DIFERENCIABILIDAD FUERTE Vs. DIFERENCIABILIDAD DE FRECHET

PAOLA ANDREA MOSQUERA FERNÁNDEZ

VICTOR HUGO RUIZ GUACHETA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2007

DIFERENCIABILIDAD FUERTE Vs. DIFERENCIABILIDAD DE FRECHET

PAOLA ANDREA MOSQUERA FERNÁNDEZ

VICTOR HUGO RUIZ GUACHETA

TRABAJO DE GRADO

En la modalidad de seminario de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Educación en la Especialidad Matemáticas

Director

Especialista. ELKIN CARDENAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2007

DIFERENCIABILIDAD FUERTE Vs. DIFERENCIABILIDAD DE FRECHET

PAOLA ANDREA MOSQUERA FERNÁNDEZ

VICTOR HUGO RUIZ GUACHETA

DOCUMENTO DEL SEMINARIO DE GRADO, REALIZADO EN EL GRUPO DE SEMINARIO DE FUNDAMENTOS EN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2007

INTRODUCCION

El cálculo provee numerosas herramientas de estudio, entre ellas el concepto de derivación (**derivada de Frechet**), sin embargo vemos que este concepto resulta insuficiente para los grandes alcances que busca la ciencia, de esta manera ramas de la matemática como es el caso del Análisis, exigen la generalización del concepto de derivada.

Existe en el ámbito matemático variaciones del concepto de derivada, pero generalmente, se pretende debilitar dicha noción. Pocas son las nociones de derivada que se siguen en un sentido contrario al comúnmente usado (debilitamiento del concepto). En el presente trabajo se desarrolla una nueva noción de diferenciabilidad llamada *diferenciabilidad fuerte* el cuál fue introducido por E.B.Leach* y es expuesto en un artículo de la revista American Mathematics en donde se enuncian los conceptos de diferenciabilidad fuerte, derivada parcial fuerte y algunas de sus propiedades. En el transcurso de este trabajo se retoman estos conceptos para funciones definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y se demuestran los teoremas básicos de la diferenciabilidad de Frechet llevados a la diferenciabilidad fuerte, los cuáles son el aporte de éste trabajo a la temática.

La diferenciabilidad fuerte se desprende de una modificación sencilla al concepto de diferenciabilidad (derivada de Frechet), dándose consigo algunas de las ventajas considerables con respecto al concepto clásico.

Entre las ventajas que ofrece esta variación se tiene que: generalmente, dada una función de dos variables $f(x, y)$, la existencia de las derivadas parciales no garantiza la diferenciación total de Frechet, convirtiéndose este hecho en una desventaja de la derivada el cuál es solucionado con la noción de Derivada Fuerte. Es decir, en este nuevo concepto la existencia de las derivadas parciales fuertes garantiza la existencia de la derivada fuerte.

Otra desventaja de la derivada de Frechet, es que la comprobación de teoremas importantes como por ejemplo el teorema de la función inversa, entre otros, no sólo exige la existencia de la derivada en el punto x_0 sino en una vecindad del mismo, más aun se exige que la función $x \mapsto Df(x)$ sea continua en x_0, con la noción de derivada fuerte se logra subsanar este inconveniente y se puede mostrar por ejemplo que la función f posee una inversa local diferenciable en x_0, exigiendo simplemente que la derivada de f sea no singular en el punto x_0.

Preliminares

A continuación se presentan algunos conceptos y teoremas del análisis en el espacio $\mathbb{R}^n$, los cuáles son necesarios para abordar el estudio del presente trabajo.

En la notación téngase en cuenta que se utiliza la negrilla en los casos $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ para hacer referencia a los vectores de $\mathbb{R}^n$, contrario a esto, simplemente representan a la componente de un vector.

TOPOLOGIA EN $\mathbb{R}^n$

Definición 1. (Bola n-Dimensional) *Sea a un punto de $\mathbb{R}^n$ y sea r un número positivo dado. El conjunto de todos los puntos x de $\mathbb{R}^n$ tales que*

$$\|x - a\| < r$$

Se denomina bola n-dimensional abierta de radio r y centro en a . Designamos este conjunto por $B_r(a)$.

Definición 2. (Punto Interior) *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y supóngase que $a \in A$. Entonces a se denomina punto interior de A, si existe una n-bola abierta con centro en a*

y contenida en A. El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama interior de A y se designa por $int(A)$.

Definición 3. (Conjunto Abierto) *Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ es abierto si todos sus puntos son interiores, es decir A es abierto si y solo si $A = int(A)$.*

Definición 4. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea M un subconjunto de A. Entonces M es abierto en A si y sólo si*

$$M = B \cap A$$

Para algún conjunto B abierto en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5. *Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se dice que M es arco-conexo, si para cada par de puntos a y b de M, existe una función continua f:$[0,1] \to M$ tal que*

$$f(0) = b \quad y \quad f(1) = a$$

Tal función se llama un camino de a hacia b.

NOTA. Como $f(0) \neq f(1)$ la imagen de $[0,1]$ por medio de f se denomina arco y une $f(0)$ con $f(1)$. Entonces M es arco-conexo, si cada dos puntos distintos de M pueden unirse por medio de un arco contenido en M. Si $f(t) = ta + (1-t)b$ para $0 \leq t \leq 1$, la curva que une a y b se llama **segmento rectilíneo** y lo denotaremos como $L(a,b)$.

Definición 6. (Conjunto Conexo) *Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se dice que M es no conexo si $M = A \cup B$ donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos de M no vacíos. Diremos que M es conexo si no es no conexo.*

Proposición. Todo conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ arco-conexo es conexo. En particular, las bolas n-dimensionales abiertas y cerradas son conexas y a su vez arco-conexa.$^{ver\ 1}$

ELEMENTOS DE ALGEBRA LINEAL

Transformaciones Lineales

Las transformaciones lineales son una clase especial de funciones que tienen una gran variedad de aplicaciones importantes. Dichas funciones tienen su dominio y recorrido en subconjuntos de espacios vectoriales.

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, recordemos que una transformación lineal $T : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función tal que, cumple las siguientes propiedades:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para cualesquiera x, y de U, tales que $x + y \in U$.

2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo x de U y cualquier real α, tal que $\alpha x \in U$.

Teorema 1. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única A_T de $m \times n$ tal que*

$$Tx = A_T x \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración$^{ver\ 2}$

Lo que esta indicando este teorema, es que toda transformación lineal en $\mathbb{R}^n$ se puede representar por medio de una matriz.

[1] La demostración se puede consultar en el libro de Análisis Matemático de Apóstol, capitulo 4, Págs. 104-108.

[2] La demostración se puede consultar en el libro de Algebra Lineal de Stanley Grossman. pág. 486.

Definición 7. *Sea V un espacio vectorial sobre los reales cualquiera, una función real N definida en V se llama **Norma**, si tiene las siguientes propiedades:*

a. $N(x) \geq 0$ *para cada x de V.*

b. $N(cx) = |c|\, N(x)$*; para cada x de V y cualquier real c.*

c. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ *para todo x, y de V.*

d. $N(x) = 0$ *implica que $x = 0$.*

En el transcurso de este trabajo la norma usada en $\mathbb{R}^n$ es $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Definición 8. ***(Norma de una matriz.)*** *Sea A una matriz de $m \times n$ elementos reales o complejos, la norma de A designada por $\|A\|$ se define como el número no negativo dada por la siguiente expresión*

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Proposición. Para las matrices rectangulares A y B y todos los escalares c, reales o complejos se satisfacen las siguientes propiedades

a. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

b. $\|AB\| \leq \|A\|\, \|B\|$

c. $\|cA\| < |c|\, \|A\|$

A continuación se mostrara una desigualdad, la cuál se utilizara en el transcurso de este trabajo.

Corolario. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y designemos por A la matriz que representa a f, es decir

$$f(x) = Ax, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces

$$\|f(x)\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \, , \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, sea $y = Ax$; Donde $A = [a_{ji}]$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$. Luego

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \|y\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \end{aligned}$$

Pero $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$, luego

$$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right)^2$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que:

$$\|Ax\|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2$$

$$\leq \|x\|^2 \, M$$

Donde $M = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2$, así

$$\|Ax\| = \sqrt{M}\,\|x\|$$

Pero

$$\sqrt{M} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_{ji})^2} \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_{ji})^2} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}| = \|A\|$$

Así

$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$$

FUNCIONES EN $\mathbb{R}^n$

A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas del cálculo vectorial que se deben tener en cuenta para el desarrollo de este trabajo.

Definición 9. *Sea f una función con dominio en el espacio n-dimensional y con recorrido en el espacio m-dimensional, es decir:*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Cuando se suponen $n > 1$ y $m = 1$ dicha función se llama función real de una variable vectorial o simplemente un campo escalar.

Cuando $n > 1$, $m > 1$ la función se conoce como función vectorial de n variables o simplemente campo vectorial.

Cuando $n = 1$ y $m > 1$, la función se conoce como funciones vectoriales o trayectorias.

Definición 10. *Sean $f_1, ..., f_m$ campos escalares en un subconjunto V de $\mathbb{R}^n$. La función f definida por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)), \quad x \in V$; Se dirá que es una función vectorial* *de n variables y m componentes y se denotará por*

$$f = (f_1, ..., f_m).$$

Los campos escalares $f_1, ..., f_m$, suelen llamarse las funciones componentes de f. Así f_i con $1 \leq i \leq m$, se le llama la *i-ésima* función componente o simplemente la *i-ésima* componente de f.

Definición 11. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, c un punto interior de U y $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, la derivada direccional de f en el punto c y en la dirección u, designada por medio del símbolo $f'(c; u)$, se define como:*

$$f'(c; u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h} \tag{1}$$

Siempre que el límite de la derecha exista.

Si u es uno de los vectores de la base canónica $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, digamos por ejemplo $u = e_k$ entonces la derivada direccional $f'(c; u) = f'(c, e_k)$ se denotara por $D_k f(c)$ ó $\frac{\partial f}{\partial x_k}(c)$ y se le llamará *k-ésima* derivada parcial de f en c.

$$D_k f(c) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + he_k) - f(c)}{h},$$

Siempre que el límite exista.

Observación.

Si $f = (f_1, ..., f_m)$, entonces $D_k f(c) = (D_k f_1(c), D_k f_2(c), ..., D_k f_m(c))$.

Definición 12. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es Frechet Diferenciable (F-diferenciable) en $\mathbf{x_0}$ si existe una transformación lineal $T_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*

tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(\mathbf{x_0}) - T_{x_0}(x - \mathbf{x_0})\|}{\|x - \mathbf{x_0}\|} = 0 \tag{2}$$

Se dice que f es F-Diferenciable en U o simplemente F-Diferenciable, si f es F-Diferenciable en todo punto $\mathbf{x_0}$ de U; Además la transformación T_{x_0} se llamará la F-Derivada de la función f en $\mathbf{x_0}$ y se denotará por $f'(\mathbf{x_0})$.

Definición 13. *Dado $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x_0}$ punto interior de U. Supongamos que todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x_0})$ $i = 1, ..., n$ existen. El gradiente de f en $\mathbf{x_0}$, denotado por $\nabla f(\mathbf{x_0})$ esta dado por:*

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x_0}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x_0}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \right)$$

Teorema 2. *Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$ y T una transformación lineal $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Entonces T es F-Diferenciable y además*

$$T'(a) = T \quad \textit{para todo } a \in U.$$

Teorema 3. *Sea f una función F-Diferenciable en $\mathbf{x_0}$ con derivada T_{x_0}. Entonces la derivada direccional $f'(\mathbf{x_0}; u)$ existe para cada u de $\mathbb{R}^n$, con $\|u\| = 1$ y se tiene que*

$$T_{x_0}(u) = f'(\mathbf{x_0}; u) \tag{3}$$

Demostración. *ver* [3]

[3] La demostración se puede consultar en el texto de Análisis Matemático de Apóstol, capitulo 12, pág.420.

La matriz que representa la transformación lineal T_{x_0} es llamada *matriz jacobiana* de f en $\mathbf{x_0}$ y se denota por $Df(\mathbf{x_0})$. Del teorema anterior se tiene que

$$Df(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}_{mxn}$$

Así que:

$$f'(\mathbf{x_0})h = Df(\mathbf{x_0})h = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x_0}) h_j \right) e_i.$$

Donde h=$(h_1, h_2, ..., h_n)$ y e_i representa el i-ésimo vector coordenado en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 4. *Si f es F-diferenciable en $\mathbf{x_0}$. Entonces f es continua en $\mathbf{x_0}$.*

Demostración. *ver* [4]

Regla de la Cadena

Sean f y g funciones tales que la compuesta $h = f \circ g$ se encuentra definida en un entorno de a. La regla de la cadena nos dice cómo se calcula la F-derivada de h en función de las F-derivadas de f y g.

Teorema 5. *Supongamos que g es F-diferenciable en a, con derivada $g'(a)$. Sea $b = g(a)$ y supongamos que f es F-diferenciable en b, con F-derivada $f'(b)$. Entonces la función compuesta $h = f \circ g$ es F-diferenciable en a, además*

$$h^{'}(a) = f^{'}(b) \circ g^{'}(a) \tag{4}$$

[4] La demostración se puede consultar en el texto de Análisis Matemático de Apóstol, capitulo 12, pág.421.

Donde $f'(b) \circ g'(a)$ es la composición de las transformaciones lineales $f'(b)$ y $g'(a)$.

Demostración. ver [5]

Teorema 6. (Del Valor Medio) *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que $f : U \to \mathbb{R}^m$ es F-diferenciable en U. Sean x e y dos puntos de U tales que $L(x, y) \subseteq U$. Entonces para cada vector a de $\mathbb{R}^m$ existe un punto z de $L(x, y)$ tal que:*

$$a \cdot [f(y) - f(x)] = a \cdot f'(z)(y - x)$$

Observaciones.

$i)$ Nótese que tomando $a = f(y) - f(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|^2 &= [f(y) - f(x)] \cdot [f(y) - f(x)] \\ &= [f(y) - f(x)] \cdot [f'(z)(y - x)] \end{aligned}$$

Luego por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|^2 &\leq \|f(y) - f(x)\| \, \|f'(z)(y - x)\| \\ &\leq \|f(y) - f(x)\| \, \|f'(z)\| \, \|x - y\| \end{aligned}$$

Si $f(y) - f(x) \neq 0$. Entonces

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f'(z)\| \, \|x - y\|$$

Si $f(y) - f(x) = 0$ la desigualdad es evidente.

$ii)$ Si f es un campo escalar F-diferenciable, del teorema anterior se tiene que:

$$f(y) - f(x) = f'(z)(x - y) = Df(z)(x - y)$$

[5] La demostración se puede consultar en el texto de Análisis Matemático de Apóstol, capitulo 12, pág.427.

Para algún $z \in L(x, y)$.

$iii)$ Si la función derivada $x \to Df(x)$ es continua entonces $\sup\limits_{z \in L(x,y)} \|Df(z)\|$ existe, por lo tanto del teorema del valor medio se sigue que:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|x - y\| \sup_{z \in L(x,y)} \|Df(z)\|$$

Teorema 7. (Condición Suficiente de Diferenciabilidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ supongamos que una de las derivadas parciales $D_1 f, ..., D_n f$ existe en $\mathbf{x_0} \subset U$ y que las restantes $n-1$ derivadas parciales existen en una cierta n-bola $B(\mathbf{x_0})$ y son continuas en $\mathbf{x_0}$. Entonces f es F-diferenciable en $\mathbf{x_0}$.

Demostración.^{ver} [6]

[6] La demostración se puede consultar en el texto de Análisis Matemático de Apóstol, capitulo 12, pág.432.

Capítulo 1

El concepto de F-Derivada proporciona una aproximación lineal a una determinada función, este hecho se discute ampliamente en los cursos de análisis matemático básicos. De acuerdo a la definición, una función es F-diferenciable si existe una transformación lineal T_{x_0}, tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ que satisface

$$\|f(x) - f(\mathbf{x_0}) - T_{x_0}(x - \mathbf{x_0})\| < \varepsilon \|x - \mathbf{x_0}\| . \quad \text{Siempre que } \|x - \mathbf{x_0}\| < \delta.$$

Esta definición es válida para funciones cuyo dominio y rango están contenidos en la recta real o en un segmento de recta, incluso en un espacio vectorial infinito dimensional. Sin embargo como se ha dicho en la introducción de este trabajo, esta definición presenta ciertas desventajas, que motivaron el desarrollo de este trabajo.

A continuación se introduce un concepto nuevo de diferenciabilidad, el cuál surge de hacer una pequeña modificación a la definición de funciones F-diferenciables.

En lo que sigue del documento, salvo que se diga lo contrario, f denotará una función definida en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ que toma valores en $\mathbb{R}^m$.

DIFERENCIABILIDAD FUERTE

Definición 14. *Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x_0} \in U$ y $T_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, decimos que f es fuertemente diferenciable (S-diferenciable) en $\mathbf{x_0}$ con S-derivada T_{x_0}, si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in U$ *con* $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ *entonces*

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - T_{x_0}(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \tag{1.1}$$

Obsérvese que si f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ entonces es F-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, simplemente basta con tomar $\mathbf{x_0} = \mathbf{x_1}$. Luego si f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, por la unicidad de la F-derivada se sigue que la S-derivada en $\mathbf{x_0}$ coincide con la F-derivada en dicho punto. Así que la transformación T_{x_0} de la definición anterior de existir, es dada por:

$$T_{x_0}(h) = f'(\mathbf{x_0})h = Df(\mathbf{x_0})h.$$

Nótese que el concepto de S-derivada se introduce a partir del concepto de F-derivada, haciendo una pequeña variación a éste, si se compara la definición de diferenciabilidad de los preliminares con la definición anterior, se observa que la principal diferencia radica en que en la diferenciabilidad fuerte varían dos puntos cualesquiera $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ en una vecindad de $\mathbf{x_0}$, mientras que en la diferenciabilidad según Frechet sólo varía un punto alrededor de dicha vecindad.

Se presenta a continuación algunas proposiciones de la S-diferenciabilidad.

Proposición 1

Si f es una función S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$. Entonces f satisface la condición de Lipschitz en una vecindad de $\mathbf{x_0}$.

Demostración:

Por hipótesis se tiene que f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, entonces se satisface que para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ entonces,

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Aplicando las propiedades de las norma se tiene que

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| - \|Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Luego

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| - \|Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| < \|Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| + \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Aplicando la desigualdad $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$ establecida en los preliminares se tiene que

$$\|Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| \leq \|Df(\mathbf{x_0})\| \, \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Así

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| < \|Df(\mathbf{x_0})\| \, \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| + \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Por tanto

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \, [1 + \|Df(\mathbf{x_0})\|]$$

Sea $M = 1 + \|Df(\mathbf{x_0})\|$, $M \in \mathbb{R}$ entonces

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| < M \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Luego

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| < M \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|, \quad \forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in B_\delta(\mathbf{x_0}).$$

Es decir f satisface la condición de Lipschitz.

Observación. Nótese que si f es F-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, no es suficiente para que f satisfaga la condición de Lipschitz, se necesita además que f' sea continua o acotada en una vecindad de $\mathbf{x_0}$. Veamos un ejemplo en donde f es F-diferenciable en $[0,1]$ pero no satisface la condición de lipschitz.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(e^{\frac{1}{x}}), & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Proposición 2

Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ es F-diferenciable en una vecindad de $\mathbf{x_0} \in U$ y si la función $x \to Df(x)$ es continua en $\mathbf{x_0}$. Entonces f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$. Es decir si una función es continuamente diferenciable entonces es S-diferenciable.

Obsérvese que el recíproco de ésta proposición es falso, ya que una función puede ser S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ sin ser F-diferenciable en una vecindad de $\mathbf{x_0}$, ver ejemplo 1 (pag. 25).

Demostración:

Como $x \to Df(x)$ es una función continua en $\mathbf{x_0}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|Df(x) - Df(\mathbf{x_0})\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } x \in B_\delta(\mathbf{x_0}) \tag{1.2}$$

Sean $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in B_\delta(\mathbf{x_0})$ entonces el segmento $L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \subset B_\delta(\mathbf{x_0})$ ya que toda bola es convexa. Luego por el teorema del valor medio se tiene que:

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \sup_{x \in L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})} \|Df(x)\| \tag{1.3}$$

Ahora sea $h(x) = f(x) - Df(\mathbf{x_0})(x)$ entonces $Dh(x) = Df(x) - Df(\mathbf{x_0})$, $Dh(\mathbf{x_0}) = 0$ Luego

$$\begin{aligned}
\|h(\mathbf{x_2}) - h(\mathbf{x_1})\| &= \|f(\mathbf{x_2}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) + Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_1})\| \\
&= \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\|
\end{aligned}$$

Aplicando (1.3) a la función h se tiene

$$\|h(\mathbf{x_2}) - h(\mathbf{x_1})\| \leq \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \sup_{x \in L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})} \|Dh(x)\|$$

Por tanto

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| \leq \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \sup_{x \in L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})} \|Df(x) - Df(\mathbf{x_0})\|$$

Además por (1.2) y dado que $L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \subset B_\delta(\mathbf{x_0})$ se tiene que:

$$\|Df(x) - Df(\mathbf{x_0})\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } x \in L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}).$$

Luego

$$\sup_{x \in L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})} \|Df(x) - Df(\mathbf{x_0})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| \leq \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \frac{\varepsilon}{2} < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \varepsilon$$

Es decir f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$.

Proposición 3

Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ S-diferenciable en $\mathbf{x_0} \in U$, tal que la F-derivada $f'(x)$ existe para todo $x \in A \subset U$. Si $\mathbf{x_0}$ es un punto de acumulación de A, entonces la función $x \to Df(x)$ es continua en $\mathbf{x_0}$.

Demostración:

Por hipótesis se tiene que f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \tag{1.4}$$

Siempre que $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$.

Por otro lado se tiene que $\mathbf{x_0}$ es punto de acumulación de A entonces existe $\mathbf{x_1} \in A$ tal que $\mathbf{x_1} \in B_\delta(\mathbf{x_0})$, con $\mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_0}$. Como la F-derivada de f existe para todo $x \in A$, en particular para $\mathbf{x_1}$ existe $\delta' > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \tag{1.5}$$

Siempre que $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| < \delta'$.

Como $\mathbf{x_1} \in B_\delta(\mathbf{x_0})$ entonces $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, es decir $0 < \delta - \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|$.

Sea $\delta^* = \text{mín}\left\{\delta', \delta - \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|\right\}$ y sea $\mathbf{x_2}$ tal que $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| < \delta^*$ entonces se satisfacen las expresiones (1.4) y (1.5), así:

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| + \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Como

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) - [f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})]\| \leq$$

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| + \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\|$$

Entonces

$$\|Df(\mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Siempre que $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta^*$, $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta^*$; Como

$$Df(\mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) = [Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})]\,(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})$$

Entonces

$$\|Df(\mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| = \|[Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})]\,(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\|$$

Por la linealidad de $Df(\mathbf{x_1})$ y $Df(\mathbf{x_0})$ se tiene que $[Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})]$ es lineal, luego:

$$\left\|[Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})]\frac{(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})}{\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|}\right\| < \varepsilon \quad \text{siempre que } \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| < \delta^* \tag{1.6}$$

Tómese $y \in \mathbb{R}^n$ con $\|y\| = 1$ y sea $\mathbf{x_2} = \mathbf{x_1} + \dfrac{\delta^*}{2}y$, entonces

$$\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| = \left\|\frac{\delta^*}{2}y\right\| = \left|\frac{\delta^*}{2}\right| \|y\| = \left|\frac{\delta^*}{2}\right| < \delta^*$$

Luego $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| < \delta^*$, así por (1.6) se tiene que:

$$\|(Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0}))\,y\| = \left\|(Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0}))\frac{\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}}{\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|}\right\| < \varepsilon$$

Luego

$$\|Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})\| \leq \varepsilon$$

Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta^* > 0$ tal que se satisface

$$\|Df(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})\| \leq \varepsilon$$

Siempre que $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta^*$, por consiguiente la función $x \to Df(x)$ es continua en $\mathbf{x_0}$.

A continuación se ilustran 2 ejemplos en los cuales se muestran que hay funciones que son S-diferenciables en un punto, pero que no son F-diferenciables en ninguna vecindad de dicho punto; también se muestra en otro ejemplo que la F-diferenciabilidad de funciones no implica la S-diferenciabilidad.

Ejemplo 1.

Sea f una función real definida en $[-1, 1]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{si } x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ \dfrac{2n+1}{n(n+1)}x - \dfrac{1}{n(n+1)}, & \text{si } x \text{ esta en el intervalo abierto de extremos } \dfrac{1}{n} \text{ y } \dfrac{1}{n+1}; \\ & n \in \mathbb{Z} - \{0\}. \end{cases}$$

1

$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \, -\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{2} \qquad 1$

-1

Figura N°1

Empecemos mostrando que f es una función par, esto es que para todo $x \in [-1,1]$ $f(x) = f(-x)$. Si $x = 0$ entonces $f(-x) = f(x) = 0$.

Supongamos ahora que $x \neq 0$, sin pérdida de generalidad asumamos que $x > 0$, luego existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \tag{1.7}$$

Luego por la definición de f se tiene que

$$f(x) = \frac{2n+1}{n(n+1)}x - \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \text{si} \quad \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Ahora por la ecuación (1.7) se tiene que

$$\frac{-1}{n} < -x < \frac{-1}{n+1}$$

Luego

$$\frac{1}{-n} < -x < \frac{1}{-n-1}$$

Nuevamente por la definición de f se tiene que:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-n-1)+1}{-n(-n-1)}(-x) - \frac{1}{-n(-n-1)}, \qquad\qquad \text{si } x \neq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ &= \frac{(-2n-2)+1}{n(n+1)}(-x) - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-(2n+1)}{n(n+1)}(-x) - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{2n+1}{n(n+1)}x - \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Así $f(x) = f(-x)$. Si $x = \dfrac{1}{n}$, $n \in Z - \{0\}$ es evidente, luego $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$. Así f es par en $[-1, 1]$.

Ahora mostremos que f es creciente en el intervalo $[0, 1]$. En efecto, sean $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ tales que $\mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}$. Por (1.7) se tiene que para $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ existen m, $k \in N$ con $k > m$ tales que:

$$\frac{1}{k+1} < x_1 < \frac{1}{k} \quad y \quad \frac{1}{m+1} < x_2 < \frac{1}{m}$$

Como $k > m$ entonces

$$\frac{2k+1}{k(k+1)} < \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

Así

$$\frac{2k+1}{k(k+1)}x_1 < \frac{2m+1}{m(m+1)}x_2$$

Además se tiene que $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{m+1}$ entonces

$$\frac{2k+1}{k(k+1)}x_1 - \frac{1}{k(k+1)} < \frac{2m+1}{m(m+1)}x_2 - \frac{1}{m(m+1)}$$

Luego $f(x_1) < f(x_2)$. Por tanto f es creciente en el intervalo [0,1].

Veamos ahora que f es S-*diferenciable* en $x_0 = 0$, para ello se requiere mostrar que existe una transformación lineal $T_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ la cual satisface que:

$$|f(x_2) - f(x_1) - T_{x_0}(x_2 - x_1)| < \varepsilon\, |x_2 - x_1| \tag{1.8}$$

Siempre que $|x_2 - x_0| < \delta$, $|x_1 - x_0| < \delta$.

Sea $x_0 = 0$, dado que f es par, tómese $x_1, x_2 \in [0,1]$. Como la F-*derivada* de f en x_0 es cero y ésta a su vez coincide con la S-*derivada* de f, veamos que $T_{x_0} = 0$ es la transformación lineal que satisface la condición (1.8). Como la sucesión:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{2n+1}{n(n+1)}\right| = \frac{2n+1}{n(n+1)} < \varepsilon, \quad \text{siempre que } n \geq n_0.$$

Sea $\delta = \dfrac{1}{n_0}$ y x_1, x_2 tales que satisfacen $|x_1| < \delta$, $|x_2| < \delta$. Sin perdida de generalidad supongamos que $0 \leq x_1 < x_2$ entonces se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$ ya que f es creciente en $[0,1]$. Luego existen m y k con $k > m \geq n_0$ tales que:

$$\frac{1}{k+1} < x_1 < \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \frac{1}{m+1} < x_2 < \frac{1}{m},$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
|f(x_2)-f(x_1)| &= f(x_2)-f(x_1)\\
&= \left(\frac{2m+1}{m(m+1)}x_2-\frac{1}{m(m+1)}\right)-\left(\frac{2k+1}{k(k+1)}x_1-\frac{1}{k(k+1)}\right)\\
&= \frac{2m+1}{m(m+1)}x_2-\frac{2k+1}{k(k+1)}x_1-\left(\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{k(k+1)}\right)
\end{aligned}
$$

Como $k>m$ entonces se tiene que

$$
\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{m(m+1)}, \quad \text{para } m,n\geq n_0.
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2m+1}{m(m+1)}x_2-\frac{1}{m(m+1)}\right)-\left(\frac{2k+1}{k(k+1)}x_1-\frac{1}{k(k+1)}\right)&\\
&\leq \frac{2m+1}{m(m+1)}x_2-\frac{2k+1}{k(k+1)}x_1\\
&\leq \frac{2m+1}{m(m+1)}x_2-\frac{2m+1}{m(m+1)}x_1\\
&\leq \frac{2m+1}{m(m+1)}(x_2-x_1)\\
&\leq \varepsilon\,|x_2-x_1|
\end{aligned}
$$

Por tanto $|f(x_2)-f(x_1)-T_{x_0}(x_2-x_1)|<\varepsilon\,|x_2-x_1|$

Luego f es S-diferenciable en $x_0=0$.

Obsérvese que la función no es F-diferenciable en ninguna vecindad de $x_0=0$, ya que para cualquier vecindad que se tome, se pueden encontrar puntos de la forma $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ en donde la función no es F-*diferenciable*.

Ejemplo 2.

El siguiente ejemplo muestra que funciones que son *F-diferenciables* no son necesariamente *S-diferenciables*.

Sea g la función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

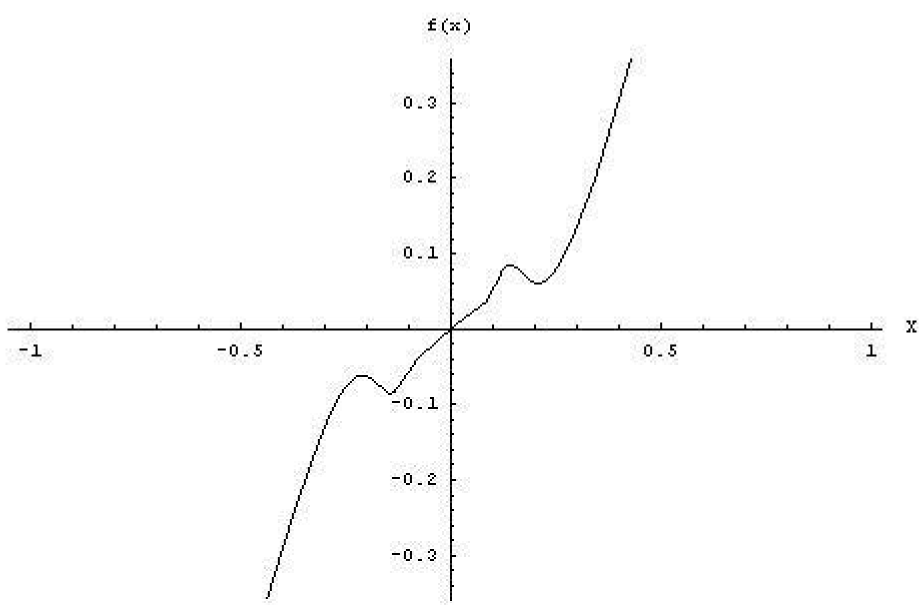

Figura N° 2

Se tiene que g es *F-diferenciable* en $x_0 = 0$, sin embargo g no es *S-diferenciable* en $x_0 = 0$.

Obsérvese que si $x \neq 0$ se tiene que

$$g'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}$$

Por otra parte si $x = 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(0+h) - (0+h)^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h - h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{2} + h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2} + 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Como se puede observar $g'(0) \neq 0$ y además $g'(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que $\lim_{x\to 0} g'(x)$ no existe; entonces la función derivada $x \to g'(x)$ no es continua en x_0. Por la proposición 3 se tiene que g no es *S-Diferenciable* en x_0, dado que $x_0 = 0$ es un punto de acumulación de $[-1, 1]$, la F-derivada de g existe para todo $x \in [-1, 1]$, si g fuese S-Diferenciable en x_0 entonces se tendría que la función $x \to Df(x)$ es continua en x_0 y como se acaba de mostrar esto es falso.

Capítulo 2

ALGEBRA DE DERIVADAS PARA FUNCIONES S-DIFERENCIABLES EN $\mathbb{R}^n$

En este capítulo se presentan algunos teoremas básicos del cálculo para funciones *S-diferenciables*, los cuáles son de ayuda para mostrar el álgebra de derivadas para funciones *S-diferenciables.* En esta sección se hacen algunos aportes a la temática, debido a que en la bibliografía consultada no se encontraron expuestos estos teoremas.

Teorema 8. *toda transformación lineal es S-diferenciable.*

Demostración: Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, sea $\mathbf{x_0} \in U$. Probemos que existe una transformación lineal T_{x_0} tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ entonces

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - T_{x_0}(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Del teorema 2 se sugiere $T_{x_0} = f$ entonces, tomando $T_{x_0} = f$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - T_{x_0}(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| &= \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| \\
&= \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2}) + f(\mathbf{x_1})\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene que

$$0 = \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - T_{x_0}(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$$

Siempre que $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$. Por lo tanto f es fuertemente diferenciable.

Teorema 9. ***Regla de la cadena***

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ y sean $f : A \to \mathbb{R}^k$, $g : B \to \mathbb{R}^m$ con $f(A) \subset B$. Supóngase que $f(\mathbf{x_0}) = \mathbf{y_0}$ con $\mathbf{x_0} \in A$, si f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y si g es S-diferenciable en $\mathbf{y_0}$. Entonces la composición $g \circ f$ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y además la S-derivada de $g \circ f$ en $\mathbf{x_0}$ es dada por:

$$(g \circ f)'(\mathbf{x_0}) = g'(\mathbf{y_0}) \circ f'(\mathbf{x_0})$$

Observación: Como

$$(g \circ f)'(\mathbf{x_0})(h) = D(g \circ f)(\mathbf{x_0})(h) \qquad (a)$$

y dado que

$$\begin{aligned}
(g'(\mathbf{y_0}) \circ f'(\mathbf{x_0}))(h) &= g'(\mathbf{y_0})(f'(\mathbf{x_0})(h)) \\
&= g'(\mathbf{y_0})(Df(\mathbf{x_0})(h)) \\
&= Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(h) \qquad (b)
\end{aligned}$$

Luego es suficiente con mostrar que

$$D(g \circ f)(\mathbf{x_0})(h) = Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(h)$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:

Se debe mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1})) - Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|,$$

siempre que $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$.

Sean $\varepsilon > 0$. Si $Dg(\mathbf{y_0}) = 0$, como g es S-diferenciable en $\mathbf{y_0}$, existe $\lambda > 0$ tal que:

$$\|g(\mathbf{y_2}) - g(\mathbf{y_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}\|, \tag{2.1}$$

siempre que $\|\mathbf{y_2} - \mathbf{y_0}\| < \lambda$ y $\|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_0}\| < \lambda$. Ahora como f es continua en $\mathbf{x_0}$, por ser S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_0})\| < \lambda, \tag{2.2}$$

siempre que $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$.

De (2.1), (2.2) y tomando $\mathbf{y_1} = f(\mathbf{x_1})$ y $\mathbf{y_2} = f(\mathbf{x_2})$ tenemos que:

$$\|g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1}))\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|, \tag{2.3}$$

siempre que $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$. Esto muestra que $g \circ f$ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y además

$$D(g \circ f)(\mathbf{x_0}) = Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0}) = 0.$$

Supongamos que $Dg(\mathbf{y_0}) \neq 0$ y sea $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2\left\|Dg(\mathbf{y_0})\right\|}$, como f es S-Diferenciable en $\mathbf{x_0}$, existe δ_1 tal que:

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \varepsilon_1 \tag{2.4}$$

siempre que $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta_1$ y $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta_1$. Para $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta_1$ y $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta_1$, definamos

$$\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1}) = f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) \tag{2.5}$$

Por propiedades de las norma, de (2.4) tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})\| &= \|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1})\| \\ &< \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \varepsilon_1 + \|Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\|, \end{aligned}$$

pero $\|Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| \leq \|Df(\mathbf{x_0})\| \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|$

así

$$\|\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| M, \tag{2.6}$$

Donde $M = \varepsilon_1 + \|Df(\mathbf{x_0})\|$. Como g es S-diferenciable en $\mathbf{y_0} = f(\mathbf{x_0})$, dado $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, existe $\lambda > 0$ tal que:

$$\|g(\mathbf{y_2}) - g(\mathbf{y_1}) - Dg(\mathbf{y_0})(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1})\| < \varepsilon_2 \|\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}\|, \tag{2.7}$$

siempre que $\|\mathbf{y_2} - \mathbf{y_0}\| < \lambda$ y $\|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_0}\| < \lambda$, definamos

$$G(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}) = g(\mathbf{y_2}) - g(\mathbf{y_1}) - Dg(\mathbf{y_0})(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}), \tag{2.8}$$

para $\|\mathbf{y_2} - \mathbf{y_0}\| < \lambda$ y $\|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_0}\| < \lambda$. Luego de (2.8) se tiene

$$g(\mathbf{y_2}) - g(\mathbf{y_1}) = G(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}) + Dg(\mathbf{y_0})(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}). \tag{2.9}$$

Como f es continua en $\mathbf{x_0}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_0})\| = \|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_0}\| < \lambda \tag{2.10}$$

siempre que $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta_2$, donde $f(x) = y$. Sean $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$, tal que $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, sustituyendo (2.5) en (2.9) y de (2.10) se tiene que

$$g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1})) = G(f(\mathbf{x_1}), f(\mathbf{x_2})) + Dg(\mathbf{y_0})(\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})) \tag{2.11}$$

donde $\mathbf{y_1} = f(\mathbf{x_1})$ y $\mathbf{y_2} = f(\mathbf{x_2})$. Tomando

$$F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}),$$

tenemos que

$$\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1}) = F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) + Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \tag{2.12}$$

Además de (2.4) se tiene:

$$\|F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|\,\varepsilon_1. \tag{2.13}$$

Al sustituir en (2.11) se tiene:

$$\begin{aligned} g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1})) &= G(f(\mathbf{x_1}), f(\mathbf{x_2})) + Dg(\mathbf{y_0})(F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) + Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})) \\ &= G(f(\mathbf{x_1}), f(\mathbf{x_2})) + Dg(\mathbf{y_0})F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) + Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}), \end{aligned}$$

así

$$g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1})) - Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) = G(f(\mathbf{x_1}), f(\mathbf{x_2})) + Dg(\mathbf{y_0})F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \tag{2.14}$$

Luego

$$\|g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1})) - Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| \leq \|G(f(\mathbf{x_1}), f(\mathbf{x_2}))\| + \|Dg(\mathbf{y_0})F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})\| \tag{2.15}$$

Pero de (2.7), (2.8) y (2.10) tenemos que;

$$\|G(f(\mathbf{x_1}), f(\mathbf{x_2}))\| < \varepsilon_2 \|\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_2})\| \tag{2.16}$$

siempre que $\|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_0})\| = \|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_0}\| < \lambda$, además

$$\|Dg(\mathbf{y_0})F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})\| \leq \|Dg(\mathbf{y_0})\| \|F(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})\| \tag{2.17}$$

Luego de las desigualdades (2.13), (2.16), (2.17) se tiene:

$$\|g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1})) - Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon_2 \|\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})\| + \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \|Dg(\mathbf{y_0})\| \varepsilon_1.$$

Pero de (2.6)

$$\|\Delta(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})\| < \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| M,$$

Así, si $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|g(f(\mathbf{x_2})) - g(f(\mathbf{x_1})) - Dg(\mathbf{y_0})Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| &< \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| (M\varepsilon_2 + \|Dg(\mathbf{y_0})\| \varepsilon_1) \\ &< \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \varepsilon.\end{aligned}$$

Es bien conocido que un Campo Vectorial $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es F-Diferenciable si y sólo si sus funciones componentes $f_1, ..., f_m$ son F-Diferenciables; A continuación presentamos una versión de este teorema para la S-Diferenciablidad.

Teorema 10. *$f : U \to \mathbb{R}^m$ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0} \in U$, si y solo si sus funciones componentes son S-diferenciables en $\mathbf{x_0}$.*

Demostración:

Supongamos que f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, luego dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x_2}) - f(\mathbf{x_1}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \tag{2.18}$$

siempre que $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, con $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in U$.

Como

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_m(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{m} f_k(x)e_k, \end{aligned}$$

y además

$$Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) = \sum_{k=1}^{m} \left(\nabla f_k(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\right) e_k,$$

entonces de (2.18) tenemos:

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x_2})e_k - \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x_1})e_k - \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})e_k \right\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|,$$

luego

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} (f_k(\mathbf{x_2}) - f_k(\mathbf{x_1}) - \nabla f_k(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}))e_k \right\| < \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|.$$

Pero $|x_j| \leq \|x\|$ para cada $j = \overline{1, m}$. Entonces

$$\begin{aligned} |f_k(\mathbf{x_2}) - f_k(\mathbf{x_1}) - \nabla f_k(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{m} (f_k(\mathbf{x_1}) - f_k(\mathbf{x_2}) - \nabla f_k(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}))e_k \right\| \\ &< \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\| \end{aligned}$$

Por tanto

$$|f_k(\mathbf{x_2}) - f_k(\mathbf{x_1}) - \nabla f_k(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})| < \varepsilon \left\| \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} \right\|,$$

si $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ para cada $k = 1, ...m$. Así cada componente f_k es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$.

Ahora mostremos la implicación reciproca. Supongamos que cada f_j es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, para $j = \overline{1, m}$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_j > 0$ tal que para $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in U \subset \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta_j$, $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta_j$ se satisface que

$$|f_j(\mathbf{x_2}) - f_j(\mathbf{x_1}) - \nabla f_j(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})| < \frac{\varepsilon}{m} \left\| \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} \right\|, \qquad j = \overline{1, m}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) e_j$$

Sea $\delta = min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$, entonces para $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in U \subset \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| &= \left\| \sum_{j=1}^{m} f_j(\mathbf{x_2}) e_j - \sum_{j=1}^{m} f_j(\mathbf{x_1}) e_j - \sum_{j=1}^{m} \nabla f_j(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) e_j \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} \left(f_j(\mathbf{x_2}) - f_j(\mathbf{x_1}) - \nabla f_j(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \right) e_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} |f_j(\mathbf{x_2}) - f_j(\mathbf{x_1}) - \nabla f_j(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})| \\
&< \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} \left\| \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} \right\|
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2}) - Df(\mathbf{x_0})(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})\| < \varepsilon \left\| \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} \right\|,$$

si $\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ y $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_0}\| < \delta$; Luego f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$.

Ahora se mostrara el álgebra de derivadas para funciones S-diferenciables en $\mathbb{R}^n$, para esto haremos uso del teorema de la regla de la cadena y el teorema anterior.

Teorema 11. *Sean $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ funciones S-diferenciables en $\mathbf{x_0} \in U$. Entonces $\rho : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donde $\rho(x) = f(x) \pm g(x)$ es S-Diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y la S-derivada de ρ está dada por:*

$$\rho'(x) = f(x)' \pm g(x)'.$$

Demostración:

Dado $z \in \mathbb{R}^{2n}$, escribamos $z = (y, w)$ donde $y = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $w = (z_{n+1}, z_{n+2}, ..., z_{2n})$ y $z = (z_1, ..., z_n, z_{n+1}, ..., z_{2n})$. Definamos $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, como $\phi(z) = y \pm w$; ϕ es una transformación lineal, luego por el teorema 8 es S-diferenciable. Defínase ahora $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, como $\psi(x) = (f(x), g(x))$, por hipótesis se tiene que f y g son S-diferenciables en $\mathbf{x_0}$. Entonces por el teorema 10, ψ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, ahora

$$\begin{aligned}(\phi \circ \psi)(x) &= \phi(\psi(x)) \\ &= \phi(f(x), g(x)) \\ &= f(x) \pm g(x)\end{aligned}$$

Así por la regla de la cadena $f \pm g$ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y además

$$\begin{aligned} D(f \pm g)(\mathbf{x_0}) &= D\phi(\psi(\mathbf{x_0}))D\psi(\mathbf{x_0}) \\ &= [I_n\ I_n]\,[Df(\mathbf{x_0}) \quad \pm \quad Dg(\mathbf{x_0})]_{[*]} \\ &= [Df(\mathbf{x_0}) \quad \pm \quad Dg(\mathbf{x_0})] \end{aligned}$$

La notación $[*]$.^{ver} [1]

Luego por la observación hecha en el teorema de la Regla de la Cadena se concluye que:

$$D(f \pm g)(\mathbf{x_0})(h) = [Df(\mathbf{x_0}) \quad \pm \quad Dg(\mathbf{x_0})](h).$$

Teorema 12. *Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ S-diferenciable en $x_0 \in U$. Entonces la función $\tau(x) = \lambda f(x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ (El producto escalar es S-diferenciable) y la S-derivada de τ esta dada por*

$$\tau'(\mathbf{x_0}) = \lambda f'(\mathbf{x_0})$$

Demostración:

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, sea $i_\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la transformación lineal definida por $i_\lambda(y) = \lambda y$, $y \in \mathbb{R}^m$

Luego i_λ es S-diferenciable. Como f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, por la regla de la cadena se

[1] Las matrices están escritas por bloques, para mayor información de esta notación consultar el libro de Grossman, Pág. 70.

tiene que la composición $(i_\lambda \circ f)(x) = \lambda(f(x)) = \tau(x)$ es *S-diferenciable* en $\mathbf{x_0}$. Además

$$\begin{aligned} D(\tau(\mathbf{x_0})) &= D(i_\lambda \circ f)(\mathbf{x_0}) \\ &= Di_\lambda(f(\mathbf{x_0}))Df(\mathbf{x_0}) \\ &= \lambda I_m Df(\mathbf{x_0}) \\ &= \lambda Df(\mathbf{x_0}) \end{aligned}$$

Así $D(\lambda f)(\mathbf{x_0}) = \lambda Df(\mathbf{x_0})$ y por tanto $D(\lambda f)(\mathbf{x_0})(h) = \lambda Df(\mathbf{x_0})(h)$.

Teorema 13. *Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones S-diferenciable en $\mathbf{x_0} \in U$. Entonces la función $\rho : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $\rho(x) = f(x) \cdot g(x)$ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ (donde $\cdot$ es el producto punto) y la derivada de ρ esta dada por:*

$$\rho'(\mathbf{x_0}) = g(\mathbf{x_0})f'(\mathbf{x_0}) + f(\mathbf{x_0})g'(\mathbf{x_0}).$$

Demostración:

Sea $P : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$P(y, z) = y_1 z_1 + ... + y_m z_m = y \cdot z$$

Por la proposición 2, P es S-diferenciable, además $DP(y, z) = (z, y)$. Definamos ahora $\tau : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ como $\tau(x) = (f(x), g(x))$. Por el teorema 10, τ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$, ahora como

$$\begin{aligned} (P \circ \tau)(x) &= P(\tau(x)) \\ &= P(f(x), g(x)) \\ &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena $\rho(x)$ es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$. Además

$$\begin{aligned}
D(P \circ \tau)(\mathbf{x_0}) &= DP(\tau(\mathbf{x_0}))D\tau(\mathbf{x_0}) \\
&= DP(f(\mathbf{x_0}), g(\mathbf{x_0}))D\tau(\mathbf{x_0}) \\
&= (g(\mathbf{x_0}), f(\mathbf{x_0}))[Df(\mathbf{x_0}) \quad Dg(\mathbf{x_0})] \\
&= g(\mathbf{x_0})Df(\mathbf{x_0}) + f(\mathbf{x_0})Dg(\mathbf{x_0}).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Derivada Parcial Fuerte

Definición 15. *Una función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ *tiene primera derivada parcial fuerte en* (x_0, y_0) *si:*

i) Existe una transformación lineal denotada por $D_1 f(x_0, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *tal que:* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que si* $|x_1 - x_0| < \delta$, $|x_2 - x_0| < \delta$, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, *y* $|y - y_0| < \delta$ *entonces*

$$\|f(x_1, y) - f(x_2, y) - D_1 f(x_0, y_0)(x_2 - x_1)\| < \varepsilon \, |x_2 - x_1|$$

Análogamente se puede definir la segunda derivada $D_2 f(x_0, y_0)$. Ahora extendiendo la definición anterior de manera general, para funciones de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Dado $f : U \to \mathbb{R}^m$ y $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in U$, denotaremos por $\overline{x}_i$ el vector $\overline{x}_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Definición 16. *Una función $f : U \to \mathbb{R}^m$ tiene i-ésima derivada parcial fuerte en $\mathbf{x_0} = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in U$, si:*

1. *Existe una transformación lineal $T_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo y_i, $z_i \in \mathbb{R}$ con $|y_i - x_{0i}| < \delta$, $|z_i - x_{0i}| < \delta$ y además $\overline{x}_i \in B_\delta(\overline{x_0})$ entonces*

$$\|f(\widetilde{x_2}) - f(\widetilde{x_1}) - T_i f(x_0)(z_i - y_i)\| < \varepsilon\, |z_i - y_i| \,.$$

Donde $\widetilde{x_1} = (x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)$, y $\widetilde{x_2} = (x_1, ..., x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Como ya se ha comentado, la existencia de las derivadas parciales no garantizan la existencia de la derivada de Frechet. A continuación se enuncia un teorema el cuál muestra que la existencia de las derivadas parciales fuertes implica la S-diferenciabilidad.

Teorema 14. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ con derivadas parciales fuertes en $(x_0, y_0) \in U$. Entonces f es fuertemente diferenciable en (x_0, y_0) y además*

$$Df(x_0, y_0)(x, y) = D_1 f(x_0, y_0)(x) + D_2 f(x_0, y_0)(y).$$

Demostración:

Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ y una transformación lineal T tal que

$$\|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - T\left[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\right]\| < \varepsilon\, \|[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)]\| \,.$$

Siempre que $\|(x_2, y_2) - (x_0, y_0)\| < \delta$, $\|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\| < \delta$.

Sean $T_1 = D_1 f(x_0, y_0)$, $T_2 = D_2 f(x_0, y_0)$ las derivadas parciales fuertes de f. Luego, dado

$\varepsilon > 0$, existen δ_1, $\delta_2 > 0$ tal que si $|x_1 - x_0| < \delta_1$, $|x_2 - x_0| < \delta_1$ y $y \in B_{\delta_1}(y_0)$. Entonces

$$\|f(x_2, y) - f(x_1, y) - T_1(x_2 - x_1)\| < \frac{\varepsilon}{2} |x_2 - x_1| . \tag{3.1}$$

Por otro lado, si $|y_1 - y_0| < \delta_2$, $|y_2 - y_0| < \delta_2$ y $x \in B_{\delta_2}(x_0)$. Entonces:

$$\|f(x, y_2) - f(x, y_1) - T_2(y_2 - y_1)\| < \frac{\varepsilon}{2} |y_2 - y_1| \tag{3.2}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $|x_1 - x_0| < \delta, |x_2 - x_0| < \delta, |y_2 - y_0| < \delta, |y_2 - y_0| < \delta \quad x_1, x_2, y_1, y_2$ satisfacen las condiciones (3.1) y (3.2). Ahora

$$\|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - T_1(x_2 - x_1) - T_2(y_2 - y_1)\| =$$

$$\|[f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - T_1(x_2 - x_1)] + [f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1) - T_2(y_2 - y_1)]\| \leq$$

$$\|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - T_1(x_2 - x_1)\| + \|f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1) - T_2(y_2 - y_1)\| .$$

Pero de (3.1) y (3.2) tenemos

$$\begin{aligned} \|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - (T_1(x_2 - x_1) + T_2(y_2 - y_1))\| &< \frac{\varepsilon}{2}(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(2\,\|(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\|) \\ &\leq \varepsilon\,\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\| \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - (T_1(x_2 - x_1) + T_2(y_2 - y_1))\| < \varepsilon\,\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\| \tag{3.3}$$

Sea $T(x, y) = T_1(x) + T_2(y)$, dado que T_1 y T_2 son transformaciones lineales, luego de (3.3) f es fuertemente diferenciable y además.

$$Df(x_0, y_0)[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)] = T_1(x_2 - x_1) + T_2(y_2 - y_1)$$

$$Df(x_0, y_0)[(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)] = T_1(x_2 - x_1) + T_2(y_2 - y_1)$$

A continuación se presenta una generalización del teorema anterior para funciones de $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 15. *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. La función $f : U \to \mathbb{R}^m$ tiene i-ésimas derivadas parciales fuertes en el punto $\mathbf{x_0}$. Entonces f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y además*

$$Df(\mathbf{x_0})(x) = D_1 f(\mathbf{x_0})(x_1) + D_2 f(\mathbf{x_0})(x_2) + ... + D_i f(\mathbf{x_0})(x_i) + ... + D_n f(\mathbf{x_0})(x_n)$$

Demostración:

Sea $T_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ con $1 \leq i \leq n$, la *i-ésima* derivada parcial fuerte de f. Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_i > 0$, tal que:

$$\|f(x_1, x_2, ..., z_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., y_i, ..., x_n) - T_i(z_i - y_i)\| < \frac{\varepsilon}{n} |z_i - y_i| \qquad (3.4)$$

Siempre que $|y_i - x_{0i}| < \delta_i$, $|z_i - x_{0i}| < \delta_i$ y $\overline{x}_i \in B_{\delta_i}(\overline{x_0})$.

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$ y $|y_i - x_{0i}| < \delta$, $|z_i - x_{0i}| < \delta$. Entonces la ecuación (3.4) se satisface para $i = 1, 2, ..., n$. Ahora

$$\begin{aligned}\left\| f(y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_n) - f(z_1, z_2, ..., z_i, ..., z_n) - \sum_{i=1}^{n} T_i(y_i - z_i) \right\| &< \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} |(y_i - z_i)| \\ &< \frac{\varepsilon}{n}(n \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|) \\ &= \varepsilon \|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\|\end{aligned}$$

Sea $T(x) = \sum_{i=1}^{n} T_i(x_i)$, luego T es lineal por ser T_i lineal, $i = 1, .., n$. Entonces se sigue que f es S-diferenciable en $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

Si observamos el teorema 7 con el teorema 15 se puede apreciar una de las ventajas que presenta el concepto de diferenciabilidad fuerte, ya que en el teorema 7 para que una función sea F-diferenciable no solo se requiere que las F-derivadas parciales de f existan en un punto $\mathbf{x_0}$, sino que además deben ser continuas en una vecindad de dicho punto; mientras que el teorema 15 sólo exige la existencia de las derivadas parciales fuertes en $\mathbf{x_0}$ para que la función sea S-diferenciable.

Teorema 16. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ con derivadas parciales en $(x_0, y_0) \in U$, donde una de las derivadas parciales es fuerte entonces f es F-diferenciable en (x_0, y_0).*

Demostración:

Por hipótesis se tiene que $D_1 f(x_0, y_0)$ y $D_2 f(x_0, y_0)$ existen. Supongamos que $D_1 f(x_0, y_0)$ es una derivada parcial fuerte de f. Probemos entonces que f es F-diferenciable en (x_0, y_0), esto es dado $\varepsilon > 0$, veamos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ entonces

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)((x, y) - (x_0, y_0))\| < \varepsilon \|(x, y) - (x_0, y_0)\|.$$

Como f tiene segunda derivada parcial $D_2 f(x_0, y_0)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|y - y_0| < \delta_2$ entonces

$$\|f(x_0, y) - f(x_0, y_0) - D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} |y - y_0| \tag{3.5}$$

Por otro lado se tiene que $D_1 f(x_0, y_0)$ es una derivada parcial fuerte entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x_1 - x_0| < \delta_1$, $|x_2 - x_0| < \delta_1$ y $|y - y_0| < \delta_1$ entonces

$$\|f(x_2, y_0) - f(x_1, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)(x_2 - x_1)\| < \frac{\varepsilon}{2} |x_2 - x_1| \tag{3.6}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que se satisface $|x_1 - x_0| < \delta$, $|x_2 - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$. Entonces se cumple (3.5) y (3.6). Sea $x \in B_\delta(x_0)$ entonces $|x - x_0| < \delta < \delta_1$. Tomando $x_1 = x_0$ tenemos que

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) - D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)\| \leq$$

$$\|f(x, y) - f(x_0, y) - D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0)\| + \|f(x_0, y) - f(x_0, y_0) - D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)\| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} |y - y_0| \leq \varepsilon \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Por lo tanto

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)((x, y) - (x_0, y_0))\| < \varepsilon \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Conclusiones

- El concepto de *Diferenciabilidad Fuerte*, permite reducir condiciones para la obtención de ciertos resultados tanto del cálculo como del análisis, facilitando de esta manera el proceso de la demostración.

- El proceso de la demostración del Algebra de derivadas a partir de la regla de la cadena junto con un par de teoremas más, facilita enormemente la demostración de estos comparados con la forma clásica, permitiendo de esta manera mostrar otro camino, no tan clásico, de sus demostraciones a los lectores de este trabajo.

- La existencia de las derivadas parciales garantiza la diferencia fuerte, este es uno de los resultados y ventaja que sobresalen con respecto al resultado clásico que se tiene, permitiendo obtener una demostración mucho más sencilla y comprensible para el lector.

- El Concepto de Diferenciabilidad de Frechet es mucho más general que el de Diferenciabilidad Fuerte, en el sentido de que el conjunto de funciones Frechetmente Diferenciables es mucho más grande que el conjunto de funciones

Fuertemente Diferenciables.

Bibliografía

[1] Leach, E. B. *American mathematics Society. 12ª* Edición. Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, (1967).

[2] Apostol, T. M. *Calculus*, Volumen II. Editorial Reverté, S.A., (1998).

[3] Apostol, T. M. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, S.A., (1998).

[4] Kudriavtsev, L. D. *Curso de Análisis Matemático.* Volumenes I y II. Editorial Mir, Moscú, (1983).

[5] Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático. 3ª* Edición. Editorial McGraw Hill, México, (1980).