SIMETRÍAS Y TRASLACIONES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO

LUZ EDITH MUÑOZ PAZ
WALTER MUÑOZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2007

SIMETRÍAS Y TRASLACIONES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO

(Enmarcado en el proyecto "Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría")

LUZ EDITH MUÑOZ PAZ
WALTER MUÑOZ

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de Seminario presentado como requisito parcial para optar al titulo de Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas

DIRECTORA
ESPC. YENY LEONOR ROSERO ROSERO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2007

Nota de aceptación

____

____

____

____

Especialista Yeny Leonor Rosero.
Directora

____

Magíster Ángel Hernán Zúñiga
Evaluador

____

Magíster Martha Lucia Bobadilla
Evaluador

Fecha de Sustentación: Popayán, 20 de Junio de 2007

A nuestros padres:

Por su amor y ejemplo para nuestra vida.

A nuestros hijos:

Por que son nuestro motivo de vida

A nuestros profesores:

Los conocimientos.

A nuestra universidad:

La gratitud.

A nuestros familiares y demás personas:

Que nos ayudaron a alcanzar este logro.

A todos ellos…. Sobre todo gracias a DIOS

Por que nunca nos abandono.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos de todo corazón a:

Yeny Leonor Rosero Rosero, directora del seminario de grado, por su valiosa colaboración y orientación.

Alba Lorena Silva Silva, profesora de Matemáticas por sus valiosos aportes a la construcción de este trabajo.

Yilton Riascos, profesor de Matemáticas por sus valiosa asesoría y aporte en es desarrollo de este trabajo.

Maria Elena Vivas, coordinadora Académica de la Facultad de Educación, por su apoyo y orientación en las gestiones para nuestro trabajo.

Ángel Hernán Zúñiga, profesor de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Martha Lucia Bobadilla, profesora de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Patricia Elena Vargas y Eduar Lasso, por su gran colaboración y apoyo para el desarrollo de este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

PRESENTACIÓN

La Universidad del Cauca requiere de sus futuros graduados, para otorgar el titulo "Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas", una ultima prueba de sus capacidades, para lo cual ofrece distintas alternativas; en el caso de los programas de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación (FACNED) y particularmente para el programa de Licenciatura en Matemáticas, la resolución 197 de 2002 emanada del Consejo de Facultad presenta tres alternativas para desarrollar este trabajo de grado: 1) Seminario de grado, 2) Trabajo de investigación y 3) Exámenes preparatorios. Motivados por haber cursado asignaturas con relación a Geometría Euclidiana, Didáctica de la Matemáticas y Computación Educativa; decidimos realizar un trabajo de grado en la modalidad de Seminario de grado cuyo objetivo es elaborar notas de clase y talleres con algunas situaciones problema sobre los temas de "Simetría y Traslación en el Espacio Euclidiano".

Se espera que el resultado del seminario se vea reflejado en el contenido de este documento, en el cual se encontrará un capítulo de notas preliminares, "Enlace, ordenación y sentido en el Espacio euclidiano", que contiene definiciones y axiomas que son base fundamental para el entendimiento de los capítulos posteriores, otro capitulo "Simetrías y Traslaciones en el espacio euclidiano", contiene definiciones, teoremas, axiomas sobre dichos movimientos en el espacio y finalmente un capitulo de diseño de los talleres basados en situaciones problema, cuyo objetivo principal es posibilitar el desarrollo del pensamiento geométrico en el espacio.

1. JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta surge en el año 2004, después de haber participado en el curso de computación educativa y en un grupo de estudio en el área de geometría, junto con profesores de educación media y superior de 4 instituciones educativas del departamento del Cauca; asesorados por Martín Acosta Gempeler, Doctor en Didáctica de la Geometría y finalmente de la vinculación al proyecto "Incorporación de tecnologías computacionales en el currículo de la Geometría", desarrollado por las profesoras Alba Lorena Silva Silva y Yeny Leonor Rosero Rosero del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca. A partir del conocimiento del anterior trabajo enfocado en la geometría plana, se encuentran elementos fundamentales e interesantes para ampliar una forma de estudio hacia la geometría en el espacio.

Se considera que la geometría como componente fundamental en los programas académicos de los niveles de educación básica, media y de algunos programas de formación a nivel superior en Colombia, requiere de un estudio más detallado y contextualizado. Por tal razón, es de interés continuar el trabajo realizado dentro del proyecto "Incorporación de tecnologías computacionales en el currículo de la Geometría" y elaborar un material de consulta que permita contribuir al estudio de los movimientos en el espacio y facilitar la comprensión de ellos. Así mismo, esta actividad académica permite profundizar en procesos de enseñanza en el área de geometría lo cual nos cualifica como docentes en el área de las Matemáticas.

2. OBJETIVO

Elaborar notas de clase y talleres (a partir de situaciones problema) sobre los temas de “Simetría y Traslación en el Espacio Euclidiano”.

3. MARCO CONCEPTUAL

La vida de hoy se lleva a cabo en un mundo multicultural e interconectado. Este hecho exige a los sistemas educativos orientar la educación para el desarrollo de capacidades, competencias, actitudes y valores; donde se espera que el individuo apropie los grandes avances de las tecnologías como de los nuevos modelos pedagógicos. A partir de esto construir sistemas educacionales que contribuyan a la promoción de un nuevo entendimiento, la creación de modelos propios de pensamiento, además de ayudar al estudiante a ubicar y desarrollar sus capacidades, más que tratar de superar sus limitaciones.

Los educadores, y en particular los educadores de matemáticas no podemos seguir marginados de la realidad. Pues quien toma una cierta distancia y busca algo que sea común a las tecnologías que ha empleado la humanidad para su desarrollo encontrará que ese algo común incluye el empleo de herramientas tanto físicas como lingüísticas o simbólicas. Socialmente se acepta como un hecho incontrovertible que tanto los avances más benéficos para la humanidad como la aterradora capacidad de destrucción tienen relación directa con la invención y el empleo de utensilios, por tanto, se hace necesario estudiar todas las posibilidades que se brinden y desplegar toda la creatividad e imaginación, para encontrar las mejores formas de potenciar el desarrollo integral del conocimiento.

El educador consciente de su alta responsabilidad tiene que luchar tenazmente por penetrar cada vez más en la esencia del proceso que él debe dirigir, para evitar todo tipo de rutina y esquematismo en su labor cotidiana, para eliminar el aprendizaje memorístico que inhibe la iniciativa, la creatividad, el pensamiento crítico, el deseo de aprender, la inteligencia y promueve el desinterés, la pasividad y la apatía.

De ahí que, en aras de promover un cambio esta propuesta pretende contribuir en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes a partir de el estudio de la geometría del espacio a través de situaciones problema que ofrezcan a los educadores la oportunidad de desarrollar estrategias didácticas que permitan avances o logros significativos en el aprendizaje de conceptos, que potencien la creatividad y el aprendizaje integral del estudiante (construcción de conocimiento), utilizando algunas herramientas computacionales.

Por lo tanto, se plantea un marco conceptual enmarcado dentro de los cánones de la comunicación universal en matemáticas, el cual se adapta para argumentar este trabajo. Tales como: “Situación problema”, “Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas”, “La geometría en la educación”, “Espacio geométrico” y “El papel que juegan las herramientas computacionales en la enseñanza de la geometría”.

3.1 SITUACIÓN PROBLEMA.

Muchos documentos hacen referencia a lo que es un problema, sin embargo al investigar y trabajar con la definición de situación problema, se adopta la definición del libro de COU de Anaya escrito por Miguel de Guzmán, José Cólera y Adela Salvador que dice:

“Una situación problema es aquella situación que se presenta al estudiante de cierta temática en la que sabe más o menos, o bien con seguridad, a donde quiere ir, pero no sabe cómo. Una situación problema existe cuando hay tres elementos: una situación inicial, una situación final u objetivo a alcanzar y restricciones o pautas respecto de métodos, actividades, tipos de operaciones, etc., sobre los cuales hay acuerdos previos”.

La dificultad que tiene el estudiante al abordar situaciones problema consiste precisamente en aclararla y en dar con algún camino adecuado que lo lleve a la meta, empleando los conocimientos previos, la creatividad, el razonamiento etc., situándose sistemáticamente ante aquellas cuya solución debe realizarse con su activa participación y en la que el objetivo no es sólo la obtención del resultado, sino además, su capacitación independiente para la resolución de otras situaciones en general.

A veces, no sabemos si la herramienta adecuada para la resolución de la situación problema está entre la colección de técnicas que dominamos, o ni siquiera si se ha creado una técnica que pueda ser suficientemente potente para resolver dicha situación problema.

El planteamiento de situaciones problema "imposibles" de resolver, ha sido una constante entre los matemáticos de todas las épocas, y el conseguir llegar a resolverlas o demostrar su imposibilidad, ha sido su fin a lo largo de la Historia del Mundo de las Matemáticas**.**

En la resolución de situaciones problema se difumina la distinción entre teoría y práctica de las metodologías tradicionales, resolver una situación problema implica realizar tareas que demandan procesos de razonamientos más o menos complejos y no simplemente una actividad asociativa y rutinaria; se busca que el docente sea el orientador y comunicador activo e interactuante en los procesos de apropiación y reconstrucción de los conocimientos y que los estudiantes sean protagonistas responsables de su propio aprendizaje, sepan qué van a hacer y con qué finalidad, es decir, la resolución de problemas es una estrategia de enseñanza que implica el desarrollo de una serie de habilidades tanto en los profesores como en los estudiantes. Los profesores deben ponerse en la tarea de buscar situaciones problema que llamen la atención de los estudiantes, de tal manera que al resolver dichas situaciones desarrollen competencias. Aportando de esta manera elementos para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Ahora bien, un aspecto fundamental es la consideración de la resolución de situaciones problemas como una forma de pensar, donde el estudiante desarrolla diversas habilidades y utiliza diferentes estrategias para el aprendizaje de las matemáticas; de ahí que el término situación problema se vincula no solo a situaciones específicas para encontrar soluciones, sino también para aprender algún concepto matemático. Es decir, tanto al resolver una situación problema o al aprender un contenido el estudiante tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de la situación problema, usar representaciones, estrategias cognitivas y utilizar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver o entenderlo.

Además para diseñar situaciones problema según Álvaro Ramírez Quevedo se debe tener en cuenta:

- La ciencia avanza y se desarrolla sobre la base de solución de problemas.

- La investigación indaga y aborda la solución de problemas.

- La inteligencia, la creatividad, la competitividad, el razonamiento complejo, ambientes y contextos están relacionados en la resolución de situaciones problema.

- La enseñanza debe partir de situaciones problema permitiendo la evolución de los conceptos.

- Los ejercicios de aplicación, comprensión e interrogantes de los textos son mal llamados problemas y estos no son ni problemas científicos ni escolares, tan sólo son ejercicios; "no se construye nuevo conocimiento".

- Los docentes buscan especialmente la comunicación, comprensión, apropiación, aplicación de lo enseñado en diferentes contextos y reconstruir el conocimiento formal o espontáneo[1].

También se puede considerar dentro del análisis de situaciones problema la secuencia de procesos que se puede llevar a cabo:

Diseñar → *Explorar* → *Modelizar* → *Conjeturar* → *Definir* → *Argumentar* → *Demostrar*

[1] Se refiere al saber obtenido sin ayuda de la demostración, contemplación inmediata de la verdad. (Álvaro Ramírez Quevedo).

Luego, los objetivos del aprendizaje en la resolución de situaciones problemas son:

- Entender los propósitos y usos del conocimiento que se están aprendiendo.
- Aprender activamente utilizando el conocimiento.
- Aprender cuándo pueden ser utilizados los conocimientos o las estrategias.
- Aprender en contextos múltiples, la abstracción del conocimiento ligado a sus usos.

De a cuerdo con lo anterior para el aprendizaje y el desarrollo de las competencias en la geometría se concibe al estudiante como un sujeto activo, que se plantea preguntas, que formula hipótesis, que las comprueba o reelabora, a partir de la interacción con los demás y que al cambiar y/o afirmar su concepción sobre el objeto de conocimiento lo transforma y lo recrea.

3.2 APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Una de las tareas centrales, en la que siempre ha estado empeñada la Educación Matemática, es el desarrollo de procesos de razonamiento en los estudiantes. Sin embargo, las corrientes formalistas que influyeron en los currículos escolares desde mediados del siglo XX hasta los años 70, concibieron el razonamiento como la formación del pensamiento deductivo, propio para la demostración en matemáticas, y ligaron la enseñanza escolar a esta concepción[2].

La visión que se tenía del aprendizaje, como proceso receptivo de transferencia de conocimientos, y de la deducción formal, de la comunicación en matemáticas, hizo que la atención de la enseñanza de las matemáticas se centrará en la construcción de demostraciones gobernadas por ciertas reglas y no en procesos de razonamiento asociados a dicha tarea.

[2] Carlos Vasco (1988) “Sistemas Geométricos” un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas

Actualmente, en el panorama mundial, debido a las nuevas perspectivas culturales en la enseñanza de las matemáticas, las cuales obedecen a la influencia de las tendencias constructivista y socio-cultural bajo la línea ideológica de Ernest, Tymoezko y Von Glaserfeld, se ha generado un movimiento que revive el interés por el estudio de la enseñanza y el aprendizaje, favorecido por los avances en la Educación Matemática que han cuestionado la forma clásica de ver la geometría y por tanto de cómo enseñarla. Los fenómenos, problemas, teorías y métodos de la geometría se convierten entonces en materia de interés para la Educación Matemática[3].

Según la tendencia socio-cultural se tiene que:

- Las matemáticas son una necesidad social por que constituyen un vehículo de expresión, interpretación y comunicación de las diversas actividades humanas. Proporcionan las bases para planear estrategias y formular procedimientos, bajo esquemas de racionalidad científica. Ofrecen un lenguaje para representar relaciones cuantitativas y espaciales con las cuales se puede interpretar el mundo.

- El aprendizaje de las matemáticas se construye sobre la base de diversos conocimientos, entre los cuales están los intuitivos e informales, producto de la cultura personal y aquellos que son resultado de los conocimientos correspondientes a la matemática científica. La construcción del significado de los conceptos matemáticos se logra a través del establecimiento del vínculo entre dichos conocimientos.

- Las prácticas educativas deben propiciar la expresión libre y espontánea de ideas, que reflejan el campo de experiencias de los individuos, y la justificación de tales ideas mediante diferentes formas de argumentación. Este tipo de actividades se constituye en elemento potenciador del desarrollo de competencias comunicativas y cognitivas.

[3] Hershkowitz (2001) Acerca del Razonamiento en la Geometría

Bajo los presupuestos descritos, se abre el panorama hacia una nueva visión de la actividad geométrica y de su enseñanza; pues se tiene en cuenta lo que sabe y hace el estudiante, se hace énfasis en:

- Habilidad motriz.
- Estética.
- Matematización de conceptos reales.
- Reconocimiento de fenómenos matemáticos en la naturaleza.
- Comprensión del arte.
- Fantasía.

Pues se debe tener en cuenta que la geometría no es sólo una parte importante, sino esencial del aprendizaje de las matemáticas. La geometría reaviva el interés en las matemáticas al presentar problemas que son susceptibles de ser visualizados para ser comprendidos.

En muchos casos en la enseñanza de la geometría, no hay una motivación hacia los estudiantes para que logren un buen aprendizaje y que puedan a través de actividades ayudarlos a construir su propio conocimiento geométrico; se le presenta al estudiante el conocimiento de esta área como algo terminado, estático, con un enfoque axiomático.

Poco a poco, se ha podido evidenciar como es el caso de las universidades en general; que los estudiantes no tienen unas buenas bases teóricas acerca de esta área, esto puede ser debido a que la enseñanza de la geometría se ha desplazado a un segundo nivel debido a la poca intensidad horaria, a la fusión con la aritmética o el álgebra dentro del programa de matemática actual.
Esta situación se ve agravada por varios hechos:

- La falta de un currículo coherente para la enseñanza de la geometría desde el preescolar hasta el último grado de escolaridad.

- La falta de material didáctico para apoyar a los profesores en la enseñanza de la geometría.

- La deficiente preparación del docente en esta área de la matemática.

Algunos profesores de matemáticas experimentan sentimientos de impotencia frente a los reducidos progresos que muestran una parte más o menos importante de sus estudiantes. Describen esa realidad al destacar que algunas veces no hay manera de que los estudiantes comprendan un nuevo concepto; en ocasiones, parece que han captado los conceptos o propiedades recién introducidos, pero sólo son capaces de utilizarlos en situaciones idénticas a las presentadas por el profesor.

De otro lado, es frecuente que los estudiantes puedan resolver con bastante facilidad problemas concretos, pero que carezcan de ideas cuando se trata de resolver los mismos problemas planteados en un contexto diferente; es así como la mayoría de los estudiantes tienden a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver problemas, entre otros[4].

3.3 LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN

Tomando algunos aspectos sobre el aprendizaje en "*El libro del docente*" de Fregona D. (1997), basados en el artículo Geometría y Magnitudes, donde se menciona: "*el aprendizaje es incuestionablemente el otro polo esencial de cualquier proyecto educativo*", por tanto es apropiado poner la debida atención a las principales variables que intervienen en un proceso coherente de enseñanza y aprendizaje. Consecuentemente, con los diferentes aspectos o "dimensiones" (consideradas en su más amplio significado) deben ser tomados en cuenta:

3.3.1 **La dimensión social**, con dos polos:

[4] Hoffer A. La geometría es más que demostración. 1990

- El polo cultural, es decir, la construcción de antecedentes comunes (conocimiento y lenguaje) para toda la gente que comparte un mismo progreso; ya que la vida de hoy se lleva acabo en un mundo multicultural e interconectado. Este hecho exige que la educación se oriente con el fin de desarrollar capacidades, competencias, actitudes y valores que faculten al estudiante a actuar en ambientes que exigen el aprovechamiento y apropiación de los grandes avances tanto en tecnología como en información.

- El polo educativo, consiste en el desarrollo de criterios, internos para cada individuo, para su auto consistencia y responsabilidad. El estudiante debe tener la posibilidad de deducir, descubrir, crear conocimientos y desarrollar habilidades.

3.3.2 **La dimensión cognitiva.** Procesos con los cuales, partiendo de la realidad y de los conocimientos básicos, se conduce gradualmente hacia una percepción más refinada del espacio.

3.3.3 **La dimensión epistemológica**, tiene que ver con la habilidad para explorar la interrelación entre la realidad y la teoría a través del modelado (hacer previsiones, evaluar sus efectos, reconsiderar selecciones). Es así que la axiomatización permite liberarse de la realidad; de esta manera puede ser vista como un recurso que facilita futuras conceptualizaciones.

A través del contacto con realidades geométricas deben ser estimuladas y desarrolladas habilidades para el pensamiento geométrico

A estas habilidades pertenecen:

- Concepción del espacio.
- Orientación espacial.
- Pensamiento espacial.
- Habilidad para la percepción visual.

- Percepción de la situación espacial.
- Percepción de relaciones espaciales.

3.3.4 La dimensión didáctica, es la relación entre la enseñanza y el aprendizaje. En esta dimensión se encuentran muchos aspectos, tales como:

➢ Hacer que interactúen varios campos (tanto al interior de la matemática como entre las matemáticas y otras ciencias).

➢ Asegurar que los puntos de vista de los profesores y los estudiantes sean consistentes en un estudio dado. Por ejemplo, tener en cuenta que distintas escalas de distancia pueden involucrar diferentes concepciones y procesos adoptados por los estudiantes aún cuando la situación matemática sea la misma: En un "espacio de objetos pequeños", la percepción visual puede ayudar para hacer conjeturas y para identificar propiedades geométricas; cuando se está tratando con el espacio donde usualmente nos movemos (por ejemplo, el salón de clases) todavía resulta fácil obtener información local, pero puede dificultarse lograr una visión global; en un "espacio a gran escala" (como es el caso de la geografía o de la astronomía) las representaciones simbólicas son necesarias a fin de analizar sus propiedades.

➢ Dar la debida consideración a la influencia de las herramientas disponibles en situaciones de enseñanza y de aprendizaje (desde la regla y compás tanto como otros materiales concretos, hasta calculadoras graficadoras, computadoras y software específico)

➢ La geometría es el campo de las matemáticas, en el que no solamente importa la capacidad para el pensamiento abstracto, en el que no se trata solamente de traducir y comprimir aspectos de la vida real en números y ecuaciones hasta que no queda nada de su propia naturaleza.

Es de notar que no se necesita decir que todas estas dimensiones están interrelacionadas unas con otras y que también debieran relacionarse apropiadamente a las diferentes edades y niveles escolares: primaria, secundaria, medio superior (en donde se empiezan a diferenciar las vocaciones académicas y técnicas), universitario incluyendo la formación de profesores.

3.4 ESPACIO GEOMÉTRICO

Según el artículo, "Un Recurso para la Enseñanza de la Geometría" de *Miranda C. Vicente.* (1993) quien menciona que: "para trabajar el espacio se puede construir cuerpos con papel, alambre, plastilina, estudiar aspectos métricos, realizar cortes, etc., y también volar siguiendo sus aristas e imaginarse como es el movimiento en el espacio; ya que la formación de un cuerpo geométrico que el estudiante realiza en su mente para poder interpretar los movimientos que lo recorren en órdenes, implica tener una visión intuitiva muy clara de él, visión que es muy diferente de la que obtenemos con la construcción manual o con el dibujo".

"La percepción y la representación espacial son elementos básicos del conocimiento de las figuras de nuestro entorno"[5]

Si se parte de un pequeño análisis de diferentes planteamientos metodológicos sobre el trabajo del espacio, el conjunto de actividades que se proponen se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Creación de habilidades que potencien la imaginación y orientación geométrica: Construcción y representación del espacio: maquetas, mapas, orientación en el espacio, construcción de objetos en el espacio con la ayuda de algún software.

- Clasificación intuitiva de las formas que nos rodean a partir de un análisis de sus características.

---

[5] *Yábar J. M.* (1993) " Pensamiento espacial y sistemas geométricos"

- Representación gráfica del espacio: reconocimiento de objetos tridimensionales que percibimos mediante las representaciones planas y relaciones tridimensionales en el entorno.

Se avanza hacia una enseñanza del espacio más viable, y no tan descriptiva y formalista. Hay un esfuerzo, en las nuevas formas de enseñanza, para trabajar procedimientos que potencien la percepción y la representación espacial, aunque quedan muchas habilidades y recursos sin desarrollar.

3.5 EL PAPEL DE LAS HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Cualquier proceso de construcción de conocimiento esta mediado por un instrumento ya sea material o simbólico. El lápiz y el papel son instrumentos que utilizamos frecuentemente la mayoría de las personas. Estos instrumentos son un buen indicio de la naturaleza de las actividades materiales e intelectuales de las distintas épocas, pues cualquiera que sea el instrumento de mediación este modifica la naturaleza del conocimiento que construimos.

El Doctor Luis Moreno Armella del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados (CINVESTAV) Del Instituto Politécnico Nacional (IPN) de ciudad de México, D.F., plantea que “La presencia de los instrumentos de mediación transforma de raíz la acción cognitiva del estudiante. En efecto, la presencia de los instrumentos tecnológicos, determinan la estructura de una nueva acción instrumental, así como la presencia de una herramienta material, asociada a un proceso técnico, determina la forma de trabajo que se puede desarrollar con dicha herramienta”.

“Vigotsky enfatizó que los instrumentos de mediación tienen una naturaleza socio cultural puesto que la acción mediada no puede ser separada del entorno social donde se desarrolla.

De ahí que no se puede ignorar la influencia que ejerce el currículo, la cultura de la institución y la cultura social donde se desenvuelve el estudiante[6]."

Teniendo en cuenta sus planteamientos podríamos decir que los medios computacionales conducen a una redefinición de las fronteras entre la acción individual y la acción social. El estudiante, auxiliado de sus instrumentos computacionales, construye una versión del conocimiento, es decir, los instrumentos computacionales otorgan una direccionalidad al proceso de construcción del conocimiento.

En un comienzo, los primeros usos del computador en matemáticas fueron para facilitar tareas mecánicas, como operar números grandes o aplicar análisis numérico para resolver ecuaciones. En la década de los sesenta se hizo posible la manipulación simbólica, y en los años setenta fueron posibles las representaciones gráficas de las funciones. Hacia los años ochenta comenzaron a vislumbrarse vías para crear ambientes tecnológicos educativos y fue así como hacia el final de esta década, se hizo posible la manipulación de representaciones matemáticas para proporcionar un ambiente de intercambio de representaciones sin tener que salir de la notación matemática[7].

Sin embargo, las primeras aplicaciones del computador estaban condicionadas a la posibilidad de programar, y la complejidad de la relación entre lo que se quería hacer y las instrucciones que había que proporcionar a la máquina era tal, que el sólo aprendizaje del programa en si mismo era un obstáculo muy grande para poder hacer uso de la tecnología. Solo hasta que la relación hombre-maquina se facilito se dio lugar a lo que se ha venido llamando "Un nuevo nivel de realismo matemático".

Por otra parte, los programas computacionales tienen una característica que no se consigue con lápiz y papel y es que son dinámicos. Dicha característica permite colocar a un nivel

---

[6] Seminario de Incorporación de Nuevas Tecnologías realizado en abril de 1998, bajo la orientación del Doctor Luís Moreno Armella.

[7] Se ha considerado algunos de los aportes elaborados por el Ministerio de Educación Nacional (1998) en un informe conjunto "Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo"

cognitivo más elemental las invariantes de un objeto matemático, que se conservan aun cuando éste se someta a transformaciones. Por ejemplo, con papel y lápiz, cuando se trabaja un concepto de simetría, lo que se hace es dar una descripción lingüística de la propiedad geométrica y simular la transformación, mientras que en el computador la transformación se ejecuta. La posibilidad de disponer de un software en geometría nos permite tener acceso a formas de representación dinámicas del objeto matemático, en las que se puede apreciar cual es la propiedad que permanece cuando un objeto se somete a una transformación.

El uso de la tecnología proporciona sistemas interactivos que constituyen una nueva forma de aprender matemáticas, en particular geometría; pues el estudio de la geometría antes se hacia de manera estática con objetos abstractos y con sus representaciones en el papel. Ahora disponemos de programas computacionales dinámicos para su estudio, donde se crea un micromundo de experimentación que propicia la interacción concreta del estudiante con los objetos geométricos, y facilita la construcción del conocimiento, estos programa suministran un ambiente en el cual los estudiantes se animan a especular, crear imágenes, argumentar y justificar. También les permite usar los errores constructivamente para dinamizar su proceso de aprendizaje.

Por ejemplo al deformar una figura que se ha producido a través de una construcción geométrica genera muchos puntos de vista, y el vínculo dinámico entre ellos facilita la formulación y comprobación de conjeturas. A diferencia del trabajo en lápiz y papel, el empleo de programas computacionales especializados en gráficas en tercera dimensión permite explorar muchas figuras en tres dimensiones, rotarla, trasladarlas, cortarlas, estudiar sus ejes de simetría, etc., sin el problema de las dificultades físicas de la construcción de los modelos, se desarrolla no solo la capacidad espacial y de orientación, sino también el razonamiento geométrico.

Algunos de esos programas computacionales son:

- CABRI-GÉOMÈTRE II: es un programa desarrollado por Ives Baulac, Franck Bellemain y Jean-Marie Laborde del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica del IMAG (Instituto de Informática y Matemáticas Aplicadas de Grenoble, Francia). Es un programa netamente didáctico geométrico, es un programa que ayuda a estudiar las propiedades geométricas de las figuras y sus múltiples componentes para luego entender mejor la rigurosidad matemática de las demostraciones. Permite la exploración y manipulación directa y dinámica de la geometría, a través de la interacción didáctica.

- CABRI 3D: Es el software de geometría interactiva 3D basado en la nueva tecnología Cabri de 3a generación. Permite construir y manipular figuras en el espacio (puntos, rectas, segmentos, semirrectas, vectores, círculos y cónicas, planos, triángulos, polígonos, esferas, cilindros, conos, poliedros, transformaciones…), permite visualizar una figura bajo diferentes ángulos.
- AutoCAD: Es un programa de diseño asistido en 2 y 3 dimensiones, es del tipo vectorial donde se dibuja figuras básicas (líneas, circunferencias, rectángulos, etc.), gráficos más complejos, se puede organizar los objetos por medio de capas y bloques.

En ningún caso estos programas tienden a desplazar la labor del profesor en la clase o del texto guía, simplemente es otra ayuda al servicio del profesor y del estudiante para afianzar sus conocimientos.

De ahí que la intensión de nuestra propuesta no es reducir los programas computacionales a un simple programa para realizar “dibujos” pues el potencial de estos recursos para la resolución de situaciones problema es enorme, principalmente por su gran capacidad para la representación, la visualización de relaciones y estructuras conceptuales.

4. METODOLOGÍA

La metodología se centró en la elaboración de notas de clase y talleres (a partir de situaciones problema) sobre los temas de “Simetría y Traslación en el Espacio Euclidiano”. Se procedió a desarrollar un capítulo preliminar llamado “Enlace, Ordenación y Sentido en el Espacio” que contiene conceptos, definiciones y teoremas indispensables para trabajar los temas de “Simetrías en el Espacio Euclidiano”, “Traslación y Paralelismo en el espacio Euclidiano” y “Diseño de talleres”. Dichos temas se basaron en el Texto Fundamentos de Geometría Métrica de Adam Puig en el capitulo IX “El Espacio Euclidiano” y “Geometría Plana y del Espacio con nociones de Geometría Proyectiva” de Manuel Guiu.

A continuación se presentaran cada una de las actividades descritas anteriormente, donde se evidencia el cumplimiento del objetivo establecido en el plan de trabajo:

4.1 ESTUDIO DE “SIMETRÍAS Y TRASLACIÓN EN EL ESPACIO EUCLIDIANO”

El estudio de los movimientos de Simetría y Traslación en el espacio euclidiano se realizó mediante una revisión bibliográfica encontrando muy poco material. Los textos trabajados fueron: “Fundamentos de Geometría Métrica” de Adam Puig y “Geometría Plana y del Espacio con nociones de Geometría Proyectiva” de Manuel Guiu. Se confrontaron las ideas y se aclararon dudas, conceptos y demás teoría planteada en los textos; llegando a un consenso para así pasar a la elaboración de las notas de clase.

4.2 ELABORACIÓN DE LAS NOTAS DE CLASE

El objetivo de estas notas de clase es facilitar al lector la orientación y comprensión de dichos temas, éstas se elaboraron ordenando los conceptos, propiedades y teoremas de una manera más clara y concisa, es decir recontextualizando la teoría encontrada en los textos ya mencionados; manteniendo de alguna manera el método semi axiomático de presentación, ya que es imposible alejarse del todo de ésta, pues es necesaria.

Algunos teoremas se escribieron en forma de implicación con el propósito que el lector (estudiante) pueda determinar la hipótesis y la tesis; se ilustró cada axioma, teorema o definición mediante gráficas; se propusieron algunos ejemplos y situaciones problemas durante el desarrollo de cada temática. Para cada uno de los temas se diseñaron talleres a partir de situaciones problema las cuales fueron pensadas teniendo en cuenta el marco conceptual. Se realizaron varios borradores los cuales fueron revisados por nuestra asesora hasta culminar en las notas de clase que se presentan en este trabajo, y que sin duda continuaran sujetas a modificaciones.

El documento esta estructurado de la siguiente forma: un primer capítulo titulado “Enlace, Ordenación y Sentido en el Espacio” (ver Capítulo 5) que contiene conceptos, definiciones y teoremas básicos para continuar con el segundo y tercer capítulo titulados “Simetrías en el Espacio Euclidiano” y “Traslación en el espacio Euclidiano” respectivamente (ver capítulos 6 y 7).

El software Cabrí Géomètre no nos permitió aplicar algunas definiciones y resolver algunas situaciones problema en el espacio euclidiano mediante el diseño de graficas, sin embargo nos fue de gran ayuda para la realización de las notas en cuanto a las figuras y la representación grafica de algunas de las definiciones y propiedades de los temas propuestos, mientras que el Autocad y cabri 3D; fueron de gran ayuda para la visualización de las figuras en tres dimensiones, las cuales se muestran en el documento con sus diferentes puntos de vista, lo que facilita en gran medida la comprensión de la teoría mediante la visualización de transformaciones en el espacio Euclidiano.

De acuerdo con lo anterior los resultados obtenidos fueron:

- Preliminares: Enlace, Ordenación y Sentido en el Espacio. (*Ver capítulo 5*)

- Simetrías en el Espacio. (*Ver capítulo 6*)
- Traslación y Paralelismo en el Espacio. (*Ver capítulo 7*)

4.3 DISEÑO DE TALLERES

Bajo esta metodología se diseñaron talleres donde se estudiaron las temáticas a través de situaciones problema, utilizando como mediadores los software autocad y cabri 3D, los cuales tienen gran capacidad para la representación y visualización de relaciones y estructuras conceptuales.

De ahí que para el diseño de las situaciones problema se tuvieron en cuenta los siguientes presupuestos, apoyado en las ideas de Álvaro Ramírez Quevedo: (Ver Marco conceptual Pág.5 y 6)

- La ciencia avanza y se desarrolla sobre la base de solución de problemas teniendo en cuenta que los conceptos deben evolucionar.

- Aspectos como la inteligencia, la creatividad, la competitividad, el razonamiento complejo, ambientes y contexto deben ir relacionados con la solución de situaciones problema.

- La enseñanza debe partir de situaciones problema permitiendo la evolución de los conceptos.

- Los ejercicios de aplicación, comprensión e interrogantes de los textos son inconsistencias no resueltas por los estudiantes pero conocidas por el profesor, y al resolverlas en conjunto se puede conseguir: Apropiación y comprensión del tema, reconstrucciones de ideas y conceptos básicos, aplicaciones en contextos diferentes.

- Como docentes se busca especialmente la comunicación, comprensión, apropiación, aplicación de lo enseñado en diferentes contextos y reconstruir el conocimiento formal o espontáneo.

Y para llevar a cabo el análisis de dichas situaciones problema se tuvieron en cuenta conceptos tales como: Creatividad, entendida como la capacidad que tiene el estudiante de creación e imaginación. Comprensión y apropiación del tema esto es, que el estudiante entienda, razone lo enseñado y pueda aplicarlo.

Estos talleres juegan un papel importante por que durante la elaboración de las notas de clase, se diseñaron paralelamente sobre los temas propuestos (ver Capítulos 5,6 y 7), cada uno de ellos cumpliendo con objetivos puntuales como:

- Evaluar los conocimientos previos e intuitivos que posee el lector acerca de “simetrías y Traslación en el Espacio Euclidiano”.

- Reforzar la temática propuesta, ya que como se dijo en el marco conceptual se espera que las situaciones problema planteadas en los talleres cumplan con los objetivos del aprendizaje. (Ver pagina 6), además que permitan el desarrollo de habilidades para usar el conocimiento en contextos específicos, evaluar su pensamiento y progresos, etc..

- Comprobar los avances en el desarrollo del pensamiento geométrico.

- Precisar la comprensión de conceptos y propiedades de la temática planteada.

- Comprender la teoría estudiada por medio de la resolución de situaciones problema propuestas en las notas.

- Aplicar los conceptos estudiados en otras áreas, por ejemplo: espejos planos, paralela media, combinatoria, entre otros.

- Permitir al docente que oriente estos temas con la utilización de ayudas tecnológicas tales como: Autocad, Cabri Géomètri y Cabri 3D.

Los talleres propuestos están sujetos a modificaciones en la medida que se apliquen en el desarrollo de cursos de geometría y de acuerdo con las sugerencias que propongan los lectores de este documento.

4.4 SOCIALIZACIÓN

Después de haber elaborado las Notas de clase y los talleres se presentaron al grupo de Educación Matemática del Departamento de Matemáticas con el fin de poner en consideración y evaluación su diseño.

A continuación presentaremos el capítulo 1 “Enlace, Ordenación y Sentido En el Espacio”. Estas notas son un capítulo de Introducción que permitirá una mayor comprensión a los temas siguientes que son Simetría y Traslación en el Espacio, en estas se encontraran: Definiciones, teoremas, axiomas y propiedades que se necesitan para trabajar en el Espacio, además se espera que quien lea estas notas debe manejar conceptos de la “geometría plana” para tener una mejor comprensión de la “geometría en el espacio”.

5. ENLACE, ORDENACIÓN Y SENTIDO EN EL ESPACIO

5.1 CONCEPTO DEL MOVIMIENTO

El concepto de movimiento está relacionado con el concepto de cuerpo rígido, el cual, se entiende como aquel que conserva invariables las distancias mutuas de sus puntos al moverse; pero, a su vez, mover un cuerpo es variar de posición sus puntos sin alterar sus distancias mutuas. El concepto de distancia nace precisamente, por abstracción, como cualidad invariante en los movimientos. De aquí que el movimiento solo pueda definirse indirectamente estableciendo un sistema de axiomas que traduzca sus propiedades esenciales.

5.2 AXIOMAS DEL MOVIMIENTO

Los axiomas que caracterizan las propiedades del movimiento en el plano, pueden servir para caracterizar las propiedades del movimiento en el espacio tan solo modificando algunos de sus términos para darle una interpretación espacial.

Asumiremos como axiomas de movimiento en el espacio euclidiano los siguientes:

5.2.1 Los movimientos del espacio son transformaciones puntuales biunívocas del mismo**.** Ello significa que a elementos alineados o coplanarios le corresponden elementos homólogos también alineados o coplanarios.

5.2.2 Todo movimiento del espacio conserva las relaciones de incidencia, ordenación y sentido. A una serie ordenada de rectas, semirrectas o semiplanos corresponde otra serie de rectas semirrectas o semiplanos ordenados y de igual sentido.

5.2.3 Ningún movimiento puede transformar una figura geométrica en parte de ella misma. Por ejemplo, un segmento en el doble de él o un ángulo diedro en su mitad.

5.2.4 El producto o transformación resultante de la aplicación de los movimientos es otro movimiento. La transformación recíproca de todo movimiento es otro movimiento. Por ejemplo, la identidad es caso particular del movimiento, es decir, es el producto de un movimiento cualquiera por su recíproco.

5.2.5 Existe un movimiento y sólo uno que transforma una semirrecta **r** en otra semirrecta **r'** y un semiplano **α** limitado por la recta **r** en un semiplano **α'** limitado por la semirrecta **r'.**

Es muy importante observar que la distinción entre movimientos directos e inversos en el plano deja aquí de tener objeto, pues al invertir el plano se lleva en la inversión el semiespacio desde el cual se supone observado y, por consiguiente, esta alteración del punto de vista complementa el segundo axioma.

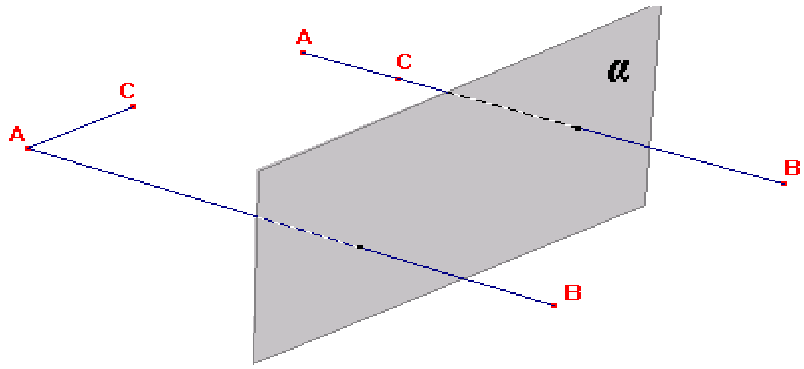
Por esta razón se le añade la conservación del sentido en la modalidad espacial a dicho axioma. Es decir: El movimiento consiste en desplazar las figuras conservándolas en el plano, si el movimiento deja por fuera del plano a las figuras, para colocarlas de nuevo sobre el mismo pero en sentido contrario al que tenían, entonces es una transformación.

5.2.6 Todo plano **α** establece una clasificación de los puntos del espacio, no contenidos en él, en dos únicas regiones tales que:

- Todo punto exterior al plano **α** pertenece a una u otra región. El segmento que une dos puntos **A** y **C** de la misma región no corta al plano **α.**

- El segmento que une dos puntos **A** y **B** de distinta región corta al plano **α.**

Figura 1. Puntos exteriores al plano α.



Observaciones:

- Se llama semiespacio al conjunto de puntos de cada región unido al conjunto de los puntos del plano que la limita llamado borde.
- Como los puntos del plano pertenecen, a ambos semiespacios y definen una u otra cara del plano, entonces el plano tendrá dos caras.

5.2.7 Si dos puntos están en un mismo semiespacio también están en él todos los puntos del segmento que determinan.

5.3 INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

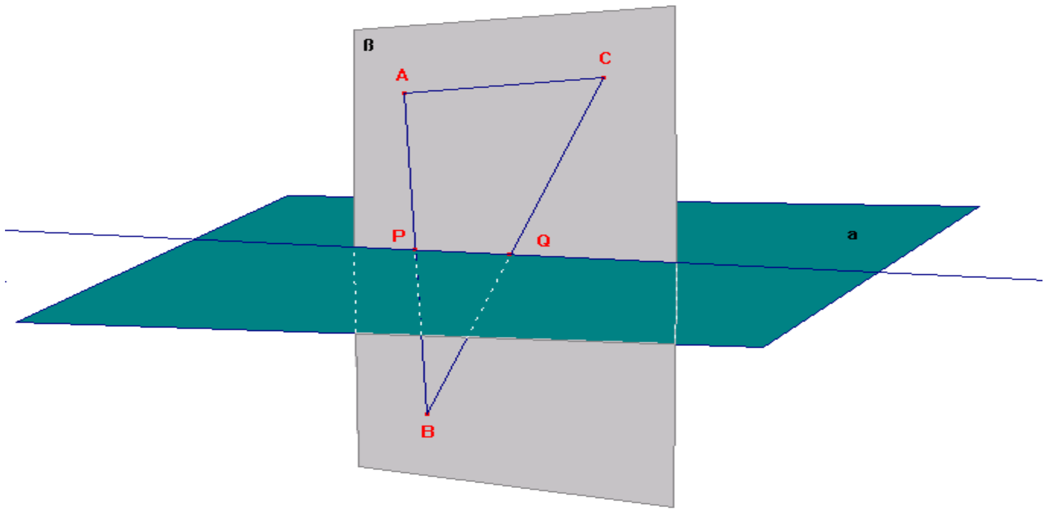
Teorema.

Dos planos con un punto común **P**, tienen una recta común que pasa por dicho punto.

Demostración

- Sea **P** el punto común a los plano **α** y **β.** Para determinar que los planos tienen una recta común, bastará probar que tienen otro punto común, **Q.**
- Sea ℓ una recta que pasa por **P** y esta contenida en **β.** Sean **A** y **B** dos puntos.
- Sea **C** un punto del plano **β,** exterior a dicha recta ℓ.

Figura 2. Intersección de dos planos.



Si **C** está en el plano **α** el teorema está demostrado. Si **C** no está en el plano **α**, entonces uno de los segmentos $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$ corta a **α** en un punto **Q** común a los dos planos, distinto de **P.** Luego la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ será común a los dos planos que se llaman **secantes entre sí.**

Actividades:

1. Dados cuatro puntos no coplanares, determinar el número de planos que determinan.
2. Dados dos puntos y una recta que no pase por ellos, determinar el número de planos que determinan.

5.4 POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

5.4.1 ENTRE DOS RECTAS.

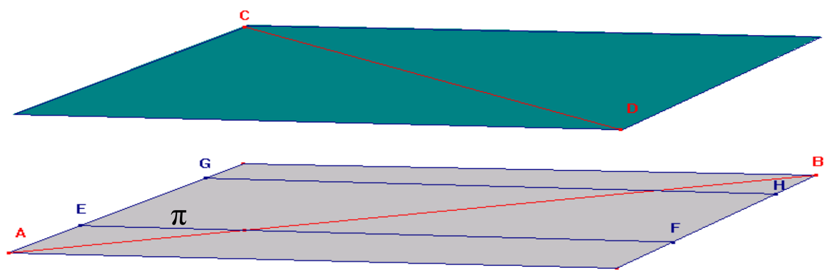
Dos rectas en el espacio pueden ser:

- **Concurrentes:** Cuando están en un mismo plano y se cortan.
- **Paralelas:** cuando están en un mismo plano y no se cortan.
- **Cruzadas:** cuando no están en un mismo plano y no se cortan.

Ejemplo:

En el plano π. La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es **concurrente** con las rectas $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{GH}$, la recta $\overleftrightarrow{EF}$ es **paralela** con la recta $\overleftrightarrow{GH}$; Pero las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{GH}$ son **cruzadas** con la recta $\overleftrightarrow{CD}$ que está en el plano β. (Ver figura 3)

Figura 3. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.



Ejemplo:

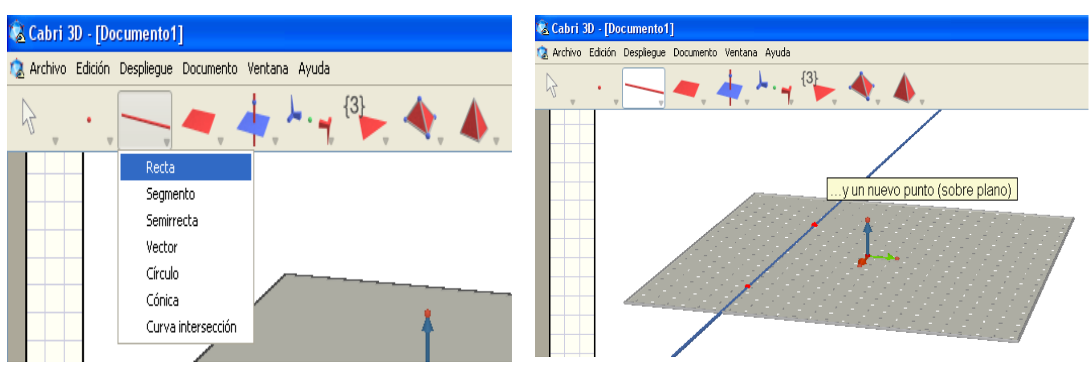
¿Cuántos planos determinan cuatro rectas paralelas de modo que no haya tres coplanares?

Solución:

Con la ayuda del software cabri 3D se construye cuatro rectas de tal manera que no haya tres en un mismo plano de la siguiente manera (figuras 4 a 10):

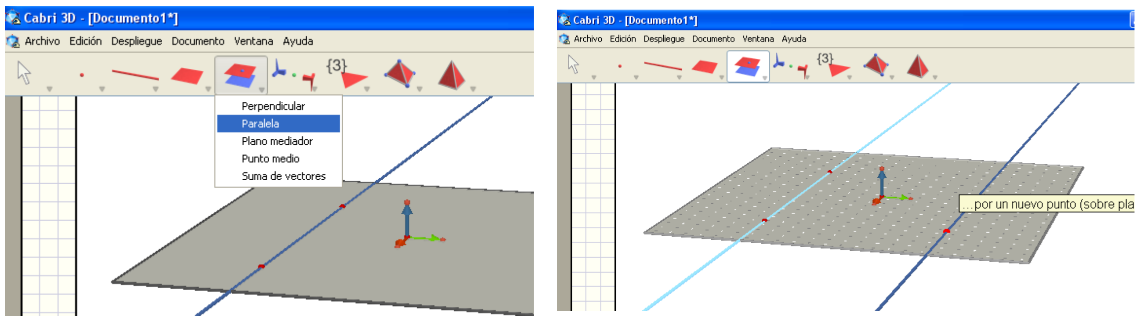
a. Del menú seleccionar la opción recta, después se ubica sobre dos puntos del plano (dos puntos determinan una recta) indicado en la pantalla.

Figura 4. Representación de la solución geométrica



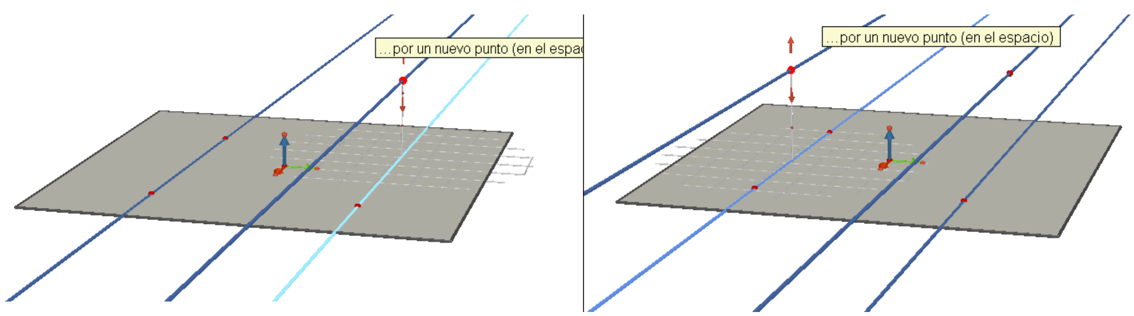
b. Para construir las otras rectas paralelas a la primera seleccionar la opción paralela que se encuentra sobre el menú. Seleccionar la recta y luego un punto exterior por donde pasa la nueva recta paralela a la inicial.

Figura 5.



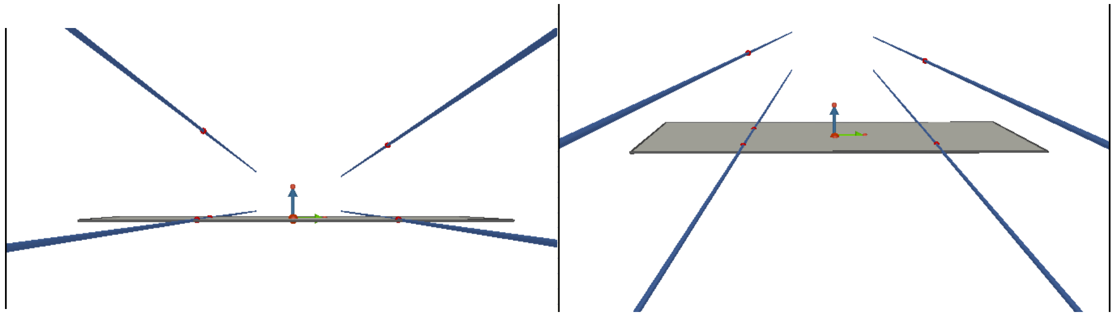
c. Las rectas faltantes se construyen de forma análoga teniendo en cuenta que tres de ellas no sean coplanarias. Para ello, con shift sostenido se puede ubicar un punto desplazándose verticalmente por el espacio, obteniendo:

Figura 6.



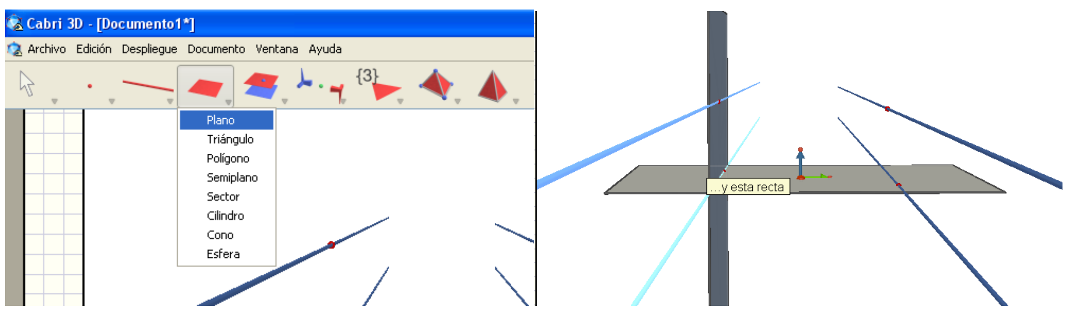
d. Una vez terminada la ubicación de las cuatro rectas paralelas se puede cambiar el ángulo de visión de la imagen, sosteniendo shift izquierdo sobre ella y moviendo el mouse en dirección deseada:

Figura 7.



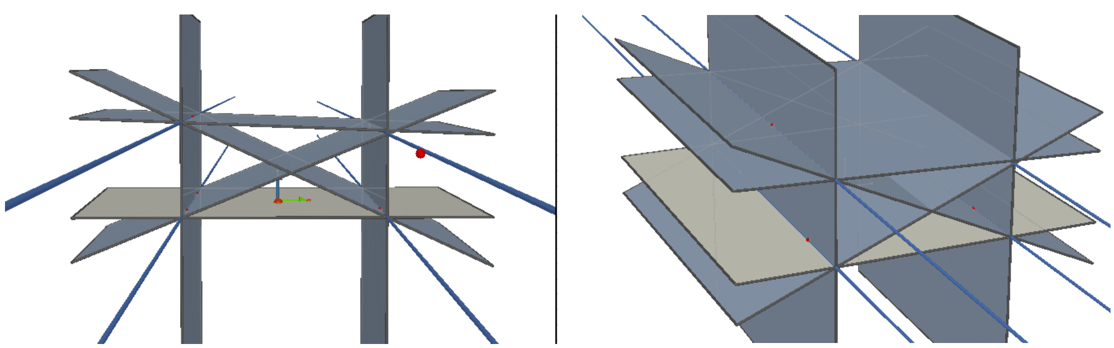
e. Para la construcción de los planos que satisfacen la solución de la situación problema, se debe tener en cuenta que: dos rectas paralelas conforman un plano. Haciendo clic sobre la opción plano del menú superior y seleccionando las rectas se construye un primer plano:

Figura 8.



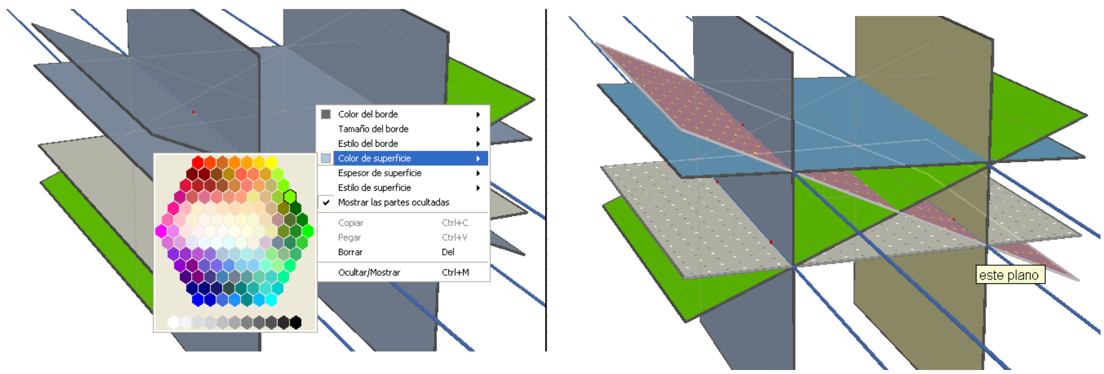
f. Los demás planos se construyen de forma análoga revelando la solución de seis planos.

Figura 9.



g. Para darle un toque de presencia y de agrado a la vista se puede cambiar de color la superficie de cada plano. Haciendo clic derecho sobre él donde aparece una lita de propiedades para seleccionar la opción “color de superficie” este procedimiento muestra una variedad de colores para escoger.

Figura 10.



Actividad:

1. Por un punto dado cualquiera, trazar una recta paralela a un plano.

2. Por un punto dado cualquiera, trazar un plano paralelo a una recta.

3. Por un punto dado cualquiera, trazar un plano paralelo a otro plano.

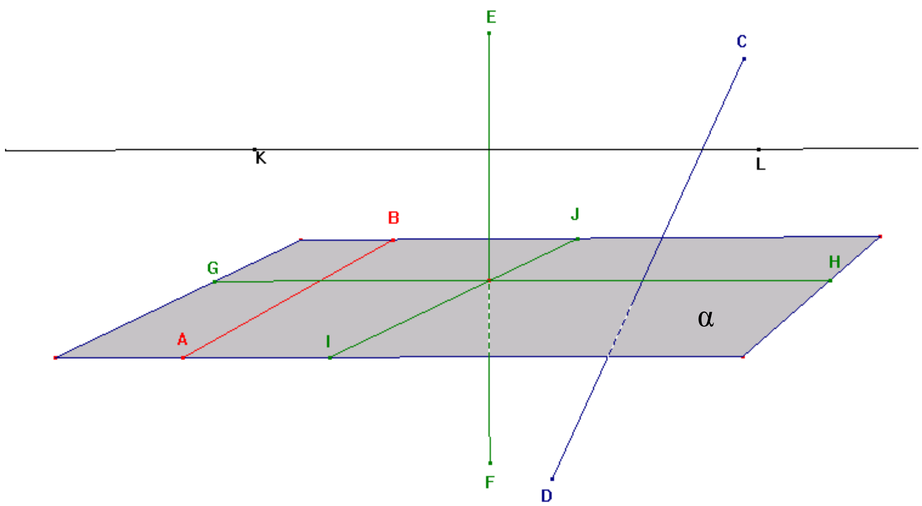
5.4.2 ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.

Una recta ℓ y un plano α pueden estar en las siguientes posiciones:

- ℓ esta contenida en el plano α (En la figura 4, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{IJ}$ están contenidos en el plano α).
- ℓ atraviesa el plano α el cual es secante (las rectas $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$ son secantes al plano α).
- ℓ es perpendicular a un plano α cuando es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su pie (la recta $\overleftrightarrow{EF}$ es perpendicular al plano α).
- ℓ es oblicua a un plano α, es toda recta que no le es perpendicular ni paralela (la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es oblicua al plano α).

- ℓ y α no tienen ningún punto común en el plano; entonces la recta y el plano son paralelos (la recta $\overleftrightarrow{KL}$ es paralela al plano α).

Figura 11. **Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio.**



Actividades:

1. Dadas dos rectas que se cruzan, trazar un plano que sea paralelo y que equidiste de ellas.
2. Por un punto dado trazar el plano que equidiste de tres puntos dados.

5.4.3 ENTRE DOS PLANOS.

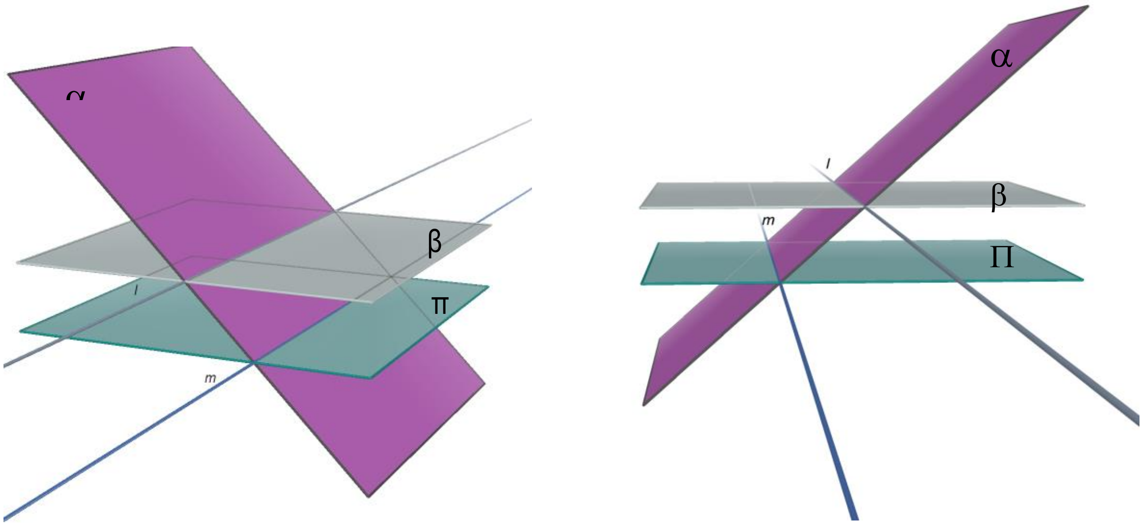
Dos planos en el espacio pueden ser secantes o paralelos:

- En la figura 12, los planos son secantes porque tienen una recta común.
- En la figura 12, los planos son paralelos porque no tienen ningún punto en común.

Ejemplo:

El plano **α** es secante con los planos **π** y **β** ya que tienen en común la recta ℓ y **m** respectivamente. Los planos **β** y **π** son paralelos, porque no tienen ningún punto en común. Ver figura 12.

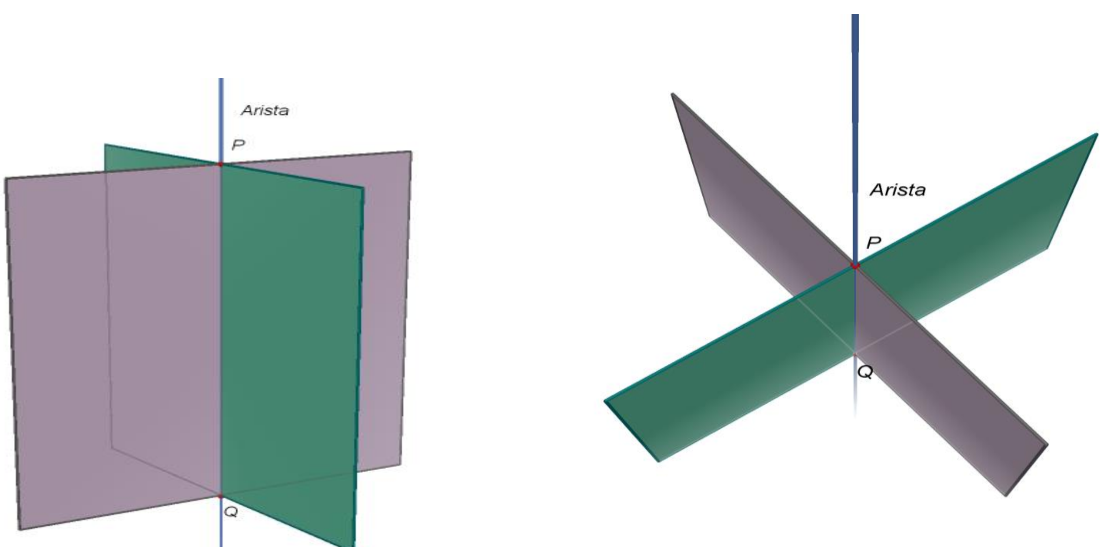
Figura 12. **Posiciones relativas de dos planos.**



5.5 DEFINICIONES

5.5.1 Arista: Si dos planos secantes **α** y **β,** se dividen mutuamente en dos semiplanos contenidos en los respectivos semiespacios que cada plano determina. Se le llama a**rista** a la recta formada por la intersección entre los dos planos. En la figura 13, **α** y **β** son dos planos secantes y la recta $\overrightarrow{PQ}$ la **arista.** (ver figura 13).

Figura 13. Planos secantes.

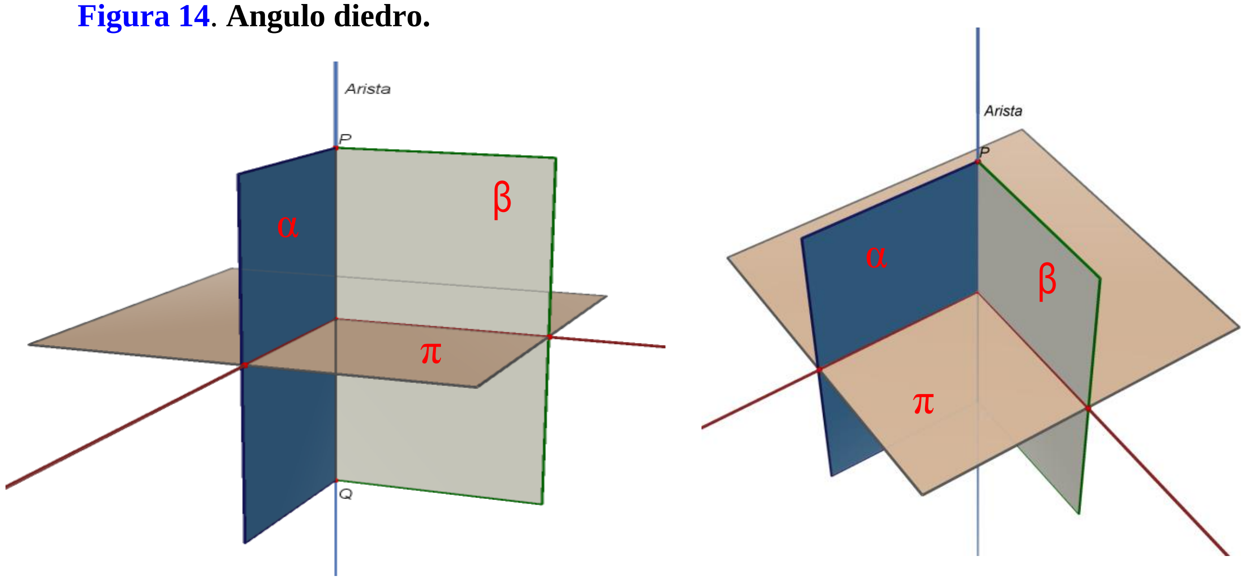


Actividad:

Dados tres planos **α**, **β** y **π** determinar cuales son las diferentes posiciones en las que se pueden encontrar construyendo la gráfica correspondiente, aplicando cabri 3D.

5.5.2. **Ángulo Diedro:** Si dos semiplanos **α** y **β** tienen una misma arista, pero no están en el mismo plano, entonces la unión de los dos semiplanos y su arista común se llama á**ngulo diedro** y se simboliza **αβ.** La unión de la arista y cualquiera de los dos semiplanos se llama cara del ángulo diedro. En la figura 14, **α** y **β** son dos semiplanos que comparten la arista $\overleftrightarrow{PQ}$ llama también ***arista del ángulo diedro*.** (Ver figura 14).

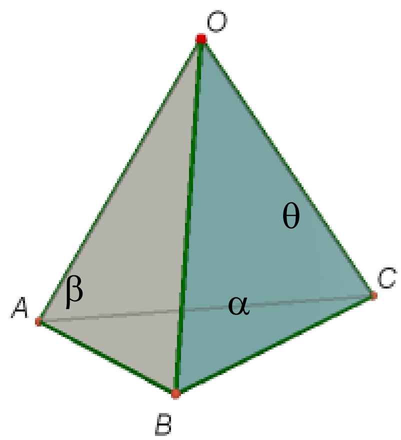
Figura 14. Angulo diedro.



5.5.3. **Ángulo Rectilíneo del Ángulo Diedro:** Dado un ángulo diedro **αβ** y un plano perpendicular a su arista, la intersección del plano perpendicular a **π** con el ángulo diedro, se llama á**ngulo rectilíneo del ángulo diedro.** (ver Figura 7). La medida de un ángulo diedro es un número real, que representa la medida de cualquiera de sus ángulos rectilíneos. Recuerde que: *Todos los ángulos rectilíneos de un mismo ángulo diedro son congruentes*.

5.5.4 Ángulo Triedro: Ángulo Triedro: Sean $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, tres semirrectas no contenidas en un mismo plano y secantes en un punto **O,** las cuales determinan las caras **α, β** y **θ,** y estos a su vez forman los ángulos diedros **αβ, βθ** y **θα.** La unión de estos tres ángulos diedros se llama **ángulo triedro** y se simboliza **αβθ.** (Ver la figura 15).

Figura 15. Angulo Triedro.



5.5.5. Poliedro: Es la porción de espacio limitada por polígonos planos. Sus elementos característicos son las caras, las aristas y los vértices:

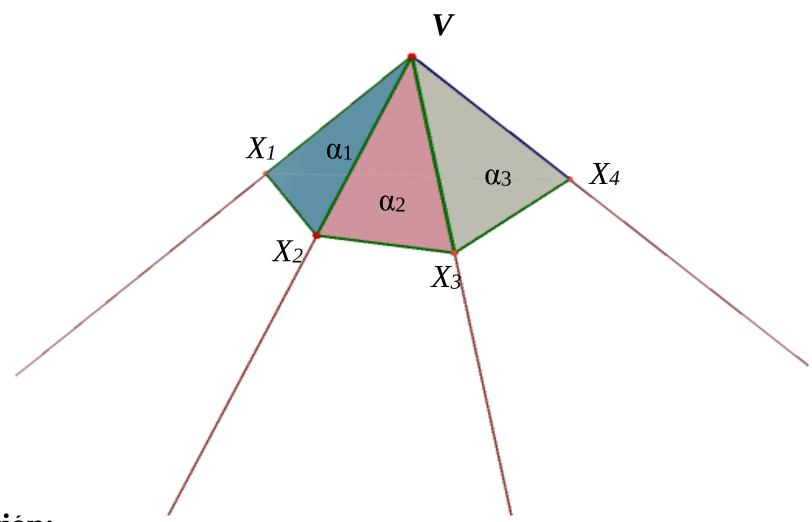
• Las caras son los polígonos que la limitan.

• Las aristas son los lados de las caras, y limitan dos caras contiguas.

• En cada vértice de un poliedro concurren tres o más caras, de ahí que los vértices son los formados por la intersección de las caras.

5.5.6. Ángulo Poliedro: Sean $\overrightarrow{VX_1}, \overrightarrow{VX_2}, \overrightarrow{VX_3}$, **…**semirrectas o aristas no contenidas en un mismo plano de origen común V llamado vértice; estas forman las caras $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$, $\boldsymbol{\alpha_3}$,... respectivamente, de ahí se determinan los ángulos diedros $\boldsymbol{\alpha_1\ \alpha_2}$, $\boldsymbol{\alpha_2\ \alpha_3}$, $\boldsymbol{\alpha_3\ \alpha_4}$**,…**, el conjunto de caras y aristas se llama **ángulo poliedro** y se simboliza $\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$**,…** (Ver figura 16)

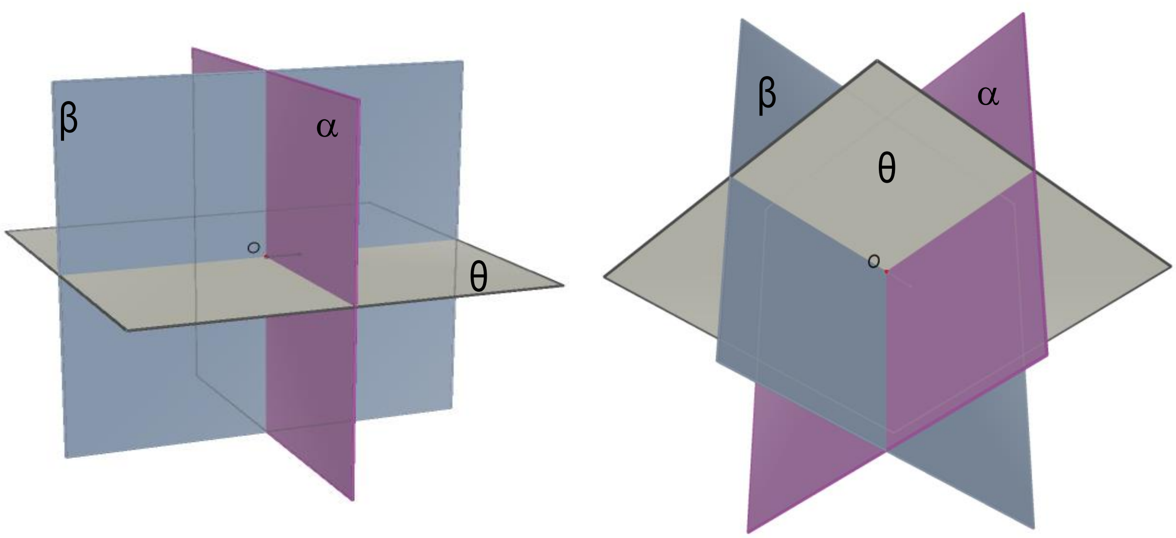
Figura 16. **Angulo poliedro**



Observación:

Tres planos concurrentes **α, β** y **θ** en un mismo punto **O** sin pasar por una misma recta, dividen al espacio en ocho ángulos triedros. (Ver figura 17).

Figura 17 Planos concurrentes.

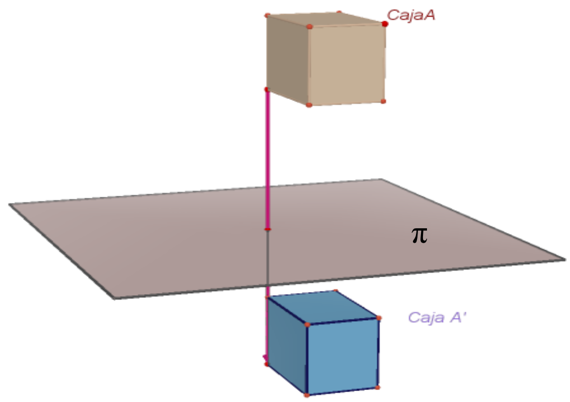


Actividades:

- Resolver la situación problema 1 y 3 del taller ¿Cómo vamos en el espacio?

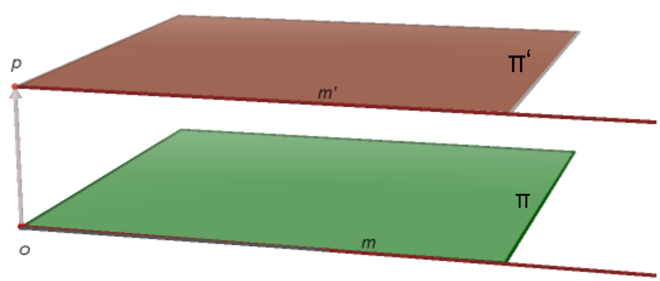
- Con ayuda de cabri 3D, construir una caja sobre un semiespacio y aplicar la traslación dos veces la distancia mínima del plano inferior de la caja hasta el plano determinado y en sentido que apunte al plano. Enunciar los axiomas de movimientos aplicados. (Ver figura 18).

Figura 18 Aplicación de traslación a una caja



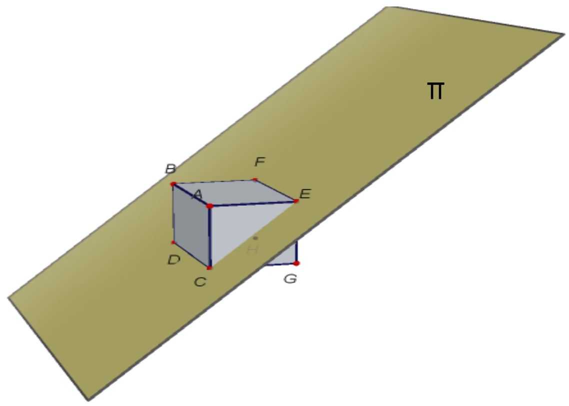
- Comprobar el axioma de determinación del espacio, apoyándose con el programa de cabri 3D, construyendo un semiplano limitado por una semirrecta; luego determinar con un vector la traslación que se desee. (Ver figura 19).

Figura 19 Aplicación de traslación a un semiplano



- Con el cabri 3D, construir una caja en el espacio, cuyos vértices sean los puntos **A, B, C, D, E, F, G y H** y determinar. Los pares de puntos quedan en una misma región del plano que pasa por la diagonal de la caja. (Ver figura 20).

Figura 20. Plano que pasa por la diagonal de la caja

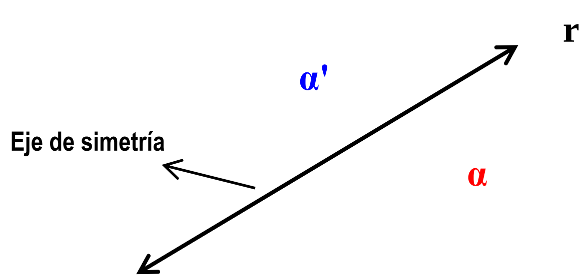


6. SIMETRÍAS EN EL ESPACIO EUCLIDIANO

6.1 SIMETRÍA AXIAL

Sea una recta **r** y un semiplano **α** limitado por **r**, se define la Simetría axial como el movimiento del espacio que transforma a **r** en si misma y al semiplano **α** en su opuesto **α'**. A la recta **r** se le llama eje de simetría.

Figura 21. Simetría Axial



Observaciones:

- Las figuras que están en el espacio y que son transformadas por dicho movimiento se llamarán simétricas respecto del eje de simetría.
- Aplicando dos veces la misma simetría axial al semiplano **α**, el movimiento resultante es la identidad con respecto a **r**, movimiento único que transforma a **r** y **α** en si mismo. (Axioma de determinación).

TEOREMA

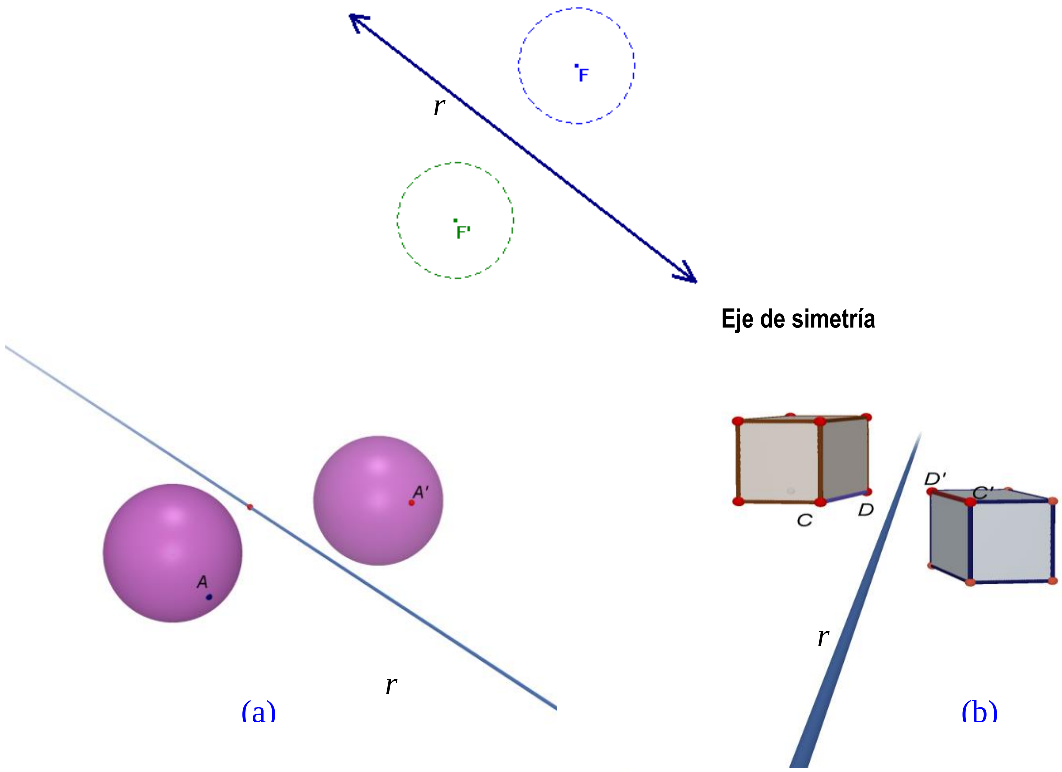
La figura F' es simétrica de la figura F con respecto a un eje de simetría si y sólo si F es simétrica de F'

Demostración

Hipótesis: La figura F' es simétrica de F

Tesis: La figura F es simétrica de F'

Figura 22 (a) – (b) Simetría axial.



Sea F una figura cualquiera contenida en el espacio, entonces al aplicarle una simetría con respecto al eje de simetría **r**, ésta va a tener como simétrica F'; la cual conserva las mismas propiedades de la figura F.

Análogamente si aplicamos una simetría a la figura F' con respecto al eje de simetría **r,** obtendremos que su simétrica va a ser F.

Luego la figura F' es simétrica con la figura F.

¿Encuentras alguna diferencia o semejanza entre la simetría axial en el plano y la simetría axial en el espacio? Enúncialas.

Teorema

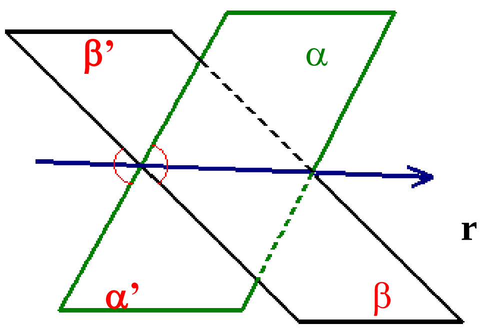
Todo ángulo diedro cuya arista es el eje de simetría, se trasforma en su opuesto[11].

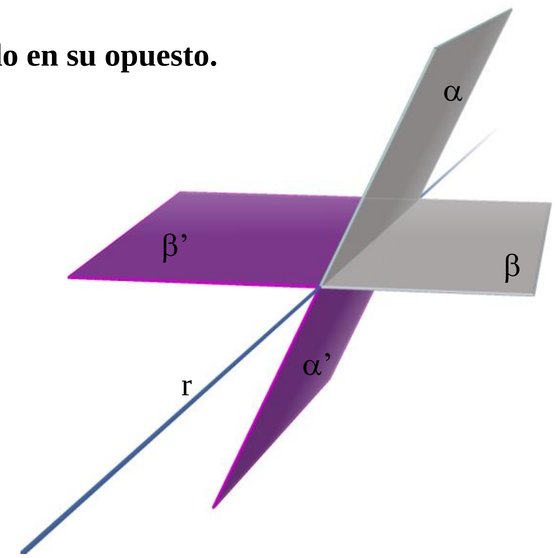
Demostración

Hipótesis: Sea un ángulo diedro **αβ** cuya arista es el eje de simetría.

Tesis: El ángulo diedro **αβ** se trasforma en su opuesto

Figura 23. **Angulo diedro transformado en su opuesto.**





En la figura 23, sea **αβ** el ángulo diedro cuya arista es **r.** Al aplicar una simetría axial al semiplano **α** con respecto a **r**, se transforma en su opuesto **α'**, análogamente al aplicarle a **β** una simetría axial con respecto a **r** se transforma en su opuesto **β'** y **r** queda invariante ante está transformación.

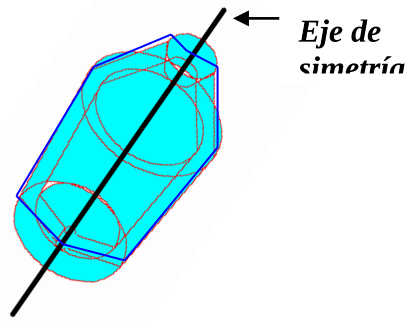
Luego el simétrico del ángulo diedro **αβ** es **α'β'**, el cual es su opuesto.

El movimiento que acabamos de estudiar es un movimiento en el que cada par de puntos homólogos son simétricos en una simetría en el plano respecto del eje, de ahí que ésta simetría no ofrece ninguna particularidad; es decir en el espacio no tiene modificaciones,

[11] Ángulo cóncavo es aquel que esta formado por las prolongaciones de los semiplanos cuyo borde es la arista del ángulo diedro

por lo tanto se tratara solamente la simetría con respecto a un punto y a un plano (ó especular).

Figura 24. Ejemplo sobre "simetría Axial Con Autocad"



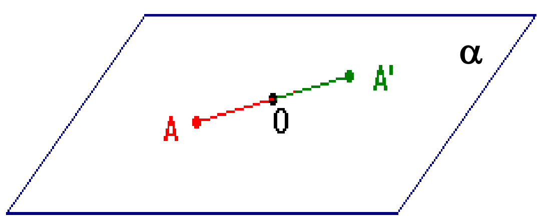
Actividad:

En Autocad construir media sección vertical de una fuente de agua y analizar que ocurre cuando se le aplica la simetría axial a ésta.

6.2 SIMETRÍA CENTRAL

Sea **O** un punto del plano **α**, **A** y **A'** puntos homólogos con respecto a **O** que están en **α**; el punto **O** se transforma en si mismo, y $\overline{AO}$ se transforma en $\overline{OA'}$, entonces $\overline{AO} \cong \overline{OA'}$. (Ver figura 25).

Figura 25. Simetría central



Teorema

La figura F' es simétrica de la figura F con respecto a un punto O si y solo si F es simétrica de F'

Demostración

Hipótesis: La figura F’ es simétrica de F, respecto a un punto O

Tesis: La figura F es simétrica de F’, respecto a un mismo punto O

Sea F una figura cualquiera contenida en el espacio, entonces al aplicarle una transformación con respecto al centro de simetría **O**, está va a tener como simétrica F’; la cual conserva las mismas propiedades de la figura F.

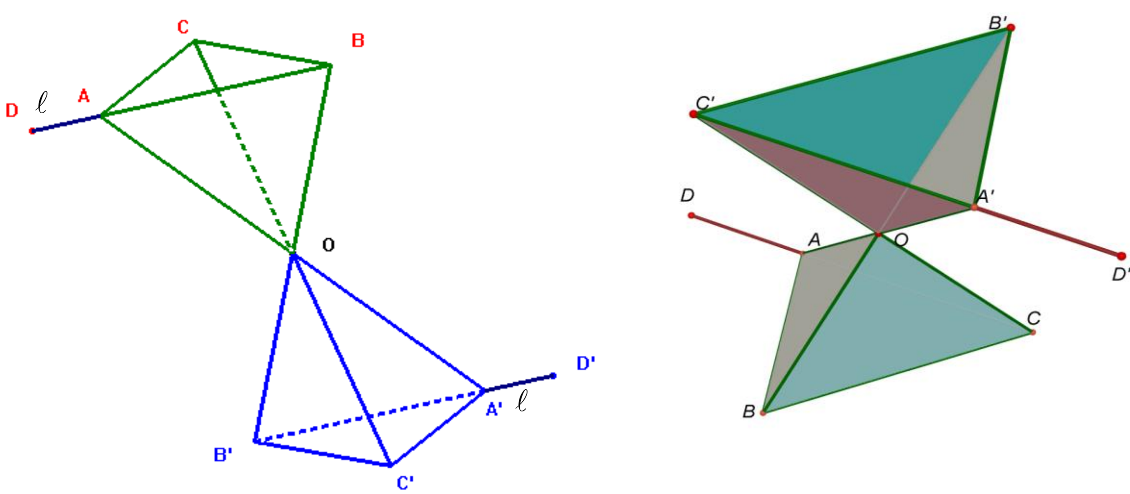
Análogamente si aplicamos una misma simetría a la figura F’ con respecto al centro de simetría **O,** obtendremos que su simétrica va a ser F.

Luego F’ es simétrica con F.

Observaciones

- La simetría central transforma un triedro en su opuesto por el vértice, invirtiendo su sentido. (Ver figura 26*)*.

Figura 26 Triedro.



De la figura anterior se puede establecer que: Si varios puntos están alineados y ordenados en la recta ℓ sus homólogos también lo están (basta considerar la simetría central con respecto a O, donde O es el centro de simetría).

- La simetría central conserva las relaciones de incidencia y orden.

6.3 PROPIEDADES DE LA SIMETRÍA CENTRAL.

- Las rectas y los planos que pasan por el centro son simétricas de si mismo.
- Toda recta ℓ que no pasa por el centro de simetría O tiene por simétrica otra recta paralela a ella.
- Todo plano **α** que no pasa por el centro de simetría tiene por simétrico otro plano **α'**, que no tiene con él algún punto en común.

- Dos planos sin ningún punto común se llaman paralelos.

TEOREMA

Si dos figuras **F'** y **F''** son simétricas de una misma figura **F**, con respecto a dos centros de simetría diferentes **O** y **O'**, entonces **F'** $\cong$ **F''**.

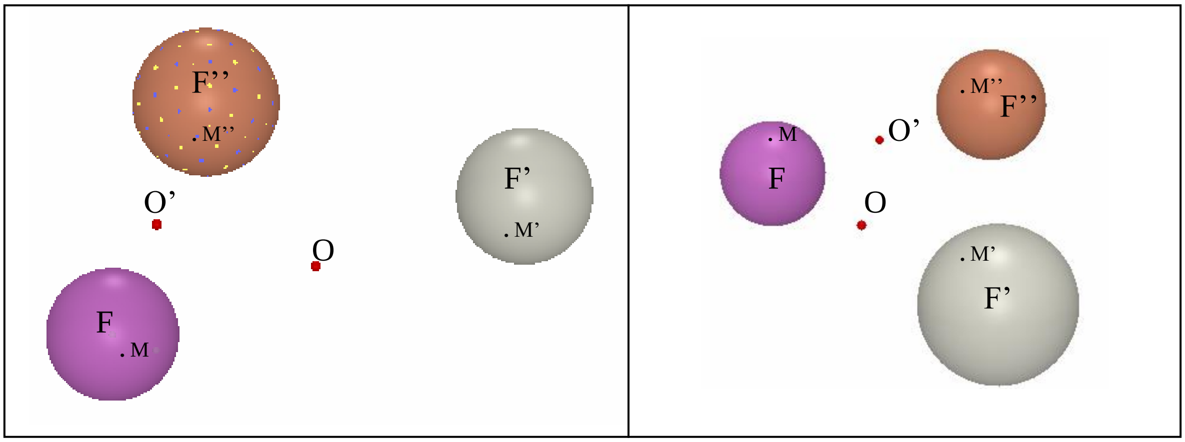
Demostración.

Hipótesis: Sean **F'** y **F''** dos figuras simétricas de una misma figura **F**, con respecto a dos centros diferentes **O** y **O**

Tesis: F' es congruente con **F''**

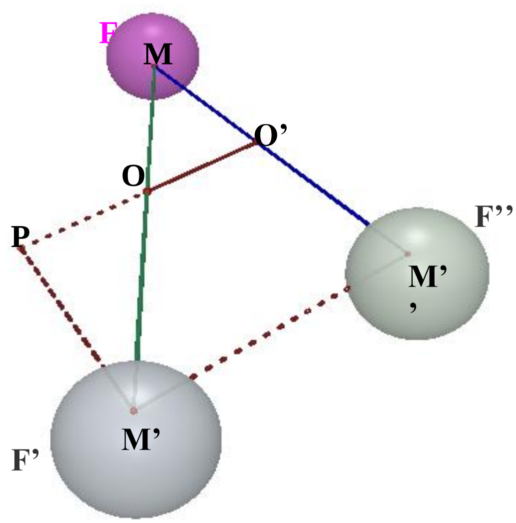
Sean **F** una figura cualquiera en el espacio, **O** un centro de simetría que transforma a **F** en **F'**, y **O'** un centro de simetría que transforma a **F** en **F''**. (Ver figura 27a*)*

Figura 27. (a). Simetría entre figuras



Al tomar un punto **M** de la figura **F,** en donde **M'** y **M''** son puntos simétricos con respecto a **O** y **O'** y que pertenecen a las figuras **F'** y **F''** respectivamente; en el triángulo **MM'M'',** el segmento $\overline{OO'}$ es paralelo a la base $\overline{M'M''}$ e igual a su mitad[13]; luego la figura **F'** es la que resultaría[14] de trasladar todos los puntos de **F''** paralelamente a la dirección $\overrightarrow{O'O}$ y a una distancia **O'P** = 2**OO'** (Ver figura 27 b)

Figura 27(b). Simetría entre figuras



[13] Teorema de la paralela media "En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado, y su medida es la mitad de la media del tercer lado".
[14] Definición de Movimiento de Traslación en el plano.

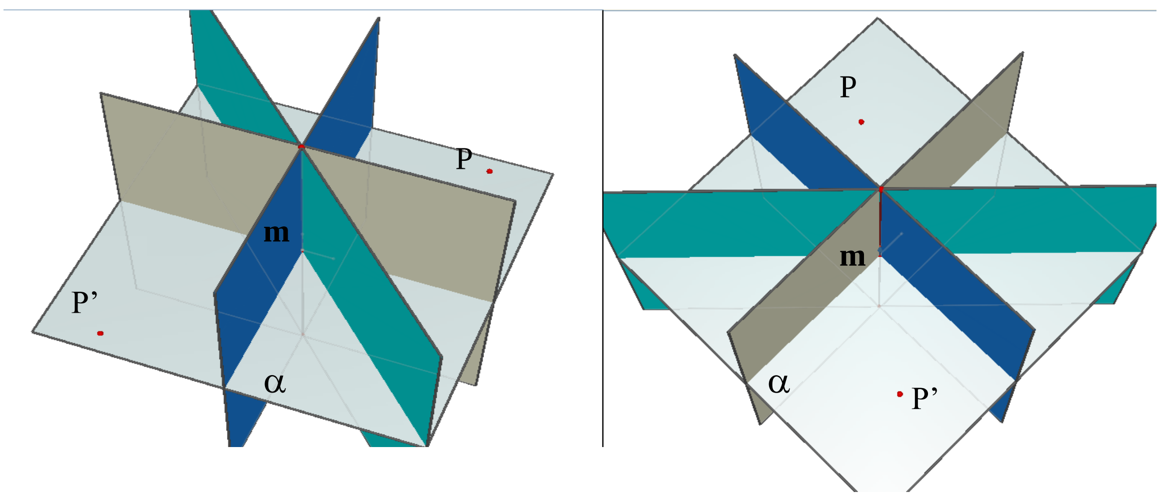
Por lo tanto **F'** es congruente con **F''.**

Preguntas:

- ¿Encuentras alguna diferencia o semejanza entre la simetría central en el plano y la simetría central en el espacio? Enúncialas.
- ¿Cuál consideras que es la diferencia entre movimiento y transformación?.

Plano doble: se dice que el plano **α** es doble con respecto a un haz de semiplanos[12] de borde **m,** esté es perpendicular a dicho plano, ya que para hallar el simétrico de un punto **P** del plano **α** basta aplicarle la simetría con respecto al borde **m** en el plano **α**. (Ver figura 28)

Figura 28. Plano doble



El borde **m** es eje de simetría y además es **mediatriz** del segmento formado por los puntos homólogos (P y P').

Observación:

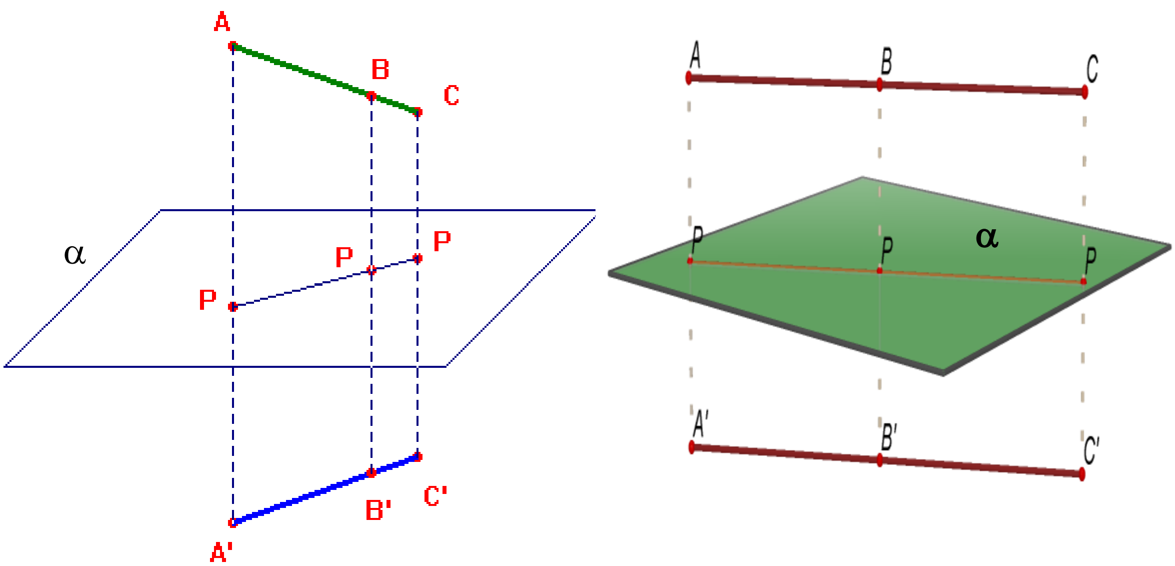
Los puntos homólogos con respecto al borde **m** son simétricos en **la simetría central en el plano**, que tiene por centro el punto de intercesión de dicho borde con el plano **α**.

[12] Todos los semiplanos que tienen por borde una misma recta constituyen un haz de semiplanos.

6.4 SIMETRÍA RESPECTO DE UN PLANO (O ESPECULAR)

En la sección anterior se observó que la simetría central es una transformación del espacio, en donde, se conservan las relaciones de incidencia y de orden. Propiedades idénticas tiene la transformación que se obtiene dejando fijos todos los puntos de un plano **α** y haciendo corresponder a cada punto exterior **A** su simétrico respecto de él, es decir, el punto **A',** situado en la perpendicular trazada desde el punto **A** al plano **α**, a igual distancia de su pie **P** y a distinto lado de **α**. (Análogamente para los puntos B y C, (Ver figura 29). A ésta transformación se llamara **Simetría Especular** con respecto al plano **α** (esta transformación se puede comparar con la relación que existe entre un objeto y su imagen en un espejo plano).

Figura 29 Simetría especular.



¿Encuentras alguna diferencia o alguna relación entre la simetría axial y la especular en el Espacio Euclidiano?. Por que?.

¿Por qué crees que no se habla de simetría especular en el plano euclidiano?

Teorema

La figura F' es simétrica con respecto a un plano de la figura F, si y solo si, F es la simétrica de F' con respecto al mismo plano.

Demostración

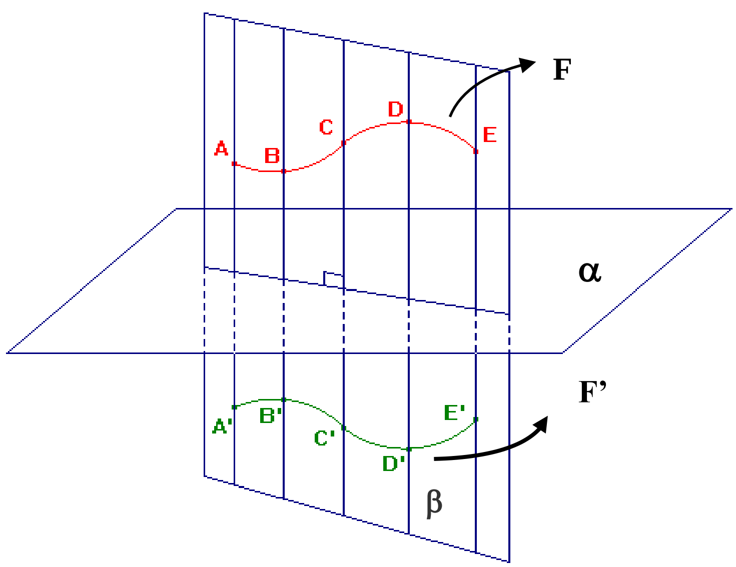
Hipótesis: La figura F' es simétrica con respecto a un plano de la figura F.

Tesis: F es la simétrica con respecto de un plano de la figura de F'.

Sea **F** una figura que está contenida en un plano **β,** perpendicular al plano **α,** entonces su simétrica **F'** esta en el mismo plano, que contiene todas las perpendiculares a **α** por sus puntos que están el plano **β**. Por consiguiente **F'** no es otra que la figura simétrica de **F** en la simetría plana en **β**. (Ver la figura 30).

Análogamente si aplicamos una simetría especular con respecto al plano **α** a la figura **F**', entonces se obtendrá la figura **F**, por lo tanto la figura **F'** es congruente con la figura **F**.

Figura 30. Simetría especular.



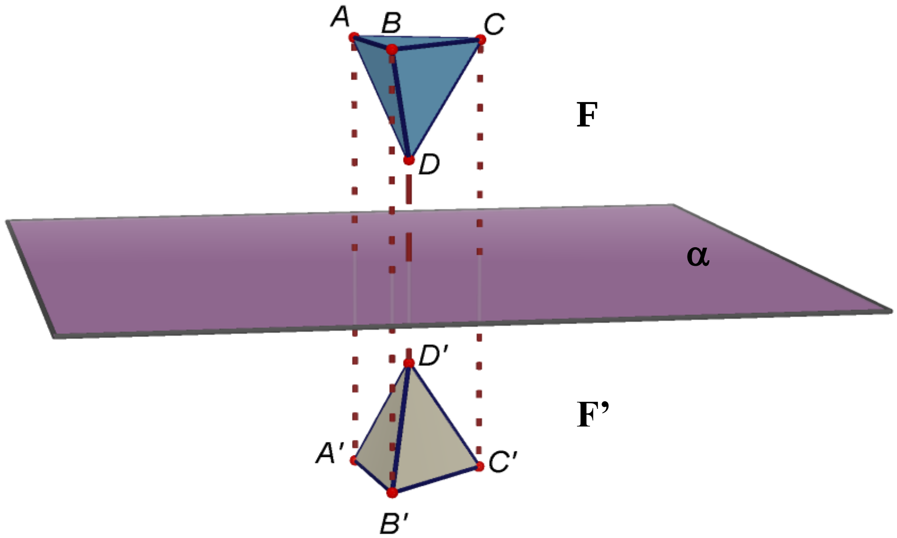
Observación

En la figura 30, se puede observar que la figura **F** está contenida en el plano **β** y al aplicarle una simetría especular con respecto al plano **α**, la figura **F** cambia de semiespacio, transformándose en **F', F'** estará contenida en el plano **β**[15].

Ejemplo:

Al aplicar una simetría especular al triedro **ABCD** con respecto al plano **α,** resulta el mismo triedro **A'B'C'D'** pero situado en distinto semiespacio. (Ver figura 31)

Figura 31. Simetría especular de un triedro



Teorema:

Si dos figuras **F'** y **F''** son simétricas de una misma figura **F**, con respecto a dos planos diferentes **α** y **β,** entonces **F'** ≅ **F''**.

[15] Lo que no ocurre con la simetría axial o central, debido a que en este movimiento y transformación respectivamente dividen al espacio en dos semiespacios.

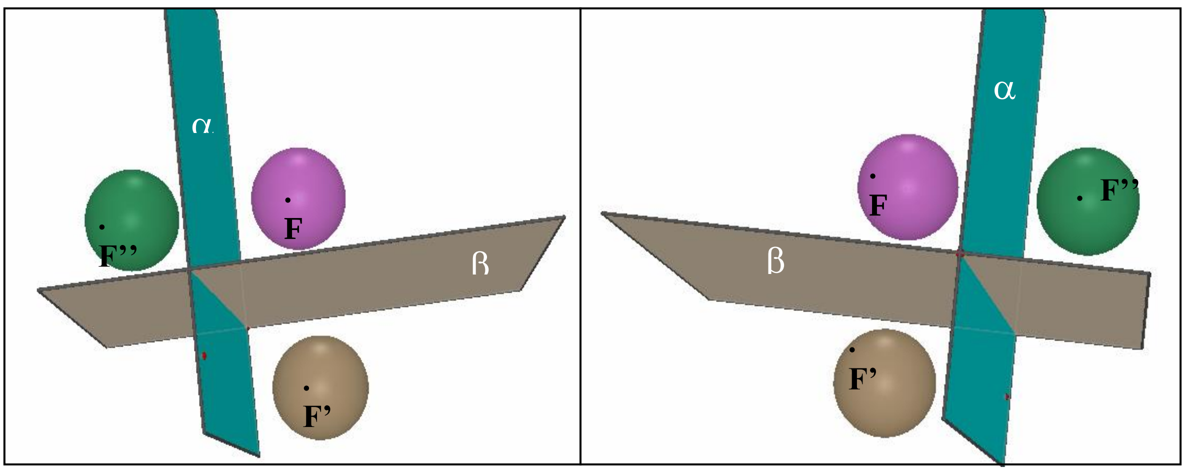
Demostración

Hipótesis: Dos figuras **F'** y **F''** simétricas de una misma figura **F**, con respecto a dos planos diferentes **α** y **β**

Tesis: F' es congruente con **F''**

Sean **F** una figura cualquiera en el espacio, sea una simetría especular con respecto a **α** que transforma **F** en **F'**, y una simetría especular con respecto a **β** que transforma a **F** en **F''**. (Ver figura 32 a)

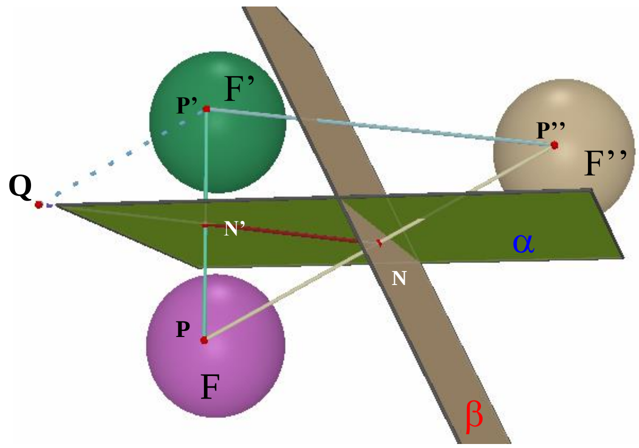
Figura 32(a). Simetría especular entre figuras



Al tomar un punto **P** de la figura **F,** resultan **P'** y **P''** puntos simétricos con respecto a los planos **α** y **β** respectivamente que pertenecen a las figuras **F'** y **F''** respectivamente. (Ver figura 32b).

Al formar el triángulo **PP'P'',** el segmento **PP'** interseca al plano **α** en un punto **N**, entonces $\overline{PN} \cong \overline{NP'}$. Análogamente se tiene que el segmento **PP''** interseca al plano **β** en un punto **N'**, entonces $\overline{PN'} \cong \overline{N'P''}$. De ahí que el segmento **NN'** es paralelo a la base $\overline{P'P''}$ e igual a su mitad; luego la figura **F'** es la que resultaría de trasladar todos los puntos de **F’’** paralelamente a la dirección $\overrightarrow{NN'}$ y a una distancia **N’Q = 2NN’** (Ver figura 32b).

Figura 32 (b) Simetría especular entre figuras



Por lo tanto **F’** ≅ **F’’.**

¿Cómo harías la demostración de este teorema tomando un segmento, un arco o parte de una figura?

Actividad:

Resolver la situación problema 8, 9 del taller ¿Cómo vamos en el espacio?

6.5 RELACIÓN ENTRE LA SIMETRÍA CENTRAL Y ESPECULAR

Teorema

Si dos figuras **F’** y **F’’** son simétricas de una misma figura **F**, **F’** con relación a un plano **α,** y **F’’** con relación a un punto **O** de este plano **α**, entonces **F’** ≅ **F’’**.

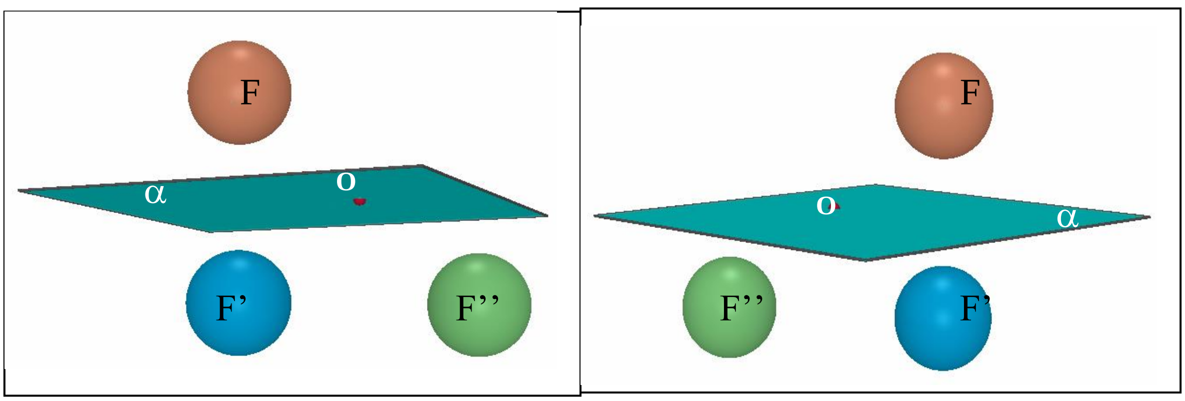
Demostración

Hipótesis: Dos figuras **F'** y **F''** simétricas de una misma figura **F**, **F'** con relación a un plano **α,** y **F''** con relación a un punto **O** de este plano **α.**

Tesis: F' es congruente con **F''.**

Sean, **F** una figura cualquiera en el espacio, **α** un plano que divide a este espacio en dos semiespacios, **O** un punto que pertenece al plano **α**, **F'** y **F''** las figuras simétricas con respecto al plano **α** y al punto **O** respectivamente (Ver la figura 33 a).

Figura 33(a). Relación entre simetría central y especular



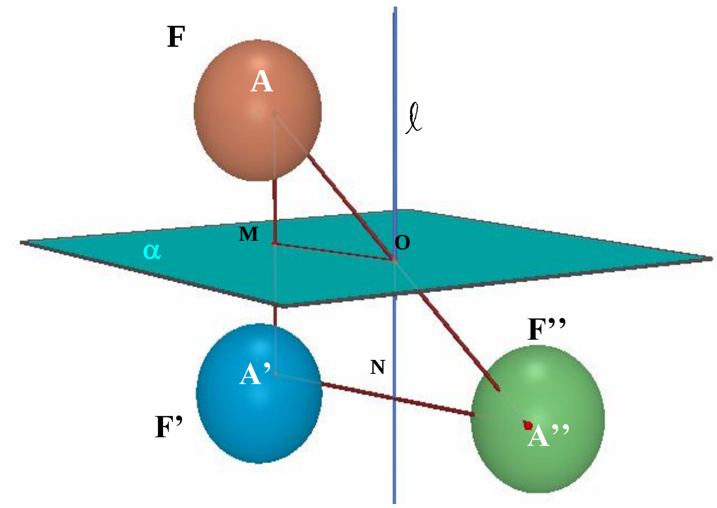
Tomando un punto **A** cualquiera de la figura **F**; el punto **A'** que pertenece a **F'** es simétrico de **A** respecto al plano **α** y el punto **A''** que pertenece a **F''** es simétrico de **A** respecto al centro de simetría **O**.

De acuerdo con lo anterior se puede determinar que el plano **α** es perpendicular al segmento $\overline{AA'}$ en su punto medio **M.** Además, **O** es el punto medio del segmento $\overline{AA''}$; por propiedad de simetría central con respecto a **O**. Al trazar por el punto **O** una recta ℓ perpendicular al plano **α**, tal que sea paralela al segmento $\overline{AA'}$ y pase por el punto medio del segmento $\overline{AA''}$; se tiene que está contenida en el plano determinado por los puntos **A, A'** y **A''** interseca al segmento $\overline{A'A''}$ en su punto medio. (Ver figura 33b).

Además, por ser el segmento $\overline{A'A''}$ paralelo a la recta que pasa por los puntos **O** y **M** que están contenidos en el plano **α**, será perpendicular a la recta ℓ. Luego los puntos **A'** y **A''**son simétricos respecto del eje ℓ.

Por lo tanto **F'** es congruente con **F''**. (Ver figura 33b)

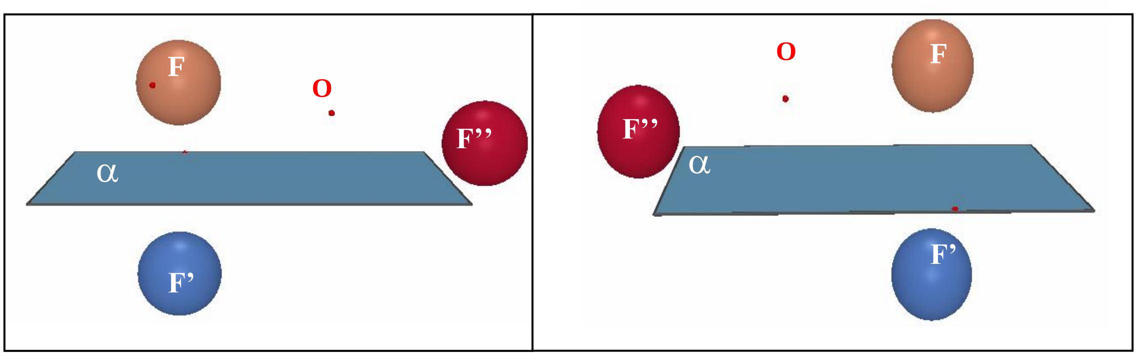
Figura 33(b). Relación entre simetría central y especular



Corolario

Si dos figuras **F'** y **F''** simétricas de una tercera figura **F** cualquiera en el espacio**,** la primera con respecto a un plano **α** y la segunda con respecto a un punto **O** cualquiera que no pertenece al plano **α**, entonces **F'** ≅ **F''**. (Ver figura 34)

Figura 34. Figuras simétricas



Si se conviene en que dos figuras en el espacio son simétricas cuando se las puede colocar de una manera que sean simétricas respecto a un punto o a un plano, entonces se puede afirmar que:

- Todas las figuras simétricas de una figura dada son congruentes entre si.
- La figura simétrica de una figura dada es única.

Actividad:

Resolver la situación problema 6 del taller ¿Cómo vamos en el espacio?

6.6 PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS SIMÉTRICOS

- La figura simétrica de un ángulo poliedro con respecto a un punto o un plano es otro ángulo poliedro cuyos elementos son respectivamente congruentes a los del primero, pero dispuestos en orden inverso. Puesto que tomando por centro de simetría el vértice del ángulo poliedro, la figura simétrica será el ángulo poliedro formado por las prolongaciones de las aristas del primero.

- La figura simétrica de un poliedro ubicado en un semiespacio **α** con respecto a un punto o un plano es otro poliedro cuyas caras son congruentes a las del primero, pero ubicadas en el semiespacio opuesto determinado por un plano **α**.

TEOREMA

Dos poliedros simétricos con respecto a un plano o a un punto, son congruentes.

Figura 35(a). **Poliedros simétricos con respecto a un plano**

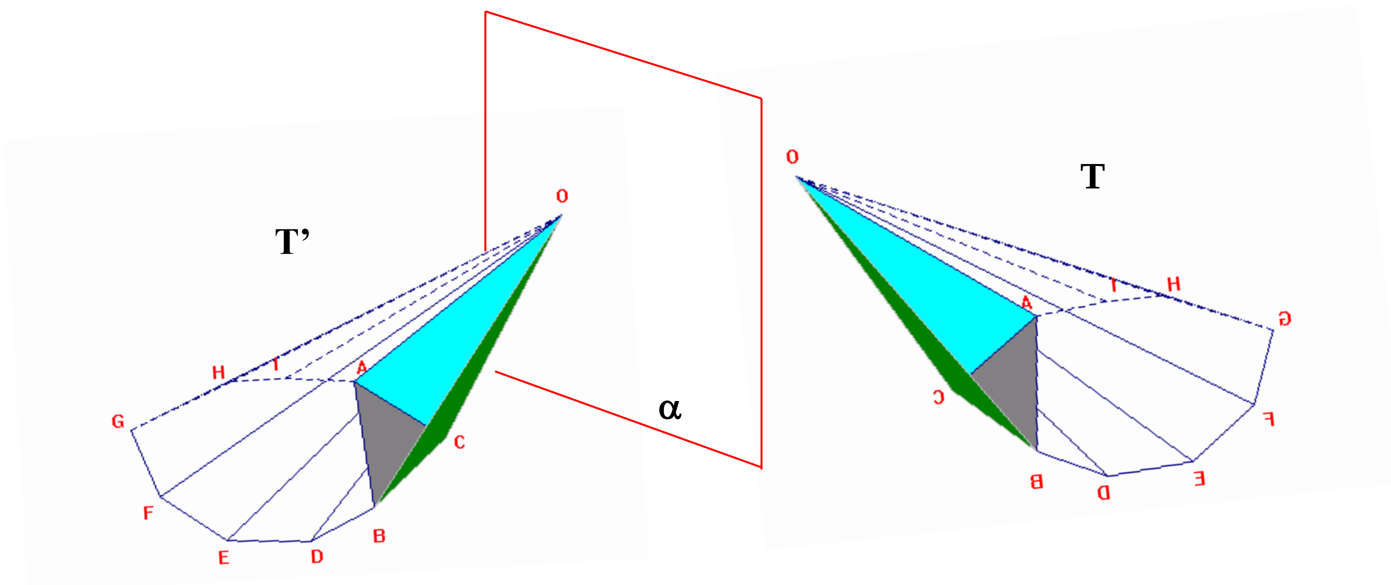
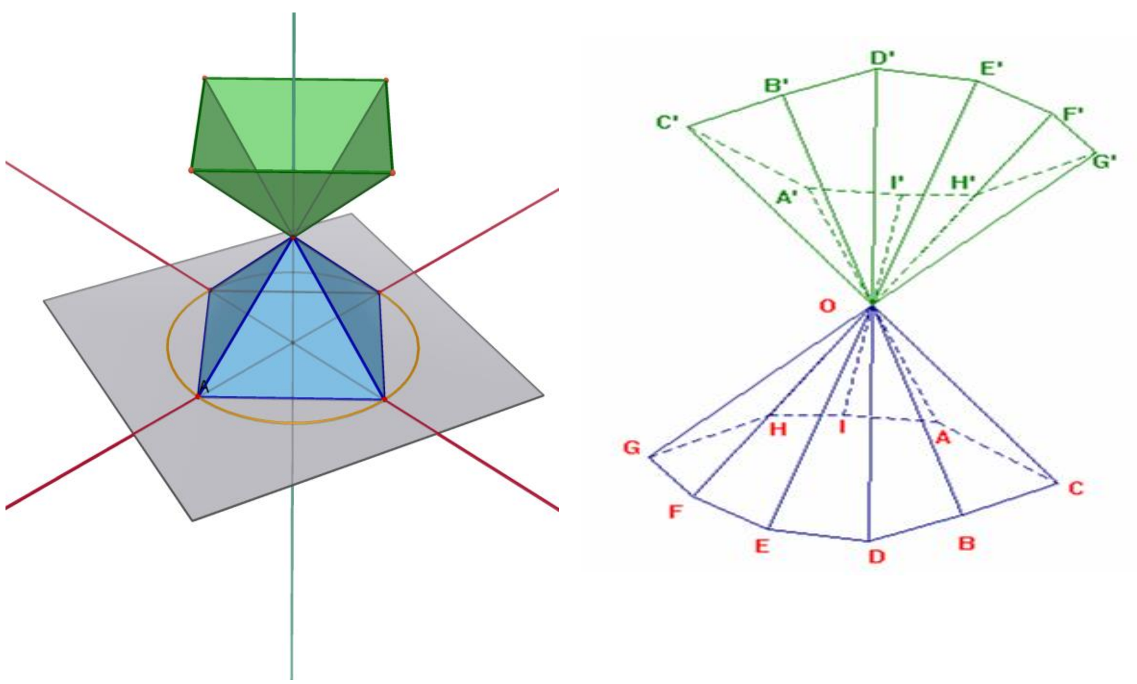


Figura 35(b). **Poliedros simétricos con respecto a un punto**



Observación:

- Dos poliedros simétricos cualesquiera se podrán descomponer en tetraedros simétricos congruentes, y por consiguiente los poliedros propuestos serán congruentes.

Demostración

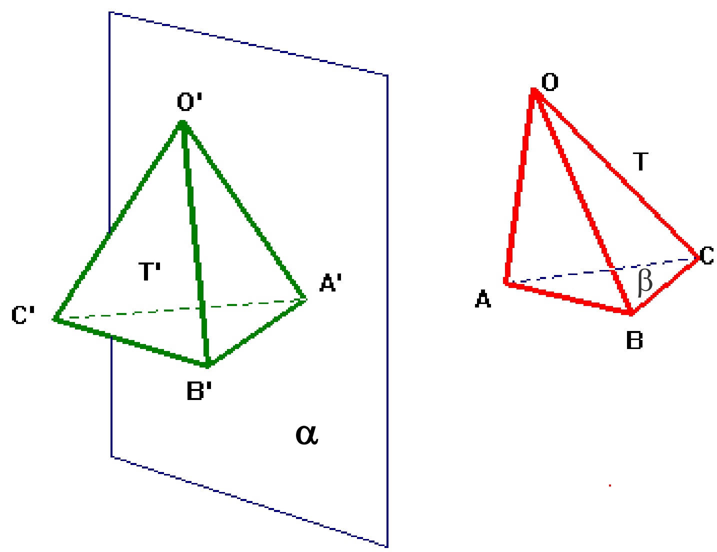
Hipótesis: T y **T'** dos poliedros simétricos con respecto a un plano o aun un punto

Tesis: T $\cong$ **T'**

De acuerdo con la observación anterior se tomará un caso particular, en este caso el tetraedro **ABCO**:

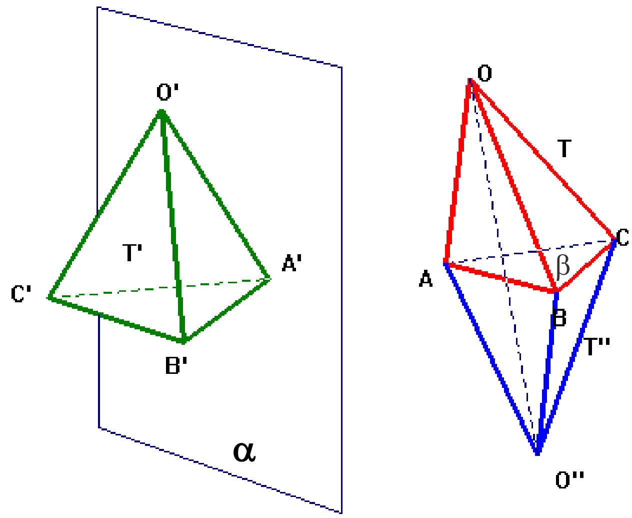
Sean **T** y **T'** dos tetraedros simétricos con respecto a un plano α:

Figura 36(a). Tetraedros simétricos



Al aplicar una simetría especular al tetraedro **T** con respecto al plano β resulta el tetraedro **T'',** siendo **O** y **O''** vértices simétricos con respecto al plano β**,** además se tiene que los tetraedros **T** y **T''** tienen la misma base e igual altura por la simetría especular respecto al plano α**,** entonces **T** $\cong$ **T''**. De ahí que las dos figuras **T'** y **T''** son simétricas del tetraedro **T**, con respecto a los planos α y β respectivamente, entonces **T'** y **T** son congruentes (ver figura 36b).

Figura 36(b). **Tetraedros simétricos**



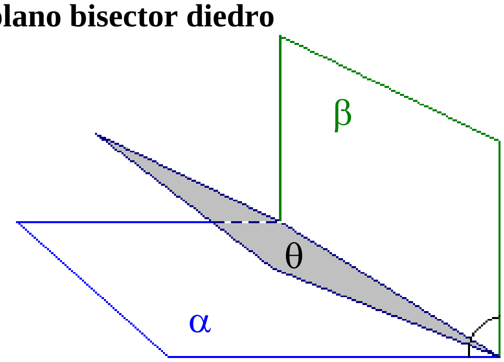
Actividad:

Construir en autocad una pirámide[16] y aplicarle la simetría especular, describir que ocurre.

6.7 SEMIPLANO BISECTOR DE UN ÁNGULO DIEDRO

Es el semiplano determinado por la artista de un ángulo diedro y la bisectriz del mismo[17], el cual lo divide en dos ángulos congruentes. Es decir que el diedro $\beta\theta$ es congruente con el diedro $\theta\alpha$. (Ver figura 37*)*

Figura 37. **Semiplano bisector diedro**



---

[16] Pirámide, poliedro limitado por una base, que es un polígono cualquiera, y varias caras laterales, que son triángulos con un vértice común llamado vértice de la pirámide.
[17] Bisectriz de un ángulo diedro: es el semiplano que divide al ángulo diedro en dos ángulos diedros congruentes.

Teorema

El lugar geométrico[18] de los puntos equidistantes de dos planos secantes, es el conjunto de dos planos perpendiculares entre si llamados *bisectores de los ángulos diedros formados por los planos secantes.*

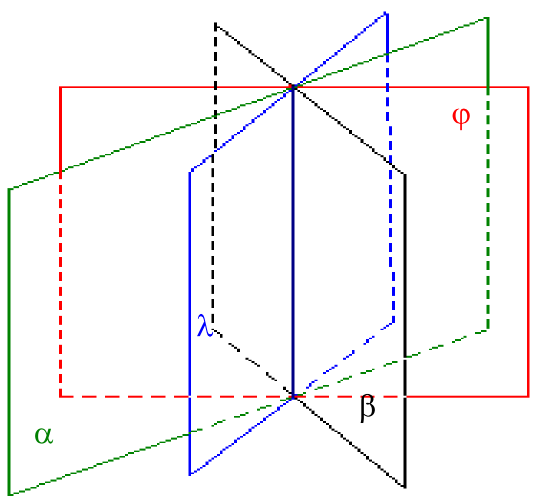
Demostración

Hipótesis: Sean α, β planos secantes.

Tesis: El lugar geométrico de los puntos equidistantes de α y β es el conjunto de dos planos perpendiculares entre si.

Sean α, β planos secantes, λ y φ planos bisectores de dichos planos secantes (Ver figura 38a).

Figura 38(a). Bisector de los ángulos diedros



Sean ***l*** *y* ***m*** dos rectas perpendiculares entre si pertenecientes a los planos bisectores λ y φ del ángulo diedro $\alpha\beta$[19], **P** un punto cualquiera de la recta ***l***, entonces al trazarle rectas perpendiculares ***s*** y ***t*** desde este punto a los planos α y β respectivamente, se tiene que las

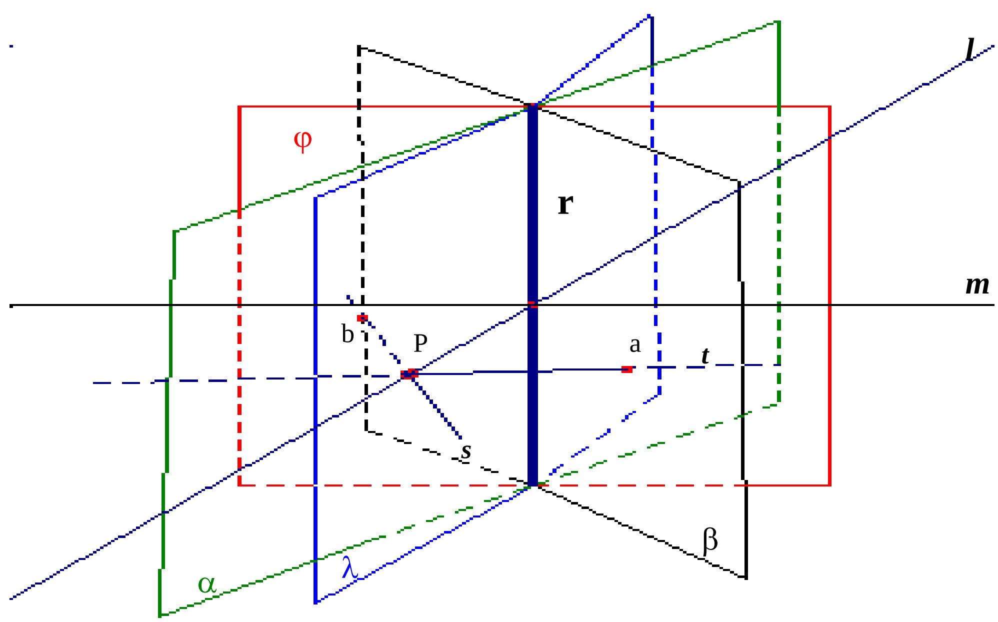
[18] Se dice que es una figura geométrica en el espacio que contiene todos los puntos que cumplen una determinada propiedad, y, recíprocamente solo contiene los puntos que la cumplen.

[19] Por propiedades de figuras simétricas "Los cuatro ángulos tienen sus bisectrices en dos rectas. Cada una de ellas es eje de simetría del par de rectas dado, es también eje de las otras bisectrices y por tanto: las bisectrices de dos ángulos adyacentes y suplementarios son perpendiculares".

rectas ***l*** *y* ***m*** son perpendiculares a la arista **r** del ángulo diedro **αβ**, y por tanto, se puede determinar el plano θ (formado por los puntos **P, a** y **b,** donde el punto **a** es la intersección de la recta **t** con el plano **β,** y el punto **b** es la intersección de la recta **s** con el plano **α**) debido a la intersección de las rectas ***m*** y ***s***. Por lo tanto la distancia de **P** al plano **α** es **Pa,** y la distancia desde el mismo punto **P** al plano **β** es **Pb,** en donde, **Pa = Pb.**

Análogamente para en cualquier par de rectas perpendiculares de los planos **λ** y **φ,** distintas de ***l y m,*** entonces el lugar geométrico en cuestión es el plano bisector **λ** del ángulo diedro **αβ** (Ver figura 38b).

Figura 38(b). Bisector de los ángulos diedros



Observación

- De acuerdo con la figura anterior se puede observar que cada uno de los planos **α, β, λ,** y **φ** son planos de simetría especular a los lados de cada uno de ellos, debido a que forman ángulos congruentes con ellos**.**

Actividad:

Resolver la situación problema 5 del taller ¿Cómo vamos en el espacio?

7. TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL ESPACIO.

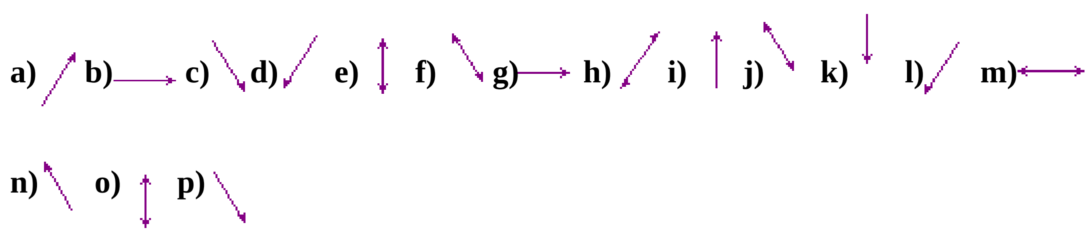
El siguiente taller ha sido diseñado sobre aspectos básicos de este tema, buscando hacer un diagnóstico sobre los conocimientos que el estudiante ha alcanzado hasta el momento.

7.1 TALLER DIAGNÓSTICO SOBRE "TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL ESPACIO"

1. ¿Qué se entiende por trasladar una figura en el espacio?

2. Dadas tres rectas **a**, **b** y **c** donde **a** es paralela a **c** y **b** es paralela a **c**. ¿Qué se puede afirmar de las rectas **a** y **b**? ¿Por que?

3. Dados los siguientes vectores, determine cuáles tienen la misma dirección.



4. Si una esfera de centro **O** se traslada en dirección de un vector cualquiera $\overrightarrow{AA'}$, al tomar los puntos **O**, **O'** para formar el vector $\overrightarrow{OO'}$ ¿Qué se puede concluir de los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{OO'}$?

5. Al trasladar una recta **ℓ** se obtiene otra recta **ℓ'.** ¿Cómo son estas dos rectas?

6. Dado un conjunto de planos paralelos:

a. Al aumentar a un plano **α** que se interseca con uno de los planos. ¿Qué sucede con los planos restantes?

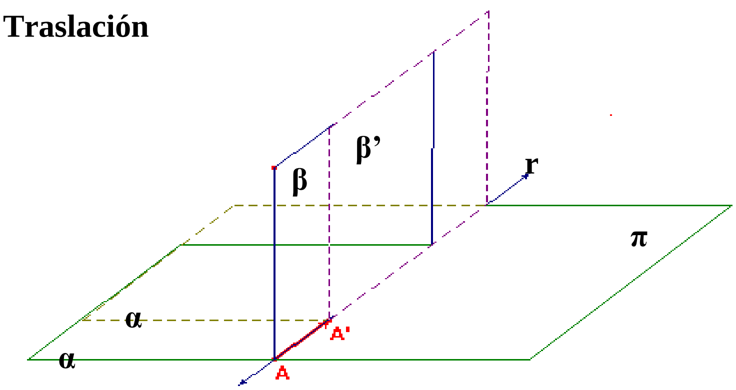
b. Al aumentar una recta **r** que corta a uno de los planos. ¿Qué sucede con los planos restantes?

c. Al aumentar una recta **ℓ** que es perpendicular a uno de los planos del conjunto. ¿Qué sucede con los demás?

7.1 DEFINICIÓN DE TRASLACIÓN:

Al igual que en el plano, dados dos puntos **A** y **A’** contenidos en un plano **π**, una recta **r** que pasa por estos puntos y el semiplano **α** limitado por dicha recta, se llamará **traslación** al movimiento que transforma la semirrecta de origen **A** que contiene **A’** en la de origen **A’** y de igual sentido; al plano **π** y al semiplano **α** en si mismos respectivamente (Ver figura 39).

Figura 39. Traslación



Observaciones:

- La recta $\overleftrightarrow{AA'}$ se llama **directriz** (Vector traslación).
- La traslación determinada por el vector $\overrightarrow{AA'}$**,** se denotará por $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ (Ver figura 39).
- Cualquier otro semiplano **β** limitado por la recta **r** se transforma en si mismo, pues por ser congruentes y del mismo sentido los ángulos diedros **αβ** y **α’β’**, el semiplano **β** debe confundirse con **β’**.
- Todos los planos que pasan por la directriz son dobles, es decir, Al aplicar la traslación $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ al plano **α** o **β** de la figura 39, la imagen es el mismo plano.

Actividad:

Con la ayuda del software Autocad, trazar una recta paralela al eje x, tomando como centro de una circunferencia un punto cualquiera de la recta y determinar el lugar geométrico de la traslación de la circunferencia en dirección positiva de la recta en una magnitud menor o igual a 10 mm.

7.1.1. Propiedades De La Traslación:

- Dos rectas **a** y **b** paralelas a una recta **r**, son paralelas entre sí (propiedad transitiva del paralelismo de rectas en el espacio); pues se puede tomar cualquiera de ellas como directriz de una traslación en que son también dobles las otras dos.

- Todas las rectas paralelas entre sí, tienen la misma dirección.

- Dos puntos homólogos **P** y **P'** en una traslación $\overrightarrow{AA'}$ determinan un vector $\overrightarrow{PP'}$ congruente y paralelo al vector $\overrightarrow{AA'}$. Ambos vectores definen la misma traslación.

- Dos rectas homólogas **r** y **r'** en una traslación en el espacio Euclidiano son paralelas. Basta considerar la traslación $\overrightarrow{PP'}$ en el plano determinado por estas dos rectas, que une dos de sus puntos homólogos y transforma la recta **r** en **r'**.

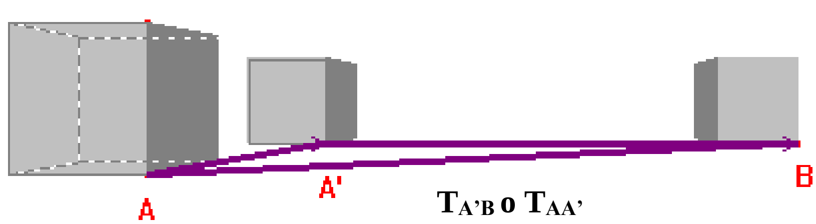
- Si $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ y $\mathbf{T}_{\overrightarrow{BB'}}$ son dos traslaciones en el espacio de alguna figura, entonces, la **composición o producto** de las dos traslaciones es la traslación $\mathbf{T}_{\overrightarrow{BB'}}$ de la imagen de la traslación $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ aplicada a la figura. Y su notación es:

$$(\mathbf{T}_{\overrightarrow{BB'}}\ \mathbf{o}\ \mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}})(\text{fig.}) = \mathbf{T}_{\overrightarrow{BB'}}\ (\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}\ (\text{fig.})).$$

Ejemplo:

Sea A un cubo, aplicar inicialmente una traslación $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ posteriormente, a esta imagen aplicar una nueva traslación $\mathbf{T}_{\overrightarrow{A'B}}$. El producto de estas dos traslaciones es la traslación ($\mathbf{T}_{\overrightarrow{A'B}}$ **o** $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$) aplicada al cubo donde ($\mathbf{T}_{\overrightarrow{A'B}}$ **o** $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$) (fig.) = $\mathbf{T}_{\overrightarrow{A'B}}$ ($\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ (Fig.)). (Ver figura 40).

Figura 40. Traslación de un cubo



Actividad:

Construir en autocad un cilindro[20] y aplicar la propiedad 5 enunciada anteriormente.

7.2 PARALELISMO DE PLANOS Y DE RECTAS CON PLANOS

Observación

- Sean **α** y **π** dos planos. Se dice que **α** y **π** son paralelos si no tienen punto alguno en común. El cual se nota como **α||π**. Análogamente toda recta **r** que no tiene ningún punto común con un plano **π,** se llama paralela a él y su notación es **r||π**.

Teorema:

Si **A'** es un punto exterior a un plano **π** entonces, por **A'** pasa una recta paralela al plano **π**.

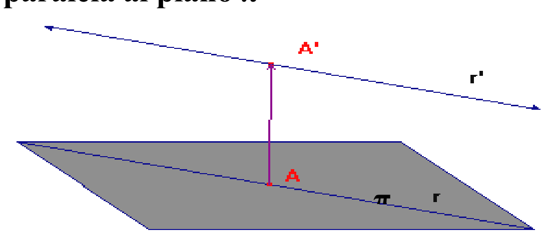
Demostración:

Hipótesis: Sea **A'** un punto exterior a un plano **π**.

Tesis: Por **A'** pasa una recta paralela al plano **π**.

Sea **A'** un punto exterior de un plano **π** y **r** una recta de este plano entonces, por un punto **A** de la recta **r** y el punto **A'** se traza el vector $\overrightarrow{AA'}$**,** al aplicar la traslación $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ al plano **π** se tiene, $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A'}$ y $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r'}$ donde **A'** esta contenido en **r'** (por axioma del movimiento). Es decir que por **A'** pasa la recta **r'** paralela a **r** (por propiedad 4 de traslación en el espacio). En conclusión, como **r** está contenida en el plano **π**, **r'** es paralela al plano π entonces, por **A'** pasa una recta paralela al plano **π** **(**Ver figura 41).

Figura 41. Recta paralela al plano π



[20] Cilindro, o cilindro circular recto, es el cuerpo de revolución generado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

Del anterior teorema se puede deducir que por un punto **A’** exterior a un plano pasan infinitas rectas paralelas a éste. Sea **A’** un punto exterior al plano **π** (en virtud de la propiedad transitiva del paralelismo de rectas en el espacio); para tener todas las rectas paralelas al plano **π** por el punto exterior **A’** bastaría trazar por **A’** paralelas a las rectas que pasan por un punto **A** en el plano **π**. Ahora bien, la traslación $\mathbf{T}_{\overline{AA'}}$ transforma el punto **A** en **A’**. Luego, todas las rectas paralelas al plano están en el plano **π’** que es el transformado de **π** por la traslación $\mathbf{T}_{\overline{AA'}}$.

Actividades:

1 Dados dos planos **α** y **β** en el espacio ¿Qué se debe cumplir para que sean paralelos?.

2 ¿Cuántas rectas paralelas a un plano se pueden trazar por un punto exterior a él?.

Observaciones:

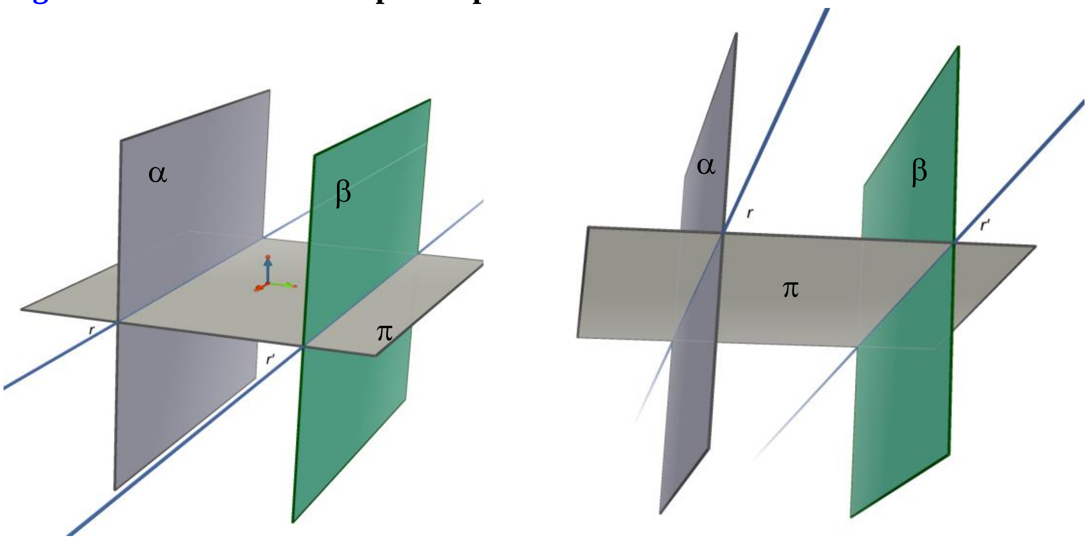
Dadas las siguientes proposiciones, se le pide al lector justificar cada una de ellas utilizando algún método de demostración.

- El lugar geométrico de todas las paralelas a un plano **π** por un punto exterior **A’** es otro plano paralelo **π’**.

- En toda traslación los planos homólogos (no dobles) son paralelos.

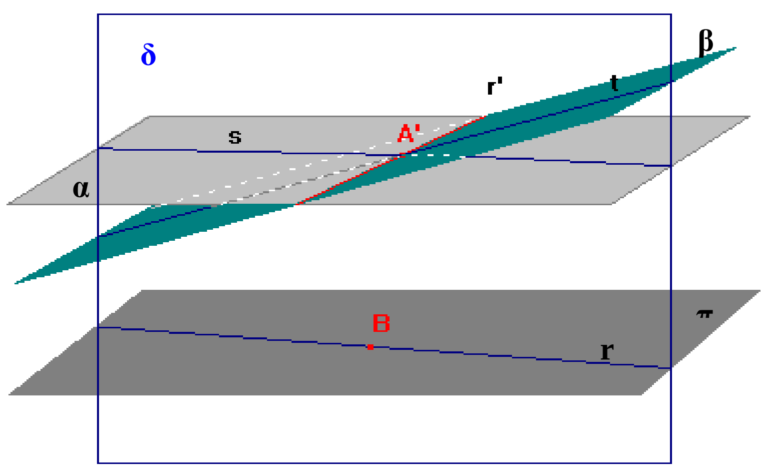
- Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son rectas paralelas y coplanarias. Si estas rectas tienen algún punto en común, los dos planos iniciales también tendrían puntos en común, contradiciendo el hecho de que los dos planos son paralelos (Ver figura 42).

Figura 42. Intersección de planos paralelos con un tercero



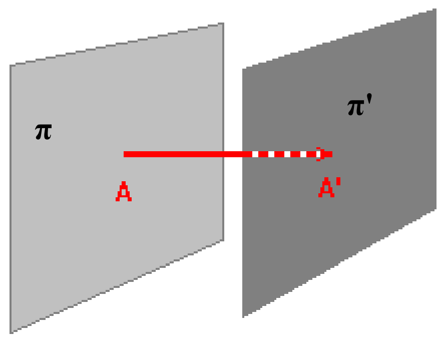
- Por un punto **A'** exterior a un plano **π** no se puede trazar más que un plano paralelo a éste. Si existieran dos planos **α** y **β** diferentes y paralelos a **π** que pasan por el punto **A'**, tendrían una recta en común **r'** (intersección de dos planos) que contiene al punto **A'** y todo plano **δ** que pasara por **A'** y por un punto **B** de **π** sin contener a la recta **r'**, cortaría al plano **π** en una recta **r** y a sus planos paralelos **α** y **β** en dos rectas paralelas **s** y **t** respectivamente que tendrían en común el punto **A'**; contradiciendo el hecho que si dos rectas son paralelas no debe existir punto alguno en común (Ver figura 43).

Figura 43. Intersección de dos planos y una recta en común



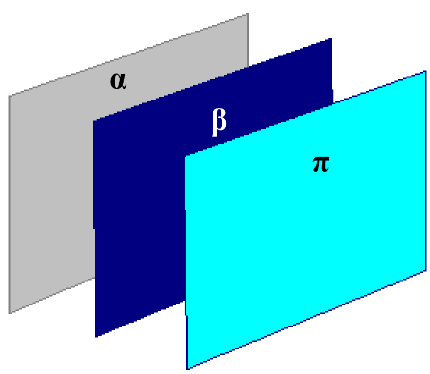
- Dos planos paralelos **π** y **π’** puede transformarse uno en otro mediante la traslación definida por el vector $\overrightarrow{AA'}$ que une dos cualquiera de sus puntos. Los puntos **A** y **A`** pertenecen a los planos **π** y **π’** respectivamente (no necesariamente homólogos). (Ver figura 44). En efecto, el plano paralelo a **π** por **A’** es único y coincide con su homólogo en la traslación $\mathbf{T}_{\overrightarrow{AA'}}$.

Figura 44. Transformación de dos planos paralelos en otro



- Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre si. Si los dos planos tuvieran algún punto en común, uno de los planos interceptaría al tercero; contradiciendo el hecho de que son paralelos (Ver figura 45).

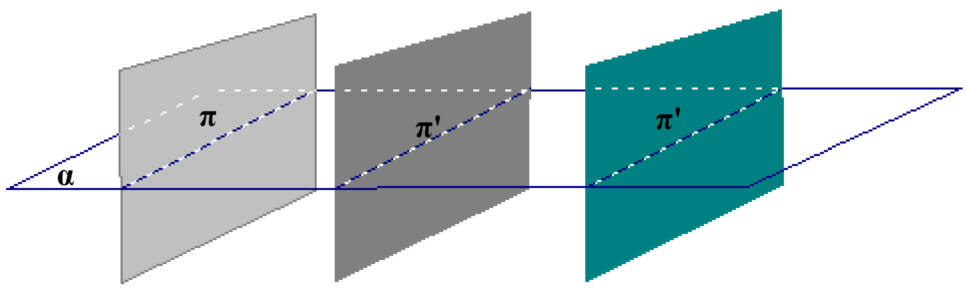
Figura 45. Dos planos paralelos a un tercero



En general: Sean **α**, **β** y **π** planos del espacio euclidiano donde **α** || **β** y **π** || **β** entonces **α** || **π** (Propiedad transitiva de paralelismo entre planos).

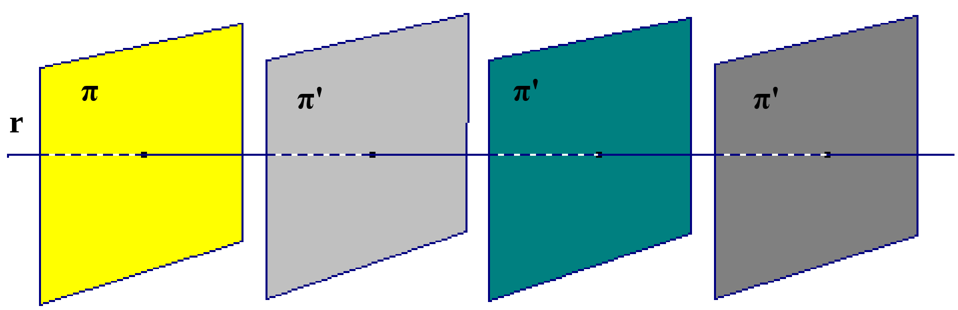
➢ Si un plano **α** corta a otro **π**, **α** también corta a todo plano **π'** paralelo a **π**. Si el plano **α** no corta a algún plano **π'**, estos serían paralelos (**α** || **π'**) y como **π** || **π'** entonces **α** || **π** (propiedad transitiva de paralelismo entre planos), hecho que contradice **α** corta **π** (Ver figura 46).

Figura 46. Propiedad transitiva de paralelismo entre planos



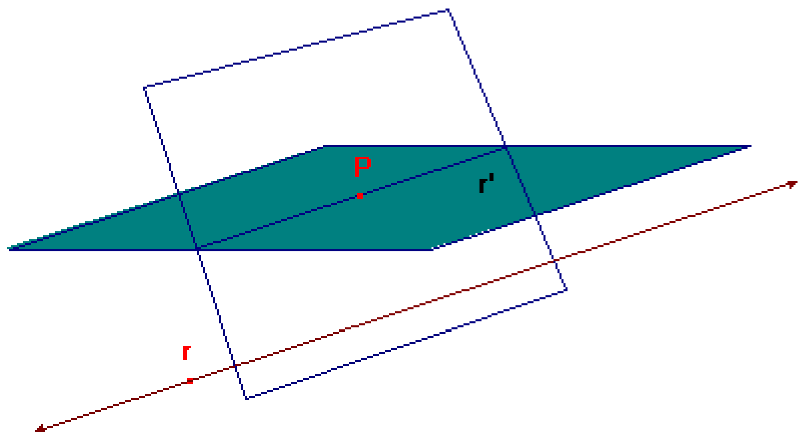
➢ Si una recta **r** corta a un plano **π**, **r** corta a todo plano **π'** paralelo a **π**. Si la recta **r** no corta a un plano **π'**, **r** sería paralela con **π'** y una recta **r'** paralela a **r** que esté contenida en el plano **π'** cortaría al plano **π** (por la anterior observación). Luego el plano **π** tendría algún punto en común con el plano **π'.** Contradiciendo el hecho de que el plano **π** es paralela con el plano **π'** (Ver figura 47).

Figura 47. Planos paralelos entre si y perpendiculares a una recta.



➢ Por un punto **P** exterior a una recta **r** pasan infinitos planos paralelos a ella. De otro punto de vista, si una recta **r** es paralela a dos planos secantes, **r** es paralela a dicha intersección de los planos (Ver figura 48).

Figura 48. Infinitos planos paralelos a una recta

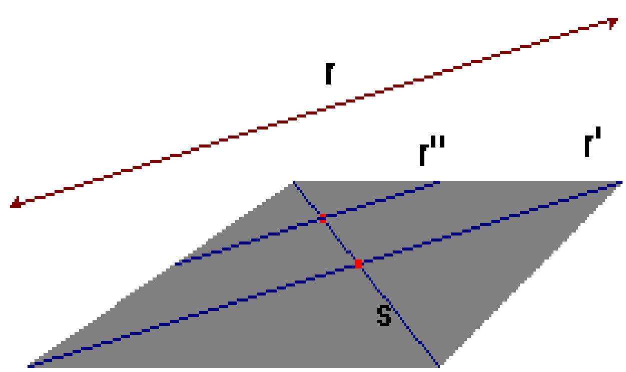


Actividad:

Comprobar la interpretación geométrica de la propiedad anterior, utilizando un software Autocad o Cabri 3D para las construcciones de las figuras.

- Por una recta **s** que se cruza con otra recta **r** pasa uno y sólo un plano paralelo a ella. Por un punto de **s** se traza una recta **r’** paralela a **r** para formar el plano **sr’** siendo este el plano pedido. Otro plano análogo **sr’’** donde **r’’** es otra recta paralela a **r** que pasa por otro punto de **s** diferente del primero; el plano **sr’** coincide con el plano **sr’’** por el paralelismo de la rectas **r’** y **r’’** (Ver figura 49).

Figura 49. Plano paralelo a una recta

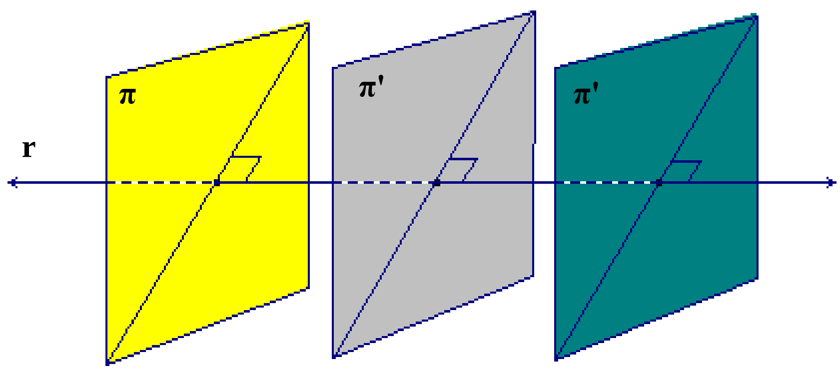


7.3 PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

La traslación, como todo movimiento, conserva la perpendicularidad entre rectas secantes y, por tanto, entre recta y plano. De donde:

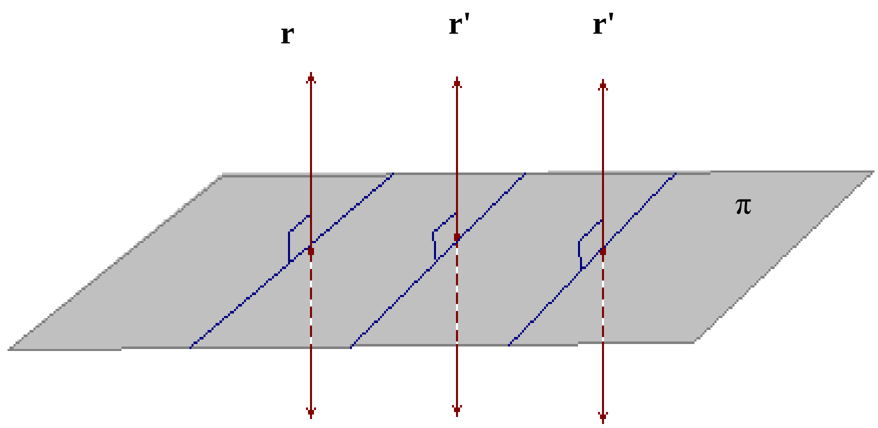
- Si una recta **r** es perpendicular a un plano **π**, **r** es perpendicular a todos los planos **π'** paralelos a **π** (Ver figura 50).

Figura 50. Perpendicularidad y paralelismo



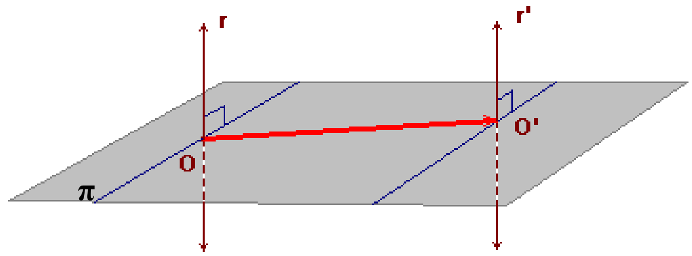
- Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí. Pues se corresponden en la traslación que lleva uno de los puntos de intersección sobre el otro.
- Si un plano **π** es perpendicular a una recta **r**, **π** es perpendicular a toda recta **r'** paralela a **r** (ver figura 51).

Figura 51. Plano perpendicular a una recta



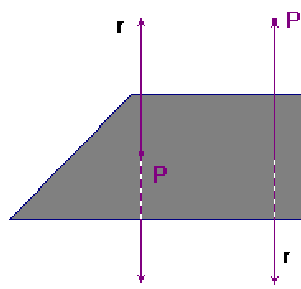
➢ Dos rectas **r** y **r'** perpendiculares a un mismo plano **π** son paralelas entre si. Pues se corresponden en la traslación $\mathbf{T}_{\overline{OO'}}$ definida por los puntos de intersección con el plano **π** respectivamente (Ver figura 52).

Figura 52. Rectas perpendiculares a un plano



➢ Por un punto **P** siempre se puede trazar una y sólo una recta **r** perpendicular a un plano **π**. El punto **P** puede estar en el plano **π** o fuera de él (Ver figura 53).

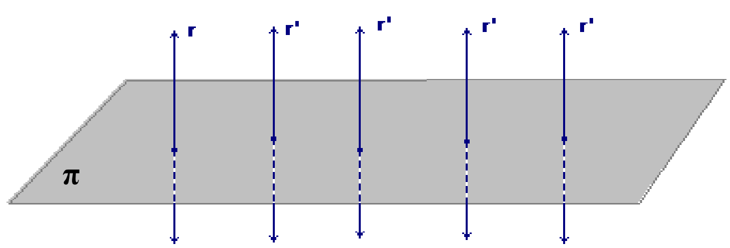
Figura 53. Rectas perpendiculares a un plano por un punto



Teorema

Si un plano **π** corta a una recta **r**, entonces **π** corta a toda recta **r'** paralela a **r** (Ver figura 54).

Figura 54. Rectas paralelas entre si y perpendiculares a un plano.



Demostración (Por contradicción)**:**

Sea **π** un plano y **r** una recta tal que **π** corta a **r**, entonces **π** corta a toda recta **r'** paralela a **r**.
Hipótesis: El plano **π** corta a una recta **r**.
Tesis: El plano **π** corta a toda recta **r'** paralela a **r**.

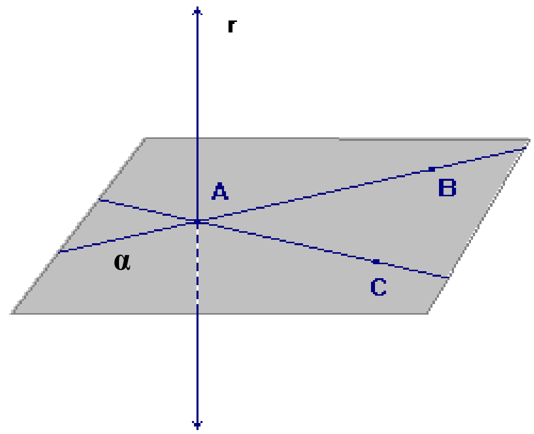
Suponga que el plano **π** corta a una recta **r** y **π** no corta a una recta **r'** paralela a **r** entonces, como **π** no corta a la recta **r'** en ningún punto se tiene que **π** es paralela a **r'** (por definición de paralelismo entre recta y plano) y **r** es paralela con **r'** entonces, el plano **π** es paralelo a la recta **r** (por propiedad transitiva de paralelismo entre planos y rectas. π || r' y r' || r entonces π || r.). Contradiciendo el hecho que **π** corta a la recta **r**.

Teorema
Dado un punto **A** y una recta **r** del espacio euclidiano entonces, por el punto **A** se puede trazar uno y solamente un plano perpendicular a **r**.

Demostración:
Hipótesis: Sean un punto **A** y **r** una recta del espacio euclidiano.
Tesis: Por el punto **A** se puede trazar uno y solamente un plano perpendicular a **r**.
Dado una recta **r** y un punto **A**, en donde **A** puede estar en la recta o fuera de ella, se tiene que:

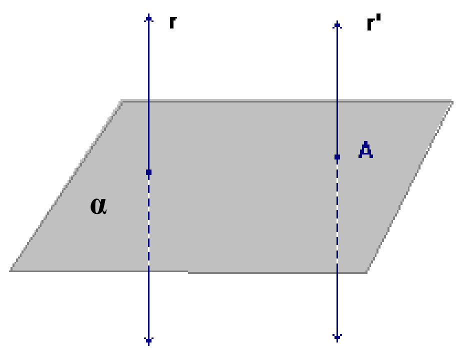
i. Si el punto **A** está sobre la recta **r**, por **A** pasan infinitas rectas perpendiculares a la recta **r.** Al tomar dos de ellas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ las cuales determinan un único plano **α** que contiene al punto **A**. En consecuencia por **A** se puede trazar uno y solamente un plano **α** perpendicular a **r** (Ver figura 55).

Figura 55. **Rectas que determinan un plano**



ii. Si el punto **A** no está sobre la recta **r** entonces, por el punto **A** pasa una única recta **r'** paralela a la recta **r**, en consecuencia por el punto **A** se puede trazar uno y solamente un plano **α** perpendicular a **r'** (según el primer caso) entonces, como **α** es perpendicular a la recta **r'**, **α** es perpendicular a **r** ya que **r** es paralela a **r'**. Por los casos i y ii se concluye que, por el punto **A** se puede trazar uno y solamente un plano perpendicular a **r** (Ver figura 56).

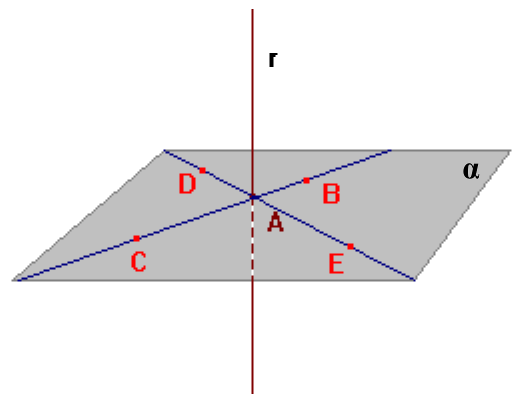
Figura 56. **Plano perpendicular a una recta**



Observación:

- El lugar geométrico de las perpendiculares a una recta por un punto, es el plano trazado por este punto, perpendicular a la recta. En efecto, dos de estas perpendiculares determinan un plano que es perpendicular a la recta dada, trazando por dicho punto. Luego todas las perpendiculares están en este plano; y como toda recta de este plano es perpendicular a la recta dada, dicho plano es el lugar geométrico de dichas perpendiculares (ver figura 57).

Figura 57. Lugar geométrico de las perpendiculares a una recta



8. DISEÑO DE TALLERES

Después de presentar las notas de clase, se abordará el complemento del objetivo que es la realización de los talleres a partir de situaciones problema enfocadas dentro de la temática propuesta teniendo en cuenta el marco conceptual de este trabajo.

Trabajar la geometría en tres dimensiones no es nada fácil, pues se dificulta bastante una de las características mas importantes como lo es la visualización de algunos conceptos, de ahí que proponemos el uso de un software, puesto que con este, algunas de las situaciones problema u objetos geométricos se ven desde diferente ángulos o puntos de vista, contribuyendo así al desarrollo de dicha característica.

Para la escogencia de las situaciones problema que se presentarán, se tuvo en cuenta que la expresión situación problema se vincula no sólo con situaciones específicas para encontrar soluciones, sino para aprender e interpretar algún concepto matemático. Es decir, que al resolver una situación problema el estudiante debe discutir ideas, usar representaciones, estrategias cognitivas y utilizar contraejemplos, ya sea para avanzar, entender, y además crear una integración de diferentes temas o áreas para que encuentre las relaciones que existen entre las diferentes partes de las matemáticas, permitiéndole la práctica constante de los conocimientos adquiridos en diferentes contextos. Una situación problema le da la oportunidad al estudiante de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir y asimilar nuevos conocimientos, que servirán para resolver nuevas situaciones.

Es de ahí que las situaciones problema propuestas están encaminadas en, primera instancia, que el lector al analizarlas y desarrollarlas siga el siguiente proceso: ***diseñe***, entendiendo esto como la concepción inicial en el momento de ver la situación problema y que además pueda describir lo que percibe en dicha situación, ***explore*** es decir que examine o reconozca con diligencia lo que esta haciendo, ***modelice*** es decir dar determinada forma a las ideas que tiene de la situación problema, ***conjeture*** a partir de de la organización de sus ideas forme juicios teóricos, ***defina*** es decir que fije con claridad, exactitud y precisión cada uno de los juicios teóricos o que determine la resolución de la situación problema, ***argumente*** es decir que deje ver con claridad que sus definiciones o sus conjeturas tienen validez, que logre darle un razonamiento lógico a sus indicios y por último que llegue a ***demostrar*** es decir que pruebe lo que hizo en dicha situación partiendo de verdades universales, que llevan a una comprobación ya sea por hechos ciertos o por experimentos repetidos de alguna teoría, o que a partir de sus conocimientos pueda mostrar que se tiene entera certeza.

Por ejemplo, al leer la siguiente situación problema: ¿Por qué una mesa de tres pies asienta siempre bien en el suelo, y una de cuatro pies, no siempre? Inmediatamente se diseña en la mente dos mesas, con tres y cuatro pies; para explorar las razones del porqué de la situación y poder modelizar. A partir de la organización de las ideas conjeture y poder definir el teorema (tres puntos diferentes determinan un plano y que un cuarto punto puede pertenecer o no al plano determinado); al argumentar, considerando los pies de las mesas como los puntos del suelo plano, los tres pies siempre estarán sobre el suelo mientras que un cuarto pié puede ser más corto o largo que los demás. ya se puede demostrar con mucha certeza que una mesa de tres pies asienta bien en el suelo y una de cuatro pies no.

En segunda instancia según la tendencia socio cultural que nos habla Hoffer A. en "La geometría es mas que demostración" la resolución de éstas situaciones problemas permitirá al lector tener una nueva visión de la geometría ya que éstas permiten explorar, planear estrategias de solución, relacionarlas con otras áreas, construir conceptos, encontrar propiedades, aplicar sus conocimientos en aras de dar una justificación a sus ideas; lo que motivara al lector en el aprendizaje de la geometría, pues a partir de dichas situaciones se espera lograr que él construya su propio conocimiento.

En tercera instancia teniendo en cuenta el papel que juega la geometría en la educación Fregona D. hace referencia a algunos aspectos como ella los llama dimensiones (mencionados en el marco conceptual) los cuales deben ser tenidos en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicha área, las situaciones problema que se presentan en los talleres contienen las dimensiones ya sea total o parcialmente, puesto que se espera posibilitar al lector desarrollar sus propios criterios, familiarizarse a un más con el lenguaje matemático, partiendo de la realidad para abordar el espacio, así mismo interiorizar sobre la teoría que conoce dándole forma a nuevos conceptos, lograr una relación entre diferentes campos ya sea de la matemática o de otras áreas, utilizar diferentes herramientas para que ratifique sus diferentes conjeturas. Por ejemplo:

- A tu alrededor encuentras muchos figuras que se generan gracias a movimientos y transformaciones, enumera algunas y di con que se generan.

- ¿Qué ocurre cuando ves tu imagen en un espejo plano?

- Un foco luminoso colocado entre dos espejos planos paralelos, distantes de 4 metros, esta situado a 1 m de uno de ellos; construir las tres primeras imágenes formadas por cada espejo.

En las anteriores situaciones problema relaciona la geometría con: el diseño y la posición de objetos, los fenómenos físicos de la naturaleza. Entre otros que se plantean en los talleres.

Por último con estas situaciones problema se pretende facilitar la exploración del espacio, potenciar la imaginación con ayuda de herramientas computacionales como se muestran en los siguientes ejemplos:

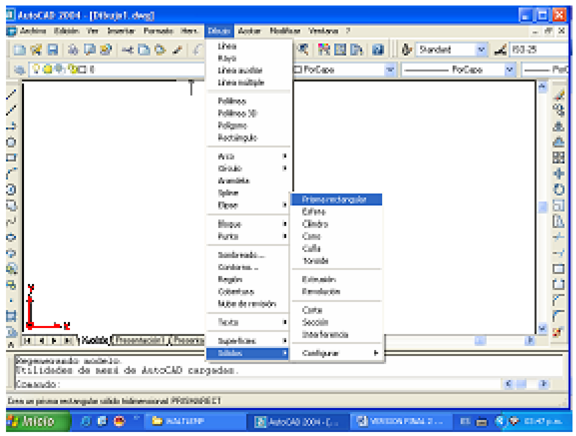
- Dado un paralelepípedo en el espacio, aplicarle la simetría especular con respecto a un plano perpendicular al plano XY.

Solución:

Para el desarrollo de este ejemplo se hará uso del software AutoCAD así:

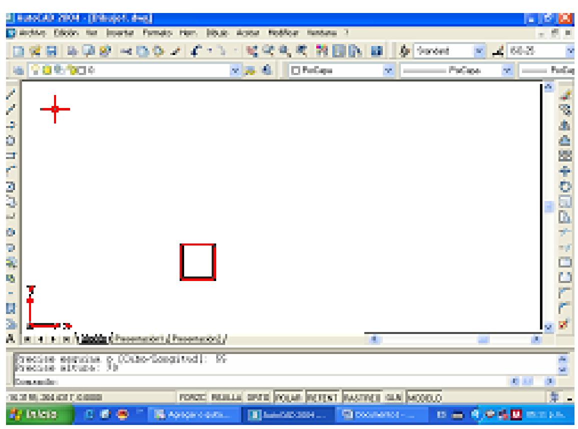
1. Para la construcción del paralelepípedo se da clic en la opción dibujo, sólidos, prisma rectangular (ver figura 58),

Figura 58



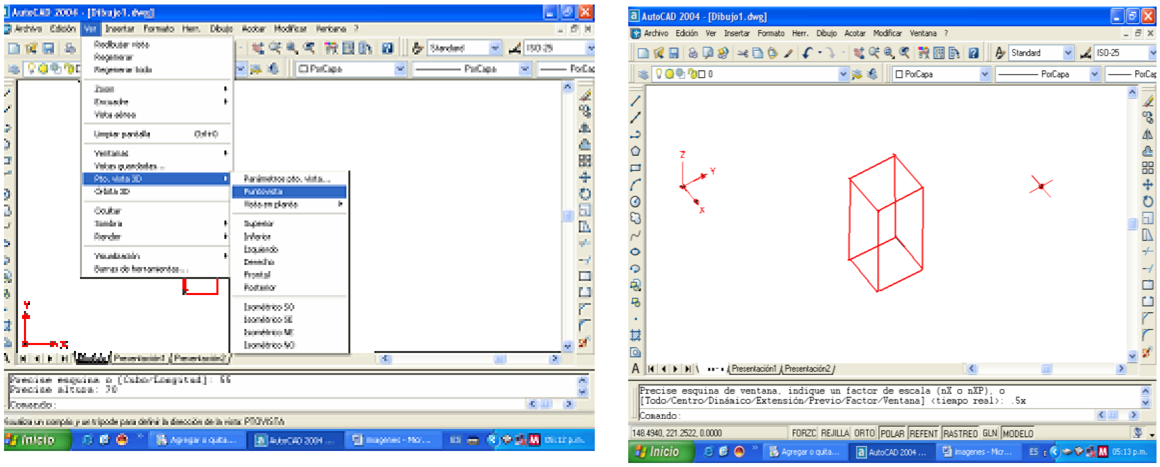
1. Precisar los comandos para el prisma: una esquina, longitud y su altura, mostrando la figura correspondiente desde el punto de vista del plano XY:

Figura 59.



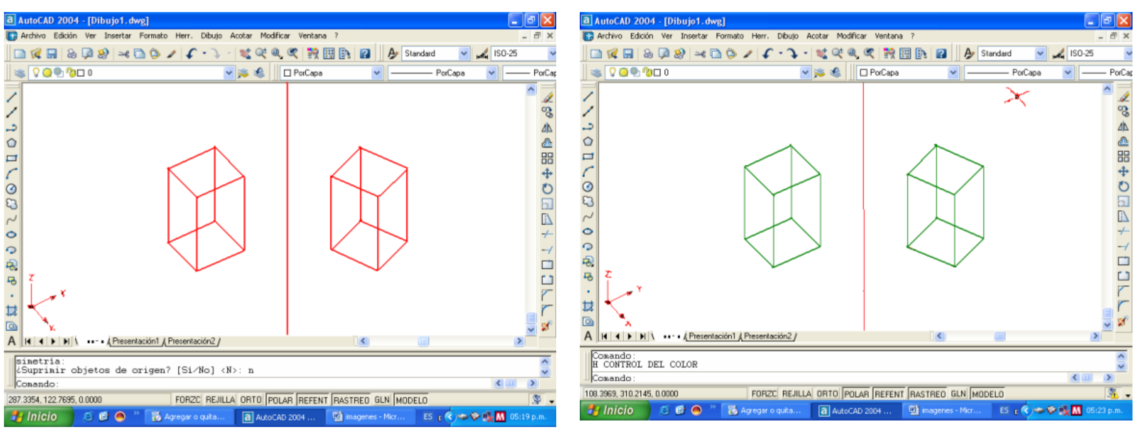
2. Para cambiar el ángulo de visualización, se da clic en ver, Pto. Vista 3D, Puntovista, el cual permite manipular según la necesidad:

Figura 60.



4. Para aplicar la simetría especular a la figura; se da clic sobre el comando simetría el cual exige seleccionar un objeto y dos puntos (los puntos determinan una recta por la cual pasa el plano de simetría perpendicular al plano XY). Este programa permite ambientar los resultados obtenidos en alguna aplicación, por ejemplo dar color a las graficas:

Figura 61.

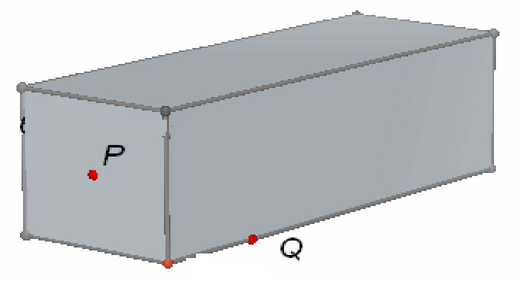


En los siguientes ejemplos solamente se presentarán algunas indicaciones e imágenes de los procesos para la solución. Los cuales se pueden comprobar con la ayuda de los software.

- Calcular el camino más corto entre los puntos P y Q desplazándose por las caras del paralelepípedo de la figura. Donde:

1. La distancia de los bordes de la cara izquierda al punto P es de 1,08 cm.
2. La distancia del punto Q al borde izquierdo es de 1,46 cm.

Figura 62.

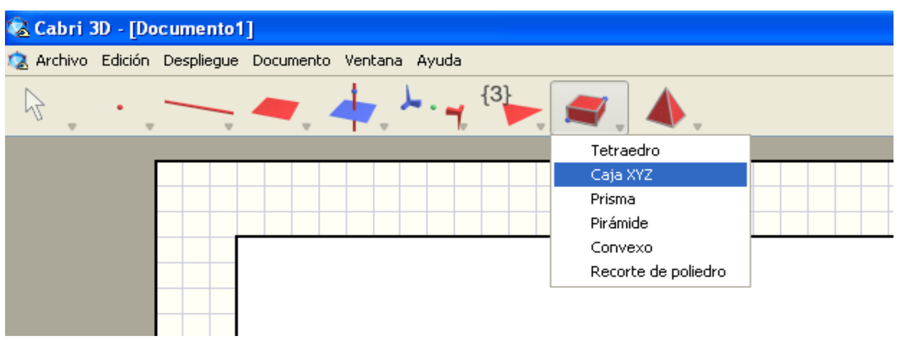


Solución:

Para poder visualizar de diferentes puntos de vista la magnitud del problema lo primero que se debe realizar es la construcción de los elementos que se enuncian en la situación problema.

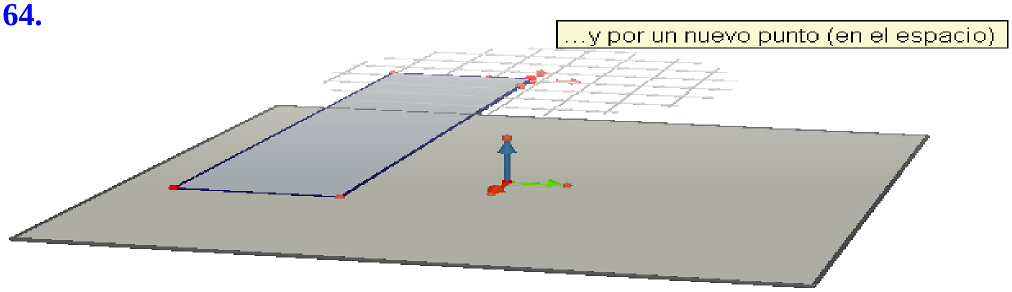
Con ayuda del programa Cabri 3D se construye el paralelepípedo dando clic izquierdo sobre el botón caja xyz ubicado en el menú de la parte superior.

Figura 63



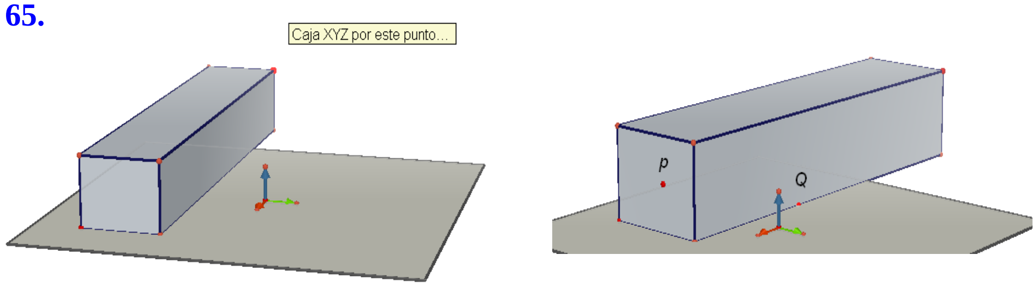
Luego se hace clic sobre el espacio para marcar un vértice del paralelepípedo, al mover el mouse se define el largo y ancho de la base en la figura.

Figura 64.



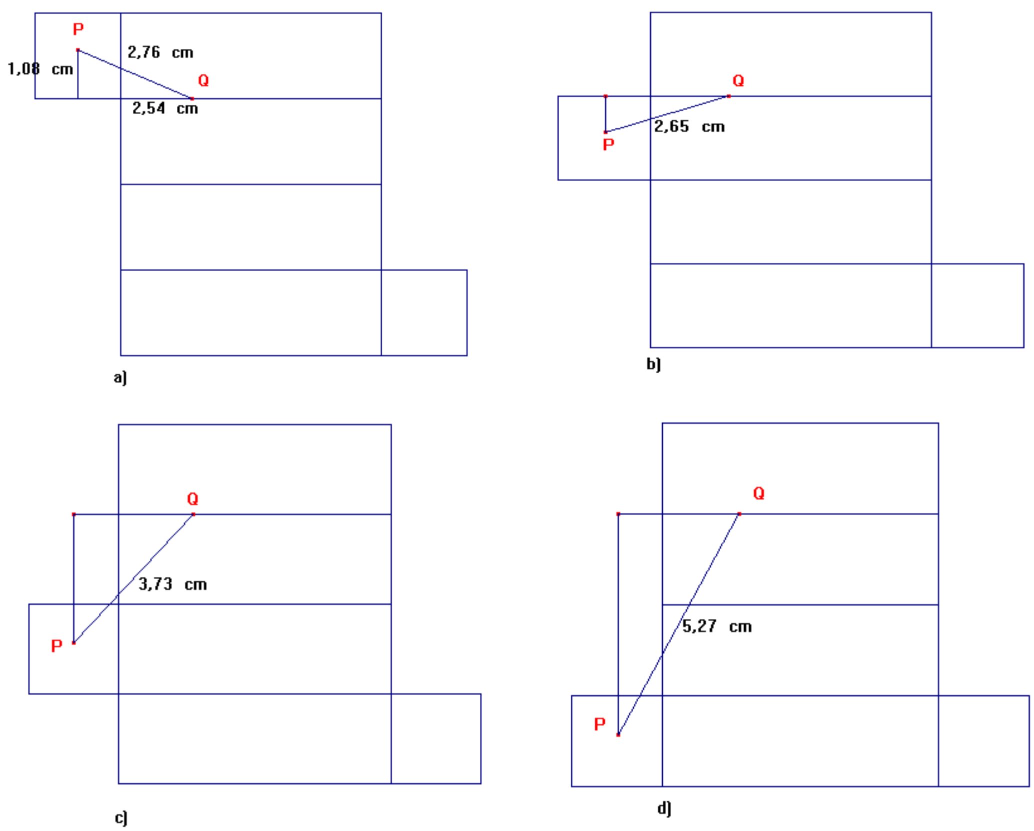
Al definir la base, con shift sostenido se da la altura deseada haciendo clic al lado derecho del mouse, construyendo de esta manera el paralelepípedo deseado. Ahora se ubican los puntos P y Q con una aproximación a la planteada en la situación problema.

Figura 65.



Como nuestro objetivo es encontrar el camino más corto entre los puntos P y Q desplazándose por las caras del paralelepípedo, la solución consiste en desbaratar la caja y llevarla al plano de manera que se presentarían cuatro formas diferentes las cuales se analizan en las siguientes figuras:

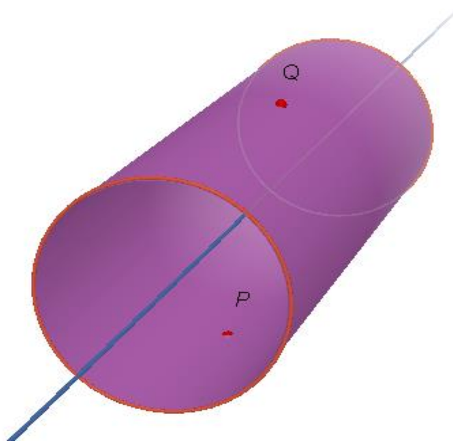
Figura 66.



Quedando como solución al problema el camino que se muestra en la figura (**b).**

- Calcular el camino más corto entre los puntos P y Q desplazándose por las caras del cilindro de la figura. Donde el punto P se encuentra en la parte interna del cilindro y Q en la parte externa.

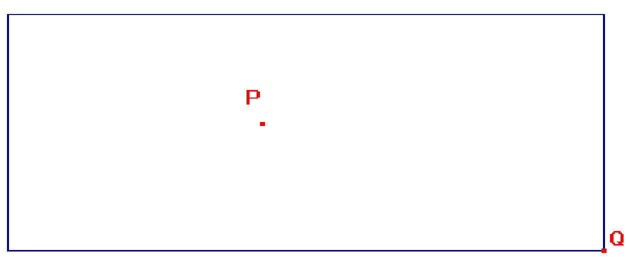
Figura 67.



Solución:

Para poder visualizar de diferentes puntos de vista el problema planteado lo primero que se debe realizar es la construcción de los elementos enunciados con la ayuda del programa Cabri 3D. Para obtener la construcción de la gráfica (ver figura 73). Luego, como un cilindro es un plano enrollado alrededor de un eje, al cortar la figura por el punto Q en forma paralela a su eje y llevando el recorte al plano se obtiene una de las posibles figuras:

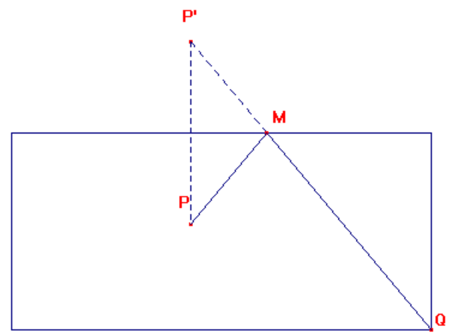
Figura 68.



Al aplicar una simetría axial al punto P con respecto al borde superior se obtiene el punto P’ fuera del recorte; luego el camino más corto entre los puntos Q y P’ es el segmento $\overline{P'Q}$

que interseca el borde superior en un punto M (ver figura 75). También se deduce que el segmento $\overline{P'M}$ es simétrico al segmento $\overline{PM}$.

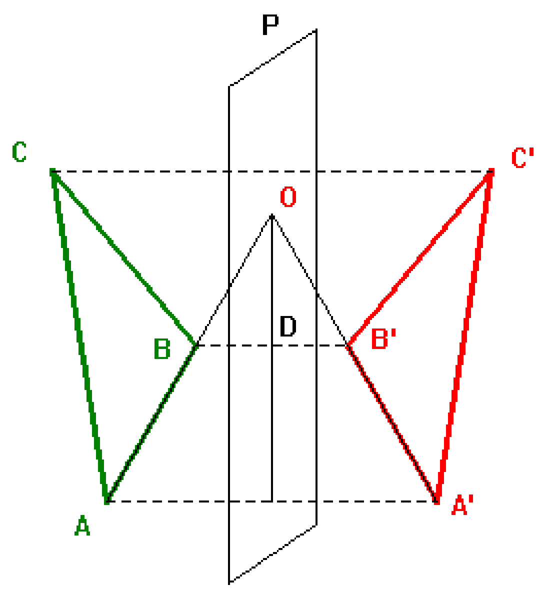
Figura 69.



Luego la solución de la situación problema es el recorrido que muestra los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$.

- Demostrar que: si dos figuras son simétricas con respecto a un plano (las figuras no tienen que ser paralelas al plano), dos de sus rectas homologas prolongadas que cortan el plano, forman con él ángulos congruentes, y su proyección común en el plano es la bisectriz del ángulo formado por dichas rectas.

Figura 70.



Solución:

Sea F' una figura simétrica de F con respecto al plano **α**, al prolongar la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pertenece a la figura F, dicha recta cortará al plano **α** en un punto O, análogamente la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ al prolongarla cortará al plano **α** en el mismo punto O por ser dicha recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ homologa de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

Al tomar el plano formado por los puntos A, B, A' y B' podemos decir que:

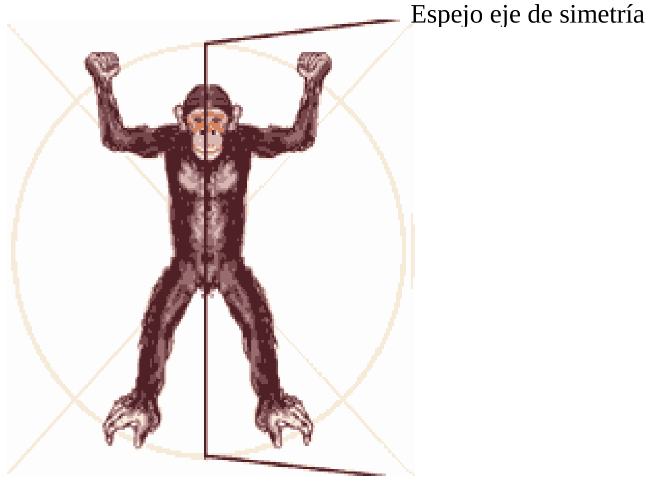
1. El segmento $\overline{OB}$ es congruente con el segmento $\overline{OB'}$, (**L**)
2. El triangulo ∆OBB' es isósceles por la primera parte, de ahí que el ángulo <OBD es congruente con el ángulo <OB'D (**A**)
3. El segmento $\overline{BD}$ es congruente con el segmento $\overline{DB'}$. (**L**)

Por lo tanto el triangulo ∆OBD'≅∆OB'D, luego el ángulo <BOD ≅ <DOB'. Es decir que la recta formada por los puntos OD es bisectriz del ángulo <AOA'

Consideramos que las situaciones que presentamos son actividades que permiten al lector tratar de ver la geometría en tres dimensiones, además se espera que desarrollen en el lector la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas

No es fácil familiarizarse con el espacio tridimensional, aunque nuestro rostro es un vivo ejemplo donde se puede observar algunos de los movimientos en tres dimensiones. Pues si nos percatamos bien vemos que hay un eje en el cuerpo, lo mismo ocurre con algunas obras arquitectónicas que se construyen a partir de figuras que son formadas por distintos movimientos que hay en el espacio.

Figura 71.



Las situaciones problema que se presentan en estos talleres consideramos que facilitan de una manera práctica, agradable visualizar el espacio tridimensional, pues recalcamos nuevamente, que hacer geometría en tres dimensiones no es fácil.

El primer taller que se elaboró fue: ¿Qué tal te mueves en el espacio? y se hizo con la finalidad de ver que conocimientos previos se tienen acerca del espacio, contiene situaciones problema que abarcan las notas preliminares dichas situaciones problema permitirán al lector ubicarse en el espacio reconocer algunas propiedades axiomas y definiciones que se deben manejar antes de iniciar con los temas de simetrías y traslaciones, un segundo taller con la finalidad de ir reforzando la temática vista en cuanto simetrías "¿Cómo vamos en el espacio? De igual forma se presentan dos talleres más que son ¿Cómo nos trasladamos en el espacio? Y aplica tu cocimiento de Traslación y Paralelismo.

8.1 ¿QUÉ TAL TE MUEVES EN EL ESPACIO?

A continuación te encontrarás con una serie de preguntas las cuales podrás resolver desde lo que conoces hasta el momento.

1. En las siguientes figuras encontrarás dos manos en diferente posición. ¿Qué movimientos identificas?

Figura 72.

a

b

¿Por qué una mesa de tres pies asienta siempre bien en el suelo, y una de cuatro pies, no siempre?

2. Trazar por una recta dada, un plano que sea equidistante de dos puntos dados.

3. ¿Cual es el máximo número de puntos que se pueden trazar de forma que cada uno equidiste de todos los demás?

4. ¿Qué entiendes por simetría de una figura?

5. ¿Qué ocurre cuando ves tu imagen en un espejo plano?

6. ¿Cuántos planos determinan cuatro puntos no coplanarios?

8.2 ¿COMO VAMOS EN EL ESPACIO?

A continuación, se presentan una serie de preguntas, las cuales podrás resolver desde lo que haz trabajado en clase.

1. Nuevamente encontraras dos manos en diferente posición. ¿Cómo ya identificas los movimientos, determina cual situación representa uno de ellos y cual no?

Figura 73

a b c

2. ¿Cuál seria la diferencia entre movimiento y transformación?

3. A tu alrededor encuentras muchos figuras que se generan gracias a movimientos y transformaciones enumera algunas y di con que se generan.

Figura 74.

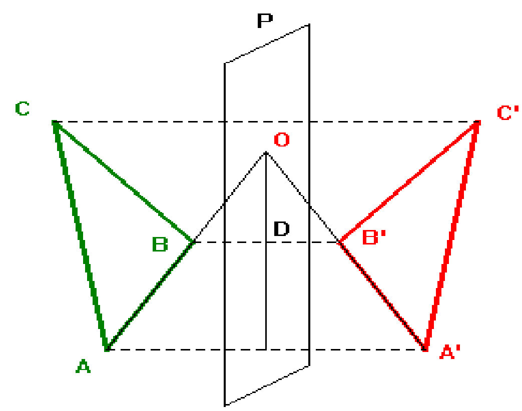
4. ¿Cuántos planos determinan cuatro rectas paralelas, tomadas dos a dos, si sólo hay dos de dichas rectas en un mismo plano (ayúdate de cabri)?
5. ¿Si dos planos no paralelos son simétricos con respecto a un tercero, se puede decir que éste es bisector del diedro formado por los dos primeros?
6. ¿Qué se puede decir de dos figuras **F'** y **F''**, simétricas de una tercera figura **F** cualquiera en el espacio, si la primera es simétrica a **F** con respecto a un plano **α** y la

segunda es simétrica a **F** pero con respecto a un punto **O** cualquiera que no pertenece al plano **α**?

7. ¿Qué diferencia hay entre la simetría central y la simetría especular en el espacio euclidiano?

8. Demostrar que: si dos figuras son simétricas con respecto a un plano (las figuras no tienen que ser paralelas al plano), dos de sus rectas homologas prolongadas que cortan el plano, forman con él ángulos congruentes, y su proyección común en el plano es la bisectriz del ángulo formado por dichas rectas.

Figura 75.



9. Un foco luminoso colocado entre dos espejos planos paralelos, distantes de 4 metros, esta situado a 1 m de uno de ellos; construir las tres primeras imágenes formadas por cada espejo.

10. Determine los siguientes lugares geométricos:

a. Entre dos planos paralelos, de manera que el lugar geométrico quede equidistante a los dos planos.

b. De las rectas paralelas a un plano, trazadas desde un punto dado.

c. De los puntos de un plano P que equidistan de un punto dado A, fuera de él.

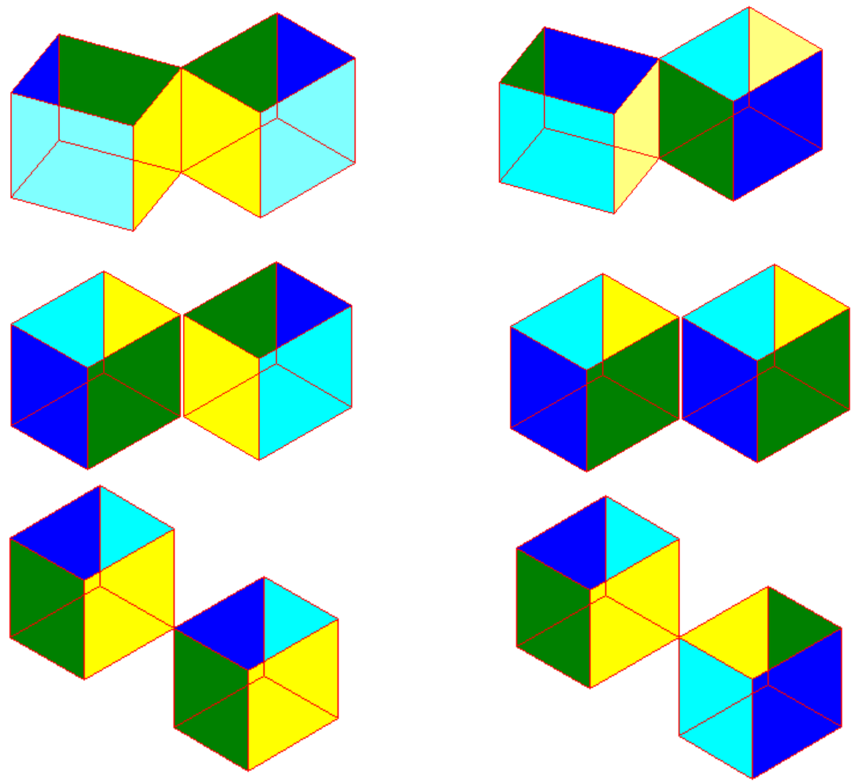
d. De los puntos de un plano P equidistantes de dos puntos A y B exteriores a él.

e. De los puntos medio de las rectas trazadas entre dos rectas cualesquiera del espacio.

f. Del espacio de los puntos equidistantes de una circunferencia.

11. Determine en las siguientes figuras que simetrías se representan y justifique (ayúdate de autocad)

Figura 76.



8.3 ¿CÓMO NOS TRASLADAMOS EN EL ESPACIO?

Las siguientes son algunas de las situaciones que se pueden trabajar para profundizar el tema de traslación en el espacio euclidiano:

1 Si se traslada un plano **α** en dirección de un vector $\overrightarrow{AA'}$ que se encuentra sobre el mismo plano. ¿En qué lugar del espacio queda ubicada la imagen del plano **α**? ¿Si el vector no se encuentra en el plano **α**, como son el plano con su imagen?

2 Dibuje dos planos paralelos que se intersequen con un tercero. ¿Qué determinan cada una de las intersecciones resultantes?, 3 Dados tres planos α, β y π donde α es paralelo a π y β es paralelo a π ¿Qué se puede afirmar de los planos α y β? ¿por qué?

4 Dado un conjunto de rectas paralelas grafique y analice las siguientes situaciones:

a. Al aumentar un plano **α** que corta a una de las rectas ¿Qué pasará con las demás rectas restantes?

b. Para las cuales existe un plano **α** perpendicular a una de las rectas del conjunto. ¿Qué se puede observar en las demás rectas**?**

8.4 APLICA TU CONOCIMIENTO DE TRASLACIÓN Y PARALELISMO

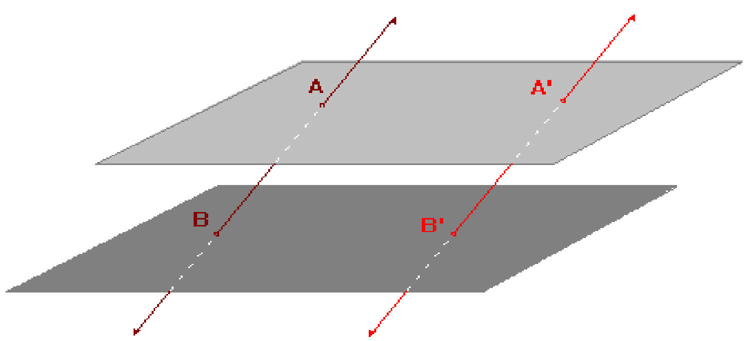
1. Sean **s** y **s'** dos rectas en el Espacio Euclidiano perpendiculares a una recta **r**. Determine si la recta **s** es paralela a la recta **s'**. Utilizar el software autocad para establecer su respuesta.

2. Demostrar o refutar la siguiente proposición "Dos rectas perpendiculares a una tercera son coplanarias o están en planos paralelos".

3. Comprobar y demostrar que si se traslada un extremo de un segmento $\overline{AB}$ dejando fijo el otro extremo, el punto medio experimenta una traslación reducida a la mitad de la aplicada al extremo del segmento.

4. Sean **α** y **π** dos planos paralelos, demostrar que los segmentos de rectas paralelas comprendidos entre estos planos paralelos son congruentes. ¿Qué sucede si las rectas son perpendiculares?

Figura 77.

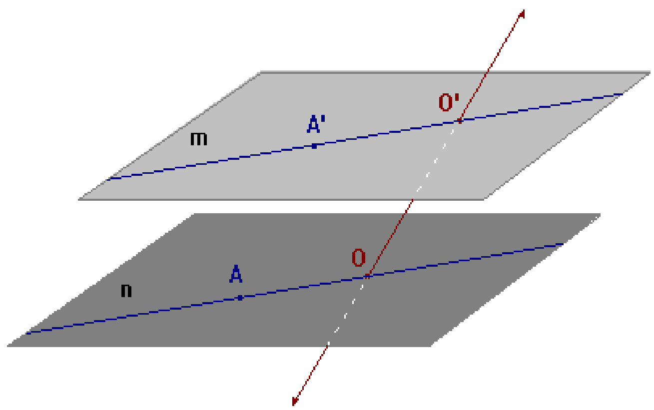


Observación:

Formule una conclusión a partir de los resultados obtenidos en el ejercicio anterior. ¿Se puede estructurar una definición a partir de estos resultados?, ¿Cuál?

5. Sean **α** y **π** dos planos diferentes y paralelos en el Espacio Euclidiano, y sean dos semirrectas $\overrightarrow{O'A'}$ y $\overrightarrow{OA}$ paralelas de igual dirección y sentido situadas en rectas paralelas **m** y **n** respectivamente, una en el plano **α** y otra en el plano **π**.

Figura 78.



Demuestre, que los ángulos situados en diferentes planos cuyos lados son respectivamente paralelos y de igual sentido, son congruentes.

6. ¿Se puede afirmar que las intersecciones de un diedro con dos planos paralelos son dos ángulos congruentes?

7. Dado un polígono en un plano **π** y un conjunto de traslaciones con un mismo sentido y donde sus directrices son secantes al plano. ¿Cuál es el lugar geométrico de las trayectorias de los distintos puntos del contorno del polígono? Apoyarse en el software autocad para determinar este lugar geométrico en dirección del eje **z** y de magnitud menor o igual a alguna magnitud dada.

8. Dado una circunferencia en un plano **α** y un conjunto de de traslaciones con un mismo sentido, donde sus directrices son secantes al plano. ¿Cuál es el lugar geométrico de las trayectorias de los distintos puntos del contorno de la circunferencia? Sugerencia:

Apoyarse en el software autocad para determinar este lugar geométrico en dirección del eje **z** y de magnitud menor o igual a alguna magnitud dada.

9. Por un punto situado a 10 m. de un plano se trazan rectas oblicuas de 15 m. de longitud. ¿Cuál es el lugar geométrico de las trazas de estas rectas sobre el plano?

10. Por el centro de un círculo de 10 m. de radio se traza una perpendicular a un plano. ¿A qué distancia del centro hay que marcar sobre ella un punto que diste 15 m. de la circunferencia?

11. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio:

a. Que estén a igual distancia de un plano dado.

b. Que equidisten de dos planos dados.

c. Que equidisten de dos rectas congruentes.

d. Que equidisten de tres puntos dados no colineales.

e. Cuyas distancias a dos planos dados estén en relación constante.

f. Que equidisten de los cuatro vértices de un paralelogramo.

9. CONCLUSIONES

- La elaboración de las notas de clase sobre los temas Simetrías y Traslación en el Espacio Euclidiano permitió el estudio de los temas y la recontextualizacion del lenguaje apropiado para los niveles de básica y media.

- La escritura de las notas de clase que propicien o que contribuyan a fortalecer el pensamiento matemático implican al docente pensar en situaciones problema que han de representarle a los estudiantes una actividad investigativa que los conduzca hacia formas superiores de intuición y abstracción.

- La estrategia de resolución de situaciones problema se constituye en una puerta de entrada al pensamiento matemático avanzado por que permite a los estudiantes de los niveles de educación básica y media: explorar, descubrir, conjeturar, buscar ejemplos y contraer ejemplos, hacer deducciones, justificar, poner a prueba argumentos, etc.

- Los talleres que contienen situaciones problema posibilitan el desarrollo del pensamiento geométrico aplicando conceptos que el estudiante ha aprendido no sólo en matemáticas y geometría, sino también en otras áreas.

- Al desarrollar este trabajo pudimos reconocer que los software especializados se pueden constituir en una herramienta para la enseñanza de la geometría que sea mediadora del conocimiento y propiciar un aprendizaje significativo en los estudiantes. En este caso particular, los software autocad, cabri en 2 y 3 dimensiones, fueron de gran ayuda ya que con ellos fue posible diseñar actividades o estrategias que permitieran la construcción de algunos objetos geométricos.

- La enseñanza de la geometría forma parte importante de las matemáticas por tanto debemos procurar enseñarla y escribirla, en particular cuando hablamos de la geometría en el espacio euclidiano, ya que permite mejorar la orientación, percepción y visualización espacial.

BIBLIOGRAFÍA

[B96] BALACHEFF, N., KAPUT, J. Computer-Based Environments in Mathematics, pp. 469-501. (1996).

[B94] BALACHEFF, N. Didactique et Intelligence Artificielle, Recherches en Didactique des Mathematiques, 14, vol 1-2, pp. 9-42. (1994),

[B89] BONILLA E La educación Matemática: Una reflexión sobre su Naturaleza y sobre su metodología. Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. Documento tomado de la revista" Educación Matemática". Vol I, No 2.1989.

[E02] ESCAREÑO, F. (2002). La tecnología en la clase de matemáticas: su influencia en la práctica de enseñanza. Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME16, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cuba.

[F97] FREGONA. D Geometría y magnitudes, en *El libro del docente* de *El libro de la Matemática,* Estrada, 1997.

[G99] GUIU C. Manuel. Geometría plana y del espacio con nociones de geometría proyectiva. Edit. Bosch, séptima edición.

[H01] HERSHKOWITZ R., Acerca del Razonamiento en la Geometría; traducción Hernández, Víctor y Villalba, Martha PMME-UNISON. 2001

[H30] HIELE, P.M El problema de la comprensión, en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Universidad de Utrecht, Holanda.1990.

[H90] HOFFER, A. La geometría es más que demostración. 1990.

[M99] MEN., Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos. Exe Editores. Bogotá, D.C. 1999.

[M00] MEN, Documento del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Fase de Expansión y Profundización. 2000.

[M98] Ministerio de Educación Nacional., Matemáticas, Lineamientos Curriculares. Creamos Alternativas Soc. Ltda., Santa fe de Bogotá. 1998.

[M02] Ministerio de Educación Nacional., Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Serie Memorias. Primera edición. Bogotá D.C. 2002

[M93] MIRANDA C. Vicente."Un Recurso para la Enseñanza de la Geometría". 1993

[N98] NEUBRAND M. En La Variedad de influencias en la enseñanza de la Geometría. 1998

[P84] POINCARÉ H. Las definiciones matemáticas y su enseñanza. Filosofía de la Ciencia. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México. 1984

[P61] PUIG, A. Fundamentos de Geometría Métrica. Edit Nuevas gráficas Madrid, 1961

[RS03] ROSERO, R. Yeny. SILVA S. Alba L. Proyecto de Investigación Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría. VRI 1131. Universidad del Cauca.2003.

[R03] RAMÍREZ Q. Álvaro. Modelo de enseñanza a partir de Situaciones Problema. 2003

[S93] SANTOS T.L.M. La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas1993.

[V89] VASCO. C. “Sistemas geométricos”, en Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas, Vol. II, Págs. 53 y 54.1989

[Y93] YÁBAR J. M. Pensamiento espacial y sistemas geométricos. 1993

[Z02] ZAMBRANO, A. Pedagogía, educabilidad y Formación de Docentes. Colección de ensayos. Segunda edición.2002.

[htt] http://nti.educa.rcanaria.es/blas_cabrera/Didactica/Sitprob.html

[htt] http://www.nalejandria.com/archivos-curriculares/matematicas/nota-003.htm

[htt] http://www.rugbysoluciones.com/coaching/articulos/articulo02.pdf

[htt] http://www.educainformatica.com.ar