LAS NOCIONES DE NÚMERO REAL Y CONTINUIDAD EN TEXTOS UNIVERSITARIOS DE CÁLCULO

WILLIAM EFRAÍN TIMANÁ GUTIÉRREZ
JESÚS DAVID TORRES URBANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2009

LAS NOCIONES DE NÚMERO REAL Y CONTINUIDAD EN TEXTOS UNIVERSITARIOS DE CÁLCULO

WILLIAM EFRAÍN TIMANÁ GUTIÉRREZ
JESÚS DAVID TORRES URBANO

Seminario de Investigación presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Educación, Especialidad Matemáticas

DIRECTORA:
GABRIELA INÉS ARBELÁEZ ROJAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2009

Nota de Aceptación

____

____

____

Directora: ____________________________________
Magister. Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Jurado: ____________________________________
Matemático. Freddy William Bustos Rengifo

Jurado: ____________________________________
Licenciada. Luz Victoria De la Pava Castro

Fecha de Sustentación: Popayán, 30 de Julio de 2009

A Dios por darnos la sabiduría y constancia necesaria para alcanzar nuestras metas y a nuestros familiares por su apoyo incondicional en este proceso de formación docente y a todas aquellas personas convencidas de que la profesión elegida se debe realizar con entrega y responsabilidad para alcanzar la anhelada calidad de la educación.

AGRADECIMIENTOS

A la profesora Gabriela Inés Arbeláez Rojas, por su valiosa colaboración y exigencia, en el desarrollo de este seminario de investigación.

Al Grupo Educación Matemática, Línea Historia de las matemáticas, de la Universidad del Cauca y al Grupo de Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle, por sus sugerencias y contribuciones a lo largo del proyecto.

A nuestros padres, familiares y amigos por su apoyo permanente y constante motivación durante el transcurso de nuestra carrera.

A la Universidad del Cauca y a todos los profesores del departamento de Matemáticas, quienes hicieron realidad nuestro sueño.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN

En nuestra vida cotidiana, sin importar la actividad a la que nos dediquemos hacemos uso implícito o explícito de los números; utilizamos los números naturales, enteros, racionales e irracionales es decir, *los Números Reales*. Sin embargo se desconoce en general el concepto matemático y el proceso evolutivo que se dio para llegar a su actual estado de elaboración.

Como cualquier concepto matemático, hay un abismo entre los procesos históricos de construcción del concepto de número real y la manera en que este se introduce en el aula. Es decir, hay una distancia considerable entre la manera en que éste ha evolucionado en la comunidad matemática durante un largo período histórico, la manera en que es formalizado y presentado en los procesos habituales de enseñanza, y la manera en que se organiza y estructura cognitivamente.

El cálculo y el análisis son áreas fundamentales para todas aquellas personas que eligen estudiar programas universitarios tales como matemáticas, licenciatura en matemáticas e ingenierías. Pero por lo general en el proceso de enseñanza de estas áreas la presentación de los conceptos se realiza de una manera formal y axiomática siendo esta concepción contraria a su desarrollo histórico. Para lograr una buena comprensión de estas áreas es requisito indispensable tener en claro nociones básicas tales como infinito (potencial y actual) y continuidad; términos que dentro de la cotidianidad usamos frecuentemente, pero casi nunca reflexionamos sobre la importancia que han tenido para el desarrollo del sistema de los números reales y la trascendencia de estos para entender y comprender conceptos de cálculo, como lo son límite, derivada e integral.

Los textos guía son importantes herramientas pedagógicas que cumplen un papel fundamental en los procesos educativos. Ellos generalmente, son elegidos por los docentes pero también en ocasiones son impuestos, o bien por las instituciones, o aún por las editoriales que entran en juego de competencias para imponer tal o cual texto. En el ámbito universitario estos desempeñan un papel aún más importante, dado que son utilizados como material de consulta, sirviendo de apoyo a lo expuesto en las horas presenciales de los diferentes cursos, permitiendo a los estudiantes profundizar en los conceptos, conjeturar, interpretar, analizar los contenidos y resolver problemas.

Al jugar un rol tan trascendental en el proceso de enseñanza y aprendizaje consideramos que sería idóneo realizar un estudio concienzudo de un material tan ampliamente usado.

Es por esto que en este trabajo realizaremos un análisis de los textos de Cálculo más representativos que circulan en la Universidad del Cauca, para indagar la forma en la cual la noción de número real se introduce en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en los primeros semestres de los programas de Matemáticas, Licenciatura en Matemática e Ingenierías.

Indagaremos las nociones preliminares que se exhiben respecto al número real, la manera como se realiza la presentación formal, las distintas representaciones geométricas del concepto, la forma como se introduce el concepto de límite y el papel que juegan los números reales en el desarrollo del texto. Observaremos además si son tenidos en cuenta aspectos históricos relevantes que se dieron para la formalización de los números reales, ya que la historia también es una herramienta didáctica que puede servir para comprender mejor los conceptos.

Esperamos que nuestro análisis pueda ser usado como material de referencia al momento de elegir el texto que será empleado en los cursos de cálculo para el estudio del concepto de número real y sus distintas representaciones

1. SELECCIÓN DE TEXTOS

Antes de entrar a detallar el proceso de selección de los textos, anexamos un listado de los libros que se mencionan en esta sección y la notación que utilizaremos a lo largo de este trabajo para referirnos a cada uno de ellos.

Lista de Textos

- ≪Edw97≫ Cálculo con geometría analítica. C. H. Edwards. Jr., David E. Penney. Cuarta edición. Prentince Hall S.A. 1997.
- ≪Lei94≫ El cálculo. Louis Leithold. Séptima edición. Oxford University. 1994.
- ≪Pis83≫ Cálculo diferencial e integral. Vol. II. Nicolai Piskunov. Sexta edición. Editorial Mir. 1983.
- ≪Sal05≫ Calculus una y varias variables. S. L. Salas, Hille, Etgen. Vol. I y II. cuarta edición. Reverté S. A. 2005.
- ≪Lar99≫ Cálculo diferencial e integral. Vol. I. Ron Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards. Sexta edición. Mc Graw Hill. 1999.
- ≪Apo88≫ Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al algebra lineal. Tom M. Apóstol. Segunda edición. Reverté S.A. 1988.
- ≪Spi92≫ Calculus, cálculo infinitesimal. Michael Spivak. Segunda edición. Reverté S. A. 1992.

- ≪Pur01≫ Cálculo. E. Purcell, Dale Varberg, Steven E. Rigdon. Pearson educación. 2001.

- ≪Ste98≫ Cálculo: conceptos y contextos. Stewart. Thomson editores. 1998.

- ≪Smi03≫ Cálculo. Robert T. Smith, Roland B. Minton. Segunda edición. Mc Graw Hill. 2003.

- ≪Dem80≫ 5000 problemas de análisis matemático. B. P. Demidovich. Novena edición. 1980.

1.1 PROCESO DE SELECCIÓN DE LOS TEXTOS

Para escoger los textos de cálculo que se utilizarán en el análisis de las nociones de número real y continuidad se aplicó, en primer lugar, una encuesta a los docentes del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca que orientan el curso de Cálculo en los primeros semestres de los Programas de Licenciatura en Matemáticas, Matemáticas e Ingenierías, con el fin de conocer los textos guía que utilizan los profesores para orientar el curso y cuáles son los criterios que tienen en cuenta para su selección. A continuación referimos la encuesta:

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

"LAS NOCIONES DE NÚMERO REAL Y CONTINUIDAD EN TEXTOS UNIVERSITARIOS DE CÁLCULO"

El propósito de la siguiente encuesta es seleccionar un cuerpo de textos de cálculo para realizar en ellos un análisis de algunos conceptos fundamentales como el de número real y continuidad. Esta selección nos permitirá continuar con el desarrollo del Seminario de Grado titulado "las nociones de número real y continuidad en textos universitarios de cálculo", dirigido por la profesora Gabriela Arbeláez.

1. *¿Es la primera vez que orienta el curso de Cálculo I?*
2. *¿Qué texto o textos guía escogió este semestre para orientar el curso?*
3. *¿Con qué criterios escoge el texto guía? (puede escoger una o más opciones)*
   a) *Recomendaciones de alguna editorial*
   b) *Recomendación de algún colega o compañero de trabajo*
   c) *Experiencia en cursos anteriores*
   d) *Referencias del autor (trayectoria que el autor tiene en esta clase de textos)*
   e) *Enfoque didáctico*
   f) *Tipo de problemas y ejercicios*
   g) *¿Otro? ¿Cuál?* ____

4. *Cuando trata temas relacionados con los de número real y continuidad, ¿prefiere un texto determinado? ¿Cuál? ¿Por qué?*

1.2 ANÁLISIS DE LA ENCUESTA

El siguiente análisis pretende dar cuenta de los resultados que se obtuvieron durante la realización de la encuesta.
A continuación referimos las respuestas dadas por los docentes y el análisis de las mismas.

En primer lugar, se indagó a los docentes si era la primera vez que orientaba el curso, esto con el fin de establecer la diferencia que existe en los criterios utilizados para la escogencia de los textos guía por los docentes con y sin experiencia en cursos anteriores. De los 11 encuestados encontramos que sólo dos de ellos orientaban el curso por primera vez.

En cuanto a la pregunta 2 la mayoría de los encuestados escogieron los textos Tom M. Apóstol [Apo88], Louis Leithold [Lei94] y Piskunov [Pis83], porque, según ellos estos manejan un contenido muy amplio para desarrollar las temáticas correspondientes al curso de Cálculo I.

En la pregunta 3 se establecieron algunos criterios que consideramos podían ser tenidos en cuenta por los docentes para la selección de los textos. Entre los criterios que mencionamos en la encuesta; los que son más tenidos en cuenta por los docentes en el momento de la escogencia del libro guía son los siguientes; el tipo de problemas y ejercicios, la experiencia en cursos anteriores y el enfoque didáctico.

En cuanto a la pregunta 4, la mayoría de los docentes manifestaron que el texto más utilizado para tratar temas como el de número real es Calculus de Tom M. Apóstol ≪Apo88≫ y para el tema de continuidad los textos de Cálculo más consultados son los de Louis Leithold ≪Lei94≫, Michael Spivak ≪Spi92≫ y James Stewart ≪Ste98≫.

A continuación presentamos las relaciones que se obtuvieron a partir de los resultados de la encuesta:

Pregunta 1:

Profesores que orientan el curso por primera vez	2
Profesores que han orientado el curso en semestres anteriores	9

Pregunta 2:

TEXTOS DE CÁLCULO	Número de profesores que escogieron el libro como texto guía
≪Apo88≫	7
≪Lei94≫	6
≪Pis83≫	6
≪Edw97≫	3
≪Dem80≫	3
≪Spi92≫	3
≪Pur01≫	2
≪Sal05≫	2
≪Lar99≫	2
≪Ste98≫	1
≪Smi03≫	1

Pregunta 3:

CRITERIOS	Número de docentes que escogieron cada uno de los criterios
a) Recomendaciones de alguna editorial	0
b) Recomendación de algún colega o compañero de trabajo	3
c) Experiencia en cursos anteriores	6
d) Referencias del autor (trayectoria que el autor tiene en esta clase de textos)	2
e) Enfoque didáctico	6
f) Tipo de problemas y ejercicios	7
g) ¿Otro? ¿Cuál?	2

Pregunta 4:

TEXTOS DE CÁLCULO	Textos más utilizados por los docentes		
	Números reales	Continuidad	En general
≪Apo88≫	3		2
≪Lei94≫		2	1
≪Pis83≫	1		1
≪Edw97≫			
≪Dem80≫			
≪Spi92≫		2	1
≪Pur01≫		1	
≪Sal05≫			
≪Lar99≫		1	1
≪Ste98≫		2	
≪Smi03≫		1	

Lo anteriormente planteado nos llevó a establecer que los textos guía más utilizados para orientar el curso de Cálculo I, son:

- ✓ Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al algebra lineal. Tom M. Apóstol. segunda edición. Reverté S.A. 1988
- ✓ El cálculo. Louis Leithold. Séptima edición. Oxford University. 1994
- ✓ Cálculo diferencial e integral. Vol. II. Nicolai Piskunov. sexta edición. Editorial Mir. 1983
- ✓ Cálculo con geometría analítica. C. H. Edwards. Jr., David E. Penney cuarta edición. Prentice Hall S.A. 1997

- ✓ 5000 problemas de análisis matemático. B. P. Demidovich. Novena edición. 1980

- ✓ Calculus, cálculo infinitesimal. Michael Spivak. Segunda edición. Reverté S. A. 1992

Siendo estos los primeros textos seleccionados como resultado de la encuesta realizada para el desarrollo de nuestro análisis.

1.3 ANÁLISIS DE LOS DATOS RECOGIDOS EN LA BIBLIOTECA

El segundo paso que seguimos para la escogencia de los libros fue recolectar información estadística de la Biblioteca Central de la Universidad del Cauca, sobre los libros de cálculo más utilizados por los estudiantes de los programas antes mencionados, el semestre inmediatamente anterior, es decir estudiantes del segundo periodo académico del año 2006. Esta información fue suministrada por el ingeniero encargado de operar el sistema de la biblioteca.

En la estadística correspondiente a los meses comprendidos entre septiembre de 2006 y marzo de 2007 los textos de cálculo más consultados por los estudiantes fueron los de Louis Leithold ≪Lei94≫, Roland E. Larson ≪Lar99≫ y Piskunov ≪Pis83≫.

A continuación presentamos el número de consultas mensuales correspondientes a cada uno de los textos:

SEPTIEMBRE

TEXTOS	NÚMERO DE VECES CONSULTADO
≪Edw97≫	23
≪Lei94≫	22
≪Pis83≫	21
≪Sal05≫	20
≪Lar99≫	18

OCTUBRE

TEXTOS	NÚMERO DE VECES CONSULTADO
≪Lei94≫	31
≪Lar99≫	30
≪Lar97≫	25
≪Pis83≫	22
≪Ste98≫	17

NOVIEMBRE

TEXTOS	NÚMERO DE VECES CONSULTADO
≪Lei94≫	35
≪Lar99≫	30
≪Pis83≫	20
≪Edw97≫	20
≪Sal05≫	15

DICIEMBRE

TEXTOS	NÚMERO DE VECES CONSULTADO
≪Edw97≫	8
≪Lei94≫	7
≪Lar99≫	5

FEBRERO

TEXTOS	NÚMERO DE VECES CONSULTADO
≪Sal05≫	8
≪Ste98≫	7
≪Apo88≫	6
≪Lar99≫	5
≪Lei94≫	5

MARZO

TEXTOS	NÚMERO DE VECES CONSULTADO
≪Lei94≫	10
≪Lar99≫	9
≪Ste98≫	9
≪Sal05≫	8
≪Apo88≫	6

Nota: En el mes de enero la biblioteca Central de la Universidad del Cauca, prestó sus servicios solo por algunos días, sin tener registro de textos de Cálculo consultados.

Teniendo en cuenta la información anterior hemos podido establecer que los textos más consultados por parte de los estudiantes en la Biblioteca central de la Universidad del Cauca son:

- ✓ El cálculo. Louis Leithold. Séptima edición. Oxford University. 1994

- ✓ Cálculo con geometría analítica. C. H. Edwards. Jr., David E. Penney cuarta edición. Prentice Hall S.A. 1997

- ✓ Cálculo diferencial e integral. Vol. II. Nicolai Piskunov. sexta edición. Editorial Mir. 1983

- ✓ Calculus una y varias variables. S. L. Salas, Hille, Etgen. Vol. I y II. cuarta edición. Reverté S. A. 2005

- ✓ Cálculo diferencial e integral. Vol. I. Ron Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards. sexta edición. Mc Graw Hill. 1999

Estos nos servirán como referencia para continuar con la escogencia final de los textos que utilizaremos para nuestro análisis.

Con base en la información recolectada en el desarrollo de las encuestas y los datos obtenidos en la Biblioteca Central, hemos podido llegar a las siguientes conclusiones:

La experiencia que la mayoría de los docentes tiene en cursos anteriores de Cálculo les permite tener criterios más fundamentados a la hora de escoger el texto guía, aunque en su gran mayoría ellos utilizan más de un libro para desarrollar los temas del curso.

Los estudiantes que buscan orientación en textos consultados en la Biblioteca Central, tratan de hacerlo en un conjunto de libros similares a los utilizados por el docente que orienta el curso, buscando profundizar los temas tratados y realizando los ejercicios propuestos.

Además, la mayoría de los docentes coinciden en que cuando se tratan temas específicos como el de número real y continuidad, tratan de hacerlo en textos con un amplio contenido teórico para poder realizar una introducción más profunda de los conceptos a manejar.

Finalmente después de haber realizado el anterior análisis a la encuesta y datos de consulta de la biblioteca, consideramos que los textos de cálculo que escogemos y que nos permitirán continuar con el desarrollo del seminario son los siguientes:

- ✓ Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al algebra lineal. Tom M. Apóstol. segunda edición. Reverté S.A. 1988
- ✓ El cálculo. Louis Leithold. Séptima edición. Oxford University. 1994
- ✓ Cálculo diferencial e integral. Vol. II. Nicolai Piskunov. sexta edición. Editorial Mir. 1983
- ✓ Calculus, cálculo infinitesimal. Michael Spivak. Segunda edición. Reverté S. A. 1992
- ✓ Cálculo diferencial e integral. Vol. I. Ron Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards. sexta edición. Mc Graw Hill. 1999

Estos textos presentan diferentes enfoques metodológicos para el desarrollo de las temáticas en el curso de Cálculo I, particularmente cuando tratan temas como los conceptos de número real y continuidad, algunos lo hacen de una forma más práctica, utilizando ejercicios, y otros hacen una presentación formal de los conceptos antes de trabajar con ellos, es decir su contenido es mas teórico.

Este conjunto de textos nos permitirá hacer un estudio más profundo de los conceptos a considerar, ya que sus metodologías para desarrollar los temas servirán para hacer una diferenciación y así analizarlos más detenidamente.

2. ALGUNOS ELEMENTOS HISTÓRICOS EN LA CONSTITUCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

El concepto de número real sólo hasta finales del siglo XIX, logró fundamentarse rigurosamente. Tener una idea clara del número real y de sus propiedades es una de las herramientas más útiles e importantes en matemáticas, por cuanto sobre él se fundamentan innumerables conceptos de cálculo, en la enseñanza en las escuelas secundarias y en la universidad. El concepto de número real es complejo y abstracto y tardó más de 2.000 años en formalizarse. A lo largo de su evolución histórica aparecieron diferentes representaciones, usos y concepciones, en diversos contextos socioculturales y científicos. Es incuestionable su importancia para el desarrollo de la matemática ya que sin él habría sido imposible formalizar algunos de los conceptos matemáticos usados en la actualidad. Por ejemplo, la demostración de Bolzano del teorema del valor intermedio, el estudio de límites y la continuidad, son nociones que tropezaban en algún punto en el momento de ser estudiados porque no se tenía una adecuada comprensión de la estructura del sistema numérico real.

Por lo tanto, si realizamos un análisis detallado de los momentos históricos claves que sirvieron para lograr la fundamentación del concepto de número real, podremos observar que este posee una inmensa riqueza conceptual, ya que se hace evidente su relación con conceptos matemáticos complejos como son infinito, infinitesimal, continuidad, convergencia, sucesión, límites, entre otros.

Durante el proceso de rigorización del análisis a mediados del siglo XIX varios matemáticos se dieron a la tarea de construir un sistema numérico que en la actualidad conocemos como el conjunto de los números reales y que hasta esa época aún no estaba establecido de forma rigurosa. Su utilización en muchas de las demostraciones matemáticas de teoremas y proposiciones que eran utilizados en el cálculo diferencial era indiscutible, pero estas en su gran mayoría se sustentaban únicamente en representaciones geométricas o representaciones permitidas por la geometría, las cuales didácticamente eran muy útiles pero no brindaban una base teórica sólida. Lo que se pretendía era que dichas demostraciones se basaran en argumentos aritméticos y algebraicos los cuales permitieran justificar lo que era explicado con construcciones geométricas; formalizando el sistema de los números reales, se podría lograr.

Se destacan los trabajos realizados por George Cantor (1845 - 1918) y Richard Dedekind (1831 - 1916) lo fundamental de sus trabajos fue reconocer que hasta ese momento se utilizaban algunas propiedades del sistema de los números reales que aun no habían sido justificadas con argumentos estrictamente aritméticos.

Lo que hicieron tanto Cantor como Dedekind fue basarse en el dominio numérico de los números racionales el cual estaba bien fundamentado aritméticamente. Dedekind realiza una extensión de los racionales utilizando el concepto de cortadura; mientras que Cantor para el desarrollo de su trabajo utiliza el concepto de sucesión fundamental; utilizando estos argumentos ambos logran establecer el conjunto de los números reales como básicamente lo conocemos hoy.

El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) tiene las propiedades necesarias para ser considerado un campo ordenado; esto es $\mathbb{Q}$ es un conjunto numérico en el cual se pueden realizar las cuatro operaciones básicas suma, resta, multiplicación, división (excepto la división por cero), se cumple la propiedad de la cerradura y se puede definir una relación de orden total compatible con las operaciones. El gran inconveniente para los trabajos desarrollados por Cantor y Dedekind era definir los números irracionales que hasta ese momento no tenían un estatus matemático, puesto que aunque se conocía su existencia desde hace 19 siglos y se operaba con algunos de ellos, hasta esa época no se habían fundamentado aritméticamente.

Por lo tanto la tarea de Cantor y Dedekind consistió en definir los irracionales en términos de los números racionales; para desarrollar su trabajo ambos se basaron en la continuidad de la recta.

Richard Dedekind comparó el dominio de los números racionales con la línea recta y puso en evidencia que hay infinidad de puntos de esta que corresponden a números racionales; esto lo podemos ver si tomamos sobre la línea recta un punto origen fijo O y si un punto P corresponde a un número racional a entonces la longitud OP se puede medir con una unidad de medida dada, es decir OP y a son conmensurables. Luego, tenemos que dos magnitudes se dicen conmensurables si tienen una unidad de medida común. Así, dadas dos magnitudes de la misma naturaleza, a y b, se dice que tienen una unidad de medida común si existen una unidad u y números enteros positivos m y n tales que:

$$a = n.u \quad y \quad b = m.u$$

En caso de que esto no sea posible, se dice que las magnitudes a y b son inconmensurables, es decir, en términos modernos, dos magnitudes son inconmensurables, si su razón no es un racional.

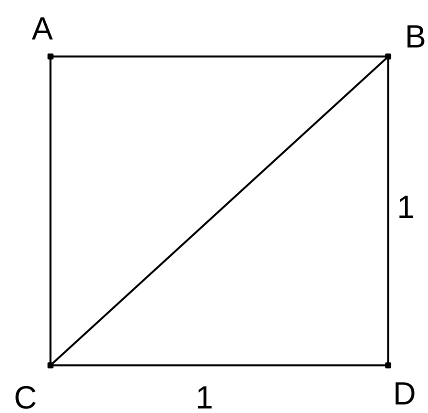
Las magnitudes inconmensurables se pusieron en evidencia desde la época de los griegos. Al parecer fueron descubiertas por la Escuela Pitagórica, en el siglo VI a.C., al tratar de resolver problemas tales como la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. La matemática pitagórica estaba basada en los enteros positivos y en todo lo que es expresable en términos de razones y operaciones entre ellos.

El descubrimiento de magnitudes inconmensurables, puso en evidencia el hecho de que no todas las magnitudes se podían expresar a través de los enteros.

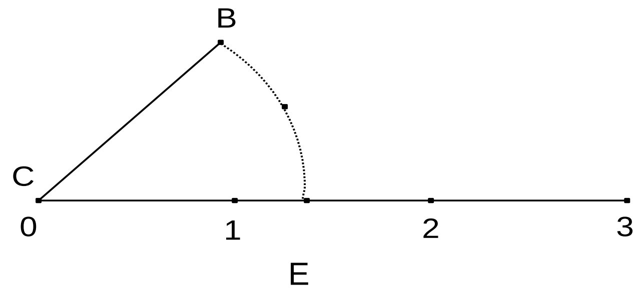
A estos nuevos números, que no eran ni enteros ni fracciones, los llamaron alogos o irracionales. En la época de Platón (428 – 347 a. C) ya se conocía la irracionalidad de los números:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$$

Por ejemplo: analicemos la diagonal de un cuadrado cuyos lados tienen como medida la unidad de longitud; así:



Utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos que la medida del segmento $\overline{CB}$ es igual a $\sqrt{2}$ .Si con centro en O y radio $\overline{CB}$ trazamos un arco de circunferencia este corta la línea recta horizontal en el punto E, obteniendo así el segmento $\overline{OE}$ cuya magnitud no corresponde a un número racional.



Y si construimos un rectángulo de largo igual a la longitud de la diagonal del cuadrado anterior y de alto igual a la unidad y calculamos su diagonal y luego la ubicamos sobre la línea recta a partir del punto origen, de igual forma que en el procedimiento anterior obtendremos un punto que tampoco corresponde a un número racional, en este caso $\sqrt{3}$. Realizando unas construcciones similares podemos ubicar sobre la línea recta infinitos números que no tienen raíz cuadrada exacta y cuya magnitud es inconmensurable con la unidad de medida dada.

Por ello se hizo necesario el perfeccionamiento de un sistema numérico que fuera completo y que por ende alcanzara la continuidad que posee la línea recta.
Para este propósito Dedekind enuncia el siguiente principio de continuidad de la línea recta:

> *"Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes."* [Ded72, p. 6]

Este principio es considerado por Dedekind como un axioma y a través de este le atribuye a la línea recta su continuidad.

Al enunciar este principio, Dedekind da una definición precisa acerca de lo que significa que la línea recta sea continua, para Dedekind es obligatorio definir la continuidad ya que esta es la que le sirve como base para realizar deducciones matemáticas sólidas.

Además de explicitar la noción de la continuidad de la línea recta, también era indispensable tener una idea clara del infinito, ya que estos dos conceptos están profundamente relacionados.

La noción de infinito ha causado confusión desde los inicios de la matemática y aun lo sigue haciendo, pues son muchas las contradicciones que causa en los estudiantes en los cursos de cálculo. Grandes matemáticos han tratado de dar una definición de infinito a lo largo de la historia. En la Grecia antigua, Platón, Pitágoras, Aristóteles (384 – 322 a.C.), entre otros, se planteaban la existencia del infinito y las contradicciones generadas a partir de la aceptación de su existencia en acto.

Aristóteles rechazó la idea del infinito actual dada las contradicciones que generaba. Sin embargo, lo concibió de dos formas diferentes las cuales son las nociones que tenemos actualmente de este concepto. Él concibió dos tipos de infinito: el infinito potencial y el infinito actual. En la concepción potencial, el infinito siempre existe en potencia, nunca en acto. Este punto de vista sostiene que podemos acercarnos al infinito tanto como queramos, pero que nunca podremos alcanzarlo realmente. Ésta es, precisamente, la concepción que Euclides revela en su segundo postulado:

> *Una recta es un segmento de longitud siempre finita que puede prolongarse tanto como se requiera*.

Dentro de la misma idea, cuando Euclides, también en su libro *Elementos* enuncia que existen infinitos primos, lo dice así:

> *Se puede superar cualquier cantidad dada de números primos*.

La noción de límite en el Análisis muestra otro ejemplo de concepción potencial del infinito. Por el contrario, en la concepción actual del infinito ("actual" en el sentido de "en acto", no en el sentido de "moderno") la infinitud es, de hecho, alcanzable. Desde este punto de vista, cuando decimos que una recta es infinita queremos decir que su longitud es realmente infinita, y que la línea se extiende indefinidamente en ambas direcciones (y, por ende, no puede ser prolongada). Por otra parte, cuando decimos que hay infinitos números primos es que existe un conjunto infinito en acto de números primos.

A lo largo de casi toda la historia de las Matemáticas, desde la Antigüedad Clásica y hasta más o menos el año 1872, la única concepción del infinito considerada como válida era la del infinito potencial.

Uno de los primeros matemáticos que rechazaba la idea del infinito actual fue Galileo (1564 – 1642); pero a pesar de esto, *frecuentemente consideró un segmento de recta formado por un número infinito de puntos y aceptó el continuo de la recta como un infinito actual* [Ortiz, p 63]. También matemáticos como Gauss (1777 – 1855) y Cauchy (1789 1857) rechazaron la idea del infinito actual, ya que no concebían que se pudiera establecer una biyección entre la totalidad y una de sus partes. Fue el teólogo y matemático checo Bernard Bolzano (1781 - 1848) el primero que trató de cimentar la noción de infinito actual. En su obra *las Paradojas del infinito* (1851) defendió la existencia de un infinito actual y destacó que era posible establecer una biyección entre dos conjuntos, ya sean finitos o infinitos. Para Bolzano era algo normal que los conjuntos infinitos fueran iguales a una parte de ellos mismos. Esta definición del infinito fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind.

Antes de comenzar el estudio de los números irracionales, Dedekind presupone el desarrollo de la aritmética de los números racionales y enuncia las siguientes propiedades, en las cuales $\mathcal{R}$ hace referencia al dominio numérico de los racionales:

1. *Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Cada vez que a y c sean dos números diferentes (o desiguales), y que b sea mayor que uno y menor que el otro, lo expresaremos brevemente, sin miedo ante la resonancia de representaciones geométricas, así: b está situado entre los dos números a y c.*

2. *Si a y c son dos números diferentes, entonces hay siempre infinitos números b que están situados entre a y c.*
3. *Si a es un número determinado, entonces todos los números del sistema $\mathcal{R}$ se subdividen en dos clases, A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A_1 comprende todos los números a_1 que son menores que a, la segunda clase A_2 comprende todos los números a_2, que son mayores que a; el número a mismo puede ser atribuido a voluntad a la primera o a la segunda clase, y es entonces respectivamente el número máximo de la primera clase, o el mínimo de la segunda. En cualquier caso, la división del sistema $\mathcal{R}$ en dos clases A_1 y A_2 es tal que todo número de la primera clase A_1 es menor que todo número de la segunda clase A_2.* [Ded72, p. 3]

Además de estas propiedades, Dedekind expone que otra propiedad de gran importancia que posee el sistema de los números racionales es que es un sistema numérico bien ordenado, unidimensional, que geométricamente se extiende al infinito en dos sentidos opuestos.

Enseguida Dedekind realiza las siguientes consideraciones para la línea recta y su continuidad:

> *Si se establecen dos sentidos opuestos uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha y si se toman dos puntos cualesquiera p y q diferentes que pertenezcan a la línea recta entonces, o bien, p esta a la derecha de q y a su vez q esta a la izquierda de p, o viceversa.* [Ded72,p.4]

De acuerdo a esta diferencia de posiciones de estos puntos Dedekind establece las siguientes leyes para la línea recta:

1. *Si p está situado a la derecha de q, y q a su vez a la derecha de r, entonces p está situado también a la derecha de r; y se dice que q está situado entre los puntos p y r.*
2. *Si p y r son dos puntos diferentes, entonces hay siempre infinitos puntos q que están situados entre p y r.*

3. *Si p es un punto determinado de la recta L, entonces todos los puntos en L se subdividen en dos clases, P_1 y P_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase P_1 comprende todos los puntos P_1 que están situados a la izquierda de p, y la segunda clase P_2 contiene todos los puntos P_2 que están situados a la derecha de p; el punto p mismo puede atribuirse a voluntad a la primera o a la segunda clase. En cualquier caso la división de la recta L en dos clases o partes P_1 y P_2 es tal que cada punto de la primera clase P_1 está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase P_2*. [Ded72, p. 4]

Como se mencionaba anteriormente Dedekind trata de establecer una correspondencia uno a uno entre cada uno de los racionales y cada punto de la línea recta, pero al realizar esta correspondencia logra evidenciar que el sistema de los números racionales, no presenta la continuidad de la línea recta. En otras palabras podríamos decir que el dominio numérico de los racionales es discontinuo, pero como expone Dedekind:

> *Si el espacio es discontinuo no hay nada que nos impida hacerlo continuo llenando sus huecos con la creación de nuevos individuos, estos nuevos individuos serán los números irracionales*. [Ded72, p. 6]

Para la creación de los números irracionales, Dedekind introduce su célebre "cortadura" al considerar la división de los números racionales en dos clases tales que todo número de la primera clase es inferior a todo número de la segunda. Esta división de los números racionales se llama una "cortadura". Si las clases se designan mediante A_1 y A_2 entonces la cortadura se designa mediante (A_1, A_2). Puede decirse, según Dedekind, que cada número racional a produce una cortadura que posee la propiedad de que, entre los números de la primera clase, existe un número que es el mayor o que, entre los números de la segunda clase existe un número que es el menor. Inversamente, toda cortadura en los números racionales para los que existe el mayor de los números en la primera clase o el menor de ellos en la segunda, está determinada por un número racional.

Pero Dedekind añade que es fácil mostrar que existen infinidad de cortaduras que no están determinadas por números racionales. Por ejemplo, Si situamos en la primera clase todos los números racionales negativos y todos los números positivos cuyo cuadrado es inferior a 2 y en la segunda clase todos los demás números racionales positivos, entonces esta cortadura no está determinada por ningún número racional. Es decir, partimos al conjunto de los números racionales en dos subconjuntos A_1 y A_2 de manera que:

$$A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 < 2\}$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{Q}^+ \ / \ x^2 > 2\}$$

Para cada una de estas cortaduras, "creamos un nuevo número irracional α que está completamente definido mediante esta cortadura; deberíamos decir que el número α corresponde a esta cortadura o que la produce".

Luego Dedekind establece que a cada cortadura le corresponde uno y sólo un número determinado, racional o irracional y estos dos números son diferentes si y sólo si las cortaduras son diferentes.

A continuación obtiene una base sobre la cual fundamenta la ordenación de los números reales, para esto realiza una comparación entre dos cortaduras cualesquiera analizando todas las posibles relaciones que se pueden presentar entre estas.

Posteriormente, basándose en las propiedades expuestas anteriormente para los números racionales, Dedekind hace una extensión de estas para los números reales de la siguiente forma:

1. *Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \mu$, entonces también $\alpha > \mu$. Queremos decir que el número β está situado entre los números α y μ.*
2. *Si α y μ son dos números diferentes, entonces hay siempre infinitos números diferentes que están situados entre α y μ.*
3. *Si α es un número determinado, entonces todos los números del sistema $\mathbb{R}$ se subdividen en dos clases, A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A_1 comprende todos los números $\alpha_1 < \alpha$, la segunda clase A_2 comprende todos los números $\alpha_2 > \alpha$. El número α mismo puede atribuirse a voluntad a la primera o a la segunda clase, y es entonces, respectivamente, o el número máximo de la primera clase o el número mínimo de la segunda clase. En cualquier caso, la subdivisión del sistema $\mathbb{R}$ en las dos clases A_1 y A_2 es tal que cada número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2, y decimos, que esta división está determinada por el número α.*
4. *Si el sistema $\mathbb{R}$ de todos los números reales se subdivide en dos clases, A_1 y A_2 tales que cada numero α_1 de la clase A_1 es menor que cada numero α_2 clase A_2, entonces existe uno y sólo un número α por el cual esa división está determinada.* [Ded72, p. 10]

Con estas propiedades se completa el sistema de los números reales, la cuarta propiedad es la que demuestra la continuidad del sistema numérico real y a la vez permite establecer la biyección con los puntos de la línea recta. Veamos en efecto esto:

En primer lugar, la descomposición del sistema $\mathbb{R}$ en las dos clases $A_{1,}$ y A_2 produce a la vez una cortadura sobre los racionales $\left(\mathcal{A}_{1,}\mathcal{A}_2\right)$, definida de tal manera que en $\mathcal{A}_{1,}$ se hallan todos los racionales de la clase $A_{1,}$ y en $\mathcal{A}_2$ todos los racionales de A_2. Esta cortadura es generada por un número α. Lo que se quiere mostrar es que α produce la descomposición del sistema $\mathbb{R}$ en $A_{1,}$ y A_2. Efectivamente, sea $\beta < \alpha$, entonces, por la propiedad de densidad, existen infinitos números *c* tal que $\beta < c < \alpha$. Por tanto, c pertenece a A_1 y c pertenece a $\mathcal{A}_{1,}$. Y como $\beta < c$, entonces β pertenece a A_1, ya que todo miembro de A_2 es mayor que todo miembro de A_1. De la misma manera, se puede mostrar que si

$\beta > \alpha$, entonces β pertenece a A_2. Así se muestra que cualquier número $\beta \neq \alpha$ pertenece o bien a A_1 o bien a A_2, dependiendo de si es menor o mayor que α respectivamente. Y este número α es o bien el mayor de una clase o el menor de la otra, y evidentemente es el único que tiene esta propiedad.

3. REJILLA ANALÍTICA

De acuerdo a varios de los antecedentes históricos que mencionamos anteriormente podemos observar que sobresalen algunos conceptos que fueron importantes en el proceso de constitución de $\mathbb{R}$, los cuales servirán de base para la construcción de la rejilla analítica que utilizaremos para analizar los textos de cálculo escogidos. La rejilla analítica es la herramienta que nos permitirá identificar la forma en que los textos presentan la relación entre $\mathbb{R}$ y los siguientes conceptos:

3.1 INFINITO

Es necesario establecer de qué manera los textos presentan la diferencia entre el infinito de $\mathbb{Q}$ y el de $\mathbb{R}$**.** Además observar las concepciones de infinito que el texto maneja. Estos serán los aspectos que consideraremos en este trabajo.

3.2 CONTINUIDAD

Es preciso observar cómo los textos presentan el concepto de continuidad, ya que este es muy importante para la fundamentación de $\mathbb{R}$. Es decir, observar si los textos relacionan esta noción con fenómenos físicos, si se da de forma intuitiva o simplemente se presenta la definición habitual de continuidad. Además es necesario indagar sobre la forma como los textos desarrollan la discontinuidad, ya que este concepto también permitió la rigorización de $\mathbb{R}$**.** Con respecto a este concepto analizaremos los siguientes aspectos:

- Nociones y concepciones
- Funciones continuas
- Discontinuidad

3.3 LÍMITES Y SUCESIONES

Analizar la relación entre la presentación de $\mathbb{R}$ y los conceptos de límite y sucesión. Con respecto a estos conceptos se analizarán los siguientes aspectos:

- Definiciones, presentación y concepciones.
- Representaciones
- Propiedades

3.4 NÚMERO REAL

Es conveniente examinar la forma cómo los textos realizan la presentación del concepto de número real, si lo hacen de forma axiomática o conjuntista, y además si muestran de alguna forma la complejidad de este concepto y la importancia de este para el estudio del cálculo. En consecuencia, se observarán los siguientes aspectos:

- Presentación del concepto
- Propiedades de $\mathbb{R}$

4. ANÁLISIS DE TEXTOS

4.1 EL CÁLCULO. LOUIS LEITHOLD. SÉPTIMA EDICIÓN. OXFORD UNIVERSITY. 1994

INTRODUCCIÓN

El Cálculo 7 o EC7 como lo denomina el autor, es un libro publicado por la editorial *OXFORD UNIVERSITY PRESS* en 1994 y posee seis ediciones anteriores. Además es un libro que puede ser utilizado tanto por estudiantes de matemáticas, como por estudiantes de ingeniería, ciencias sociales y ciencias físicas.

El texto está compuesto de catorce capítulos los cuales se distribuyen en dos partes: los capítulos 1-9 están destinados al estudio de funciones de una variable y series infinitas; los capítulos 10-14 se destinan al estudio de vectores y funciones de más de una variable. Además el libro presenta en su parte final los *apéndices* que son espacios destinados a que el estudiante recuerde los temas de matemáticas previos al cálculo (números reales, álgebra, trigonometría y geometría analítica) y las secciones suplementarias que se destinan a reforzar la parte teórica de algunos capítulos y a realizar las demostraciones más complicadas.

Una de las principales características que podemos ver en este libro es la gran variedad de ejemplos desarrollados en forma detallada y ejercicios propuestos, los cuales permiten al estudiante profundizar en los temas expuestos en cada uno de los capítulos. Debido a la disponibilidad de tecnología moderna (computadores, calculadoras manuales, calculadoras graficadoras) se introduce en el texto una serie de ejemplos y ejercicios con los cuales se pretende involucrar las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Aunque estas son herramientas que en ocasiones permiten visualizar y resolver ejercicios matemáticos, es necesario que el estudiante conozca los procesos que estos instrumentos realizan.

La utilización de reseñas históricas es otro de los aspectos a destacar en el presente texto. En esta parte se hace referencia a grandes matemáticos que aportaron en el desarrollo del cálculo y el análisis.

Cada uno de los capítulos inicia con una visión preliminar y está divido en varias secciones. La visión preliminar tiene como objetivo indicarle al estudiante qué temas previos debe dominar para empezar el estudio del capítulo, además esta visión también proporciona una idea de los temas que serán tratados en cada una de las secciones.

Para el tratamiento de cada una de las secciones se establecen las definiciones y los teoremas necesarios, algunos de ellos son demostrados en el desarrollo de la sección y otros se demuestran en secciones suplementarias que se encuentran al final del texto.

Después de exponer las definiciones y los teoremas se desarrollan ejemplos en los cuales se ponen en práctica. Cada uno de los ejemplos es resuelto en forma detallada, mostrando los procedimientos y teoremas utilizados en la solución, algunos de ellos se apoyan en las representaciones gráficas hechas con calculadoras graficadoras y con software diseñado para realizar tareas matemáticas. Finalmente se propone una gran variedad de ejercicios de tipo algebraico y de aplicación que se resuelven en forma similar a los ejemplos.

Enseguida se expondrá el análisis realizado al apéndice $A1$ y a los capítulos 1 y 8 (secciones 8.2 y 8.3), en los cuales se presentan los temas concernientes a este trabajo. El análisis se realizará teniendo en cuenta el orden de las nociones presentadas en la rejilla analítica y los elementos que se presentan en este trabajo.

Temas de matemáticas previas al cálculo

Análisis del apéndice $A1$

Números reales y desigualdades

El texto presenta implícitamente el dominio de los números reales como una estructura de campo, aunque se dedica únicamente a resaltar el hecho de que las operaciones de suma y producto cumplen la propiedad de la cerradura. En esta presentación no se hace alusión a las propiedades que cumplen estas operaciones, por ejemplo la conmutativa, la asociativa, modulativa, etc. Utilizando estas dos operaciones se definen las operaciones sustracción y división. Haciendo uso de la existencia del elemento inverso, para la suma, define la sustracción y mediante la existencia del recíproco para la multiplicación (para todo número distinto de cero) se define la división. Enseguida el autor expone que el sistema de los números reales se puede describir completamente utilizando un conjunto de axiomas; pero no realiza la presentación de ellos. Es importante destacar que en esta parte el autor afirma que mediante la utilización de estos axiomas es posible deducir otras propiedades de los números reales.

El libro enuncia que cualquier número real se puede clasificar como racional o irracional y define los números racionales de la siguiente forma:

> *Un número racional es aquel que se puede expresar como la razón de dos números enteros. Esto es, un numero racional es de la forma p/q, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$.*

Debemos llamar la atención en el hecho de que fueron muchos los factores que influyeron para la conformación de los números racionales como los conocemos en la actualidad.

Por ejemplo los griegos, solamente admitían los números naturales, para ellos los números racionales no existían como números, aunque sí realizaban comparación entre números naturales utilizando el concepto que en la actualidad conocemos como razón. Esta representaba la comparación entre magnitudes del mismo género, que además admitían una unidad de medida común.

En el libro V de los *Elementos,* Euclides desarrolla su teoría sobre proporciones de números naturales. Al simbolizar la noción de razón de la forma $p : q$, se puede vislumbrar un antecesor de lo que hoy representamos como $p \div q$ o p/q en términos numéricos; pero cabe destacar que estos dos procesos no son lo mismo, ya que, como es conocido, los griegos no concebían los números racionales como el cociente entre dos naturales, mientras que la expresión p/q en la actualidad es resultado de un proceso mediante el cual siempre se obtiene un único valor numérico.

El texto también expone que los números racionales consisten de los números *enteros* (positivos, negativos y cero), las *fracciones* positivas y negativas, los números *decimales finitos* positivos y negativos y los números *decimales infinitos periódicos* positivos y negativos.

Si analizamos los ejemplos que se esbozan en el texto podemos resaltar que cada uno de los números racionales se puede representar de diferentes maneras. Estas diferentes formas de representación de los racionales le sirven al autor para definir los irracionales como los números que tienen una expansión decimal infinita no periódica.

En este punto vale la pena resaltar que existen aspectos relevantes relacionados con los números racionales, que son indispensables para que el lector logre percibir la importancia de este sistema numérico en la fundamentación de los reales. Por ejemplo, se debe comprender que el conjunto de los racionales es un dominio numérico bien fundamentado en el cual se pueden realizar las cuatro operaciones básicas, que satisfacen ciertas propiedades, pero además de esto que es un conjunto denso (entre dos racionales existen infinitos racionales) y que es ordenado por la relación "menor o igual" $(\leq)$. También es importante que se tenga en cuenta que la expresión decimal de los números racionales es una consecuencia de los resultados de la convergencia de series, que se logra históricamente con la fundamentación de R.

Para introducir los números irracionales se plantea que todos los números reales que no son racionales se denominan *números irracionales* y que estos son los *decimales infinitos no periódicos* positivos y negativos. Es posible que por desarrollar el concepto de número real en un apéndice no se muestren las grandes diferencias que existen entre $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$; por ejemplo que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable mientras que $\mathbb{I}$ no lo es, ni tampoco que a pesar de que los dos conjuntos son densos, con ninguno es posible alcanzar la continuidad que tiene la línea recta y que por tal motivo es indispensable reunir los dos.

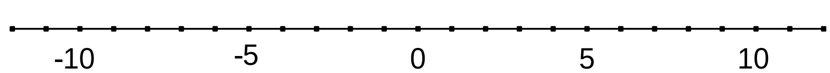
Posteriormente se especifica que en algunas ocasiones se utilizará terminología y notación de conjuntos. En este aspecto se da una idea intuitiva de lo que puede ser un conjunto, se define lo que es un subconjunto y algunas de las operaciones que se pueden realizar entre ellos (unión, intersección). También se mencionan algunas posibles formas que se utilizan para describirlos.

El concepto de conjunto partiendo de la experiencia parece muy natural, podemos concebir "grupos" o "colecciones" de objetos; pero este es un concepto que en matemáticas ha causado muchos problemas. En la actualidad para realizar la presentación de muchos conceptos matemáticos se usa la teoría de conjuntos, la cual fue creada por el matemático G. Cantor, pero la noción de conjunto intuitiva que él manejaba llevó a grandes paradojas y a la necesidad de revisar los fundamentos sobre los que estaba soportado el edificio matemático.

El texto hace uso de la terminología de conjuntos para presentar la definición de intervalo, pero antes de formularla menciona que los elementos del conjunto $\mathbb{R}$ pueden ordenarse utilizando la relación menor que ($<$) o mayor que ($>$). En esta parte el libro establece las definiciones de lo que significan los símbolos $>$,$<$, $\leq$ y $\geq$ para dos elementos a y b que pertenezcan a $\mathbb{R}$**.** Aquí también se muestran algunos ejemplos para evidenciar el sentido de las definiciones y establecer algunas propiedades de las desigualdades para $\mathbb{R}$**.** Además se trata de especificar lo que significa cada una de ellas utilizando un lenguaje de fácil comprensión para el estudiante. Esto se debe, posiblemente, a que para el autor estos conceptos son previos al cálculo y son conocimientos que el estudiante debe haber adquirido en el transcurso de su educación media, aunque sabemos que en nuestro contexto esto generalmente no es cierto.

La parte final de este apéndice trata un tema que desempeñó un papel muy importante en la formalización del sistema de los números reales, se trata de la biyección que se puede establecer entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la línea recta.

Para esta parte el texto presenta la siguiente interpretación geométrica:



Toma una línea recta con un punto *origen,* a este punto le asigna el numero O, luego selecciona una unidad de medida arbitraria y a cada uno de los enteros positivos n se le asocia el punto situado a n unidades de distancia y a la derecha del origen y cada entero negativo $-n$ se asocia con un punto de la línea recta situado a n unidades de distancia del origen, pero esta vez hacia la izquierda, por ejemplo, 5 se representa por el punto que está a 5 unidades a la derecha del punto origen y -5 se representa por el punto que está ubicado 5 unidades a la izquierda del origen.

Para relacionar cada uno de los números racionales con puntos de la línea recta se plantea que se puede realizar una división en partes iguales de segmentos cuyos extremos son puntos que representan números racionales, por ejemplo si dividimos el segmento de 0 a 1 en diez partes iguales, el extremo derecho de la primera subdivisión se asocia con el número racional $1/10$, el extremo derecho de la segunda se asocia con $2/10$, y así sucesivamente.

En relación con los números irracionales $\mathbb{I}$ se menciona que las construcciones geométricas pueden utilizarse para determinar puntos que corresponden a ciertos números irracionales, tales como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5},$ etc. Y los puntos que corresponden a otros números irracionales pueden determinarse empleando aproximaciones decimales. Por ejemplo, el punto que corresponde al número π puede aproximarse empleando algunos dígitos de la representación decimal 3.14159 ...

En esta parte podemos realizar una reflexión histórica de algunas cuestiones importantes que permitieron establecer la biyección entre el conjunto de puntos de la línea recta y el conjunto de números reales. Por ejemplo, la noción de continuidad y en especial la continuidad de la línea recta, la cual como mencionamos en capítulos anteriores fue establecida por Dedekind como un axioma. De otro lado, la construcción geométrica de los números irracionales no es algo trivial. Si bien para las raíces cuadradas se puede realizar una construcción geométrica, no sucede así con la mayoría de números irracionales y este fue un asunto que históricamente formó parte del desarrollo del concepto de número.

Cabe resaltar que en esta parte el autor realiza una observación importante, pues destaca que gracias al axioma de completitud de los números reales, se puede garantizar que a todo número irracional le corresponde un único punto de la recta y que cada punto que no puede asociarse con un racional, se puede asociar con un irracional.

Debido a la correspondencia que se puede establecer entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la línea recta, es que, generalmente, esta se conoce como recta real o recta numérica real.

Finalmente el apéndice termina con los conceptos de intervalo y valor absoluto, temas que serán tenidos en cuenta para el estudio de contenidos posteriores del texto.

Análisis del capítulo 1
Limites de funciones

El capítulo 1 del libro es destinado al estudio de este concepto; el capítulo se divide en 10 secciones, las secciones 1 – 3 se dedican al estudio del concepto de función, las operaciones entre funciones y su aplicación para modelar situaciones del mundo real. Las secciones 4 - 7 se emplean para realizar el estudio del concepto de límite y todas sus propiedades y finalmente las secciones 8-10 se dedican al estudio del concepto de continuidad de una función.

En la sección 1.1 el libro comienza trabajando el tema de las funciones. El trabajo se desarrolla específicamente con funciones de variable real y valor real. Primero se presenta el concepto de función como una relación o correspondencia entre dos conjuntos de números reales X y Y, donde a cada elemento del conjunto X le corresponde un único elemento del conjunto Y. También se define una función como el conjunto de pares ordenados de números (x, y) tales que no existen dos pares ordenados diferentes con la misma primera coordenada. Además se define el dominio, el rango, la noción de variable dependiente e independiente y se menciona que al matemático Suizo Leonard Euler (1707 – 1783) debemos la notación actual de las funciones.

Se complementa esta parte con una serie de ejemplos en los cuales se calcula el valor de diferentes tipos de funciones en algunos números reales. Por estar trabajando con funciones de variable real y valor real, necesariamente al evaluar la función en un número real determinado se debe obtener otro número real el cual puede ser racional o irracional, lo cual en la actualidad para nosotros es algo evidente, pero si retrocedemos en el tiempo podemos notar que sin una formalización rigurosa del sistema numérico real, el concepto de función no tendría una definición formal, puesto que como hemos mencionado antes, los números racionales estaban bien fundamentados aritméticamente, pero no sucedía lo mismo con los irracionales y además el desarrollo de estos conceptos, sucedía simultáneamente.

Finalmente en esta sección se presenta la definición del concepto de gráfica de una función, concepto de gran importancia ya que para complementar la parte teórica se presentan las gráficas de las funciones y este es un elemento que didácticamente puede servir mucho al estudiante para visualizar las propiedades de las funciones.

En la sección 1.2 se definen las operaciones que se pueden realizar entre funciones (suma, resta, multiplicación, división y composición) y se realizan los respectivos ejemplos de cada una de ellas, además se menciona que las funciones que el texto trabaja son las funciones algebraicas, que son aquellas formadas por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y una función constante. Además el texto trabaja con las funciones trascendentes (funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas). La sección 1.3 se dedica a mostrar que es posible modelar situaciones del mundo actual a través de funciones matemáticas probando así que el estudio del cálculo es de gran importancia y que tiene aplicación en muchos campos del conocimiento.

Al finalizar cada una de estas secciones se presenta un número importante de ejercicios de diferente grado de dificultad que permiten al estudiante reforzar la parte teórica y práctica.

La primera idea para realizar la introducción del concepto de límite está basada en un análisis gráfico de diferentes funciones, desarrollado en la sección 1.4. Las observaciones que se derivan del análisis gráfico se complementan analíticamente con el uso de desigualdades. En esta sección podemos notar nuevamente la importancia didáctica de las gráficas para comprender algunos conceptos, pero también podemos darnos cuenta de que solamente con estas herramientas no es suficiente. Se hace necesario, como sucedió en la historia, sacar a estos conceptos de su contexto geométrico o físico y realizar un análisis algo riguroso para que el estudiante entienda realmente el concepto de número real, en cuyo entramado conceptual está la noción de límite.

Por ejemplo se hace un análisis de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

Se puede observar que esta función está definida para cualquier número real diferente de 1. Lo que se pretende es tener una idea intuitiva del límite. Para ello se analizan los valores que toma $f(x)$ cuando x se aproxima cada vez más a 1 por valores tanto mayores como menores que 1, pero cercanos a él, y el lector puede notar que la función $f(x)$ se aproxima cada vez más a cinco

Nuevamente cabe destacar la importancia de la formalización del sistema numérico real, ya que sin él no sería posible tener una definición precisa del concepto de límite. Esto se debe a que en este caso la función intuitivamente tiene como límite 5 cuando x se aproxima a uno, pero no todas las funciones tienen como límite un valor numérico racional. También existen funciones cuyo límite puede ser un valor irracional o en ocasiones no existe dicho límite. Por ejemplo analicemos los siguientes límites:

- $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}}$
- $\lim_{x \to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} -1 \; si \; x < 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \\ 1 \; si \; x > 0 \end{cases}$

En el primer caso podemos observar que al calcular el límite cuando x se aproxima 4 se obtiene como resultado el número irracional -$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ y en el segundo caso al calcular el límite cuando x se aproxima a 0 podemos ver que el límite no existe.

Todos los ejemplos y ejercicios propuestos en esta sección tienen como objetivo proporcionar una idea intuitiva del límite basándose sobre todo en recursos gráficos y algunos de ellos con aplicación a situaciones reales.

Los instrumentos tecnológicos como las calculadoras graficadoras o el software, utilizados para realizar tareas matemáticas, son de gran utilidad para resolver este tipo de ejercicios, aunque se debe tener en cuenta que si no se trabajan adecuadamente pueden causar errores, es por esto que el autor en algunos ejemplos resalta algunos procedimientos que pueden contribuir para que esto no suceda. También es importante que el lector sea consciente de la manera en que operan estos elementos para que pueda confrontar los resultados obtenidos.

La siguiente sección trata el concepto de límite de una forma más rigurosa. Aquí se realiza la definición del concepto utilizando la noción de $\varepsilon - \delta$ que fue en principio definida por el francés Agustín Louis Cauchy y establecida como hoy la reconocemos, por Karl Weierstrass (1815 - 1897). Sin embargo el matemático francés fue de los primeros en asignarle un significado matemático a la frase *"$f(x)$ se acerca arbitrariamente a un valor L, cuando x se aproxima a un valor a".*

1.5.1 Definición de límite de una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L, lo que se escribe como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la siguiente proposición es verdadera:
Dado cualquier $\varepsilon > 0$, no importa cuán pequeño sea, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Igual que en las otras secciones se realiza un apoyo gráfico para la interpretación. En seguida se presenta un ejemplo en el cual se hace uso de algunas propiedades de los limites. Finalmente se presentan un número considerable de teoremas que son herramientas que permiten al estudiante, mediante su aplicación, calcular límites de diferentes funciones, por ejemplo:

Ejemplo 2 Pág. 44

Calcule $\lim_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5)$, y cuando sea apropiado, indique los teoremas que se aplicaron.

Solución

$\lim_{x\to 3}(x^2+7x-5)=\lim_{x\to 3}x^2+\lim_{x\to 3}7x-\lim_{x\to 3}5$

$=\lim_{x\to 3}x\,.\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}7\,.\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}5$

$=3.3+7.3-5$

$=9+21-5$

$=25$

Algunos de estos teoremas son demostrados utilizando la definición de límite y otros son demostrados en la sección suplementaria del capítulo. Uno de los teoremas importantes de esta sección es el de unicidad: si el límite de una función existe este valor es único, que se demuestra rigurosamente en la sección suplementaria. Al finalizar la parte teórica y práctica se plantean los ejercicios en los cuales se debe aplicar la definición, otros son de utilización de la calculadora y de análisis en los cuales el estudiante debe demostrar algunas proposiciones sobre funciones que no están definidas para algún valor real.

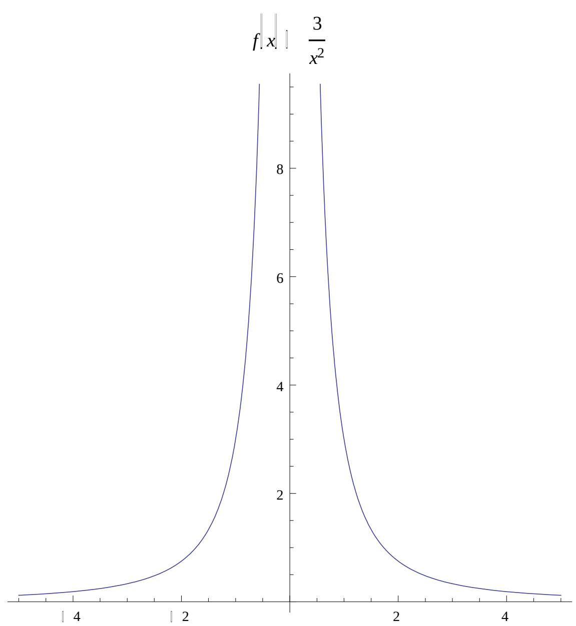
Posteriormente se estudia el concepto de límite lateral, es decir qué sucede con la función cuando x se aproxima por valores mayores que un valor dado (valores por la derecha) y por valores menores que este mismo valor (valores por la izquierda). Este análisis es adecuado ya que inicialmente el concepto de límite es estudiado para funciones en las cuales la variable independiente está definida en un intervalo abierto que contiene el valor dado, pero existen funciones en las cuales la función no está defina para valores menores o mayores que cierto valor, luego es necesario estudiar qué sucede con el límite tanto por la derecha como por la izquierda. Este tema es importante porque también permite analizar el comportamiento de funciones definidas a trozos y proporciona el siguiente teorema que permite determinar si el límite de una función existe o no.

1.6.3 Teorema:

El $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe y es igual a* L *si y sólo si* $\lim_{x\to a^{+}} f(x)$ *y* $\lim_{x\to a^{-}} f(x)$ *existen y son iguales a* L.

Los ejemplos y ejercicios que se desarrollan en esta sección se basan en su gran mayoría en funciones definidas a trozos y en los cuales se debe determinar la existencia del límite.

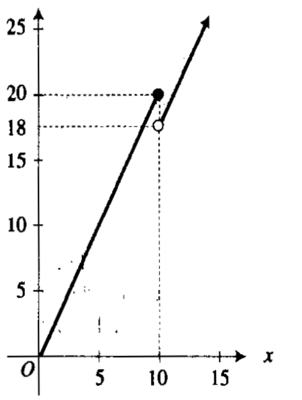
Para concluir el estudio de límites, se estudian los límites infinitos, que es el estudio de funciones cuyos valores crecen o decrecen sin límite cada vez que la variable independiente se aproxima a un valor fijo dado. Si la función crece o decrece sin límite se dice que, el límite de la función es igual a +∞ o -∞ respectivamente, cabe resaltar que el límite no existe ya que los símbolos +∞ y -∞ no son números reales, son símbolos que permiten describir el comportamiento de la función. Un ejemplo de este tipo de funciones es el siguiente:



En este ejemplo el apoyo gráfico es fundamental ya que analizándola se puede ver que los valores de la función crecen sin límite cuando x se aproxima a cero por la izquierda y por la derecha.

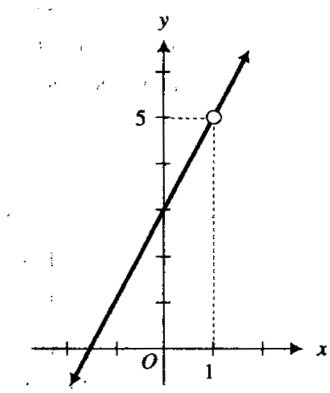
4.1.1 Continuidad. La última parte del capítulo 1, presenta el tema de la continuidad de una función. Se comienza trabajando la continuidad de una función en un punto dado, para ello se trabajan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1



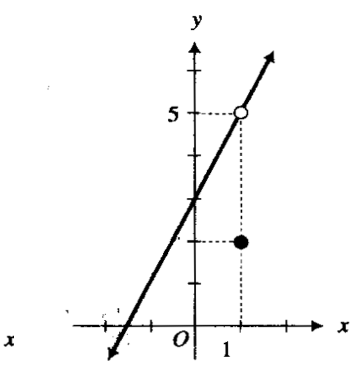
$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

Ejemplo 2



$f(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$

Ejemplo 3



$F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

La gráfica de la función del ejemplo 1 se rompe en el punto donde $(10, 20)$, entonces $f(x)$ es *discontinua* en $x = 10$, esta discontinuidad se presenta porque el límite cuando x tiende a 10 no existe. La gráfica de la función del ejemplo 2 se rompe en el punto $(1, 5)$, esto se debe a que la función no está definida para el valor $x = 1$, es decir $f\ (1)$ no existe, sin embargo el límite cuando x tiende a 1 si existe, luego $f(x)$ es discontinua en el punto $x = 1$. Gráficamente podemos ver que en el ejemplo 3, $f\ (1) = 2$ y si calculamos el límite de esta función cuando x se aproxima a 1 obtendremos que el valor del límite es 5, en este caso el valor del límite es diferente al valor de la función en el punto $x = 1$ y por tanto se puede concluir que la función es discontinua en $x = 1$.

En los ejemplos el recurso gráfico es indispensable, ya que realizando el análisis de las diferentes gráficas el texto introduce los conceptos de discontinuidad y continuidad. La discontinuidad la asume como las rupturas que presentan las gráficas en algunas partes. Partiendo de este hecho asume que si la gráfica de la función no se rompe en ninguna parte entonces la función es continua.

Alcanzamos a notar también que en esta introducción que hace sobre este tema, se asume que el lector está familiarizado de alguna forma con la palabra *continuidad* e incluso con la palabra *discontinuidad*. Muy seguramente el autor asume esta idea a partir de las concepciones intuitivas que todos poseemos de ellas y que podemos asociar a la continuidad de una función por medio de una curva que no presenta saltos o rupturas. Posiblemente por estas concepciones no se destaca el papel que juega esta noción en el desarrollo de los conceptos del cálculo.

Retomando nuevamente la historia de las matemáticas, podemos ver que no fue sino hasta finales del siglo XIX que fue depurado este concepto.
Aristóteles por ejemplo definía la continuidad de la siguiente forma:

> *"Lo continuo es una subdivisión de lo contiguo[1]; así, por ejemplo, digo que una cosa es continua con otra cuando sus límites que se tocan entre sí llegan a ser uno y lo mismo y como indica la palabra, se contienen entre sí, pero si los extremos son dos no puede haber continuidad" [Ari98, p.244].*

---

[1] Según Aristóteles, algo es sucesivo, de algo cuando se halla después de él en algún respecto sin que haya nada más en medio de la misma clase. Cuando se trata de cosas, el hecho de estar una sucediendo a la otra produce la contigüidad, el ser contiguo, o contacto. Dos cosas están en contacto cuando sus límites exteriores coinciden en el mismo lugar. Cuando hay contacto, hay contigüidad, pero no a la inversa (como sucede con los números, que son contiguos, pero no se hallan en contacto). La contigüidad es una especie de la que la continuidad es un género. «Los extremos de cosas pueden estar juntos sin necesariamente ser uno, pero no pueden ser uno sin estar necesariamente juntos». Dos cosas son continuas cuando sus límites son idénticos, a diferencia de dos cosas contiguas, cuyos límites están juntos

De esta definición podemos ver que para Aristóteles la continuidad involucra dos "cosas" que no se pueden ver de forma individual puesto que así ya no conformarían un algo continuo. Esta definición presenta una dificultad lógica y epistemológica que no permitió a los griegos definir lo continuo como un compuesto de puntos; dificultad que se mantuvo hasta finales del siglo XIX. Dedekind por ejemplo cuestionó el significado de la continuidad ya que muchos de los conceptos del cálculo se basaban en esta noción; pero al momento de realizar las demostraciones, en su gran mayoría, acudía a representaciones geométricas o a argumentos tomados de la geometría. Es innegable el papel de las representaciones geométricas como herramientas didácticas válidas, pues permiten que los estudiantes se aproximen a conceptos matemáticos complejos, pero debemos ser conscientes de las limitaciones que pueden tener ellas para que se logre llegar a conceptos abstractos como el de número real.

Para Dedekind era indispensable establecer una definición de continuidad basada únicamente en argumentos aritméticos y dejar de lado las intuiciones geométricas y físicas para realizar demostraciones. Pero para lograr esto era necesario fundamentar matemáticamente el continuo geométrico.

Volviendo nuevamente al texto de Leithold, la definición que se da de continuidad de una función en un punto, es la siguiente:

> ***Definición de función continua en un punto***
>
> *Se dice que la función f es* ***continua*** *en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:*
>
> $(i) f(a)$ *existe*
>
> $(ii) \lim_{x \to a} f(x)$ *existe*
>
> $(iii) \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
>
> *Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen, entonces se dice que la función f es* ***discontinua*** *en a.*

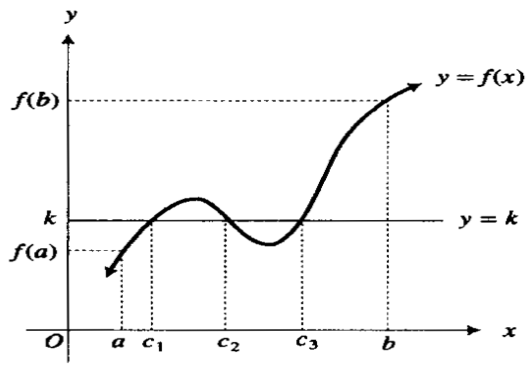
Como podemos observar, esta definición se basa en tres aspectos esenciales; la existencia del valor de la función en el punto dado, la existencia del límite de la función en el punto y finalmente la igualdad que debe existir entre el valor de la función y el valor del límite.

En páginas anteriores mencionamos la importancia de los números reales al evaluar las funciones en un punto y también destacamos su importancia para la definición del concepto de límite. Estos conceptos están estrechamente relacionados con la continuidad y se lograron a partir de la formalización de un sistema numérico completo.

Inmediatamente después se enuncian algunos teoremas que son instrumentos para que el lector pueda determinar si una función es o no continua en un valor real dado y se proponen los ejercicios correspondientes para complementar lo expuesto en la sección.

Luego se analiza un tema que es importante para el estudio de algunos teoremas esenciales del cálculo, se trata de la continuidad de una función en un intervalo (abierto, cerrado o semiabierto). En esta parte se presentan las definiciones de cada una de estas nociones, con su respectivo ejemplo de aplicación. A esta altura el lector debe dominar gran cantidad de conceptos como número real, intervalo, límite, continuidad de una función en un punto, etc.

Enseguida se presenta el teorema del valor intermedio, destacándolo como un importante teorema para el estudio de la continuidad de una función en un intervalo cerrado. Este es un ejemplo de los teoremas en los que se hace necesario conocer el significado de la continuidad en un intervalo; pero se manifiesta que no se hace una demostración porque esto va más allá de los objetivos del libro. Lo que sí se hace es la interpretación geométrica de lo que significa el teorema.



De acuerdo a la gráfica se plantea que el teorema del valor intermedio dice que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debe por lo menos cortar en un punto a cada recta $y = k$ que está entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$. Enseguida de esta interpretación se desarrollan los ejemplos que hacen evidente su utilidad. Nosotros creemos que es conveniente llamar la atención en el hecho de que esta propiedad se puede demostrar sin acudir a recursos gráficos o geométricos. Así mismo se debe resaltar que este significativo teorema jugó un papel trascendental en el proceso de conformación de los números reales.

Antes de Cauchy y Bolzano no era necesaria una prueba aritmética de este teorema, ya que geométricamente se consideraba evidente.

Fue gracias a los trabajos de estos dos matemáticos que se planteó la necesidad de una demostración matemática.

Cauchy presenta la siguiente demostración:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[A, B]$, si $f(A) < 0 \; y \; f(B) > 0$, entonces la ecuación:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

Se satisface para uno o más valores de la variable x entre $A \; y \; B$.

En su prueba, Cauchy comienza por dividir el intervalo $[A, B]$ en m partes, donde m es un número mayor que 1; obteniendo de esta manera la siguiente sucesión finita:

$$A,\ A+\frac{h}{m},\ A+\frac{2h}{m},\cdots,A+\frac{(m-1)h}{m},B$$

Y su correspondiente sucesión de ordenadas:

$$f(A),\ f\left(A+\frac{h}{m}\right),f\left(A+\frac{2h}{m}\right),\cdots,f(B);\ donde\ h=B-A$$

Evidentemente, esta última sucesión debe contener dos valores sucesivos con signos diferentes. Llámese a las abscisas de estos valores A_1, B_1. Luego sobre este nuevo intervalo $[A_1, B_1]$ Cauchy efectúa la misma operación anterior, obteniendo así una nueva sucesión:

$$A_1,\ A_1+\frac{h}{m^2},\ A_1+\frac{2h}{m^2},\cdots,B_1$$

Y su correspondiente sucesión de ordenadas:

$$f(A_1),\ f\left(A_1+\frac{h}{m^2}\right),\ f\left(A_1+\frac{2h}{m^2}\right),\cdots,f(B_1)$$

Con el mismo argumento, debe haber dos valores que toman signos contrarios: llámense A_2, B_2 a las abscisas correspondientes. Cauchy itera ese proceso indefinidamente puesto que si en algún momento se detuviera habría encontrado el número que satisface la ecuación (1). Si éste no fuera el caso se obtendrían dos sucesiones:

$$A, A_1,\ A_2,\cdots,A_n,\cdots$$

y

$$B, B_1, B_2,\cdots,B_n,\cdots$$

La primera creciente y la segunda decreciente, ambas acotadas, por encontrarse cada uno de sus elementos en el intervalo $[A, B]$. Cauchy afirma que estas sucesiones deben converger a un número real C, (ambas al mismo número, por la manera en que han sido construidas). Luego utiliza la continuidad de la función para afirmar que la sucesión de valores:

$$f(A), f(A_1), f(A_2), \cdots, f(A_n), \cdots$$

y

$$f(B), f(B_1), f(B_2), \cdots, f(B_n), \cdots$$

Convergen ambas al valor $f(C)$, y por conservar ambas signos distintos entonces

$$f(C) = 0$$

Si realizamos un análisis detallado de esta prueba podemos ver que surgen algunos problemas, ya que como lo hemos dicho anteriormente hasta esa época no se había fundamentado R de una forma rigurosa. Por ejemplo podemos observar que Cauchy comienza dividiendo un intervalo cerrado en un número n de partes donde n es mayor que 1 obteniendo un par de sucesiones finitas, la primera corresponde a la división del intervalo y la segunda a la sucesión de ordenadas, realizando indefinidamente este proceso obtiene dos sucesiones una creciente y otra decreciente ambas acotadas por pertenecer cada uno de sus elementos al intervalo que fue particionado. Por ser ambas sucesiones de signos contrarios Cauchy afirma que estas deben converger a un mismo valor real c . Nuevamente se destaca que no es posible garantizar la existencia de este valor puesto que no había hasta ese momento una definición precisa de continuidad y tampoco una formulación precisa del conjunto de los números reales. El hecho importante es que Cauchy hace uso de la propiedad de que toda sucesión monótona y acotada es convergente. Pero hoy sabemos que sólo se satisface si el espacio es completo, es decir Cauchy asume la completitud de los números reales y hasta ese momento este hecho no se ha establecido de forma rigurosa.

Retomando nuevamente el texto, el capítulo finaliza estudiando la continuidad de las funciones trigonométricas, para ello el texto comienza enunciando el teorema de *estricción* destacando su importancia para demostrar el siguiente teorema:

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{t} = 1$$

que es de gran utilidad al momento de trabajar con funciones trigonométricas.

El teorema de estricción también es indispensable para la demostración de otras nociones del cálculo desarrolladas en capítulos posteriores.

La prueba de este resultado se presenta en la sección suplementaria del capítulo. Además se presentan otros teoremas relacionados con funciones trigonométricas, algunos de ellos son demostrados utilizando los conceptos tratados en el capítulo y los demás son propuestos como ejercicios tal vez con el objetivo de que el estudiante desarrolle las técnicas de demostración y que tome conciencia de la importancia de la prueba en matemáticas.

4.1.2 Sucesiones y series. En el capítulo 8, cuyo objetivo principal es aproximar funciones mediante series de potencias, se dedican las secciones 8.2 – 8.6 al estudio de los conceptos de sucesión y series infinitas, nosotros nos centraremos en el análisis de la sección 8.2, la cual presenta los temas que son de nuestro interés en la fundamentación de $\mathbb{R}$.

En la sección 8.2 el libro parte del hecho de que el lector debe conocer o tener una idea de lo que es una sucesión.

Consideramos que en esta parte se asume que el estudiante en la educación media debe haber tenido alguna relación con el tema o tal vez debe tener una idea intuitiva solamente basada en el significado de la palabra.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente se muestran los siguientes ejemplos para la noción de sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10 \text{ y}$$
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$$

Realizando un análisis de estos dos ejemplos se puede ver que un conjunto de números que forma una sucesión puede tener un número finito o infinito de términos. En el primer caso la sucesión se denomina finita, en caso contrario se denomina infinita.

Después de esta breve introducción el libro presenta la definición de *función sucesión:*

8.2.1 Definición de función sucesión

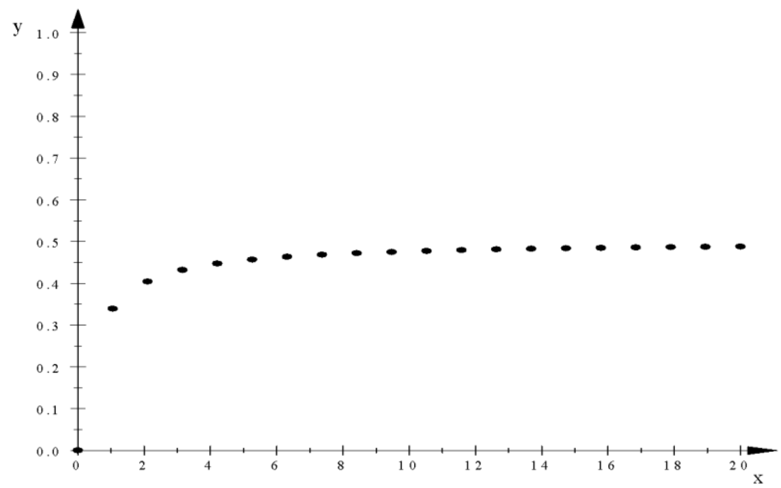
Una función sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$*, de todos los números enteros positivos*

Designando con el nombre de elementos a los números que conforman el contradominio de la función sucesión.

Es en esta parte de la sección que el autor define una *sucesión* como los elementos de una función sucesión listados en orden. En seguida se presentan los ejemplos correspondientes, en los cuales se encuentran algunos elementos del contradominio utilizando los primeros números del dominio, se destaca en estos ejemplos nuevamente el apoyo gráfico, sobre todo el autor hace énfasis en el uso de calculadora graficadora para visualizar las características de la función sucesión, que en forma similar a una función de variable real y valor real es posible graficarla, solamente que cuando realizamos la gráfica de una función sucesión no obtenemos una curva continua. Por ejemplo para la sucesión:

$$f(n) = \frac{n}{2n+1},\ n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Obtenemos la siguiente gráfica



También el texto da una definición para la igualdad entre sucesiones de la siguiente forma:

> *Se dice que la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ es igual a la sucesión $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ si y sólo si $a_i = b_i$ para todo número entero positivo i.*

Es indispensable tener clara esta idea ya que al ser una sucesión un ordenamiento de elementos puede suceder que dos de ellas tengan los mismos elementos, pero no necesariamente son iguales. Por ejemplo:

> ***Ejemplo ilustrativo 3, pág. 649***
>
> *La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tiene como elementos los recíprocos de los números enteros positivos*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

La sucesión para la cual

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{n+2} & si\ n\ es\ par \\ 1 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

tiene como elementos

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots$$

Los elementos de las sucesiones anteriores son los mismos, sin embargo, las sucesiones no son iguales

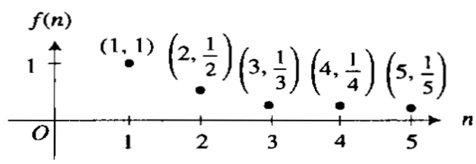


FIGURA 2

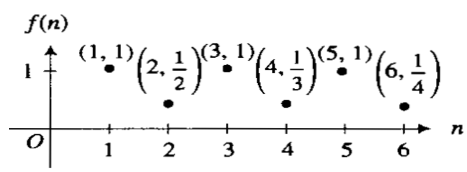


FIGURA 3

Un aspecto importante que se presenta en esta sección es que todos los elementos de una sucesión se pueden representar sobre una recta numérica, sabemos que esto no podría ser posible sin antes tener una idea clara de la continuidad de la recta, tema que fue esclarecido por Dedekind.

Luego se presenta la definición de límite de una sucesión:

8.2.2 Definición del límite de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite L si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero y $n > N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$ y se escribe $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$.

Esta definición es muy similar a la definición de límites al infinito, sin embargo en la definición de límite al infinito la función está definida para todos los números reales mayores que un cierto número real**,** mientras que el límite de una sucesión está restringido a todos los números enteros positivos.

Igual que con las funciones de variable real y valor real, puede suceder que el límite de una sucesión exista o no. En caso de que el límite exista se dice que la sucesión es convergente y converge al valor del límite, si el límite de la sucesión no existe se dice que la sucesión es divergente.

También se incorporan en esta sección unos teoremas análogos a los teoremas de límites de funciones que permiten encontrar el límite de diferentes sucesiones.

Posteriormente se formulan unas importantes definiciones:

- *Una sucesión $\{a_n\}$ es*

  (i) Creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n.

  (ii) Decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.

  Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.
- *El número C es una cota inferior de la sucesión $\{a_n\}$ si $C \leq a_n$ para todos los números enteros positivos n; el número D es una cota superior de la sucesión $\{a_n\}$ si $a_n \leq D$ para todos los números enteros positivos n*
- *Si A es una cota inferior de la sucesión $\{a_n\}$ y si A tiene la propiedad de que para cada cota inferior C de $\{a_n\}$, $C \leq A$ entonces A es la máxima cota inferior de la sucesión. De manera semejante, si B es una cota superior de la sucesión $\{a_n\}$ y si B tiene la propiedad de que para cada*

cota superior D de $\{a_n\}$, $B \leq D$ entonces B es la mínima cota superior de la sucesión.

- *Una sucesión es acotada si y sólo si tiene una cota superior y una cota inferior.*

Definiciones que son tenidas en cuenta para la demostración de posteriores teoremas, también estas definiciones son importantes puesto que algunos de los conceptos que son tratados en ellas son fundamentales para establecer el axioma de completitud de los números reales.

Esta sección finaliza con una de las propiedades más importantes que caracteriza al conjunto de los números reales. Esta propiedad es el axioma de completez o completitud y se muestra de la siguiente forma:

8.2.9 Axioma de completez (pag. 656)

Todo conjunto no vacío de los números reales que tiene una cota inferior tiene una máxima cota inferior. También, todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior.

Este axioma es de gran importancia ya que es el que garantiza la continuidad de la línea recta, geométricamente se puede decir que con este axioma se afirma que la línea recta real no tiene agujeros. Analizando este axioma desde los trabajos realizados por Dedekind se puede ver que con este axioma se garantiza que las cortaduras que no son producidas por números racionales deben ser producidas por los números irracionales, es decir el axioma de completez es el que garantiza la existencia de los números irracionales.

El axioma de completitud es empleado en la sección para demostrar, en el apéndice, el siguiente teorema:

8.2.10 Teorema

Una sucesión monótona acotada es convergente.

El teorema es de existencia ya que garantiza la existencia de un número pero no indica cómo encontrarlo.

4.2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. VOL. I. RON LARSON, ROBERT P. HOSTETLER, BRUCE H. EDWARDS. SEXTA EDICIÓN. MC GRAW HILL. 1999.

La sexta edición del libro "Cálculo y geometría analítica" de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwards fue publicada en 1999. Es un texto que al igual que las ediciones anteriores está diseñado principalmente para estudiantes de ingenierías, pues hace uso de una gran variedad de ejercicios con aplicaciones prácticas. También hace énfasis especial en la importancia del aprendizaje mediante gráficas. Según sus autores, e*ste libro ha liderado el desarrollo de técnicas pedagógicas innovadoras y ha sido uno de los pioneros en incorporar gráficas en dos o tres dimensiones generadas por ordenador, con el fin de visualizar conceptos matemáticos complicados.*

En comparación con las ediciones anteriores, los autores han modificado algunas características e incluido algunas ideas muy significativas que ayudarán a una mejor comprensión del texto, ofreciendo la oportunidad de utilizar tecnología informática, mayor aplicación a la vida cotidiana, nuevas vías de motivación y muchos ejercicios conceptuales. Entre las características principales encontramos: contenido de la sección, ejemplos, gráficas, resúmenes, definiciones y teoremas, notas históricas, advertencias, ejercicios, uso de calculadora, referencias a revistas, entre otras. En las incorporaciones más relevantes se destacan la sección de *exploraciones* en donde los autores invitan al lector a investigar sobre algunas de las temáticas propuestas. La otra incorporación es *motivación del capítulo* en el que se pretende introducir el tema de cada capítulo con un problema de aplicación práctica. Por ejemplo el capítulo 1 *Límites y sus propiedade*s inicia con una comparación entre los records mundiales en natación en 400 metros, observando que con el paso del tiempo los registros han sido mejorados hasta alcanzar un valor límite. También respecto a la edición anterior se modificaron las colecciones de ejercicios, tabla de contenidos y el capítulo de preparación, llamado por los autores capítulo P.

Es importante señalar que las características que los autores incorporan en su nueva edición son con el propósito de facilitar la lectura, pues brinda herramientas para una mejor comprensión de los conceptos. Por ejemplo en el capitulo P se desarrollan temas con el fin de introducir al lector en los diferentes métodos de comprensión y resolución de problemas matemáticos: gráficos, numéricos, analíticos y análisis de datos.

En general, el texto está divido en nueve capítulos en los que nos ofrece: preparación para el cálculo, límites y propiedades, la derivada, aplicaciones de la derivada, integración, funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes, aplicaciones de la integral, métodos de integración, regla de L´Hopital e integrales impropias, series.

Además contiene seis apéndices en donde se complementan los temas estudiados en los capítulos, demostraciones, tablas, algunos ejercicios y explicaciones.

Cada capítulo está dividido en secciones, en las que se introducen nuevas técnicas para docentes y estudiantes como las mencionadas anteriormente.

Según los autores, el texto está diseñado para que sea de fácil comprensión al lector y en particular para docentes que quieran emplear técnicas pedagógicas innovadoras y de gran ayuda dentro del aula.

Al terminar cada una de las secciones y capítulos se presentan los respectivos ejercicios que en su gran mayoría sirven para que el estudiante adquiera destreza operatoria aplicando los conceptos estudiados, además se presentan ejercicios en los cuales se evidencia la utilidad de los conceptos en situaciones reales.

A continuación presentamos el análisis realizado a algunos capítulos del texto, teniendo en cuenta las nociones preliminares dadas en la rejilla analítica.

Apéndice A: Compendio de preliminares del cálculo.

$A1$: Los números reales y la recta real.

El texto presenta los números reales como una representación en un sistema de coordenadas denominado recta real, en donde destaca algunas características como, punto origen, ubicación de valores positivos y negativos respecto al punto origen. A cada número real que corresponde a un punto en la recta le llama coordenada y hace una pequeña aclaración sobre las expresiones “no positivo” y “no negativo” describiéndolas como los números negativos o el cero y los positivos o el cero, respectivamente. Como en la mayoría de textos de este tipo, los autores afirman que, *cada punto de la recta real corresponde a un número real y sólo a uno, y cada número real corresponde a un punto de la recta real y sólo a uno*.

El libro también da una definición sobre los números racionales e irracionales, que normalmente es la que presentan muchos textos; pero nos parece que no es trivial el hecho de decir que un número se puede representar por infinitas cifras periódicas o no. Justamente la historia de las matemáticas nos da evidencias fehacientes del hecho de que a finales del siglo *XIX* los matemáticos y filósofos más representativos se hacían preguntas sobre el tipo de existencia que podían tener expresiones como las que se muestran de manera natural en los ejemplos del texto. En particular, los intuicionistas se hacían preguntas como la siguiente:¿el número π tiene diez sietes seguidos en su expresión decimal?.

Sin embargo en el texto que estamos analizando y en algunos similares estas representaciones parecen ser claras. Veamos a continuación cómo se presentan estos temas:

> *"los números racionales son aquellos que pueden expresarse como cocientes de dos enteros, como decimales finitos o decimales periódicos"*

A continuación presenta como ejemplo de números racionales los siguientes:

$$4{,}5 = \frac{9}{2}$$

$$-2{,}6 = \frac{-13}{5}$$

$$\frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots = 0{,}\hat{3}$$

Los números irracionales se presentan como "los números reales que no son racionales" o también como números que no pueden expresarse como decimales finitos o periódicos y que solo se representan mediante aproximaciones. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$$

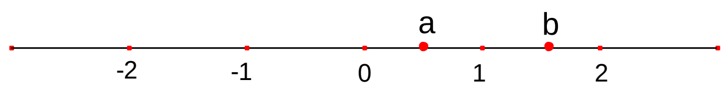
$$\pi \approx 3{,}141592654$$

$$e \approx 2{,}718281828$$

El apéndice $A1$ da la definición algebraica y geométrica sobre la relación *ser menor que* y muestra algunas propiedades del orden en los números reales:

> “si a y b son números reales, se dice que a es menor que b si $b-a$ es positivo”

a<b



a<b si y sólo si a está a la izquierda de b

Aunque no se demuestra ninguna de las propiedades, se destaca su importancia para trabajar con desigualdades.

Posteriormente el texto describe un conjunto como una colección de elementos y presenta algunos ejemplos:

- el conjunto de los números reales positivos puede describirse así:
$$\{x : x > 0\}$$
- el conjunto de los números reales no negativos sería:
$$\{x : x \geq 0\}$$

El texto da la definición de intervalo de manera conjuntista y gráfica. Introduce las operaciones de unión e intersección y hace referencia al intervalo abierto y cerrado. Además, muestra todos los tipos de intervalos que existen $(\mathrm{a}, \mathrm{b}), [\mathrm{a}, \mathrm{b}], (\mathrm{a}, \mathrm{b}], [\mathrm{a}, \mathrm{b}), \left(-\infty. \mathrm{b}\right), (-\infty, \mathrm{b}], (\mathrm{a}, +\infty), \left[\mathrm{a}, +\infty\right), (-\infty, +\infty)$.

A continuación el texto presenta unos ejemplos de aplicación en los cuales se evidencia la importancia de las definiciones anteriores.

Para terminar el apéndice, los autores definen la noción de valor absoluto, las operaciones, propiedades y complementan con algunos ejemplos.

En general, el apéndice $A1$ hace la introducción habitual a los números reales. No presenta ningún contenido histórico de este importante concepto, sin embargo hace claridad sobre la importancia de temas como las desigualdades e inecuaciones con y sin valor absoluto para el desarrollo de algunos conceptos del cálculo. Además cabe señalar que el texto no hace explícito el axioma de completitud de los números reales, que como ya lo hemos dicho es la propiedad fundamental que marca la diferencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$.

Para complementar, el apéndice $A1$ contiene otros temas que según el autor pertenecen al precálculo, es decir requisitos que el estudiante debe tener para el estudio del cálculo, como el plano cartesiano y las funciones trigonométricas.

Capitulo 1
Límites y sucesiones

El capítulo 1 del texto está destinado al estudio de los límites y sus propiedades. Está dividido en cinco secciones: una mirada previa al cálculo, cálculo de límites, gráfica y numéricamente, cálculo analítico de límites, continuidad y límites laterales, límites infinitos.
En la sección 1 se hace una introducción al concepto de límite, pues se utiliza a lo largo del capítulo 1.

Los autores tratan de responder la pregunta ¿qué es el cálculo?, de manera indirecta, mostrando algunos ejemplos para notar la diferencia entre las matemáticas previas al cálculo y el cálculo mismo. Por ejemplo:

- *las matemáticas previas al cálculo permiten describir un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para describir la velocidad de un objeto que se mueve aceleradamente es necesario recurrir al cálculo.*
- *Las matemáticas previas al cálculo permiten describir el área de un rectángulo, pero para describir el área bajo la curva en general es necesario el cálculo.*
- *Las matemáticas previas al cálculo permiten describir una recta tangente a un círculo, pero para describir una recta tangente a una gráfica en general es necesario el cálculo.*

Es muy importante la comparación que hace el autor entre las matemáticas previas al cálculo y el cálculo. Con las matemáticas previas podemos resolver situaciones particulares tales como encontrar áreas, volúmenes de figuras geométricas elementales, tangente de una circunferencia, el espacio recorrido por un cuerpo que se mueve con velocidad constante, pero el cálculo nos permite generalizar estas situaciones, ya que con él podemos encontrar la pendiente a una curva en un punto determinado, diferentes tipos de áreas o volúmenes, pero teniendo en cuenta que es necesario establecer rigurosamente los conceptos que son soporte de los anteriores como límites, derivadas e integrales.

Los autores responden a la pregunta planteada inicialmente, argumentando que se puede ver el cálculo como una máquina de límites que conlleva tres fases, como se muestra en la siguiente gráfica:

Matemáticas previas al cálculo	→	Proceso de límite	→	Cálculo

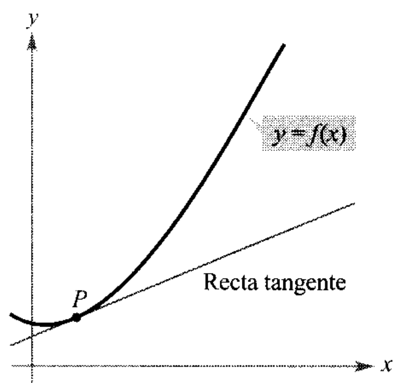
Esta forma de responder la pregunta, quizá pueda permitir que el lector comprenda el proceso seguido para el establecimiento del cálculo y a su vez la importancia de las tres fases.

Con los conceptos de las matemáticas previas al cálculo los autores se refieren a aquellos que el lector debe poseer para poder empezar el estudio del cálculo.

Para la segunda fase recordemos que históricamente desde la época Griega, en particular con el método de exhaución de Eudoxo, se visualizan aproximaciones al concepto de límite que al ser fundamentado permitió pasar a la tercera fase que comprende el cálculo diferencial e integral.

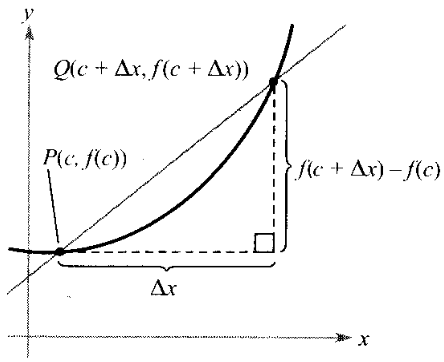
En particular para abordar el concepto de límite el autor se centra en dos problemas fundamentales como son, el problema de la recta tangente a una curva y el problema del área bajo una curva.

El problema de la recta tangente consiste en encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto P de ella:

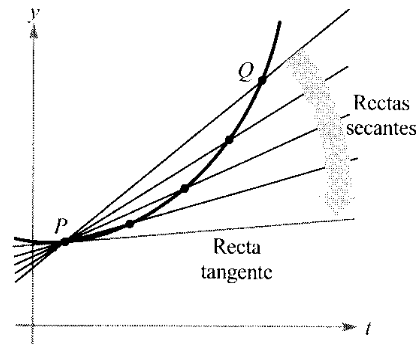


Recta tangente de la gráfica de f en P.

El texto resuelve este asunto como usualmente lo hacen estos libros de cálculo, trazando inicialmente una recta que pasa por el punto de tangencia P y otro punto Q de la curva, es decir trazando una recta secante a la curva, que pasa por P.



La recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$



Cuando Q se acerca a P, las rectas secantes se van aproximando a la recta tangente

La pendiente de esta recta secante está dada por:

$$m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Siendo $P\ (c, f(c))$ y $Q\ (c + \Delta x, f(c + \Delta x))$.

Al aproximarse el punto Q al punto P, se dice que la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

> "*cuando existe tal posición límite, se dice que la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes*".

Así mismo, hace referencia al problema del área, teniendo en cuenta que el área bajo una curva continua se obtiene igualmente mediante un proceso de límite.

Los autores optan por introducir estos problemas de la recta tangente a una curva y el área bajo la curva como una manera de evidenciar el papel del límite en los problemas fundamentales del cálculo.

La sección 1.2 del texto se dedica al estudio del cálculo de límites. La introducción se hace de una forma similar a otros textos, en la cual se analiza el comportamiento de una función cuando se toman valores cercanos a un punto que no pertenece a su dominio, para esto el texto introduce el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Pág. 55

Supongamos que se nos pide dibujar la grafica de la función f dada por $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, $x \neq 1$

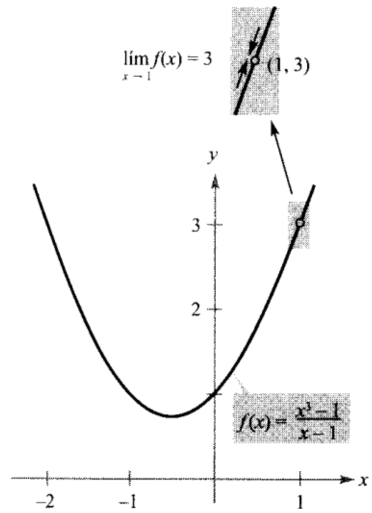
Para todos los valores de $x \neq 1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en $x = 1$, no está claro qué esperar. Para obtener una idea del comportamiento de la grafica de f cerca de $x = 1$, se pueden usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha, como ilustra la siguiente tabla.

x Tiende a 1 por la izquierda → ← x Tiende a 1 por la derecha

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ Tiende a 3 → ← $f(x)$ Tiende a 3

Al representar la función, parece que la gráfica de f *es una parábola con un hueco en el punto* $(1, 3)$*. Como muestra la siguiente figura.*



"A pesar de que x no pueda ser igual a 1, podemos acercarnos arbitrariamente a 1 y, como resultado $f(x)$ se acerca arbitrariamente a 3. En notación de límites, se escribe:

$\underset{x\to 1}{lím}\, f(3)$. *Esto se lee él límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3"*

Después de analizar el ejemplo los autores plantean una posible definición para este concepto:

Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x tiende a c por cualquiera de los dos lados, entonces el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es L. Esto se escribe:

$\lim_{x\to c} f(x) = L$

En seguida se presentan otros ejemplos. En algunos de ellos se destaca la existencia del límite en un punto sin importar el comportamiento de la función en dicho punto y los demás se refieren a situaciones en las cuales el límite no existe. Consideramos que lo que pretenden los autores con estos ejemplos es mostrarle al lector los diferentes casos que se pueden encontrar cuando resuelven ejercicios relacionados con este tema. La sección termina con la definición formal del concepto, realizando antes la aclaración del significado matemático de las frases $f(x)$ *se acerca arbitrariamente a un número* L y x *tiende a* c.

El texto destaca que fue Agustín-Luis Cauchy (1789-1857) uno de los primeros matemáticos que dio un significado preciso a las expresiones mencionadas anteriormente. Que $f(x)$ se acerque arbitrariamente a L, significa que: $f(x)$ pertenece al intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ donde $\varepsilon > 0$ y que x tienda a *c* significa que existe un número $\delta > 0$ tal que x pertenece al intervalo $(c-\delta, c)$ o al intervalo $(c, c+\delta)$. Después de realizadas estas aclaraciones el texto presenta la definición habitual del concepto.

> **Definición de límite**
>
> *Sean* f *definida en un intervalo abierto que contiene a* c *(salvo posiblemente, en* c*) y* L *un número real. La afirmación*
>
> $$\lim_{x\to c} f(x) = L$$
>
> *Significa que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si*
> $0 < |x-c| < \delta$ *entonces* $|f(x)-L| < \varepsilon$

Esta definición es utilizada en algunos ejemplos que no presentan un grado de dificultad muy alto, tal vez con el objetivo de que el estudiante se familiarice con ella y con los conceptos que esta encierra. Se termina con los ejercicios, los cuales son muy similares a los ejemplos.

La sección 1.3 se refiere al cálculo analítico de los límites. Se establecen una serie de propiedades y teoremas fundamentales de los límites, que permiten resolver los ejercicios de manera más sencilla que utilizando la definición formal.

Todas las propiedades y teoremas tienen su respectivo ejemplo y es importante destacar que ninguno de estos teoremas es demostrado en el desarrollo de la sección, pero sí en el apéndice B. La sección termina con el teorema del encaje:

Teorema 1.8. Teorema del encaje

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *para todo* x *en un intervalo abierto que contiene a* c*, excepto posiblemente en el propio* c*, y si*

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ *existe y es igual a* L*.*

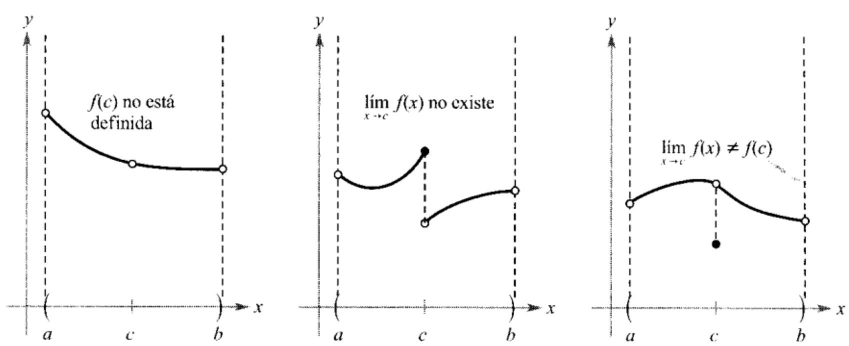
Este teorema, al igual que en otros textos, se destaca porque permite realizar la demostración de dos importantes límites que contienen funciones trigonométricas:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x}$

4.2.1 Continuidad. En la sección 1.4 el autor hace la siguiente definición informal de continuidad en un punto e ilustra con algunas gráficas, así:

"Una función es continua en $x = c$ *significa que no hay interrupción de la grafica de* f *en* c*. Es decir,* f *no tiene en* c *agujeros, saltos ni aberturas".*



Esta definición es análoga a la presentada en otros textos, el autor asume que el lector tiene una idea intuitiva del concepto de continuidad, pues lo presenta de

manera informal, basándose en representaciones gráficas, para establecer los posibles casos en los cuales una función es o no continua en un punto.
Luego el texto nos da una definición más formal acerca del concepto de continuidad en un punto y en un intervalo abierto utilizando la noción de límite.

Definición de continuidad

Continuidad en un punto: decimos que la función f es continua en c si se satisfacen las tres condiciones siguientes.

1. $f(c)$ *está definida*
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ *existe*
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Continuidad en un intervalo abierto: decimos que una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en toda la recta real $(-\infty, \infty)$ se llama continua en todas partes.

Didácticamente es muy importante la forma como el texto presenta la definición de continuidad, pues expone una idea básica sobre este concepto y luego expone la teoría, lo que podría permitir al lector tener una mejor comprensión de los temas.

Para la continuidad en un intervalo cerrado introduce el concepto de límite lateral[2] y utiliza estas definiciones para comprobar otro concepto importante dentro del estudio de límites, el teorema sobre la existencia de límites.

Teorema 1.10. Existencia del límite

Sea f una función, y sean c y L números reales. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L si y sólo si
$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

[2] $\lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad límite\ por\ la\ derecha$ $\longrightarrow$Significa que x tiende a c con valores superiores a c.
$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad límite\ por\ la\ izquierda$ $\longrightarrow$Significa que x tiende a c con valores inferiores a c.

Usando la definición de continuidad de una función en un intervalo abierto y la definición de límites laterales se define la continuidad de la función en un intervalo cerrado, así:

Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Se dice que una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en el intervalo abierto (a,b) y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

La función es continua por la derecha de a y continua por la izquierda de b.

También se presentan propiedades de la continuidad con algunos ejemplos de aplicación de estas.

Finalmente se hace una presentación del teorema del valor intermedio, un importante teorema que, según el autor, estudia el comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

Teorema 1.13. Teorema del valor intermedio

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número c en $[a,b]$ tal que $f(c) = k$.

El texto explica de manera retórica el significado del teorema del valor intermedio. Ilustra con el siguiente ejemplo un caso en el cual, según el autor, se evidencia la veracidad del teorema.

Si un niño medía 1.50 mts al cumplir 13 años y 1.62 mts al cumplir 14 años, en algún momento de esos dos cumpleaños medía 1.55 mts. Y lo mismo es cierto para todo valor h de la altura que esté entre 1.50 mts y 1.62 mts.

Sin embargo es conveniente enfatizar que este resultado no se puede corroborar en la realidad pues, de acuerdo a lo que dicen los autores, en algún momento el niño tendría una estatura de 1.5111111 y así sucesivamente. Con esto queremos resaltar que la importancia de este teorema es a nivel teórico.

El texto no hace una demostración formal de este teorema aunque menciona que ella se basa en la propiedad de completitud de los números reales. Además, menciona que el teorema del valor intermedio es de gran utilidad para aproximar los ceros[3] de una función continua en un intervalo cerrado.

Es de gran importancia anotar, que este teorema garantiza la existencia de al menos un cero de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, siempre que $f(a)$ y $f(b)$ sean de diferente signo. Sin embargo, éste no constituye un método para encontrar dichos valores.

Este teorema ha tenido mucho valor a través de la historia, ya que algunos matemáticos lo consideran como el teorema más importante del cálculo. En general, este capítulo formaliza conceptos que son de gran importancia para el estudio del cálculo como límites, continuidad, teorema del valor intermedio, entre otros. La presentación de cada uno de estos conceptos se hace en un lenguaje sencillo y de fácil comprensión, con muchos ejemplos de situaciones reales y ejercicios prácticos.

4.2.2 Sucesiones. La primera definición de sucesión se hace de la misma manera que para otros conceptos, es decir, utilizando el lenguaje usual. El texto presenta una sucesión como una colección de objetos o sucesos que están ordenados de modo que alguno se identifica con el primero, otro con el segundo, etc.

[3] En la sección $P1$ del texto, se definió x –intersección de una gráfica como cualquier punto $(a, 0)$ en el que la gráfica corta al eje X. Si la gráfica representa una función f, el número a se denomina un cero de f.

El autor argumenta que "matemáticamente, una sucesión se define como una función cuyo dominio lo constituyen los números enteros positivos"

La forma de denotar los términos de una sucesión es con subíndices como usualmente se hace:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \cdots, & a_n, & \cdots \end{array}$$

Donde a cada término de la sucesión le corresponde un entero positivo.

Para los autores la palabra sucesión en matemáticas tiene un significado parecido al que se le da cuando se utiliza en algunas situaciones cotidianas.

La introducción que se hace a las sucesiones como concepto matemático es de forma intuitiva, para luego establecer una definición formal. Método que es muy similar al que realizan otros textos.

Analizando el desarrollo de la sección podemos notar que el principal objetivo es estudiar las sucesiones cuyos términos tienden a un valor límite, es decir sucesiones convergentes. Para cumplir con este propósito se introduce la siguiente definición:

> ***Definición del límite de una sucesión***
>
> *Sea L un número real. Se dice que L es el límite de una sucesión $\{a_n\}$, lo cual se denota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*
> *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > M$. Las sucesiones que tienen límite se llaman convergentes y la demás divergentes.*

Posteriormente se exponen los teoremas que tienen relación con el límite de una sucesión y que se utilizan para resolver los ejemplos y ejercicios que presenta la sección. Como lo mencionamos en un análisis anterior, estos teoremas y propiedades que cumplen las sucesiones son muy similares a las expuestas para los límites de funciones de una variable real.

Es importante notar que a diferencia de otros textos, algunos de los ejemplos que se desarrollan son resueltos utilizando de forma explícita conceptos estudiados previamente. También por medio de los ejemplos se dan pautas para determinar el término *n-ésimo* de una sucesión, proceso que es muy importante para determinar la convergencia o divergencia de esta.

En ocasiones, en algunos ejercicios se puede ver que no es posible encontrar el límite de una sucesión, pero de igual manera es importante conocer si la sucesión es convergente o no.

En la sección 8.1 el texto presenta el siguiente teorema:

> ***Teorema 8.5. Sucesiones monótonas acotadas***
> *Si una sucesión* $\{a_n\}$ *es monótona y acotada, entonces es convergente.*

Este teorema permite determinar la convergencia de una sucesión sin necesidad de encontrar el límite. Pero para demostrar este teorema son necesarias algunas definiciones que el texto presenta: sucesiones monótonas y sucesiones acotadas. También es necesaria la propiedad de completitud de los números reales que garantiza la existencia de la mínima cota superior.

4.3 CALCULUS, CÁLCULO INFINITESIMAL. MICHAEL SPIVAK. SEGUNDA EDICIÓN. REVERTÉ S. A. 1992

El Cálculo infinitesimal 2. ed. de Michael Spivak es un texto publicado por la Editorial Reverté S.A. en el año 1992, el libro está dividido en cinco partes y cada una de estas a su vez se subdivide en capítulos, los cuales suman en total 29. La primera parte (prólogo) consta de dos capítulos los cuales se dedican al estudio de las propiedades básicas de los números y las distintas clases de números, la segunda parte (fundamentos) se divide en seis capítulos que se destinan al estudio de las funciones, los límites, la continuidad y las cotas de un conjunto (p13), propiedad de la cota superior mínima, la tercera parte se divide en diez capítulos en los cuales se estudian las derivadas y las integrales, la cuarta parte se dedica al estudio de las sucesiones y series infinitas y se divide en ocho capítulos, la quinta parte que lleva por título *epílogo* se divide en tres capítulos que presentan el concepto de cuerpo, la construcción de los números reales y uno de ellos destinado para demostrar que el conjunto de los números reales es el único cuerpo ordenado completo salvo isomorfismos. Para algunos de los capítulos se utilizan apéndices con el fin de complementarlos con algunos temas que son de utilidad para el estudio de conceptos posteriores. Para desarrollar cada capítulo se comienza con ideas intuitivas de cada uno de los conceptos fundamentales, para después llegar a una definición formal y rigurosa de ellos, seguidamente se presentan las propiedades, teoremas, lemas, etc. cada uno de ellos con su debida demostración y algunos ejemplos de aplicación.

Este es un libro que puede ser utilizado tanto por estudiantes de matemáticas como por estudiantes de otras ciencias, aunque por la forma en la cual se realiza el tratamiento de los conceptos, algunos temas presentados y el tipo de ejercicios y problemas presentados al final de cada capítulo, consideramos que el texto está destinado especialmente para estudiantes de matemáticas.

El autor manifiesta que la idea central de este libro no es presentar el cálculo como un simple preludio de las matemáticas, sino como el primer encuentro real con las mismas, es por esto que con este texto se pretende que el estudiante comprenda que la precisión y el rigor matemático no son un obstáculo para alcanzar un buen desarrollo en el estudio de las matemáticas, sino que son el medio más eficaz para lograrlo, además también podemos ver que con el libro se pretende que el estudiante pueda acceder de forma intuitiva al estudio de algunos conceptos del análisis que están presentes en él.
A continuación presentaremos el análisis realizado a las partes I y II y al epílogo, secciones del libro en las cuales se desarrollan los temas concernientes a este trabajo.

4.3.1 Números reales. Las partes del texto dedicas específicamente al estudio de este concepto son la I y el epílogo. Comenzaremos con el análisis realizado a los capítulos 1 y 2 que conforman la parte I.

El capítulo 1, titulado “propiedades básicas de los números”, se dedica al estudio de los conocimientos previos que un estudiante debe tener para lograr una mejor comprensión del texto y a su vez del cálculo. A pesar de que aparentemente el capítulo a primera vista parece ser un repaso de las propiedades de las operaciones suma, multiplicación, resta y división, la solución de ecuaciones la factorización y otros procesos algebraicos, esto no es así. Lo que pretende el capítulo es que a través de un cierto número de propiedades que poseen los números, el lector pueda determinar la relación que tienen estas con los demás procesos algebraicos básicos que por lo general en la educación básica no se evidencian.

El estudio se basa en doce propiedades, las primeras nueve se refieren a las operaciones fundamentales suma y multiplicación:

$(\boldsymbol{P1})(ley\ asociativa\ para\ la\ suma)$: $a + (b + c) = (a + b) + c$
$(\boldsymbol{P2})(Existencia\ de\ una\ identidad\ para\ la\ suma)$: $a + 0 = 0 + a = a$
$(\boldsymbol{P3})(Existencia\ de\ inversos\ para\ la\ suma)$:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

$(\boldsymbol{P4})(ley\ conmutativa\ para\ la\ suma)$: $a + b = b + a$
$(\boldsymbol{P5})(Ley\ asociativa\ para\ la\ multiplicación)$: $a.(b.c) = (a.b).c$
$(\boldsymbol{P6})(Existencia\ de\ una\ identidad\ para\ la\ multiplicación)$:

$$a.1 = 1.a = a$$

$(\boldsymbol{P7})(Existencia\ de\ inversos\ para\ la\ multiplicación)$:

$$a.a^{-1} = a^{-1} = 1;\ \ a \neq 0$$

$(\boldsymbol{P8})(Ley\ conmutativa\ para\ la\ multiplicación)$: $a.b = b.a$
$(\boldsymbol{P9})(ley\ distrubutiva)$: $a.(b + c) = a.b + a.c$

De estas, desde $P1$ hasta $P4$ son propiedades que cumple la suma de números, de $P5$ hasta $P8$ son propiedades para la multiplicación y $P9$ combina las operaciones suma y multiplicación. Si miramos estas nueve propiedades podemos ver claramente que estas son conocidas por cualquier estudiante de matemáticas, pues son las propiedades que cumplen un cuerpo, sin embargo lo importante en el capítulo es, como mencionamos anteriormente, su utilización para demostrar otras propiedades de los números y su utilización en la solución de ecuaciones y de muchos otros procesos algebraicos. Por ejemplo, en la página 8 el texto presenta un ejercicio de aplicación de la propiedad $P9$, donde la usa para demostrar en qué caso se cumple que $a - b = b - a$.

Las tres propiedades restantes tienen que ver con el orden entre los números. Están definidas en el texto de la siguiente forma, en las cuales *P* representa al conjunto de los números positivos:

$(\boldsymbol{P10})$ *(Ley de la tricotomía). Para todo número* a *se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:*
(i) $a = 0$
(ii) *a pertenece al conjunto P*
(iii) *$-a$ pertenece al conjunto P*

($\boldsymbol{P11}$) *(La suma es cerrada). Si a y b pertenecen a P, entonces $a+b$ pertenece a P.*

($\boldsymbol{P12}$) *(La multiplicación es cerrada). Si a y b pertenecen a P, entonces $a.b$ pertenece a P.*

Aunque según el autor las desigualdades no son tenidas en cuenta con mucha frecuencia en las matemáticas elementales, cabe destacar que estas desempeñan un papel muy importante para el estudio del cálculo. Todas las demás propiedades sobre desigualdades se pueden obtener de las últimas propiedades mencionadas anteriormente. Igualmente se destaca en el libro la importancia del concepto de valor absoluto concepto que tiene sus orígenes en las propiedades $(P9 - P12)$ y también se demuestran algunos teoremas relacionados con este concepto que servirán para el desarrollo de otros temas en el texto.

El capítulo finaliza exponiendo unas cuestiones que en realidad muy a menudo no son tenidas en cuenta, por ejemplo generalmente no se da la suficiente importancia a las propiedades de los números para la fundamentación de otros conceptos matemáticos, además se trabaja con ellos constantemente pero casi nunca se trata de entender lo que en realidad son los números y la importancia que tienen estos para las matemáticas y para las demás áreas del conocimiento.

Otro aspecto que cabe resaltar en el capítulo es que no se trabaja con un sistema numérico en particular, las propiedades que se presentan son desarrolladas para unos objetos matemáticos llamados números y en gran parte del texto, se tratará de poner en claro su significado. También se destaca que las doce propiedades mencionadas son la base para deducir otras propiedades fundamentales de los números, sin embargo en el capítulo dos se podrá evidenciar que estas doce propiedades no son suficientes para derivar todas las propiedades que poseen los números.

Los ejercicios propuestos en este capítulo poseen una gran diferencia en relación con los otros textos analizados, ya que no son tan mecánicos, son ejercicios que en su gran mayoría muestran propiedades básicas de los números que pueden ser demostradas teniendo como base las propiedades desarrolladas en el capítulo, aunque algunos de ellos sirven para introducir conceptos más avanzados

El capítulo 2 a diferencia del uno trabaja los distintos tipos de números. Se inicia con los números naturales, destacando que son los que nos sirven para contar, el autor expone que realizando un análisis sin mucho detalle se puede ver que muchas de las propiedades estudiadas en el capítulo anterior no se satisfacen para este conjunto numérico, por ejemplo $P2$ y $P3$. Sin embargo los números naturales tienen mucha importancia en matemáticas, ya que este conjunto numérico es la base del principio de inducción matemática, principio que sirve para realizar muchas demostraciones matemáticas. En seguida se presentan los números enteros, se menciona que algunas de las deficiencias que presentan los números naturales pueden ser corregidas realizando una extensión de ellos, esta extensión nos lleva a los números enteros, en los cuales se satisfacen once de las doce propiedades mencionadas en el capítulo 1, la propiedad $P7$ no se cumple para los enteros, esta situación permite concluir que es necesario contar con un conjunto numérico más amplio que satisfaga las doce propiedades.

Los números racionales, vistos como el cociente entre dos números enteros $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ con $b \neq 0$ es un conjunto numérico que cumple las propiedades $P1 - P12$. Como mencionamos anteriormente, el capítulo 1 desarrolla doce propiedades para unos objetos matemáticos llamados números, podríamos pensar entonces que los números de los cuales se habla en él son los números racionales, pero realmente esto no es así. Existe un conjunto numérico que es más grande que el conjunto de los números racionales el cual también cumple las propiedades $\mathrm{P}1 - \mathrm{P}12$ denominado *números reales*. Este está formado por los números racionales y otros números llamados irracionales, que generalmente son representados por los decimales infinitos no periódicos. Los números π y $\sqrt{2}$ son ejemplos típicos de este tipo de números. El texto demuestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional, pero si analizamos con detalle dicha demostración podemos ver que en realidad lo que se está demostrando es que no existe ningún numero racional $\frac{a}{b}$ que elevado al cuadrado sea igual a dos, es decir no se ha comprobado la existencia de dicho número. Es evidente entonces que las propiedades $\mathrm{P1} - \mathrm{P12}$ no son suficientes para comprobar la existencia del número irracional $\sqrt{2}$. Por lo tanto, como expone el autor, debe existir una propiedad que garantice la existencia de dichos números, esta propiedad la presenta el autor de la siguiente forma:

> $(\boldsymbol{P13})$ *(Propiedad de la cota superior mínima). Si A es un conjunto de números reales, $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene una cota superior mínima.*

Cabe resaltar que esta propiedad no es descrita en este capítulo, ya que el autor expone que no depende del estudio exclusivo de los números reales, pero sí se destaca que esta propiedad es la que diferencia al conjunto de los números reales de los racionales.

4.3.2 Epílogo. El epílogo del libro está divido en tres capítulos, a saber, teoría de cuerpos, construcción de los números reales y la unicidad de los números reales. Es la parte del texto que nos permite evidenciar la inmensa riqueza conceptual que tiene el concepto de número real.

El capítulo que estudia la teoría de cuerpos, comienza destacando que todos los conceptos importantes del libro se han tratado de definir de la mejor manera posible, pero $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, elementos fundamentales del libro, solamente han sido nombrados, mas no definidos y por ende lo que nunca ha sido definido no se puede someter a un análisis riguroso. Por lo tanto las propiedades $P1 - P13$

deben considerarse como suposiciones y no como teoremas. Lo que pretende el capítulo es analizar desde un punto de vista lógico $P1 - P13$. Además se menciona que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tampoco han sido definidos, pero el desarrollo lógico sería definir $\mathbb{N}$, luego definir $\mathbb{Z}$ en términos de $\mathbb{N}$ y luego $\mathbb{Q}$ en términos de $\mathbb{Z}$, lo que daría como resultado un conjunto $\mathbb{Q}$ bien definido con dos operaciones $+$ y $\cdot$ y que cumple las propiedades $P1 - P12$ como teoremas. El paso final sería la construcción de $\mathbb{R}$ en términos de $\mathbb{Q}$.
Para realizar esta construcción lo que hace el libro es suponer que $\mathbb{Q}$ está bien definido y que $\mathrm{P}1 - \mathrm{P}12$ han sido demostradas para $\mathbb{Q}$, faltaría entonces definir $\mathbb{R}$ y demostrar que $\mathrm{P}1 - \mathrm{P}13$ se cumplen en $\mathbb{R}$.

Para este propósito es indispensable definir la suma y la multiplicación de números reales y los siguientes conceptos, cuerpo, cuerpo ordenado y cuerpo ordenado completo. Las propiedades que satisfacen los cuerpos son equivalentes a las propiedades $\mathrm{P}1 - \mathrm{P}9$ establecidas para los números, las propiedades que debe tener un cuerpo para ser considerado un cuerpo ordenado son análogas a las propiedades $\mathrm{P}10 - \mathrm{P}12$ y si a $P1 - P12$, se le agrega la propiedad $\mathrm{P}13$ formulada en la parte II, capítulo ocho, estas son las propiedades que debe cumplir un conjunto para que sea un cuerpo ordenado y completo. Teniendo claro el significado de cada uno de estos conceptos se puede comenzar el estudio del siguiente capítulo.

$\mathbb{R}$ es un ejemplo de un cuerpo ordenado completo, en el capítulo que se trata la construcción de $\mathbb{R}$, se prueba que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo. La idea central se basa en definir los números reales en términos de los números racionales, esto es posible ya que el conjunto de los números racionales es un cuerpo ordenado sobre el cual se puede realizar una extensión para así obtener $\mathbb{R}$.

Para realizar su argumentación, el autor define primero lo que es un número real en términos de los números racionales y lo hace de la siguiente forma:

Un número real es un conjunto α, de números racionales, con las cuatro siguientes propiedades:

(1) si x está en α e y es un número racional con $y < x$, entonces y está también en α.

(2) $\alpha \neq \emptyset$

(3) $\alpha \neq \mathbb{Q}$

(4) No existe ningún elemento máximo en α: dicho de otro modo, si x está en α, entonces existe algún y en α con $y > x$.

El conjunto de todos los números reales se denota por $\mathbb{R}$

Posteriormente se definen $+$, $\cdot$ y P para $\mathbb{R}$ y se demuestra cada una de las propiedades que $\mathbb{R}$ debe cumplir para ser considerado un cuerpo ordenado completo.

El último capítulo del epílogo se encarga de demostrar que R es el único cuerpo ordenado completo que existe, salvo isomorfismos. Para desarrollar este proceso el autor, en la introducción del capítulo, menciona que se deben tratar de definir los números reales en términos de los números racionales, pero para lograrlo es necesario encontrar un medio para describir el conjunto de los números racionales menores que un número real sin mencionar específicamente los números reales. Realizando un análisis de los comentarios que hace el autor, y retomando la construcción de los números reales realizada por Dedekind, podemos ver que en realidad lo que se hace en el capítulo es un proceso similar al seguido por Dedekind, ya que se empieza definiendo los números reales en términos de los números racionales, se establece un orden entre ellos, se definen las operaciones suma y multiplicación y se demuestran las propiedades que estos cumplen.

La forma en la cual se realiza el estudio de los números reales en este texto difiere de los demás textos analizados puesto que se desarrolla con base en conceptos de álgebra abstracta, es una presentación que para un estudiante de matemáticas puede resultar natural, pero para otro lector que no esté familiarizado con estos temas será un poco más complicado comprender la construcción de R.

4.3.3 Limites de funciones. La parte II del libro denominada *fundamentos*, se divide en seis capítulos y se ocupa del estudio de los límites de funciones de variable real y valor real.

El capítulo 3 se destina al estudio de las funciones. Se destaca que el concepto de función es el más importante de las matemáticas, ya que según el autor en casi todas sus ramas, la investigación se centra en el estudio de este importante concepto. Basados en nuestra experiencia estamos de acuerdo con esta posición, puesto que son innegables las diferentes aplicaciones que esta noción tiene en los diferentes campos del conocimiento. Por lo tanto es necesario contar con una definición precisa de este concepto. Para realizar una definición formal de este concepto, el texto inicia con una definición provisional:

> *"Una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real."*

Después de presentar la definición se muestran los ejemplos en los que se hace uso de ella. De la definición provisional vemos que todo el tratamiento que realiza el texto con relación a los números reales es necesario, ya que sin una construcción formal de este sistema numérico todo lo que se pueda establecer con relación a las funciones, tampoco tendría una fundamentación sólida.

A continuación se tratan de aclarar algunos puntos que pueden causar confusión, entre ellos se destaca que una función es una regla cualquiera que hace corresponder a ciertos números otros números y que el conjunto de números a los cuales se aplica una función se denomina dominio. Después de esto se explica el tipo de notación que se empleará para las funciones y se describen algunos tipos especiales de funciones (polinómicas, racionales, constantes) y se definen las operaciones suma, resta, división, multiplicación y composición que se pueden realizar con funciones para obtener otras más complejas, resaltando que algunos hechos acerca de la suma, el producto y el cociente de funciones son consecuencias inmediatas de hechos acerca de la suma, el producto y el cociente de números.

Después de analizar todas estas situaciones, y determinar qué es lo que hace falta para saber describir por completo una función, se presentan las siguientes definiciones de una forma rigurosa:

> *Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: si (a, b) y (a, c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*
> *Si f es una función, el dominio de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a, b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a, b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$.*

Estas definiciones no difieren mucho de aquellas se enseñan en los otros textos. El capítulo concluye con una importante observación "*lo importante de una función f es que el número $f(x)$ esté determinado para todo número x de su dominio".*

El capítulo 4 trabaja sobre una de las herramientas que didácticamente es de gran utilidad para interpretar, obtener información y en ocasiones sugiere métodos para demostrar varias propiedades de las matemáticas, se trata del concepto de gráfica de una función. Se empieza este tema con una idea geométrica que sirvió de fundamentación para el sistema numérico real, que consiste en que cada número real se puede asociar un único punto de la línea recta y viceversa. Este hecho fue uno de los elementos más importantes utilizado por Dedekind para realizar su construcción de los números reales, hecho que no es muy especificado en el texto, ya que como mencionamos en la primera parte de este análisis la construcción de los números, que se presenta en el texto, tiene un enfoque diferente.

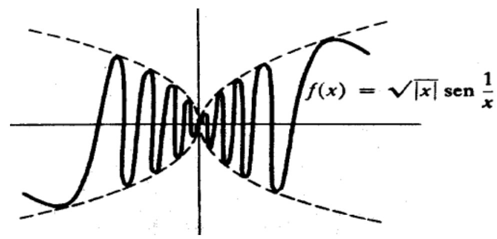
Aunque las representaciones gráficas son importantes para hacer comprensible una demostración, el autor expone que estas nunca se apoyarán en ideas geométricas, posición con la cual muchos del los grandes matemáticos se identificaron durante el proceso de rigorización del análisis y que permitió que sólo a través de argumentos aritméticos se fundamentaran muchos conceptos de la matemática, entre ellos el de número real. Haciendo uso de esta idea en el texto se definen los diferentes tipos de intervalos que existen y se menciona la importancia de ellos, por la frecuencia con que son utilizados.

Igual que en los capítulos anteriores se brinda una idea intuitiva de lo que significa la gráfica de una función. La gráfica de una función está conformada por todos los puntos del plano correspondientes a los pares $(x, f(x))$. Se dan los ejemplos de las gráficas de algunas funciones típicas (constante, lineal, potenciales, racionales) y de algunas funciones que tienen unas características especiales, también se dan ejemplos de algunas gráficas que a pesar de su importancia en las matemáticas no representan la gráfica de una función, son ellas, el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Además, se dice que existen técnicas matemáticas que permiten esbozar la gráfica de una función pero que este tema será tratado en capítulos posteriores. Este capítulo además de representar las gráficas de las funciones utilizando coordenadas cartesianas presenta un apéndice en el cual se explica el método de coordenadas polares, que también permite realizar representaciones gráficas de las funciones.

El concepto de límite de una función se desarrolla en el capítulo cinco. Una vez más se comienza con una definición provisional, destacando que este es el concepto más importante del cálculo infinitesimal y tal vez el más complicado.

> ***Definición provisional***
>
> *"La función f tiende hacia el límite cerca de a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficiente cerca de a, pero siendo distinto de a."*

De inmediato utilizando representaciones gráficas se pretende que el lector tenga una idea intuitiva del significado de esta definición. Utilizando el concepto de intervalo y analizando unas funciones se trata de esclarecer lo que significa que $\mathrm{f(x)}$ se aproxime a L y que x sea suficientemente próximo a a . Aunque el tratamiento que se realiza a las funciones con el objetivo de esclarecer estas ideas es similar a los realizados en los otros textos, cabe destacar que las funciones que se toman como ejemplos no son tan sencillas como las de los demás textos. Por ejemplo se analiza la siguiente función:



Lo que se pretende es determinar qué sucede con la función cuando x se aproxima a 0; aunque el comportamiento de la función para valores cercanos a 0 es oscilante, se puede comprobar que la función tiende a 0 cuando x se aproxima a 0, sin embargo el autor propone esta demostración como ejercicio.

Después de realizar el análisis respectivo de otros ejemplos, se presenta la definición formal que se emplea para el estudio de los límites, se trata de la definición $\varepsilon - \delta$ y está formulada de la siguiente forma:

> *La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Basándose en esta definición son demostrados algunos de los teoremas básicos que sirven como herramientas para encontrar el valor de muchos límites.

4.3.4 Continuidad. Este concepto se estudia en la parte II, capítulo 6. Primero se estudia la continuidad de cualquier función en un punto determinado, aunque explícitamente no se presenten las tres condiciones que se deben satisfacer para que la función sea continua en un punto, implícitamente están presentes en la explicación que muestra el texto, se destaca además en esta parte que intuitivamente una función es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos, ni oscilaciones indefinidas, sin embargo es necesaria una definición formal y se presenta la siguiente :

La función f es continua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Posteriormente se demuestran dos teoremas que permiten analizar la continuidad de algunas funciones en diferentes puntos. El capítulo termina resaltando que es más interesante el estudio de la continuidad de las funciones en un intervalo y para ello se destina el capítulo 7 en el que se resalta la importancia de tres teoremas denominados fuertes:

1. *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = 0$*
2. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a,b]$.*
3. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún número y en $[a,b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.*

Estos tres teoremas son muy importantes en las matemáticas. Como lo expresamos anteriormente, históricamente estos teoremas desde el punto de vista geométrico fueron considerados evidentes, pero al tratar de probar su veracidad con argumentos únicamente aritméticos se pudieron formalizar conceptos que permitieron un desarrollo más sólido de las matemáticas.

En el capítulo 7 también se demuestran algunos teoremas que son consecuencia de los tres teoremas anteriores. Lo más importante de estos tres teoremas fuertes, nombre que le da el autor al capítulo, es que solamente con las propiedades $P1 - P12$ que cumplen los números reales no es posible realizar su demostración, luego los teoremas que surgen como consecuencia tampoco se podrían demostrar. Por lo tanto se necesita una propiedad adicional que deben cumplir los números reales, esta es $P13$. El capítulo 8 se dedica a la formulación de esta propiedad y se destaca que es la propiedad más importante de R **,** para esto se definen los conceptos de cota superior, inferior, mínima cota superior y máxima cota inferior de un conjunto, para finalmente llegar a definir $P13$ de la forma citada anteriormente.

Esta propiedad no se satisface para los números racionales, gracias a ella se puede garantizar la existencia de los números irracionales y se pueden demostrar los tres teoremas fuertes y por ende sus consecuencias.

De todo el análisis realizado a esta parte del texto y de todos los conceptos que son mostrados, debemos destacar la importancia de los números reales. Es innegable que sin estos objetos matemáticos muchos de los conceptos, las demostraciones y en general los temas desarrollados en el texto en matemáticas no tendrían una base sólida.

4.3.5 Sucesiones. Este concepto es tratado en el capítulo 29, parte IV del libro, se considera por el autor como un concepto tan "natural" que hasta se puede prescindir de una definición, sin embargo se presenta la siguiente:

> *"Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$".*

La notación que se emplea es la misma que se utiliza en los otros textos, se presentan gráficas de sucesiones, utilizando mecanismos similares a los utilizados para cualquier función, aunque se resalta que estas no proporcionan mucha información y que es más conveniente representar los puntos de la sucesión sobre la línea recta, ya que permite determinar si la sucesión converge hacia un cierto valor, si va hacia el infinito o si oscila entre algunos valores.

Para determinar si una sucesión es convergente o no, se define el límite de una sucesión. Los textos analizados anteriormente presentan unos teoremas sobre límites de sucesiones que son análogos a los límites de funciones y que permiten al lector determinar si una sucesión es convergente o no, pero este texto los propone como ejercicio.

Sin embargo se presentan unos criterios, entre ellos el de Cauchy que permite establecer la convergencia de sucesiones:

> ***Teorema 2***
>
> *Si* $\{a_n\}$ *es no decreciente y acotada superiormente, entonces* $\{a_n\}$ *converge (un enunciado análogo se cumple si* $\{a_n\}$ *es no creciente y acotada inferiormente)*

Las sucesiones de Cauchy las cuales no son muy tenidas en cuenta en los otros libros son definidas en este capítulo, ya que proporcionan otro criterio que permite identificar cuándo una sucesión es convergente.

Aunque a esta altura en el texto ya han sido formalizados muchos conceptos es importante destacar en este capítulo algunos aspectos interesantes, por ejemplo la representación gráfica que se propone en el libro no tendría sentido sin antes haber esclarecido la continuidad de la línea recta, también el uso implícito que se hace del axioma de completitud de los números reales para la demostración del teorema 2 mencionado anteriormente, de igual forma es importante mencionar que es apropiado definir las sucesiones de Cauchy[4], ya que fueron utilizadas por George Cantor en la construcción de los números reales y son de gran utilidad en matemáticas.

4.4 CALCULUS. CÁLCULO CON FUNCIONES DE UNA VARIABLE CON UNA INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA LINEAL. TOM M. APÓSTOL. SEGUNDA EDICIÓN. REVERTÉ S.A. 1988

El autor Tom M. Apóstol del libro que a continuación vamos a describir plantea que es necesario generar un balance entre el desarrollo riguroso de los resultados matemáticos que se exponen y la parte aplicativa de estos resultados; en general el texto hace alarde a su nombre "CALCULUS", puesto que se enfatiza en los procesos de evolución histórica que ha presentado el cálculo debido a la necesidad de explicar fenómenos naturales y dificultades conceptuales desde el punto de vista matemático.

Cabe resaltar que el autor realiza introducciones históricas antes de explicar un tema en particular con el objetivo de mostrar los esfuerzos y aciertos que la humanidad ha realizado antes y después de explicar un concepto o resultado bien sea matemático o físico.

Este texto está dividido en tres partes, dos de ellas corresponden al desarrollo del Cálculo en una variable (del capítulo 1 al 11) y la otra presenta un amplio trabajo en Algebra Lineal con aplicaciones a la Geometría Analítica (del capítulo 12 al 16).

Una particularidad especial de este texto es la forma en la cual están dispuestos los contenidos, a diferencia de los otros textos que inician el estudio del cálculo

[4] Una sucesión S es una sucesión fundamental si para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $n(\varepsilon)$ tal que para todo
$k > n(\varepsilon)$, $\left|S_k - S_{n(\varepsilon)}\right| < \varepsilon$

con los conceptos de límite, derivadas y luego integrales, en este se estudia primero el concepto de integral ya que según su autor es históricamente correcto y pedagógicamente adecuado. Por este motivo la primera parte del libro realiza una introducción histórica en la cual se explican las ideas esenciales del método de exhaución, que consiste en encontrar el área de una región dada inscribiendo en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea de fácil cálculo, luego se repite este proceso hasta obtener la región dada. Este método fue utilizado por Arquímedes (287 – 212 a. C.) y le permitió por ejemplo encontrar la fórmula exacta del área de un círculo y de otras regiones especiales. Sin embargo el desarrollo de este método tuvo que esperar casi 18 siglos para su desarrollo hasta transformarse progresivamente en lo que hoy conocemos como cálculo integral. También en esta parte el autor expone que el estudio de una forma rigurosa y completa, del cálculo integral y diferencial, depende de un estudio cuidadoso de los números reales y por este motivo se destinan unas secciones para mostrar todas las propiedades de estos, además se estudian algunos métodos de demostración que permitirán al lector deducir los teoremas, a partir de los axiomas y adquirir destreza en esta área.

Dos características muy peculiares que presenta el texto es que muestra pocos ejemplos resueltos y una gran variedad de ejercicios en los se aprecian resultados que complementan la parte teórica que este expone, lo que indica que el autor busca que sus lectores planteen conjeturas y de igual manera las demuestren con la teoría desarrollada hasta el momento, presentándose un cambio de un lector pasivo a uno participativo en su enseñanza. Por otro lado se aprecia que no hace uso de las nuevas tecnologías, hecho que puede ser disculpado, pues este texto fue editado en 1988.

4.4.1 Números Reales. El texto se plantea trabajar los números reales como elementos primitivos y toma algunas de sus propiedades básicas como axiomas, las demás se deben deducir a partir de ellos; estos resultados son ya conocidos en cursos de básica primaria y media, mientras que otros sólo se empiezan a conocer a nivel universitario y que son fundamentales para el desarrollo del cálculo como es el "axioma de continuidad" y la implementación de métodos demostrativos básicos para los desarrollos lógico matemáticos.

A continuación se expondrán en orden de presentación los temas en donde el texto empieza a mencionar los números reales.

4.4.2 Conceptos básicos de la teoría de conjuntos. En la sección que se refiere a la notación para designar un conjunto se presenta el conjunto de los enteros positivos como el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$, en donde se evidencia el conocimiento previo de los enteros positivos y la idea intuitiva de infinito. De igual manera se habla de los reales positivos sin comentar su construcción, los presenta desde el punto de vista conjuntista, es decir $\{x: x > 0\}$. . Así mismo en esta sección se definen las operaciones que se pueden realizar entre conjuntos y se señala que las operaciones unión e intersección poseen muchas analogías con la adición y multiplicación de números reales, por ejemplo se puede demostrar que la unión y la intersección de conjuntos son operaciones conmutativas y asociativas, propiedades que también cumplen las operaciones básicas de números reales.

Por último en la sección de ejercicios se presentan algunos conjuntos de números reales que cumplen ciertas condiciones y se plantea que se deben listar todos sus elementos.

4.4.3 Un conjunto de axiomas para el sistema de números reales. En esta sección el texto expone que existen varias maneras de presentar o definir los números reales. Una de ellas y la más común consiste en introducir los números enteros positivos para después ampliar este sistema a los racionales positivos, luego se utilizan los racionales como base para construir los irracionales y por último se introducen los reales negativos y el cero, la parte más complicada de este argumento es el paso de los números racionales a los números irracionales. Sin embargo debemos resaltar que este proceso solamente es mencionado, pero no se desarrolla. El autor es claro en afirmar que en el texto los números reales no serán planteados de forma constructiva, sino que se consideran "como conceptos primitivos que satisfacen un cierto número de propiedades que se toman como axiomas; es decir, se supone que existen ciertos objetos, llamados números reales, que satisfacen 10 axiomas". Al trabajar de esta manera todas las propiedades que se conocen se mencionan a manera de teoremas que tendrán que ser probados utilizando los axiomas.

Los axiomas que se presentan se dividen en tres: de cuerpo, de orden y de completitud o del extremo superior, donde se vuelve a resaltar la existencia de los números reales.

4.4.4 Números enteros y racionales. En esta sección se define el conjunto de los números enteros y el de los números racionales partiendo de que son subconjuntos de los números reales, iniciando con los números enteros positivos en función de un conjunto inductivo[5], de ahí que, un número real se llama entero positivo si pertenece a todo conjunto inductivo. A los opuestos de los enteros positivos se les llama enteros negativos en virtud del axioma de orden número cinco y debido al axioma de la existencia del neutro (correspondiente al número cuatro de la clasificación ya mencionada) se introduce el número cero. En consecuencia "los enteros positivos junto con los enteros negativos y el cero, constituyen el conjunto $\mathbb{Z}$ que se llama simplemente conjunto de los enteros". Al tener definido este conjunto se ve la necesidad de verificar por ejemplo, si al operar dos enteros con algunas operaciones, como la suma o el cociente, el resultado será de nuevo un número entero. El texto no hace un análisis detallado de esto, sin embargo es claro que el conjunto de los números enteros es más

[5] Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las propiedades siguientes: a) el número 1 pertenece al conjunto y b) para todo x en el conjunto, el número $x + 1$ pertenece también al conjunto.

amplio que el conjunto de los números naturales ya que por ejemplo la ecuación $x + 4 = 2$ no tiene solución en los naturales pero en los enteros sí.

Los números racionales se definen de forma clásica, como cocientes de enteros a/b, con $\mathrm{b} \neq 0$, el conjunto conformado por todos los números racionales se representa convencionalmente. El autor deja como tarea para el lector probar que este conjunto cumple con los axiomas de cuerpo y de orden.

La estrategia planteada para definir los números irracionales es mediante el concepto de complemento de un conjunto: *“los números reales que no pertenecen a $\mathbb{Q}$ se llaman irracionales”.*

4.4.5 Interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta. Debido a los trabajos previos que se hacen en el plano cartesiano en cursos de educación básica y media no es desconocido que los números reales pueden representarse en una recta, bajo la convención de que los números que están a la derecha del cero son positivos y a la izquierda se ubican sus negativos, teniendo en cuenta una determinada escala. Toda esta situación el autor la da por conocida tal vez por las razones comentadas al inicio.

A continuación en el texto se menciona de forma indirecta una condición matemática que habla de la existencia de una biyección para que los números reales puedan ser representados en una recta, la cual se puede apreciar como sigue: “Si se adopta un conjunto de axiomas para la Geometría euclídea, cada número real corresponde a uno y sólo un punto de la recta y, recíprocamente, cada punto de la recta a un número real y sólo uno”. El autor menciona que se hará uso de ideas intuitivas geométricas para muchos análisis, tal vez por ello no se estudia de forma más detallada la continuidad de la recta.

Debido a la relación de orden de los números reales se puede interpretar geométricamente la expresión $x < y$ como "el punto x está a la izquierda del punto y ." En consecuencia la desigualdad $a < x < b$ se interpreta como que el punto x se encuentra entre a y b.

La posibilidad de representar los números reales en una línea recta didácticamente es útil ya que permite en ocasiones visualizar y comprender mejor algunas propiedades de estos, aunque el autor menciona que el lector debe ser consciente de que todas las propiedades de los números reales deben deducirse de los axiomas sin recurrir a intuiciones geométricas, también se aclara que el texto acudirá frecuentemente a la intuición geométrica para aclarar o para inducir algunas cuestiones, de la misma forma se aclara que las demostraciones de los teoremas elementales se realizarán de forma analítica.

4.4.6 Axioma del extremo superior. Antes de empezar a comentar este axioma, en el texto se propone analizar la ecuación $x^2 = 2$ a partir de los axiomas de cuerpo y orden, llegando a la conclusión de que no existe tal x en los racionales que satisfaga la ecuación mencionada, mostrándose la necesidad de introducir los conceptos teóricos que garanticen la existencia de los números irracionales, pues hasta el momento lo único que se ha establecido de estos números es que son aquellos que no son racionales. Por tales motivos se empieza definiendo los conceptos de cota superior e inferior, extremo superior e inferior, máximo y mínimo, para luego establecer el axioma de completitud o del extremo superior, el cual se presenta de la siguiente manera:

> *Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = sup\ S$.*

De forma análoga, pero a manera de teorema, se presenta el caso cuando un conjunto bajo las condiciones ya indicadas es acotado inferiormente, ya que su demostración depende del axioma en mención.

En este momento se esperaría ver clara la existencia de los números irracionales, pero como se puede apreciar el hecho aún está oculto. Debido a ello es necesario mencionar otros resultados que permitirán llegar a la existencia buscada. Entre ellos se tienen los siguientes teoremas:

- *El conjunto de los enteros positivos no está acotado superiormente.*
- *Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$. (Este teorema se considera como una generalización del resultado anterior)*
- *Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$. (Este resultado es conocido como la propiedad arquimediana, en donde su demostración se fundamenta en el teorema anterior)*

A continuación se mencionará un teorema que es fundamental para la demostración de resultados que se refieren al extremo superior e inferior y que es útil en el cálculo integral,

Si tres números reales a, x e y satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$ para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$.

En el texto también se aprecian resultados que permiten encontrar otro número entre otros dos, bajo ciertos requisitos que debe cumplir el conjunto en donde se encuentran los números.

Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales:
a) Si S tiene extremo superior, para un cierto x de S se tiene $x > sup\ S - h$. (Es importante observar que $sup\ S - h < x < sup\ S$)
b) Si S tiene extremo inferior, para un cierto x de S se tiene $x < \acute{\imath}nf\ S + h$. (De forma análoga se tiene $\acute{\imath}nf\ S < x < \acute{\imath}nf\ S + h$).

Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, sea C el conjunto $C = \{a + b \ / \ a \in A, b \in B\}$.

a) Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior, y $sup\ C = sup\ A + sup\ B$.

b) Si A y B poseen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior, e $ínf\ C = ínf\ A + ínf\ B$.

Al plantear toda esta estructura teórica el autor propone a manera de teorema el hecho de la existencia de los números irracionales positivos, tal que "cada número no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única"; cabe resaltar que la demostración de esta proposición depende del axioma de completitud y de los teoremas enunciados anteriormente. Por último se puede afirmar que la ecuación $x^2 = a$ tiene solución en los reales.

La existencia de los números irracionales negativos es presentada como una generalización al último teorema comentado, es decir que la ecuación $x^n = a$ tiene solución en los reales bajo las siguientes condiciones:

Si n es un entero positivo impar, para cada real x existe un número real y, y sólo uno tal que $y^n = x$. Se llama la n – ésima raíz de x y se denota por y= $\sqrt[n]{x}$ o $x^{1/n} = y$.
Si n es un entero positivo par y x es un número negativo, no existe un número real y tal que $y^n = x$ puesto que $y^n \geq 0$ para cada número real y. Ahora si x es un número positivo, existe un número real positivo y, y sólo uno tal que $y^n = x$.

La demostración de estas afirmaciones es muy interesante porque son una consecuencia del teorema del valor intermedio para las funciones continuas (este teorema se deduce directamente del teorema de Bolzano), en consecuencia la existencia de los números irracionales depende de la aplicación del concepto de continuidad.

Debido al desarrollo teórico expuesto, el texto presenta una serie de proposiciones a manera de ejercicios que hablan básicamente de algunas propiedades que cumplen los números irracionales que llevan a mencionar el concepto de infinito sin ser definido previamente, tal como se aprecia a continuación:

> *Si x e y son números reales arbitrarios, $x < y$, probar que existe por lo menos un número racional r tal que $x < r < y$ y deducir de ello que existen infinitos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es denso en el sistema de los números reales.*
> *Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número irracional z tal que $x < z < y$ y deducir que existen infinitos.*

4.4.7 Representación de los números reales por medio de decimales. En esta sección se estudian las propiedades que presentan los números reales de la forma: $x = a_0, a_1 a_2\, a_3 \ldots a_n$ y $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, donde a_0 es un entero no negativo, y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9$. La primera representación hace referencia a números reales que son necesariamente racionales de la forma $x = a/10^n$ donde a es un entero. La segunda puede representar un número racional (en notación decimal infinita periódica o no periódica) o irracional.

El número real de la forma $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ puede ser representado utilizando la representación de un número entero en base diez, es decir,

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Para el caso de un número real $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ se utiliza un proceso en donde se maneja una sucesión de intervalos de longitud $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots,$, cada uno contenido en el anterior y conteniendo cada uno el punto x, este proceso es llamado encaje de intervalos lo anterior se expresa analíticamente de la siguiente forma:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

Esta técnica es utilizada también para construir números irracionales a partir de los racionales.

El comentar esta última representación permite construir un conjunto S de tal manera que sea posible aplicar el axioma del extremo superior. Entonces sea x un número real positivo dado, sea a_0 el mayor entero menor o igual a x, sea a_1 el mayor entero tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x$; en general determinados, $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots a_{n-1},$ sea a_n el mayor entero tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x$.

Considerando S como el conjunto de todos los números $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$, como S es no vacío y acotado superiormente, tiene extremo superior que coincide con x. En consecuencia,

> *"Los números reales pueden tener dos representaciones decimales distintas, pues esto es un simple ejemplo del hecho de que dos conjuntos distintos de números reales pueden tener un mismo extremo superior".*

El método utilizado para construir tales conjuntos puede ser apreciado a través del siguiente ejemplo:

> "si un número tiene una expresión decimal que termina en ceros, tal como $\frac{1}{8} = 0{,}125000$ ..., este número se puede escribir también como un decimal que termina en nueves, si se disminuye el último digito no nulo en una unidad, es decir $\frac{1}{8} = 0{,}124999$ ..."[6].

4.4.8 Principio de inducción matemática. Este principio se basa fundamentalmente en el concepto de un conjunto inductivo utilizado para la construcción de los números enteros y es utilizado en demostraciones de proposiciones que se generalizan para los enteros positivos las cuales se denotan por $\mathrm{A(n)}$. El esquema de la demostración consiste en:

[6] *Este ejemplo es planteado como parte del ejercicio 7 de la sección 10.10 de la Pág. 480.*

- *Primero se prueba la afirmación $A(n)$ para $n = 1$.*
- *Luego se supone que la afirmación $A(k)$ es verdadera para $k > 1$, esta parte es llamada hipótesis inductiva.*
- *Por último se prueba que $A(k + 1)$ y se concluye que por el principio de inducción matemática la proposición $A(n)$ se cumple para todo entero positivo n.*

Al tener claro este método, el autor propone demostrar que se puede construir con regla y compás en la recta real, segmentos de longitud $\sqrt{n}$, de ahí que es posible ubicar en la recta números irracionales que se generen de la forma $\sqrt{\mathrm{n}}$, en donde la estructura matemática que permite tal demostración es la aplicación del teorema de Pitágoras y el principio de inducción.

4.5 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. VOL. II. NICOLAI PISKUNOV. SEXTA EDICIÓN. EDITORIAL MIR. 1983

La versión en español de este texto toma como base la sexta edición que existe en ruso publicada en el año 1983. Según su autor se introdujeron unas modificaciones con el objetivo de lograr que el lector asimile mejor el curso.
El texto está dividido en dos tomos; el primero está conformado por los capítulos $I - XII$ y el segundo por $XIII - XIX$. Particularmente nos centraremos en el tomo I, en el cual analizaremos las nociones mencionadas en la rejilla analítica.

Se menciona en el prefacio del texto que los capítulos 1 y 2 del tomo I, están escritos de la forma más breve posible, ya que la idea es que el estudiante adquiera en el menor tiempo una serie de conocimientos matemáticos necesarios para el estudio de otras disciplinas. También se menciona que algunos de los problemas que suelen presentarse con los conceptos que se desarrollan en ellos, se analizarán en capítulos posteriores. A diferencia de los otros textos, para su autor la noción más importante del cálculo diferencial es la derivada, ya que según su experiencia pedagógica esta noción es necesaria para otras asignaturas de la enseñanza superior.

Otra característica importante, según el autor, es que se aumentó el número de problemas, algunos de ellos con un grado de dificultad mayor y que requieren un conocimiento matemático más profundo. El objetivo principal de los problemas y ejemplos que se presentan en cada tema es contribuir a la mejor comprensión del texto. Teniendo en cuenta lo expuesto en el prefacio y observando el tipo de problemas y la terminología utilizada podemos destacar que en general este es un libro que está destinado más a estudiantes de matemáticas que a estudiantes de otros programas.

Capítulo I

Número, variable y función

Aunque en el prefacio de este libro se menciona que los dos primeros capítulos están escritos de la forma más breve posible debemos destacar que este, junto con el Cálculo de Tom M. Apóstol dedica secciones del primer capítulo a hablar sobre los números reales destacándolos como un concepto fundamental en matemáticas.

Este capítulo se divide en 10 secciones, la primera estudia los números reales y su representación en la recta real. En esta sección podemos destacar que se resalta el concepto de número como una noción fundamental de las matemáticas, que surgió en la antigüedad y que a través del tiempo se fue formalizando.

Inicialmente se puede apreciar que la presentación de los números reales no difiere en mucho a la forma como lo realizan los otros textos, presentando los números racionales como el cociente entre dos enteros, con denominador diferente de cero o como fracciones decimales periódicas finitas o indefinidas periódicas y los números irracionales como fracciones decimales indefinidas no periódicas. La unión de estos dos conjuntos se denomina números reales, los cuales se pueden ordenar de acuerdo a su magnitud (propiedad de la tricotomía).

La representación que se realiza de los números reales en una línea recta infinita o eje numérico también se hace de la forma habitual (un punto origen denominado O, situando los reales positivos a la derecha y los negativos a la izquierda del punto origen, tomando una escala para su ubicación). Además, se toma como evidente que a todo número real le corresponde sólo un punto de la línea recta y viceversa.

Otra característica en esta sección es que se menciona que se pueden considerar las nociones número y punto como sinónimos y así serán utilizados en el desarrollo del texto.

En comparación con otros libros, en este tema se presentan, sin demostración, la propiedad de la densidad de los números reales y un teorema que plantea que cualquier número irracional se puede aproximar por medio de números racionales, con el grado de precisión que se desee. Por ejemplo:

> *El número irracional* $\sqrt{2}$ *se expresa por medio de números racionales:*
> $1{,}4$ *y* $1{,}5$*: con un error no mayor de* $\frac{1}{10}$
> $1{,}41$ *y* $1{,}42$*: con un error no mayor de* $\frac{1}{100}$
> $1{,}414$ *y* $1{,}415$*: con un error no mayor de* $\frac{1}{1000}$*. Etc.*

La sección 2 define el valor absoluto de un número real y las propiedades que se derivan de este, destacando su importancia para temas posteriores.

Las secciones 3 y 4 definen lo que son magnitudes variables, constantes y el campo de variación de una magnitud variable que son todos los valores numéricos que toma una variable. Por ejemplo, los diferentes tipos de intervalos que existen en matemáticas son campos de variación. Aparece en esta sección un concepto topológico que en los otros textos no se menciona como es el concepto de vecindad (bolas), que es utilizado para definir varios conceptos de topología como por ejemplo punto interior, punto adherente y punto de acumulación.

Se definen en la sección 5 las nociones de variable ordenada, creciente, decreciente y acotada, nociones que son similares a las presentadas en otros textos. En muchas situaciones es necesario determinar cómo varía una magnitud cuando depende de la variación de otra; para mirar esta situación se introduce en la sección 6 los conceptos de función, variable independiente, dominio, función creciente y función decreciente. Es importante señalar que para establecer el concepto de función, primero se definen algunas nociones que en otros textos no son mencionadas (magnitud variable, constante, ordenada, creciente, decreciente y acotada). Además de esto, la definición del concepto de función también difiere de las expuestas en los otros libros, ya que la presenta de la siguiente forma:

> *Si a cada valor de la variable x, perteneciente a cierto campo, le corresponde un sólo valor determinado de otra variable y, entonces esta será función de x y podemos escribir simbólicamente $y = f(x)$.*

Se definen también en esta sección función creciente y el dominio de una función creciente, de una forma análoga a los demás libros analizados.

La sección 7 se refiere a las formas en las cuales se puede expresar una función (tabulando los valores, gráficamente y analíticamente). En las secciones 8 y 9 se presentan las funciones elementales (potencial, exponencial, logarítmica, trigonométricas y trigonométrica inversa) con sus respectivas representaciones gráficas y sus dominios. Las funciones algebraicas se dividen en tres grupos: las racionales enteras o polinomios, las racionales fraccionarias (cocientes de dos polinomios) y las irracionales (funciones en las cuales se realizan operaciones de suma, resta, multiplicación, división y elevación de potencias, con exponentes números racionales no enteros). Finalmente la sección 10 hace referencia al sistema de coordenadas polares.

Capítulo II

Limite. Continuidad de la función

Este capítulo se divide en 11 secciones, en la número uno se define el límite de una variable ordenada x ,que es una variable en la cual se puede determinar para cada par de sus valores cual es anterior y cual es posterior, también se presenta el significado de que una variable x tienda al infinito. Es significativo anotar que el autor del libro destaca la importancia de este concepto debido a su estrecha relación con los conceptos de derivada e integral. La definición presentada es la siguiente:

> ***Definición 1****. El número constante a se denomina límite de la variable x, si para cualquier número infinitesimal positivo ε prefijado, se puede indicar tal valor de la variable x, a partir del cual todos los valores posteriores de la misma satisfacen la desigualdad $|x - a| < \varepsilon$.*
> *Si el número a es límite de la variable x, se dice que x tiende al límite a; su notación es: $x \longrightarrow a$ o $\text{lím}\, x = a$.*

En esta definición de límite aparecen términos como número infinitesimal y en los párrafos posteriores otros como vecindad infinitesimal e infinitamente grande, los cuales no son utilizados en los otros libros de cálculo objeto de nuestro análisis. Históricamente estas nociones causaron muchas contradicciones, matemáticos como por ejemplo Newton (1642 - 1727) y Leibniz (1646 - 1716) trataron de fundamentar el uso de las cantidades evanescentes y los diferenciales pero las contradicciones que generaban eran notorias. Berkeley en su libro, *El analista,* publicado en 1734 mostraba los problemas del rigor del cálculo; para él la utilización de estas nociones producía inconsistencias, ya que en algunas ocasiones los utilizaban como denominadores por ser cantidades diferentes de cero, pero cuando aparecían como sumandos se consideraban iguales a cero debido a que tenían un valor despreciable. Sin embargo en la sección cuatro del texto algunos de estos conceptos son precisados.

Finalmente se resuelven algunos ejemplos basados en la definición de límite que se presenta, apoyando además sus resultados en representaciones gráficas y resaltando que en ocasiones el límite de una variable puede no existir y si existe, este es un valor constante único.

Posteriormente la sección 2 define el límite de una función cuando la variable x tiende a un límite a o al infinito en la forma habitual $(\varepsilon - \delta)$ y dando también una representación gráfica de este concepto. De manera algo informal se presenta el significado del límite por la derecha y por la izquierda aclarando que si estos dos valores límites son iguales entonces el límite de la función existe y que el recíproco de esta observación también es verdadero, también se aclara que no es necesario que la función esté definida en el punto dado para que el límite exista. Por último se definen los límites en el infinito de la manera habitual.

En relación con los demás textos podemos observar que son muy pocos los ejemplos que se presentan en esta sección y algunas de las observaciones que se presentan en los otros libros son teoremas y aquí simplemente son observaciones para el lector.

La siguiente sección define los límites al infinito en una forma análoga a los demás libros, se define además un concepto que no aparece en los otros textos como lo es la noción de función acotada y algunos teoremas relacionados con este tipo de funciones.

Los infinitesimales, nociones que no son muy usuales en muchos textos de cálculo, se definen en la sección cuatro de la siguiente forma:

> ***Definición pág. 38****: la función $\alpha = \alpha(x)$ se denomina infinitamente pequeña (infinitesimal), cuando $x \to a$ o cuando $x \to \infty$, si $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ o $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.*

De acuerdo con la definición podríamos decir que los infinitesimales son funciones que tiende a cero cuando su argumento varía de un cierto modo, por ejemplo la función

> ***Ejemplo pág. 38****: La función $\alpha = (x-1)^2$ es infinitamente pequeña cuando $x \to 1$, dado que $\lim\limits_{x \to 1} \alpha = \lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$*

Si miramos los trabajos realizados por Agustín Louis Cauchy en su *Curso de Análisis* podremos ver que alguna de la terminología en el texto de Piskunov fue utilizada por Cauchy. Por ejemplo se define en el *Curso de Análisis* ***cantidad variable***, la cual también es definida en el capítulo I de Piskunov, este concepto le permite a Cauchy introducir la definición de límite.

La forma en la cual se definen los infinitesimales en Piskunov es similar a la forma en la cual se hace en el *Curso de Análisis* de Cauchy, igualmente es importante comentar que gracias a la definición épsilon-delta se logró evitar el uso de las cantidades infinitamente pequeñas.

Así mismo en esta sección también se demuestran algunos teoremas que se relacionan con los infinitesimales, todas las demostraciones se apoyan en la definición de límite de una función:

> ***Teorema 1.*** *Si la función $y = f(x)$ puede ser representada como suma de un número constante b y la magnitud infinitamente pequeña α:*

$$y = b + \alpha$$

Se tiene que $\text{lím}\, y\ = b$ *(cuando* $x\ \rightarrow\ a$ *o* $x\ \rightarrow \infty$*)*
Recíprocamente, si $\text{lím}\, y\ =\ b$ *se puede escribir* $y = b + \alpha$*, donde* α *es una magnitud infinitamente pequeña.*
Teorema 2. *Si* $\alpha = \alpha(x)$ *tiende a cero, cuando* $x\ \rightarrow a$ *(o cuando* $x\ \rightarrow \infty$*), sin reducirce a cero, se tendrá que* $y = \frac{1}{\alpha}$ *tiende al infinito.*
Teorema 3. *La suma algebraica de dos, tres o un número indeterminado de infinitesimales es una función infinitamente pequeña.*
Teorema 4. *El producto de una función infinitamente pequeña* $\alpha = \alpha(x)$ *por una función acotada* $z = z(a)$*, cuando* $x\ \rightarrow a$ *(o* $x\ \rightarrow \infty$*), es una magnitud (función) infinitamente pequeña.*
Teorema 5. *El cociente* $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ *de la división de una magnitud infinitamente pequeña* $\alpha(x)$ *por una función, cuyo límite es diferente de cero, es una magnitud infinitamente pequeña*

Si observamos detalladamente estos cinco teoremas podremos ver por ejemplo que el teorema 2, tiene similitudes con los teoremas presentados para límites infinitos que se muestran en el libro de Leithold (paginas 58-59) y algo equivalente sucede con los teoremas 4 y 5.

Los teoremas que permiten calcular límites de funciones se presentan en la sección 6. Los fundamentales, como son el límite de una suma, del producto y del cociente de funciones, son demostrados y se da un ejemplo práctico para mostrar la forma en la cual se puede aplicar cada uno de ellos. También se demuestra el denominado teorema de estricción, el cual es utilizado para en la demostración de los siguientes límites:

$$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{senx}{x} = 1 \ \ y \ \ \lim_{x\rightarrow\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Estos límites tienen gran aplicación en matemáticas; es por este motivo que la mayoría de los textos los presentan como teoremas con su debida demostración.

Por último debemos comentar que las cantidades infinitesimales fueron desterradas de la teoría matemática en el siglo XIX y principios del siglo XX debido a las contradicciones que generaban, sin embargo para finales de este mismo siglo fueron rescatados como una ayuda para calcular límites. Pero a finales de 1960 Abraham Robinson (1918-1974) logró formalizarlos dando origen a una nueva rama de la matemática conocida como Análisis No Estándar.

4.5.1 Continuidad de las funciones. En muchos libros de cálculo para introducir este concepto se presenta primero una idea preliminar utilizando alguna función que presente algún tipo de discontinuidad y empleando recursos gráficos para aclarar algunas ideas, en este texto no es así, la definición de continuidad en un punto es la siguiente:

> ***Definición 1 pág. 55.*** *La función $y = f(x)$ se considera continua, para el valor de $x = x_0$ (o en el punto x_0), si está definida en cierta vecindad del punto x_0, (incluido el punto x_0) y si:*
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (1)$$
>
> *O lo que es lo mismo,*
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \qquad (2)$$
>
> *La condición (2) se puede escribir así*
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$
>
> *o*
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ldots \qquad (2)$$

Aunque esta definición a primera vista es diferente de la que se presenta en los demás libros, si realizamos un análisis detallado podemos ver que es igual, ya que la función debe estar definida en el punto x_0 , el límite de la función en el punto x_0 debe existir y finalmente el valor del límite debe ser igual al valor de la función en el punto en cuestión. Posteriormente se demuestra que si dos funciones son continuas en un punto dado entonces la suma, el producto, el cociente (siempre y cuando el denominador sea diferente de cero) también son continuas en dicho punto. Se destaca igualmente que cualquier función fundamental es continua en todos los puntos de su dominio. Las definiciones sobre la continuidad de una función en un intervalo abierto o cerrado se presentan de la forma moderna.

Así mismo se menciona que si no se satisface alguna de las tres condiciones necesarias para que una función sea continua en un punto, entonces ese es un punto de discontinuidad de la función. La sección diez del capítulo destaca algunos teoremas relacionados con las funciones continuas en un intervalo, como el teorema del valor medio y el teorema que garantiza que una función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo y un valor mínimo.

Aunque no se puede ver su utilidad, es necesario que mencionemos que la noción de continuidad y los teoremas que se presentan son muy importantes para el estudio de otros conceptos e históricamente fueron fundamentales en el desarrollo del cálculo.

4.5.2 Sucesiones. El capítulo XIV del tomo II de este texto estudia las series. Esperaríamos que el concepto de sucesión empleado por Cauchy para la demostración del teorema del valor intermedio que históricamente fue muy importante para la fundamentación de los números reales fuera tratado en esta sección, pero no es así, solamente se utiliza esta noción para definir el concepto de serie y mediante una nota de pie de página se especifica que una sucesión está determinada cuando se conoce la ley o regla que permite encontrar su término n-ésimo.

Aunque cotidianamente para la gente del común las palabras serie y sucesión pueden ser sinónimas, en matemáticas son nociones diferentes y si bien intuitivamente, o de la matemática básica, los estudiantes tienen una idea del significado de ellas, es necesario tener una definición matemática precisa de cada una, ya que por ejemplo las sucesiones sirven para definir conceptos más avanzados en ramas de las matemáticas como el análisis real.

5. A MANERA DE CONCLUSIÓN

En primer lugar debemos decir que el análisis de textos que realizamos nos permitió valorar la importancia de la elección cuidadosa y meditada de un texto guía para el desarrollo de una temática como la de número real que como sabemos está en la base misma de los ulteriores conceptos del cálculo diferencial e integral. A nuestro parecer, debemos colocar en una balanza el rigor con que se presentan los conceptos y las estrategias didácticas de que hace acopio el texto para que los conceptos sean más significativos y asequibles al estudiante. En este sentido es necesario analizar no sólo el lenguaje con que se comunican las ideas matemáticas, sino también el tipo de ejemplos que se proponen y los problemas y ejercicios con los que el autor, o autores, pretenden poner a reflexionar al estudiante.

Aunque es evidente que por obvias razones los textos no podrían dar cuenta del proceso histórico que llevó a la objetivación de $\mathbb{R}$ como objeto matemático, sí creemos que en la mayoría de ellos no se evidencia el entramado conceptual tan complejo que gira alrededor de esta noción. A continuación presentaremos algunas conclusiones generales con respecto a los textos que analizamos tomando como telón de fondo la rejilla analítica:

- **El Infinito**

De acuerdo al análisis realizado vemos que ninguno de los textos presenta una referencia teórica acerca del infinito y su relación con los números reales. En todos ellos se menciona al infinito cuando se definen los números racionales como los números decimales finitos e infinitos periódicos y los irracionales como los decimales infinitos no periódicos. En todos los casos el infinito aparece como una expresión simbólica que sirve para representar intervalos no acotados, el comportamiento de funciones que crecen o decrecen indefinidamente, límites infinitos o al infinito o para dar una idea intuitiva de sucesión y para definir el límite de una sucesión y los teoremas relacionados con este concepto. Lo que sí aclaran los textos es que el símbolo ∞ no representa un número real, ya que este no cumple las propiedades de dichos números.

Pero recordemos que desde épocas pretéritas, y como lo anotábamos anteriormente, muchos filósofos y matemáticos le encontraron a este concepto su carácter corrosivo y paradójico asociado al continuo geométrico y físico. Son famosas al respecto las paradojas de Zenón y toda la discusión de Aristóteles sobre el infinito actual y potencial y la necesidad de asignar a lo continuo la propiedad fundamental de ser infinitamente divisible. Igualmente la concepción de infinitesimal que recorrió todas las épocas, desde los griegos hasta los albores del siglo XX y luego su salida posterior para dar paso a la noción de límite que aclaraba por fin esos procesos infinitos tan volátiles. En los textos no se problematiza este concepto sino que se deja en un plano muy intuitivo y finitista, y aunque no es competencia de este trabajo, le apostamos a la idea de que justamente allí puede radicar el problema para aprehender la noción de número real: el salto del infinito potencial al actual.

- **La Noción De Continuidad**

Los textos introducen esta noción a través de de las representaciones gráficas. Por esta vía se muestran gráficas que tienen saltos, huecos, interrupciones u oscilaciones indefinidas y se contrasta con otras que no la tienen para definir respectivamente funciones discontinuas y continuas. Algunos de los libros mencionan los diferentes tipos de discontinuidad que existen; evitable, inevitable, infinita y de salto. Se puede observar también que la continuidad en un punto (un número) se define a través de tres condiciones: la función debe estar definida en el punto, el límite debe existir, y el valor del límite debe ser igual al valor de la función en dicho punto. Las operaciones con funciones continuas, la continuidad de funciones compuestas, la continuidad de funciones en intervalos abiertos y cerrados se realiza prácticamente de la misma forma en cada uno de los textos, aunque el de Spivak y el de Apóstol lo hacen de manera más rigurosa. Las propiedades fundamentales de las funciones continuas, que se reflejan a través de teoremas como el de Bolzano y el del valor intermedio, son mencionadas en cada uno de los textos. Sin embargo libros como el Cálculo de Leithold, el Cálculo de Larson y el Cálculo Diferencial e Integral de Piskunov no realizan su demostración, sino que se conforman con la evidencia gráfica de dichos resultados y recomiendan al lector consultar libros de cálculo avanzado para su revisión y señalan que la demostración se fundamenta en la propiedad de completitud de los números reales. El Cálculo Infinitesimal de Spivak y el Calculus de Apóstol dedican una sección especial para la demostración de los teoremas antes mencionados, porque para ellos aunque es una propiedad evidente desde el punto de vista gráfico, se debe fundamentar de una manera meramente analítica.

El desarrollo de la noción de continuidad está relacionado de manera indisoluble con el proceso de formalización y rigorización de $\mathbb{R}$. Debemos recordar por ejemplo que Richard Dedekind antes de desarrollar la construcción del sistema numérico real tuvo que postular en términos matemáticos la continuidad de la línea recta. Pero hechos tan importantes como este no se destacan en los textos, aunque se subraya la importancia del axioma de completitud de los números reales en la demostración del teorema de Bolzano y del valor intermedio. Si bien la introducción de la continuidad se hace teniendo en cuenta las ideas intuitivas del lector, también debemos especificar que el tratamiento de todos los teoremas relacionados con este concepto se realiza de una forma más o menos rigurosa. Finalmente de acuerdo al análisis realizado podemos decir que con respecto a el concepto de número real, el Cálculo Infinitesimal de Spivak y el Calculus de Apóstol son los que nosotros escogeríamos al momento de estudiarlo ya que realizan una presentación que mezcla adecuadamente las ideas intuitivas, los conocimientos previos del lector y la parte rigurosa de la matemática. Además de lo anterior, en estos textos se destacan y evidencian en las demostraciones la importancia de los números reales para la definición del concepto de continuidad y viceversa.

- **Límites y Sucesiones**

En relación con la presentación y definición de los conceptos de límite y sucesión podemos destacar los siguientes aspectos de nuestro análisis. Libros como el Cálculo de Leithold y el Cálculo de Larson inician el estudio del concepto de límite basados en ejemplos de gráficas de funciones racionales que no se encuentran definidas en un punto de su dominio, analizando qué sucede con el valor de la función cuando se toman valores cada vez más próximos a dicho punto. Sin embargo finalmente todos los textos optan por dar la definición de límite en los términos usuales de épsilon y delta. Es interesante notar que el Calculus de Apóstol introduce esta noción en términos del concepto topológico de *vecindad* y el Cálculo Diferencial e Integral de Piskunov hace uso de la noción de infinitesimal, que es menester recordar que fue erradicada de las matemáticas a partir de los trabajos de Dedekind, Weierstrass y otros.

También se puede evidenciar que los libros desarrollan por igual los teoremas relacionados con este concepto y demuestran solamente algunos de ellos. Libros como el Cálculo de Larson, el Cálculo Infinitesimal de Spivak y el Cálculo Diferencial e Integral de Piskunov resaltan la importancia de este concepto en el estudio del cálculo y el análisis matemático, pero no destacan su relación con los números reales.

Para el concepto de sucesión de nuevo pudimos observar que los autores parten de una idea intuitiva para luego presentar una definición formal. Los textos definen el concepto de sucesión y límite de una sucesión de la misma forma, excepto el Cálculo Diferencial e Integral de Piskunov que trabaja directamente sobre el concepto de serie y únicamente menciona en un aparte el significado intuitivo de sucesión.

La relación que se evidencia más claramente entre estos conceptos y los números reales se presenta cuando los autores señalan que para la demostración de algunos teoremas de este tema es necesario utilizar el axioma de completitud de los números reales, pero también destacan que dichas demostraciones escapan al objetivo de los textos.

- **Número Real**

En la presentación que los textos hacen de los números reales podemos observar por ejemplo, que el Cálculo de Leithold, el Cálculo de Larson y el Cálculo Diferencial e Integral de Piskunov realizan una exposición informal alrededor de este concepto. En este sentido, dedican una pequeña parte de las secciones para el estudio del concepto de número real, argumentando que estas son nociones previas al cálculo, y por tanto son nociones que el lector debería poseer. En la presentación que realizan estos tres libros se pueden ver los siguientes aspectos: la definición de número racional como la razón entre dos enteros con el denominador diferente de cero, o como la reunión de los números decimales finitos e infinitos periódicos. Los números que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros se denominan números irracionales; es decir los números decimales infinitos no periódicos, y la unión de los números racionales e irracionales se denomina conjunto de números reales. De estos tres autores solamente Piskunov destaca el concepto de número como un concepto fundamental en matemáticas. En estos tres libros se presenta una interpretación geométrica del conjunto de los números reales asociándolos como puntos de una línea recta horizontal que generalmente es llamada recta real, en esta representación pudimos notar que se ubican en la línea recta únicamente números racionales. Los números irracionales en general, no son representados y se manifiesta que algunos de ellos se pueden ubicar utilizando construcciones geométricas o mediante aproximaciones decimales. Con relación al axioma de completitud de los números reales que es el que garantiza que la línea recta no tenga huecos o en otras palabras es el que garantiza que cada número irracional puede asociarse con un punto de la línea recta o viceversa, los textos sólo se limitan a mencionarlo, el único que destaca su importancia es el Cálculo de Leithold. Los tres desarrollan unas propiedades similares relacionadas con los números reales a saber las propiedades de las desigualdades, la definición de valor absoluto junto con las propiedades que de él se derivan y la representación de conjuntos de números reales por intervalos, además Piskunov menciona sin demostración alguna la propiedad de densidad de los números reales, es decir la propiedad que garantiza que entre dos números reales arbitrarios siempre se pueden hallar tanto números racionales como irracionales.

El Calculus de Apóstol dedica una sección entera para desarrollar el concepto de número real, empieza con una introducción en la cual expone dos métodos usuales para introducir el sistema numérico real, uno de ellos consiste en utilizar los números naturales como base para crear un sistema numérico más amplio que satisfaga ciertas propiedades, es decir crear los números racionales y a partir de ellos construir los números irracionales que es el paso más complicado, en esta parte el autor realiza una reseña histórica en la cual menciona que no fue sino hasta el siglo XIX donde se presentaron tres teorías distintas la de Karl Weierstrass, George Cantor y Richard Dedekind que formalizaron el sistema numérico real. También se especifica que el método empleado en el texto no es constructivo, sino que se postulan de manera axiomática. Se consideran, entonces los números reales como objetos matemáticos primitivos que cumplen diez axiomas, a partir de los cuales se pueden derivar las demás propiedades. Esta presentación es muy interesante ya que partiendo de los axiomas de cuerpo y de orden se demuestran varias de las propiedades de la suma, multiplicación, división y de las desigualdades de números reales, además se proponen como ejercicio la demostración de algunas de ellas. También en esta presentación se realiza una interpretación geométrica de los números reales como puntos de la línea recta y se destaca que aunque todas las propiedades de los números reales se pueden derivar de los axiomas analíticamente, en ocasiones las representaciones gráficas constituyen una fuente importante de intuición matemática y en este sentido puede propiciar elementos para realizar las demostraciones. El axioma de completitud tiene una sección especial en la cual se presenta su definición, se aclaran algunos conceptos y se presentan y demuestran algunas propiedades de los números reales que son consecuencia directa de dicho axioma, como por ejemplo la propiedad arquimediana. Igualmente también se presentan las propiedades del valor absoluto, la representación de los números reales por medio de números decimales, el principio de inducción matemática y la representación de conjuntos de números reales por medio de intervalos. El Cálculo Infinitesimal de Spivak hace una presentación del número real similar a la que realiza el Calculus de Apóstol, se inicia trabajando con unos objetos matemáticos denominados números que satisfacen 12 propiedades, y se evidencia a partir de algunos ejemplos, la aplicación de estas propiedades en la demostración de otras propiedades y en la solución de ecuaciones pero se especifica que esta 12 propiedades no son suficientes para deducir todas las propiedades de los números. En seguida se presenta un capítulo en el cual se muestran los diferentes tipos de números (naturales, enteros, racionales e irracionales), en esta parte se muestra que en los números naturales y en los enteros no se cumplen algunas de las 12 propiedades de los números, también se muestra que los números racionales cumplen las 12 propiedades ,pero se especifica que existe un conjunto de números más grande denominado el conjunto de los números reales que también las satisface y este conjunto está conformado por los números racionales e irracionales. Es importante mencionar que en este capítulo se demuestra que no existe un número racional que elevado al cuadrado sea igual a 2. En este sentido se hace alusión a que con las doce propiedades no es posible demostrar su existencia y es necesario añadir una nueva propiedad que garantice la existencia de dicho número. Con el axioma de completitud se puede garantizar este hecho pero su estudio se realiza en el capítulo 8 en el cual se define y se muestra su utilidad para la demostración de algunos teoremas. Otra característica importante de este libro es que en él se realiza una construcción del sistema numérico real basados en conceptos de algebra abstracta, esto lo hacen pensando en el lector que está interesado en profundizar en este tema. Los demás temas relacionados con los números reales son similares a los que se exponen en los demás textos.

Finalmente después de todo el análisis realizado nos parece que estos dos últimos libros, el de Spivak y el de Apóstol, son los que mejor desarrollan todo lo concerniente a los números reales, ya que en ellos se realiza una exposición más profunda del concepto, se demuestran muchas propiedades y muestran la importancia del concepto en la formalización de otros conceptos matemáticos y la importancia para la matemática misma. Es importante resaltar que son los únicos textos que se dedican a profundizar sobre la propiedad que diferencia los números reales de los racionales; es decir toman en consideración y desarrollan de manera más amplia el axioma de completitud.

BIBLIOGRAFÍA

[Ded72] DEDEKIND, R. Continuidad y números irracionales. 1872.

[Apo86] APÓSTOL, T. Análisis Matemático. Editorial Reverté. Barcelona. 1986.

[Arb98] ARBELÁEZ, G., ANACONA M. y RECALDE L. Número y Magnitud una Perspectiva Histórica. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali 1998.

[Arb83] ARBOLEDA, L. C. Historia y Enseñanza de las Matemáticas. Epistemología, Historia y Didáctica de las Matemáticas No 4. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá 1983.

[Arb95] ARBOLEDA, L. C., RECALDE, L. Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: La historia y epistemología del infinito. En Matemáticas; Enseñanza Universitaria, Vol. 4, No 1 y 2, pp. 152-171. Cali 1995.

[Boy87] BOYER, C. B. Historia de la Matemática. Alianza editorial S.A. Madrid 1987.

[Can55] CANTOR, G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Dover publications, Inc. New York 1955.

[Gal06] GÁLVEZ, F. De la matemática de la continuidad aristotélica a la filosofía del continuo matemático. Tesis de Maestría. Universidad del Valle. Cali 2006.

[Gra88] GRATTAN, G. Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos 1630-1910 una Introducción Histórica. Traducido por Mariano Martínez P. Alianza Editorial. Madrid España 1988.

[kli94] KLINE, M. El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días. Tomos I, II y III. Alianza Universitaria. Madrid 1994.

[Luq04] LUQUE A, C. J. MORA M, L. C., TORRES D, J. A. Una Construcción de los Números Reales Positivos. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá 2004.

[Mor95] MORENO A, L. E. y WALDEGG, G. Variación y Representación del Número al Continuo. En Educación Matemática. Vol. 7.p.p. 12-27. México, cinvestav. 1995.

[Muñ02] MUÑOZ Q, J. M. Introducción a la Teoría de Conjuntos. Universidad Nacional de Colombia. Departamento de matemáticas. Bogotá 2002.

[Rec04] RECALDE, L. La lógica de los números infinitos: Un acercamiento histórico. En Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. XII, No 1, pp. 51-72. Cali 2004.

[Rec05] RECALDE, L. Lecciones de Historia de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle. Cali 2005.

[Wal96] WALDEGG, G. La Contribución de Simón Stevin a la Construcción del Concepto de Número. En Educación Matemática. Vol. 8.p.p. 5-15. México, Cinvestav. 1996.