, éstas las asociaron con la realidad; es el caso de la cancha, el pino y la mariposa. Este proceso fue utilizado para entender el comportamiento de un espejo representado por una recta y luego completar la mitad de la figuras dadas o para obtener la imagen de algunas de ellas.

Lo anterior nos sirvió como preámbulo para determinar que los estudiantes tenían conocimientos previos y de carácter intuitivo sobre simetría axial en el plano. Los conceptos de los estudiantes, se aproximaron al concepto de simetría axial, por tanto, fue posible proceder a formalizar los conceptos que se desarrollan en este tipo de movimientos sin mayores contratiempos.

6.3.3 La mayoría de los estudiantes no pudieron hallar la imagen simétrica de la figura respecto a un punto, y cuando algunos la hallaron lo hicieron como si fuese respecto a un eje.

6.3.4 Algunos estudiantes, tienen ideas intuitivas del concepto de simetría axial, de ahí que fue posible determinar el nivel de razonamiento en el que se puede desenvolver tanto en este tema como con el resto de la temática. Los conceptos previos y de carácter intuitivo de los estudiantes son tenidos en cuenta para formalizar el tema correspondiente a "Simetrías y Perpendicularidad en el Plano".

6.3.5 Los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento geométrico con relación a la prueba diagnóstica, porque en este nivel han cumplido con las siguientes características de acuerdo con el modelo de Van Hiele para este nivel:

- Las figuras geométricas, son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades.
- Una persona en este nivel puede aprender un vocabulario geométrico.
- Dada una figura reproducirla.
- No reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos.

Una vez finalizada esta actividad de aprendizaje se desarrollaron los temas iniciales de simetría axial y central. Posteriormente se da paso a la segunda actividad de aprendizaje.

7. SEGUNDA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

“PRUEBA DE NIVEL UNO”

7.1 FASES DE APRENDIZAJE

7.1.1 Fase 1. Información. Para el desarrollo de esta fase, se informa a los estudiantes que se va a trabajar en una prueba de nivel uno (ver anexo F), esto se hace necesario debido a que ya se ha abordado parte de la temática, de ahí que se les propone resolver situaciones problema acordes con este nivel tal como se menciono anteriormente. El objetivo de esta prueba es el determinar avances en el desarrollo de su pensamiento geométrico.

7.1.2 Fase 2. Orientación Dirigida. En esta fase se aplica la prueba de nivel uno, la cual contiene seis puntos a desarrollar (ver anexo F); las diferentes actividades que tienen que resolver son: trazo de ejes, centros de simetría en objetos geométricos, completación de figuras como la cancha pero esta vista desde otra perspectiva, el pino, un carro, y por último la resolución de situaciones problema que no tienen representación gráfica.

Los estudiantes para su desarrollo empiezan a trabajar individualmente. Como monitores del grupo fue compromiso de nosotros, presentarles asesoría en el transcurso de la prueba

7.1.3 Fase 3. Explicitación.

Los estudiantes en esta fase ya han desarrollado parte de la prueba de manera individual; luego confrontan sus soluciones apoyándose en el conocimiento que tienen en esta área y en la utilización del software. Aquí podemos hacer diferenciar ésta fase y la fase tres de la prueba de nivel cero, en donde el estudiante hace la confrontación ante todo el curso y no en pequeños grupos.

En esta fase los estudiantes van superando los errores conceptuales que pueden estar cometiendo, a la vez que va corrigiendo sus soluciones y aprendiendo otras.

Pudimos ver que en esta fase se vuelve a evidenciar el aprendizaje colaborativo por parte de todos los estudiantes.

7.1.4 Fase 4. Orientación Libre.

Los estudiantes se enfrentan a distintas clases de situaciones problema en las cuales se empieza a ver una gran relevancia entre los conceptos del tema propuesto y buscan o establecen procedimientos distintos para resolverlos.

7.1.5 Fase 5. Integración.

En esta fase los estudiantes compartieron las soluciones a las situaciones planteadas, mostrando el trabajo realizado con el software.

Algunos estudiantes destacados por su capacidad de razonamiento geométrico, ayudaron a los demás a detectar los errores que estaban cometiendo o les ayudaron a llegar a una respuesta aceptable a la solución de las situaciones problema.

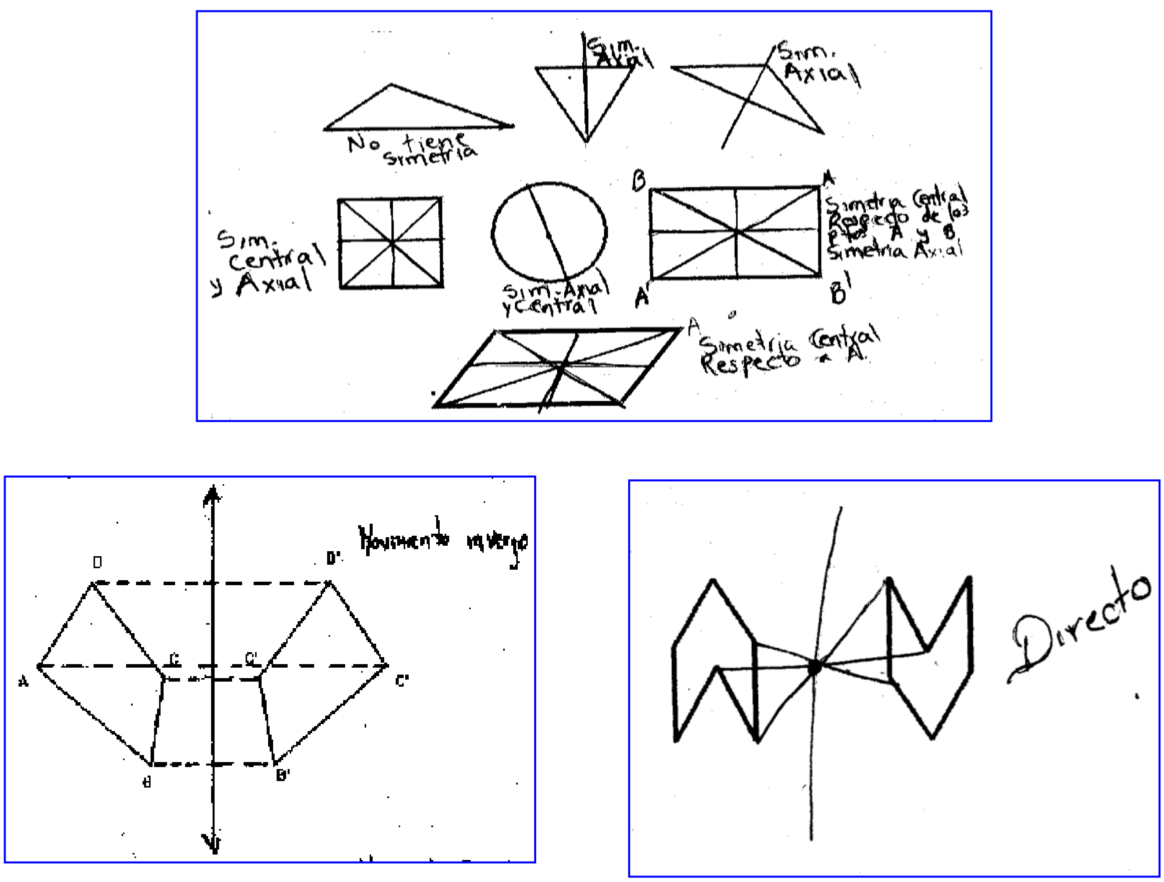
7.2 RESULTADOS OBTENIDOS

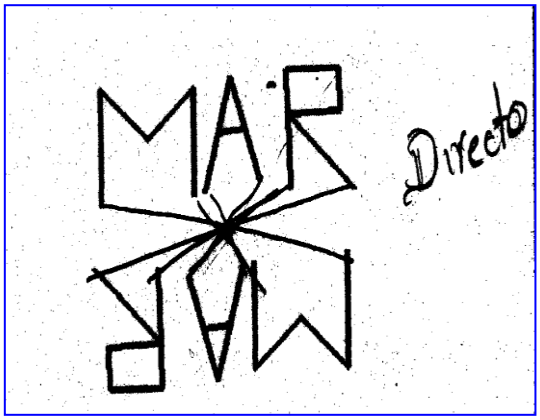
Con los resultados obtenidos se establecieron las siguientes categorías:

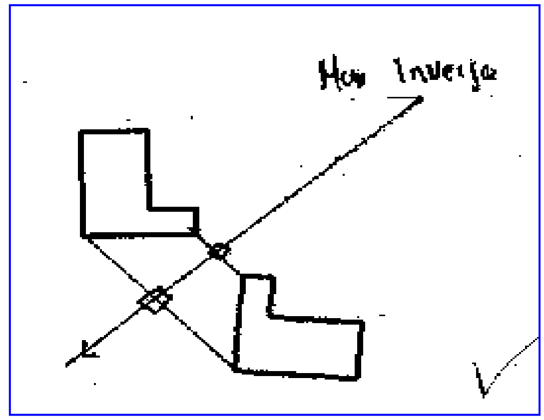
7.2.1 Comprensión de los conceptos de simetría. En esta categoría se establece que:

➢ En la mayoría de los casos los estudiantes trazan un eje o centro de simetría, según el caso que corresponda si es axial o central. Esto se puede evidenciar en los puntos uno y seis de la prueba (ver anexo F) en las siguientes figuras:

Figura 15. Evidencias de los puntos 1 y 6.

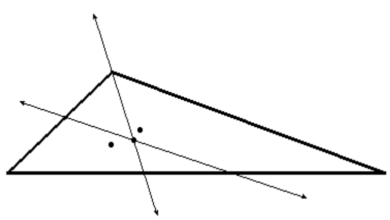


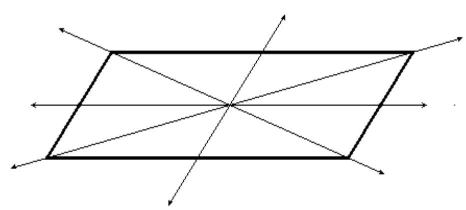




➢ Algunos estudiantes ubicaron ejes o centros de simetría en algunas figuras sin tener en cuenta el planteamiento del problema y las propiedades del eje o centro de simetría. Esto se puede evidenciar en el punto uno (ver anexo F) cuando afirman que "*todo triángulo tiene eje de simetría*", en donde trazaron ejes y centros de simetría axial o central al triángulo escaleno, o cuando trazan ejes de simetría en el paralelogramo. Por ejemplo,

Figura 16. Evidencias del punto 1.





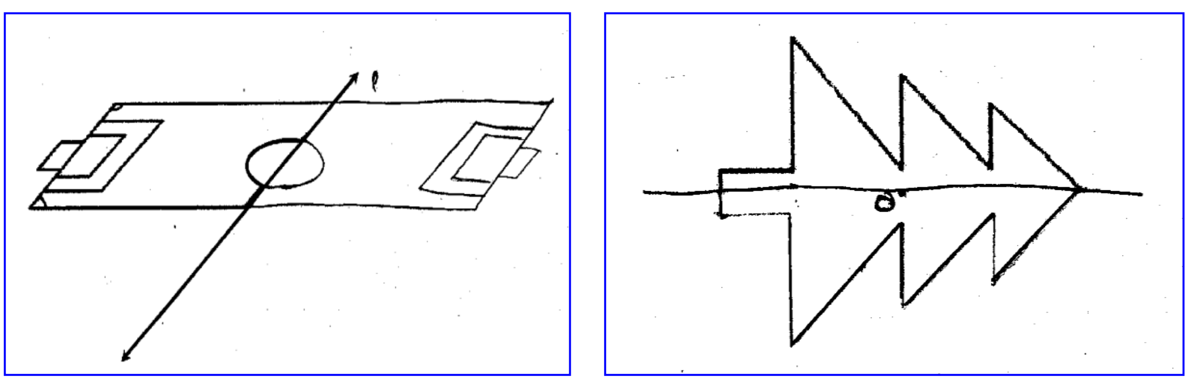
➢ La mayoría de los estudiantes diferencian los conceptos de simetría central y axial; comprenden que si se tiene un eje de simetría se refiere a simetría axial, y si se tiene un punto se hace referencia a una simetría central.

➢ Todos los estudiantes analizan la ubicación de la imagen para establecer que tipo de movimiento se describe. Esto lo podemos evidenciar en el punto seis (ver anexo F) donde los estudiantes determinan inicialmente si tiene eje de simetría se trata de un movimiento inverso ó si tiene un centro de simetría establece que es un movimiento directo (ver figura 15).

7.2.3 Caracterización del movimiento. En esta categoría se establece que:

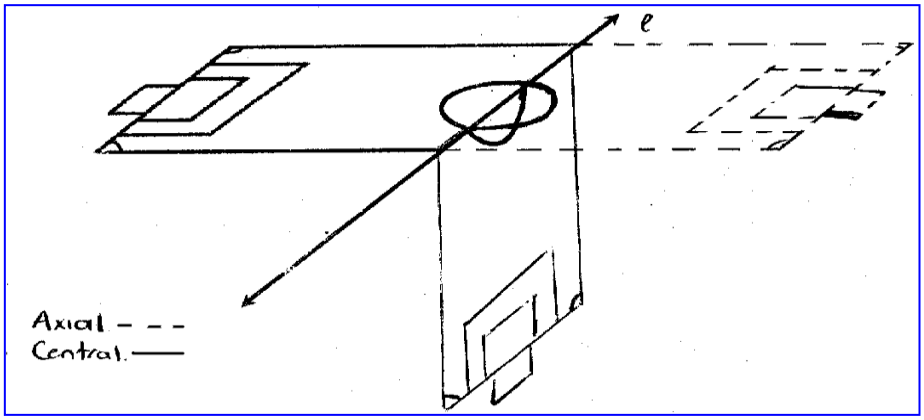
➢ Al determinar o establecer la simetría de figuras que se relacionan con la vida cotidiana la mayoría de los estudiantes no utilizan el concepto de simetría de acuerdo a la situación planteada, sino que se centran en completar la figura de manera mecánica. Lo anterior se puede evidenciar con las siguientes figuras:

Figura 17. Evidencias del punto 4.



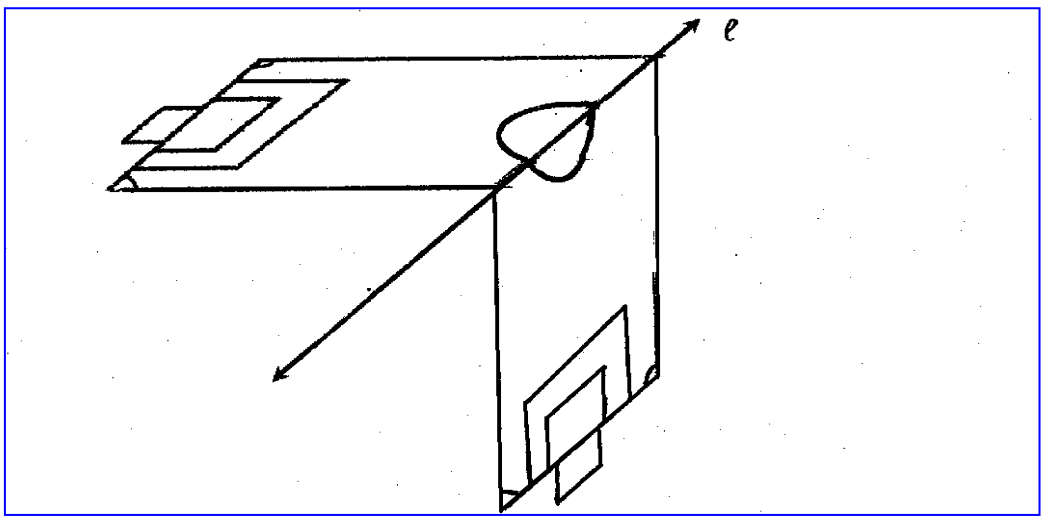
➢ No hay claridad en la caracterización de los movimientos ya que en algunos casos la representación gráfica presenta imprecisiones e incoherencia con los conceptos de simetría, por ejemplo en las representaciones hechas de las figuras 15, 16, 17, o también en la siguiente figura:

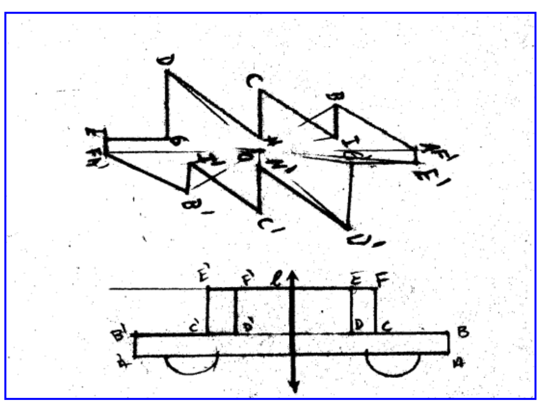
Figura 18. Evidencia del punto 4. La cancha.



➢ No debemos pasar por alto otros de los resultados propuestos en esta prueba, que se diferencia de los otros debido a su nivel de argumentación o interpretación. Por ejemplo,

Figura 19. Evidencias del punto 4.





7.2.3 Relaciones entre las propiedades de los movimientos. En esta categoría se establece que:

- Algunos estudiantes relacionan correctamente el tipo de movimiento que están desarrollando junto con sus propiedades, esto se puede evidenciar en las anteriores figuras.

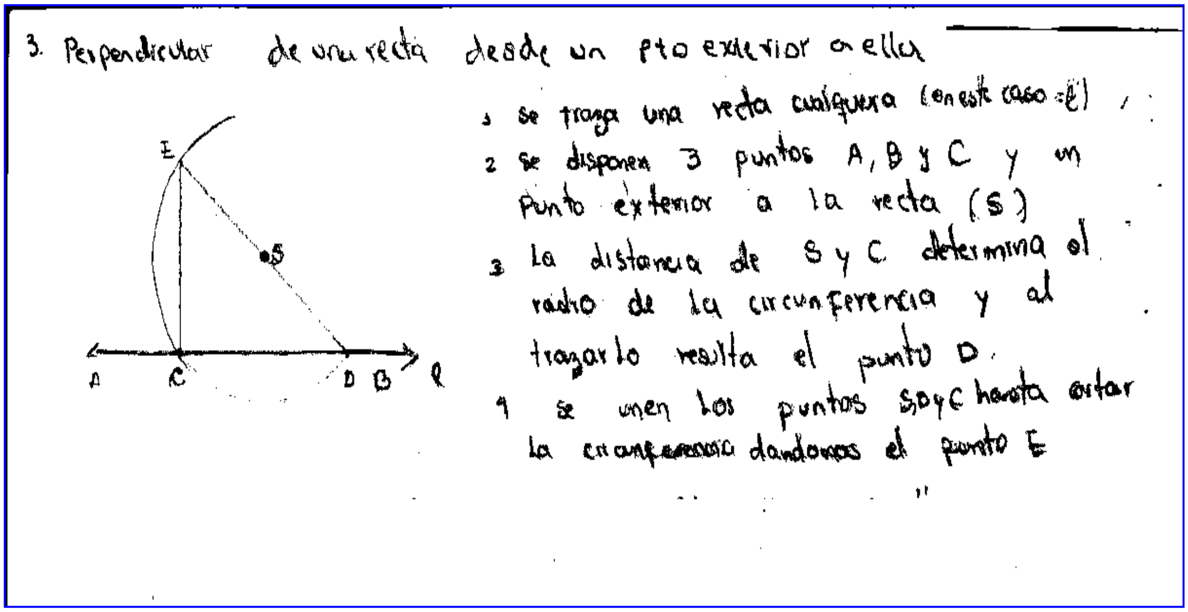
- La mayoría de los estudiantes en la resolución a situaciones problema, no tienen en cuenta las propiedades que se pueden aplicar, evitando establecer relaciones entre lo visto en clase con las situaciones problema de esta prueba.

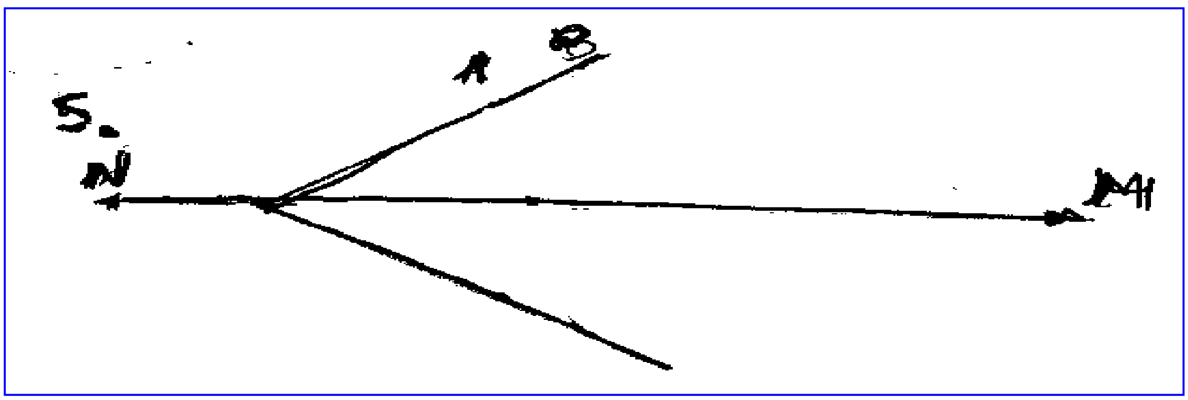
7.2.4 Manejo y significado de definiciones. En esta categoría se establece que:

- La mayoría de los estudiantes, no utilizan los conceptos de simetría axial o central en situaciones problema, que no tengan una representación geométrica. Esto se puede evidenciar en la solución de los punto 3 y 5 de esta prueba (ver anexo F). Ver figura 20

- A todos los estudiantes, se les dificulta interpretar el texto de una situación problema y terminan reproduciéndola a partir de otro similar o sencillamente, no resuelve la situación. Por ejemplo en los puntos tres y cinco de esta prueba (ver anexo F), hacen las siguientes representaciones:

Figura 20. Evidencias de los puntos 3 y 5.





7.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DE NIVEL UNO

Con base en los resultados y en el análisis de las categorías, podemos afirmar, que la mayoría de los estudiantes analizados, identifican que una recta o un punto caracterizan una simetría axial o central respectivamente, pero no detectan las propiedades geométricas que se establecieron en esta temática. Por ejemplo cuando el estudiante trabaja con la recta entiende que se puede establecer una simetría axial, pero no determina las propiedades que en este tipo de movimiento se presenta.

Otro de los aspectos encontrados al resolver algunas situaciones problema, es que los estudiantes reproducen las situaciones problema estudiadas en clase, esto se pudo evidenciar con el punto dos de esta prueba (ver anexo F) en donde hicieron la representación que está en la figura 20. Lo anterior llevó a los estudiantes a que confundieran el planteamiento de la pregunta dos con la cinco y de ahí que hicieran la misma representación.

Con relación al punto cuatro (ver anexo F), los estudiantes completan las figuras de manera intuitiva o relacionándolas con situaciones cotidianas; esto llevó a que la mitad de la figura obtenida sea muy distinta de acuerdo al planteamiento del problema.

Cabe resaltar que los estudiantes contaron con algunas bases teóricas del tema para abordar los problemas formulados, pero se notó que algunos de ellos no las aplicaran. De ahí que, cuando se les pide encontrar un centro o un eje de simetría, encontramos dos situaciones:

- Una en la que el estudiante se ve en la necesidad de hacer varios segmentos y se da cuenta que en la intersección de estos se halla el centro de simetría.
- Otra en la que para encontrar el eje de simetría, el estudiante, traza distintos segmentos y les encuentra el punto medio; traza la mediatriz de cada uno de ellos y de ahí infiere que "*la mediatriz trazada de cualquier segmento, interseca a todos los segmentos en su punto medio*".

De acuerdo a los resultados de esta actividad a los estudiantes se les dificulta un poco cuando en una situación problema no hay una representación grafica, situación que los lleva a plantear diversas interpretaciones de ésta.

Después que los estudiantes resolvieron de una manera correcta ó incorrecta las situaciones problema de esta prueba, les presentamos algunas soluciones a través del software.

Con base en lo anterior, podemos afirmar que el estudiante ha alcanzado un nuevo nivel de pensamiento geométrico a diferencia del nivel anterior, debido a que en este nivel cumple con las siguientes características que se enmarcan dentro de este nivel:

- A través de la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras.
- Las relaciones entre propiedades, aún no pueden ser explicadas por los estudiantes en este nivel.
- Percibe los objetos como formados por partes dotadas de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas.
- Puede describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.

Al culminar esta actividad se continuo con el desarrollo y finalización del tema, dando paso a la realización de la tercera actividad de aprendizaje.

8. TERCERA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

"PRUEBA DE NIVEL DOS"

8.1 FASES DE APRENDIZAJE

8.1.1 Fase 1. Información. En esta fase, se informa a los estudiantes que se desarrollará una prueba de nivel dos (ver anexo H), esto se debe a que ya se ha abordado todo el tema relacionado con "Simetrías y Perpendicularidad en el Plano", la cual contiene situaciones problema de acuerdo a este nivel. Para el desarrollo de esta prueba los estudiantes cuentan con todos los conceptos y propiedades que se estudiaron en este tema y con la ayuda del software Cabri Géomètre. El objetivo de esta prueba fue determinar la comprensión de conceptos y propiedades de la temática planteada.

8.1.2 Fase 2. Orientación Dirigida. Se organizan grupos de tres estudiantes y se les dan a escoger aleatoriamente tres situaciones problema de las doce propuestas (ver anexo H).

8.1.3 Fase 3. Explicitación. Los estudiantes empiezan a desarrollar los tres puntos de la prueba, y a manifestar sus inquietudes acerca del planteamiento de los problemas. Como monitores damos al estudiante la asesoría necesaria con el fin de lograr la comprensión de la situación planteada y la aclaración de las respectivas dudas.

8.1.4 Fase 4. Orientación Libre. En esta fase cada integrante de los grupos conformados, da ideas para la solución a los problemas planteados. También se puede observar que los grupos empiezan a desarrollar los tres puntos en lápiz y papel y luego corroboran las respuestas en el software.

8.1.5 Fase 5. Integración. Después de las fases anteriores se evidenció en los estudiantes un mejoramiento en los niveles de argumentación acerca de los movimientos que se desarrollan en esta prueba, además los grupos expusieron sus soluciones trabajadas en el software ante los otros grupos con el fin de someterlos a corrección y análisis ó ayudan a los otros grupos a mejorar sus argumentaciones. Esto se puede interpretar como un aprendizaje colaborativo dentro del aula ya que los otros grupos participaron activamente en beneficio propio o de los demás.

Lo anterior permitió a los grupos y en particular a cada integrante de éste adquirir una nueva experiencia, y diferenciar el trabajo individual del grupal.

8.2 RESULTADOS OBTENIDOS

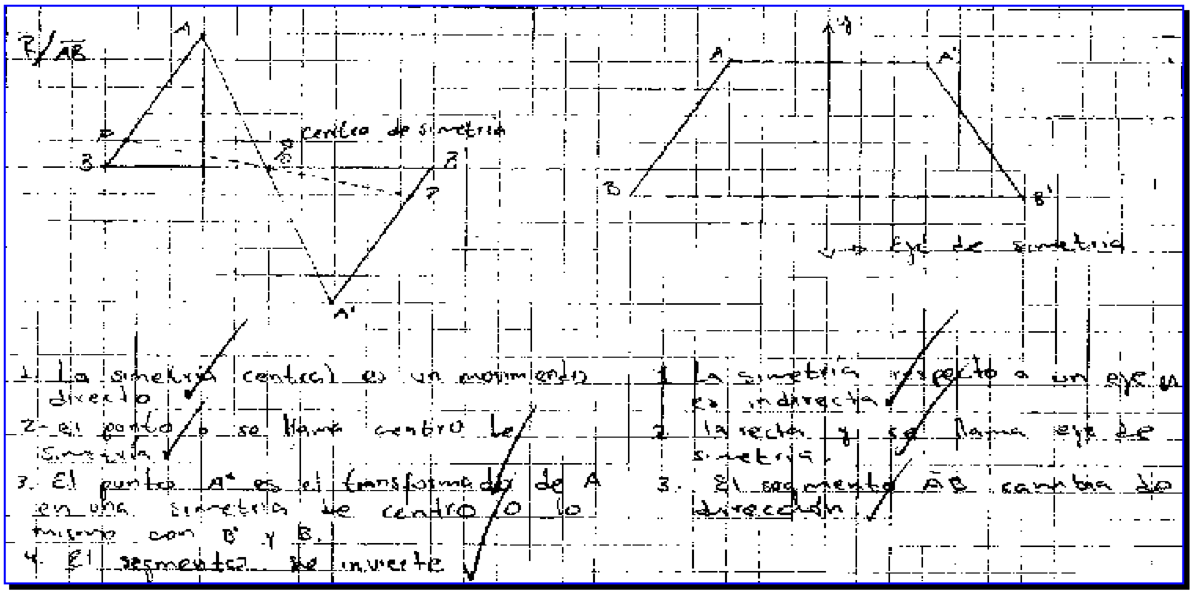
Con los resultados obtenidos en esta prueba de nivel dos se establecieron las siguientes categorías:

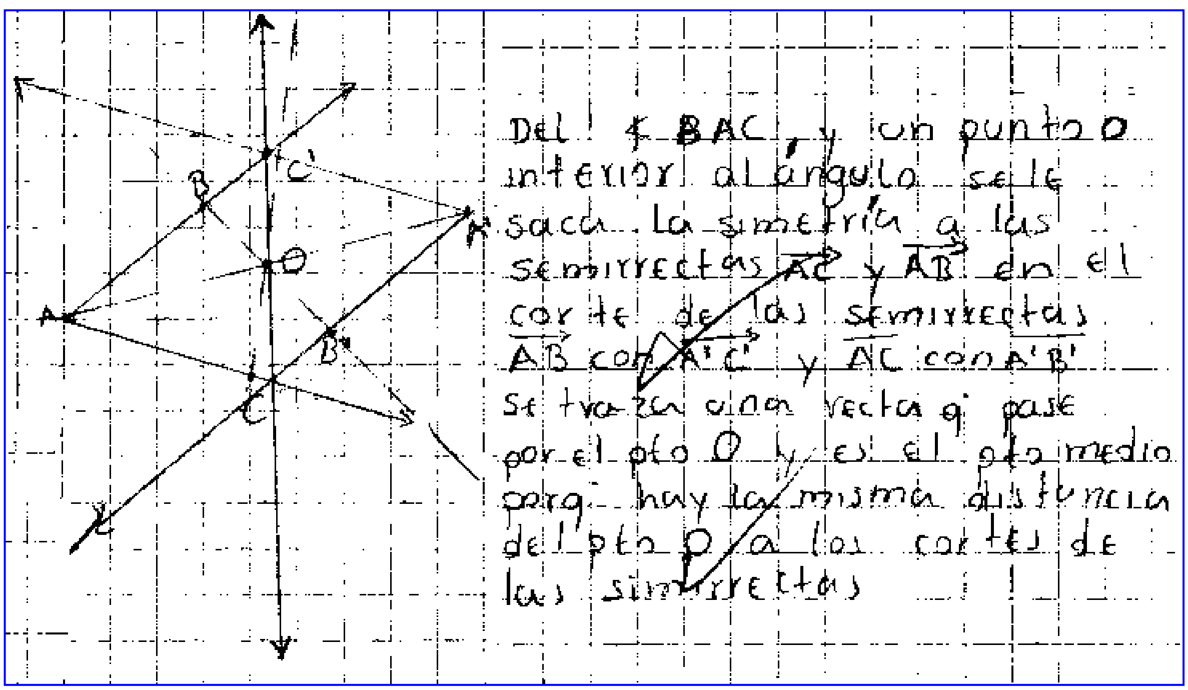
8.2.1 Comprensión y significado de los conceptos. En esta categoría se establece que:

- La mayoría de los estudiantes realizan una clasificación correcta de los movimientos directo o inverso y los relacionan con propiedades ya conocidas.

➢ Todos los estudiantes presentan claridad en sus afirmaciones acerca de los conceptos que utilizan para la solución a las situaciones problemas de esta prueba. Por ejemplo:

Figura 21. Evidencias de los puntos 1 y 7





8.2.2 Cognición distribuida. En esta categoría se establece que:

- En la mayoría de los grupos los estudiantes interactúan o intercambian sus ideas para darle solución al problema.

- Los estudiantes detectan y corrigen errores antes de socializar la solución de un problema.

8.2.3 Aprendizaje colaborativo. En esta categoría se establece que:

- Los conocimientos que tiene cada estudiante son evidenciados o expuestos al interior del grupo, con el fin de hallar la solución a la situación problema.

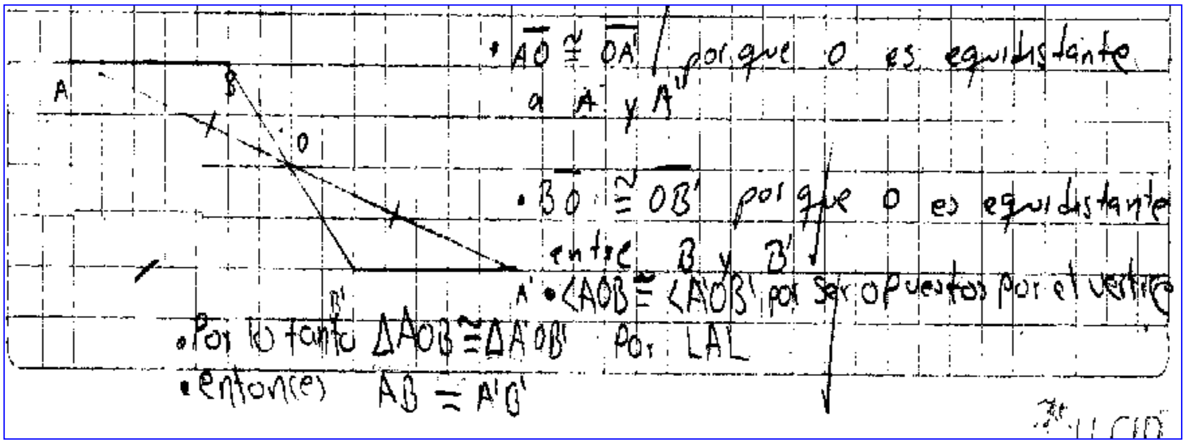
- En esta prueba los estudiantes destacados por su capacidad de razonamiento, ayudaron a los otros grupos a corregir los errores que estaban cometiendo en la solución de sus puntos.

8.2.4 Razonamiento lógico. En esta categoría se establece que:

- La mayoría de los grupos describen el tipo de simetría que van a desarrollar para darle solución a una de las situaciones problema escogidas.

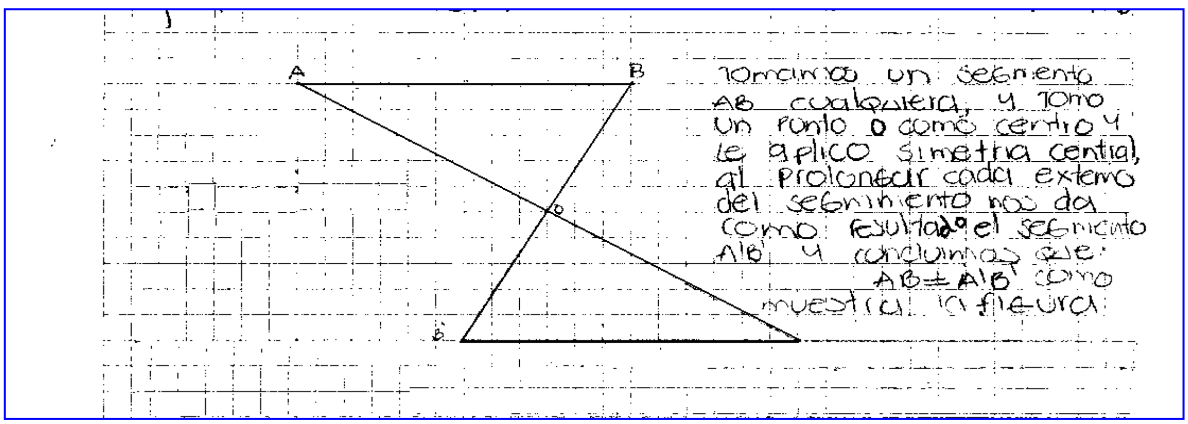
- Todos los grupos comprenden las definiciones de los movimientos, y los aplican en la resolución a los problemas planteados. Por ejemplo,

Figura 22. Evidencias del punto 5



➢ Un grupo realizo una demostración para el punto 5 (ver anexo H) sin utilizar una estructura adecuada. Esto se puede evidenciar en el siguiente resultado:

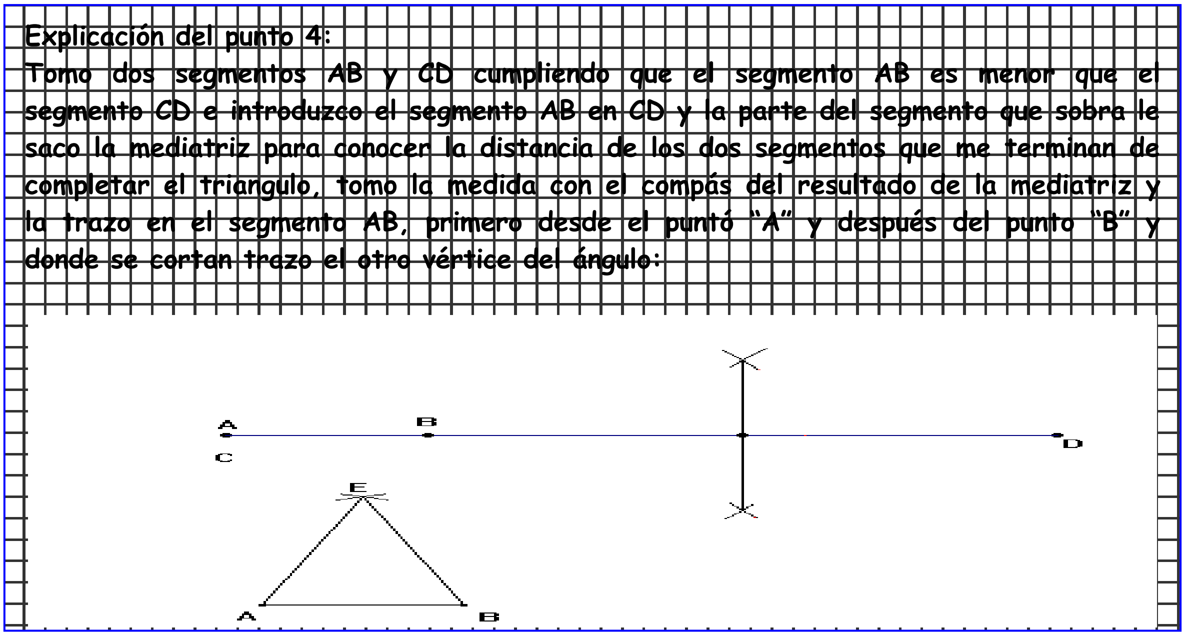
Figura 23. Evidencias del punto 5.



No obstante para los otros puntos se presenta claridad en las argumentaciones de los procedimientos y por ende en la solución a las situaciones problema. Ver las evidencias en las figuras 21, 22, 24 y 25.(o ver anexo I)

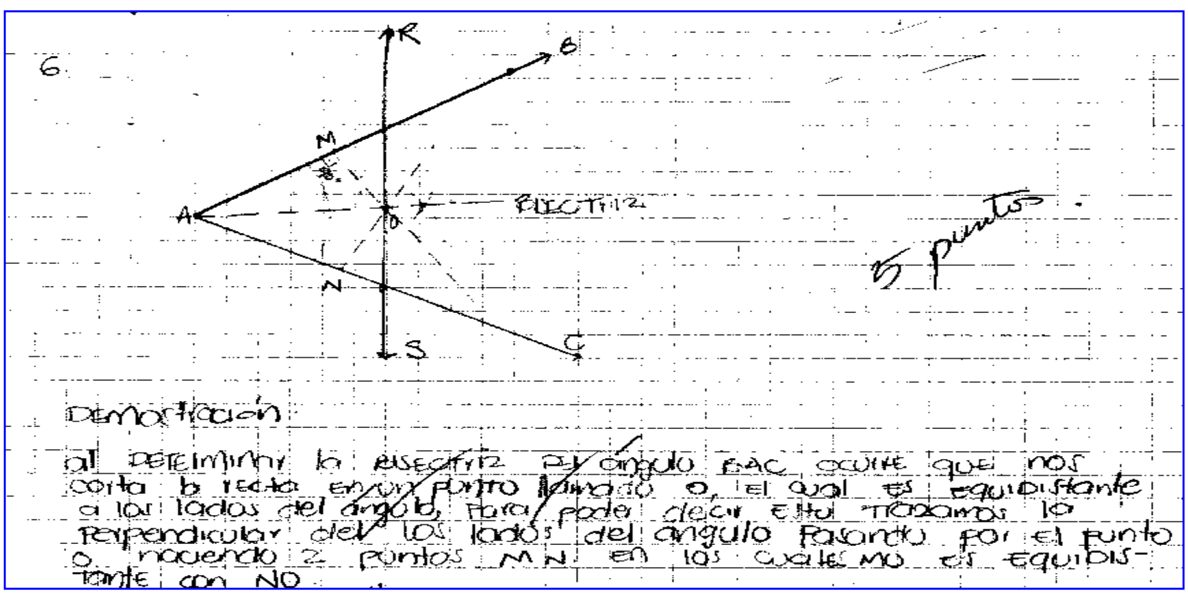
➢ Las diferentes construcciones que presentaron lo hacen de una manera correcta, y pueden ser comprobadas con el software. Por ejemplo,

Figura 24. Evidencia del punto 4.

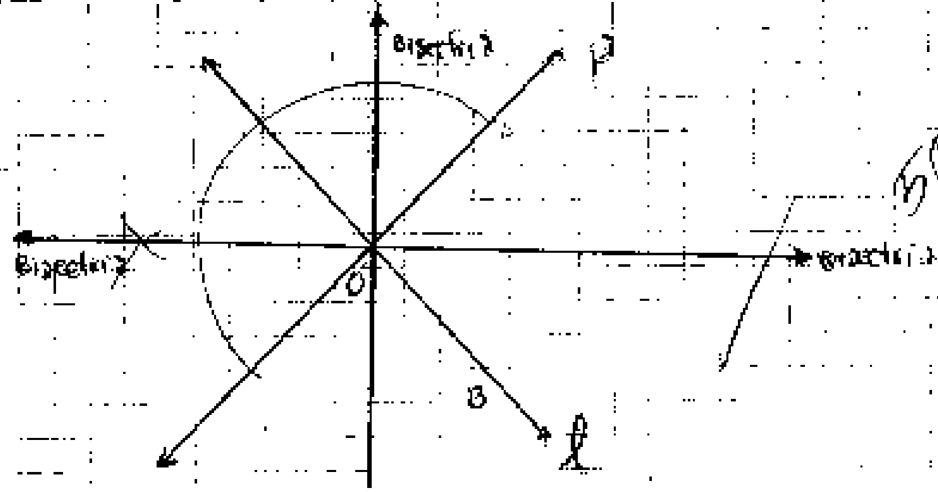


➢ Se puede evidenciar que los estudiantes van superando la dificultad en la interpretación de situaciones problema que no tienen una representación grafica. Esto se puede evidenciar en la siguiente figura:

Figura 25. Evidencias de los puntos 6, 9, 8, 2 y 3 respectivamente



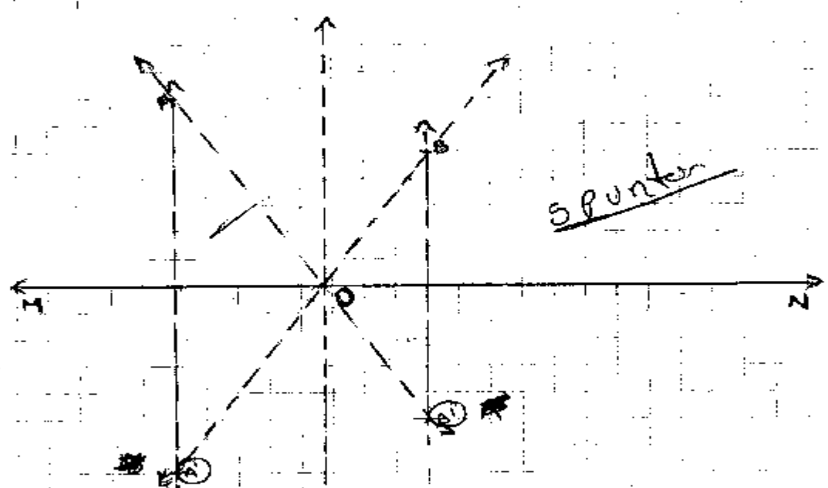
2. Determine el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas concurrentes.



3 puntos

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas ℓ y p concurrentes son las bisectrices de los ángulos que se crean con cuando las rectas p y ℓ se cortaron porque la bisectriz es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

1. Dados dos puntos A y B situados en un mismo lado de una recta $\overleftrightarrow{MN}$. Determinar en esta recta un punto O tal que MN sea perpendicular a la bicectriz del ángulo AOB.



Explicación: Primero trazamos $\overleftrightarrow{MN}$ y posteriormente 2 puntos A y B a un mismo lado de dicha recta (en un mismo semiplano). Hallamos las imágenes de los puntos A y B con respecto a $\overleftrightarrow{MN}$; Unimos A' y B y A y B'. Las rectas $\overleftrightarrow{A'B}$ y $\overleftrightarrow{AB'}$ se cortan en un punto O contenido en $\overleftrightarrow{MN}$.

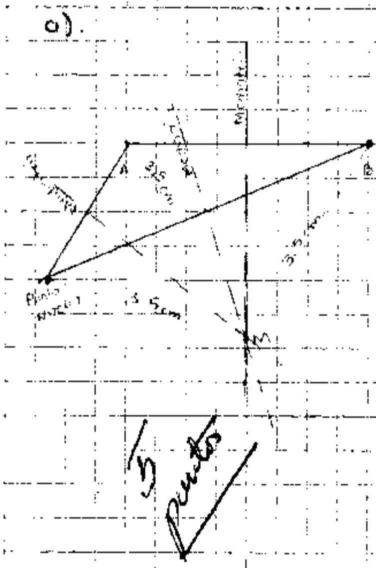
Semetría axial ←

Hallamos la bicectriz de < AOB.

Demostramos que $\overleftrightarrow{MN}$ es perpendicular a la bisectriz de < AOB.

2. Con un segmento AB y un punto M construye un triángulo tal que M sea el corte de las mediatrices de los lados del triángulo.

a).



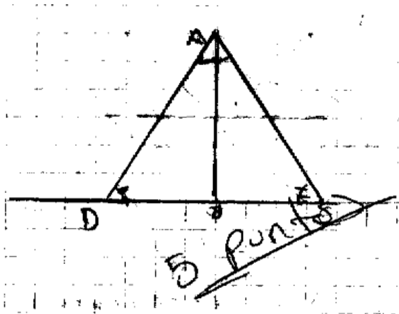
Primero que todo trazamos el segmento AB inicial y trazamos su mediatriz, Como sabemos que el punto M corta las bisectrices, entonces lo ubicamos en cualquier lugar de ¿Por qué?? que ya tenemos y medimos cuanta distancia hay desde el punto M, a los puntos A y B y a esta misma distancia ubicamos un punto exterior a $\overline{AB}$ y a Mediatriz de este y entonces trazamos los otros lados del triángulo que serán el nuevo punto y A y el nuevo punto y B y al hallar las mediatrices de los otros lados estas pasarán por M que será equidistante a cada uno de los vértices del triángulo.

Nota: El punto M estará ubicado en cualquier lugar, exeptuando que el triángulo sea equilátero porque M entonces será el centro Como del triángulo y si el triángulo es rectángulo M define quedará ubicado en un lado del triángulo el centro del

3) Dado $\overline{AB}$ construye un triángulo equilátero cuyo altura sea $\overline{AB}$

La suma de las medidas de los ∢ del $\triangle$ = 180° es decir que cada ∢ mide 60°, +60°, +60°,

$\overleftrightarrow{AB}$ → eje de Simetría



Con el transportador medimos angulos de 30° con respecto AB para establecer la congruencia

Inicialmente hemos tomado AB como perpendicular de $\overline{DE}$

Al trazar los ∢ de 30° cortan al segmento DE y de esa manera se forma el triángulo equilátero

"Aplicamos Simetría Axial"

8.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DE NIVEL DOS

De los resultados obtenidos en la prueba, podemos decir que la mayoría de los estudiantes analizados han tenido un buen desarrollo en la construcción de su pensamiento geométrico. En este proceso ha sido de vital importancia la interrelación con la nueva herramienta computacional ofrecida para este curso, ya que las soluciones a las diferentes situaciones problema podían ser abordadas desde distintos puntos de vista, permitiéndoles afianzar los conceptos estudiados.

El estudiante analiza con detenimiento una situación problema antes de dar ideas para su solución, y no tiene mayor dificultad para interpretarla en ausencia de una representación grafica.

Los estudiantes tuvieron la oportunidad de explorar soluciones a las situaciones problema planteadas apoyados en el software. Esto tuvo un gran impacto en ellos, debido a que les generó un nuevo realismo geométrico; es decir los objetos geométricos construidos a partir de sus ideas cobraron un sentido diferente al utilizar el software ya que las distintas construcciones que hacían sobre la pantalla podían ser manipuladas, y además éste sentía una sensación de existencia casi material de los objetos geométricos[3]. Aquí el estudiante pudo diferenciar el trabajo hecho solo con la tecnología de lápiz y papel[4] y la nueva herramienta computacional.

---

[3] La manipulación de los objetos geométricos es controlada por la matemática "interna de la máquina"
[4] Balachef y Kaput (1996)

De acuerdo con lo anterior, podemos decir que, el estudiante se apoya en la herramienta computacional con una fundamentación mas clara permitiéndole, reorganizar su conocimiento geométrico con relación a este tema (haciendo demostraciones, comprendiendo conceptos, etc), en consecuencia, se puede considerar que el estudiante hace nuevas cosas, comprende y reorganiza sus ideas .

Se puede pensar entonces, que el estudiante tiene muchas posibilidades de exploración, de desarrollar su creatividad en la construcción de diversas soluciones para las situaciones problema acordes con el dominio que tenga del tema que se está desarrollando. En este caso se puede afirmar que el aprendizaje del tema es dinámico por que el estudiante participa en el proceso de una manera activa en la construcción de su conocimiento geométrico y en el desarrollo de su pensamiento geométrico.

El trabajo realizado con el software Cabri Géomètre le dio al estudiante la posibilidad de desarrollar y fortalecer la capacidad de visualización y por ende de abstracción; de establecer relaciones entre la teoría y la práctica; de fortalecer su autoaprendizaje, liberándolo de procesos de aprendizaje memorístico.

Al terminar esta actividad de aprendizaje podemos establecer que los estudiantes han avanzado en el desarrollo de su pensamiento geométrico a diferencia de las dos primeras actividades de aprendizaje trabajados debido a que en este nivel:

- Establecen las interrelaciones en las figuras.

- Dan significado a las definiciones que adquieren.
- No comprenden, el significado de la deducción como un todo, ni el rol de los axiomas.
- Describen las figuras de manera formal, es decir que comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- Comprenden los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de esos pasos ni la estructuras de una demostración.

9. CONSIDERACIONES DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Aparte de las actividades de aprendizaje mencionadas anteriormente es pertinente mencionar que en el desarrollo de las clases se utilizó el software para explicar el tema correspondiente, a la vez se propusieron ejercicios a los estudiantes para resolverlos a lápiz y papel o apoyados por el software; la solución obtenida fue socializada por ellos ante sus compañeros. Se notó una gran participación y creatividad en el planteamiento de soluciones por parte de los estudiantes a las situaciones problema formuladas.

Además se debe destacar:

➢ El impacto que tuvo la tecnología, ya que con la ayuda del software Cabri Géomètre, fue posible explorar distintas situaciones o representaciones de un problema planteado y de un resultado obtenido.

➢ Los problemas logísticos presentados en el desarrolló del trabajo, debido a que no se contó con los equipos requeridos para que los estudiantes los utilizaran individualmente y pudieran explorar y plantear sus resultados ante los problemas planteados en el aula.

- Que varios estudiantes instalaron este software en sus computadores personales lo cual sirvió como ayuda en la solución de algunos talleres o el estudio de lo visto en clase.

Cuando se dio por terminado el tema de “Simetrías y Perpendicularidad en el Plano”, se continuó con el siguiente tema: “Traslación y Paralelismo en el Plano”, iniciando con la primera actividad de aprendizaje de acuerdo a este tema y aplicando las fases descritas en el modelo de Van Hiele.

10. CONCEPCIONES Y COMPETENCIAS

10.1 Hemos encontrado que este proceso ha servido a los estudiantes para que tengan una concepción muy diferente a la que traían al inicio del curso en relación a esta área, esto lo podemos afirmar por que en conversación directa con ellos, manifiestan que "*en educación media no se le presta mucha atención a esta área, y según como la han estudiado, consideran que es muy importante para su carrera*".

10.2 También se notó que los estudiantes pueden desarrollar un quehacer matemático específicamente en esta área distinto a las demás materias que estaban cursando, debido a que participaban activamente en las diferentes actividades propuestas y esto lo podemos evidenciar con los diferentes resultados obtenidos. Además los estudiantes diferenciaban estas clases con otras áreas de su carera universitaria por que afirmaban que "*las otras áreas eran muy retrogradas y muchas veces no podían participar en el desarrollo de sus clases, por que el profesor se limitaba a llenar un tablero con el fin de terminar el contenido del área*".

10.3 Por último, se logró en los estudiantes un mejoramiento en su capacidad para el desarrollo de este tema, situación evidenciada en las distintas soluciones a los problemas propuestos.

11. CONCLUSIONES

- Con respecto al primer objetivo "Explorar la geometría euclidiana a través del Software Cabri Géomètre", podemos afirmar que la experiencia adquirida por los estudiantes fue de manera positiva, ya que contribuyó a fortalecer el desarrollo del pensamiento geométrico. De ahí que el uso de la tecnología en el desarrollo de este tema ha contribuido al mejoramiento de los ambientes de aprendizaje en los estudiantes tratando de manejar conceptos y solucionar situaciones problema planteadas.

- Con respecto al segundo objetivo "Diseñar situaciones didácticas que ayuden al estudiante a la construcción de conocimiento matemático específicamente en lo geométrico". Se pudo evidenciar que en el transcurso de la temática, se diseñaron situaciones didácticas de acuerdo a cada nivel según el modelo de Van Hiele, las cuales debían ser resueltas en lápiz y papel y ser corroboradas con el software. Este proceso contribuyó con la construcción del conocimiento geométrico debido a que en los resultados de las pruebas los estudiantes fueran mejorando sus argumentaciones e interpretaciones y soluciones ante situaciones problema formuladas.

- Con respecto al tercer objetivo “Lograr en el estudiante un cambio en cuanto a la concepción de la geometría y a la forma de desarrollar un quehacer matemático en el aula y, en consecuencia, mejorar su competencia en el aprendizaje de esta disciplina”. Podemos afirmar que se cumplió, debido a que el estudiante presento evidencias claras con respecto a su concepción, quehacer y competitividad en esta disciplina.

- El desarrollo de este tema da muestras de que el modelo de Van Hiele puede ser viable mediante el diseño de actividades que requieran el uso de herramientas computacionales.

- Las pruebas que se diseñan en los distintos niveles deben ir acordes con los niveles de aprendizaje de cada estudiante.

- En el ejercicio de la docencia de matemáticas, es posible evidenciar los niveles del modelo de Van Hiele, siempre que se propongan situaciones didácticas que permitan establecer los niveles de aprendizaje de los estudiantes.

- Sin hacer un estudio riguroso sobre métodos de demostración es posible lograr que los estudiantes se inicien en este proceso.

- Estas estrategias metodológicas han generado una dinámica de aprendizaje mutuo entre profesores y estudiantes.

- Este proceso nos ha exigido o diseñar distintas formas de evaluar.

- La capacidad de razonamiento abstracto por parte de algunos estudiantes, dio lugar a que se pudieran encontrar distintos tipos de soluciones a situaciones problema planteadas, esto desencadenó una participación activa por parte de todo el curso en el desarrollo de las clases.

- Se logró con las experiencias, que los estudiantes unificaran los símbolos lingüísticos para que aprendieran a expresarse con precisión (esto con relación a las características de cada nivel de razonamiento) en el transcurso de las actividades desarrolladas en el aula.

- Para cada nivel del modelo de Van Hiele se supone un modo de pensamiento y lenguaje específico, de ahí que el estudiante sólo puede comprender y razonar sobre los conceptos adecuados en cada nivel.

- Con el modelo de Van Hiele y las herramientas computacionales en la enseñanza de la Geometría, fue posible hacer un seguimiento al proceso de aprendizaje en este tema a los participes de este proceso, mediando el conocimiento a través de las herramientas computacionales.

- Las pruebas diseñadas para este trabajo quedan a disposición para correcciones y ajustes

BIBLIOGRAFÍA

[AC94] AZCÁRATE P., CARDEÑOSO J. M.) La naturaleza de la Matemática Escolar: problema fundamental de la didáctica de la matemática. Revista Investigación en la escuela No 24. 1994

[B89] BONILLA E. La educación Matemática: Una reflexión sobre su Naturaleza y sobre su metodología. Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. Documento tomado de l a revista" Educación Matemática". Vol I, No 2. 1989

[B86] BRUSSEAU G. Fundamentos y Métodos de las Didácticas de las Matemáticas. Revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 No 2. 1986

[C02] CASTIBLANCO A. Documento del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. presentado como ponencia. en Chile. 2002

[D97] Díaz, T. Fundamentos de geometría euclidiana.., (Notas de clase), Universidad del Cauca, 1997.

[F99] FREGONA.D. La didáctica de las Matemáticas y la Formación de Profesores de Matemática Artículos de investigación. Revista Educación Matemática Vol. 11 No 2. 1999

[H83] HOFFER, A. Van Hiele---based researcah, en Acquisition of Mathematical Concepts and Proceses, (eds. Lesh, R., Landau, M.). pp. 205—227, Academic Press, 1983.

[J86] JARAMILLO P. Víctor. Elementos de geometría plan. Traducción y adaptación del Tours de Géométrie. Universidad EAFIT. Medellín 1986.

[L63] LANDAVERDE F. J. Curso de Geometría, , editorial progreso S.A., México, 1963.

[M00] MATEMÁTICAS**.** Enseñanza Universitaria, Revista de la ERM. VOL VIII N° 1,2-2000.

[M99] MEN. Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos. Punto Exe Editores. Bogotá, D.C. 1999.

[M00] MEN. Documento del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Fase de Expansión y Profundización. 2000.

[M98] Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas, Lineamientos Curriculares. Creamos Alternativas Soc. Ltda, Santa fe de Bogotá. 1998

[M02] Ministerio de Educación Nacional. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de NuevasTecnologías en el Aula de Matemáticas. Serie Memorias. Primera edición. Bogotá D.C. 2002.

[MD96] MOISE E, DOWNS Floyd. Geometría Moderna, L, Edit. Addison - Wesley publishing Company. 1996.

[P84] POINCARÉ H.,. Las definiciones matemáticas y su enseñanza. Filosofía de la Ciencia. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México. 1984.

[P61] PUIG, A. Fundamentos de Geometría Métrica. Edit Nuevas gráficas Madrid, 1961

[R00] Revista de las Ciencias, Año 2000. Pág. 18. Investigación Didáctica.

[RS03] ROSERO, R. Yeny. SILVA S. Alba L. Proyecto de Investigación Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría. VRI 1131. Universidad del Cauca.2003.

[R88] RUSSELL B. Introducción a la Filosofía Matemática . Ediciones Paidós Ibérica, S.A. Barcelona. 1988.

[S93] SANTOS T. L. M. La naturaleza de las Matemáticas y sus implicaciones Didácticas. Mathesis Pág. 431-432. 1993

[V90] VALENCIA Santiago. Londoño Rodolfo. Geometría Euclidiana. Medellín, 1990.V:A

[V90] VILLEGAS de Arias Cecilia. Notas de Geometría Plana. Universidad Nacional de Colombia. 1990.

[Z02] ZAMBRANO A. Pedagogía, educabilidad y formación de docentes. Colección. Ensayos Pedagogía. Segunda edición. 2002.

ANEXOS