# DISEÑO DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL EN EL GRADO SEXTO

YENNY ALEXANDRA MENDEZ ALEGRIA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
POPAYAN
2004

# DISEÑO DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL EN EL GRADO SEXTO

YENNY ALEXANDRA MENDEZ ALEGRIA

Seminario de Grado presentado como requisito parcial para optar al Título de Licenciada en Educación con especialidad en Matemáticas

Director
CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
POPAYAN
2004

Nota de Aceptación

CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE
Director grupo de investigación
“Formulación y Solución de Problemas”

IDALY COLLAZOS MUÑOZ
Integrante Comité Evaluador

ROBERT EUSCATEGUI
Integrante Comité Evaluador

WILLY SIERRA
Integrante Comité Evaluador

Popayán, 7 de junio de 2004

A mis padres por su continua lucha, a mis hermanos por creer en mi y a mi hermosa sobrina por llegar a mi vida.

## AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos a:

A mi familia por creer en mi y darme la oportunidad de culminar una de mis metas.

Al Doctor Carlos Alberto Trujillo, por el tiempo empleado y por sus valiosos aportes y orientaciones.

A las diferentes personas que han formado parte del grupo de Formulación y Solución de Problemas.

Todas aquellas personas que de una u otra manera, han estado conmigo durante todo este proceso de formación universitaria.

**CONTENIDO**

# INTRODUCCIÓN

***“****Escucho y olvido,*

*Veo y Recuerdo.*

*Hago y ... !comprendo!*

(antiguo proverbio chino)

Es el momento adecuado para ofrecer a los estudiantes, una estrategia que deje de considerarlos simplemente como receptores de conocimiento, se les debe permitir ser constructores activos de su propio conocimiento. La estrategia de Resolución de problemas despierta en el individuo las ganas de usar todo su potencial, de investigar y dejar de ser una persona del común que sólo espera a que el conocimiento llegue sin buscarlo ni construirlo.

El presente documento contiene diversa información sobre el trabajo realizado durante el desarrollo del seminario “*Diseño de problemas para la enseñanza de la geometría elemental en el grado 6º ”*. Inicialmente se presenta el marco teórico que contiene entre otros información con respecto a los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Matemáticas, documentación referente a resolución de problemas. Este documento está especialmente dirigido a los docentes de Educación Básica.

Es importante aclarar que la información que compone el marco teórico no es suficientemente amplia, debido a que el trabajo principal que se llevo a cabo durante el seminario se centro en la búsqueda, selección, modificación y adaptación de diferentes problemas. En la bibliografía se hace referencia a algunos documentos que tienen más extensa la información que en este documento se presenta.

Posteriormente se presentan algunos problemas, los cuales además de incluir el planteamiento del problema, tienen información adicional, que será útil para que el docente pueda emplear resolución de problemas. Los diferentes problemas que aquí se encuentran se han agrupado en diversos niveles que no tienen que ver directamente con el grado escolar.

En la parte final del documento, se listan una serie de problemas que han sido previamente seleccionados y clasificados, los cuales pueden ser empleados para trabajar con ellos el enfoque de resolución de problemas.

# 1. JUSTIFICACIÓN

El desarrollo del seminario *"Diseño de problemas para la Enseñanza de la geometría elemental en el grado sexto"* va encaminado a realizar una propuesta curricular que sea empleada para mejorar las condiciones existentes de enseñanza y aprendizaje de la geometría elemental en los estudiantes, mediante el planteamiento y solución de problemas.

Desarrollar una propuesta curricular de este tipo es otra forma para lograr que la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, partan de su propia actividad y su confrontación con el mundo. Al emplear solución de problemas se les proporciona un contexto, donde puedan aprender conceptos y desarrollar destrezas, creando en ellos la necesidad de investigar, aportar, deducir y relacionar sus conocimientos con la realidad.

El Ministerio de Educación Nacional en el documento *Significado de la calidad de la educación* establece que:

"Es fundamental que todos los estudiantes desarrollen al máximo sus capacidades de pensar, de solucionar problemas, de instruirse, de elegir libremente su postura ante la vida, de relacionarse con los demás de manera respetuosa, de construir una ética profesional y, en consecuencia, formarse como ciudadanos productivos, autónomos y responsables. Esta es la base para lograr espacios cada vez más amplios de convivencia pacífica y para aumentar la competitividad de nuestro país".

# 2. OBJETIVOS

## 2.1. OBJETIVO GENERAL

Fortalecer el nivel de formación en matemáticas, específicamente en geometría elemental, realizando una propuesta curricular para su enseñanza, basada en la formulación y solución de problemas.

## 2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Diseñar problemas relacionados con los contenidos en el área de Geometría, teniendo en cuenta las sugerencias del Ministerio de Educación Nacional expuestas en los **Lineamientos Curriculares y Los Estándares Básicos de Matemáticas.**

Elaborar y adecuar material para la enseñanza de la geometría, utilizando la metodología basada en la formulación y solución de problemas.

## 3. PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS.

A continuación se expone textualmente lo relacionado al pensamiento espacial y sistemas geométricos que se presenta en *Lineamientos Curriculares para las Matemáticas,* planteados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia:

El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría.

Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

La propuesta de Renovación Curricular avanzó en este proceso enfatizando la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio.

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales.

### 3.1. GEOMETRÍA ACTIVA

Para lograr este dominio del espacio se sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de 'hacer cosas', de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente construidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales.

Veamos la diferencia entre mostrar y hacer, entre observar y actuar, entre simbolizar y conceptualizar en algunos ejemplos concretos.

La geometría activa es una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio.

***Cuerpos, superficies y líneas***

Al pasar las manos por las caras o superficies de objetos, muebles y paredes se aprecia más que con cualquier definición la diferencia entre cuerpos y superficies, y entre superficies planas y curvas. La interrupción del movimiento prepara el concepto de superficie como frontera de un cuerpo y el movimiento de la mano prepara el concepto de plano, el de región y el de área.

Al pasar el dedo por el borde común de dos superficies se aprecia la diferencia entre superficie y línea y entre línea recta y curva, y se prepara el concepto de longitud y el de prolongación de una línea en la misma dirección y sentido del movimiento del dedo. La interrupción del movimiento prepara el concepto de línea como frontera de una superficie, y el movimiento del dedo prepara el concepto de línea recta, el de segmento y el de longitud.

Al terminar el recorrido de un borde que termina en punta, esa interrupción del movimiento prepara el concepto de punto. Se sugiere la prioridad del cuerpo sobre la superficie, de ésta sobre la línea y de ésta sobre el punto[1].

***Ángulo***

Los niños de primero, segundo ó tercer grado han tenido la oportunidad de dar vueltas completas, medias vueltas y cuartos de vueltas en sus juegos. Partiendo de esta experiencia, la aproximación activa al ángulo de giro puede lograrse muy fácilmente al extender el brazo y luego girarlo hasta detenerse en otra posición. Si se deja como señal de la posición inicial un palo o una pita o una marca en la pared y se barre un ángulo de giro con el propio brazo y se mira la posición en que se detuvo, se puede llegar a una apreciación cualitativa de mayor a menor amplitud o apertura del ángulo de giro. Después de estabilizar la construcción de este concepto, se puede aceptar el ángulo pintado en el cuaderno como la huella de un giro que ya pasó. Así el ángulo orientado aparece primero que el ángulo sin orientación y se puede saber de qué ángulo se trata mientras se recuerde el giro que lo trazó. El giro es activo y el ángulo está pintado estáticamente.

[1] Carlos E. Vasco, "Sistemas geométricos", en Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas, Vol. II, Págs. 53 y 54.

## 3.2. DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela.

El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar.

Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría. Estos niveles son:

***El Nivel 1*** Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización, en el que el alumno percibe las figuras como un todo global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes. Por ejemplo, un niño de seis años puede reproducir un cuadrado, un rombo, un rectángulo; puede recordar de memoria sus nombres. Pero no es capaz de ver que el cuadrado es un tipo especial de rombo o que el rombo es un paralelogramo particular. Para él son formas distintas y aisladas.

En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de “la misma forma”.

***El Nivel 2.*** Es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc. El niño, por ejemplo, ve que un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, que las diagonales son de la misma longitud, y que los lados opuestos también son de la misma longitud. Se reconoce la igualdad de los pares de lados opuestos del paralelogramo general, pero el niño es todavía incapaz de ver el rectángulo como un paralelogramo particular.

En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras.

***El Nivel 3*****.** Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones; por ejemplo, un cuadrado es identificado como un rombo porque puede ser considerado como “un rombo con unas propiedades adicionales”. El cuadrado se ve ya como un caso particular del rectángulo, el cual es caso particular del paralelogramo. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento. En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

***El Nivel 4.*** Es ya de razonamiento deductivo; en él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

***El Nivel 5.*** Es el del rigor; es cuando el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Las investigaciones de Van Hiele y de los psicólogos soviéticos muestran que el paso de un nivel a otro no es automático y es independiente de la edad. Muchos adultos se encuentran en un nivel 1 porque no han tenido oportunidad de enfrentarse con experiencias que les ayuden a pasar al nivel 2.

Sin embargo, algunos estudios han mostrado que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, especialmente el del rigor, pues exige un nivel de cualificación matemático elevado y que no hay mucha diferencia entre estos dos niveles.

Parece que los estudiantes deben recorrer un largo trecho entre los tres primeros niveles y los últimos de rigor y formalización, y que ese trecho no ha sido investigado suficientemente para detectar a su vez la existencia de niveles intermedios.

Aunque estos niveles son una aproximación aceptable a las posibles etapas en las que progresa el pensamiento geométrico, los docentes debemos ser críticos con respecto a ellos, pues no parecen dirigidos a lo que parecen ser los logros más importantes del estudio de la geometría: la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de conjeturas, jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones. La propuesta de geometría activa, que parte del juego con sistemas concretos, de la experiencia inmediata del espacio y el movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio, y a la expresión externa de esos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos, no coincide con la descripción de Van Hiele, más orientada a la didáctica clásica de la geometría euclidiana y al ejercicio de las demostraciones en T o a doble columna.

## 3.3. REPRESENTACIÓN BIDIMENSIONAL DEL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio.

Al respecto Lappan y Winter, afirman:

A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de “dibujos” de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real”[2].

Para comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. Hay distintos tipos de tales representaciones. Cada una es importante para resaltar un aspecto, pero es necesario utilizar varias a la vez para desarrollar y completar la percepción del espacio.

La representación en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la realidad, puede hacerse mediante dibujos de vista única o dibujos de vista múltiples. Los dibujos de vista única son aquellos en los que se ilustran las tres dimensiones del objeto en una sola vista, con lo cual se logra representar el objeto de una manera muy próxima a la realidad. Hay dos maneras de hacer estos dibujos: mediante axonometrías y mediante perspectivas cónicas.

Los dibujos de vistas múltiples representan los objetos a través de una serie fragmentada de vistas relacionadas”[3].

El dibujo en perspectiva se puede utilizar con mucho provecho para la educación estética, y para el ejercicio de las proyecciones de objetos tridimensionales en la hoja de papel, y de la hoja de papel al espacio. Para esto último se puede empezar por dibujar cubos y cajas en perspectiva, de manera que unos oculten parcialmente a los otros, y luego tratar de colocar cubos y cajas de cartón sobre

---

[2] . Linda Dickson y otros, El aprendizaje de las matemáticas, Editorial Labor S.A., Madrid, 1991, Pág. 48.
[3] En la Unidad VI del Programa Curricular de 9° Grado de educación básica secundaria, publicado por el MEN en 1991, se presenta una propuesta didáctica para desarrollar con los estudiantes la representación en el plano del espacio tridimensional

una mesa de manera que se vean como en el papel. Aun en el dibujo en perspectiva es difícil dibujar las elipses que representan las distintas maneras como aparece un círculo desde distintos puntos de vista. Por eso puede ser aconsejable limitar la perspectiva a figuras rectilíneas, a menos que los mismos alumnos quieran explorar cómo se dibujan las tapas de las alcantarillas en las calles ya dibujadas en perspectiva.

## 3.4. LAS TRANSFORMACIONES

En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo.

La primacía de las figuras muertas y de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad de líneas, y las de igualdad o congruencia o semejanza de figuras ocultaron por mucho tiempo el origen activo, dinámico de los conceptos geométricos, y dejaron en la penumbra las transformaciones. Los sistemas geométricos se redujeron a sus componentes, como los puntos, líneas y planos, segmentos de recta y curvas, y figuras compuestas por ellos, con sólo la estructura dada por las relaciones mencionadas.

Esta propuesta intenta devolver la dinámica a los sistemas geométricos, con sus operadores y transformaciones, que resultan de internalizar en forma de esquemas activos en la imaginación, los movimientos, acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente. Esto quiere decir que una transformación no puede definirse, ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con movimientos del cuerpo o de las manos”[4].

Cuando se estudien estos sistemas de transformaciones, debe comenzarse por los desplazamientos que pueden hacerse con el propio cuerpo, o deslizando objetos y figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero. Con esto se llega primero a las rotaciones y a las traslaciones. Se trata de ver qué tipo de movimientos conservan la dirección, cuáles la orientación en el plano o en el espacio, cuáles cambian los órdenes cíclicos de los vértices, sin definir verbalmente ninguna de estas transformaciones.

En los talleres con los maestros hemos comprobado la dificultad que tienen para distinguir esos aspectos activos que los niños captan inmediatamente, y la resistencia que sienten al ver que en realidad no se puede definir con palabras qué es traslación ni qué es rotación. Definirlas por medio de las reflexiones es un engaño, pues tampoco se pueden definir las reflexiones por medio de definiciones verbales.

Las reflexiones no pueden hacerse con figuras de material concreto: o se hacen en el cerebro o no pueden hacerse. La ayuda de espejos, láminas semitransparentes, calcado en papel transparente o de copia, etc., pueden ayudar al cerebro a interiorizar, reversar y coordinar las reflexiones pero no pueden

[4] Carlos E. Vasco, “Sistemas geométricos”, en Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas, Vol. II, Pág. 63

suplantarlo.  Por lo tanto, no se debe comenzar por las reflexiones para obtener las rotaciones y las traslaciones.

De esta manera se propone que se trabaje la geometría por medio de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar sus representaciones en la imaginación y en el plano del dibujo.

## 4. ESTÁNDARES BÁSICOS PARA EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

Debido a que la educación es para todos, debe proporcionar las mismas oportunidades de aprendizaje y desarrollo individual y social, por tanto es necesario pautas comunes precisas y básicas para los diferentes niveles educativos, esta información común para todos los planes de estudio, el Ministerio de Educación Nacional, lo llamó Estándares Básicos.

A continuación se presentan los Estándares Básicos asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos:

**Grado primero a tercero**

1. Diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales.
2. Dibujar y describir figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños
3. Reconocer nociones de horizontabilidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.
4. Representar el espacio circundante para establecer relaciones espaciales (distancia, dirección, orientación, etc.).
5. Reconocer y aplicar traslaciones y giros de una figura en el plano.
6. Reconocer y valorar simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.
7. Reconocer congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).
8. Realizar diseños y construcciones con cuerpos y figuras geométricas.

**Grados cuarto a quinto**

1. Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
2. Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
3. Identificar el ángulo como giros, aberturas, inclinaciones en situaciones estáticas y dinámicas.
4. Utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.
5. Identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.
6. Construir y descomponer figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
7. Hacer conjeturas y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
8. Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

**Grados sexto a séptimo**

1. Representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
2. Identificar y describir figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
3. Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.
4. Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
5. Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
6. Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

7. Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
8. Grados octavo a noveno
9. Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas
10. Reconocer y constrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
11. Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
12. Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.

**Grados décimo a undécimo**

1. Identificar las propiedades de las curvas en los bordes obtenidos mediante cortes (longitudinal y transversal) en un cono y un cilindro.
2. Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, esféricos, ...).
3. Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica.
4. Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
5. Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
6. Reconocer y describir curvas o lugares geométricos

## 5. EL ENFOQUE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El enfoque de resolución de problemas se puede considerar como el sinónimo de "aprender haciendo", es la oportunidad para que los mismos estudiantes construyan su conocimiento paso a paso, con la compañía de su profesor.

Desde el punto de vista didáctico [ENF], resolución de problemas puede identificarse como una modalidad didáctica en la cual el docente genera situaciones en las que los estudiantes puedan explorar conceptos, aprender acerca de procedimientos, argumentar, acercándose a demostraciones, analizar y/o generar aplicaciones, investigar y en general, aprender matemáticas mediante un método de enseñanza similar al método de investigación.

### 5.1. ¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

Un problema es una situación en la cual se tenga la oportunidad de emplear la creatividad, conocimientos previos, conocimientos que se van adquiriendo al resolver el problema, es una oportunidad para que el estudiante aplique lo que sabe y sea capaz por diferentes medios de llegar a su solución.

A continuación se presentan diferentes opiniones de algunos actores sobre lo que es un problema [FOR1]:

*George Polya:* Tener un problema significa estar ante una situación en la que se debe buscar de forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

*Krulik y Rudnik:* Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.

*Miguel de Guzmán:* Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada y no conozco el camino que me pueda llevar de una a otra.

El Grupo Clama "club Amigos de la matemática Universidad de Antioquia", afirma que:

"Un problema, para las matemáticas es un asunto matemático que debe resolverse a partir de ciertos datos y que no es de respuesta inmediata, pero sí es de respuesta posible. Un problema es una actividad para la que el sujeto carece de medios preestablecidos y estará en la necesidad de buscarlos, éstas son tareas que requieren de planificación, de estrategias y ejecución basadas en un pensamiento no rutinario".

## 5.2. PROPUESTA DE POLYA

George Polya propone un modelo para afrontar situaciones problemáticas especialmente en el área de matemática, al cual se le denomina "la propuesta de Polya". En esta propuesta se identifican cuatro etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos juega un papel importante. Estas etapas constituyen una forma adecuada para afrontar un problema y pueden ser tomadas como referencia para aplicar el enfoque de resolución de problemas. Las etapas son las siguientes:

**Comprender el problema.** En esta etapa se ubican las estrategias que ayudan a entender y representar las condiciones del problema. Se debe tener claridad en aspectos tales como: las incógnitas, los datos y las condiciones.
Es adecuado que se dé solución a las siguientes preguntas relacionadas con el problema: ¿Cuál es la pregunta? ¿Cuáles son sus datos? ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es posible satisfacer las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para determinar lo desconocido? ¿Hay redundancias? ¿Hay contradicciones?. Polya sugiere que en esta fase se hagan representaciones, se introduzca la notación adecuada.

**Concebir un plan.** Una vez determinadas las relaciones entre los datos y las incógnitas, se recomienda examinar los conocimientos previos, identificar problemas auxiliares, pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del que se quiere resolver y así establecer un plan de solución. En psicología, la habilidad de establecer relaciones se considera un indicador de inteligencia. Es importante que el individuo diferencie propiedades estructurales profundas de características superficiales.

En esta fase, es adecuado que se dé solución a las siguientes preguntas relacionadas con el problema: ¿Lo ha visto antes? ¿Ha visto el mismo problema bajo una forma diferente? ¿Conoce un problema relacionado?, ¿Conoce un teorema o una regla que podría ser útil?

**Ejecución del plan.** Implementar el plan que se escogió hasta solucionar completamente el problema, si es posible, o hasta que la misma acción sugiera considerar un nuevo plan. En esta etapa se deben considerar aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución.

En esta fase, es adecuado que se dé solución a las siguientes preguntas relacionadas con el problema: ¿puede estar seguro que cada uno está correcto? ¿Puede demostrar que está correcto?

**Examinar la solución obtenida.** Una vez que se ha obtenido una solución, verificando cada paso del razonamiento, hay motivos para creer que es correcta, pero puede haber errores si el razonamiento es largo y enredado, por lo cual es recomendable verificar la solución y el razonamiento completo. Una idea fundamental es tratar de resolver el problema en una forma diferente y analizar la solución obtenida. También es importante establecer conexiones y extensiones del problema original en otros contextos.

En esta fase, es adecuado que se dé solución a las siguientes preguntas relacionado con el problema: ¿puede usted comprobar la respuesta? ¿Puede usted comprobar los argumentos? ¿Puede obtener el resultado por un camino diferente? ¿Puede usted "ver" la respuesta de una sola mirada? ¿Puede usar el resultado o el procedimiento para resolver otro problema?

## 6. ¿QUÉ ES ENSEÑAR MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

En relación con esta pregunta, *Miguel de Guzmán* [GM1], opina lo siguiente.

La enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo.

La enseñanza a través de la resolución de problemas pone énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no debe en lo absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante que el estudiante:

- Manipule los objetos matemáticos
- Accione su propia actividad mental
- Ejercite su creatividad
- Reflexione sobre su proceso de pensamiento para mejorarlo conscientemente.
- Que adquiera confianza en sí mismo.
- Se divierta con su actividad mental.
- Se prepare así para otros problemas de la ciencia y de su vida cotidiana.
- Se prepare para los nuevos retos de la tecnología y la ciencia.

¿Porqué es ventajoso la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas?

- Porque lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes es la capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.
- Porque como el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y cultura no se hacen obsoletos.
- Porque este trabajo resulta atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.
- Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.
- Porque es aplicable a todas las edades.

Como el énfasis se ha trasladado desde enseñar a resolver problemas hasta enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas, muchos escritos han intentado clarificar lo que significa una aproximación de la enseñanza de las matemáticas mediante resolución de problemas. *El foco consiste en enseñar tópicos matemáticos a través de contextos de resolución de problemas y medios ambientes orientados por indagaciones que se caracterizan porque el profesor ayuda a que los estudiantes construyan un profundo entendimiento de las ideas y procesos matemáticos animándolos a hacer matemáticas: creando, conjeturando, explorando, examinando y verificando.*

Algunas características específicas de una aproximación a la enseñanza de la matemática a través de resolución de problemas incluyen las siguientes [TR1].

- Interacciones entre estudiantes-estudiantes y profesor-estudiantes.
- Dialogo matemático y consenso entre los estudiantes.

- Los profesores proveen solo suficiente información para establecer las bases relacionadas con el problema y los estudiantes clarifican, interpretan e intentan construir uno o más procesos de solución.
- Los profesores aceptan respuestas correctas y erradas.
- Los profesores guían, entrenan, hacen preguntas y comparten en el proceso de resolución de problemas.
- Los profesores saben cuando es apropiado intervenir, y cuando esperar a que los estudiantes realicen sus propias acciones.
- Una característica adicional es que una aproximación a resolución de problemas puede ser usada para animar a que los estudiantes hagan generalizaciones sobre reglas y conceptos, proceso que es fundamental en matemáticas.

## 6.1. PAPEL DEL PROFESOR

La principal función del profesor consiste en la selección de "buenos" problemas, para implementarlos en sus experiencias de aula. Sus acciones se deben asemejar a las de un entrenador, más que a las de un poseedor del conocimiento. El profesor debe tomar el rol de guía para orientar al estudiante en la búsqueda de su propio conocimiento.

Alan Schoenfeld [ST1] plantea lo siguiente.

Un aspecto crucial en la enseñanza de la matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos en su aprendizaje. Así, un estudiante que se desarrolle en un ambiente matemático donde se utilicen naturalmente estrategias para leer, conceptuar y escribir argumentos matemáticos, será más capaz de aprender en otros dominios y adquirir nuevas habilidades. En este sentido, no es importante cubrir amplios contenidos sino centrar el aprendizaje en las ideas básicas. El propósito principal de la enseñanza basada en la resolución de problemas no es equipar a los estudiantes con un bagaje de estrategias y habilidades, sino permitirles pensar por sí mismos. El valor de las estrategias, habilidades y procesos radica en que favorecen en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar.

El papel del profesor incluye:

- Brindar a los estudiantes espacios diferentes al salón de clase, de tal forma que puedan relacionar el conocimiento que tienen, con aquello que los rodea, con el fin de que los aprendizajes sean importantes y significativos tanto para el profesor como para el docente.

- Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas. Hay que tener en cuenta que un problema es un problema cuando el estudiante muestra algún interés por resolverlo.

- Construir una atmósfera que le dé confianza al estudiante para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad durante el proceso de solución.

- Motivar y permitir que los estudiantes seleccionen e implementen sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando esta sea necesaria.

- Diseñar junto con los estudiantes problemas, ya sea a partir de los que se tienen planteados o problemas que surjan de la creatividad e imaginación de ambos.

Un maestro de matemáticas debe conocer ampliamente los temas a enseñar y a los estudiantes a quienes están dirigidos, así como diferentes estrategias para el intercambio de conocimientos con ellos. Al brindarles ayuda para la ejecución de su trabajo esta debe ser discreta y moderada (ni mucha ni muy poca), manteniendo así su ilusión de progreso sin imponerse. Animarlos constantemente para que creen nuevas ideas y conceptos desde su propio contexto, siendo cuidadoso al juzgarlos, ya que hay diversos ritmos de aprendizaje y las formas de comunicación varían de un estudiante a otro, permitiendo así que miren más de cerca las ideas del pensamiento matemático (cambio, patrones, formas, tamaños y herramientas), e identifiquen que el lenguaje común que utilizan no está tan lejos del lenguaje matemático.

El interés por los problemas empieza cuando el profesor expone sus propias experiencias, dificultades e inquietudes ante sus alumnos, por lo cual debe "dramatizar" sus ideas y preguntas (partir de una situación general o de una sugerencia, para ir poco a poco hacia preguntas más precisas y concretas, en forma natural y simple). Es también conveniente asegurarse de que los razonamientos sean los más apropiados e idóneos, lo cual se logra revisando y verificando cada paso, antes de que sus alumnos se lancen a realizar cálculos que los puedan traumatizar si no encuentran la solución adecuada.

Cuando considere que los estudiantes han adquirido confianza en sí mismos, construir una atmósfera agradable que le permita atacar problemas no rutinarios, dejando que identifiquen y desarrollen sus propios caminos de abordaje y solución hasta llegar a proponerles que diseñen sus propios problemas, dándoles ayuda sólo cuando sea necesario y poniendo mucha atención a las estrategias utilizadas (pueden surgir algunas novedosas).

En ocasiones, cuando se resuelve un problema, el profesor propone varios caminos de solución, los cuales discute en clase formando pequeños grupos y que sean los alumnos los que propongan el más efectivo a seguir; de esta manera se dan a conocer las diferentes dificultades que surgen cuando se intenta resolver un problema. Esto hace desarrollar un espíritu investigador y creativo que estimula su curiosidad intelectual. Es clave y fundamental que el docente de a conocer a sus alumnos que el planteo de un problema debe de ser claro con una notación sencilla y familiar, de manera que los datos, incógnitas, notaciones se puedan manipular fácilmente. Además, insistir que el problema no termina cuando se encuentra la solución sino que es aquí cuando nace el verdadero reto (buscar la solución más adecuada, más general, crear nuevos problemas).

## 6.2. PAPEL DEL ESTUDIANTE

El estudiante es el responsable de adquirir el conocimiento, debe emplear todas sus herramientas y lo que sabe para madurar su conocimiento. Debe dejar de ser un simple receptor para convertirse en un productor de conocimiento.

Alan Schoenfeld [ST1], con respecto al papel del estudiante afirma:

Para que los estudiantes vean la matemática como una disciplina con sentido, es necesario que interactúen e interioricen los principios asociados a ella. Los estudiantes necesitan aprender matemáticas en espacios que se presenten como un microcosmos de la cultura matemática, esto es, clases donde los valores de las matemáticas, como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana.

Así mismo, sostiene que entre los principios importantes para el aprendizaje de las matemáticas se incluyen que el estudiante reconozca que:

- Encontrar la solución de un problema no es el final, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema. Además, en el desarrollo de las matemáticas el proceso de formular o rediseñar problemas se identifica como un componente esencial en el quehacer matemático.

- Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Es decir, el planteamiento de preguntas, la búsqueda de respuestas y de justificaciones son actividades que se pueden practicar desde la enseñanza elemental y su práctica cotidiana pueden producir resultados matemáticos nuevos.

Un componente fundamental del proceso de aprendizaje es el de solucionar problemas. Por lo tanto, el estudiante debe interactuar con una variedad de problemas para que pueda analizar la calidad de los diversos métodos y estrategias de solución, para que identifique la importancia de utilizar argumentos matemáticos en todas sus posiciones y afirmaciones.

El estudiante debe ser consiente de que su experiencia en matemáticas es incompleta, mientras no tenga ocasión de proponer o formular sus propios problemas, que pueden surgir en su vida diaria y en su entorno.

Frente a un problema, el estudiante no debe rendirse ante varios intentos de solución sin éxito, por el contrario debe motivarse para aceptar el reto. Debe insistir en la búsqueda de nuevos caminos; debe consultar con sus compañeros, con sus profesores o, si es del caso, con especialistas.

Además del papel del profesor y de los alumnos, es importante tener en cuenta que el ambiente que se les proporciona a los estudiantes debe ser tal que los motive a resolver problemas. Es deber de los profesores ofrecerles un espacio propicio para la investigación, para el análisis, un lugar en el que los estudiantes puedan explorar un problema. Además es adecuado que la solución de los problemas se haga en grupo, para que los estudiantes tengan la oportunidad de discutir, refutar y ampliar las diferentes ideas que surgen al abordar el problema, entre los mismos estudiantes se enriquece el conocimiento ya que las dudas o los inconvenientes que se presenten son la base para aprender nuevas cosas que ellos desconocían.

## 6.3. LA NUEVA EVALUACION

El trabajo del profesor al aplicar la resolución de problemas, es entre otros el de ser un guía para sus estudiantes, estar con ellos durante todo su proceso de aprendizaje; ya que el trabajo con los estudiantes es permanente y continuo el proceso de la nueva evaluación difiere de la evaluación tradicional en diversos aspectos:

- En la evaluación tradicional predonomina el interés por la medición y por los datos estadísticos. La nueva evaluación, consiste en analizar los logros, dificultades o limitaciones del alumno y las causas o circunstancias que inciden en su proceso de formación.

- La evaluación tradicional esta orientada más a los resultados o productos, la nueva evaluación, en cambio sin prescindir de éstos, tiene en cuenta los procesos.

La nueva evaluación como parte esencial del proceso pedagógico busca mejorar los procesos y resultados de la escuela. Tiene entre otras las siguientes finalidades:

- Diagnosticar el estado de los procesos de desarrollo del alumno y pronosticar sus tendencias.
- Asegurar el éxito del proceso educativo y por lo tanto, evitar el fracaso escolar.
- Identificar dificultades, deficiencias y limitaciones.
- Ofrecer oportunidades para aprender de la experiencia.
- Obtener información para tomar decisiones.
- Promover, certificar o acreditar a los alumnos.
- Orientar el proceso educativo y mejorar su calidad.

La nueva evaluación debe ser:

***Continua:*** se realiza de manera permanente con base en un seguimiento que permita apreciar el progreso y las dificultades que puedan presentarse en el proceso de formación de cada alumno.

***Integral:*** debe tener en cuenta todos los aspectos o dimensiones del desarrollo del alumno.

***Sistemática:*** debe ser organizada con base en principios pedagógicos y que guarde relación con los fines y objetivos de la educación, los contenidos, los métodos, etc.

***Flexible:*** debe tener los ritmos de desarrollo del alumno en sus diferentes aspectos, por lo tanto, debe considerar la historia del alumno, sus intereses, sus capacidades, sus limitaciones y en general su situación concreta.

***Interpretativa:*** debe comprender el significado de los procesos y los resultados de la formación del alumno.

***Participativa:*** debe involucrar a varios agentes, que propicie la autoevaluación y la coevaluación.

***Formativa:*** debe permitir reorientar los procesos educativos de manera oportuna, a fin de lograr su mejoramiento.

# 7. PROBLEMAS RESUELTOS

A continuación se presentan algunos problemas que pueden ser utilizados para emplear el enfoque de resolución de problemas. Los problemas pueden ser modificados, adaptados al contexto en el cual se van a desarrollar.

Para cada uno de los problemas además del enunciado se ha incluido información adicional que se describe a continuación:

***¿Sobre qué es el problema?*** Se presenta un resumen sobre el problema, la solución y los objetivos que se alcanzan al resolver el problema.

***Objetivos.*** Enuncia los objetivos generales que se han propuesto para que el estudiante alcance al resolver el problema.

***Recursos.*** Listado de materiales que son necesarios para solucionar el problema.

***Resultados específicos de aprendizaje.*** Listado de diferentes habilidades que se pretende el estudiante alcance durante el proceso de solución del problema.

***Extensión del problema*.** Es otro problema relacionado con el original, que tiene un grado de dificultad un poco mayor.

***Solución.*** Se presenta una posible solución del problema, describiendo la forma en que se llega a tal solución.

Los problemas se han agrupado en seis niveles, empezando desde el nivel uno. Los problemas se han agrupado en los diferentes niveles dependiendo de los objetivos y los resultados específicos de aprendizaje que se pretenden alcanzar. A continuación se enunciaran de forma general los objetivos y resultados específicos de aprendizaje correspondiente a cada uno de los niveles:

***Problemas nivel 1***

**Objetivos**

- Clasificar objetos por atributos que tienen las diferentes figuras.
- Permitir que los niños trabajen con figuras para formar patrones.
- Identificar y describir figuras de dos dimensiones, tales como: cuadrado, círculo, caja y pentágono.

**Resultados específicos de aprendizaje:**

- Identificar y describir figuras geométricas
- Describir patrones repetitivos
- Crear cuadrados, triángulos y cuadriláteros doblando papel.
- Identificar y describir figuras
- Unir figuras para formar otras nuevas figuras
- Listar un número de propiedades de diferentes figuras.

***Problemas nivel 2***

**Objetivos**

- Crear y hablar sobre patrones geométricos los cuales se repiten, o los cuales tienen simetría reflexiva o rotacional.
- Describir e interpretar la posición, usando el lenguaje de dirección y distancia.
- Realizar giros en el sentido de las agujas del reloj y en sentido contrario.
- Hacer, nombrar y describir en el lenguaje de los niños y en el lenguaje geométrico todas las formas y objetos

**Resultados específicos de aprendizaje**

- Describir las propiedades de los cuadrados
- Trabajar sistemáticamente resolviendo problemas
- Describir movimientos usando giros en sentido horario y antihorario.
- Seguir instrucciones usando distancia, dirección y giros.
- Crear un patrón repetitivo usando transformaciones geométricas (rotación, reflexión y traslación).
- Listar un número de propiedades que distinguen los sólidos de 3 dimensiones dados en el problema.

***Problemas nivel 3***

**Objetivos**

- Dibujar e interpretar mapas a escala simple
- Describir las características de objetos de 2 y 3 dimensiones, usando el lenguaje de geometría.
- Diseñar y hacer patrones que impliquen traslación, reflexión y rotación

**Resultados específicos de aprendizaje**

- Seguir las instrucciones usando el plano para poder ubicarse en diferentes posiciones.
- Usar cuadrados y rectángulos para formar figuras de forma similar a las que se tienen inicialmente.
- Describir las propiedades de diferentes figuras geométricas.

***Problemas nivel 4***

**Objetivos**

- Hacer modelos objetos sólidos con base en figuras de dos dimensiones.
- Describir la simetría de reflexión o rotación de una o una figura u objeto.
- Reforzar la ubicación en el plano.

- Describir la simetría de rotación y la simetría de reflexión de un objeto o una figura.

**Resultados específicos de aprendizaje**

- Construir formas de tres dimensiones a partir de dibujos de 2 dimensiones
- Describir las simetrías de figuras de 3 dimensiones
- Representar figuras de 3 dimensiones
- Seguir las referencias en una grilla
- Trabajar sistemáticamente
- Reorganizar e inventar patrones con la simetría de reflexión

***Problemas nivel 5***

**Objetivos**

- Usar las propiedades de ángulos, de líneas paralelas y explicar el razonamiento implicado.
- Aplicar la simetría y las propiedades de los ángulos en los polígonos.
- Encontrar fracciones equivalentes a una fracción dada.
- Encontrar la medida de un lado desconocido en un triángulo recto, usando ya sea la medición directa, el Teorema de Pitágoras, o utilizando funciones trigonométricas adecuadas.
- Construir ángulos rectos, líneas paralelas y perpendiculares, círculos, polígonos simples, puntos medios, mediatrices, medianas, y alturas.
- Encontrar la medida de un lado desconocido en un triángulo recto, usando ya sea la medición directa, el Teorema de Pitágoras, o utilizando funciones trigonométricas adecuadas.
- Utilizar las características de la simetría y de ángulo de polígonos para solucionar problemas prácticos.

**Resultados específicos de aprendizaje**

- Aplicar las propiedades de ángulos de rectángulos, cuadrados y triángulos
- Usar fracciones para expresar las relaciones entre las áreas de rectángulos, cuadrados y triángulos.
- Utilizar el Teorema de Pitágoras en una forma algebraica general.
- Tener precisión en la toma de medidas de un dibujo hecho a escala.
- Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar el área del rombo
- Usar regla y compás.

***Problemas nivel 6***

**Objetivos**

- Dibujar e interpretar las representaciones de 2 dimensiones a partir de objetos de 3 dimensiones.
- Dibujar e interpretar objetos de 2 y 3 dimensiones.
- Expresar cantidades como fracciones o porcentajes de un conjunto.
- Encontrar los ángulos y las longitudes desconocidas en los problemas prácticos que se pueden modelar, utilizando triángulos, usando el dibujo a escala, características de ángulo en los triángulos, Teorema de Pitágoras, cocientes trigonométricos, regla del seno, o de la regla del coseno.

**Resultados específicos de aprendizaje**

- Aplicar las propiedades de las figuras de tres dimensiones para resolver un problema
- Visualizar objetos de tres dimensiones
- Aplicar el Teorema de Pitágoras para resolver un problema
- Aplicar las propiedades de los objetos de tres dimensiones para resolver el problema.
- Utilizar las áreas de triángulos y cuadrados para encontrar longitudes desconocidas.

El grado de complejidad de los problemas aumenta con el incremento en el nivel. Los profesores son los responsables de escoger los problemas que más se adecuen al contexto en el cual están trabajado.

## 7.1. PROBLEMAS NIVEL 1

**Y el 12 es...**

John estaba jugando con algunos triángulos, cuadrados y círculos. Él ubicó las tres primeras figuras y la sexta tal como se muestra en la figura siguiente.


¿Podrá determinar el patrón de tal forma que la figura número 12 sea un círculo?

***Variación:*** ¿Puede ser la figura número 12 un cuadrado? ¿Puede ser un triángulo?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema explora la idea de patrones, empleando algunas figuras básicas. Utilizando diferentes figuras y ubicándolas en posiciones distintas de tal forma que se pueda formar un patrón, permite a los niños tener una mejor idea sobre patrones y se logra que adquieran una mayor destreza en identificar las figuras.

Son diversas las respuestas que se pueden dar a este problema, las cuales no son exactas; este tipo de preguntas dan la oportunidad para que los niños ejerciten su imaginación.

**Objetivos**

Clasificar objetos por atributos que tienen las diferentes figuras.

Permitir que los niños trabajen con figuras para formar patrones.

**Recursos:**

Recortes de papel, que tengan la forma de diferentes figuras geométricas.

**Resultados específicos de aprendizaje:**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Identificar círculos, cuadrados y triángulos
- Continuar y describir patrones repetitivos

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Jugar con los niños de tal forma que logren identificar las diferentes figuras, esto se puede lograr describiéndolas (sin mostrárselas) o permitiendo que los niños las tomen de una bolsa para que ellos mismos describan e identifiquen las figuras que observan.

2) Leer el problema a la clase. Verificar que ellos puedan contar hasta 12, si no lo saben contar indicarles cuál es la posición número 12.

3) Solicitar a los niños que trabajen en parejas, realizándoles algunas preguntas sobre las figuras:
   ¿Cuál es esta figura?
   ¿Qué propiedades tiene?
   ¿Qué puede decir sobre los triángulos?
   ¿Puede dibujar un triángulo diferente?
   ¿Puede identificar cuadrados en el salón de clases? ¿Cómo hace para saber que este es un cuadrado?

4) Socializar las soluciones. Recordar que hay diferentes respuestas a este problema.

**Extensión al problema**

Remplazar las figuras por otras que usted crea conveniente, organizándolas en otro orden de tal forma que los niños puedan identificar nuevos patrones.

**Solución**

Se presentarán posibles soluciones al problema, pero recuerde que estas no son únicas.

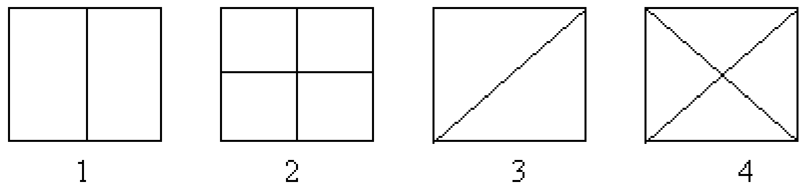
La pregunta original puede ser respondida así:
*Cuadrado, triángulo, círculo, cuadrado, triángulo, círculo, cuadrado, triángulo, círculo, cuadrado, triángulo, círculo*

Si se quiere que la figura número 12 sea un cuadrado, una respuesta puede ser:
*Cuadrado, triángulo, círculo, cuadrado, triángulo, círculo, círculo, triángulo, cuadrado, triángulo, círculo, cuadrado.*

Si se quiere que la figura número 12 sea un triángulo, una respuesta puede ser:
*Cuadrado, triángulo, círculo, círculo, triángulo, círculo, triángulo, cuadrado, triángulo, círculo, círculo, triángulo.*

**Doblando Cuadrados**

Pedir a los estudiantes que doblen los cuadrados de papel entregados, de tal forma que obtengan las figuras que se muestran a continuación:



## ¿Sobre qué es el problema?

Tal vez para un adulto, esto de doblar papel es un problema simple, pero para un niño pequeño hacer esto no es tan obvio. Los niños al resolver este problema aprenderán sobre figuras. Les dará la oportunidad para que ellos usen sus habilidades espaciales y visuales. Esta actividad también puede ayudarles a formarse en el aprendizaje sobre como fraccionar regiones.

## Objetivo

Identificar y describir en su propio lenguaje, figuras de dos dimensiones

## Recursos

Cuadrados de papel

## Resultados específicos de aprendizaje.

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Crear cuadrados, triángulos y cuadriláteros doblando papel.
- Identificar y describir figuras

## Sugerencias para la secuencia de enseñanza

1) Se inicia el problema, tomando una pieza de papel y doblándolo por la mitad. Pedir a los niños que hagan lo mismo con sus propios cuadrados de papel.

2) Antes de que desdoblen el papel, preguntarles qué piensan ellos que se verá una vez se abra de nuevo el cuadrado.
3) Dibujar los diseños sobre el tablero o darles una copia escrita del problema.

4) Después de que los niños trabajen sobres sus propios cuadrados haciendo los diferentes diagramas, realizar las siguientes preguntas:
   ¿Quién realizó los dobleces similares a los planteados?
   ¿Puede explicar como lo hizo?
   ¿Cuáles figuras identifico en el papel luego de hacer los dobleces?

5) Una vez realizado el trabajo, sugerirles dobleces más complejos para que realicen o permitir que ellos mismos creen otros dobleces.

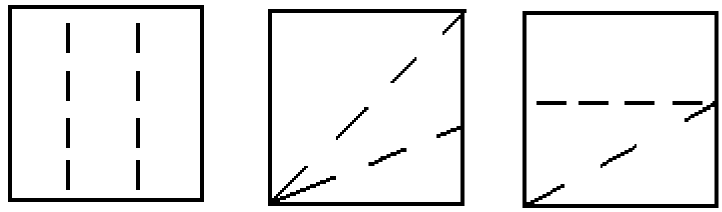
**Extensión al problema**

¿Puede doblar el cuadrado de tal forma que se obtengan 3 rectángulos?
¿Puede doblar el cuadrado de tal forma que se obtengan 3 triángulos?
¿Puede doblar el cuadrado de tal forma que se obtengan 2 triángulos y un rectángulo?

**Solución**

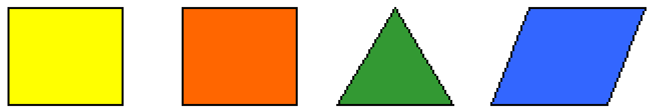
Los diseños 1 y 3 se resuelven realizando un solo doblez
Los diseños 2 y 4 se resuelven realizando dos dobleces.

**Solución de la extensión**

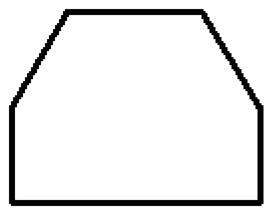


**Rompecabezas**

Dar a los estudiantes recortes de papel en forma de cuadrado, rectángulo, triángulo y paralelogramo (ver figura).



Pedir que con las figuras anteriores formen la figura que se muestra a continuación:



**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema ayuda a desarrollar en los niños sus habilidades espaciales. Así los niños manipulan las figuras y a la vez fortalecen sus conocimientos sobre las propiedades de las figuras. La extensión de este problema les da la oportunidad de construir su propio rompecabezas.

**Objetivos**

Identificar y describir en su propio lenguaje, figuras de dos dimensiones.

**Recursos**

Recortes de papel en forma de cuadrados, paralelogramos, triángulos y hexágonos.

**Resultados específicos del aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Unir figuras para formar otras nuevas figuras
- Identificar y describir figuras geométricas

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Introducir el problema mostrando un rombo, un triángulo y un trapecio. Preguntarles a los niños que nueva figura pueden hacer uniendo las figuras anteriores. Dejar que trabajen por unos minutos con las figuras y luego hablar sobre el trabajo que realizaron.

2) Mostrarles un hexágono. ¿Puede usar tres figuras para formarlo?

3) Plantearles el problema original.

4) Se sugiere que se les hagan a los niños las siguientes preguntas:
   ¿Cómo hicieron para resolver el problema?
   ¿Cómo decidieron donde colocar las figuras?
   ¿Qué pueden decir sobre la figura?

5) Socializar las soluciones

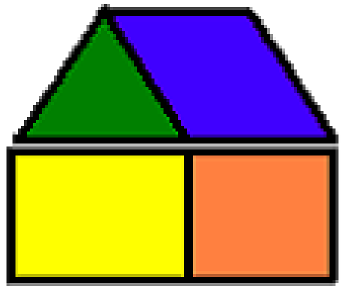
**Extensión del problema**

A partir de una figura geométrica dada, dividirla en diferentes figuras geométricas, de tal manera que estas sean las piezas de un rompecabezas.

Pedir a los niños que hagan su propio rompecabezas.

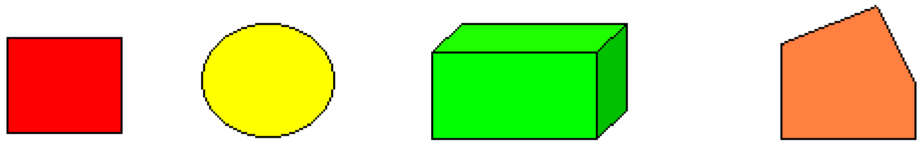
**Solución**

Dadas las figuras anteriores, el problema se puede resolver colocando las figuras como se muestra a continuación:



**¿Quién está diciendo la verdad?**

Diego, Wilson, July y Alexandra miran detenidamente las siguientes figuras:



Diego dice: ¡Oigan todos! El cuadrado es diferente a todos los demás.
July dice: No Diego, la figura diferente es el círculo.
Wilson dice: No, la caja es diferente de todas las demás
Por último Alexandra dice: ¡Todos están equivocados! Claramente se ve que la figura diferente de todas es el pentágono.

¿Quién esta diciendo realmente la verdad? ¿Por qué?

**¿Sobre que es el problema?**

Este problema tiene como propósito permitir que se exploren las propiedades básicas de las figuras. Esas propiedades incluyen su simetría y color. Es importante este tipo de problemas para los niños ya que ellos van a profundizar en las diferentes propiedades de las figuras y las pueden utilizar posteriormente.

Los niños pueden dar varias respuestas válidas a este problema. Es una oportunidad para que utilicen su creatividad. Cualquier respuesta correcta debe ser aceptada.

**Objetivos**

Identificar y describir en su propio lenguaje las figuras: cuadrado, círculo, caja y pentágono.

**Recursos:**

Suficientes recortes de papel en forma de cuadrados, círculos, cubos y pentágonos.

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Listar un número de propiedades de cada una de las figuras entregadas.

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Mostrar a los niños las cuatro figuras del problema. Tomar el cuadrado y preguntarles: ¿Qué propiedades identifica en esta figura? ¿Qué puede decir sobre la figura?

2) Repetir el paso anterior con las otras tres figuras.

3) Plantear a los niños el problema

4) Preguntarles a los niños lo que piensan del problema, tomar algunas de las respuestas que obtuvieron. Tomar diferentes respuestas que se hallan dado al problema

5) Debido a que los niños pueden resolver este problema rápidamente, se sugiere desarrollar la extensión propuesta para este problema.

6) Permitir que algunos niños comenten sobre el trabajo que realizaron. Sugerirles que una buena forma para tener toda la información organizada es colocando la información en una tabla, la cual se puede hacer en una hoja de papel, una vez hecho esto colocar la hoja en alguna pared del salón para que ellos posteriormente puedan escribir en ella las diferentes propiedades que identificaron en cada una de las figuras.

6) Discutir el paso anterior con los niños.

**Extensión al problema**

Pedir a los niños que encuentren otras figuras en el salón de clases. Posteriormente, pedirles que encuentren las diferencias que tienen y las diferencias que hay con las cuatro figuras planteadas en el problema original.

**Solución:**

Son diferentes las respuestas que se le pueden dar a este problema, aquí se presenta una de las posibles soluciones:

Cada uno de los niños está en lo correcto. Diego esta en lo correcto porque el cuadrado es la única figura de color negro. July esta en lo correcto porque el círculo es el único que no tiene esquinas. Wilson esta en lo correcto porque la caja es la única figura de tres dimensiones. Alexandra esta en lo correcto porque este tiene exactamente dos ángulos rectos.

Debe preguntar a los niños las diferentes justificaciones por las cuales cada una de las figuras es diferente. Esta información puede escribirse en una tabla como la siguiente:

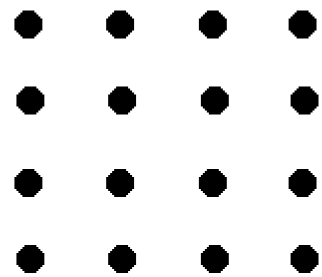
| Cuadrado | Círculo | Cubo | Pentágono |
|---|---|---|---|
| Es negro | Gira | 3 dimensiones | No es simétrico |
| Tiene cuatro lados | Únicamente un lado | Tiene 8 esquinas | Tiene 5 lados |
| Tiene 4 ángulos | No tiene ángulos | Tiene 6 frentes | Tiene 5 ángulos |
| Se puede usar para representar el tallo de una flor | … | Tiene 12 ángulos | Tiene exactamente 2 ángulos rectos |
| … | | Se puede usar para crear un dado. | … |

Esta tabla permite relacionar cada uno de los objetos con sus respectivas propiedades. La información obtenida en la extensión del problema se puede adicionar a la tabla realizando las respectivas modificaciones.

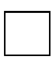
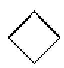
## 7.2. PROBLEMAS NIVEL 2

**Formando cuadrados**

¿Cuántos cuadrados puede formar uniendo los puntos?



**¿Sobre qué es el problema?**

En este problema se pretende que los niños exploren ciertas propiedades de los cuadrados, que recuerden que un cuadrado tiene 4 lados iguales y cuatro ángulos iguales. Además permite que el niño visualice que un cuadrado no siempre es así , también puede ser así: 

**Objetivo**

Crear y hablar sobre patrones geométricos los cuales se repiten, o los cuales tienen simetría reflexiva o rotacional.

**Recursos**

Recortes de papel (u otro material) en el cual se ubiquen los puntos, todos a una misma distancia.

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Describir las propiedades de los cuadrados
- Trabajar sistemáticamente resolviendo problemas

**Sugerencias para las secuencia de enseñanza**

1) Plantearles a los niños el problema, preguntarles: ¿Cuántos cuadrados pueden encontrar? ¡Empecemos a buscarlos!

2) Pedir a los niños que en el papel entregado identifiquen todos los cuadrados posibles. Estos pueden ser de cualquier tamaño y ubicados en cualquier lugar.

3) Agrupar los cuadrados que se encontraron, por tamaño y posición. Resaltar que los cuadrados son diferentes por tamaño, localización o ambos.

4) Socializar el problema. ¿Cuántos cuadrados piensa que se pueden encontrar?

5) Realizarles preguntas sobre el trabajo que desarrollaron, preguntas tales como:
   ¿Cómo identifica que una figura es un cuadrado?
   ¿Qué encontró de nuevo en esta actividad?
   ¿Organizo su búsqueda para encontrar los cuadrados? ¿Cómo?

6) Socializar las respuestas. Si estas son diferentes indagar porque dieron resultados diferentes. Dar a conocer a los niños la forma como usted organizó la búsqueda para encontrar la solución al problema.

**Extensión al problema**

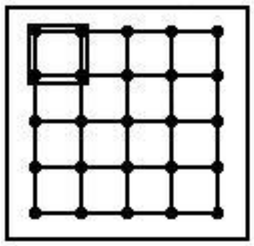
Entregar a los niños recortes de papel (u otro material) en el que se ubiquen los puntos todos a una misma distancia. (Ahora son de 5 x 5 puntos)

**Solución:**

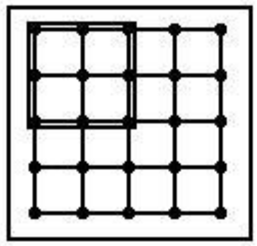
Se pueden encontrar 18 cuadrados, los cuales se encuentran distribuidos de la siguiente manera:

| **Tamaño de los lados de cuadrado** | **Número** |
|---|---|
| 1x1 | 9 |
| 2x2 | 4 |
| 3x3 | 1 |
| Cuadrados que se han girado 45º | 4 |

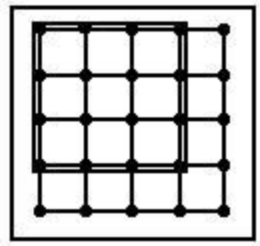
Para la extensión del problema se tiene la siguiente solución:



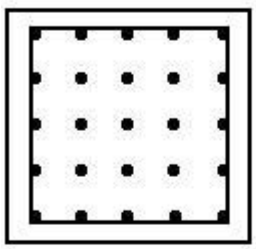
16 cuadrados



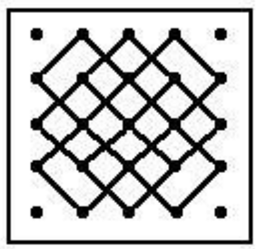
9 cuadrados



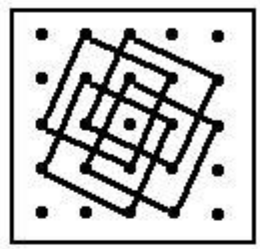
4 cuadrados



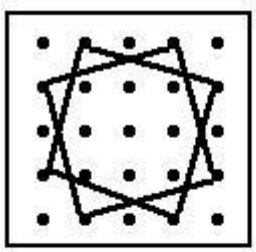
1 cuadrado



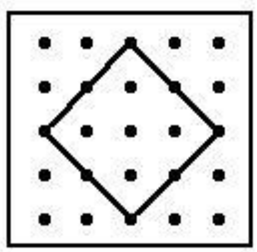
9 cuadrados



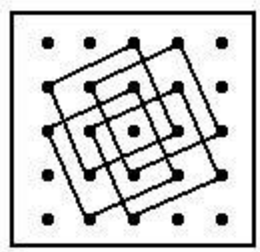
4 cuadrados



2 cuadrados



1 cuadrado



4 cuadrados

**Vendemos los ojos a un compañero**

A Julián se le vendan los ojos. Un compañero dará algunas instrucciones que Julián debe seguir: le dice que camine 3 pasos hacia delante, luego que gire 90º en el sentido de las agujas del reloj. Luego le pide que siga tres veces más la misma orden que se le dio inicialmente. ¿Alrededor de qué figura ha caminado Julián?

**¿Sobre qué es el problema?**

En este problema se explora el espacio bidimensional mediante los movimientos que hace el cuerpo de Julián. Es una oportunidad para experimentar diferentes movimientos, siguiendo ciertas órdenes y desde aquí empezar a que el estudiante se relacione (o los recuerde) con conceptos tales como dirección, giros y distancia en el plano.

**Objetivos**

Describir e interpretar la posición, usando el lenguaje de dirección y distancia.

Realizar giros en el sentido de las agujas del reloj y en sentido contrario.

**Recursos:**

Venda

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Describir movimientos usando giros en sentido horario y antihorario.
- Seguir instrucciones usando distancia, dirección y giros.

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Pedirle a los niños que sigan las instrucciones que se le van dando:
   Girar en sentido de las agujas del reloj
   Girar en sentido contrario al de las agujas del reloj
   Caminar tres pasos hacia delante y dar un medio giro en sentido de las agujas del reloj
   Caminar 3 pasos hacia delante
   Al terminar las instrucciones preguntar en que punto quedo con respecto al punto de partida.

2) Entregar a los niños el problema.

3) Preguntar a los niños si tienen algún problema en cuanto a girar en sentido contrario o en el mismo sentido de las agujas del reloj.

4) Socializar el problema.

5) Escoger otra figura y escribir las instrucciones para que los niños “caminen sobre ella”.

6) Pedir a los niños que se formen en parejas, uno juegue al vendado y otro sea el que da las instrucciones que surgieron en el paso anterior.

**Extensión al problema**

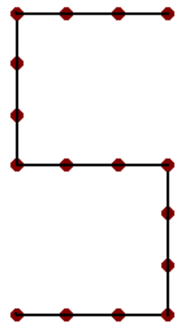
¿Podrá Julián caminar formando una S?

**Solución**

Carlos caminará formando un cuadrado, cuya longitud de cada uno de los lados es de 3 pasos.

**Solución de la extensión**

Para que Julián logre caminar formando una S, como la que se muestra continuación:



deberá seguir las siguientes instrucciones:

Caminar 3 pasos hacia atrás y girar 90º en sentido antihorario

Caminar 3 pasos hacia abajo y girar 90º en sentido antihorario

Caminar 3 pasos hacia adelante y girar 90º en sentido horario

Caminar 3 pasos hacia abajo y girar 90º en sentido horario

Por último caminar tres pasos hacia atrás.

**Decoremos el papel**

Usar la media flecha que se muestra arriba, para hacer su propio papel de decorar. Dibujar en una hoja varias de las medias flechas (diferentes posiciones y diferentes direcciones) formando un patrón repetitivo. ¿Cuántos patrones diferentes pueden hacer?

**¿Sobre qué es el problema?**

Hay gran cantidad de temas relacionados con las matemáticas en muchos lugares, en la naturaleza, en una hoja y las paredes de los salones no son la excepción. Realizar este problema sirve para explorar lo referente a las reflexiones, traslaciones y rotaciones. Produciendo sus propios dibujos, los niños tendrán la oportunidad para explorar todas las transformaciones básicas del plano.

Hay tres transformaciones:
Traslación (o cambio), rotación (o giro) y reflexión.

**Objetivo**

Crear y hablar sobre patrones geométricos los cuales se repiten, o los cuales tienen simetría rotacional o simetría de reflexión

**Recursos**

Varios recortes (preferiblemente que sean por lo menos de dos colores diferentes) con la forma de la flecha dada en el dibujo

Hojas para ubicar los dibujos que resulten.

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Crear un patrón repetitivo usando transformaciones geométricas (rotación, reflexión y traslación).

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Empezar mostrando una posible solución al problema. Discutir la simetría que se presenta en la solución.

2) Entregarles el problema.

3) Dejar que los niños investiguen el problema en pequeños grupos, dibujando medias flechas (máximo 8 por patrón). Recordar que ellos deben colocar en la hoja, las flechas de tal forma que halla un patrón que se repita infinitamente.

4) Preguntar a los niños sobre el patrón que tomaron como referencia. Se sugiere tener en cuenta las siguientes preguntas:
   ¿Cómo crearon el patrón?
   ¿Cómo usaron la reflexión en su patrón?
   ¿Rotaron la figura?
   ¿Tuvieron que cambiar la figura?
   Es importante que los niños indiquen en el trabajo que desarrollaron, donde se hace referencia a las respuestas que den a cada una de las preguntas anteriores.

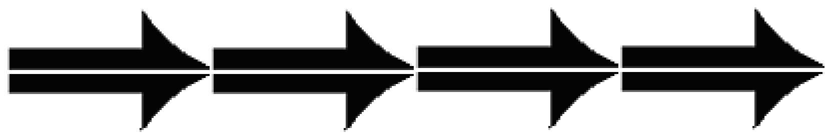
5) Socializar todos los patrones encontrados. ¿Se encontraron todos? ¿Cómo hace para saberlo?

**Solución**

Hay 7 maneras diferentes para decorar el papel. La lista de ellos se presenta a continuación:

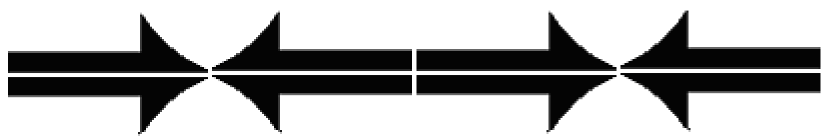
1

2



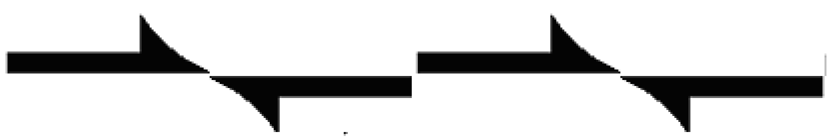
3

4



5

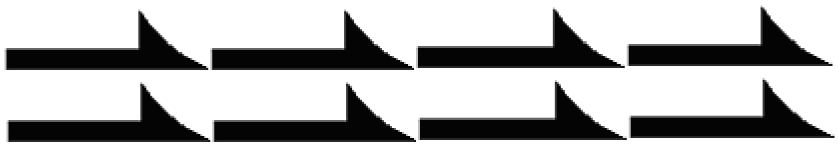
6



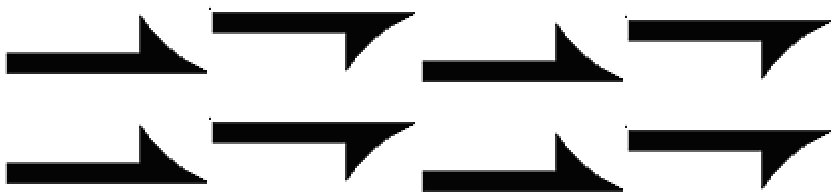
7

***Nota:*** posibles patrones tales como:

8



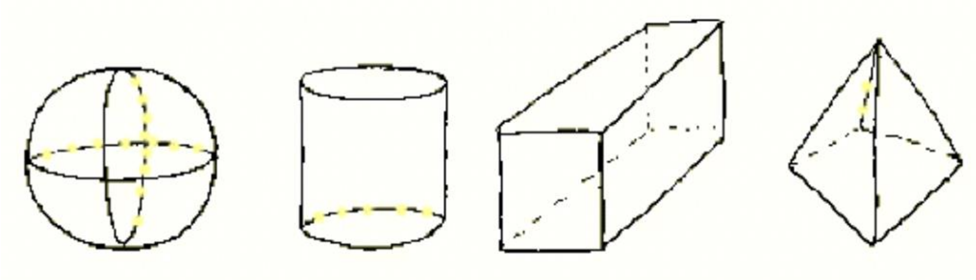
9



tienen la misma simetría que algunos de los 7 listados anteriormente. Por ejemplo: el patrón referenciado en 8 es similar a 1 y el patrón referenciado en 9 es similar al 5.

**¿Quién esta diciendo la verdad?**

Diego, Wilson, July y Alexandra miran detenidamente las siguientes figuras:



Diego dice: ¡Oigan todos! La primera figura es diferente a todas los demás

July dice: No Diego, la segunda figura es diferente.

Wilson dice: No, la tercera figura es diferente de todas las demás

Por último Alexandra dice: ¡Todos están equivocados! Claramente se ve que la figura diferente de todas la pirámide.

¿Quién esta diciendo realmente la verdad? ¿Por qué?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema pretende que los estudiantes exploren las características básicas de las figuras de 3 dimensiones. Estas características incluyen su simetría y color. Es importante este tipo de problemas para los niños ya que ellos van a profundizar en las propiedades y las pueden utilizar posteriormente.

Los niños pueden dar varias respuestas a este problema. Es probable que resulten respuestas que no se presenten en la solución que aquí se da. Es una oportunidad para que el niño utilice su creatividad. Cualquier pregunta correcta debe ser aceptada, no importa lo extraña que sea.

Es importante cerciorarse de que los niños nombren los objetos correctamente cuando estén trabajando el problema.

**Objetivo**

Hacer, nombrar y describir en su propio lenguaje y el lenguaje geométrico todas las formas y objetos

**Recursos**

Bastantes esferas, cilindros, cubos y pirámides de base cuadrada para que los niños trabajen con ellos. Es preferible que las figuras que se les entreguen sean de diferentes colores.

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Listar un número de propiedades que distinguen los sólidos de 3 dimensiones dados en el problema.

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Mostrar a los niños los cuatro objetos del problema. (Los objetos pueden hacerse junto con los niños previamente). Tomar la esfera y preguntarles: ¿Quién sabe qué es esto? ¿Qué puede usted decirme sobre este objeto?

2) Repetir el paso anterior con las otras tres figuras.

3) Plantearles a los niños el problema para que trabajen en grupo o individualmente.

4) Preguntarles a los niños lo que piensan del problema, tomar algunas de las respuestas que obtuvieron. Buscar para cada objeto, diferentes respuestas.

5) Debido a que los niños pueden resolver este problema rápidamente, se sugiere desarrollar la extensión propuesta para este problema.

6) Permitir que algunos niños comenten lo que desarrollaron. Sugerirles que una buena forma para tener toda la información organizada es ubicándola en una tabla, la cual se puede hacer en una hoja de papel, una vez hecho esto colocar la hoja en alguna pared del salón para que ellos posteriormente puedan escribir en ella las diferentes propiedades que identificaron en cada una de las figuras.

7) Discutir el paso anterior con los niños.

**Extensión**

Pedir a los niños que encuentren otros objetos de 3 dimensiones en el salón de clases. Una vez hecho esto, pedirles que encuentren las diferencias que se tienen entre ellas y las diferencias que hay con las cuatro figuras planteadas en el problema original.

**Solución**

Son diferentes las respuestas que se le pueden dar a este problema, aquí se presenta una de las posibles soluciones:

Cada uno de los niños está en lo correcto. Diego está en lo correcto porque la esfera rodará no importa cómo se la coloque en la tierra. July está en lo correcto porque el cilindro es el único que tiene dos caras planas y dos curvadas. Wilson está en lo correcto porque la caja es el único objeto que tiene seis caras. Alexandra está en lo correcto porque la pirámide es la única que tiene cinco caras.

Debe preguntar a los niños las diferentes justificaciones por las cuales cada una de las figuras es diferente. Esta información puede escribirse en una tabla como la siguiente:

| **Esfera** | **Cilindro** | **Cubo (caja)** | **Pirámide cuadrada** |
|---|---|---|---|
| Rueda no importando la posición en que la coloque | Tiene dos caras circulares | Tiene 6 caras | Tiene 5 caras |
| Cualquier diámetro es un eje de simetría rotacional | Tiene dos bordes pero no vértices | Tiene 4 caras rectangulares | Tiene 4 caras triangulares |
| Puede jugar el fútbol con ella | Cualquier sección transversal paralela a una cara es un círculo | Cualquier sección transversal paralela a una cara rectangular es un rectángulo | Tiene un vértice donde las caras se unen |
| … | ... | Tiene 12 bordes | Tiene 8 bordes |
| … | … | Tiene 8 vértices | … |

A esta tabla se le pueden adicionar las diversas características de los objetos encontrados en la extensión.

## 7.3. PROBLEMAS NIVEL 3

**El tesoro del capitán**

El Capitán Garfio había enterrado su tesoro en un lugar secreto, pero le sucedió lo peor que le puede pasar a un pirata: ¡Perdió su mapa del tesoro! Pero todo no estaba perdido, los otros piratas que viajaban con él recordaban algunas cosas sobre la ubicación del tesoro.

Antes de que empezaran a hablar los otros piratas, el capitán Garfio exclamo: "recuerdo haber dibujado el mapa en forma de cuadrado, cinco cuadrados pequeños formando cada uno de los lados", dijo el capitán.

Luego de esto Pedro comentó: "había una fila de tres árboles ubicados desde el cuadrado (5,1) hacia el oeste" y continuó diciendo "usted colocó cada uno de ellos en diferentes cuadrados".

"¿No había cuatro rocas que iban desde el cuadrado (1,5) hacia el este? preguntó Carlos. "Pienso que usted colocó cada una de ellos en un cuadrado diferente".

"Ah, ¡ahora recuerdo!" gritó el capitán. "Enterré el tesoro en la mitad del camino entre la primera roca y el primer árbol."
¿Dónde está el tesoro?

**¿Sobre qué es el problema?**

Inicialmente este problema puede ayudar a los estudiantes para que dibujen e interpreten mapas, pero lo más importante de este tipo de problemas es que dan las bases para poder utilizar la geometría cartesiana, poder ubicarse en un plano cartesiano, aspectos que serán importantes en la escuela secundaria y en la universidad.

**Objetivos**

Dibujar e interpretar mapas a escala simple

**Recursos**

Grilla (por lo menos de 5 x 5)

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Seguir las instrucciones usando la grilla (en este caso representará el mapa) para poder ubicarse en diferentes posiciones.

**Sugerencias para la secuencia de aprendizaje**

1) Fije la escena para el problema. Esto podría hacerse mostrando una rejilla de 5x5 e indicándole a la clase que éste es el mapa que el pirata perdió y cuando él lo encontró no tenía ningún tipo de información.

2) Discutir los detalles que los piratas Pedro y Carlos sugirieron al Capitán. Es importante trabajar con los niños sobre las diferentes ubicaciones que le indicaron al capitán Garfio los otros piratas (norte, sur, este oeste).

3) Plantearle a los niños el problema.

4) Dar ideas para desarrollar el problema (posiblemente trabajar en equipo).

5) Mientras que los niños trabajan verificar que se puedan ubicar con habilidad en el mapa y que sepan manejar adecuadamente lo referente a norte, sur, este y oeste.

6) Esperar hasta que todos los niños hallan localizado el tesoro antes de compartir soluciones.

7) Socializar la forma como obtuvieron la ubicación del tesoro.

**Extensión del problema**

Pedir a los niños que escriban sus propias pistas para encontrar el tesoro. Esta nueva información puede darla a conocer a otros compañeros para que trabajen sobre este nuevo problema.

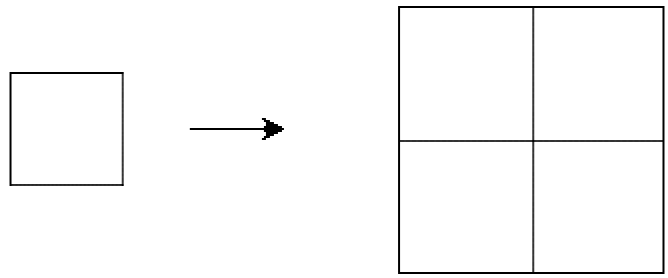
**Solución**

Se coloca toda la información del mapa del tesoro en la siguiente tabla:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | p |
| | | | | p |
| | |  | | p |
| | | | | p |
|  |  |  | | |

El cuadrado que tiene el tesoro está en la posición (3,3).

**Copias de Figuras**



Simón acaba de descubrir un **copycats**. Un cuadrado es un copycat porque se pueden colocar cuatro cuadrados juntos y de esta manera formar otro cuadrado.

Simón ha quedado maravillado, él piensa que los triángulos y los círculos son también copycats. ¿Qué piensa usted?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema es una oportunidad para incentivar a los niños que investiguen la forma de obtener una figura conocida por ellos, mediante figuras de igual forma. Les ayudará a explorar las figuras básicas de una manera creativa.

La primera extensión es una manera para que ellos puedan unir su conocimiento de geometría con los patrones. La segunda extensión es también útil para que los niños exploren sus habilidades de pensar. Por ejemplo, en la extensión, tienen la libertad para crear cualquier forma que vean ellos que es un copycats.

**Objetivos**

Describir las características de objetos de 2 y 3 dimensiones, usando el lenguaje de geometría.

Diseñar y hacer patrones que impliquen traslación, reflexión y rotación

**Recursos**

Recortes de papel en forma de cuadrados, círculos y triángulos

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Usar cuadrados y rectángulos para formar figuras de forma similar a las que tienen inicialmente.
- Describir las propiedades de las figuras que obtengan y de las entregadas.

**Sugerencias para la secuencia de aprendizaje**

1) Preguntar : *¿Qué significa un copycats?*

2) Discutir con los estudiantes la definición del copycats y plantearla de tal forma que se pueda aplicar a este problema.

3) Dar a los niños (en parejas) un triángulo equilátero y pedir que descubran si es un copycat. Discuta las características de un triángulo equilátero (3 lados iguales, 3 ángulos iguales)

4) Realizarles la siguiente pregunta: ¿Son todos los triángulos copycats? Para resolver esta pregunta los niños deberán hacer sus propios triángulos y ver si es un copycat.

5) Realizarles otras preguntas: *¿Qué tipo de triángulo está utilizando?* (triángulo, escaleno, isósceles, equiláteros)
*Describa el triángulo que usted está utilizando*
*¿Son los círculos copycats? ¿Por qué usted piensa eso?*

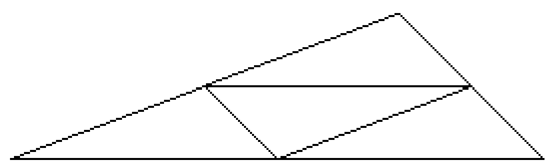
6) Discutir los resultados obtenidos.

**Extensión del problema**

Simón habla con Andrés sobre sus copycats. Andrés notó que Simón necesitó cuatro cuadrados para hacer un cuadrado más grande y cuatro triángulos para hacer un triángulo más grande. ¿Podría usted hacer un cuadrado con cualquier número de cuadrados? ¿Cuántos cuadrados puede colocar juntos de tal forma que se forme otro cuadrado? ¿Se esta generando algún patrón? ¿Cuáles otras figuras son copycats?

**Solución**

Todos los triángulos pueden ser tomados como copycats. Esto se puede mostrar usando cuatro triángulos como en el cuadrado. En la siguiente figura se muestra una posible solución:

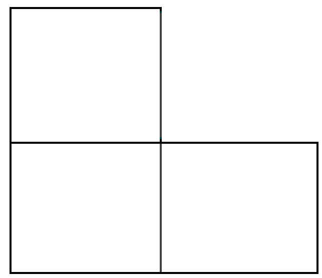


Por otra parte, los círculos no son copycats. El problema con los círculos es que cuando usted pone dos de ellos juntos, dejan espacios que no se pueden llenar con otro círculo. De ahí que dos círculos no forman un nuevo círculo, se necesitaría tener por lo menos tres. Pero tres círculos puestos juntos igual que dos, dejan espacios que no se pueden llenar con otro círculo. Entonces no hay manera de colocar varios círculos para que formen un nuevo círculo.

**Solución a las extensiones**

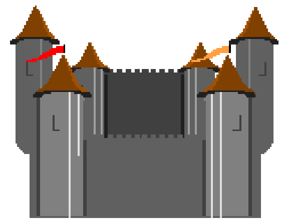
***Extensión 1*:** Resulta que 4, 9, 16, 25, de hecho, cualquier número cuadrado de cuadrados pueden ser utilizados. ¿Por qué no puede un número no-cuadrado ser utilizado? ¿Esto es igual para los triángulos o también se deben utilizar números cuadrados de triángulo?

***Extensión 2*:** El dibujo en forma de *L* es un copycat. Para comprobar esto se puede verificar que todos los bordes forman una *L*. Para representarlo se puede utiliza la siguiente figura:

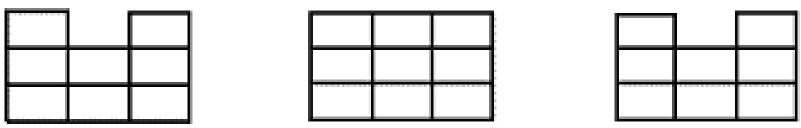


## 7.4. PROBLEMAS NIVEL 4

**El castillo**



Raúl ha diseñado los planos para un castillo los cuales tienen el frente, el techo y las vistas laterales del castillo:



Construya un castillo para el diseño de Raúl usando cubos.
¿Cuál es el mayor número de cubos que puede utilizar en la construcción de un castillo utilizando los planos de Raúl?
¿Cuál es el menor número de cubos que puede utilizar en la construcción de un castillo utilizando los planos de Raúl?
¿Puede construir un castillo simétrico que sea diferente de cualesquiera de los que usted ha construido hasta ahora? ¿Cuántos castillos simétricos puede construir siguiendo las especificaciones de Raúl?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema explora las relaciones entre formas de 2 y 3 dimensiones y ayuda a visualizar las figuras de 3 dimensiones a partir de las representaciones de 2 dimensiones. Esto demuestra que diversos objetos de tres dimensiones se pueden representar por el mismo sistema de los objetos de 2 dimensiones. El problema también incentiva a investigar la simetría de objetos.

**Objetivos**

Hacer un modelo de un objeto sólido de las vistas que representan el techo, el frente y los lados laterales

Describir la simetría de reflexión o rotación de una o una figura u objeto.

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Construir formas de tres dimensiones a partir de dibujos de 2 dimensiones
- Describir las simetrías de figuras de 3 dimensiones
- Representar figuras de 3 dimensiones

**Recursos**

Cubos pequeños

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Iniciar el problema, cree un escenario en el cual los niños puedan construir un castillo a partir de los planos. Asegurarse de que los niños entienden cómo utilizar los planos (de dos dimensiones).

2) Entregar los cubos a los niños para que inicien su trabajo

3) Mientras los niños trabajan, realizarles algunas preguntas que permitan centrar su pensamiento en los modelos que están construyendo:

Identifique la parte del frente, techo y el lado, en el castillo que realizo.

¿Hay varias formas de ubicar los bloques para conseguir un mismo castillo?

¿Se pueden ubicar los bloques de otra manera de tal forma que se pueda diseñar un castillo usando los planos?

¿Cómo sabe si ha encontrado todas las posibilidades?

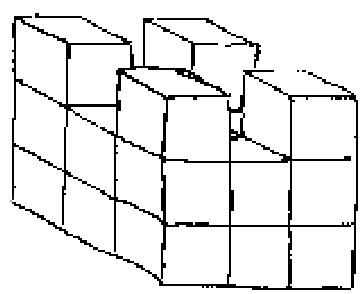
¿Es su castillo simétrico? Descríbalo.

4) Solicitar las soluciones
5) Si está utilizando este problema para reforzar los conocimientos en simetría puede solicitar a los niños que registren las simetrías que observan en el castillo o que las describan.

**Extensión**
1) ¿Es posible diseñar un único castillo a partir de ciertas vistas dadas para elaborar el plano?

2) Sobre una base de tres cubos por tres cubos, diseñar su propia construcción usando las vistas del frente, el techo y las vistas laterales del castillo. Hacer algunas preguntas sobre el diseño realizado por los niños: ¿Qué diseño le dará la diferencia más grande entre el número mayor y el número menor de cubos que usted puede utilizar para construir el castillo?.

**Solución**
Se muestra a continuación un posible castillo que se podría dibujar utilizando el diseño de Raúl:

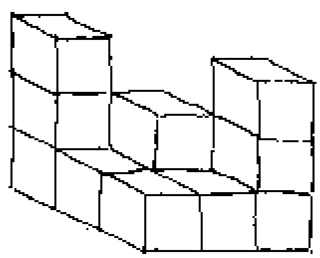


Este castillo se observa exactamente igual al observar sobre cada una de las vistas laterales. Tiene 22 bloques.

22 cubos es el mayor número de cubos que se pueden utilizar para el diseño de Raúl. Si se adiciona otro cubo, se pueden presentar dos situaciones: habrá tres bloques consecutivos lo cual produce que una de las vistas laterales tomará la

forma del techo, si se coloca el cubo en el centro, todas las vistas laterales se observaran como el techo, situaciones que no son correctas. De ahí que el número máximo de cubos es 22.

Encontrar un castillo que contenga el número más pequeño de cubos es un poco más complicado. Para comenzar, se asume que la base sobre la cual se construye el castillo tiene 9 bloques. Dado esto, el castillo con menor número de cubos se muestra a continuación:



Se asume que al observar el castillo en cada uno de los frentes se imagine como si los cubos que están sobre la base se desplazaran hacia el frente que se esta observando.

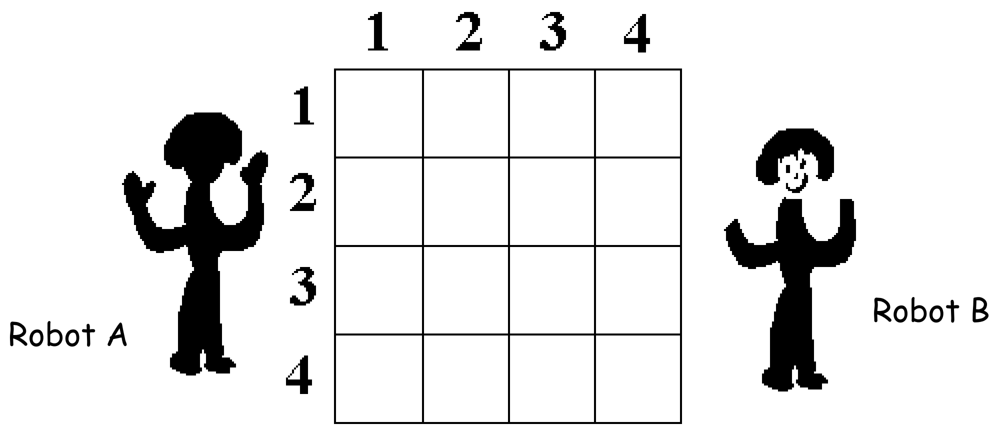
Este castillo tiene 14 cubos, ¿Es posible construir un castillo con un número menor de cubos?

Es posible construir castillos simétricos. Se puede adicionar al castillo que se muestra inmediatamente arriba, las dos esquinas que le faltan y se obtiene otro castillo. Si se agrega una única esquina es posible obtener otro castillo. Hay diferentes posibilidades. ¿Cuántos castillos puede encontrar?

**Solución de la extensión**

Para hacer planos únicos se necesita adicionar otra vista del castillo. Adicionar una vista podría ayudar en algunos casos. Sin embargo, al observar la vista de arriba de los dos castillos que se dibujaron anteriormente, se observa que son iguales, entonces no siempre dar 4 vistas garantiza que se pueda formar un único castillo. Sin embargo, se puede crear un castillo único si se tiene que una de las vistas es en forma de cruz.

**Robots**




Los robots pueden moverse alrededor del tablero de 4 x 4. Ellos se pueden desplazar por la grilla, a razón de un cuadrado en un segundo. Inicia el Robot A, en la posición (1,1) y se le da la instrucción de que se mueva (cuadrado por cuadrado) formando un cuadrado de longitud 3, alrededor de la posición (2,2).

Ahora continúa el Robot B, en la posición (4,4) y se le da la instrucción de que camine formando un cuadrado de longitud 3, alrededor de la posición (3,3).

Si los robots A y B comienzan al mismo tiempo desde sus respectivas posiciones iniciales, ¿Cuáles cuadrados pueden ser ocupados por ellos al mismo tiempo?

**¿Sobre qué es el problema?**

La idea principal de este problema es explorar las diferentes formas de moverse en una grilla y utilizarlas en una situación práctica.

**Objetivos alcanzados**

Especificar la localización usando las referencias en una grilla

**Recursos**

Papel en la cual se haga la grilla.

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Seguir las referencias en una grilla

- Trabajar sistemáticamente

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Enseñarle a los estudiantes el escenario del sistema.

2) Plantear el problema a los niños para que trabajen en parejas.

3) Mientras los niños trabajan, verificar que están haciendo uso adecuado de las grillas. Para ello se puede realizar la siguiente pregunta:
*¿En que posición con respecto a la rejilla se encuentra el robot en este momento?*

4) Socializar las respuestas.

**Extensión del problema**

Usar una grilla de 5 x 5 y cree su propio problema para el desplazamiento de los robots. Escribirla para que otros puedan resolverlo.

**Solución al problema**

Hay dos caminos posibles por los cuales el Robot A, se puede desplazar, el primer camino se realiza siguiendo las posiciones: (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1), (2,1) y llega al punto de partida (1,1). Se describirá el segundo camino más adelante

De manera similar, para el Robot B, hay dos caminos por los cuales se puede desplazar. El primer camino esta formado por las siguientes posiciones: (4,4), (4,3), (4,2), (3,2), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4) y regresa al punto de partida (4,4). Si se comparan las diferentes posiciones que recorren los dos robots, siguiendo cada uno los caminos descritos anteriormente, se verá que los robots no se encontrarán en ningún punto caminando los dos al mismo tiempo.

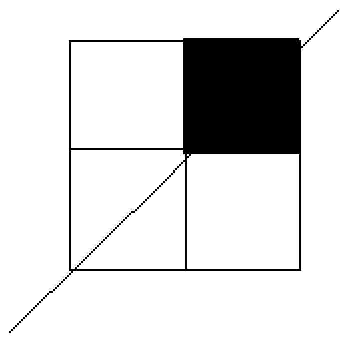
Si el Robot B, camina por el siguiente camino (4,4), (3,4), (2,4), (2,3), (2,2), (3,2), (4,2), (4,3) y de nuevo al punto de partida (4,4) y el Robot A sigue el camino descrito anteriormente, en este caso los dos robots se encontraran dos veces en su recorrido, estos robots se encontraran en las posiciones (2,3) y (3,2).

Si el Robot A sigue el camino en sentido contrario a las agujas del reloj y el Robot B sigue su camino en el sentido de las agujas del reloj, entonces nuevamente estos dos robots se encontraran en las posiciones (3,2) y (2,3). Si el Robot B sigue el camino en sentido contrario al de las agujas del reloj y el Robot A en este mismo sentido estos dos robots no se encontrarán nunca.

**Cesar, el albañil que quiebra baldosas**

La cocina de la casa de Natalia tiene un pequeño defecto y es que una baldosa cuadrada de un metro por un metro esta dañada, para solucionar su problema decide contratar a Cesar quién es un muy buen albañil pero un poco descuidado. Resulta que mientras colocaba una nueva baldosa para arreglar el defecto en la cocina, se le quiebra.

Cesar no puede remplazar la baldosa pero encontró cuatro baldosas cuadradas que podrían ocupar el lugar de la grande. Él colocó perfectamente tres de esas baldosas, pero cuando estaba colocando la cuarta se le quebró. Las tres baldosas que coloco formaron un patrón de simetría tomando como eje de simetría la diagonal del cuadrado más grande. Esto se visualiza en la siguiente figura:



Cesar no puede remplazar las nuevas baldosas pequeñas pero encontró cuatro baldosas que podrían ocupar el lugar de la nueva que se quebró. Colocó perfectamente tres de esas baldosas, pero cuando estaba colocando la cuarta se le quebró. ¿De cuántas maneras podrá colocar Cesar la cuarta baldosa de tal forma que el piso siga teniendo simetría de reflexión?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema se ocupa de las diversas maneras en las que se pueden ubicar los azulejos de tal forma que siga habiendo simetría de reflexión y la extensión involucra la simetría rotacional.

**Objetivo**

Describir la simetría de rotación y la simetría de reflexión de un objeto o una figura.

**Recursos**

Algunas piezas cuadradas

Tijeras

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Reorganizar e inventar patrones con la simetría de reflexión

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Preguntar a los niños si han estado en algún salón el cual este embaldosado. *¿Cómo creen ustedes que se colocan estas baldosas? ¿Qué clases de simetría se presenta?*

2) Hábleles sobre Cesar. Sugerirles que trabajen en grupo para solucionar el problema.

3) Debido a que el trabajo se va a hacer en grupo es posible que acaben muy rápido, en caso de que esto suceda entrégueles la extensión del problema para que trabajen en ella.

4) Pedir que uno de los grupos socialice la solución que le dio al problema, cerciorándose de que cada uno de los niños del grupo entendió claramente la solución

5) Si hay algún grupo que terminó de trabajar la extensión, solicite que de a conocer a sus compañeros la solución. En caso de que no se halla trabajado la extensión dejarla como trabajo para la casa.

**Extensión**

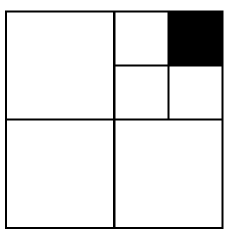
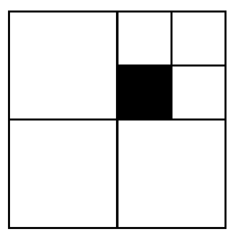
Ahora Cesar, fue a trabajar a la casa de Luis, un amigo de Natalia, le sucedió algo similar a lo que paso en la casa de Natalia, pero la diferencia es que cuando se le rompió la primera baldosa grande, Cesar utilizó 9 baldosas para cubrir el mismo espacio.  Después de poner 5 de estas baldosas notó que formaron una figura que tenía simetría de rotación  ¿Cómo se veía el piso?

De nuevo, Cesar rompió las cuatro baldosas finales así que él tuvo que remplazar cada una por otras 9 baldosas.  De nuevo, volvió a romper 4 de estas baldosas más pequeñas.  ¿Puede él colocar estos azulejos  (junto con las 5 más grandes) para formar un patrón que tenga simetría rotacional?  ¿Puede él colocarlas de tal forma que se presente simetría de rotación y no simetría de reflexión?

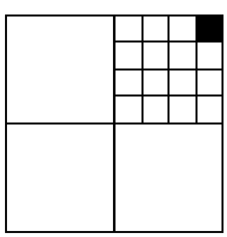
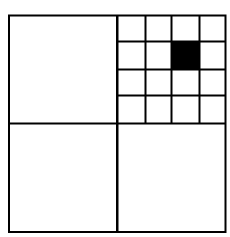
¿Si la respuesta a cualquiera de las preguntas anteriores es “si”, ¿de cuántas maneras pueden hacer esto? Si la respuesta es  “no”, entonces  ¿por qué no se puede hacer?

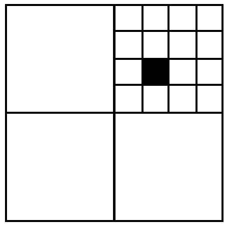
**Solución**

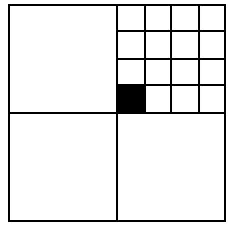
Hay dos formas para que se obtenga la simetría de reflexión, la primera vez que Cesar quiebra la baldosa.  Esto se muestra a continuación:

En la situación que se planteo después, se presentan cuatro posibilidades:

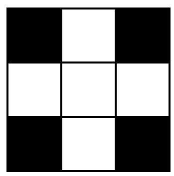



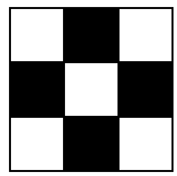




**Solución de la extensión**

Hay dos maneras en las cuales el piso pueda tener simetría rotacional. En ambos casos la simetría se da sobre el centro de la figura:



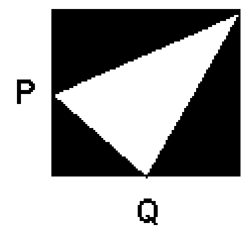


Hay varios caminos para responder a las preguntas finales.

## 7.5. PROBLEMAS NIVEL 5

**La bandera en el barco de Pedro**

Pedro hizo una bandera a su barco. Para ello, tomo un cuadrado negro. Colocó en el cuadrado un pedazo de papel blanco en forma triangular. El bosquejo de la bandera se muestra a continuación




Si P y Q son los puntos medios de dos lados consecutivos del cuadrado original, ¿qué fracción del cuadrado ocupa el triángulo?

**¿Sobre qué es el problema?**

Para encontrar el área del triángulo que se muestra en la bandera, es necesario dividir el cuadrado original en diversos rectángulos y cuadrados más pequeños. Ésta es la estrategia principal al solucionar problemas en los cuales se requiera encontrar áreas de figuras complicadas.

**Objetivos**

Usar las propiedades de ángulos, de líneas paralelas y explicar el razonamiento implicado.

Aplicar la simetría y las propiedades de los ángulos en los polígonos.

Encontrar fracciones equivalentes a una fracción dada.

**Recursos**

Papel negro

Papel Blanco

Tijeras

Figuras de banderas de diferentes países

**Resultados específicos de aprendizaje**

El estudiante estará en capacidad de :

- Aplicar las propiedades de ángulos de rectángulos, cuadrados y triángulos
- Usar fracciones para expresar las relaciones entre las áreas de rectángulos, cuadrados y triángulos.

**Sugerencias para la secuencia de aprendizaje**

1) Introduzca el problema mostrándoles algunas banderas de diferentes países. Pedir a los estudiantes que identifiquen figuras geométricas que se encuentran en ellas y que estimen las relaciones (en términos de fracción) entre las diversas partes de las banderas.

2) Plantear el problema a la clase.

3) Pida a los estudiantes que utilicen regla para dibujar la bandera que se les presento en el problema.

4) Mientras están trabajando en el problema, hacerles algunas preguntas que logren centrar su pensamiento en el trabajo que están desarrollando:
*¿Qué figuras geométricas identifica en su construcción?*
*¿Qué tipo de triángulo es él de la bandera? ¿Cómo lo sabe?*

5) Una vez que hagan la construcción, realizarles preguntas relacionadas con el área de las figuras:
*¿Cómo encontraría el área de una figura si no le han dado ninguna medida?*
*¿Qué puede decir sobre la línea PB? (lado del triángulo BPQ, diagonal del rectángulo ABRP). ¿Qué puede decir sobre el triángulo PDQ? ¿Cuántos triángulos de este tamaño puede encontrar en el cuadrado anterior?*

*¿Por qué piensa que se da esto?*

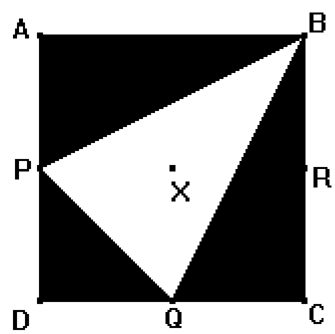
6) Socializar las soluciones

**Extensión**

Suponga que ahora Pedro remplaza el cuadrado original por un rectángulo. ¿La fracción que ocupa el triángulo en el rectángulo es de 3/8 ?

¿Puede hacer esto usando alguna otra figura?

**Solución**




En el rectángulo ABRP, PB es una diagonal. El área del triangulo APB es igual al área del triángulo PBR. Además el área del rectángulo ABPR es 1/2 del área del cuadrado ABCD, entonces el área del triángulo APB es 1/4 del área del cuadrado ABCD.

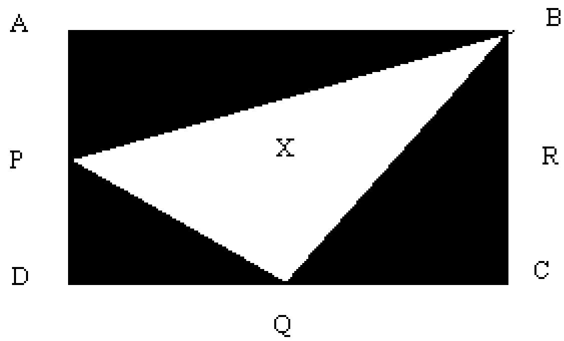
Similarmente el área del triángulo QBC es 1/4 del área del cuadrado. Ahora el área del triángulo PDQ es 1/2 del área del cuadrado PXQD (ubicando X en el punto de cruce de las diagonales del cuadrado ABDC). Este cuadrado es 1/4 del cuadrado original. De ahí que el área del triángulo PDQ es 1/8 del área del cuadrado.

Entonces el área del triángulo blanco es:

1 - 1/4 - 1/4 - 1/8 = 1 - 5/8 = 3/8 del cuadrado original

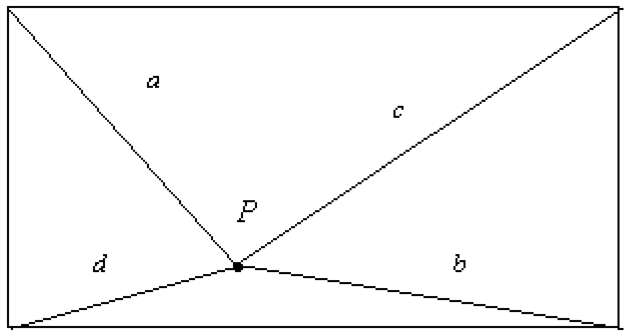
**Solución de la extensión**

Los mismos cálculos muestran que el área del triángulo es de 3/8 con respecto al área del rectángulo. Aquí P y Q son los puntos medios de dos lados consecutivos.



**Ayudemos a encontrar la posición del helicóptero**

Juan el piloto, esta tratando de encontrar un método que le permita localizar la posición de su helicóptero dentro de una región rectangular.




En primer lugar intento encontrar la respuesta dibujando un rectángulo de 10 centímetros de alto y 13 centímetros de ancho, luego midió a, b, c y d para diferentes puntos P dentro del rectángulo. Empezó a llenar la tabla como se muestra a continuación:

| # | a | b | c | d | $a^2$ | $b^2$ | $c^2$ | $d^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9.43 | 8.25 | 11.31 | 5.39 | 89 | 68 | 128 | 29 |
| 2 | 7.81 | 8.60 | 8.60 | 7.81 | 61 | 74 | 74 | 61 |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |

Ayúdale a Juan a completar la tabla y buscar la relación que existe entre a, b, c y d.

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema tiene tres aspectos que son muy importantes para resaltar. Primero da a los estudiantes una oportunidad para construir y medir ciertos objetos geométricos. En segundo lugar, les permite encontrar un patrón dada una situación geométrica. En tercer lugar les da la oportunidad de construir pruebas usando resultados bien conocidos. (La extensión a este problema les da la oportunidad de buscar una generalización del problema).

Encontrar patrones es una parte muy importante en las matemáticas y para los matemáticos, ellos tratan de buscar patrones en todas las situaciones posibles. Saber que esto es importante y practicarlo, proporciona una base sólida para todas las matemáticas futuras.

**Objetivos**

Encontrar la medida de un lado desconocido en un triángulo recto, usando ya sea la medición directa, el Teorema de Pitágoras, o utilizando funciones trigonométricas adecuadas.

Construir ángulos rectos, líneas paralelas y perpendiculares, círculos, polígonos simples, puntos medios, mediatrices, medianas, y alturas.

**Recursos**

Copia del problema enunciado anteriormente.

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Encontrar relaciones entre diferentes números que se encuentran en una tabla.
- Utilizar el Teorema de Pitágoras en una forma algebraica general.
- Tener precisión en la toma de medidas de un dibujo hecho a escala.

**Sugerencias para la secuencia de aprendizaje**

1) Este problema puede ser utilizado para que los estudiantes formen parte directa de él. Para ello, cuatro estudiantes se ubican en las esquinas (al unir estas esquinas se formaría un rectángulo) y otro es el helicóptero. Mientras que la persona que esta haciendo de helicóptero se desplaza en diferentes posiciones se les pide a los estudiantes que midan los diferentes valores que toman a, b, c y d. Luego solicitarles que hagan una interpretación de los diferentes valores que se han dado con estas mediadas.

2) Discutir con los estudiantes sobre la información que se puede utilizar para permitir que Juan encuentre fácilmente su posición dentro de la región rectangular. Se pueden plantear las siguientes preguntas:
   *¿Qué figuras geométricas identifica?*
   *¿Cuándo aumenta el valor de d qué sucede con a? ¿b? ¿c? ¿Siempre sucede lo mismo?*
   *¿Por qué se han incluido los valores de los cuadrados de los lados en la tabla?*

3) Dejar a los estudiantes que completen la tabla, usando las medidas que se tomaron en el punto 1 y las medidas que se tomen del dibujo a escala.

4) Animar a los estudiantes para que exploren las diferentes relaciones que hay entre los valores de las medidas que tomaron.

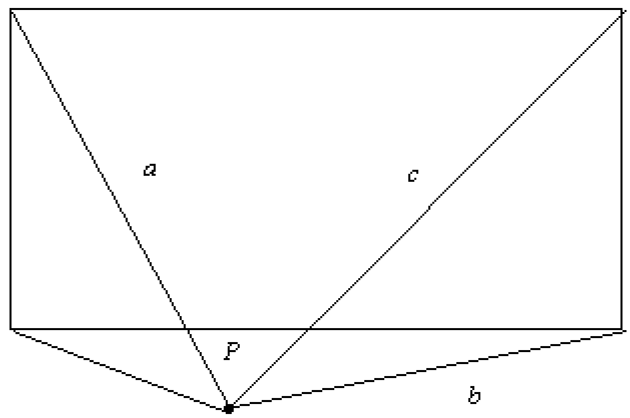
5) Una vez que se haya encontrado la relación $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ pida que los estudiantes verifiquen esto con sus datos

6) Solicitar a los estudiantes para que presenten sus propias soluciones. Las soluciones que presente el estudiante le proporcionarán probablemente a

usted un buen punto de partida para que pueda compartir con los estudiantes una prueba más formal de teorema de Pitágoras.

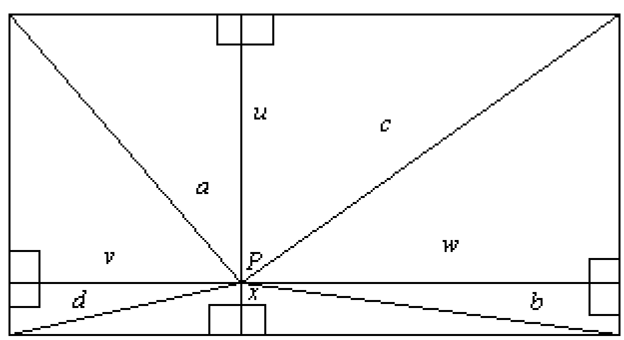
**Extensión**

Si el helicóptero se encuentra fuera del área del rectángulo (ver figura abajo) ¿Que relación se produce ahora?




**Solución**

La relación entre a, b, c y d es $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.




Las relaciones pueden establecerse usando el Teorema de Pitágoras. Del dibujo anterior se tiene que:

$a^2 = u^2 + v^2$

$c^2=u^2+w^2$

$b^2=x^2+w^2$

$d^2=v^2+x^2$

Así,

$a^2+b^2=(u^2+v^2)+(x^2+w^2)$

$=u^2+x^2+v^2+w^2$

$=(u^2+ w^2) + (x^2+v^2)$

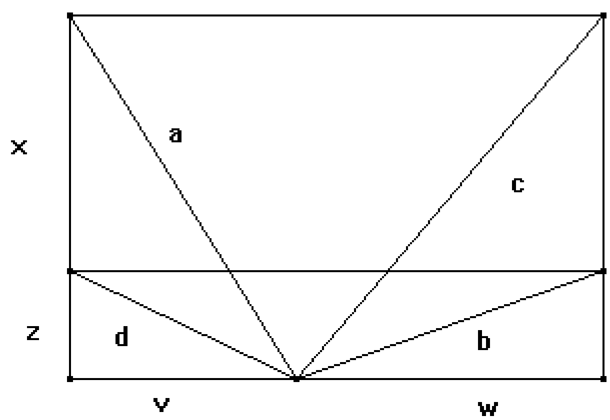
$= c^2 + d^2$.

Es importante notar que la hipotenusa del triángulo cuyos dos lados miden *a* y *b* es igual a la hipotenusa del triángulo cuyos dos lados miden *c* y *d*. Esta igualdad se presenta ya que estas hipotenusas son las diagonales de un rectángulo.

**Solución de la extensión**

Sorprendentemente, se produce la misma relación

De nuevo, por el Teorema de Pitágoras:




$a^2 = (x + z)^2 + v^2$,

$b^2 = w^2 + z^2$

$c^2 = w^2 + (x + z)^2$

$d^2 = v^2 + z^2$

$a^2 + b^2 = (x + z)^2 + v^2 + w^2 + z^2$

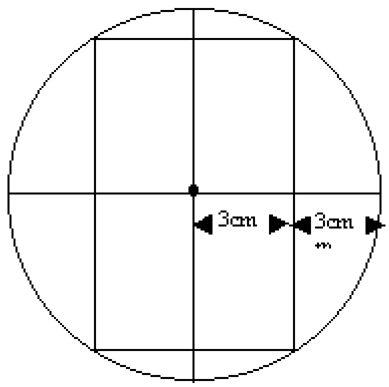
$= [(w^2 + (x + z)^2)] + [v^2 + z^2]$

$= c^2 + d^2$.

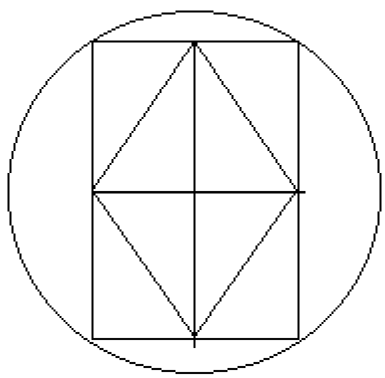
También para este caso, la hipotenusa del triángulo cuyos dos lados miden *a* y *b* es igual a la hipotenusa del triángulo cuyos dos lados miden *c* y *d*. Esta igualdad se presenta ya que estas hipotenusas son las diagonales del rectángulo.

**Anillos y diamantes**

Una compañía desea tener un nuevo logotipo. Martín el diseñador gráfico presenta una propuesta la cual esta basada en un anillo y un diamante. Lo construyo inscribiendo un rectángulo en un círculo según se muestra en la figura siguiente:




El diamante entonces se dibuja dentro del rectángulo como se muestra a continuación:



¿Puede Martín construir lo anterior usando solamente regla y compás?
¿Cuál es el área del diamante?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este es un problema geométrico, para solucionarlo se puede basar en la geometría. Además pueden validar los datos que obtengan empleando formulas geométricas con los datos obtenidos directamente

Para resolver este problema se pueden utilizar algunas cosas en la geometría que le pueden ayudar. Pero si todo esto falla, los estudiantes pueden apoyarse en la construcción y tomar las medidas de la longitud de los lados del rombo. Esto les sirve para obtener los resultados directamente.

Esta forma de resolver el problema puede ser un método aceptable pero no será exacto, por lo cual se debería emplear otro método que ayude a obtener resultados más precisos. Los diagramas pueden ser con frecuencia una gran ayuda para tener una idea de cómo funcionan las cosas.

**Objetivos**

Construir ángulos rectos, líneas paralelas y perpendiculares, círculos, polígonos simples, puntos medios, medianas, alturas y las bisectrices del ángulo.

Encontrar la medida de un lado desconocido en un triángulo recto, usando ya sea la medición directa, el Teorema de Pitágoras, o utilizando funciones trigonométricas adecuadas.

Utilizar las características de la simetría y de ángulo de polígonos para solucionar problemas prácticos.

**Recursos**

Regla

Compás

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar el área del rombo
- Usar regla y compás.

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Mostrar a los estudiantes las figuras planteadas en el problema y pedirles que las describan. Animarlos para que utilicen términos geométricos (rombo, etc.).
*¿Qué necesitaría usted para construir esto?*
*¿Qué empezaría a construir? ¿Y luego?*

2) Plantear el problema para que los estudiantes empiecen a trabajar.

3) Las preguntas que pueden ayudar para que los estudiantes inicien el problema son:
*¿Qué información tiene del problema?*
*¿Qué conocimiento matemático puede aplicar a este problema?*
*¿Qué puede decir sobre el radio del círculo?*

4) Mientras los estudiantes trabajen el problema, hacerles preguntas que los enfoque en la solución que están dando, se sugieren las siguientes:
*¿Qué necesita para determinar el área del rombo?*
*¿Qué puede decirme sobre la longitud del lado del rombo?*

5) Pida a los estudiantes que enumeren los pasos que llevaron a cabo para solucionar el problema, describiendo los más relevantes.

6 Solicitar varias de las medidas obtenidas, para posteriormente discutir con base en los datos encontrados por diferentes estudiantes.

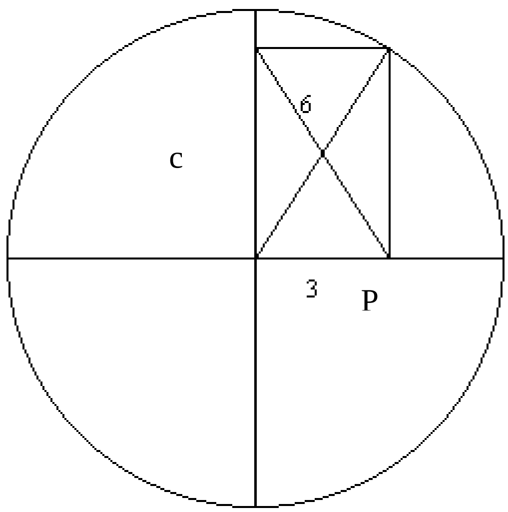
**Extensión**

Dentro del rombo puedes inscribir un círculo ¿Cuál es el área de este círculo?

**Solución**

Para graficar el rombo dentro del círculo, utilizando regla y compás se puede hacer de la siguiente manera:

A partir de una circunferencia de radio 6cm., se ubica el punto medio P de uno de sus radios (3cm de distancia del centro). En este punto se traza una perpendicular al radio, la cual cortará la circunferencia en 2 puntos. En el lado opuesto de P (ubicado a 6cm de P sobre el mismo diámetro de la circunferencia) se sigue el mismo procedimiento. Ahora se unen los 4 puntos que se han marcado sobre el círculo para hacer el rectángulo. Para finalizar, se unen los puntos que forman el rombo.




Para encontrar el área del rombo, lo más importante es notar que el valor de cada uno de los lados del rombo es igual a la longitud del radio y esto se debe a que tanto el radio como uno de sus lados son diagonales de un rectángulo (la medida de las diagonales de un rectángulo son iguales).

A partir de esta información, se encuentra el valor de *c*:

$c^2 = 6^2 - 3^2$

$c^2 = 27$

$c = 5.19$

Utilizando la fórmula para el área del rombo se tiene:

*área = (diagonal mayor * diagonal menor) /2*

De la información encontrada se tiene

*Diagonal mayor = 2* 5.19 = 10.38*

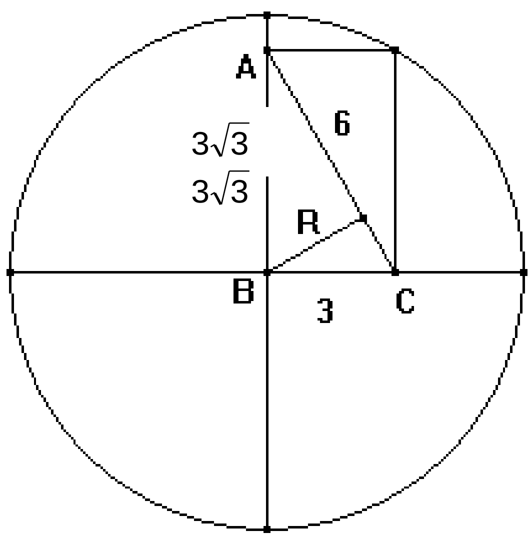
*Diagonal menor = 2*3 = 6*

Entonces,

*Área = (10.38 * 6 )/2 = 31.14cm*

**Solución de la extensión**

Para encontrar el área del círculo inscrito en el rombo, observar que el radio de este círculo es perpendicular al lado del rombo.




Del triángulo ABC, se tiene que el área esta dada por:

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3} \times 3}{2}$$

Por otro lado, también se pude tener el área de la siguiente manera:

$$A_2 = \frac{6 \times R}{2}$$

Como los valores de $A_1$ y $A_2$ son iguales entonces se tiene:

$$\frac{3\sqrt{3}\times 3}{2} = \frac{6\times R}{2}$$

Entonces,

$$R = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6cm$$

Entonces utilizando la fórmula para el área de la circunferencia, se tiene:

$$Area = \pi R^2 \approx (3.14)\times(2.6)^2 = 21.22cm^2$$

Aquí se presentó la forma más directa para encontrar las diferentes áreas de figuras geométricas, que es mediante el uso de las fórmulas; es muy importante tener en cuenta que el uso de estas fórmulas no es obligatorio, los estudiantes pueden obtener iguales resultados empleando otros métodos para encontrar estas áreas.

## 7.6. PROBLEMAS NIVEL 6

**Formando un cubo grande**

Roberto ha decidido formar un cubo grande a partir de 27 cubos pequeños que tiene. Luego de formar el cubo grande, lo pinta de color rojo, mientras pinta el cubo, se le presentan algunas dudas. Ayúdale a Roberto a resolver sus dudas contestando las siguientes preguntas:

Cuántos de los cubos pequeños originales tienen:

1) Tres caras pintadas de color rojo
2) Dos caras pintadas de color rojo
3) Una cara pintada de color rojo
4) Ninguna de sus caras pintadas de color rojo

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema es una oportunidad para que los estudiantes visualicen objetos de 3 dimensiones. Para ello se les puede sugerir que cierren los ojos e imaginen estos objetos, además es adecuado para este tipo de problema que los estudiantes puedan manipular los cubos. La capacidad geométrica en los niños se puede incrementar cuando ellos tienen la oportunidad de combinar la información que tienen sobre los objetos y lo que han percibido al emplear sus sentidos.

Los estudiantes para poder resolver este problema necesitarán saber, o durante el desarrollo del problema aprenderán a reconocer el número de caras, las esquinas y los bordes que tienen los cubos.

Este problema es una oportunidad para que los estudiantes trabajen con la fórmula de Polígonos de Euler. Para las figuras sólidas que tienen sus caras planas y sin agujeros, la fórmula de Euler relaciona el número de las esquinas (v), de los bordes (e) y de las caras (f) mediante la ecuación:

$$v - e + f = 2$$

**Objetivos**

Dibujar e interpretar las representaciones de 2 dimensiones a partir de objetos de 3 dimensiones.

Expresar cantidades como fracciones o porcentajes de un conjunto.

**Recursos**

Cubos pequeños de igual tamaño (para construir cada uno de los cubos grandes se necesitan 27 cubos pequeños).

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Aplicar las propiedades de las figuras de tres dimensiones para resolver un problema
- Visualizar objetos de tres dimensiones

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Introduzca el problema, antes de iniciar el juego es importante que los estudiantes identifiquen las diferentes características que tiene un cubo. Para ello se sugiere que cuando ellos tengan un cubo en sus manos les haga preguntas relacionadas con las caras, bordes y esquinas del cubo.

2) Plantear el problema a la clase.

3) Pida a los estudiantes ideas acerca de cómo pueden dar solución al problema. Sugerirles que trabajen en parejas.

4) Pida que los estudiantes escriban sus soluciones de tal manera que otros puedan utilizarlas.

5) Socializar las diferentes soluciones.

**Extensión**

¿Qué porcentaje de las caras de todos los cubos pequeños se ha pintado?

**Solución**

1) Para poder pintar 3 caras de un cubo pequeño, este tiene que estar en la esquina del cubo grande. Ya que hay 8 esquinas en un cubo, entonces hay 8 cubos pequeños que tienen tres caras de color rojo.

2) Para poder pintar dos caras de un cubo pequeño, el cubo tiene que estar en el centro de un borde, hay uno de estos cubos por borde. Ya que el cubo grande tiene 12 bordes, entonces hay 12 cubos pequeños que tienen dos caras de color rojo.

3) Los cubos pequeños que tiene una sola cara de color rojo, están en el centro de una cara del cubo grande. Como el cubo tiene seis caras, entonces hay 6 cubos de éstos.

4) Los cubos que no se han pintado de color rojo, deben estar en el centro del cubo grande. Hay solamente un cubo que no tiene color rojo. Esto se puede ver en primer lugar notando que hay 9 cubos pequeños para una de las caras. Así, hay 9 cubos sobre cada uno de los 3 niveles del cubo grande, lo que da un total de 27 cubos pequeños. El número de cubos que forman dos caras paralelas del cubo grande es 18. El nivel que esta en

medio de estas dos caras, tiene 8 cubos pequeños en los que su (s) cara (s) forma (n) parte de alguna de las caras del cubo grande. Hasta aquí se tienen 18 + 8 cubos pequeños en los que sus caras forman parte de una de las caras del cubo grande. Ya que el número total de cubos pequeños que tiene el cubo grande es de 27, entonces se tiene que un cubo pequeño esta en el interior, lo que significa que sus caras no forman parte de las caras del cubo grande.

Otra forma de dar solución a esta pregunta es sumando la cantidad de cubos que se encontraron en los tres puntos anteriores (8 + 12 +6) y restárselo al número total de cubos (27), lo que da como resultado un cubo, que es el cubo interno.

**Solución a la extensión**

Para conocer el porcentaje de las caras de todos los cubos pequeños que se han pintado, en primer lugar se debe tener en cuenta que el número de caras de todos los cubos es 162, este número resulta ya que son 27 cubos cada uno con 6 caras (27 x 6 = 162 caras).

De la solución dada al problema inicial se tiene la siguiente información con respecto al número de caras pintadas:

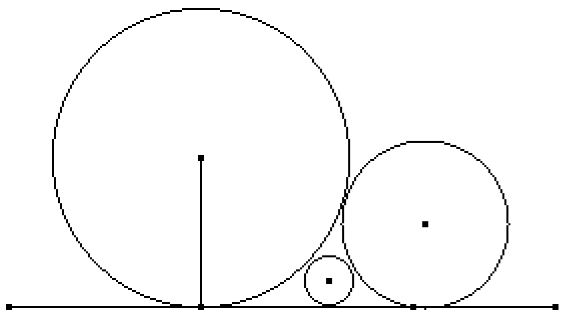
8 cubos con 3 caras pintadas, de ahí que son 24 caras pintadas
12 cubos con 2 caras pintadas, de ahí que son 24 caras pintadas
6 cubos con 1 caras pintadas, de ahí que son 6 caras pintadas.

En total se tienen 54 caras pintadas.
Entonces el porcentaje total de caras pintadas es 54/162 x 100 = 33,33 %.

¿No le parece esto sorprendente? ¿Es demasiado obvio que solamente un tercio de las caras de los cubos pequeños estuviera pintada?

**¿Cuál es el valor del radio?**

Julia encontró tres ruedas entre sus pertenencias, ella las colocó de tal forma que quedarán lo más cercanas posible (de tal forma que cada pareja de circunferencias solamente tenga un punto en común), pero sin superponerse. Luego, y con mucho cuidado tomó una foto que se muestra a continuación:



Si el radio de la rueda más grande es 16cm y el de la rueda de tamaño mediano es de 9cm. ¿Cuál es el radio de la rueda más pequeña que aparece en la foto que tomó Julia?

**¿Sobre qué es el problema?**

Como muchos problemas de este nivel, la estrategia principal es emplear los conocimientos teóricos que el estudiante conoce y pueda aplicar. En este caso se utilizará el teorema de Pitágoras.

La solución de este problema no se puede hacer aplicando directamente el Teorema de Pitágoras, para poder aplicarlo se deben seguir previamente una serie de pasos que conducen a la utilización de este.

**Objetivo**

Encontrar los ángulos y las longitudes desconocidas en los problemas prácticos que se pueden modelar, utilizando triángulos, usando el dibujo a escala, características de ángulo en los triángulos, Teorema de Pitágoras, cocientes trigonométricos, regla del seno, o de la regla del coseno.

**Recursos**

Copia del problema

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Aplicar el Teorema de Pitágoras para resolver un problema

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Pedir a los estudiante que escriban dos cosas que se les venga a la mente cuando observen la foto que tomó Julia. Las posibles respuestas pueden ser círculos, radio, circunferencia, diámetro, diagrama etc.

2) Listar estas ideas.

3) Leer la lista de ideas y discutir con los estudiantes cuales creen ellos que se puedan utilizar para resolver el problema.

4) Pedir a los estudiantes que den ideas sobre la forma en que solucionarían el problema.

5) Sugerir a los estudiantes que utilicen el Teorema de Pitágoras para dar solución al problema. Es conveniente que el trabajo se haga en parejas.

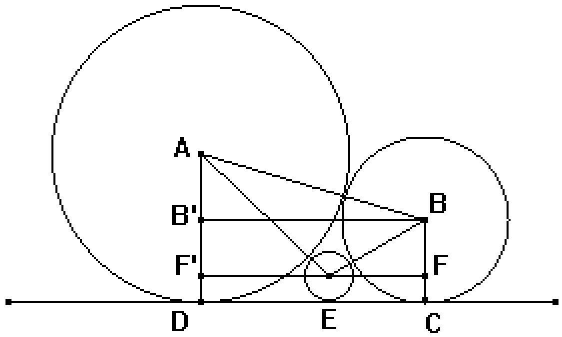
6 Socializar las diferentes respuestas, en caso de que no se dé la solución por parte de ninguna pareja trabajar con los niños para que entre todos resuelvan el problema.

**Extensión**

¿Puede encontrar una fórmula para el radio de la rueda más pequeña en términos de los radios de las otras dos ruedas? Es decir, si los radios de los dos círculos más grandes son $a$ y $b$, ¿puede encontrar $c$ en términos de $a$ y $b$, siendo $c$ el valor del radio de la rueda más pequeña?

**Solución**

Para dar solución a este problema, sobre las ruedas se pueden ubicar distintos segmentos y triángulos los cuales servirán de base para encontrar la solución. Estos se muestran a continuación:




Sea c, la magnitud del radio de la circunferencia más pequeña.

En el triángulo ABB':

AB = 16 + 9 = 25

AB'= AD – BC = 16 – 9 = 7

$(BB')^2 = AB^2 - (AB')^2 = 25^2 - 7^2 = 576$.

En el triángulo AEF',

AE = 16 + c y AF' = 16 – c,

$(F'E)^2 = AE^2 - (AF')^2 = (16 + c)^2 - (16 - c)^2 = 64c$,

En el triángulo BEF,

BE = 9 + c y BF = 9 – c,

$FE^2 = BE^2 - BF^2 = (9 + c)^2 - (9 - c)^2 = 36c$.

Pero BB' = F'E + EF, entonces se tiene:

$$\sqrt{576} = \sqrt{64c} + \sqrt{36c}$$

$$24 = 8\sqrt{c} + 6\sqrt{c}$$

$$24 = 14\sqrt{c}$$

$$\sqrt{c} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$$

$$c = \frac{144}{49}$$

**Solución de la extensión**

Para la extensión se resuelve de igual manera como en el caso anterior, pero remplazando los valores de 16 y 9 por *a* y *b* respectivamente. El valor de *c* esta dado de la siguiente manera:

$$c = ab \Big/ \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

**Ayúdale a Wilson a pintar un cubo de diferentes colores**

Wilson hace un cubo grande, pegando 27 cubos pequeños de igual tamaño

¿Puede Wilson pintar las caras del cubo grande, pintando las caras de los cubos pequeños, de diferentes colores (rojo, blanco, azul y amarillo), de tal forma que no hallan caras de los cubos pequeños del mismo color?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema explora los cubos y las diferentes formas en que estos se pueden pintar.

Hay muchos problemas famosos que se relacionan con el manejo de cubos, uno de ellos es el llamado “problema de los cuatro colores” que fue solucionado en 1976, después de 126 años. En este problema se pregunta sobre el número de colores que son necesarios para pintar cualquier mapa. La restricción que se da al problema es que no se permite que dos países que comparten su frontera sean pintados del mismo color. Dos matemáticos en América, Appel y Haken, probaron que era suficiente utilizando cuatro colores.

Los problemas como el de “los cuatro colores” tienen aplicaciones importantes. Al utilizarlos, los problemas relacionados con rutas (para los autobuses, o los carros de la leche, por ejemplo) pueden ser solucionados. Son una parte importante de teoría de gráfica e investigación de operaciones.

**Objetivo**

Dibujar e interpretar objetos de 2 y 3 dimensiones

**Recursos**

Cubos pequeños (para formar un cubo grande se necesitan 27 cubos pequeños)
Temperas (u otro utensilio que sirva para pintar) de diferentes colores

**Resultados específicos de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Aplicar las propiedades de los objetos de tres dimensiones para resolver el problema.

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Plantear el problema a la clase.

2) Dejar que los estudiantes piensen en la forma de dar solución al problema y pedir que compartan sus ideas con los demás compañeros.

3) Mientras los niños dan solución al problema, preguntarles sobre la estrategia que están utilizando para resolverlo y la razón por la cual escogieron esta forma de solucionarlo.

4) Socializar las soluciones

**Solución**

Se presenta una forma de pintar el cubo con tres colores. Se pueden emplear diferentes maneras para utilizar 4 colores. ¿Puede encontrar otras maneras diferentes a la mostrada aquí para pintar el cubo con 3 colores?

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 3 | 1 | 3 | | | |
| | | | | | | 2 | 3 | 2 | | | |
| | | | | | | 3 | 1 | 3 | | | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| | | | | | | 3 | 1 | 3 | | | |
| | | | | | | 2 | 3 | 2 | | | |
| | | | | | | 3 | 1 | 3 | | | |

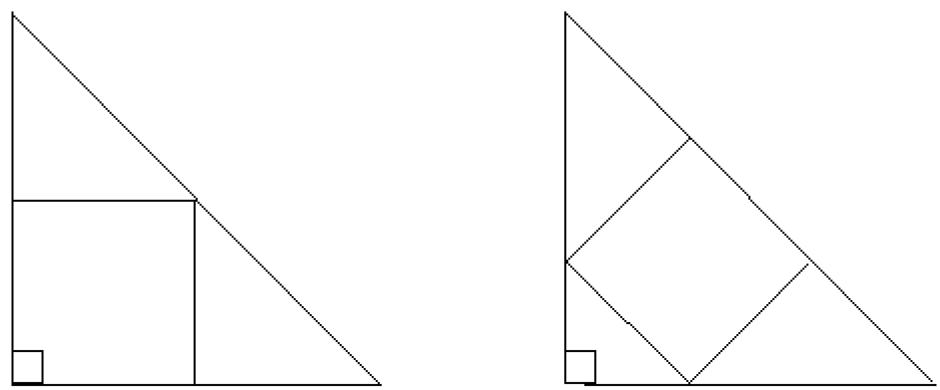
En la tabla anterior se tienen las siguientes denominaciones:
El número 1 representa el Rojo
El número 2 representa el Blanco
El número 3 representa el Azul

Para asignar los colores respectivos al cubo, se inicio dando a las celdas de la tabla ubicadas en las filas 4 a la 7 dos colores (en este caso el rojo y el blanco). Se presenta un poco de dificultad al dar los colores de las tapas del cubo debido a que los colores deben ser tal que al unir las tapas no queden colores continuos repetidos.

No es posible utilizar únicamente dos colores. Los cubos pequeños que están en la esquina del cubo grande tendrán tres caras visibles para el cubo grande de ahí que todas estas caras deben ser de colores diferentes (por lo menos tres).

**Las servilletas de Soledad**

Soledad estaba aburrida en una fiesta de cumpleaños de uno de los amigos de sus padres. Ella notó una servilleta doblada hermosamente en forma de triángulo isósceles. Tomó dos portavasos cuadrados (que estaban en la mesa) y los colocó sobre la servilleta. Con sorpresa notó que ellos coincidían de acuerdo a la siguiente figura:



Soledad midió el lado del portavaso mayor, su longitud fue 21cm. ¿Cuál es la longitud del lado del portavaso más pequeño?

**¿Sobre qué es el problema?**

Este problema involucra trabajar con triángulos y cuadrados para cubrir un área requerida. El problema puede resolverse utilizando un diagrama a escala. Sin embargo, esto puede dar únicamente una respuesta aproximada a la pregunta. Se recomienda animar a los estudiantes para que sean lo más exactos posible. Una forma de hacer esto es notar como puede ser dividido un triángulo isósceles de tal forma que contenga los cuadrados que tenemos en el diagrama.

Generalmente hablando, es conveniente notar que los diagramas a escala pueden dar únicamente una aproximación a la realidad. Por lo tanto, casi siempre es necesario hacer algo más sofisticado para obtener una respuesta exacta. Por otro lado, los diagramas a escala pueden dar la pauta para dar una respuesta exacta y puede haber algunas situaciones donde los diagramas a escala son suficientemente exactos para que no sean necesarios otros métodos más sofisticados. Sin embargo, como regla general, es adecuado utilizar los diagramas.

**Objetivo**

Encontrar ángulos y longitudes desconocidas en problemas prácticos que pueden modelarse mediante triángulos, usando diagramas a escala, propiedades de ángulos, de triángulos, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, la ley de los senos o la ley de los cosenos.

**Recurso**

Copia escrita del problema en el tablero o en cartelera

**Resultado específico de aprendizaje**

Se espera que el estudiante este en capacidad de:

- Utilizar las áreas de triángulos y cuadrados para encontrar longitudes desconocidas.

**Sugerencias para la secuencia de enseñanza**

1) Introducir el problema mediante ideas sobre triángulos o preguntando a los estudiantes sobre que es lo que hace que una figura sea un triángulo.

2) Proponer el problema a los estudiantes.

3) Preguntar a los estudiantes sobre sus ideas iniciales acerca de cómo procederán.

4) Solicitar a los estudiantes que trabajen en parejas o en pequeños grupos.

5) Si los estudiantes no pueden dar solución al problema, sugerirles que construyan el triángulo o que hagan un diagrama a escala de él. Se espera que en la construcción del triángulo noten la relación entre el área del cuadrado y el área del triángulo

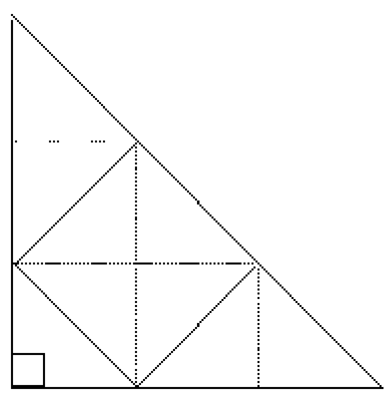
6) Solicita a los estudiantes que escriban sus soluciones para que puedan compartirlas con otros en la clase.

7) Socializar los reportes. Discutir las semejanzas y diferencias entre las aproximaciones usadas.

**Solución**

Como la servilleta es isósceles, el área del cuadrado más grande es ½ del área del triángulo. Como el área del triángulo es $2 \times 21^2 = 882\ (cm^2)$.

Ahora el otro diagrama puede re-dibujarse como sigue:



Luego el triángulo consiste de todos los 9 triángulos pequeños y el cuadrado menor consiste de 4 triángulos pequeños. Así el área del cuadrado pequeño es:

$$(4/9) \times 882 = 392\ (cm^2)$$

Esto da el lado del cuadrado pequeño como $\sqrt{392} = 19.8cm$.

## 8. ENUNCIADO DE PROBLEMAS SELECCIONADOS

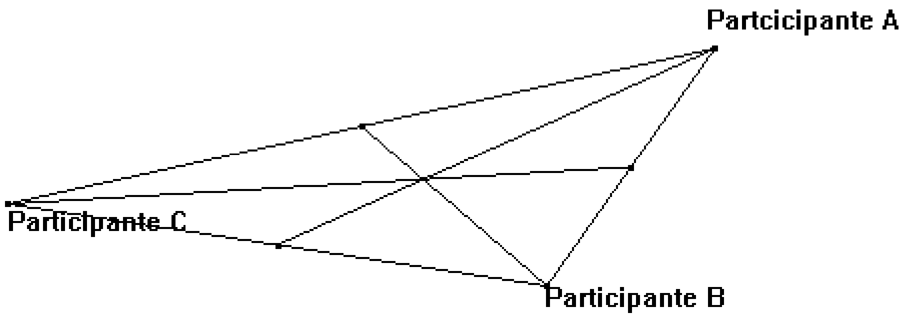
A continuación se enuncian diferentes problemas, agrupados por los temas referentes a *Triángulos, Cuadriláteros y Polígonos.*

Estos problemas pueden ser utilizados para aplicar el enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. El listado de problemas solamente es un punto de partida para el docente ya que a él le corresponde resolver los problemas, identificar los tópicos matemáticos (ideas, conceptos, resultados, etc.) que intervienen en la solución. También, de ser posible, deben modificarlos y adecuarlos, tanto al nivel como al contexto educativo en el cual los van a utilizar.

Es importante al abordar los diferentes problemas que el docente se haga las siguientes preguntas ¿existe otro método?, ¿Cómo propongo el problema a mis estudiantes?, ¿Cómo guío a mis estudiantes en la búsqueda de soluciones?, ¿Cómo diseño y propongo problemas similares?, ¿Cómo utilizo el problema para enseñar tal tema?, ¿Es posible generalizar el problema? Finalmente, la pregunta más importante ¿dónde aprendo más sobre los temas matemáticos que intervienen en los problemas y sus soluciones?

### 8.1. PROBLEMAS SOBRE TRIANGULOS

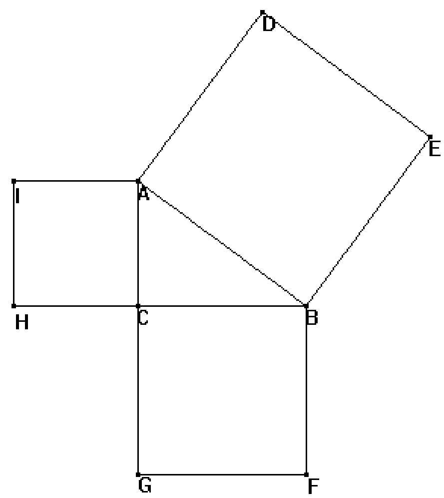
#### 1) Capturar la bandera




Tres participantes A, B y C se ubican cada uno empezando desde un vértice de la cancha en forma de triángulo escaleno. La meta es ser el primer participante que gane una bandera que este localizada dentro del interior de la cancha triangular. Si el juego es justo, entonces cada participante debe correr la misma distancia para conseguir la bandera.

¿Dónde se debe ubicar la bandera para que el juego sea justo?
¿Cómo debería cambiar la posición de la bandera si la cancha tiene n lados y los participantes están en alguna parte sobre el perímetro de la cancha?

**2) Cuadrando con cuadros**



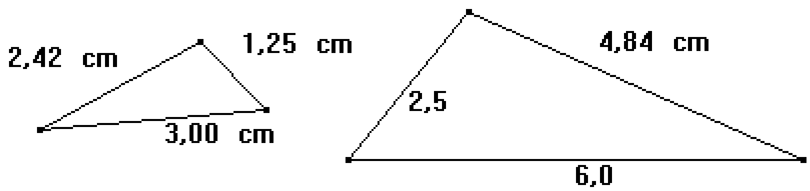

Una de las pruebas del Teorema de Pitágoras típico es construir cuadrados sobre cada uno de los lados del triángulo. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los otros lados del triángulo.

¿En vez de usar cuadrados, puede usar triángulos equiláteros? o ¿hexágonos regulares? ¿Deberán esas figuras (o cualquier otra) dar los mismos resultados?

¿Qué tienen de especial los cuadrados? En otras palabras, ¿porqué típicamente se usan en esta prueba?

**3) Aumentando el tamaño**

Explorar los cambios en el perímetro y área de un triángulo cuando se incrementa su tamaño.




Si se dobla la longitud de cada uno de los lados de un triángulo, ¿qué pasa con el perímetro y el área? Explicar porque.

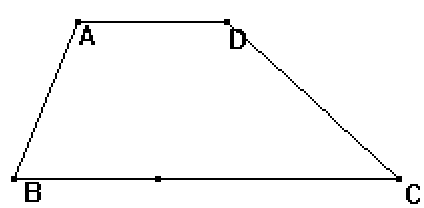
¿Cómo deberán cambiar los resultados si se triplica la longitud de cada uno de los lados? ¿Qué pasa si los lados son diez veces el tamaño original? Explicar su razonamiento.

Si se dobla el área de un triángulo, explicar que pasa con la longitud de los lados y el perímetro.

¿En cuánto necesito incrementar el área para que la nueva longitud de los lados y el área sea 5 veces la medida original?

**4) Transformación**

Hacer un triángulo a partir de un cuadrilátero sin cambiar su área




Tomar un cuadrilátero cualquiera y hacer dentro de él un triángulo sin cambiar el área

¿Cuántas soluciones pueden encontrar?

¿Cuántas “transformaciones" fueron necesarias para cambiar el cuadrilátero a triángulo?

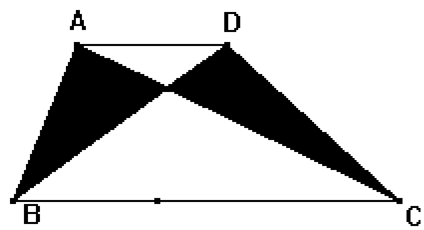
¿Será siempre este el caso?

***Extensiones***

Empezar con un pentágono. ¿Se puede convertir en un triángulo con igual área?

Modificar el problema de nuevo, pero esta vez con un hexágono

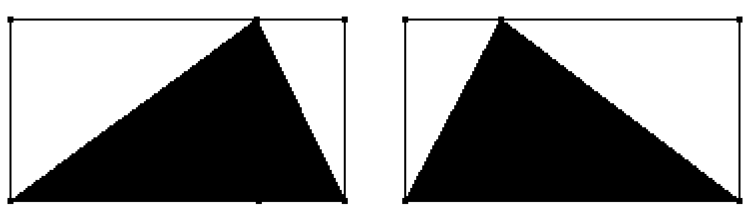
**5) Triángulos en un trapezoide**




Las diagonales de un trapezoide dividen el interior de la región en 4 triángulos. ¿Cuál es la relación entre las áreas de los triángulos (de color negro)? ¿Cuál es la relación entre los otros dos triángulos?

**6) Triángulo en el interior de un rectángulo**

Un triángulo tiene dos de sus vértices en las esquinas de uno de los lados de un rectángulo. El tercer vértice esta en cualquier lugar sobre el lado opuesto (ver figura)

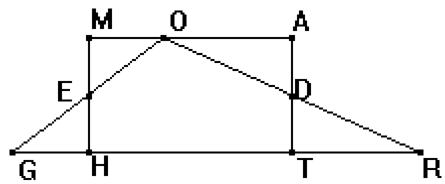


¿Cómo es el área del triángulo comparado con el rectángulo? ¿Por qué cree que se produce esta relación?

***Extensiones***

¿Dónde deberá mover el tercer vértice del triángulo para tener un perímetro mínimo?. Explicar porque en esta posición resulta un perímetro mínimo.

**7) Áreas iguales**

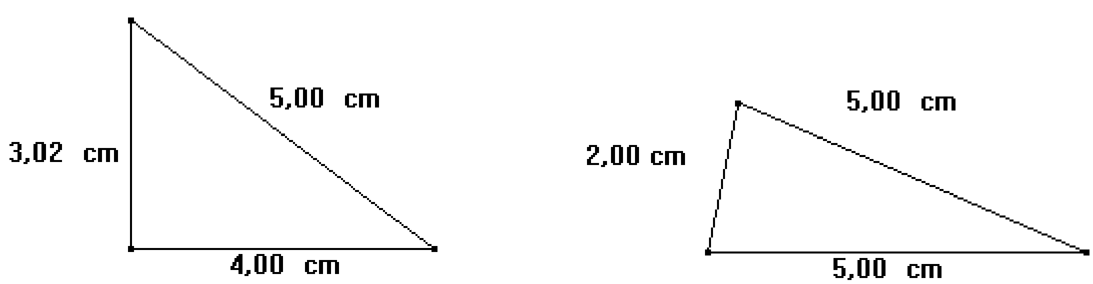



E es el punto medio del lado SO y D es el punto medio del lado RD explicar porque el triángulo GOR tiene la misma área del rectángulo MATH

***Extensiones***

Construir el segmento ED. ¿Cómo este segmento se puede comparar con alguno de los otros segmentos en la figura? Usar este segmento para explicar porque el triángulo GOR y el rectángulo MATH tienen la misma área

***8) Triángulo óptimo***

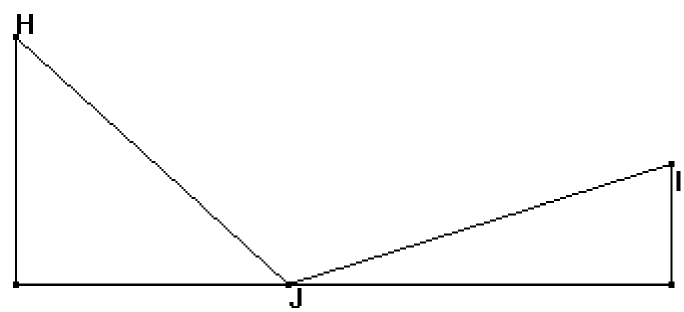



¿Cuál es la mayor área posible que se puede encontrar en un triángulo con perímetro 12? Se llamará a este tipo de triángulo un *triángulo óptimo* para esta exploración.

¿Cuáles son las propiedades de un triángulo óptimo? ¿Cuál es otro nombre para este triángulo?

Realice esta exploración de nuevo, pero tomando un perímetro diferente. ¿Es el triángulo óptimo igual o diferente? ¿Cree que los resultados de la exploración son los mismos, sin importar el perímetro que se usa? Explicar porque sí y porque no.

### *9) La nadadora*




Suponga que Juliana la nadadora se encuentra en la punta del muelle H y desea ir a la punta del muelle I. El muelle H tiene 2Km de largo y el muelle I 1 Km de largo. La distancia entre H e I es muy larga, Juliana piensa que deberá parar en la playa para descansar (punto J), puede parar en cualquier punto de la playa para descansar.

Si Juliana toma el descanso, ¿dónde deberá parar sobre la playa si quiere nadar la menor distancia para hacer el viaje completo?

¿Cuál es la distancia más corta que Juliana puede nadar para hacer el viaje completo?

### *10) El tercer lado*

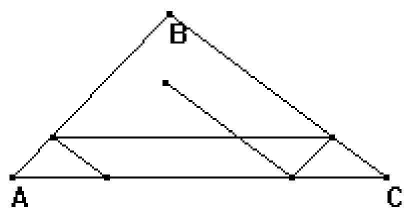
Las longitudes de dos lados de un triángulo son 5 y 11. Si la longitud del tercer lado es un número entero, ¿cuál es el menor y el mayor perímetro que el triángulo pueda tener?

***11) Probando sombras***

Caída la tarde, una persona que tiene 6 pies de altura produce una sombra de 15 pies de longitud. Si el límite de su sombra está en el mismo punto sobre el suelo, ¿cómo lo está el límite de la sombra de un árbol de 50 pies?. ¿Qué tan lejos debe estar el hombre de la base del árbol?

***12) El salón triangular***

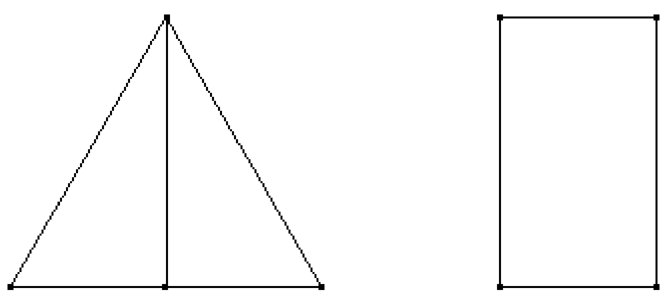
Oscar esta en un salón triangular como el que se muestra en la figura. Él camina desde un punto sobre AC paralelo a BC. Cuando llega a AB, gira y camina paralelo a AC. Cuando llega a BC, gira y camina paralelo a AB. ¿Cuántas veces Oscar alcanza a caminar antes de regresar a su punto de partida?



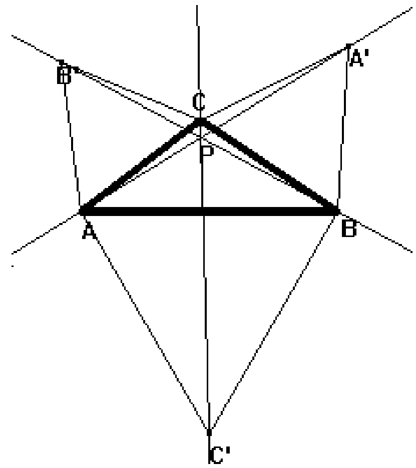

¿Qué sucede si la primera dirección de Oscar no es paralela a cualquiera de los lados?

***13) Transformación del Triángulo***

El triángulo equilátero con lado de longitud *e* se corta por la mitad y se acomoda como se muestra en el rectángulo. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?



***14) Cuál es el punto***

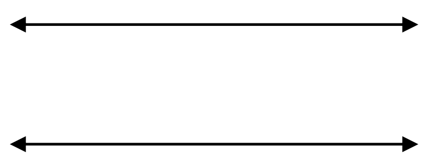



Tomar un triángulo arbitrario ABC. Sobre sus tres lados, construir un triángulo equilátero ABC', ACB' y BCA'. Construir las líneas AA', BB' y CC'. ¿Qué observa?

¿Qué tiene de especial el punto de intersección P, de las tres líneas?
¿Puede construir una historia del problema sobre la construcción anterior?

## 8.2. PROBLEMAS SOBRE CUADRILATEROS

***1) Construyendo cuadriláteros***



Dadas dos líneas paralelas, dibujar dos o más líneas que se intercepten con las dos líneas paralelas, formando varios figuras de 4 lados.

Discutir las propiedades de los diferentes cuadriláteros formados (por ejemplo las relaciones entre los lados, entre ángulos, con las diagonales, etc). ¿Qué sucede cuando las líneas no son paralelas?

***2) Diagonales de los cuadriláteros***

Una diagonal de un polígono es creada cuando dos vértices no consecutivos son conectados por un segmento.

En cuadriláteros convexos, las diagonales pueden ser:

No congruentes

Congruentes

Bisecarse

Formar ángulos rectos.

Encontrar todas las posibles combinaciones que pueden ocurrir con las diagonales y construir el cuadrilátero que ellas definen.

***3) Cuadriláteros inscritos dentro de cuadriláteros***

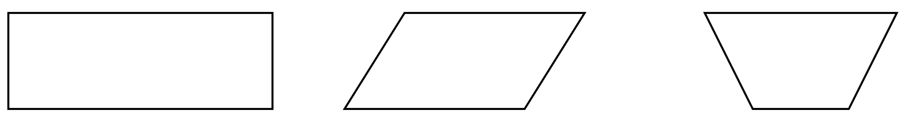
Dado un cuadrilátero construir el punto medio sobre cada uno de los lados. Unir cada punto medio consecutivo con un segmento. ¿Cuáles son las propiedades de las figuras formadas por la unión de los puntos medios?. ¿La figura que resulta depende del tipo de cuadrilátero? (Ej. Convexo, cóncavo) ¿Cómo es el área de la nueva figura comparado con el área del cuadrilátero original?

Suponga que desea que la nueva figura sea un rectángulo. ¿Con cuál cuadrilátero debe empezar? ¿Con cuál cuadrilátero debe empezar si quiere construir un rombo?. ¿Y si desea construir un cuadrado?

¿Deberán las nuevas figuras ser no convexas?

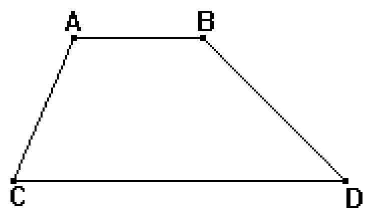
### *4) Misterio de los cuadriláteros*

Algunos cuadriláteros tienen nombres especiales porque tienen algunas propiedades especiales. Por ejemplo, un rectángulo es cualquier cuadrilátero con 4 ángulos rectos. Alternativamente, un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto (puede explicar por qué). Un cuadrado es "más especial" que un rectángulo porque este tiene 4 ángulos rectos y cuatro lados iguales (así un cuadrado es un rectángulo especial).



### *5) Transformaciones*

Tomar cualquier cuadrilátero y hacer en él un triángulo sin cambiar su área (Ayuda: las líneas paralelas pueden usarse)

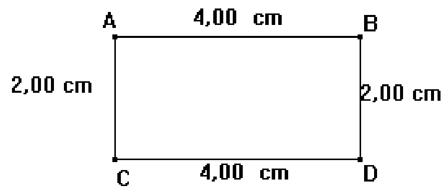


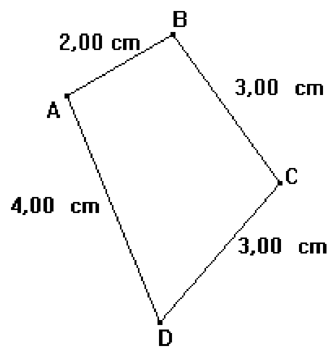

¿Cuántas soluciones distintas puede encontrar?. ¿Cuántas transformaciones fueron necesarias para cambiar el cuadrilátero en un triángulo? ¿Siempre se requieren el mismo número de transformaciones?

### *Extensiones*

Empezar con un pentágono. ¿Se puede convertir en un triángulo con igual área? ¿Cuantas soluciones distintas puede encontrar?. ¿Cuántas transformaciones fueron necesarias para cambiar el cuadrilátero en un triángulo? ¿Siempre se requiere el mismo número de transformaciones?

### *6) Cuadrilátero óptimo*




¿Cuál es la mayor área posible que se puede encontrar en un cuadrilátero con perímetro 12? Se llamara a esta figura un *cuadrilátero óptimo* para esta exploración.

¿Cuáles son algunas propiedades de los cuadrilátero óptimos? ¿Cuál es otro nombre para estos cuadriláteros?

Realice esta exploración de nuevo, pero tomando un perímetro diferente. ¿Es el triángulo óptimo igual o diferente? ¿Cree que los resultados de la exploración son los mismos, sin importar el perímetro que se usa?. Explicar porque sí y porque no.

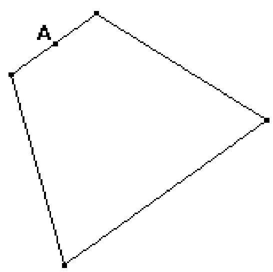
### *7) Doblando el rectángulo*

Suponga que quiere doblar las dimensiones de un rectángulo. Dibujar la figura usando cualquier método que pueda. Explicar el método.

***Extensión***

Pruebe esta conjetura: Si los lados de un figura son doblados para producir una figura similar, el área y perímetro también serán doblados. Investigar con figuras de dos dimensiones y realizar luego con figuras de 3 dimensiones.

### *8) Lados iguales*

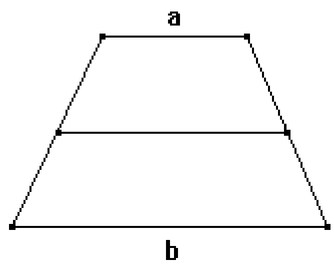



A es un punto sobre uno de los lados de un cuadrilátero. ¿Es posible encontrar puntos B, C y D sobre los otros lados del cuadrilátero, tales que AB=BC=CD=DA? En la figura, el cuadrilátero es un trapezoide. ¿El cuadrilátero tiene que ser un trapezoide para que ocurra la relación?

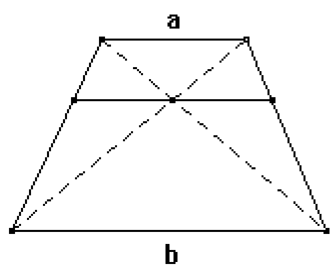
### *9) Trapezoide isósceles*

Para todos los siguientes problemas, tomar como dado un trapezoide isósceles con lados paralelos de longitud a y b.

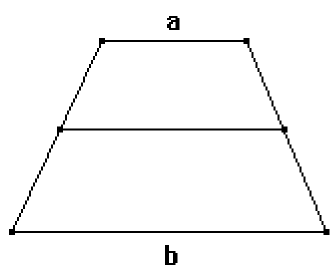
En términos de a y b, ¿cuál es la longitud del segmento, cuyos extremos son los puntos medios de los lados inclinados del trapezoide isósceles?



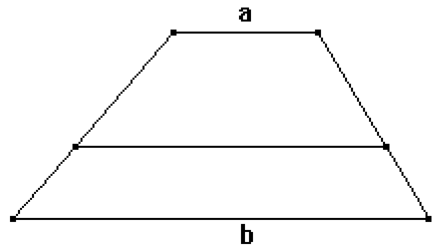

En términos de a y b, ¿cuál es la longitud del segmento de línea paralela, formada a través de la intersección de las diagonales del trapezoide isósceles?



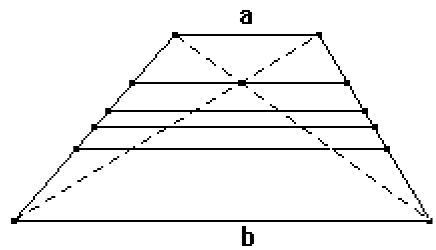

En términos de a y b, ¿cuál es la longitud del segmento de línea paralela que divide el trapezoide isósceles en dos trapezoides isósceles similares?




En términos de a y b, ¿cuál es la longitud del segmento de línea paralela que divide el trapezoide isósceles en dos trapezoides isósceles de igual área?

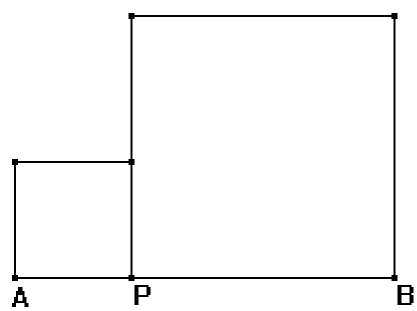


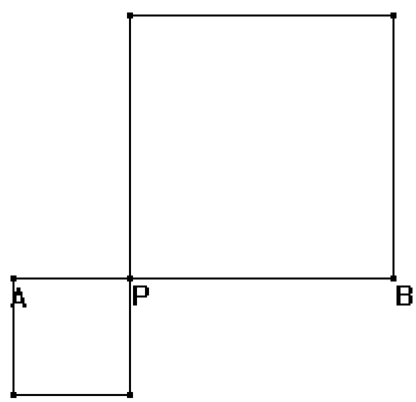
Comparar los cuatro segmentos de línea sobre el mismo trapezoide isósceles. ¿Siempre estarán en la misma posición? Compara las cuatro fórmulas. ¿Qué inecuaciones se producirán siempre?




***10) Dos cuadrados***

Dibujar un punto P sobre el segmento de línea AB y hacer cuadrados: Un lado del cuadrado es AP y un lado de otro cuadrado es PB. ¿Dónde deberá ser ubicado el punto B para satisfacer la condición que la suma de las áreas de los dos cuadrados es un mínimo? Explique.



***11)	Rombo y piscina circular***

El Señor X, tiene un patio en forma de rombo.  Él quiere construir la piscina circular más grande posible en su patio.  ¿Cómo le ayudaría a hacer esto?

***Extensión 1***

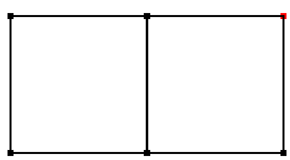
Construir la piscina circular más grande en un patio que tiene la forma de un polígono regular  (cuadrado, pentágono, Hexágono, etc.)

***Extensión 2***

Diseñe un plan para construir la piscina circular posible más grande para un patio de cualquier forma.

***12)	Rectángulos cuadrados***

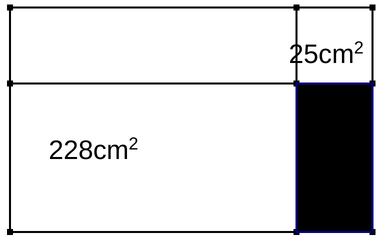
El rectángulo dibujado consiste de dos cuadrados unidos por uno de sus lados.  El perímetro del rectángulo es 57cm.  ¿Cuál es el área del rectángulo en centímetros cuadrados?



***13)	Dividiendo rectángulos***

Un rectángulo con longitudes de lados enteras y áreas menores que 40 $cm^2$ se ha dividido en cuatro rectángulos más pequeños, ubicando un cuadrado en la esquina superior derecha.

Encontrar la posible área del rectángulo sombreado si uno de sus lados es mayor que las longitudes de los lados del cuadrado.  El área de uno de los rectángulos esta dada en el diagrama.




***14) Porcentaje rectangular***

El largo de un rectángulo se incrementa en un 10% y su ancho se decrementa en un 20%. ¿Qué porcentaje más o que porcentaje menos tiene la nueva área comparada con la original?

***15) Triplicando el perímetro***

El perímetro de un rectángulo es triplicado y el nuevo perímetro es 66. El largo original es 3 veces mayor que el ancho original. Encontrar el ancho y largo original.

***16) Corral para el Pony***

Para hacer un corral para su pony, Miguel usará un cerco que tiene para construir el corral. Si él tenía 96 metros de cerco, ¿cuáles son las dimensiones del cerco más largo, de forma rectangular que pueda hacer?

***17) Perímetro mínimo***

Si las dimensiones son cualquier número, encontrar el mínimo perímetro para un rectángulo con un área de 25 unidades cuadradas. Repetir para rectángulos de áreas 30, 35, 40, ...

***18) Construyendo cuadrados***

Construir un cuadrado que tenga dos veces el área de otro cuadrado.

***19) Modificando los tamaños***

Si el área de un cuadrado se incrementa un cierto valor, ¿Cuál será la medida del borde del cuadrado original?

Si dos bordes continuos de un cuadrado tienen 2 cm de longitud, el área del cuadrado resultante contiene 84 centímetros cuadrados más. ¿Cuál será la medida del borde del cuadrado original?

***20) Terminar una disputa***

Una disputa sobre tierras ocurre entre Villa Cuadrada y Villa Centro. Ambos reclaman tener derechos sobre una cierta área cuadrada. Su disputa es sobre una porción de tierra que aparece tomando parte de 1/16 de cada una de sus áreas.

Construir las posibles regiones de Villa Cuadrada y Villa Centro y su intersección.
¿Cómo podría resolver esta disputa?

***21) Doblando cuadrados***

Un cuadrado es doblado en la mitad para formar un rectángulo. Si el rectángulo resultante tiene un perímetro de x centímetros, ¿cuál es el área del cuadrado original?

***22) Incremento del área***

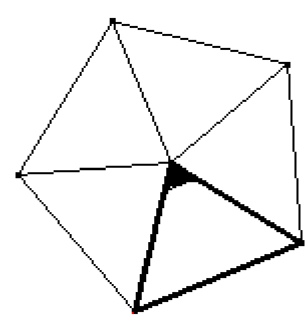
La longitud de un rectángulo se incrementa en un 20% y su ancho se incrementa en un x por ciento. Si el área se incrementa en un 24%, determinar x.

***23) Triángulo o cuadrado***

Dividir un triángulo en 4 partes tales que las partes puedan ser reacomodadas en un cuadrado. ¿Cualquier triángulo tiene esta propiedad?

## 8.3. PROBLEMAS SOBRE POLÍGONOS

***1) Ángulos y vértices en un polígono regular***



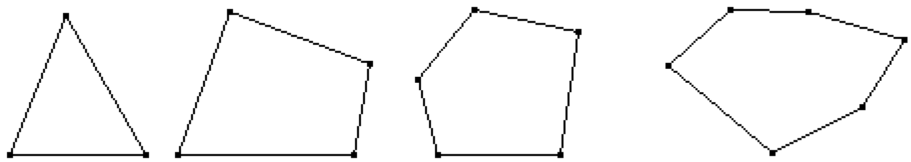
Encontrar la medida de un ángulo de un triángulo isósceles que puede ser usado para rotar el triángulo sobre su vértice para crear un pentágono regular.

¿Cuál deberá ser la medida del ángulo si se quiere crear un cuadrado, un hexágono regular, o un polígono regular de n lados?

¿Cualquier medida del ángulo en el triángulo isósceles producirá un polígono regular? Explicar porque sí y porque no.

**2) Suma de ángulos en un polígono**

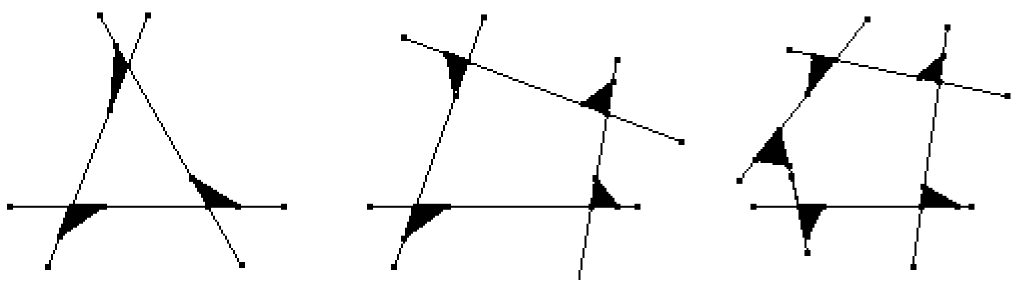
¿Cuál es la suma de los ángulos de un triángulo? ¿De un cuadrilátero? ¿De un pentágono? ¿De un hexágono? ¿Cuál es la suma de los ángulos en polígonos convexos en términos del número de lados?



**Extensiones**

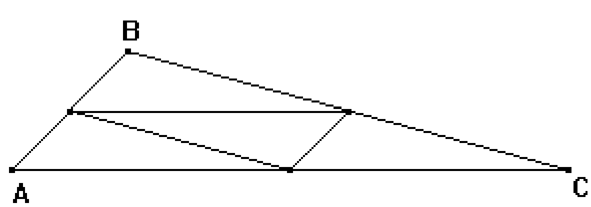
¿Las relaciones entre polígonos convexos también son verdaderas para polígonos no convexos? Explicar.

**3) Suma de ángulos exteriores**



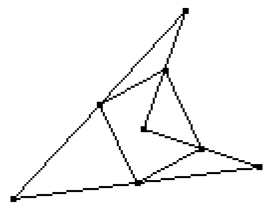
¿Cuál es la suma de los ángulos exteriores de un triángulo? ¿De un cuadrilátero? ¿De un pentágono? ¿De un hexágono? ¿Qué es verdadero sobre la suma de los ángulos exteriores en cualquier polígono convexo? ¿Por qué?

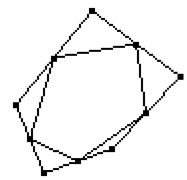
**4) Polígonos medios**



Tomar un triángulo cualquiera ABC.  Construir un triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados, el cual es llamado triángulo medio.  Investigar las relaciones  (perímetro y área)  entre el triángulo medio y el triángulo original. ¿Qué conjeturas puede hacer?  ¿Puede probarlo?

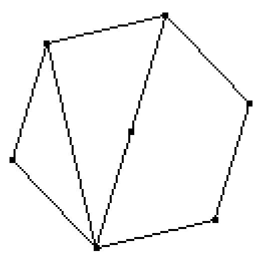
***Extensión***





Explorar la anterior idea usando varios polígonos.  Incluir polígonos convexos y no convexos en las exploraciones

***5) Triángulos en hexágonos***



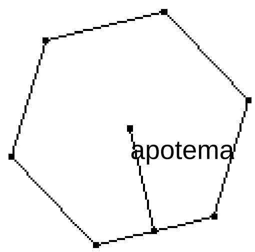
Considerar todas las posibilidades para generar un triángulo con tres diagonales y/o lados de un hexágono regular.  En cada caso, encontrar la probabilidad que un punto dentro del hexágono este también en el interior de un triángulo.  Explicar cada solución.

***6) Pentágono con perímetro restringido***

Crear un pentágono que tiene 15 centímetros de perímetro y obtener el área. Modificar los vértices del pentágono hasta que encuentre la mayor área, manteniendo un perímetro de 15 centímetros.

¿Se producen iguales o diferentes resultados si se examina un polígono diferente? Explique.

### *7) Apotema y área*




Determinar una ecuación del área de un hexágono regular en términos de su apotema y perímetro. La apotema es la distancia más corta desde el centro del polígono hasta uno de sus lados.

¿Esta respuesta será verdadera para otros polígonos regulares?

# 9. RECOMENDACIONES

1) Los problemas planteados en el presente seminario, deben ser aplicados en una Institución Educativa, esto con el fin de ver el grado de aceptación que tienen y la compresión del lenguaje y de las actividades planteadas.

2) Los profesores son los responsables de escoger los problemas que más se adecuen al contexto en el cual están trabajando y a las necesidades que se tengan al plantear el problema.

3) Los problemas se pueden modificar y adecuar al contexto, no son una camisa de fuerza para los profesores.

4) Es conveniente que los problemas que únicamente están planteados, se les adicione la información relacionada con: ¿Sobre qué es el problema?, objetivos, recursos, resultados específicos de aprendizaje, extensión del problema y la solución.

5) Los profesores pueden crear sus propios problemas de tal manera que se pueda trabajar con ellos el enfoque de resolución de problemas.

6) Es importante practicar y dar a conocer el enfoque de resolución de problemas a aquellas personas que de una u otra forma están involucradas con la enseñanza y el aprendizaje de las personas.

## BIBLIOGRAFÍA

[ENF]. El Enfoque de resolución de Problemas. http://www.comenius.usach.cl/webmat2/enfoque/elenfoque.htm.

[FOR1]. TRUJILLO, Carlos Alberto et al. "Formulación y Resolución de Problemas una Estrategia Metodológica para el Diseño Curricular, la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas". Programa de Investigación y Desarrollo, Universidad del Cauca, Código VRI ID 711, Febrero de 2002.

[GM1]. De Miguel Guzmán. "Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias innovadoras en la educación matemática". http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm.

[TR1]. TRUJILLO SOLARTE, Carlos Alberto. "Currículo Matemático y Resolución de Problemas". Conferencia, Primer Encuentro de Educación Matemática, ERM, Universidad del Quindío, Armenia, 2003.

[ST1]. SANTO TRIGO, Luz Manuel. "Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes". CINVESTAN – IPN, México.

POLYA, George. "Como plantear y resolver problemas". Editorial Trillas, Serie de matemáticas. Vigésimo cuarta reimpresión, Enero 2000.

Ministerio de Educación Nacional. “Lineamientos Curriculares de Matemáticas”. Bogotá, 1998.

CAMPO FLOR, Adriana; DAZA Edgar Oswaldo y LOPEZ MANZANO Yimi Javier. Diseño De Problemas Para la Enseñanza de la Teoría De Números en los Grados Sexto a Noveno. Popayán, 2003. Informe Seminario de Grado (Licenciados en Educación con especialidad en Matemáticas). Universidad del Cauca. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas de la Educación. Departamento de Matemáticas.

CLAMA: Club de Amigos de la Matemática.
www.cienat.uda.edu.com/~clama.

García José Joaquín. “Didáctica de las ciencias, Resolución y Solución de Problemas y Desarrollo de la Creatividad”.
http://www.agora.udea.edu.co/~oleca/ponencias/problemas.htm.

Geometry
http://www.intermath-uga.gatech.edu/topics/geometry

Problems Resolving
http://www.nzmaths.co.nz.