

**UNA APLICACIÓN PRÁCTICA DE LA GEOMETRIA  
EUCLIDIANA**

**VEIMAR ALBERTO LÓPEZ SALAZAR**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial  
para optar al título de Licenciado en Educación con  
Especialidad en Matemáticas

Director

**FRANCISCO ESCOBAR DELGADO**

Master of arts (Mathematics)

Rice University Huston, Texas

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA  
EDUCACIÓN**

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

Director

---

Jurado

---

Jurado

Popayán, 11 de junio de 2004

*A la memoria de mi amigo,  
Didier Rengifo.*

*A mi familia y a todas aquellas  
personas que siempre me han  
animado para culminar esta  
etapa de mi vida.*

## AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos a:

Francisco Escobar Delgado, Magister profesor universitario y Director de este trabajo por su paciencia y por sus valiosas orientaciones.

Rosa Nimia Salazar Ordoñez, mi madre quien ha sabido esperar este momento, y de la cual me siento muy orgulloso.

Alvaro López Tascón, Ana Lucía Florez, Ignacio Tellez, Carlos Julio Restrepo, Gustavo Berrio, Tomas Díaz, Mauricio Maca, Alvaro Villegas a quienes recuerdo con gran aprecio por haberme enseñado el verdadero valor de la docencia.

Todos mis compañeros universitarios con los cuales vivimos momentos que jamás se borrarán de mi memoria, y que de alguna manera aportaron a este trabajo.

Guillermo Alegría, empleado administrativo, quien aclaró oportunamente y de la mejor manera todas mis dudas sobre el Reglamento Estudiantil.

Margarita Granados y German Rosales jurados de este trabajo de grado.

Todos aquellos que no recuerdo en este momento pero que estoy seguro siempre

han estado pendientes de mí y de este trabajo.

# TABLA DE CONTENIDO

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO</b>	<b>4</b>
3.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	4
3.2	EL PLANO . . . . .	4
3.3	TRASLACIONES EN EL PLANO . . . . .	6
3.4	VECTORES EN EL PLANO . . . . .	8
3.5	SUMA DE PUNTOS EN EL PLANO . . . . .	10
3.6	SUMA DE VECTORES EN EL PLANO . . . . .	11
3.7	TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO . . . . .	11
<b>4</b>	<b>FUNCIONES: ROTACIÓN, SEMEJANZA Y SIMETRÍA COMO TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO</b>	<b>16</b>
4.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	16
4.2	COORDENADAS POLARES EN EL PLANO . . . . .	16
4.3	RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y COORDENADAS CARTESIANAS . . . . .	18
4.4	ROTACIONES EN EL PLANO . . . . .	19
4.5	SEMEJANZAS EN EL PLANO . . . . .	23
4.6	SIMETRÍAS EN EL PLANO . . . . .	27
<b>5</b>	<b>CONSTRUCCIÓN DE UN PANTÓGRAFO BIDIMENSIONAL ELECTROMECÁNICO</b>	<b>30</b>
5.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	30
5.2	MOTORES PASO A PASO . . . . .	30

5.3	PANTÓGRAFO BIDIMENSIONAL ELECTROMECAÁNICO . . . . .	32
<b>6</b>	<b>TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL ESPACIO</b>	<b>39</b>
6.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	39
6.2	EL ESPACIO . . . . .	39
6.3	TRASLACIONES EN EL ESPACIO DE TRES DIMENSIONES . . . . .	41
6.4	SUMA DE PUNTOS EN $E_3$ . . . . .	42
6.5	VECTORES EN EL ESPACIO DE TRES DIMENSIONES . . . . .	42
6.6	SUMA DE VECTORES EN EL ESPACIO $E_3$ . . . . .	43
6.7	TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL ESPACIO . . . . .	45
6.8	COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS . . . . .	45
<b>7</b>	<b>FUNCIONES ROTACIÓN, SEMEJANZA Y SIMETRÍA COMO TRANSFOR-</b>	
	<b>MACIONES LINEALES EN EL ESPACIO</b>	<b>50</b>
7.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	50
7.2	ROTACIONES EN EL ESPACIO . . . . .	50
7.3	SEMEJANZAS EN EL ESPACIO . . . . .	55
7.4	SIMETRÍAS EN EL ESPACIO . . . . .	56
<b>8</b>	<b>CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO DE PANTÓGRAFO TRIDIMENSIO-</b>	
	<b>NAL</b>	<b>59</b>
8.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	59
8.2	CONSTRUCCIÓN DEL PANTÓGRAFO . . . . .	59
<b>9</b>	<b>CONCLUSIÓN</b>	<b>65</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>66</b>

## LISTA DE FIGURAS

3.1	Construcción del plano $E_2$ por traslación de $E_1$ . . . . .	5
3.2	Ejes coordenados ortogonales del plano $E_2$ . . . . .	6
3.3	Función traslación en el plano . . . . .	8
3.4	Vectores en el plano $E_2$ . . . . .	10
3.5	Suma de puntos en el plano $E_2$ . . . . .	11
3.6	Suma de dos vectores en el plano $E_2$ . . . . .	12
3.7	Interpretación geométrica de la condición 1 de la definición de una transformación lineal . . . . .	14
3.8	Interpretación geométrica de la condición 2 de la definición de una transformación lineal . . . . .	15
4.1	Circunferencia de radio $a$ con centro en $P_0$ . . . . .	17
4.2	Coordenadas polares de un punto en el plano $E_2$ . . . . .	18
4.3	Rotación de un vector en el plano $E_2$ . . . . .	20
4.4	Rotación de una figura . . . . .	23
4.5	Figuras semejantes . . . . .	25
4.6	Transformación de una semirecta mediante $S_k$ . . . . .	26
4.7	Pantógrafo bidimensional . . . . .	27
4.8	Figuras simétricas respecto al eje $X$ . . . . .	29
5.1	Funcionamiento de un motor paso a paso . . . . .	32



5.2	Pantógrafo bidimensional . . . . .	34
5.3	Geometría del pantógrafo bidimensional . . . . .	35
5.4	Posibles trayectorias para desplazarse de un punto a otro . . . . .	37
6.1	Generación del espacio $E_3$ por traslación del plano $XY$ . . . . .	40
6.2	Obtención de $P_{x_1, y_1, z_1}$ a partir de la traslación de $P_{0,0,0}$ . . . . .	41
6.3	Suma de vectores en $E_3$ . . . . .	44
6.4	Coordenadas cilíndricas de un punto en $E_3$ . . . . .	46
6.5	Coordenadas esféricas de un punto en $E_3$ . . . . .	48
8.1	Pantógrafo tridimensional . . . . .	60
8.2	Reproducción de un objeto tridimensional . . . . .	64

# 1 INTRODUCCIÓN

El presente escrito resume los resultados del trabajo de grado *Una aplicación práctica de la Geometría Euclidiana*.

En el tercer capítulo se hace una recopilación de conceptos generales como el plano, traslaciones, vectores, suma de puntos y vectores y transformación lineal. Conceptos estos muy importantes para el estudio posterior.

El cuarto capítulo contiene las demostraciones formales de las funciones rotación, semejanza, y simetría como transformaciones lineales, además de la construcción y la demostración del funcionamiento de un primer prototipo de pantógrafo bidimensional.

Ya con las bases matemáticas suficientes y un poco de aplicación electromecánica se diseña y explica en el capítulo 5, como sería un pantógrafo bidimensional controlado por computador, el cual puede ser utilizado para reproducir figuras semejantes.

Finalmente, en los capítulos 6, 7, y 8 se realiza una extensión de los conceptos vistos en los capítulos anteriores al espacio, llegando finalmente al diseño de un prototipo de pantógrafo tridimensional controlado por computador que puede ser utilizado para reproducir objetos semejantes.

Con este trabajo se pretende dar un primer paso en el camino de la construcción de tecnología a partir de los conceptos de la Geometría de Euclides, y así dar una aplicación más práctica al conocimiento matemático.

## 2 OBJETIVOS

Realizar un estudio matemático detallado del funcionamiento de un pantógrafo bidimensional (graficador XY) y extenderlo a un pantógrafo tridimensional.

Diseñar un sencillo prototipo electromecánico de un pantógrafo bidimensional que basado en las funciones de la geometría Euclidiana permita reproducir figuras geométricas en una superficie.

Realizar una primera aproximación de un pantógrafo tridimensional basado en las funciones de la geometría Euclidiana.

## 3 TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Se estudia en este capítulo algunas de las propiedades importantes de las transformaciones lineales en el plano. Para este estudio primero se recuerdan algunos conceptos fundamentales basados en la obra del profesor universitario y director de este trabajo de grado *Magister* Francisco Escobar Delgado <sup>1</sup>. Al finalizar este capítulo se habrán adquirido unas bases, que permitirán en el capítulo siguiente entender de manera clara y precisa el porqué de la construcción y el funcionamiento matemático de un pantógrafo bidimensional.

### 3.2 EL PLANO

El plano se puede imaginar como una página de una hoja de papel que se extiende infinitamente hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba y hacia abajo. El plano se representa con el símbolo  $E_2$  y se llama *espacio euclídeo de dos dimensiones*, a sus puntos se le da nombre de la siguiente manera.

Tómese la recta  $E_1$  (espacio euclídeo de una dimensión) cuyo origen es el punto  $P_o$ , contenida en el plano de ésta página y trasládese hacia arriba y hacia abajo de tal forma que el punto  $P_o$  produce una recta perpendicular a  $E_1$  que obvia-

---

<sup>1</sup>ESCOBAR DELGADO, Francisco. Geometría analítica, una nueva visión. Popayán: Universidad del Cauca, 2001. 205 p.

mente pasa por el punto  $P_o$ , entonces el espacio euclídeo de dos dimensiones se puede ver como la unión de infinitas rectas paralelas a  $E_1$ , además como cada punto  $P_a \in E_1$  cuando es trasladado, produce una perpendicular a  $E_1$  que pasa por el punto  $P_a$ , entonces se puede mirar el plano como la malla formada por todas la infinitas rectas paralelas a  $E_1$  y todas las infinitas rectas perpendiculares a  $E_1$  tal como se muestra en la Figura 3.1.

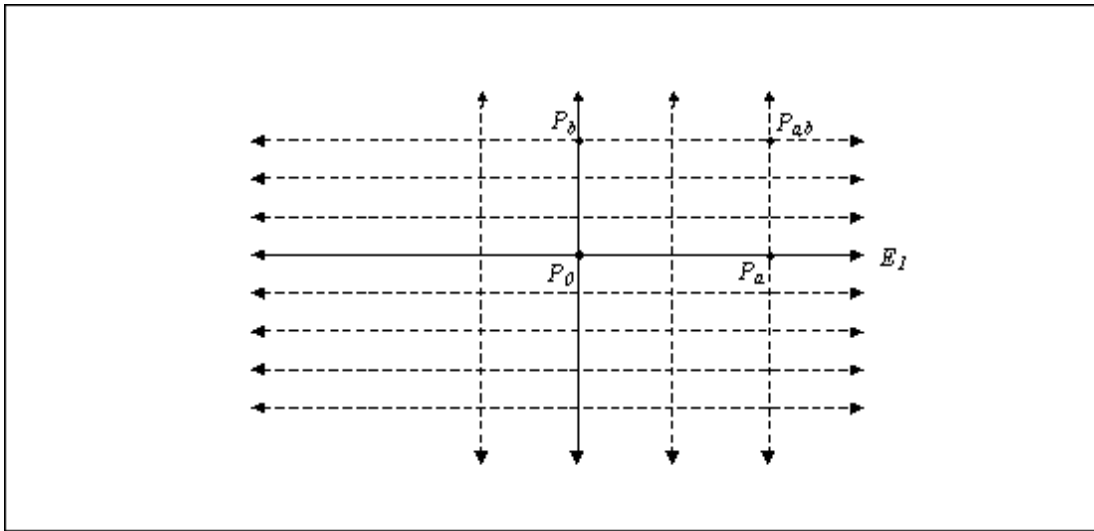


Figura 3.1: Construcción del plano  $E_2$  por traslación de  $E_1$

Nótese que cada punto de esta malla y por consiguiente cada punto del plano se nombra de manera única. Si un punto  $P_a \in E_1$  se traslada  $b \in \mathbb{R}$ , entonces el punto  $P_a$  produce el punto  $a, b$  del plano que se nota  $P_{a,b}$ .

La recta origen  $E_1$  se llama eje  $X$  y la recta perpendicular al eje  $X$  producida por la traslación del punto  $P_o$  se llama eje  $Y$ .

Las rectas  $X$  y  $Y$  se llaman ***ejes coordenados ortogonales del plano  $E_2$*** , los cuales se cortan en el punto  $P_o$  y forman cuatro ángulos rectos llamados

*cuadrantes* (*I, II, III, IV*) como se muestra en la Figura 1.2.

Por la forma de construcción del plano realizada, se puede afirmar que el punto  $P_0 \in E_1$  se ha trasladado cero por la vertical produciendo el punto  $P_{0,0} \in E_2$  y este es el origen del plano.

Un punto  $P_{a,b} \in E_2$  se llama punto con *coordenadas cartesianas a y b* o también punto con *posición cartesiana (a,b)*.

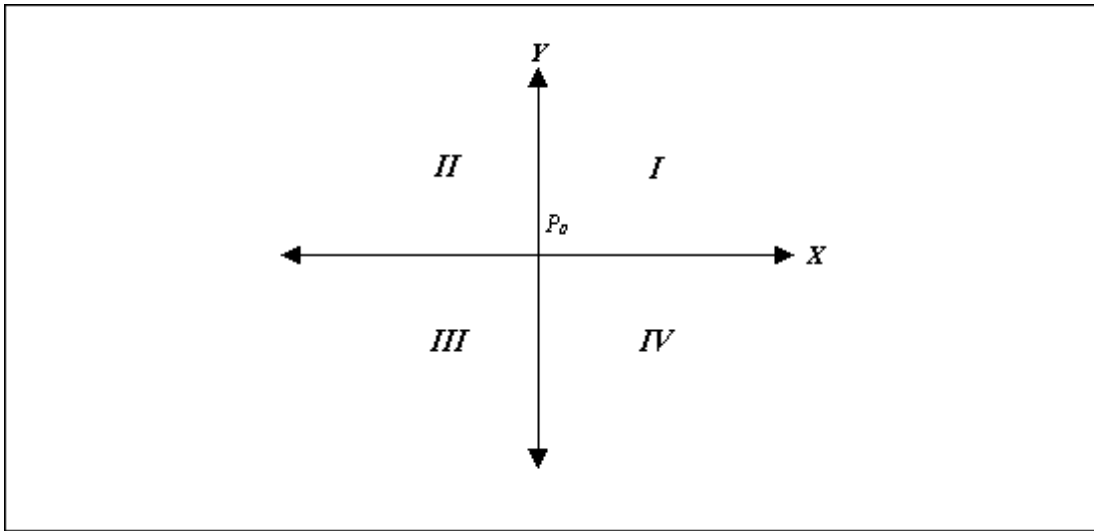


Figura 3.2: Ejes coordenados ortogonales del plano  $E_2$

### 3.3 TRASLACIONES EN EL PLANO

Se define inicialmente la función traslación en el espacio euclídeo de una dimensión, para posteriormente y basada en esta obtener una definición precisa de la misma función pero en el plano.

**Definición 3.1 (Función traslación en la recta)** Sea  $b \in \mathbb{R}$  y  $P_x \in E_1$ , la función *traslación b* en el espacio euclídeo de una dimensión  $E_1$ , que se

nota  $T_b$ . Se define así:

$$\begin{aligned} T_b & : E_1 \longrightarrow E_1 \\ P_x & \longmapsto T_b(P_x) = P_{x+b} \end{aligned}$$

Ahora, con base en la definición de traslación en el espacio euclídeo de una dimensión, se define la función traslación para el espacio de dos dimensiones, teniendo en cuenta que esta no es más que la composición de dos funciones traslación en la recta, una por la horizontal y otra por la vertical.

**Definición 3.2 (Función traslación horizontal)** . Sea  $P_{x,y}$  un punto del plano  $E_2$  y  $a \in \mathbb{R}$ , la **traslación horizontal  $a$**  se nota  $T_a^{\leftrightarrow}$  y se define así:

$$\begin{aligned} T_a^{\leftrightarrow} & : E_2 \longrightarrow E_2 \\ P_{x,y} & \longmapsto T_a^{\leftrightarrow}(P_{x,y}) = P_{x+a,y} \end{aligned}$$

**Definición 3.3 (Función traslación vertical)** . Sea  $P_{x,y}$  un punto del plano  $E_2$  y  $b \in \mathbb{R}$ , la **traslación vertical  $b$** , se nota  $T_b^{\updownarrow}$  y se define así:

$$\begin{aligned} T_b^{\updownarrow} & : E_2 \longrightarrow E_2 \\ P_{x,y} & \longmapsto T_b^{\updownarrow}(P_{x,y}) = P_{x,y+b} \end{aligned}$$

Luego, para definir la función traslación en el plano  $E_2$  se utiliza la composición de la función traslación horizontal con la función traslación vertical, como se ve en la definición siguiente.

**Definición 3.4 (Función traslación en el plano)** . Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $P_{x,y} \in E_2$ , la función **traslación  $a, b$**  en el espacio euclídeo de dos dimensiones  $E_2$ , se nota  $T_{a,b}$  y se define así:



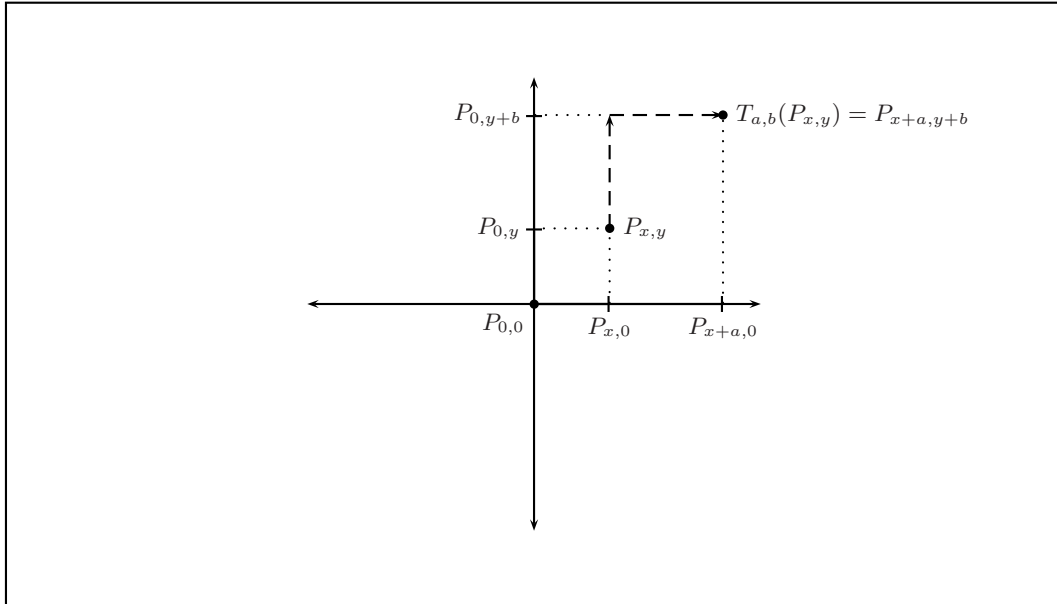


Figura 3.3: Función traslación en el plano

$$T_{a,b} : E_2 \longrightarrow E_2$$

$$P_{x,y} \longmapsto T_{a,b}(P_{x,y}) = T_b^\uparrow(T_a^\leftarrow(P_{x,y})) = P_{x+a,y+b}$$

Obsérvese que cualquier punto  $P_{x,y} \in E_2$  se puede obtener aplicando la traslación  $T_{x,y}$  al punto  $P_{o,o}$ , es decir  $P_{x,y} = T_{x,y}(P_{o,o})$ . En la Figura 1.3 se muestra la imagen del punto  $P_{x,y} \in E_2$  mediante la función  $T_{a,b}$  y se ve claramente la composición de las funciones traslación horizontal y vertical.

### 3.4 VECTORES EN EL PLANO

La noción inicial que se tiene de vector es la de un objeto con magnitud, dirección y sentido. Este conocimiento corresponde al vector no nulo que representamos como un segmento de recta dirigido.

Geoméricamente un vector se puede representar por un segmento retilíneo, donde se conoce cuál es su punto inicial y cuál es su punto final, este último se representa con una flecha, la longitud del segmento es la **magnitud** del vector, el ángulo que forma el vector con el semieje positivo  $X$  suministra la **dirección** del vector, y la flecha indica el **sentido** hacia a donde apunta el vector.

Si el origen de un vector es el punto  $P_{o,o}$  del plano cartesiano, entonces este se llama **vector geométrico** o **localizado**, de cualquier otra forma se dice que es un **vector libre**.

Para este estudio son de mayor importancia los vectores geoméricos, ya que los vectores libres mediante una traslación adecuada se convierten en vectores geoméricos.

Cada vector geométrico termina en un punto del plano y viceversa, cada punto del plano es el extremo de un vector geométrico, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y los vectores geoméricos.

De acuerdo a lo anterior, un vector geométrico del plano puede ser visto de tres maneras que entre sí son equivalentes:

1. Como el segmento dirigido que tiene origen en el punto  $P_{o,o}$  y extremo en el punto  $P_{a,b}$ , este vector lo notamos  $V_{a,b}$ .
2. Como el punto extremo de  $V_{a,b}$ , es decir podemos hablar del vector  $P_{a,b}$ .
3. Como la posición cartesiana del punto extremo de  $V_{a,b}$ , es decir como la

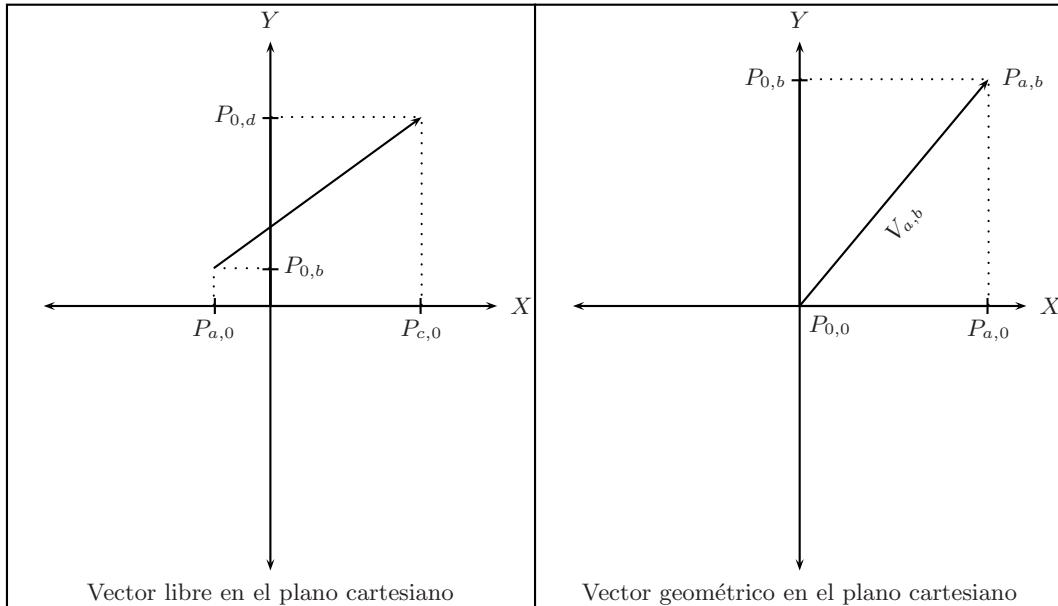


Figura 3.4: Vectores en el plano  $E_2$

posición de  $P_{a,b}$ , entonces hablamos del vector algebraico  $(a, b)$ .

El conjunto de todos los vectores geométricos del plano  $E_2$  se denota por  $V^2$ . En la Figura 3.4 se observan los diferentes tipos de vectores en el plano  $E_2$ .

### 3.5 SUMA DE PUNTOS EN EL PLANO

**Definición 3.5** *Dados los puntos  $P_{a,b}$  y  $P_{c,d} \in E_2$ , la **suma** de estos dos puntos del plano  $E_2$ , se nota  $P_{a,b} + P_{c,d}$  y se define así:*

$$\begin{aligned} P_{a,b} + P_{c,d} &= T_{c,d}(P_{a,b}) \\ &= P_{a+c,b+d} \end{aligned}$$

En la Figura 3.5 se ilustra de manera gráfica el resultado de la suma de dos puntos del plano  $E_2$ .

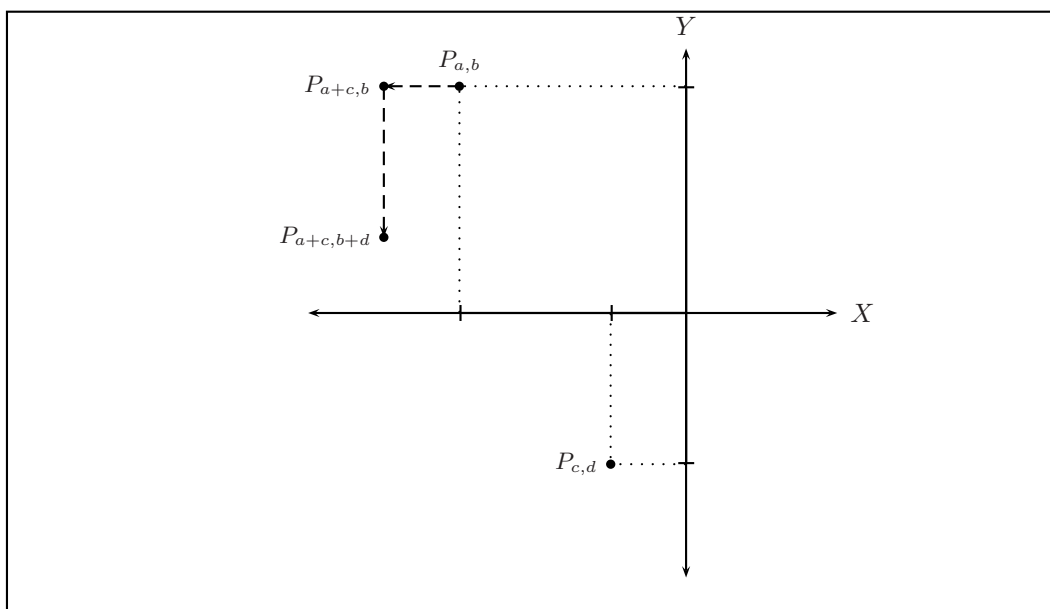


Figura 3.5: Suma de puntos en el plano  $E_2$

### 3.6 SUMA DE VECTORES EN EL PLANO

Para el presente trabajo, cuando se hable de vectores en el plano se hará referencia a vectores geométricos, a menos que se haga mención expresa a los otros tipos de vectores. Como se quiere que la suma de puntos coincida con la suma de vectores, entonces, dados los vectores  $V_{a,b}$  y  $V_{c,d}$  en  $V^2$ , el vector suma será  $V_{a+c,b+d}$ , que no es otra cosa que el vector que va desde el punto  $P_{o,o}$  hasta el punto  $P_{a+c,b+d}$ . Este resultado demuestra la veracidad del método del paralelogramo comúnmente utilizado para la suma de vectores (ver Figura 3.6).

### 3.7 TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO

Considérese el plano  $E_2$ , con el origen  $P_{o,o}$  fijo. Se vió que a cualquier punto  $P_{a,b}$  del plano le corresponde un vector geométrico  $V_{a,b}$  que tiene por punto final a  $P_{a,b}$ . Supóngase que se da una función  $f$ , tal que a cualquier punto  $P_{x,y}$  del plano  $E_2$  le hace corresponder otro punto  $P_{x',y'}$  del mismo plano, es decir

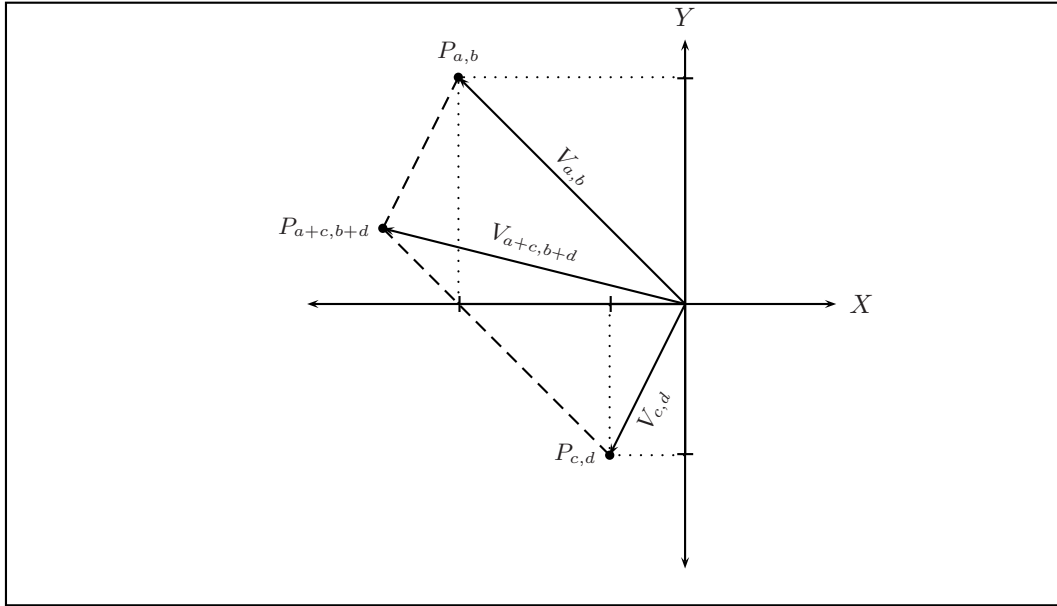


Figura 3.6: Suma de dos vectores en el plano  $E_2$

que el punto  $P_{x,y}$  se transforma en el punto  $P_{x',y'}$ . Esta función se denomina **transformación** de puntos y se dice que el punto  $P_{x',y'}$  es la imagen del punto  $P_{x,y}$  mediante  $f$ , que se define así:

$$f : E_2 \longrightarrow E_2$$

$$P_{x,y} \longmapsto f(P_{x,y}) = P_{x',y'}$$

Conjuntamente con la transformación dada de puntos, es posible considerar una transformación de vectores geométricos del plano  $E_2$ , en la cual un vector geométrico arbitrario  $V_{x,y}$  se transforma en el vector  $V_{x',y'}$ , el cual es la imagen de  $V_{x,y}$  mediante la transformación  $f$ . La representación simbólica de lo anterior queda así,  $V_{x',y'} = f(V_{x,y})$ .

**Definición 3.6 (Transformación lineal)** Sean  $V_{a,b}$  y  $V_{b,c}$  vectores en  $V^2$ ,

$\lambda \in \mathbb{R}$  y  $f$  una transformación definida en el plano, se dice que  $f$  es una **transformación lineal** si cumple las condiciones siguientes:

1.  $f(\lambda V_{a,b}) = \lambda f(V_{a,b})$ .
2.  $f(V_{a,b} + V_{c,d}) = f(V_{a,b}) + f(V_{c,d})$

En lo sucesivo, cuando se haga referencia a vectores y mientras no haya confusión debe entenderse que es un vector geométrico.

La interpretación geométrica de las condiciones (1) y (2) de la definición 3.6 es muy importante para el entendimiento del *pantógrafo bidimensional*, en la condición (1) nótese que el vector  $\lambda V_{a,b}$  es colineal al vector  $V_{a,b}$  y se obtiene de éste estirándolo o contrayéndolo  $\lambda$  veces según que  $|\lambda| > 1$  ó  $0 < |\lambda| < 1$ , si  $|\lambda| = 1$  el vector no se dilata ni se contrae y en cualquier caso, si  $\lambda < 0$  el vector  $\lambda V_{a,b}$ , se obtiene de  $|\lambda| V_{a,b}$  rotándolo media vuelta.

Esta condición que se ilustra en la Figura 3.7 muestra que la imagen de un vector  $V_{a,b} \in V^2$  bajo una transformación lineal  $f$ ,  $f(V_{a,b})$  es colineal a  $f(\lambda V_{a,b})$  y se obtiene de éste estirándolo o contrayéndolo  $\lambda$  veces, por esto la transformación lineal  $f$  transforma líneas rectas que pasan por el origen en líneas rectas que pasan por el origen.

Para interpretar geoméricamente la condición (2) se debe recurrir a la definición de suma de vectores en el plano  $E_2$  hecha anteriormente. Dados los vectores  $V_{a,b}$  y  $V_{c,d}$ , la condición (2) muestra que la imagen obtenida mediante la aplicación de una transformación lineal a la suma de dos vectores es igual a la suma de los vectores imagen bajo la misma transformación, esto es  $f(V_{a,b} + V_{c,d}) = f(V_{a,b}) + f(V_{c,d})$ .

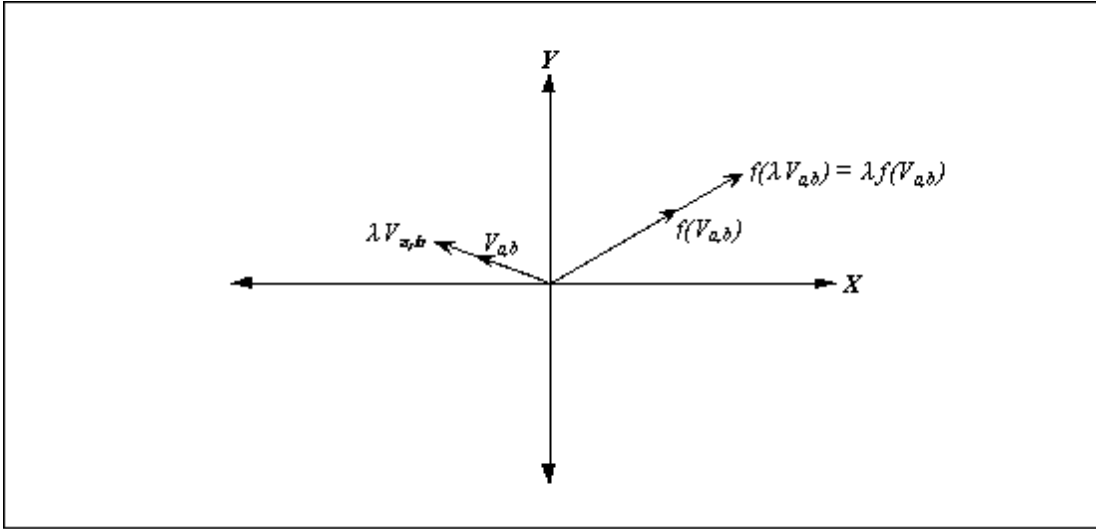


Figura 3.7: Interpretación geométrica de la condición 1 de la definición de una transformación lineal

Como los puntos también son vectores, entonces  $f(P_{a,b} + P_{c,d}) = f(P_{a,b}) + f(P_{c,d})$ . Además,  $f(P_{0,0}) = P_{0,0}$  puesto que  $f(P_{0,0}) = f(P_{0,0} + P_{0,0}) = f(P_{0,0}) + f(P_{0,0})$  y el módulo de la suma es  $P_{0,0}$ .

$P_{0,0}$ ,  $P_{a,b}$ ,  $P_{c,d}$  y  $P_{a,b} + P_{c,d}$  son los vértices de un paralelogramo, y mediante  $f$ , este paralelogramo se transforma en el paralelogramo cuyos vértices son:  $P_{0,0}$ ,  $f(P_{a,b})$ ,  $f(P_{c,d})$  y  $f(P_{a,b}) + f(P_{c,d})$  y las transformaciones lineales convierten paralelogramos con un vértice en el origen en paralelogramos con un vértice en el origen, esto se ilustra en la Figura 3.8.

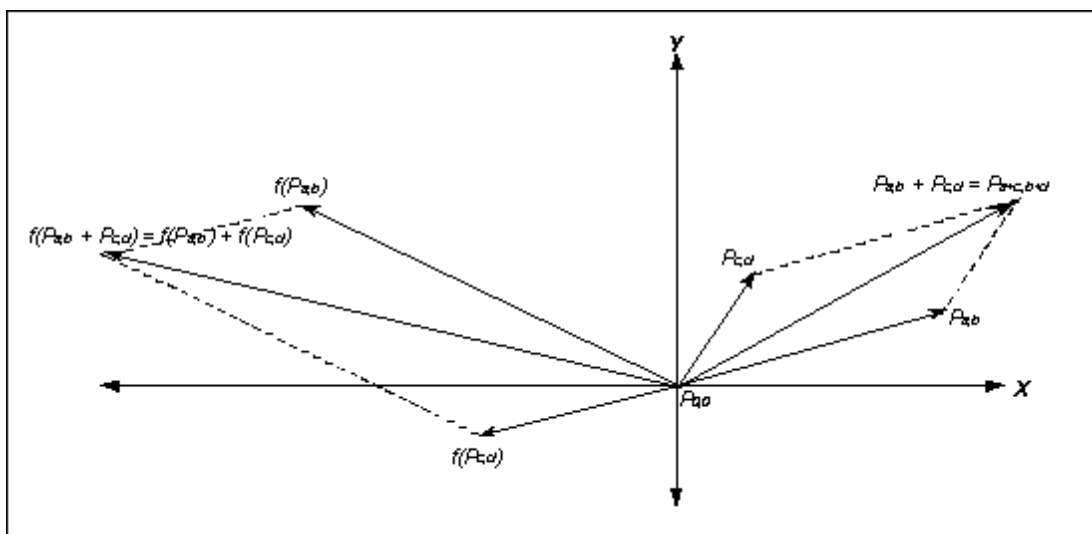


Figura 3.8: Interpretación geométrica de la condición 2 de la definición de una transformación lineal



## 4 FUNCIONES: ROTACIÓN, SEMEJANZA Y SIMETRÍA COMO TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se definen las funciones rotación, semejanza y simetría en el plano y se demuestra que son transformaciones lineales, quedando así el camino claro para el análisis y la construcción del pantógrafo bidimensional.

### 4.2 COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

Se llama *semirecta origen* a la semirecta horizontal que se extiende infinitamente hacia la derecha del origen  $P_0$ , y se nota  $\mathcal{S}_0$ . Si sobre el plano se gira una vuelta a  $\mathcal{S}_0$  alrededor del origen  $P_0$ , esta semirecta produce el plano, es decir que el plano se puede ver como la unión de infinitas semirectas con origen común  $P_0$ .

Como la semirecta origen es un conjunto de infinitos puntos y al girarla una vuelta para producir el plano, cada punto de la semirecta  $\mathcal{S}_0$  diferente de  $P_0$ , produce una circunferencia con centro en  $P_0$ , entonces el plano se puede ver también como la unión de infinitas circunferencias con centro en  $P_0$ , reunido con  $\{P_0\}$ .

Tómese un punto  $P_a$  de la semirecta origen  $\mathcal{S}_0$  ( $P_a \in \mathcal{S}_0, a > 0$ ), de acuerdo

a la anterior construcción del plano, este punto al girar una vuelta produce la *circunferencia de radio  $a$  con centro en  $P_0$* , esta circunferencia se denota  $Cir_a P_0$ .

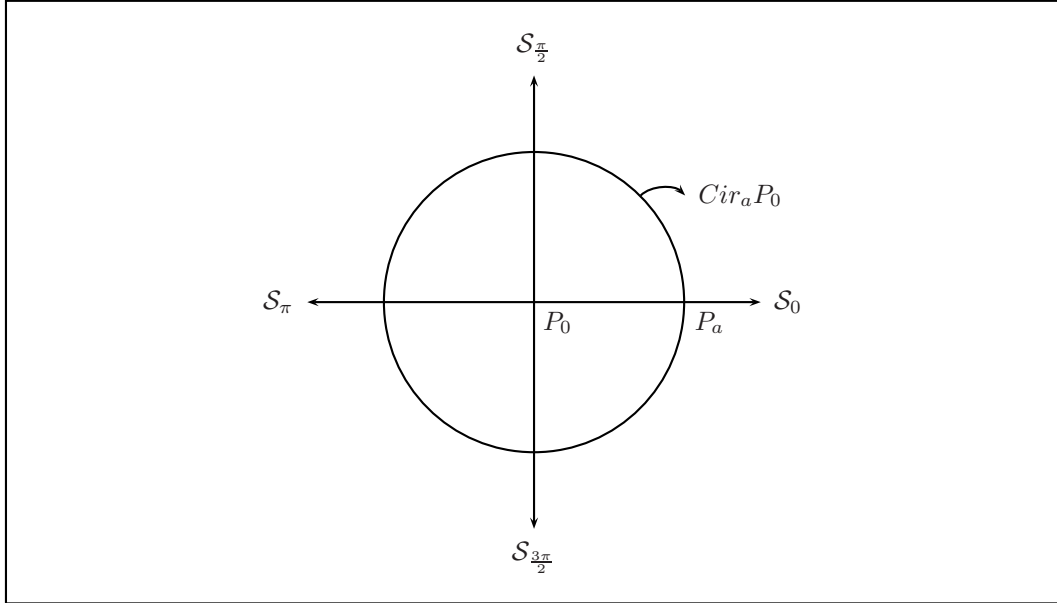


Figura 4.1: Circunferencia de radio  $a$  con centro en  $P_0$

**Definición 4.1 (Semirecta  $\alpha$ )** Si una semirecta con origen en  $P_0$  forma con la semirecta origen  $S_0$  un ángulo de medida  $\alpha$ , entonces esta se llama **semirecta  $\alpha$**  y se nota  $S_\alpha$

Cada punto del plano  $E_2$ , menos  $P_0$ , pertenece a una única circunferencia y a una única semirecta  $S_\alpha$ , donde  $0 \leq \alpha < 2\pi$ .

**Definición 4.2 (Coordenadas polares de un punto  $P$ )** Si  $P \in E_2$ ,  $P \neq P_0$  y  $P \in Cir_a P_0 \cap S_\alpha$ , entonces el punto  $P$  se llama  $P_{a,\alpha}$ . Se dice que  $P$  tiene **posición polar**  $(a, \alpha)$  o que  **$a$  y  $\alpha$  son las coordenadas polares** de  $P_{a,\alpha}$ .

El único punto que no tiene posición polar es el origen  $P_{0,0}$ .

La figura 4.2 muestra las coordenadas polares de un punto  $P$  del plano  $E_2$ .

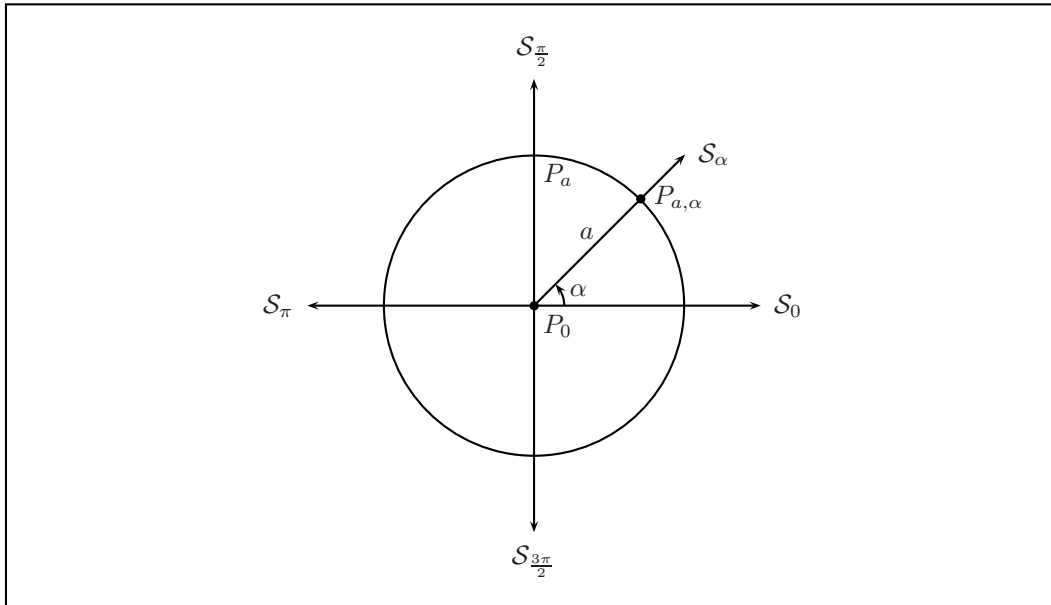


Figura 4.2: Coordenadas polares de un punto en el plano  $E_2$

### 4.3 RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y COORDENADAS CARTESIANAS

Dado un punto  $P \in E_2$  con coordenadas polares  $a$  y  $\alpha$ , se pueden obtener a partir de estas las respectivas coordenadas cartesianas  $x$  y  $y$ , así:

$$x = a \cos \alpha \quad (1)$$

$$y = a \sin \alpha \quad (2)$$

Y teniendo las coordenadas cartesianas podemos obtener también las coordenadas polares con las siguientes expresiones:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4)$$

#### 4.4 ROTACIONES EN EL PLANO

**Definición 4.3 (Función rotación en el plano)** Sea  $\beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < \beta < 2\pi$  y  $P_{a,\alpha} \in E_2$ . la **rotación  $\beta$  en el plano**, se nota  $R_\beta$ , y es la función definida así:

$$\begin{aligned} R_\beta &: E_2 \longrightarrow E_2 \\ P_{a,\alpha} &\longmapsto R_\beta(P_{a,\alpha}) = P_{a,\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Todo vector  $V_{a,b}$  del plano diferente a  $V_{0,0}$  tiene infinitos puntos, y todos estos puntos pertenecen a la misma semirecta  $\mathcal{S}_\alpha$ , donde  $\alpha$  es la dirección del vector. De tal manera que si aplicamos una rotación  $R_\beta$  a un vector arbitrario del plano, el nuevo vector tendrá como dirección el ángulo  $\alpha + \beta$  y conserva la magnitud. Véase la figura 4.3.

El extremo del vector geométrico  $V_{x,y} \in V^2$  es el punto  $P_{x,y} \in E_2$  y su posición polar es  $(r, \alpha)$ , donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\alpha$  es el ángulo que forma la semirecta que sale del origen y pasa por  $P_{x,y}$  con el semieje positivo de las  $X$ , se sabe que para  $0 < \beta < 2\pi$  se tiene  $R_\beta(P_{r,\alpha}) = P_{r,\alpha+\beta}$ . Se pueden hallar las coordenadas cartesianas del punto  $P_{r,\alpha+\beta}$  de la siguiente manera:

Si  $P_{x,y} = P_{r,\alpha}$

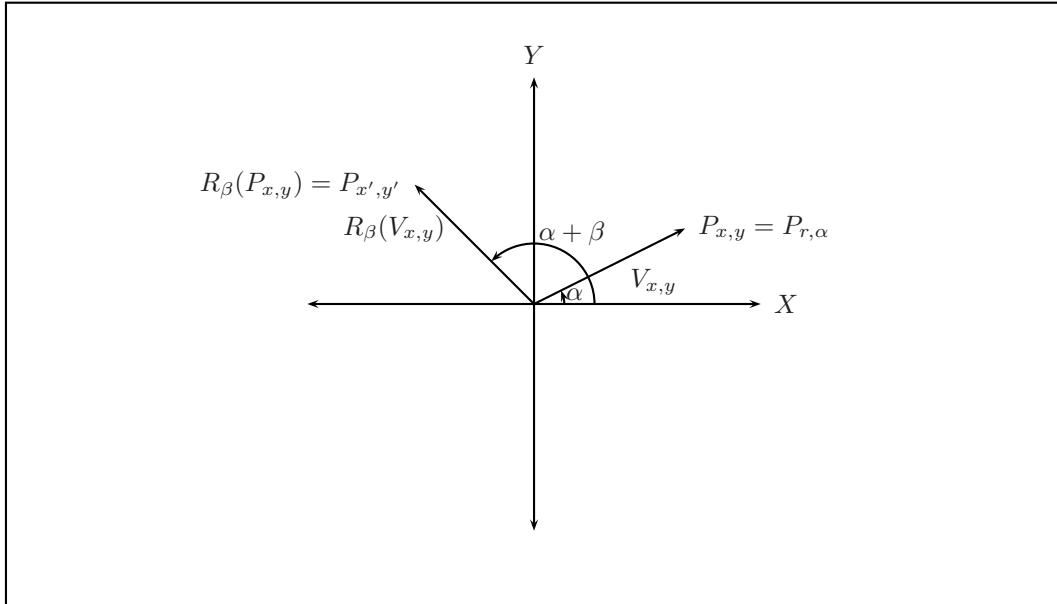


Figura 4.3: Rotación de un vector en el plano  $E_2$

$$x = r \operatorname{Cosa} \quad (5)$$

$$y = r \operatorname{Sen} \alpha \quad (6)$$

cuando se aplica la rotación  $\beta$  a  $P_{x,y}$  se obtiene un punto  $P_{x',y'}$ , donde  $P_{x',y'} = P_{r,\alpha+\beta}$  y

$$x' = r \operatorname{Cos}(\alpha + \beta)$$

$$y' = r \operatorname{Sen}(\alpha + \beta)$$

solucionando, tenemos

$$x' = r[\operatorname{Cosa}\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Sen}\beta]$$

$$y' = r[\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cosa}\operatorname{Sen}\beta]$$

reemplazando (5) y (6) en las ecuaciones anteriores, se concluye que:

$$x' = x\text{Cos}\beta - y\text{Sen}\beta \quad (7)$$

$$y' = x\text{Sen}\beta + y\text{Cos}\beta \quad (8)$$

Por lo tanto, cuando a un vector arbitrario  $V_{x,y} \in E_2$  se le aplica una rotación  $\beta$  se obtiene un vector  $V_{x',y'}$ , donde:

$$x' = x\text{Cos}\beta - y\text{Sen}\beta$$

$$y' = x\text{Sen}\beta + y\text{Cos}\beta \quad (9)$$

de tal manera que

$$R_\beta(V_{x,y}) = V_{x\text{Cos}\beta - y\text{Sen}\beta, x\text{Sen}\beta + y\text{Cos}\beta} \quad (10)$$

**Teorema 4.1** *La función rotación en el plano es una transformación lineal.*

***Demostración***

Sean  $Vx, y \in V^2$ ,  $k \in \mathbb{R}$  y  $0 < \beta < 2\pi$ , debemos demostrar que:

$$R_\beta(k(V_{x,y})) = k(R_\beta(V_{x,y}))$$

de la ecuación (10) se tiene

$$\begin{aligned} k(R_\beta(V_{x,y})) &= k(V_{x\text{Cos}\beta - y\text{Sen}\beta, x\text{Sen}\beta + y\text{Cos}\beta}) \\ &= V_{k(x\text{Cos}\beta - y\text{Sen}\beta), k(x\text{Sen}\beta + y\text{Cos}\beta)} \\ &= V_{(kx)\text{Cos}\beta - (ky)\text{Sen}\beta, (kx)\text{Sen}\beta + (ky)\text{Cos}\beta} \\ &= R_\beta(V_{kx, ky}) \\ &= R_\beta(k(V_{x,y})) \end{aligned}$$

Luego, se cumple la primera condición de la definición de transformación lineal.

Considere ahora dos vectores arbitrarios  $V_{x_1,y_1}$  y  $V_{x_2,y_2}$ . Se debe demostrar que

$$R_\beta(V_{x_1,y_1} + V_{x_2,y_2}) = R_\beta(V_{x_1,y_1}) + R_\beta(V_{x_2,y_2})$$

De un lado se tiene que el vector suma de los vectores está dado por  $V_{x_1+x_2,y_1+y_2}$  y aplicando una rotación  $\beta$  a este vector suma se obtiene, de acuerdo a la ecuación (10), lo siguiente:

$$\begin{aligned} R_\beta(V_{x_1,y_1} + V_{x_2,y_2}) &= R_\beta(V_{x_1+x_2,y_1+y_2}) \\ &= V_{(x_1+x_2)\cos\beta - (y_1+y_2)\text{Sen}\beta, (x_1+x_2)\text{Sen}\beta + (y_1+y_2)\cos\beta} \end{aligned} \quad (11)$$

De otro lado, y aplicando (10) se tiene

$$\begin{aligned} R_\beta(V_{x_1,y_1}) + R_\beta(V_{x_2,y_2}) &= V_{x_1\cos\beta - y_1\text{Sen}\beta, x_1\text{Sen}\beta + y_1\cos\beta} \\ &\quad + V_{x_2\cos\beta - y_2\text{Sen}\beta, x_2\text{Sen}\beta + y_2\cos\beta} \end{aligned}$$

Sumando la expresión de la derecha, se tiene

$$R_\beta(V_{x_1,y_1}) + R_\beta(V_{x_2,y_2}) = V_{(x_1+x_2)\cos\beta - (y_1+y_2)\text{Sen}\beta, (x_1+x_2)\text{Sen}\beta + (y_1+y_2)\cos\beta} \quad (12)$$

De las expresiones (11) y (12), se concluye que

$$R_{\beta}(V_{x_1,y_1} + V_{x_2,y_2}) = R_{\beta}(V_{x_1,y_1}) + R_{\beta}(V_{x_2,y_2})$$

quedando demostrada la segunda condición de las transformaciones lineales, por lo tanto la *rotación es una transformación lineal*.

Si un punto  $P_{a,\alpha}$  recorre cierta figura  $F$ , entonces el punto  $P_{a,\alpha+\beta}$  obtenido a partir de la rotación  $\beta$  del punto  $P_{a,\alpha}$  recorre la figura  $F'$ , que se obtiene girando  $F$  alrededor de  $P_{0,0}$  con un ángulo dado  $\beta$ . Ver figura 4.4

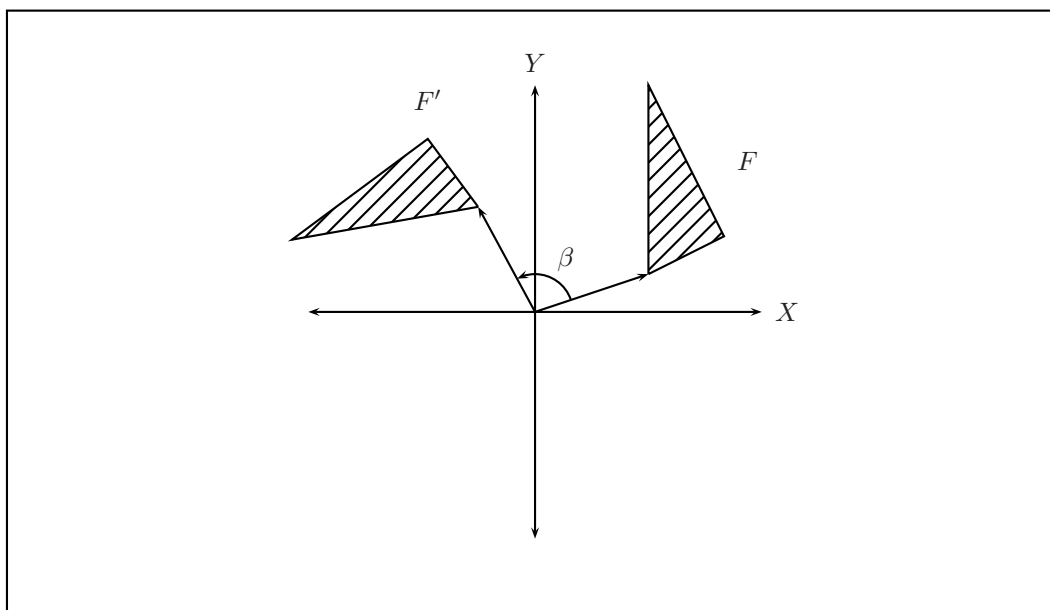


Figura 4.4: Rotación de una figura

## 4.5 SEMEJANZAS EN EL PLANO

A continuación se define la función semejanza de vectores en el plano  $E_2$  y se demuestra más adelante que esta es una transformación lineal.



**Definición 4.4** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$  y  $V_{a,b} \in V^2$  la **función semejanza de razón  $k$**  que se nota  $S_k$ , se define así:

$$\begin{aligned} S_k : V^2 &\longrightarrow V^2 \\ V_{a,b} &\longmapsto S_k(V_{a,b}) = V_{ka,kb} \end{aligned}$$

**Teorema 4.2** La función semejanza  $S_k$  es una transformación lineal

**Demostración:**

Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $V_{x,y} \in V^2$ , entonces

$$\begin{aligned} \lambda(S_k(V_{x,y})) &= \lambda(V_{kx,ky}) \\ &= V_{\lambda(kx),\lambda(ky)} \\ &= V_{k(\lambda x),k(\lambda y)} \\ &= S_k(V_{\lambda x,\lambda y}) \\ &= S_k(\lambda V_{x,y}) \end{aligned}$$

Así queda demostrada la primera condición de la definición de transformación lineal.

Ahora se demuestra que la transformación de una suma es la suma de las transformaciones, que es la segunda condición.

Sean  $V_{a,b}, V_{c,d} \in V^2$ , aplicando las propiedades de la función semejanza y de la suma de vectores se tiene.

$$\begin{aligned}
S_k(V_{a,b} + V_{c,d}) &= S_k(V_{a+c,b+d}) \\
&= V_{k(a+c),k(b+d)} \\
&= V_{ka+kc, kb+kd} \\
&= V_{ka, kb} + V_{kc, kd} \\
&= S_k(V_{a,b}) + S_k(V_{c,d})
\end{aligned}$$

Luego, la función semejanza es una *transformación lineal*.

Si el extremo del vector  $V_{x,y}$  que es el punto  $P_{x,y}$  recorre una figura  $F$ , entonces el punto  $P_{kx,ky}$  que es el extremo del vector  $S_k(V_{x,y})$  recorre la figura  $F'$  que es semejante a  $F$ . Véase la figura 4.5.

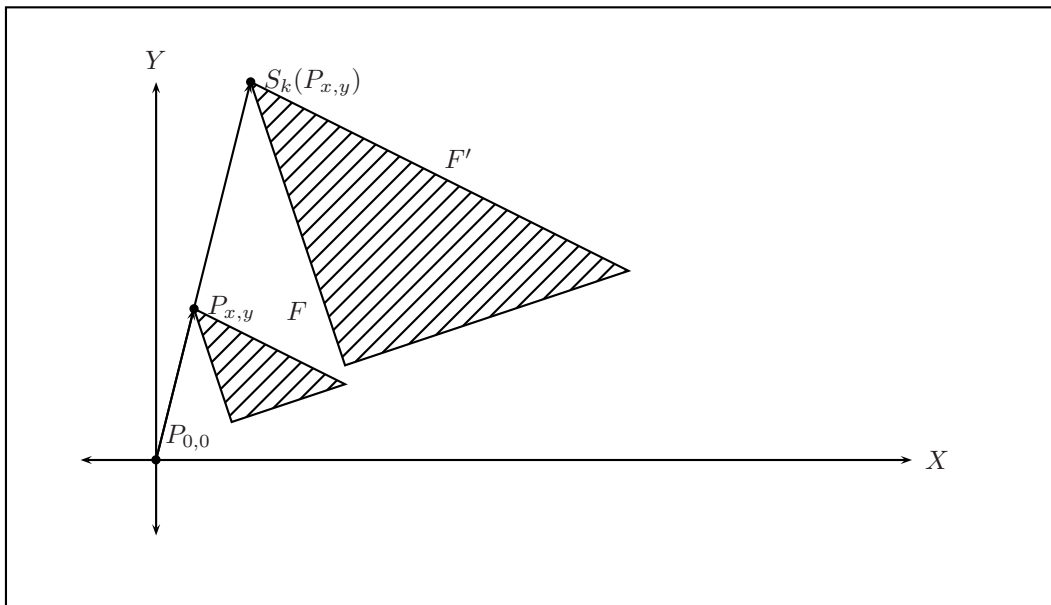


Figura 4.5: Figuras semejantes

Como la semejanza  $S_k$  es transformación lineal, entonces ella transforma líneas rectas que pasan por el origen en líneas rectas que también pasan por el origen,

pero más precisamente,  $S_k$  transforma cada recta que pasa por el origen en ella misma y más exactamente,  $S_k$  transforma cada semirecta con origen en  $P_{0,0}$  en ella misma, como se ve en la figura 4.6.

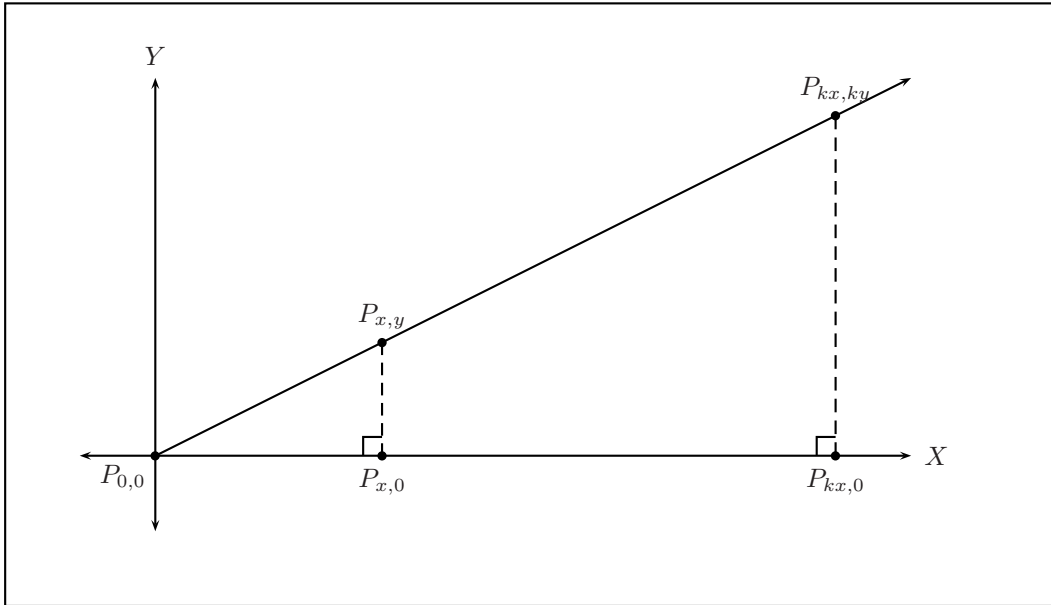


Figura 4.6: Transformación de una semirecta mediante  $S_k$

Los dos triángulos de la figura 4.6 son rectángulos y los lados que forman los ángulos rectos son proporcionales, luego, por Euclides los dos triángulos son semejantes y el ángulo en  $P_{0,0}$  para ambos triángulos es igual, y por lo tanto  $V_{x,y}$  y  $V_{kx,ky}$  están en una misma semirecta, con esto se ha probado lo propuesto.

Como la semejanza transforma paralelogramos en paralelogramos, entonces un aparato que transforma una figura en otra semejante a ella, mediante  $S_k$  es el que se muestra en la figura 4.7.

Donde,

$$\frac{NQ}{NP_{x,y}} = \frac{MS}{MP_{x,y}} = k$$

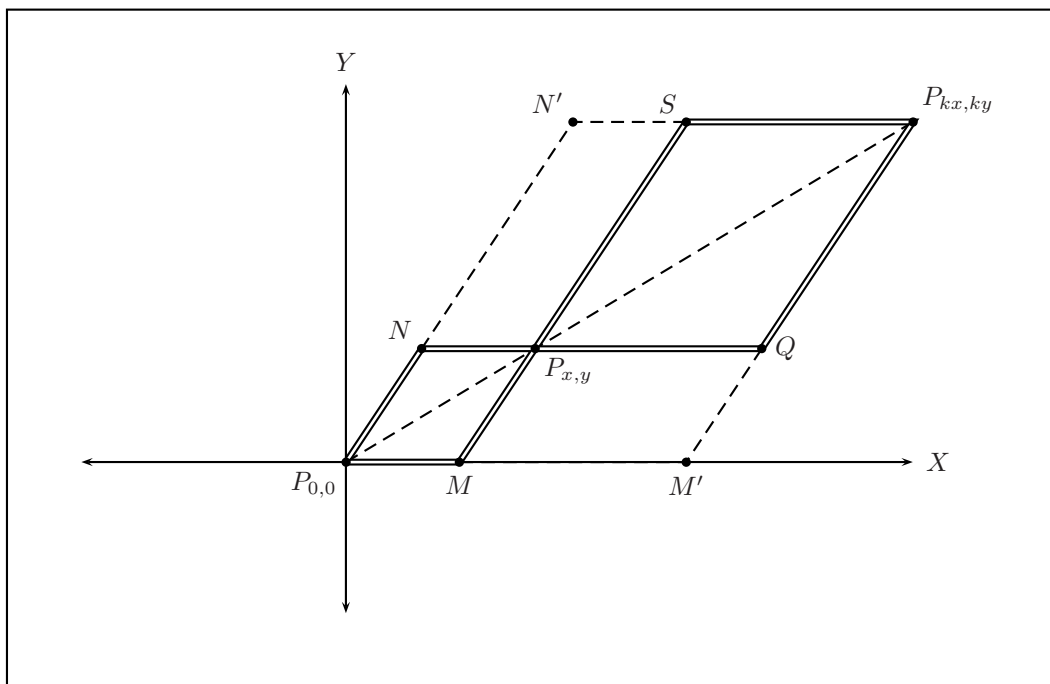


Figura 4.7: Pantógrafo bidimensional

$P_{0,0}$  es un punto fijo y cuando  $P_{x,y}$  recorre una figura  $F$ , entonces  $P_{kx,ky}$  recorre  $S_k(F) = F'$ .

Se dice que aquí,  $P_{x,y}$  y  $P_{kx,ky}$  están en una misma semirecta que inicia en  $P_{0,0}$  y  $S_k$  transforma el paralelogramo  $P_{0,0}MP_{x,y}N$  en el paralelogramo  $P_{0,0}M'P_{kx,ky}N'$ .

El aparato de la figura 4.7 se llama ***pantógrafo bidimensional***.

## 4.6 SIMETRÍAS EN EL PLANO

Una simetría se define, respecto a las rectas que pasan por el origen. Inicialmente se estudia la simetría respecto al eje coordenado  $\mathbf{X}$  y se demuestra que es una transformación lineal.

**Definición 4.5 (Simetría respecto al eje coordenado  $X$ )** Dado un vector  $V_{a,b} \in V^2$ , la simetría en el plano del vector  $V_{a,b}$  respecto al eje coordenado horizontal  $X$ , se nota  $\sigma_x$  y se define así:

$$\begin{aligned}\sigma_x &: V^2 \longrightarrow V^2 \\ V_{a,b} &\longmapsto \sigma_x(V_{a,b}) = V_{a,-b}\end{aligned}$$

**Teorema 4.3** La función simetría es una transformación lineal.

### Demostración

Sean  $V_{a,b}$  y  $V_{c,d}$  vectores en  $V^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Para demostrar que es una transformación lineal, primero se prueba que  $\sigma_x(\lambda V_{a,b}) = \lambda \sigma_x(V_{a,b})$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_x(\lambda V_{a,b}) &= \sigma_x(V_{\lambda a, \lambda b}) \\ &= V_{\lambda a, -\lambda b} \\ &= \lambda V_{a, -b} \\ &= \lambda \sigma_x(V_{a,b})\end{aligned}$$

Queda demostrada la primera condición.

Ahora se demuestra la segunda condición,

$$\begin{aligned}\sigma_x(V_{a,b} + V_{c,d}) &= \sigma_x(V_{a+c, b+d}) \\ &= V_{a+c, -(b+d)} \\ &= V_{a+c, -b-d} \\ &= V_{a,-b} + V_{c,-d} \\ &= \sigma_x(V_{a,b}) + \sigma_x(V_{c,d})\end{aligned}$$

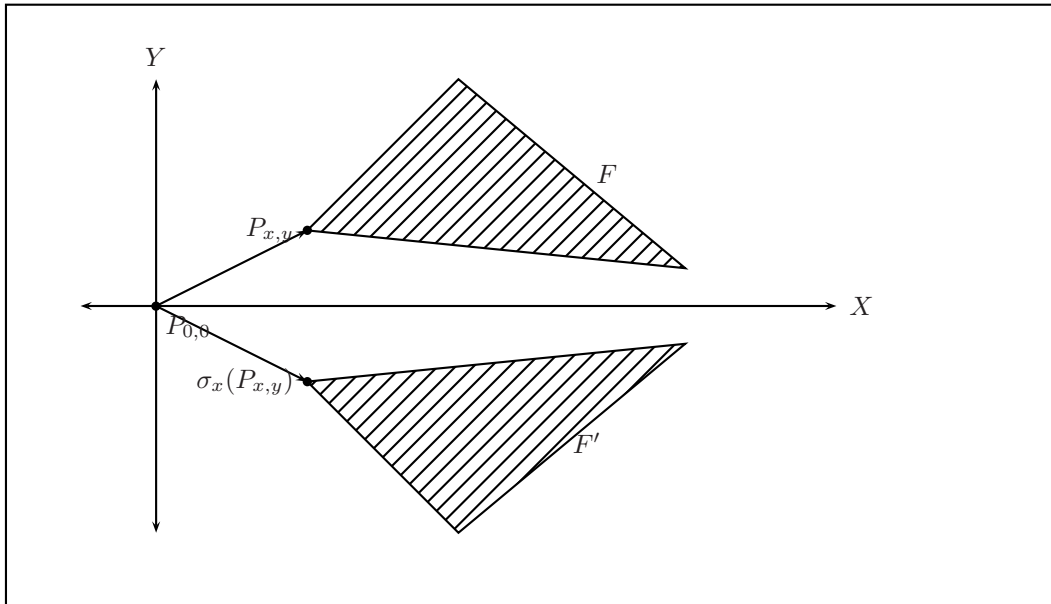


Figura 4.8: Figuras simétricas respecto al eje  $X$

Por lo tanto la función simetría respecto al eje coordenado  $X$  es una transformación lineal.

Si el punto extremo  $P_{x,y}$  de un vector geométrico  $V_{x,y}$ , recorre una figura  $F$ , entonces el punto simétrico  $P_{x,-y}$  recorrerá una figura  $F'$  que es simétrica a  $F$ . Véase la figura 4.8.

## 5 CONSTRUCCIÓN DE UN PANTÓGRAFO BIDIMENSIONAL ELECTROMECAÁNICO

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se describe la construcción de un prototipo de pantógrafo bidimensional electromecánico, basado en motores paso a paso.

### 5.2 MOTORES PASO A PASO

Para la construcción de un prototipo de pantógrafo electromecánico se pueden utilizar dos motores paso a paso para controlar cada una de las coordenadas  $X$  y  $Y$ . Por eso es conveniente ver que son y como funcionan este tipo de motores.

Los motores paso a paso son en la actualidad muy importantes en todos los proyectos que incluyan control de movimiento y posición. Una de las aplicaciones más cercana a todos nosotros está en los discos duros y disqueteras de un computador, así como también el avance de papel y la posición de la cabeza de una impresora. Los brazos mecánicos de la mayoría de industrias utilizan este tipo de motores.

Estos motores son de naturaleza digital, lo cual facilita su control, ya que sencillamente se hace contando el número de pasos o los ángulos que avanza.

Un motor paso a paso convierte pulsos eléctricos en movimientos discretos de rotación. Los motores paso a paso tienen como característica comercial la cantidad de grados que gira en cada paso, siendo los más utilizados en impresoras los de  $7.5^\circ$  por cada paso, y en discos duros y escáner los de  $1.8^\circ$  por paso.

Los motores paso a paso están constituidos por un rotor y un estator. El rotor está construido de un imán permanente que tiene un patrón fijo alternado de polos Norte y Sur, el estator está formado por una copa de hierro con dientes, energizadas por dos embobinados separados los cuales definen la polaridad Norte y Sur de cada uno de los dientes. La interacción entre el rotor y el estator, polos iguales se repelen y polos opuestos se atraen hacen que el rotor se mueva.

En la figura 5.1 se muestra como se deben conectar los embobinados de un motor paso a paso para que se pueda lograr una secuencia de cuatro pasos, cada bobina se conecta a un sistema de conmutación para obtener las polaridades positiva y negativa. El motor avanza en sentido de las manecillas del reloj (CW) aplicando la secuencia de polaridades 1, 2, 3 y 4. Inviertiendo el orden el motor gira en sentido contrario (CCW). Para energizar las bobinas, se puede utilizar un circuito basado en transistores configurados como interruptores electrónicos.

En la tabla 5.1 se muestra como deben energizarse los embobinados para que el motor de la figura 5.1 realice una secuencia de cuatro pasos.



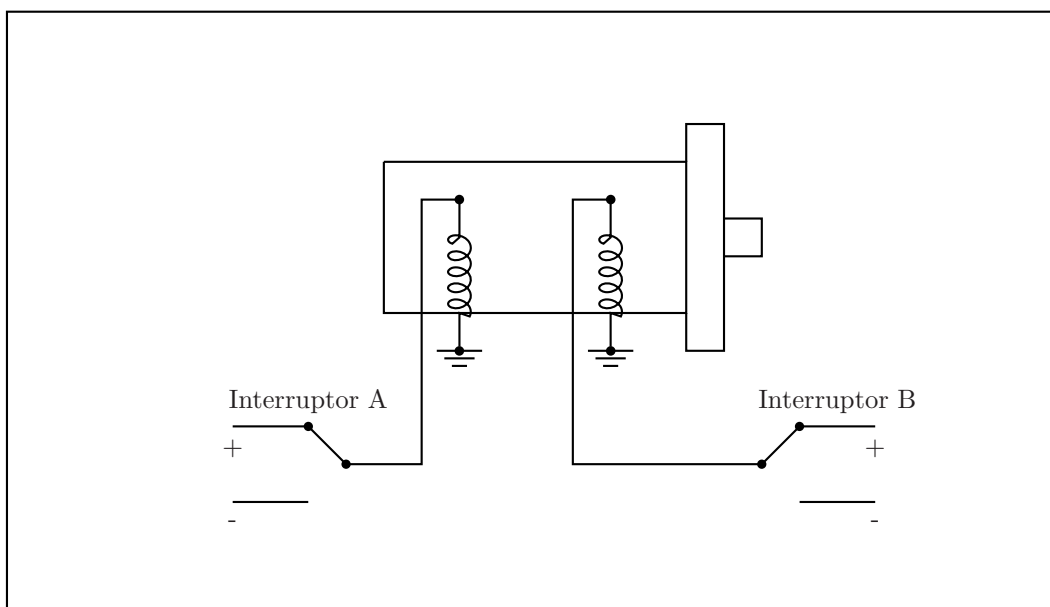


Figura 5.1: Funcionamiento de un motor paso a paso

### 5.3 PANTÓGRAFO BIDIMENSIONAL ELECTROMECAÁNICO

La construcción se hace a partir del pantógrafo que aparece en la figura 5.2, el cual está compuesto por cuatro regletas que para nuestro caso se ha utilizado aluminio. En el pantógrafo existe un punto llamado  $P_{0,0}$ , los demás puntos de articulación entre las regletas de aluminio son móviles. En el punto  $P$  se coloca un punzón de punta roma que permita recorrer la figura de la cual se quiere reproducir una figura semejante y en el punto  $P'$  se coloca una plumilla o lápiz que sirva para dibujar sobre una superficie plana la figura semejante.

En el pantógrafo de la figura 5.2 el punto  $P$  recorre la figura  $F$ , mientras que en el punto  $P'$  se ha ubicado una plumilla, la cual reproduce una figura  $F'$  que es semejante a  $F$ . Para demostrar que la figura  $F'$  es semejante a la figura  $F$ , basta probar que cualquier punto  $P' = P_{x',y'}$  de la figura  $F'$  se obtiene de su correspondiente punto  $P = P_{x,y}$  de la figura  $F$  mediante una misma semejanza

Pasos	Bobina A	Bobina B
1	+	+
2	+	-
3	-	-
4	-	+
1	+	+

Tabla 5.1: Secuencia de conmutación de 4 pasos

$S_k$

Para esto observese que si a los vectores que determinan el pantógrafo se les dibuja los vectores punteados para obtener dos paralelogramos semejantes, con razón de semejanza  $k$ , tal como se muestra en la figura 5.3. Se obtienen dos paralelogramos cuyos vertices son  $P_{0,0}$ ,  $P_{a,b}$ ,  $P_{c,d}$  y  $P_{x,y}$  para uno de los paralelogramos y  $P_{0,0}$ ,  $P_{a',b'}$ ,  $P_{c',d'}$  y  $P_{x',y'}$  para el otro paralelogramo.

Por construcción del pantógrafo se tiene que  $P_{a',b'} = S_k(P_{a,b}) = P_{ka,kb}$  y  $P_{c',d'} = S_k(P_{c,d}) = P_{kc,kd}$ , donde  $k > 1$ . Por definición de suma de puntos  $P_{x,y} = P_{a,b} + P_{c,d} = P_{a+c,b+d}$  y  $P_{x',y'} = P_{a',b'} + P_{c',d'} = P_{a'+c',b'd'}$ , reemplazando se tiene:

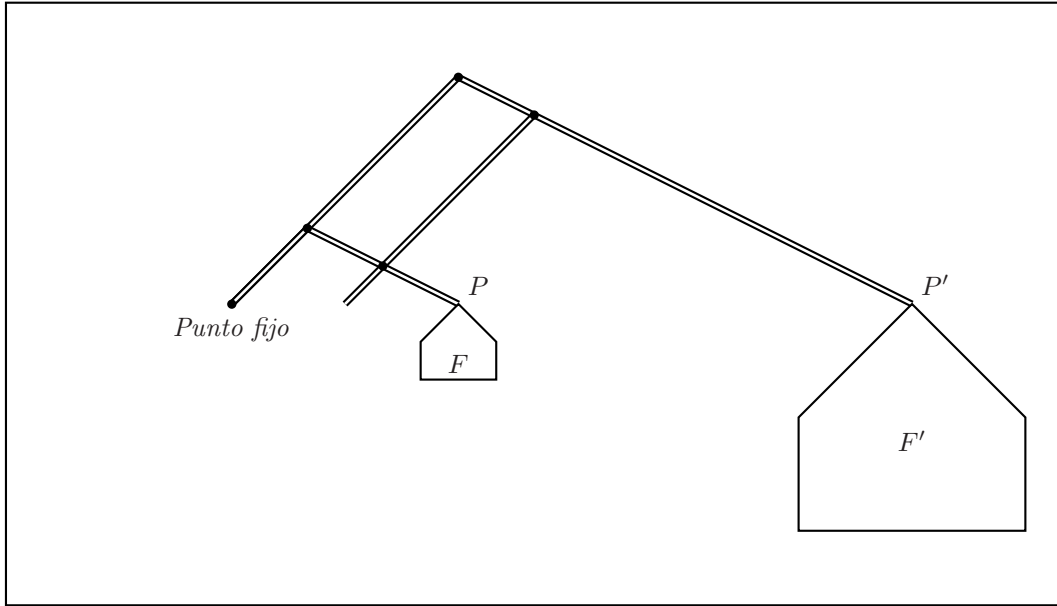


Figura 5.2: Pantógrafo bidimensional

$$\begin{aligned}
 P_{x',y'} &= P_{a',b'} + P_{c',d'} \\
 &= P_{ka,kb} + P_{kc,kd} \\
 &= P_{ka+kc, kb+kd} \\
 &= P_{k(a+c), k(b+d)} \\
 &= S_k(P_{a+c, b+d}) \\
 &= S_k(P_{x,y})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $P_{x',y'} = S_k(P_{x,y})$ .

Así, si el punto  $P_{x,y}$  recorre una figura  $F$ , entonces el punto  $P_{x',y'}$  recorrerá una figura  $F' = S_k(F)$ .

En el procedimiento anterior se ha considerado  $k > 1$ , que da como resultado

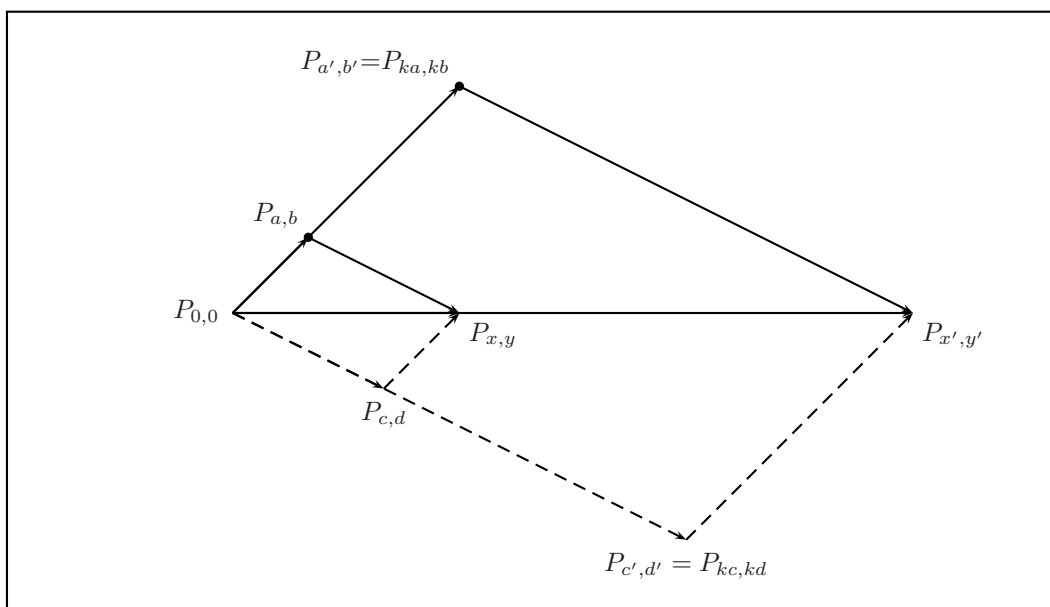


Figura 5.3: Geometría del pantógrafo bidimensional

una figura  $F'$  de mayor tamaño que la figura  $F$ , es decir que el pantógrafo ha servido para ampliar la figura. Por el contrario si lo que se quiere es obtener una figura reducida mediante  $S_{\frac{1}{k}}$  ( $0 < \frac{1}{k} < 1$ ), sencillamente hay que intercambiar los puntos  $P$  y  $P'$ , esto es que en el punto  $P$  se ubica la plumilla o lápiz y en el punto  $P'$  se coloca el punzón de punta roma con el que se sigue la figura a reproducir. La demostración se realiza de manera similar a la anterior.

A partir del pantógrafo anterior se puede construir un pantógrafo electromecánico controlado por medio de la tarjeta de puertos de un computador con la ayuda de una interfaz adecuada basada en transistores, que permitan el manejo de motores paso a paso.

La construcción sencillamente, consiste en poder mover mediante un mecanismo electromecánico controlando el punto  $P_{x,y}$ , para esta operación se pueden

utilizar dos motores paso a paso, cada uno de los cuales es responsable de una coordenada cartesiana. uno de los motores es responsable del movimiento en el eje  $X$  y el otro está encargado del movimiento en el eje  $Y$ , del punto  $P_{x,y}$  del pantógrafo bidimensional de la figura 5.2. Además de los motores es necesario implementar dos interruptores de fin de carrera los cuales permitan inicializar cada motor, y poder hallar el origen de cada uno de los ejes del sistema. Esta operación es muy parecida a la realizada por una impresora, a partir de este origen se pueden localizar otros puntos aplicando traslaciones, rotaciones o simetrías. Es necesario controlar los límites máximos de desplazamiento porque si no se corre el riesgo de dañar los piñones o desajustar el sistema.

Para cada uno de los ejes del sistema se utiliza un motor paso a paso, un tornillo sinfín y dos piñones. Uno de los piñones va en el eje del motor y otro en el extremo de tornillo sinfín que es el encargado del mecanismo de movimiento. Los piñones pueden guardar una relación de 2 a 1, de tal forma que cuando el motor ha dado un giro de  $360^\circ$  el tornillo sinfín ha dado media vuelta.

Como se utilizan motores de  $7.5^\circ$  por paso, para que el tornillo gire una vuelta necesitamos que el motor realice 96 pasos. Los tornillos utilizados tienen 18 hilos por pulgada, lo que hace que por cada giro del tornillo se presente un desplazamiento de  $\frac{1}{18}$  de pulgada en cualquiera de los ejes del sistema. Se concluye entonces que cada paso del motor es equivalente a  $\frac{(\frac{1}{18})}{96}$ , lo que representa 0.000578703 pulgadas (0.001469903cm).

Los motores pueden hacerse girar de manera independiente o simultánea, cuando lo hacen independientemente la trayectoria forma un ángulo de  $0^\circ$  o  $90^\circ$  con el

sistema de coordenadas y cuando se hacen girar de manera simultánea, debido a la similitud de los sistemas de desplazamiento en  $X$  y  $Y$  describen un ángulo de  $45^\circ$ .

De tal manera que para desplazarse de un punto  $A$  a un punto  $B$  se puede hacer siguiendo alguna de la trayectorias de la figura 5.4, donde se considera que para llegar desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  uno de los motores debe girar 3 pasos y el otro 6 pasos.

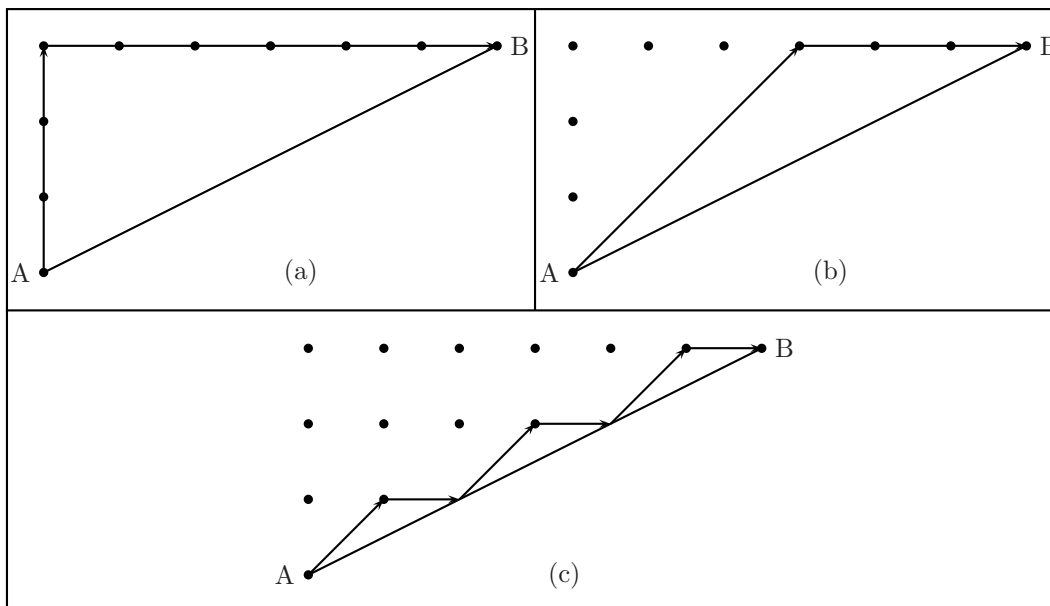


Figura 5.4: Posibles trayectorias para desplazarse de un punto a otro

Cualquiera de las trayectorias pueden ser implementadas en el software de control de nuestro pantógrafo, siendo la más simple la trayectoria (a) de la figura 5.4 y la más compleja la trayectoria (c). Gracias a la gran exactitud de nuestro pantógrafo se pueden implementar los trazos con la trayectoria (b), sin que la figura a reproducir quede imperfecta. Para cualquiera de las trayectorias se ha

utilizado la función traslación en el plano vista en el capítulo 1.

Este sistema es el encargado de dibujar la figura  $F$  y se puede hacer dando las instrucciones desde el computador, a éste se fija el punto  $P$  del pantógrafo de la figura 5.2 de tal manera que los movimientos generados a partir de los motores paso a paso y los tornillos sinfin se verán reflejados en el punto  $P'$  del pantógrafo en el cual se ha asegurado una plumilla o lápiz el que irá dibujando la figura  $F'$  que es semejante a la figura  $F$

## 6 TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL ESPACIO

### 6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudian los conceptos matemáticos necesarios para demostrar que se puede pensar en construir un pantógrafo tridimensional. Todo el esfuerzo se concentra en demostrar y conceptualizar los diferentes movimientos necesarios para reproducir cierta figura de tres dimensiones desde el computador con un pantógrafo tridimensional, haciendo uso de la función semejanza, ya que esta es una transformación lineal.

### 6.2 EL ESPACIO

Para construir el espacio euclídeo de tres dimensiones colóquese el plano  $E_2$  de forma horizontal, de tal manera que el semieje positivo de  $X$  tenga sentido adelante y el semieje positivo de  $Y$  tenga sentido derecho, tal como se muestra en la figura 6.1. Así se tiene un plano  $XY$  con orientación derecha, ahora trasládese este plano continuamente hacia arriba, de tal forma que el punto origen  $P_{0,0}$  de  $E_2$  produzca una semirecta perpendicular a los ejes  $X$  y  $Y$ , luego repítase el proceso hacia abajo de tal manera que el punto  $P_{0,0}$  produzca una semirecta con sentido opuesto a la anterior, que también es perpendicular al plano  $XY$ . De esta forma, se tiene que la recta producida por  $P_{0,0}$  se denomina



eje coordenado  $Z$  del espacio de tres dimensiones  $E_3$ .

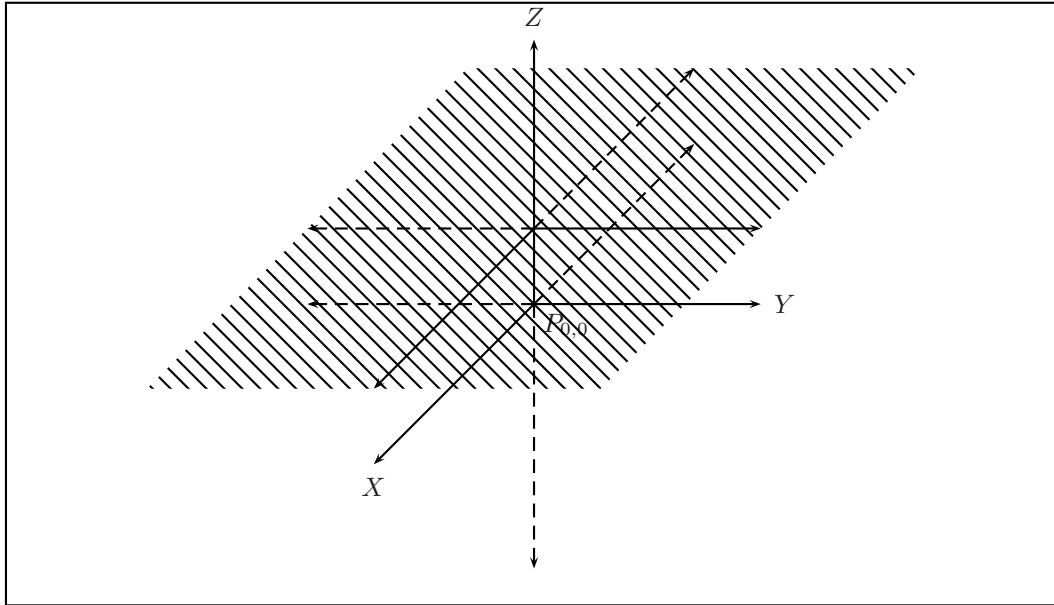


Figura 6.1: Generación del espacio  $E_3$  por traslación del plano  $XY$

Un punto  $P_{x_1,y_1} \in E_2$  cuando se traslada perpendicularmente al plano  $XY$  en la generación del espacio tridimensional  $E_3$ , genera en su recorrido una única recta perpendicular al plano origen y paralela al eje  $Z$ . Es decir que si el punto  $P_{x_1,y_1}$  se traslada  $z_1$  por esta paralela al eje  $Z$ , se produce el punto  $P_{x_1,y_1,z_1}$ , el cual es la intersección entre una única recta paralela al eje  $X$  con una única paralela al eje  $Y$  y con una única recta paralela al eje  $Z$ , el punto origen del espacio  $E_3$  se obtiene trasladando 0 por el eje  $Z$  a  $P_{0,0} \in E_2$ .

Cualquier punto  $P_{x_1,y_1,z_1} \in E_3$  se puede obtener a partir de  $P_{0,0,0}$ , trasladando  $x_1$  por el eje  $X$  para obtener  $P_{x_1,0,0}$ , luego este punto se traslada  $y_1$  por la paralela al eje  $Y$  que pasa por  $P_{x_1,0,0}$ , obteniendo el punto  $P_{x_1,y_1,0}$  y finalmente se traslada este último punto  $z_1$  por la recta paralela al eje  $Z$  que pasa por

$P_{x_1, y_1, 0}$ , llegando de esta manera al punto  $P_{x_1, y_1, z_1}$ . Ver la figura 6.2

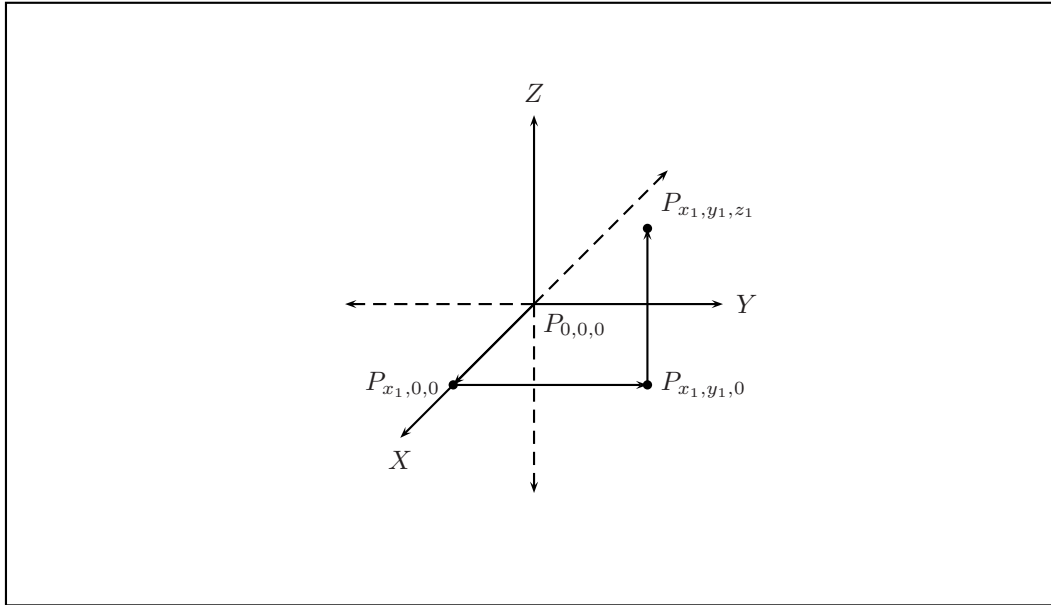


Figura 6.2: Obtención de  $P_{x_1, y_1, z_1}$  a partir de la traslación de  $P_{0,0,0}$

En cada punto  $P_{x,y,z} \in E_3$  termina un único vector que inicia en  $P_{0,0,0}$ , a este vector lo llamamos *vector geométrico*  $V_{x,y,z}$ , cuya longitud viene dada por:

$$\text{Long}V_{x,y,z} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### 6.3 TRASLACIONES EN EL ESPACIO DE TRES DIMENSIONES

De manera análoga a como se hizo en el capítulo 2, se define la función traslación tridimensional.

**Definición 6.1** (*Función traslación tridimensional*) Sean  $a, b$  y  $c$  reales

y  $P_{x,y,z} \in E_3$ , la función **traslación**  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  en el espacio euclídeo de tres dimensiones  $E_3$ , se nota  $T_{a,b,c}$  y se define:

$$T_{a,b,c} : E_3 \longrightarrow E_3$$

$$P_{x,y,z} \longmapsto T_{a,b,c}(P_{x,y,z}) = P_{x+a,y+b,z+c}$$

#### 6.4 SUMA DE PUNTOS EN $E_3$

**Definición 6.2 (Suma de puntos en el espacio de tres dimensiones)**

Sean  $P_{x_1,y_1,z_1}$  y  $P_{x_2,y_2,z_2}$  puntos de  $E_3$ , la suma de estos puntos se nota  $P_{x_1,y_1,z_1} + P_{x_2,y_2,z_2}$  y se define:

$$P_{x_1,y_1,z_1} + P_{x_2,y_2,z_2} = P_{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2}$$

Al igual que en el plano  $E_2$ , se puede también ver la suma de dos puntos en el espacio de tres dimensiones en términos de traslación, así:

$$P_{x_1,y_1,z_1} + P_{x_2,y_2,z_2} = T_{x_1,y_1,z_1}(P_{x_2,y_2,z_2})$$

#### 6.5 VECTORES EN EL ESPACIO DE TRES DIMENSIONES

En el espacio  $E_3$  también existen **vectores libres** y **vectores geométricos**, los segundos son todos aquellos vectores que tienen como origen el punto  $P_{0,0,0}$  y extremo un punto  $P_{x,y,z} \in E_3$  cualquiera, de otra forma es un vector libre.

Nótese que al trasladar un vector geométrico, se obtiene un vector paralelo de igual longitud y se convierte en un vector libre.

Se define la traslación de vectores de la siguiente manera:

**Definición 6.3** (*Traslación de un vector en el espacio de tres dimensiones*)

Sea  $V_{x,y,z} \in V^3$  y  $a, b$  y  $c$  reales, la **traslación**  $T_{a,b,c}$  del vector  $V_{x,y,z}$ , se define así:

$$\begin{aligned} T_{a,b,c}(V_{x,y,z}) &= T_{a,b,c}(\overrightarrow{P_{0,0,0}P_{x,y,z}}) \\ &= \overrightarrow{P_{0+a,0+b,0+c}P_{x+a,y+b,z+c}} \\ &= \overrightarrow{P_{a,b,c}P_{x+a,y+b,z+c}} \end{aligned}$$

Se puede ver que la traslación  $T_{a,b,c}$  convierte el vector geométrico  $V_{x,y,z}$  en el vector libre cuyo origen es el punto  $P_{a,b,c}$  y su extremo el punto  $P_{x+a,y+b,z+c}$ .

## 6.6 SUMA DE VECTORES EN EL ESPACIO $E_3$

Cuando se tienen dos vectores  $V_{x_1,y_1,z_1}$ ,  $V_{x_2,y_2,z_2}$  en el espacio  $E_3$ , pueden suceder dos casos:

1. *Que los vectores estén alineados.* En este caso los vectores pertenecerían a una única recta y para sumarlos basta con trasladar sobre la recta y ubicar el origen del segundo vector en el extremo del primero, y el vector suma entonces es el vector que tienen como origen el punto origen del primero y como extremo el punto extremo del segundo.
2. *Que los vectores no estén alineados.* Cuando los vectores no están alineados, estos determinan un plano que los contiene. Para sumar los dos vectores se traslada sobre el plano determinado el segundo vector hasta que su origen coincida con el extremo del primer vector y la suma es el vector que va desde el origen  $P_{0,0,0}$  hasta el punto donde llegó el extremo

del segundo vector.

La figura 6.3 muestra la suma de dos vectores en el espacio  $E_3$ , representados y vistos en el plano que ellos determinan.

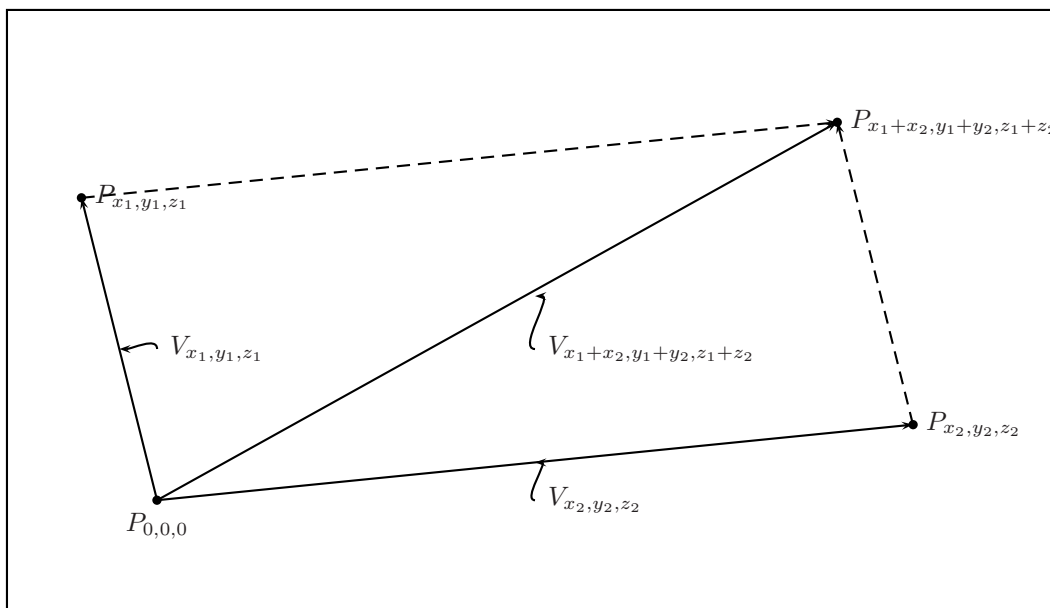


Figura 6.3: Suma de vectores en  $E_3$

**Definición 6.4 (Suma de vectores en  $E_3$ )** Sean  $V_{x_1,y_1,z_1}$  y  $V_{x_2,y_2,z_2}$  dos vectores cualesquiera de  $E_3$ , la suma se nota  $V_{x_1,y_1,z_1} + V_{x_2,y_2,z_2}$ , y se define de la siguiente manera:

$$V_{x_1,y_1,z_1} + V_{x_2,y_2,z_2} = V_{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2}$$

De lo anterior se puede decir que en un espacio de dimensión  $n$  dos vectores no colineales siempre determinarán un plano que los contiene, y así generalizar el *método del paralelogramo* comúnmente utilizado para sumar dos vectores de  $E_2$  ó  $E_3$ .

## 6.7 TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL ESPACIO

**Definición 6.5 (Transformación lineal en el espacio  $E_3$ )** Sean  $V_{x_1, y_1, z_1}$  y  $V_{x_2, y_2, z_2} \in V^3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $f$  una transformación definida en el espacio, se dice que  $f$  es una **transformación lineal**, si se cumplen las condiciones siguientes:

1.  $f(\lambda V_{x_1, y_1, z_1}) = \lambda f(V_{x_1, y_1, z_1})$
2.  $f(V_{x_1, y_1, z_1} + V_{x_2, y_2, z_2}) = f(V_{x_1, y_1, z_1}) + f(V_{x_2, y_2, z_2})$

Así como una transformación lineal en el plano convierte paralelogramos en paralelogramos, una transformación lineal en el espacio convierte paralelepípedos en paralelepípedos.

## 6.8 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Como se sabe, el espacio  $E_3$  también puede ser visto de otras dos maneras diferentes, como la unión de infinitos cilindros coaxiales o la unión de infinitas esferas concéntricas. De estas dos maneras particulares de ver el espacio aparecen las coordenadas cilíndricas y esféricas que son muy útiles a la hora de construir máquinas utilizando motores digitales como los usados para este trabajo. En este texto se describe la localización de un punto del espacio utilizando tanto coordenadas cilíndricas como esféricas, para un mayor detalle véase la obra *Geometría analítica, una nueva visión* del profesor Francisco Escobar, la que ha servido como base para este trabajo.

Dado un punto  $P_{x, y, z} \in E_3$ , este punto pertenece a un único cilindro de radio  $r$ . En la figura 6.4 se pueden ver las coordenadas cilíndricas del punto  $P_{x, y, z}$ . Para llegar al punto  $P_{r, \alpha, z}$  desde el punto origen  $P_{0, 0, 0}$  hay que trasladarse  $r$  por el semieje positivo  $X$ , llegando al punto  $P_{r, 0, 0}$ . Luego, girar un ángulo  $\alpha$  al punto  $P_{r, 0, 0}$  alrededor de  $P_{0, 0, 0}$  sobre la circunferencia de radio  $r$  con centro en

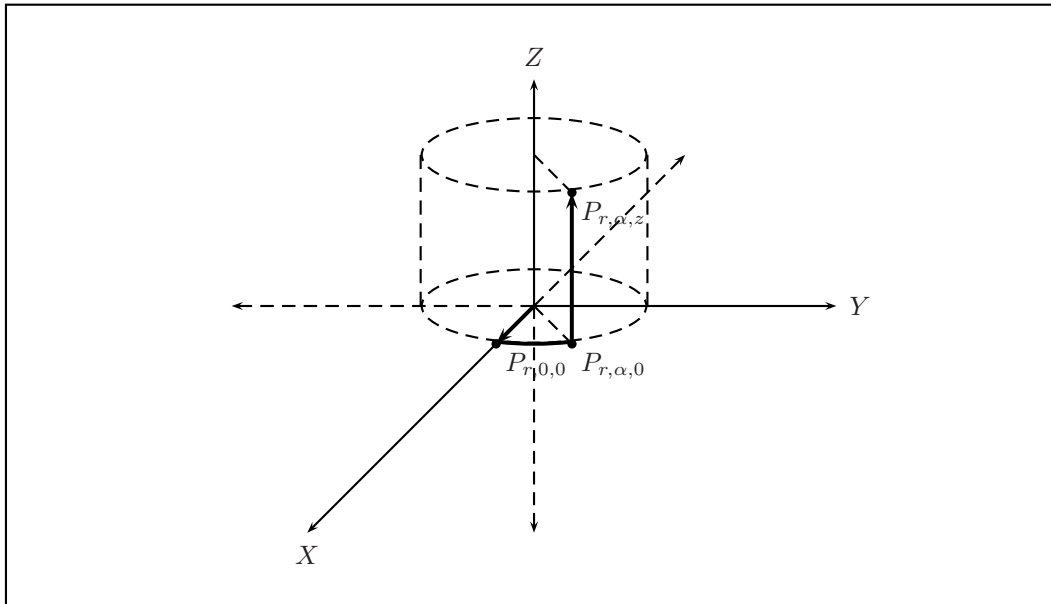


Figura 6.4: Coordenadas cilíndricas de un punto en  $E_3$

$P_{0,0,0}$  contenida en el plano  $XY$  y así se llega al punto  $P_{r,\alpha,0}$ . Finalmente hay que trasladarse  $z$  por la recta paralela al eje  $Z$  que pasa por  $P_{r,\alpha,0}$ , y así se llega al punto  $P_{r,\alpha,z}$ .

$(r, \alpha, z)$  es la **posición cilíndrica** del punto  $P_{r,\alpha,z}$  y  $r$ ,  $\alpha$  y  $z$  son la **coordenadas cilíndricas** del punto  $P_{r,\alpha,z}$ ; donde  $r > 0$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$  y  $z \in \mathbb{R}$ .

Se puede pasar un punto  $P_{x,y,z}$  expresado en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas haciendo uso de las siguientes fórmulas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Se puede pasar un punto  $P_{r,\alpha,z}$  expresado en coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas haciendo uso de las siguientes fórmulas.

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$z = z$$

Ahora, también es posible ver el espacio  $E_3$  como la unión de las infinitas esferas concéntricas de centro  $P_{0,0,0}$  y radio  $r$ . Un punto cualquiera  $P \in E_3$  pertenece a una única esfera y sus coordenadas esféricas se pueden ver en la figura 6.5.

Para hallar un punto  $P$  partiendo de  $P_{0,0,0}$ , es necesario trasladarse  $r$  por el semieje positivo  $X$  quedando en el punto  $P_{r,0,0}$  que pertenece a la esfera de radio  $r$ . Luego se rota sobre el plano  $XY$  un ángulo  $\alpha$  alrededor de  $P_{0,0,0}$ , quedando en el punto  $P_{r,\alpha,0}$ . Por último y desde la semirecta  $M_\alpha$  del plano  $XY$  se rota  $\beta$  y se llega finalmente al punto  $P_{r,\alpha,\beta}$ .

Se dice que  $(r, \alpha, \beta)$  es la **posición esférica** del punto  $P_{r,\alpha,\beta}$  o que  $r$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son las **coordenadas esféricas** de punto  $P_{r,\alpha,\beta}$ , donde  $r > 0$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$  y



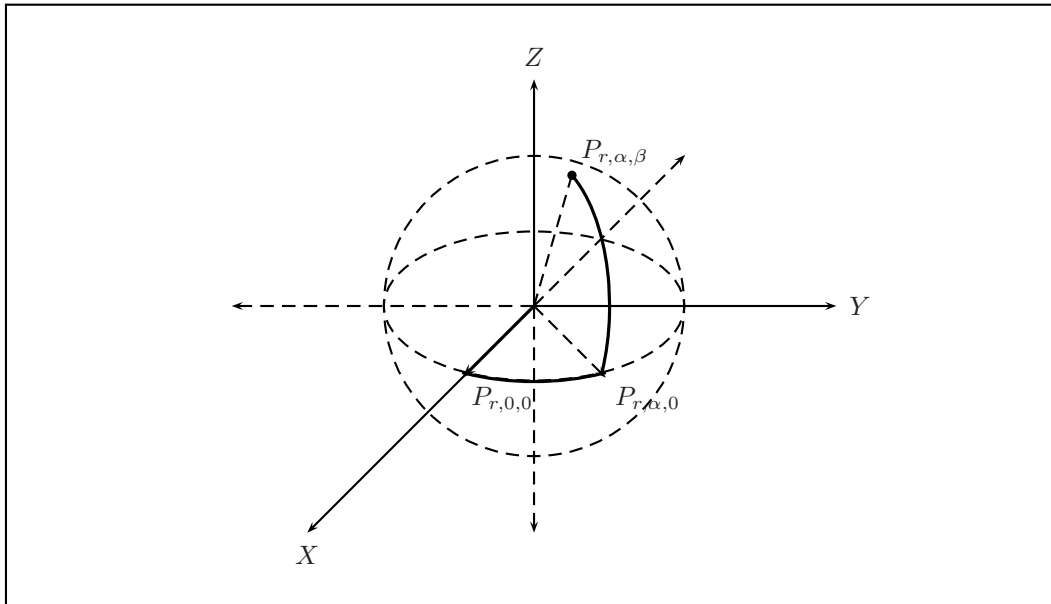


Figura 6.5: Coordenadas esféricas de un punto en  $E_3$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Un punto  $P_{x,y,z}$  en coordenadas cartesianas puede pasarse a coordenadas esféricas utilizando las siguientes fórmulas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Un punto  $P_{r,\alpha,\beta}$  en coordenadas esféricas puede pasarse a coordenadas cartesianas utilizando las siguientes fórmulas.

$$x = r \cos \alpha \cos \beta$$

$$y = r \sin \alpha \cos \beta$$

$$z = r \cos \beta$$

## 7 FUNCIONES ROTACIÓN, SEMEJANZA Y SIMETRÍA COMO TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL ESPACIO

### 7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se demuestra que las funciones rotación, semejanza y simetría en el espacio  $E_3$  son también transformaciones lineales y que por esto es posible reproducir con aparatos mecánicos y electrónicos cuerpos semejantes, rotados o simétricos. Estas funciones se utilizan para el funcionamiento de un pantógrafo tridimensional.

### 7.2 ROTACIONES EN EL ESPACIO

Cuando se rota el espacio  $E_3$  mediante una rotación  $R$  alrededor de  $P_{0,0,0}$ , los semiejes positivos de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  se transforman en las semirectas  $\mathcal{S}_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}$ ,  $\mathcal{S}_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}$  y  $\mathcal{S}_{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3}$  respectivamente,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$  son las medidas de los ángulos que forman estas semirectas con los semiejes positivos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  respectivamente y ellas son perpendiculares entre sí, esto porque la rotación  $R$  no varía el tamaño de los ángulos existentes.

Los vectores unitarios  $V_{1,0,0}$ ,  $V_{0,1,0}$  y  $V_{0,0,1}$ , se convierten respectivamente en los vectores unitarios de la semirectas anteriores, los cuales son  $V_{\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1}$ ,

$V_{\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2}$  y  $V_{\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3}$ .

Por facilidad en las expresiones, se utiliza la siguiente notación:

$$V_{a_1, b_1, c_1} = V_{\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1}$$

$$V_{a_2, b_2, c_2} = V_{\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2}$$

$$V_{a_3, b_3, c_3} = V_{\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3}$$

Dado un vector  $V_{x,y,z} \in V^3$ , se puede expresar como:

$$V_{x,y,z} = V_{x(1,0,0)} + V_{y(0,1,0)} + V_{z(0,0,1)}$$

Ahora si a ese vector se le aplica una rotación  $R$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} R(V_{x,y,z}) &= R(V_{x(1,0,0)} + V_{y(0,1,0)} + V_{z(0,0,1)}) \\ &= xR(V_{1,0,0}) + yR(V_{0,1,0}) + zR(V_{0,0,1}) \\ &= xV_{a_1, b_1, c_1} + yV_{a_2, b_2, c_2} + zV_{a_3, b_3, c_3} \\ &= V_{xa_1, xb_1, xc_1} + V_{ya_2, yb_2, yc_2} + V_{za_3, zb_3, zc_3} \\ &= V_{xa_1+ya_2+za_3, xb_1+yb_2+zb_3, xc_1+yc_2+zc_3} \\ &= V_{x', y', z'} \end{aligned}$$

**Definición 7.1 (Función rotación en el espacio)** Sea  $v_{x,y,z} \in V^3$  un vector geométrico en el espacio  $E_3$ , se define la **función rotación de vectores**

de la siguiente manera,

$$R : V^3 \longrightarrow V^3$$
$$V_{x,y,z} \longmapsto R(V_{x,y,z}) = V_{x',y',z'}$$

donde,

$$x' = xa_1 + ya_2 + za_3$$

$$y' = xb_1 + yb_2 + zb_3$$

$$z' = xc_1 + yc_2 + zc_3$$

**Teorema 7.1** *La función rotación de vectores en el espacio de tres dimensiones es una transformación lineal.*

***demostración***

Sean  $V_{x,y,z} \in V^3$  y  $k \in \mathbb{R}$ , es necesario demostrar que:

$$k(R(V_{x,y,z})) = R(k(V_{x,y,z}))$$

aplicando la definición de función rotación, se tiene

$$\begin{aligned}
k(R(V_{x,y,z})) &= kV_{x',y',z'} \\
&= V_{kx',ky',kz'} \\
&= V_{k(xa_1+ya_2+za_3),k(xb_1+yb_2+zb_3),k(xc_1+yc_2+zc_3)} \\
&= V_{(kx)a_1+(ky)a_2+(kz)a_3,(kx)b_1+(ky)b_2+(kz)b_3,(kx)c_1+(ky)c_2+(kz)c_3} \\
&= R(V_{kx,ky,kz}) \\
&= R(k(V_{x,y,z}))
\end{aligned}$$

Luego, se cumple la primera condición de las transformaciones lineales.

Sean  $V_{x_1,y_1,z_1}$  y  $V_{x_2,y_2,z_2} \in V^3$  dos vectores arbitrarios. Se debe demostrar que:

$$R(V_{x_1,y_1,z_1} + V_{x_2,y_2,z_2}) = R(V_{x_1,y_1,z_1}) + R(V_{x_2,y_2,z_2})$$

aplicando la definición de suma de vectores y de función rotación, se tiene

$$\begin{aligned}
R(V_{x_1,y_1,z_1} + V_{x_2,y_2,z_2}) &= R(V_{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2}) \\
&= V_{x',y',z'}
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
x' &= (x_1 + x_2)a_1 + (y_1 + y_2)a_2 + (z_1 + z_2)a_3 \\
y' &= (x_1 + x_2)b_1 + (y_1 + y_2)b_2 + (z_1 + z_2)b_3 \\
z' &= (x_1 + x_2)c_1 + (y_1 + y_2)c_2 + (z_1 + z_2)c_3
\end{aligned}$$

Lo anterior se puede reorganizar aplicando la propiedad distributiva y asociativa, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x' &= \underbrace{(x_1a_1 + y_1a_2 + z_1a_3)}_{x'_1} + \underbrace{(x_2a_1 + y_2a_2 + z_2a_3)}_{x'_2} \\
y' &= \underbrace{(x_1b_1 + y_1b_2 + z_1b_3)}_{y'_1} + \underbrace{(x_2b_1 + y_2b_2 + z_2b_3)}_{y'_2} \\
z' &= \underbrace{(x_1c_1 + y_1c_2 + z_1c_3)}_{z'_1} + \underbrace{(x_2c_1 + y_2c_2 + z_2c_3)}_{z'_2}
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
R(V_{x_1, y_1, z_1} + V_{x_2, y_2, z_2}) &= V_{x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2, z'_1 + z'_2} \\
&= V_{x'_1, y'_1, z'_1} + V_{x'_2, y'_2, z'_2}
\end{aligned}$$

reemplazando se obtiene,

$$\begin{aligned}
R(V_{x_1, y_1, z_1} + V_{x_2, y_2, z_2}) &= V_{x_1a_1 + y_1a_2 + z_1a_3, x_1b_1 + y_1b_2 + z_1b_3, x_1c_1 + y_1c_2 + z_1c_3} + \\
&\quad V_{x_2a_1 + y_2a_2 + z_2a_3, x_2b_1 + y_2b_2 + z_2b_3, x_2c_1 + y_2c_2 + z_2c_3} \\
&= R(V_{x_1, y_1, z_1}) + R(V_{x_2, y_2, z_2})
\end{aligned}$$

queda demostrado que se cumple la segunda condición de las transformaciones lineales, por lo tanto la *rotación en el espacio* es una transformación lineal.

Igual que en el plano es fácil ver que si el punto extremo de un vector  $V_{x,y,z}$  recorre un objeto  $O$ , entonces punto extremo del vector  $R(V_{x,y,z})$  recorrerá un objeto  $O'$  que es el mismo objeto  $O$  rotado por  $R$ .

### 7.3 SEMEJANZAS EN EL ESPACIO

**Definición 7.2 (Función semejanza en el espacio)** Sean  $V_{x,y,z} \in V^3$  y  $k \in \mathbb{R}^+$ , la *función semejanza de razón  $k$*  en el espacio  $E_3$ , se define:

$$S_k : V^3 \longrightarrow V^3$$

$$V_{x,y,z} \longmapsto S_k(V_{x,y,z}) = V_{kx,ky,kz}$$

**Teorema 7.2** *La función semejanza en el espacio es una transformación lineal.*

#### *Demostración*

Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$  y  $V_{x,y,z} \in V^3$ , entonces

$$\begin{aligned} \lambda(S_k(V_{x,y,z})) &= \lambda(V_{kx,ky,kz}) \\ &= V_{\lambda(kx),\lambda(ky),\lambda(kz)} \\ &= V_{k(\lambda x),k(\lambda y),k(\lambda z)} \\ &= S_k(V_{\lambda x,\lambda y,\lambda z}) \\ &= S_k(\lambda V_{x,y,z}) \end{aligned}$$



Así se ha demostrado que se cumple la primera condición de una transformación lineal.

Para la segunda condición, sean  $V_{x_1, y_1, z_1}, V_{x_2, y_2, z_2} \in V^3$  y  $k \in \mathbb{R}^+$ . Aplicando la suma de vectores y las propiedades de los reales, se tiene:

$$\begin{aligned}
 S_k(V_{x_1, y_1, z_1} + V_{x_2, y_2, z_2}) &= S_k(V_{x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2}) \\
 &= V_{k(x_1+x_2), k(y_1+y_2), k(z_1+z_2)} \\
 &= V_{kx_1+kx_2, ky_1+ky_2, kz_1+kz_2} \\
 &= V_{kx_1, ky_1, kz_1} + V_{kx_2, ky_2, kz_2} \\
 &= S_k(V_{x_1, y_1, z_1}) + S_k(V_{x_2, y_2, z_2})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función semejanza es una transformación lineal.

Si el extremo de un vector  $V_{x, y, z}$  recorre un objeto  $O$ , el extremo del vector  $S_k(V_{x, y, z})$  recorre un objeto  $O'$  que es semejante a  $O$ , con razón de semejanza  $k$ .

## 7.4 SIMETRÍAS EN EL ESPACIO

Por último en esta sección se trata una simetría en el espacio  $E_3$  con respecto al punto  $P_{0,0,0}$ .

**Definición 7.3** (*Función simetría en  $E_3$  respecto a  $P_{0,0,0}$* ) Sea  $V_{x, y, z} \in V^3$ , la **función simetría en  $E_3$  respecto a  $P_{0,0,0}$**  que se nota  $\sigma_0$ , se define así:

$$\begin{aligned}\sigma_0 & : V^3 \longrightarrow V^3 \\ V_{x,y,z} & \longmapsto \sigma_0(V_{x,y,z}) = V_{-x,-y,-z}\end{aligned}$$

**Teorema 7.3** *La función simetría en  $E_3$  respecto a  $P_{0,0,0}$  es una transformación lineal.*

***Demostración***

Sea  $V_{x,y,z} \in V^3$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , para demostrar la primera condición de una transformación lineal se tiene.

$$\begin{aligned}\lambda(\sigma_0(V_{x,y,z})) & = \lambda(V_{-x,-y,-z}) \\ & = V_{-(\lambda x),-(\lambda y),-(\lambda z)} \\ & = \sigma_0(V_{\lambda x,\lambda y,\lambda z}) \\ & = \sigma_0(\lambda(V_{x,y,z}))\end{aligned}$$

Finalmente se demuestra la segunda condición de una transformación lineal. Sean  $V_{x_1,y_1,z_1}$  y  $V_{x_2,y_2,z_2} \in V^3$ , la simetría de la suma de los dos vectores está dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_0(V_{x_1, y_1, z_1} + V_{x_2, y_2, z_2}) &= \sigma_0(V_{x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2}) \\
&= V_{-(x_1+x_2), -(y_1+y_2), -(z_1+z_2)} \\
&= V_{(-x_1)+(-x_2), (-y_1)+(-y_2), (-z_1)+(-z_2)} \\
&= V_{-x_1, -y_1, -z_1} + V_{-x_2, -y_2, -z_2} \\
&= \sigma_0(V_{x_1, y_1, z_1}) + \sigma_0(V_{x_2, y_2, z_2})
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función simetría es una transformación lineal.

Si el punto extremo de un vector  $V_{x,y,z}$  recorre un objeto  $O$ , el punto extremo del vector  $\sigma_0(V_{x,y,z})$  recorrerá un objeto  $O'$  que es simétrico a  $O$  respecto al punto  $P_{0,0,0}$ .

## 8 CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO DE PANTÓGRAFO TRIDIMENSIONAL

### 8.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un prototipo de pantógrafo tridimensional que partiendo del pantógrafo bidimensional y adaptándole un motor que permita girar su base se obtiene un sistema que reproduce objetos tridimensionales semejantes basado en coordenadas cilíndricas y en el hecho que el espacio es igual a la reunión de todos los planos que pasan por una misma recta, se hace aquí una demostración de este resultado.

### 8.2 CONSTRUCCIÓN DEL PANTÓGRAFO

Para construir este prototipo podemos utilizar el pantógrafo electromecánico bidimensional que se vió en el capítulo 3, el cual sencillamente se monta sobre una base que permita girarlo un ángulo determinado mediante el uso de un nuevo motor paso a paso.

Recordar que un punto del espacio se expresa en coordenadas cilíndricas de la forma  $P_{r,\alpha,z}$ , donde  $r > 0$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$  y  $z \in \mathbb{R}$ . En el sistema bidimensional, el pantógrafo permitía obtener un punto  $P_{kx,ky}$  a partir de un punto  $P_{x,y}$  cualquiera del plano mediante el uso de dos motores paso a paso, uno para el movimiento en el eje  $X$  y otro para  $Y$ , estos motores en el nuevo diseño se

utilizan uno para lograr la distancia  $r$  y otro para obtener la posición  $z$ , y el ángulo  $\alpha$  se obtiene implementando un motor que gire el pantógrafo alrededor del eje que pasa por el punto fijo  $P_{0,0}$  del pantógrafo.

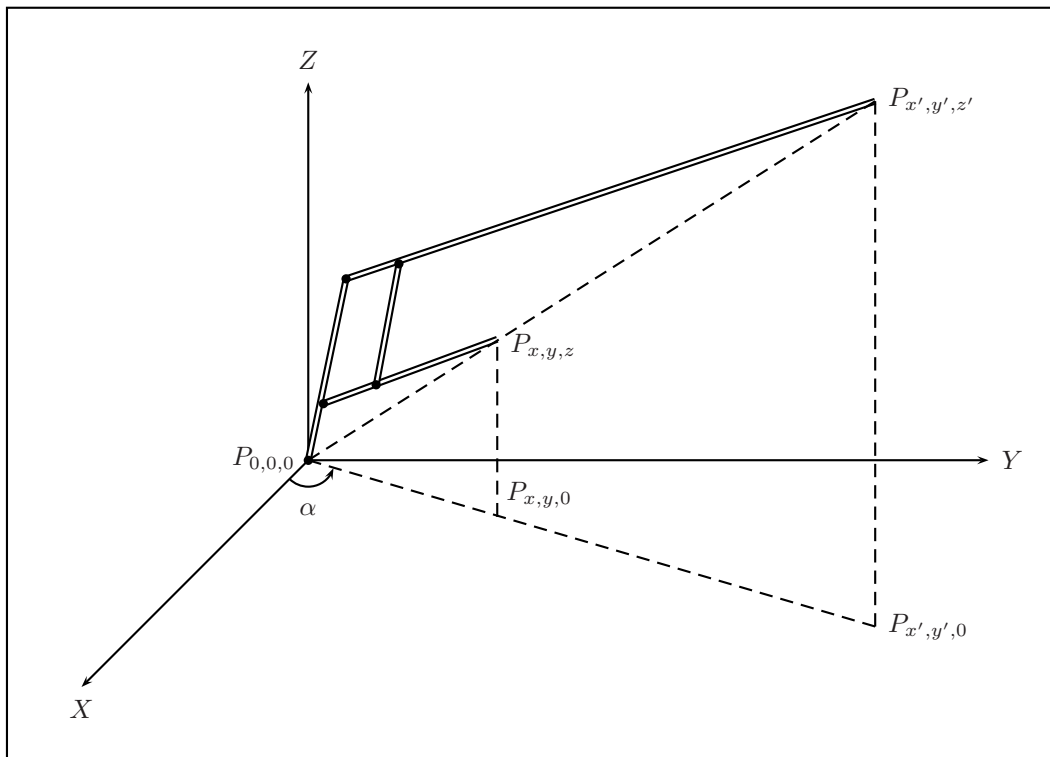


Figura 8.1: Pantógrafo tridimensional

Para demostrar que este pantógrafo reproduce objetos tridimensionales semejantes basta probar que cada punto  $P_{x,y,z} \in E^3$  se convierte en un punto  $P_{x',y',z'} \in E^3$  mediante la aplicación de este aparato, y que  $P_{x',y',z'} = S_k(P_{x,y,z}) = P_{kx,ky,kz}$  donde  $k > 0$ .

Se hace uso de coordenadas cilíndricas para demostrar lo anterior, es decir debemos expresar los puntos  $P_{x,y,z}$  y  $P_{x',y',z'}$  de la forma  $P_{r,\alpha,z}$  y  $P_{r',\alpha',z'}$  respectivamente, donde:  $r$  es el radio del cilindro que contiene a  $P_{x,y,z}$  y  $r'$  el radio

del que contiene a  $P_{x',y',z'}$ ,  $\alpha$  es el ángulo que forman las proyecciones de los vectores  $V_{x,y,z}$  y  $V_{x',y',z'}$  sobre el plano  $XY$  con el semieje positivo  $X$ ;  $z$  y  $z'$  las coordenadas en el eje  $Z$  de cada punto.

Del pantógrafo bidimensional, podemos decir que la longitud del vector  $V_{x',y',z'}$  es  $k$  – veces la longitud del vector  $V_{x,y,z}$ , esto es

$$\text{long}(V_{x',y',z'}) = k(\text{long}(V_{x,y,z}))$$

para  $k > 0$ .

Sea  $\beta$  el ángulo que forma el vector  $V_{x,y,z}$  con la proyección de este en el plano  $XY$ . La longitud del vector  $V_{x,y,0}$  es  $r$  que es el radio del cilindro que contiene a  $P_{x,y,z}$  y la longitud del vector  $V_{x',y',0}$  es  $r'$  que es el radio del cilindro que contiene a  $P_{x',y',z'}$ , esto es:

$$r = \text{long}(V_{x,y,0})$$

$$r' = \text{long}(V_{x',y',0}),$$

de otro lado se tiene que:

$$\text{long}(V_{x,y,0}) = \text{long}(V_{x,y,z}) \cos \beta$$

$$\text{long}(V_{x',y',0}) = \text{long}(V_{x',y',z'}) \cos \beta$$

como,

$$\text{long}(V_{x',y',z'}) = k(\text{long}(V_{x,y,z}))$$

entonces,

$$\begin{aligned} \text{long}(V_{x',y',0}) &= k \text{long}(V_{x,y,z}) \cos \beta \\ \text{long}(V_{x',y',0}) &= k \text{long}(V_{x,y,0}) \end{aligned}$$

de donde,

$$r' = kr \tag{13}$$

Para la componente  $z$  y  $z'$ ,

$$\begin{aligned} z &= \text{long}(V_{x,y,0}) \sin \beta \\ z' &= \text{long}(V_{x',y',0}) \sin \beta \end{aligned}$$

reemplazando, se obtiene:

$$z' = k(\text{long}(V_{x,y,0})) \sin \beta$$

de donde,

$$z' = kz \tag{14}$$

Se sabe que cada componente cartesiana de  $P_{x,y,z}$  se puede expresar en función de sus coordenadas cilíndricas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \alpha \\ y &= r \cos \alpha \\ z &= z \end{aligned}$$

y para el punto  $P_{x',y',z'}$

$$x' = r' \sin \alpha$$

$$y' = r' \cos \alpha$$

$$z' = z'$$

reemplazando las ecuaciones (13) y (14) en las anteriores expresiones, se obtiene

$$x' = kr \sin \alpha$$

$$y' = kr \cos \alpha$$

$$z' = kz$$

de donde se puede concluir que,

$$x' = kx$$

$$y' = ky$$

$$z' = kz$$

por lo tanto,  $P_{x',y',z'} = P_{kx,ky,kz} = S_k(P_{x,y,z})$ .

Este resultado demuestra que para cualquier punto  $P_{x,y,z}$  del espacio, el pantógrafo diseñado obtiene el punto  $P_{x',y',z'}$ , en donde  $P_{x',y',z'} = S_k(P_{x,y,z})$ .

Si el punto  $P_{x,y,z}$  recorre la superficie de un objeto tridimensional  $O$ , entonces el punto  $P_{x',y',z'}$  reproduce la superficie de un objeto  $O'$  que es semejante a  $O$ . Esto es  $O' = S_k(O)$ , esto se muestra en la figura 8.2.

Con el pantógrafo de la figura 8.1 se reproducen objetos semejantes de mayor tamaño. Si se quiere obtener un objeto semejante de menor tamaño, sencilla-



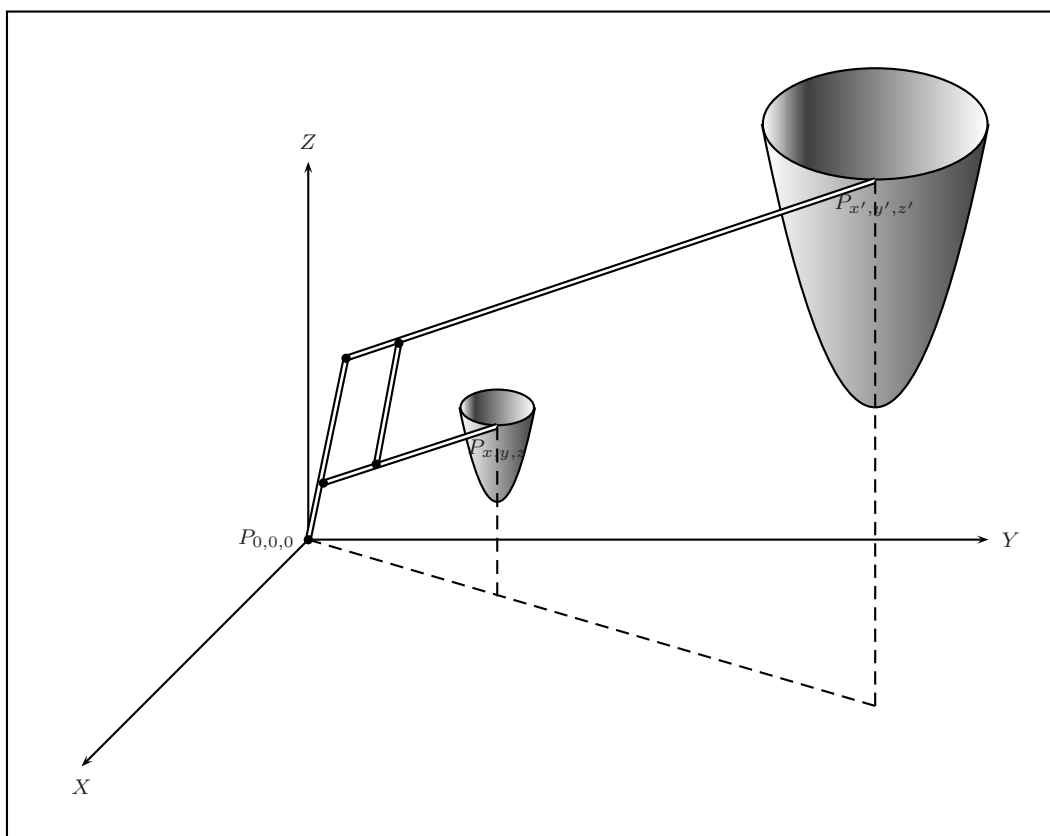


Figura 8.2: Reproducción de un objeto tridimensional

mente es recorre el objeto a reproducir con el punto  $P_{x',y',z'}$  y el objeto semejante lo recorre el punto  $P_{x,y,z}$

## 9 CONCLUSIÓN

Después de realizar este trabajo puedo afirmar que para lograr un mejor País, tenemos que comprometernos como docentes a impartir conocimientos cuya aplicación práctica beneficie el desarrollo tecnológico. Mientras no se tengan claros todos los conceptos geométricos del mundo que nos rodea, nos será imposible construir aparatos que faciliten nuestra vida cotidiana.

De no revolucinar con el conocimiento el quehacer pedagógico nos veremos de por vida sumidos en el fondo oscuro del subdesarrollo. Me resta extender la invitación para que cada uno de los que actuamos en el escenario del conocimiento, busquemos aplicarlo de manera práctica y despertemos la creatividad de nuestra sociedad con el único propósito de caminar juntos hacia un futuro mejor.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] EFIMOV, Nikolai. *Formas cuadráticas y matrices*. Moscú:Mir, 1970. 160 p.
- [2] ESCOBAR DELGADO, Francisco. *Geometría analítica, una nueva visión*. Popayán: Universidad del Cauca, 2001. 205 p.
- [3] KLEIN, Felix. *Geometry*. United States of America:s.n., 1939. 214 p.