

EL TEOREMA DE LOS CUATRO VÉRTICES

BERNARDO JOSE URBANO GÓMEZ

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA
EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2009**

EL TEOREMA DE LOS CUATRO VÉRTICES

Bernardo Jose Urbano Gómez

PROPUESTA DE TRABAJO DE GRADO

**En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar
al título de licenciado en matemáticas**

Director

Mg. Héctor Efrén Guerrero Mora

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA
EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2009**

Nota de aceptación

Director

Magister Héctor Efrén Guerrero Mora

Jurados

Magister Gerardo Loaiza

Magister Elkin Darío Cardenas

Fecha de sustentación: Popayán, Junio de 2009

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	VII
1. Preliminares	1
1.1. Curvas en el plano y en el espacio	1
1.1.1. Curvas parametrizadas	2
1.1.2. Reparametrizaciones. Longitud de arco	3
1.1.3. Longitud de arco	4
1.1.4. Curvas parametrizadas por la longitud de arco	6
1.1.5. Diedro de Frenet. Curvatura	7
1.2. Algunas propiedades globales de curvas planas	12
1.3. Teorema del máximo y el mínimo de una función continua	14
1.4. Conjuntos conexos. Conjuntos compactos	14
1.5. Espacios recubridores. Aplicación homotópica	15

1.6. El grado para aplicaciones continuas del círculo	24
1.7. El número de vueltas de una curva	26
1.8. El índice de rotación de una curva	26
1.9. Teorema de rotación de tangentes	30
1.10. La curvatura y la convexidad de una curva	32
2. Teorema de los cuatro vértices. Forma simple	37
A. Apéndice	46
A.1. Longitud de arco	46
A.2. La curvatura	48
A.3. La función altura	48
A.4. La unicidad de la aplicación elevadora	49

AGRADECIMIENTOS

Primero quiero dar gracias a mi Señor y Dios por concederme el privilegio de poder culminar esta etapa en mi vida. Luego deseo expresar mis más sinceros agradecimientos al profesor Héctor Efrén Guerrero M., director de este trabajo de grado, quien con su inagotable paciencia y dedicación me supo guiar, como buen docente, hasta el final de este trabajo.

También le doy mi especial agradecimiento a los profesores Elkin Cardenas y Gerardo Loaiza por dedicar parte de su valioso tiempo para revisar calificar esta monografía.

Por supuesto, muchas gracias a mi madre y a mis familiares quienes con su esfuerzo y apoyo constante hicieron que esta meta sea toda una realidad.

INTRODUCCIÓN

La geometría diferencial estudia objetos de naturaleza geométrica como curvas y superficies, usando las técnicas del cálculo diferencial e integral. La geometría diferencial clásica abarca el estudio de las propiedades de las curvas y superficies en el espacio euclidiano. Tiene sus orígenes en el siglo *XIX*, con los inicios del Análisis, en ella se estudian las propiedades locales, esto es, aquellas que dependen solamente del comportamiento de la curva o superficie en la vecindad de un punto. Por esto es usual llamarle *teoría local de curvas y superficies*. La geometría diferencial moderna estudia la influencia de las propiedades locales en el comportamiento de toda la curva o superficie (*teoría global de curvas y superficies*).

Uno de los resultados más recientes de la geometría diferencial global es el *teorema de los cuatro vértices*, el cual dice que la función de la curvatura de una curva cerrada simple en el plano, es constante o tiene por lo menos cuatro extremos locales, es decir, por lo menos dos máximos locales y por lo menos dos mínimos locales. El nombre del teorema deriva de la convención de llamar un punto extremo de la función de la curvatura un “vértice”. En 1909 *Syamadas Mukhopadhyaya* probó esto para las curvas estrictamente convexas en el plano, es decir, una curva con curvatura estrictamente positiva. Su prueba utiliza el hecho de que un punto en la curva es un extremo de la función de la curvatura sí, y solamente si, el círculo osculador en ese punto tiene cuatro puntos de contacto con la curva. En 1912 *Adolf Kneser* realizó la prueba general para toda curva simple cerrada en el plano.

Entonces, se pretende con este trabajo monográfico desglosar la prueba del teorema de los cuatro vértices, en su forma simple. Para realizar este estudio, iniciamos con conceptos preliminares de geometría diferencial y de topología algebraica los cuales son el fundamento de esta prueba para culminar, en la segunda parte, con el desarrollo de la misma hasta llegar a una reformulación de este teorema basada en la función curvatura k de una curva.

En relación con la primera parte de este trabajo, aparece el concepto de curva como una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ y algunas de sus características tales como su reparametrización para lo cual requerimos de un difeomorfismo $f : J \rightarrow I$ que es el cambio de parámetro. Continuamos con la longitud de arco de una curva parametrizada y su reparametrización por este parámetro, lo cual implica que la norma del vector tangente $\|\mathbf{T}\| = 1$. Con base en las propiedades del vector tangente y el vector normal, parametrizados por la longitud de arco, llegamos a lo que es la curvatura y a las ecuaciones de Frenet. Luego aparecen algunas propiedades globales de curvas planas, el enunciado del teorema del máximo y el mínimo de una función continua, las definiciones de arco, conjuntos conexos y compactos. Continuando con los importantes aspectos de la topología algebraica tales como los espacios recubridores en donde se define una aplicación $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ y sus condiciones para que sea una aplicación recubridora; y la aplicación homotópica $H : [0, l] \times [0, l] \rightarrow B$ con sus requisitos para que sea una homotopía entre los arcos α_0 y α_1 , también se muestran algunos ejemplos de cada uno de estos conceptos de la topología algebraica. En seguida está lo relacionado con el grado de una aplicación continua del círculo S^1 , el número de vueltas de una curva y el índice de rotación de una curva. Luego se presenta otra forma de ver el índice de rotación I de una curva, a través de la aplicación $T : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ llamada la indicatriz tangente. En seguida tenemos el teorema de rotación de tangentes en el cual se prueba que el índice de rotación de una curva β es ± 1 , y terminamos este capítulo con la proposición que relaciona la simplicidad, la convexidad y la curvatura k de una curva regular, cerrada y plana.

El capítulo dos comienza con un lema que se demuestra con la teoría del cálculo y una

observación importante basada en las ecuaciones de Frenet; finalizando con el enunciado y el análisis monográfico del teorema de los cuatro vértices en su forma simple, teniendo como referencia la demostración que hace Manfredo P. do Carmo, para luego presentar la reformulación del mismo y, además, dos ejemplos básicos relacionados con los vértices del círculo y de la elipse.

En la conclusiones a este estudio monográfico del teorema de los cuatro vértices presentamos su forma general. Esta prueba dada en 1985 por Robert Osserman incluye todos los casos: curvas convexas y no convexas. Al inicio de su artículo, Osserman dice, “la esencia de la prueba se puede condensar en una sola frase: considere el círculo circunscrito”.

En los apéndices están las demostraciones de la proposición 1.1 (A.1) sobre la longitud de arco, de la proposición 1.5 (A.2) de la curvatura, y la proposición 1.6 (A.4) la cual dice que existe una única curva elevadora; como también algunos apartes de la función altura.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Curvas en el plano y en el espacio

Definimos pues las curvas como aplicaciones; la imagen de una curva (subconjunto de \mathbb{R}^2 , en nuestro caso) es sólo uno de los “ingredientes” de ésta. A veces, no obstante, se denomina a una curva por su imagen (recta, circunferencia, catenaria, cicloide,...); se trata de un abuso del lenguaje.

Una definición alternativa de curva plana podría ser la siguiente: Un subconjunto de \mathbb{R}^2 que admite una “parametrización (local, 1-dimensional)” en torno a cada uno de sus puntos. Pero el adoptar esta definición de curva supondría dejar fuera de consideración subconjuntos con “picos”, o con “autointersecciones”, o en forma “ocho”, lo que no parece razonable. Después de todo, el estudio de muchas curvas tiene su origen en la mecánica, donde el parámetro es el tiempo, las curvas están “para ser recorridas” y las citadas peculiaridades no son en absoluto rechazables.

1.1.1. Curvas parametrizadas

A continuación presentamos una definición de curva, la cual es un concepto simple pero suficiente para los propósitos de este trabajo.

Definición 1.1. Una curva parametrizada diferenciable es una función diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de un intervalo abierto $I = (a, b)$ de la línea real \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 .

Decimos que una función de una variable real es *diferenciable* (o *suave*) si admite, en todos los puntos, derivadas de todos los órdenes (que son automáticamente continuas).

La palabra *diferenciable* en esta definición significa que si $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ entonces las funciones $x_i(t)$ son diferenciables, también se acostumbra decir funciones de clase C^∞ . La variable t recibe el nombre de *parámetro* de la curva. La imagen $\alpha(I)$ se denomina *traza* de la curva.

Dos curvas distintas pueden tener una misma traza como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Las curvas; $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (\text{sen } t, \text{cos } t)$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(t) = (\text{cos } t, \text{sen } t)$, donde $I = (0 - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$, son diferentes y, sin embargo tienen la misma traza (la circunferencia unidad), figura (1.1).

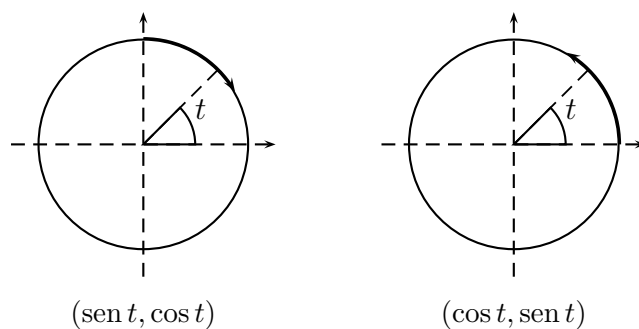


Figura 1.1: Dos curvas con una misma traza

La siguiente definición se refiere al vector tangente o vector velocidad.

Definición 1.2. Al vector $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ se le llama *vector tangente a la curva α o vector velocidad*, para $t \in I$. La rapidez es $\|\alpha'(t)\|$.

Llamaremos *recta tangente* a la curva α en el punto $\alpha(t)$ a la recta que pasa por dicho punto y tiene como vector director al vector tangente a la curva en dicho punto, figura (1.2). Observemos que si $\alpha'(t) = 0$ para algún $t \in I$, entonces no podemos calcular la recta tangente. A los puntos de la curva α cuyo vector tangente es cero, se les llama *puntos singulares*.

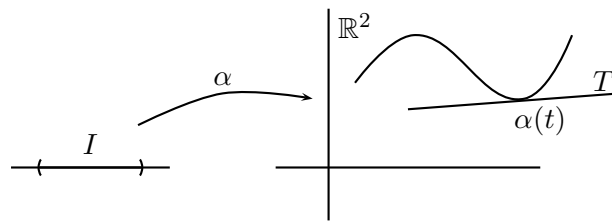


Figura 1.2: Recta tangente

Definición 1.3. Una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una *curva regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$.

1.1.2. Reparametrizaciones. Longitud de arco

Definición 1.4. Una aplicación $f : J \rightarrow I$ es un *difeomorfismo* si f es biyectiva, diferenciable y, además, su inversa f^{-1} es diferenciable.

Un difeomorfismo $f : J \rightarrow I$, donde $t = f(r)$, entre intervalos de \mathbb{R} se dice que *preserva la orientación* si $\frac{df}{dr}(r) > 0$, para todo $r \in J$; y se dice que *invierte la orientación* si

$\frac{df}{dr}(r) < 0$, para todo $r \in J$. Por ejemplo, el difeomorfismo

$$f : (-b, -a) \rightarrow (a, b)$$

$$r \mapsto f(r) = -r,$$

invierte la orientación, ya que $\frac{df}{dr}(r) = -1 < 0$.

Definición 1.5. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable; y $f : J \rightarrow I$ un difeomorfismo. Entonces la aplicación $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\beta = \alpha \circ f$, es claramente una curva parametrizada diferenciable que se llama reparametrización de la curva α ; la aplicación f recibe el nombre de cambio de parámetro.

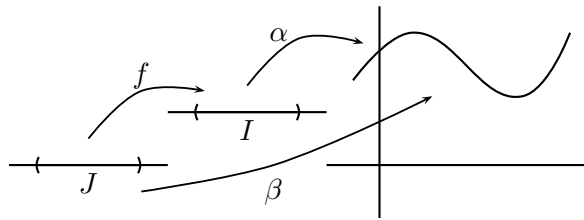


Figura 1.3: Reparametrización de la curva α

El siguiente ejemplo nos muestra la reparametrización de una curva.

Ejemplo 2. Sea la curva $\alpha : (1, e) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (t, \cos(\ln t))$, $t \in (1, e)$, y sea $f : J = (0, 1) \rightarrow I = (1, e)$ tal que $f(r) = e^r$. Entonces, una reparametrización de la curva α es la curva $\beta(t) = \alpha \circ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir,

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha(f(t)) = (f(t), \cos(\ln f(t))) = (e^t, \cos(\ln e^t)) \\ &= (e^t, \cos t) \end{aligned}$$

1.1.3. Longitud de arco

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable y sea un intervalo cerrado $[a, b] \subset I$.

Consideremos una partición de dicho intervalo

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\};$$

dicha partición determina una línea (curva) poligonal inscrita en la traza de α , figura (1.4), cuya longitud no es otra cosa que la suma de las longitudes de cada uno de los segmentos que la forman

$$L_a^b(P, \alpha) = \sum_{k=1}^n \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|.$$

Llamaremos diámetro de una partición P a $|P| = \max \{t_k - t_{k-1} : t = 1, \dots, n\}$.

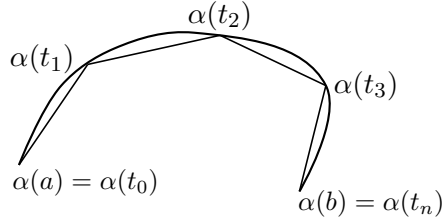


Figura 1.4: Una poligonal inscrita en la curva

Proposición 1.1. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada diferenciable y $[a, b] \subset I$; entonces

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} L_a^b(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt. \quad (1.1)$$

La demostración de la proposición (1.1) se muestra en el apéndice A.1. Ahora se puede definir la longitud de un arco de curva, que denotaremos como $s(t)$, del siguiente modo.

Definición 1.6. Dada una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ y un intervalo $[t_0, t] \subset I$, definimos la longitud de arco de la curva $\alpha([t_0, t])$ como

$$s(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau. \quad (1.2)$$

Observación 1.1. Si el intervalo de definición es abierto por algún lado, por ejemplo $I = [t_0, t)$, se define $s(t) = \lim_{x \rightarrow t^-} \int_{t_0}^x \|\alpha'(\tau)\| d\tau$; suponiendo que el límite exista.

1.1.4. Curvas parametrizadas por la longitud de arco

Observación 1.2. Se puede ver que si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, entonces $s(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = t - t_0$, es decir la longitud del arco coincide con la del segmento $[t_0, t]$; y recíprocamente, si ocurre esto último, entonces $\|\alpha'(t)\| = 1$. Además si $t_0 = 0$, entonces $s(t) = t$.

Ahora, definamos una curva parametrizada por la longitud de arco.

Definición 1.7. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable, decimos que dicha curva está parametrizada por la longitud de arco si $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Proposición 1.2. Toda curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada diferenciable y regular, se puede parametrizar por la longitud de arco.

DEMOSTRACIÓN. Dado $t_0 \in I$, podemos definir la función longitud de arco $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau,$$

la función $\|\alpha'(\tau)\|$ es, en general, continua, luego la función s es derivable con $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$; pero al ser α regular tenemos que s es de clase C^∞ y creciente, por tanto escribiendo $J = s(I)$ tenemos que $s : I \rightarrow J$ es una biyección y su inversa $g : J \rightarrow I$, es de clase C^∞ , es decir, se trata de un difeomorfismo, con lo cual $\beta = \alpha \circ g$ es una reparametrización de α , figura (1.5). Veamos que β es una parametrización por la longitud de arco.

$$\begin{array}{ccccc} & & \beta & & \\ & \frown & & \searrow & \\ J & \xrightarrow{g} & I & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Figura 1.5: Curva reparametrizada por el arco

En efecto, observemos que $g(s(t)) = t$, luego si derivamos: $g'(s(t))s'(t) = 1$, de donde

$$g'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$$

Entonces

$$\beta'(\tau) = \alpha'(g(\tau))g'(\tau) = \frac{\alpha'(g(\tau))}{\|\alpha'(g(\tau))\|}$$

de donde se deduce que $\|\beta'(\tau)\| = 1$, lo cual concluye la demostración. \square

Ejemplo 3. Sea la curva $\alpha(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}\right)$, con $t \in (3, 4)$, entonces $\alpha'(t) = (1, t^{1/2})$ y, por tanto $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+t}$. Entonces, por la igualdad (1.2),

$$s = s(t) = \int_3^t \sqrt{1+\tau} d\tau = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - \frac{16}{3},$$

luego, $s = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - \frac{16}{3}$, de donde $t = \left[\frac{3}{2}\left(s + \frac{16}{3}\right)\right]^{2/3} - 1$, así

$$\beta(s) = \left(\left[\frac{3}{2}\left(s + \frac{16}{3}\right)\right]^{2/3} - 1, \frac{2}{3} \left[\left[\frac{3}{2}\left(s + \frac{16}{3}\right)\right]^{2/3} - 1\right]^{3/2} \right), \quad s \in (0, s(4)),$$

es una reparametrización de la curva α por la longitud de arco.

1.1.5. Diedro de Frenet. Curvatura

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable parametrizada por la longitud del arco, el vector tangente $\alpha'(s)$ es unitario. A este vector tangente lo representaremos como $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$

Observación 1.3. En relación con el vector tangente:

1. La aplicación $\mathbf{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable con $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$.
2. Existen únicamente dos vectores unitarios perpendiculares a $\mathbf{T}(s)$, figura (1.6), uno de ellos se corresponde con el giro (de 90°) en el sentido de las agujas del reloj y el otro en el sentido contrario. Ambos vienen dados por una transformación ortogonal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 .

La siguiente es la definición de vector normal unitario.

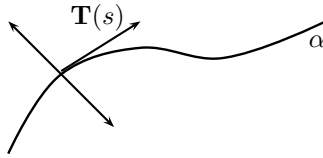


Figura 1.6: Dos vectores unitarios perpendiculares a $\mathbf{T}(s)$

Definición 1.8. Se llama *vector normal unitario* a la curva α en s (o en el punto $\alpha(s)$), al vector $\mathbf{N}(s) = J(\mathbf{T}(s))$, donde $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el giro de 90° en el sentido contrario a las agujas del reloj, (figura 1.7); es decir

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

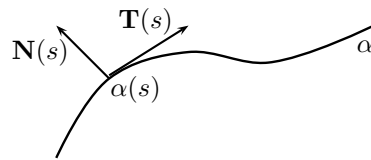


Figura 1.7: Vector normal unitario

Observación 1.4. Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, entonces:

1. $\mathbf{T}(s) = (x'(s), y'(s))$; y por tanto, por la definición (1.8), $\mathbf{N}(s) = (-y'(s), x'(s))$.
2. La recta normal a la curva α en el punto $\alpha(s)$ es la que pasa por dicho punto y tiene como vector director a $\mathbf{N}(s)$.

En relación con el vector tangente y el vector normal unitario se verifican las siguientes propiedades:

1. La aplicación normal $\mathbf{N} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable.
2. El vector $\mathbf{N}(s)$ es un vector unitario.

3. El producto punto: $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$
4. El determinante; $\det(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)) = \begin{vmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{vmatrix} = 1.$
5. Los vectores $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$ forman una base ortonormal de \mathbb{R}^2 , para cada $s \in I$.

Definición 1.9. La base $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ se llama diedro (orientado) de Frenet.

El estudio del comportamiento local de una curva implica el saber como se va “curvando” o “doblando” dicha curva en cada punto. Para obtener una idea clara de este aspecto, observaremos el cambio en el diedro de Frenet.

Proposición 1.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable, regular parametrizada por la longitud de arco. Para cada $s \in I$, el vector $\mathbf{T}'(s)$ es proporcional al vector $\mathbf{N}(s)$, es decir, $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$ para cada $s \in I$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $s \in I$, vemos que $\|\mathbf{T}(s)\|^2 = \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 1$; y derivando tenemos que: $\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0$. Lo cual nos dice que $\mathbf{T}'(s)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ y por tanto proporcional a $\mathbf{N}(s)$. Por lo tanto, para cada $s \in I$, existe un número real $k(s)$ tal que: $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$. □

Definición 1.10. A la función $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, se llama curvatura de la curva plana α . Si $k(s) \neq 0$, se llama a $\frac{1}{k(s)}$ radio de curvatura de la curva α .

Proposición 1.4. Con respecto a la curvatura $k(s)$:

1. $k(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = -\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle.$
2. $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida como en (1), es una función diferenciable.
3. $\mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s).$

Además, la curvatura también se puede expresar como $k(s) = \langle \alpha''(s), J(\alpha'(s)) \rangle.$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar el punto (1), hay que tener en cuenta que $\|\mathbf{N}(s)\|^2 = \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 1$. Realizando el producto escalar entre $\mathbf{T}'(s)$ y $\mathbf{N}(s)$; obtenemos

$$\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \langle k(s)\mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = k(s)$$

Por otro lado, como $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$ son ortogonales; $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$. Derivando esta expresión, obtenemos que: $\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle + \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle = 0$, lo cual implica que

$$k(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = -\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle \quad (1.3)$$

La afirmación del punto (2), está clara por la definición del punto (1).

Para obtener la igualdad del punto (3), como el vector $\mathbf{N}(s)$ es unitario, entonces; $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 1$ y derivando, obtenemos $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$, lo que significa que $\mathbf{N}'(s)$ es perpendicular a $\mathbf{N}(s)$ y por tanto, proporcional a $\mathbf{T}(s)$, es decir $\mathbf{N}'(s) = h(s)\mathbf{T}(s)$, donde $h(s)$ es un valor real para cada $s \in I$.

Sustituyendo en (1.3), tenemos que $k(s) = -\langle \mathbf{T}(s), h(s)\mathbf{T}(s) \rangle = -h(s)$ lo cual implica que $\mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s)$. \square

A las igualdades $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s)$ se les llama *fórmulas de Frenet* o *ecuaciones de Frenet*.

En Física, al considerar el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva donde la velocidad cambia tanto en dirección como en magnitud, el vector velocidad \mathbf{v} siempre es tangente a la trayectoria; sin embargo, en esta situación, el vector aceleración \mathbf{a} está a cierto ángulo respecto de la trayectoria. Este vector puede descomponerse en dos vectores componentes; un vector componente radial o centrípeta, \mathbf{a}_r , y un vector componente tangencial, \mathbf{a}_t .

La *aceleración tangencial* proviene del cambio en la velocidad de la partícula, y la proyección de la aceleración a lo largo de la dirección de la velocidad es

$$a_t = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt}.$$

La *aceleración radial o centrípeta* se debe al cambio en la dirección del vector velocidad y tiene una magnitud absoluta dada por

$$a_r = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{r}, \quad r \neq 0.$$

Continuando con la denominación heredada de la Física, se llama vector aceleración al vector $\alpha''(s) = \mathbf{T}'(s)$. Vemos que en esta terminología, como la velocidad es constante $\|\alpha'(s)\| = \|\mathbf{T}(s)\| = 1$, no hay aceleración tangencial, únicamente hay aceleración centrípeta o normal.

Por otra parte, según las fórmulas de Frenet, $\alpha''(s) = \mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$, es decir, $\|\alpha''(s)\| = |k(s)|$. Esto significa que $|k(s)|$ determina el valor de la aceleración centrípeta y, por tanto, determina el cambio de dirección de la curva. Esto justifica, de alguna manera, que $k(s)$ reciba el nombre de *curvatura*. Así, dado que el vector $\mathbf{N}(s)$ es el resultado de un giro de 90° del vector $\mathbf{T}(s)$ en sentido contrario a las agujas del reloj, y dado que $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$, tenemos la siguiente situación en la figura (1.8).

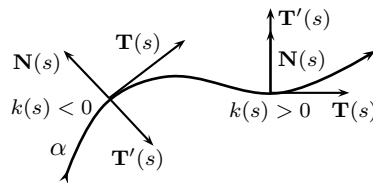


Figura 1.8: Curvatura

Observación 1.5. Como puede verse, la curvatura k definida anteriormente tiene signo; este signo también puede introducirse de la siguiente manera. Sea $\{e_1, e_2\}$ la base natural de \mathbb{R}^2 y sea el vector normal $\mathbf{N}(s)$, $s \in I$, bajo la condición de que la base $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ tenga la misma orientación que la base $\{e_1, e_2\}$. La curvatura k está definida entonces por $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$ y podría ser positiva o negativa. Entonces, la curvatura k cambia de signo cuando, o cambiamos la orientación de la curva α , o cambiamos la orientación de \mathbb{R}^2 .

Observación 1.6. Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, donde s es el parámetro longitud de arco, de observación (1.4), tenemos que

$$k(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix} = \det(\mathbf{N}(s), \mathbf{T}'(s))$$

Definición 1.11. Se define la curvatura de una curva α , no necesariamente parametrizada por la longitud del arco, como $k_\alpha(t) = k_\beta(g(s))$, donde β es la reparametrización de α por la longitud del arco, k_β es su curvatura y g es el cambio de parámetro correspondiente. Así, la curvatura no depende de la parametrización y, por tanto es una propiedad de la traza.

Proposición 1.5. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable regular parametrizada, no necesariamente por la longitud de arco. Entonces

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J(\alpha'(t)) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

La demostración de la proposición (1.5) se presenta en el apéndice A.2.

1.2. Algunas propiedades globales de curvas planas

Una función diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ es la restricción de una función diferenciable definida sobre un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$.

Definición 1.12. Diremos que una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ plana parametrizada diferenciable y regular es cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y todas sus derivadas también coinciden $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, $\alpha''(a) = \alpha''(b)$, ... Además diremos que una curva cerrada α es simple si no tiene autointersecciones; es decir, $\alpha(t) \neq \alpha(t')$ para todo $t, t' \in [a, b]$, $t \neq t'$ (figura 1.9).

Definición 1.13. Una curva regular plana $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, no necesariamente cerrada, es convexa si, para todo $t \in [a, b]$, la traza $\alpha([a, b])$ de α está completamente contenida en

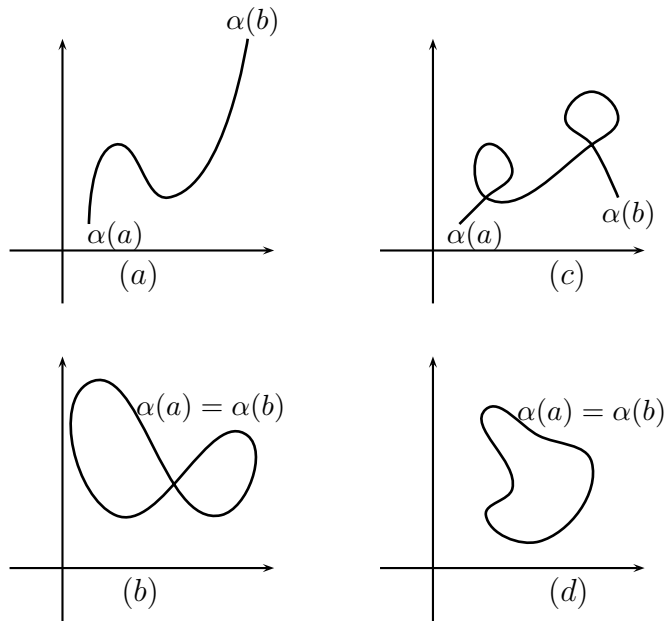


Figura 1.9: Curva plana: (a) simple, (b) cerrada no simple, (c) ni simple ni cerrada, (d) simple cerrada.

un lado del semiplano cerrado determinado por la recta tangente en t (o en $\alpha(t)$), figura (1.10).

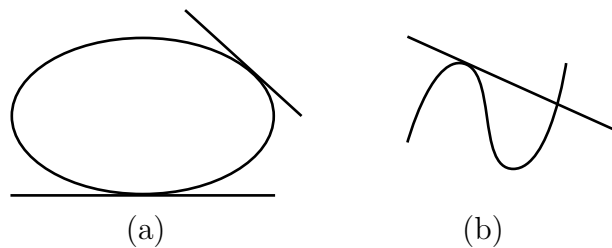


Figura 1.10: Curva: (a) convexa , (b) no convexa.

El teorema de la *curva de Jordan* es un importante resultado de la teoría global de curvas planas. A continuación sólo presentaremos su enunciado y para su demostración ver, por ejemplo, [5].

Teorema 1.1. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular, plana, cerrada y simple; entonces

el conjunto $\mathbb{R}^2 - \alpha([a, b])$ tiene dos componentes conexas, cuya frontera común es la traza de α .

Las componentes conexas se llaman *interior* de α , (porción del plano encerrada por la curva) y *exterior* de α . El área encerrada por una curva cerrada simple será el *área del interior* de α . Admitiremos que puede elegirse el parámetro de una curva cerrada simple, de tal manera que si se recorre la curva en el sentido creciente de los parámetros, entonces dejamos a la izquierda el interior de la curva; en este caso decimos que la curva está *positivamente orientada*.

1.3. Teorema del máximo y el mínimo de una función continua

Un resultado básico de las funciones continuas es que ellas alcanzan su máximo y su mínimo en un intervalo cerrado. El siguiente *teorema de Weiesstrass* nos muestra este resultado.

Teorema 1.2. *Cualquier función continua sobre un intervalo cerrado está acotada y alcanza sobre él su cota superior y su cota inferior.*

La demostración del teorema (1.2) se encuentra en [6]. También se puede ver en [5], en el apéndice del capítulo 5.

1.4. Conjuntos conexos. Conjuntos compactos

Definición 1.14. *Una función continua $\alpha : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ se denomina un arco en A que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$.*

Definición 1.15. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^2$ es conexo por arcos si, cualesquiera que sean los puntos $p, q \in A$, existe un arco en A que une p con q .

La siguiente definición se refiere al concepto de conexidad que, intuitivamente, significaría que no es posible descomponer el conjunto A en dos conjuntos disjuntos no vacíos.

Definición 1.16. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es conexo cuando no es posible representarlo en la forma $A = U_1 \cup U_2$ donde U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos no vacíos de \mathbb{R}^2 y $U_1 \cap U_2 = \phi$.

Definición 1.17. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es acotado si está contenido en algún conjunto de la forma $\{(x, y) : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 < r^2\}$ donde x_i, y_i, r son fijos. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ es compacto si es cerrado y acotado.

1.5. Espacios recubridores. Aplicación homotópica

Definición 1.18. Un recubrimiento abierto de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es una familia de abiertos U_i , $i \in \gamma$, tal que $\bigcup_i U_i = A$. Cuando solamente hay un número finito de abiertos en la familia decimos que el recubrimiento es finito. Si la subfamilia U_j , $j \in \mathcal{B} \subset \gamma$, todavía recubre A , es decir $\bigcup_j U_j = A$, decimos que U_j es un subrecubrimiento de U_i .

Una aplicación continua $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un *homeomorfismo* sobre $f(A)$ si f es inyectiva y la inversa $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua. En este caso A y $f(A)$ son conjuntos homeomorfos.

Definición 1.19. Sean \tilde{B} y B subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Decimos que $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ es una *aplicación recubridora* si

1. π es continua y $\pi(\tilde{B}) = B$.

2. Cada punto $p \in B$ tiene un entorno U en B tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_i V_i$,

donde los V_i son conjuntos abiertos disjuntos dos a dos tal que la restricción de π a V_i es un homeomorfismo de V_i sobre U . Se dice entonces que \tilde{B} es un espacio recubridor de B .

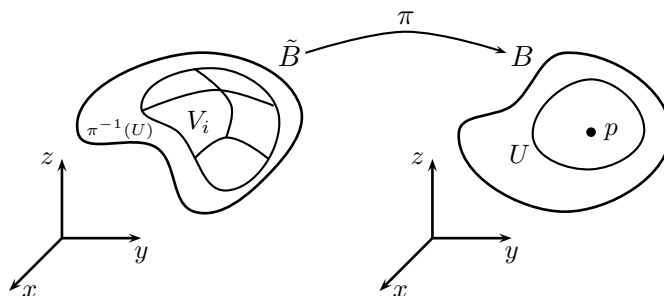


Figura 1.11: Aplicación recubridora. $\pi^{-1}(U) = \bigcup V_i$

Al entorno U que cumple con las propiedades de que: $\pi^{-1}(U) = \bigcup_i V_i$ y que la restricción de π a V_i es un homeomorfismo de V_i sobre U , se le llama *entorno distinguido*, figura (1.11). El siguiente ejemplo nos muestra el recubrimiento del plano P sobre el cilindro S .

Ejemplo 4. Sea $P = \{(x, y, z) : ax + by + cz = d\}$, un plano de \mathbb{R}^3 donde a, b, c, d son constantes y $a \neq 0$ o $b \neq 0$ o $c \neq 0$. El conjunto P también lo podemos escribir así:

$$P = \{q_0 + ue_1 + ve_2 : u, v \in \mathbb{R}\},$$

donde $q_0 = (q_{01}, q_{02}, q_{03})$ satisface $aq_{01} + bq_{02} + cq_{03} = d$ y e_1, e_2 son dos vectores unitarios ortogonales que se obtienen después de aplicar el método de ortogonalización de Gram-Smit a los vectores linealmente independientes q_0R, q_0Q , donde $R = (R_1, R_2, R_3)$ y $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ satisfacen la ecuación $ax + by + cz = d$.

Ahora, dado que la aplicación $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow P$ definida como $X(u, v) = q_0 + ue_1 + ve_2$ es una aplicación diferenciable, continua con inversa continua y la diferencial es inyectiva, vemos que cada $q \in P$ está caracterizado por las coordenadas (u, v) , pues

$$X(u, v) = q_0 + ue_1 + ve_2 = q,$$

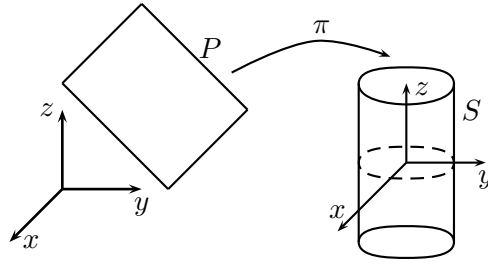


Figura 1.12: La aplicación $\pi : P \rightarrow S$

es decir, podemos identificar (u, v) con q donde $q - q_0 = ue_1 + ve_2$.

Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro circular recto cuyo eje es el eje z , y sea $\pi : P \rightarrow S$ la aplicación definida por $\pi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, figura (1.12).

La interpretación geométrica de esta aplicación es la de enrollar P al rededor del cilindro S un número infinito de veces, figura (1.13). Mostremos que π es una aplicación

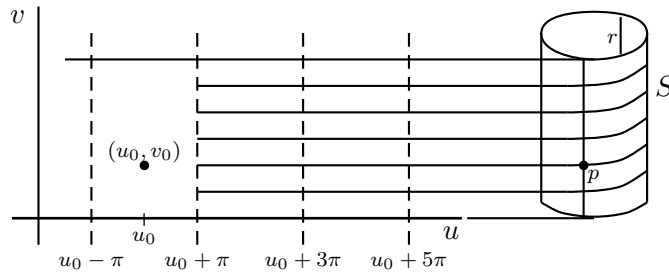


Figura 1.13: Recubrimiento $\pi|_R : R \rightarrow S$

recubridora. Primero vemos que dado $(u_0, v_0) \in P$, la restricción de la aplicación π a la banda

$$R = \{(u, v) \in P : u_0 - \pi \leq u \leq u_0 + \pi\}$$

recubre completamente a S , figura (1.13). Observemos que la aplicación π restringida al interior de la banda R es una reparametrización de S , cuyo entorno coordenado recubre S excepto una generatriz. Luego, la aplicación π es continua y $\pi(P) = S$, verificandose la condición 1.

Para la condición 2, sea $p \in S$ y $U = S - r$, donde r es la generatriz opuesta a la generatriz que pasa por p . Hay que probar que U es un entorno distinguido de p . Sea $(u_0, v_0) \in P$ tal que $\pi(u_0, v_0) = p$ y tomemos como V_n la banda dada por

$$V_n = \{(u, v) \in P : u_0 + (2n - 1)\pi < u < u_0 + (2n + 1)\pi\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vemos que si $n \neq m$, entonces $V_n \cap V_m = \emptyset$. Por ejemplo, si:

$$V_0 = \{(u, v) \in P : u_0 - \pi < u < u_0 + \pi\},$$

$$V_1 = \{(u, v) \in P : u_0 + \pi < u < u_0 + 3\pi\},$$

$$V_2 = \{(u, v) \in P : u_0 + 3\pi < u < u_0 + 5\pi\},$$

tenemos que $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, $V_0 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ figura (1.13). Puesto que la banda R recubre completamente a S , entonces $\bigcup_n V_n = \pi^{-1}(U)$. Además, puesto que π restringida al interior de R es una parametrización de S , la restricción de π a V_n es un homeomorfismo sobre U . Se deduce, entonces, que U es un entorno distinguido de p ; verificándose la condición 2. Por lo tanto, el plano P es un espacio recubridor del cilindro S .

En el siguiente ejemplo vemos el recubrimiento de la recta real \mathbb{R} sobre la circunferencia unidad S^1 .

Ejemplo 5. Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y la aplicación $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $\pi(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces veamos que la aplicación π es un recubrimiento.

Para verificar la condición 2, tomemos un $p \in S^1$ y $U = \{(u, v) \in S^1 : u > 0\}$. Mostremos que U es un entorno distinguido de p . Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(x_0) = p$ y tomemos los $V_n = (2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$. Mostrando que $\pi^{-1}(U) \subset \bigcup V_n$ y que $\bigcup V_n \subset \pi^{-1}(U)$, se prueba que $\pi^{-1}(U) = \bigcup V_n$. En efecto, si $x \in \pi^{-1}(U)$ entonces $\pi(x) = (\cos x, \sin x) \in U$, luego $\cos x > 0$ y $x \in V_j$, para algún $j \in \mathbb{Z}$, por tanto $x \in \bigcup V_n$ y así, tenemos que $\pi^{-1}(U) \subset \bigcup V_n$. Ahora, $x \in \bigcup V_n$, entonces $x \in V_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, y esto implica que $\cos x > 0$, luego $\pi(x) = (\cos x, \sin x) \in U$ y $x \in \pi^{-1}(U)$, así que $\bigcup V_n \subset \pi^{-1}(U)$. Por lo anterior, concluimos que $\bigcup V_n = \pi^{-1}(U)$. Es claro que, si $n \neq m$, $V_n \cap V_m = \emptyset$, figura (1.14).

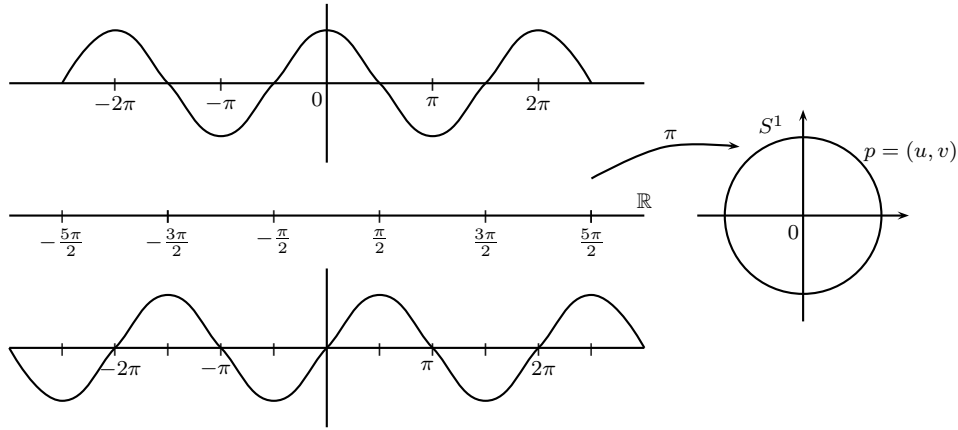


Figura 1.14: La aplicación $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$

Hay que probar que la restricción de π a V_n es un homeomorfismo sobre U . Sea $\pi|_{V_n}(r_1) = \pi|_{V_n}(r_2)$ entonces $(\cos r_1, \sin r_1) = (\cos r_2, \sin r_2)$. Luego $\sin r_1 = \sin r_2$, $r_1, r_2 \in V_n$ y puesto que seno es monótona en V_n , se tiene que $r_1 = r_2$ lo que implica que $\pi|_{V_n}$ es inyectiva.

Ahora, sea $(u_0, v_0) \in U = \{(u, v) \in S^1 : u > 0\}$, entonces existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = u_0$ y esto implica que existe un $x^* \in V_n$, con $\cos x^* = \cos x = u_0$, donde $\pi|_{V_n}(x^*) = (u_0, v_0)$; así que esta aplicación es sobreyectiva y, por propiedades del seno y coseno en V_n , se tiene que $\pi^{-1} : U \rightarrow V_n$ es continua. Podemos concluir entonces que la aplicación $\pi|_{V_n}$ es un homeomorfismo sobre U y que el entorno U es un entorno distinguido de p .

Puesto que la aplicación $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es continua y $\pi(\mathbb{R}) = S^1$, se verifica la condición 1 de la definición (1.19) demostrándose así que la recta real \mathbb{R} es un espacio recubridor de la circunferencia unidad S^1 .

La propiedad más importante de una aplicación recubridora consiste en la posibilidad de “elevar” a \tilde{B} curvas continuas en B .

Definición 1.20. Sea $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación continua, con \tilde{B} y B subconjuntos de

\mathbb{R}^3 , y $\alpha : [0, l] \rightarrow B$ un arco de B (definición 1.14), donde $[0, l] \subset \mathbb{R}$. Si existe un arco de \tilde{B} , $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$, tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ entonces, se dice que $\tilde{\alpha}$ es una curva elevadora de α con origen en $\tilde{\alpha}(0) \in \tilde{B}$ (figura 1.15).

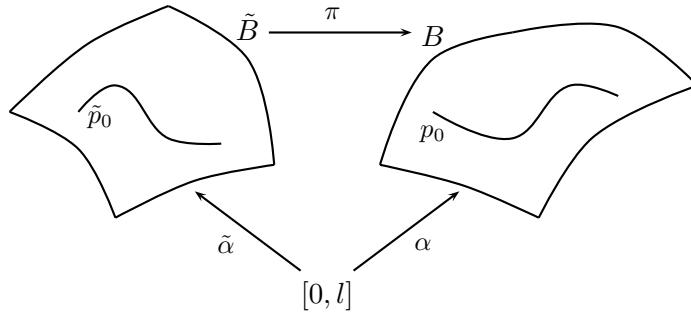


Figura 1.15: Elevación de la curva α

El siguiente ejemplo está relacionado con el concepto de curva elevadora.

Ejemplo 6. Consideremos la aplicación recubridora $\pi : P \rightarrow S$ dada en el ejemplo (4) y sea $\alpha : I \rightarrow S$, $I = [0, l] \subset \mathbb{R}$, la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Entonces la curva $\tilde{\alpha} : I \rightarrow P$, definida así:

$$\tilde{\alpha}(t) = q + te_1 + te_2,$$

es una curva elevadora de α , figura (1.16), pues

$$\pi(\tilde{\alpha}(t)) = \pi(t, t) = (\cos t, \sin t, t) = \alpha(t).$$

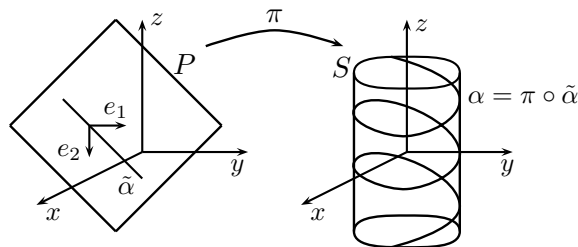


Figura 1.16: La curva elevadora $\tilde{\alpha} : I \rightarrow P$

La siguiente proposición de existencia y unicidad, expresa una propiedad fundamental de los espacios recubridores. En el apéndice A.4 se presenta su demostración.

Proposición 1.6. Sean $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $\alpha : [0, l] \rightarrow B$ un arco en B y $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ un punto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Entonces, existe una única elevación $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$, es decir con origen en \tilde{p}_0 (figura 1.15).

Definición 1.21. Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ y sean $\alpha_0 : [0, l] \rightarrow B$ y $\alpha_1 : [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos $p = \alpha_0(0) = \alpha_1(0)$ y $q = \alpha_0(l) = \alpha_1(l)$. Decimos que α_0 y α_1 son homotópicos si existe una aplicación continua $H : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow B$ tal que

1. $H(s, 0) = \alpha_0(s)$, $H(s, 1) = \alpha_1(s)$, $s \in [0, l]$.
2. $H(0, t) = p$, $H(l, t) = q$, $t \in [0, 1]$.

La aplicación H se denomina una homotopía entre α_0 y α_1 .

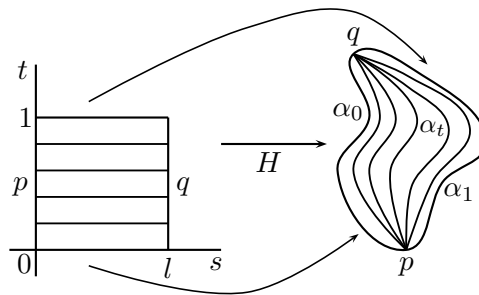


Figura 1.17: Homotopía: familia de arcos

Para cada $t \in [0, 1]$, el arco $\alpha_t : [0, l] \rightarrow B$ dado por $\alpha_t(s) = H(s, t)$ se denomina arco de la homotopía H . Por tanto, la homotopía es una familia de arcos α_t que constituye una deformación continua de α_0 en α_1 , figura (1.17), de forma que los extremos p y q de los arcos α_t permanecen fijos durante la deformación (condición 2). El siguiente ejemplo muestra una aplicación homotópica en forma general.

Ejemplo 7. Sean los arcos $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = p$ y $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = q$. Veamos que la aplicación $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida así: $H(s, t) = \alpha_0(s) + t(\alpha_1(s) - \alpha_0(s))$, es una homotopía entre α_0 y α_1 .

Para la condición 2 de la definición (1.21), vemos que

$$H(0, t) = \alpha_0(0) + t(\alpha_1(0) - \alpha_0(0)) = p + t(p - p) = p,$$

$$H(1, t) = \alpha_0(1) + t(\alpha_1(1) - \alpha_0(1)) = q + t(q - q) = q.$$

Veamos también que se cumple la condición 1 de la definición (1.21);

$$H(s, 0) = \alpha_0(s) + 0(\alpha_1(s) - \alpha_0(s)) = \alpha_0(s),$$

$$H(s, 1) = \alpha_0(s) + 1(\alpha_1(s) - \alpha_0(s)) = \alpha_1(s).$$

Teniendo como referencia ejemplo (7), se presentan otros ejemplos concretos de homotopías entre arcos de curvas .

Ejemplo 8. Sea el arco constante $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha_0(s) = (1, 0) = p$ y el arco $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $\alpha_1(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$, con $\alpha_1(0) = (1, 0) = p$ y $\alpha_1(1) = (1, 0) = p$, figura (1.18).

Entonces, de $H(s, t) = \alpha_0(s) + t(\alpha_1(s) - \alpha_0(s))$, obtenemos, para este caso, que $H(s, t) = (1 - t + t \cos 2\pi s, t \sin 2\pi s)$, que por el ejemplo (7) es una homotopía.

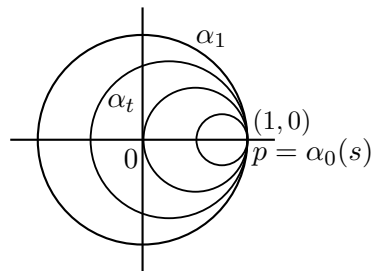


Figura 1.18: Homotopía de arco constante

Para $t = 1/4$ obtenemos el siguiente arco de la homotopía, que también es un círculo:

$$\begin{aligned} H\left(s, \frac{1}{4}\right) &= \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\pi s, \frac{1}{4} \sin 2\pi s\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\pi s, \frac{1}{4} \sin 2\pi s\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, 0\right) + \left(\frac{1}{4} \cos 2\pi s, \frac{1}{4} \sin 2\pi s\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Sean los arcos $\alpha_0, \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $\alpha_0(s) = (s, s^2)$ y $\alpha_1(s) = (s, s)$ (figura 1.19).

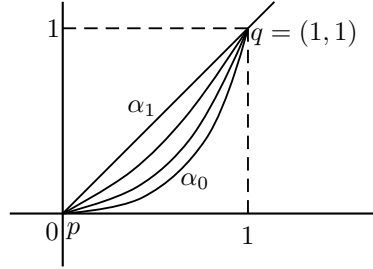


Figura 1.19: Homotopía entre dos arcos

Entonces, $H(s, t) = (s, s^2) + t((s, s) - (s, s^2)) = (s, s^2 + t(s - s^2))$ es una homotopía entre α_0 y α_1 .

Ahora, para $t = 1/2$, tenemos el siguiente arco de la homotopía:

$$H\left(s, \frac{1}{2}\right) = \left(s, s^2 + \frac{1}{2}(s - s^2)\right) = \left(s, \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s\right).$$

El concepto de elevación de homotopías es completamente análogo al de elevación de arcos.

Definición 1.22. Sea $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación continua y sean $\alpha_0, \alpha_1 : [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos p y q . Sea $H : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow B$ una homotopía entre α_0 y α_1 . Si existe una aplicación continua $\tilde{H} : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{B}$ tal que $\pi \circ \tilde{H} = H$, decimos que \tilde{H} es una elevación de la homotopía H , con origen en $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{p} \in \tilde{B}$.

Proposición 1.7. Sea $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de elevación de arcos. Sean $\alpha_0, \alpha_1 : [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos p y q , y sea

$H : [0, l] \rightarrow B$ una homotopía entre α_0 y α_1 ; \tilde{p} un punto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Entonces existe una única elevación \tilde{H} de H con origen en \tilde{p} .

Para la demostración de la proposición (1.7), ver en [5] página 379.

Proposición 1.8. Sea $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de elevación de arcos. Sean $\alpha_0, \alpha_1 : [0, l] \rightarrow B$ dos arcos de B que unen los puntos p y q y tomemos $\tilde{p} \in \tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Si α_0 y α_1 son homotópicos, entonces las elevaciones $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$ de α_0 y α_1 , respectivamente, con origen en \tilde{p} , son homotópicas.

La prueba de la proposición (1.8), se puede ver en [5] página 380.

1.6. El grado para aplicaciones continuas del círculo

Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ el recubrimiento de la recta real \mathbb{R} sobre la circunferencia unidad S^1 dado por $\pi(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$ (ver ejemplo 6).

Sea $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ una aplicación continua, el grado de φ se define como sigue. Podemos imaginarnos el primer S^1 de la aplicación φ como un intervalo cerrado $[0, l]$ cuyos puntos extremos 0 y l se han identificado. Así, nos podemos imaginar a φ como una aplicación continua $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$, con $\varphi(0) = \varphi(l) = p \in S^1$. Por tanto, φ es un arco cerrado en S^1 , que pasa por p , el cual, por la proposición (1.6), puede elevarse a un arco único $\tilde{\varphi} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ que empieza en un punto $x \in \mathbb{R}$ con $\pi(x) = p$. Como $\pi(\tilde{\varphi}(0)) = \pi(\tilde{\varphi}(l))$, la diferencia $\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)$ es un múltiplo entero de 2π . El número entero $\deg \varphi$ definido por

$$\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0) = (\deg \varphi)2\pi$$

se denomina el *grado* de φ .

¹ *deg* es la abreviatura de *degree*, grado en inglés.

Intuitivamente, $\deg \varphi$ es el número de veces que la aplicación $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ “envuelve” al intervalo $[0, l]$ alrededor de S^1 , figura (1.20). Observe que la función $\tilde{\varphi} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ constituye una determinación continua del ángulo positivo que forma el vector fijo $\varphi(0) - 0$ con $\varphi(t) - 0$, $t \in [0, l]$, $0 = (0, 0)$.

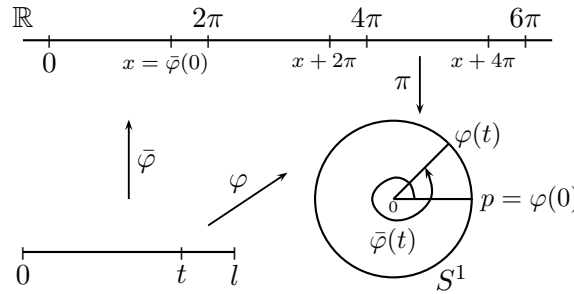


Figura 1.20: Grado de una aplicación

El concepto de grado es independiente de las elecciones de p y de x . Ver [5, pag. 390]. La propiedad más importante del grado es su invarianza frente a homotopías.

Teorema 1.3. Sean $\varphi_1, \varphi_2 : S^1 \rightarrow S^1$ aplicaciones continuas. Fijemos un punto $p \in S^1$, obteniendo así dos arcos cerrados en p , $\varphi_1, \varphi_2 : [0, l] \rightarrow S^1$, con $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p$. Si φ_1 , y φ_2 son homotópicos, entonces $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2$.

DEMOSTRACIÓN. Esto se deduce de manera inmediata a partir del hecho de que las elevaciones de φ_1 y de φ_2 , que empiezan en un punto fijo $x \in \mathbb{R}$, son homotópicas (proposición 1.8); en consecuencia, tienen los mismos extremos. Entonces, por el concepto de grado, tenemos que $\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}_1(0) = (\deg \varphi_1)2\pi$ y $\tilde{\varphi}_2(l) - \tilde{\varphi}_2(0) = (\deg \varphi_2)2\pi$, de donde $(\deg \varphi_1)2\pi = (\deg \varphi_2)2\pi$ y por tanto, $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2$. \square

1.7. El número de vueltas de una curva

Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada continua y plana. Elijamos un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $p_0 \notin \alpha([0, l])$ y definamos la aplicación $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ mediante

$$\varphi(t) = \frac{\alpha(t) - p_0}{|\alpha(t) - p_0|}, \quad t \in [0, l]$$

Es claro que $\varphi(0) = \varphi(l)$ y que podemos imaginarnos a φ como una aplicación de S^1 en S^1 ; ésta se denomina la *aplicación de posición* de α con respecto a p_0 . El grado de φ es el número de vueltas (o el índice) de la curva α con respecto a p_0 , figura (1.21).

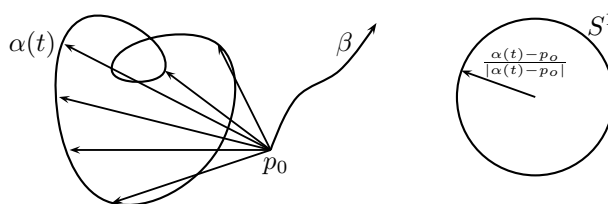


Figura 1.21: El índice de la curva α

1.8. El índice de rotación de una curva

Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, cerrada y plana, y sea $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ la aplicación definida por

$$\varphi(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad t \in [0, l]$$

La aplicación φ es diferenciable y $\varphi(0) = \varphi(l)$. Se llama a la aplicación φ la *aplicación tangente* de α , y se llama *índice de rotación* de α al grado de φ . Intuitivamente, el índice de rotación de una curva cerrada es el número completo de vueltas que efectúa el campo vectorial tangente a lo largo de la curva, ver figura (1.24).

A continuación se muestra una forma de calcular el índice de rotación.

Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada plana diferenciable dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, aquí s es la longitud de arco, luego se tiene que el vector tangente $\mathbf{T}(s) = (x'(s), y'(s))$ tiene longitud uno. Ahora, sea $T : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable definida por $T(s) = (x'(s), y'(s))$ cuya traza está contenida en el círculo unidad, figura (1.22). Esta curva es la *indicatriz tangente* y su vector velocidad es

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = (x''(s), y''(s)) = k(s)\mathbf{N}(s),$$

donde $\mathbf{N}(s)$, $s \in I$, es el vector normal que se define requiriendo que la base $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ tenga la misma orientación que la base natural $\{e_1, e_2\}$. Es decir, si $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, entonces $\mathbf{N}(s) = J\mathbf{T}(s)$, donde $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la aplicación

$$(p_1, p_2) \mapsto J(p_1, p_2) = (-p_2, p_1)$$

y $k(s)$ es el escalar que relaciona $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ con $\mathbf{N}(s)$, esto es $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k(s)\mathbf{N}(s)$. Al escalar $k(s)$ se le llama la curvatura, con signo, de α .

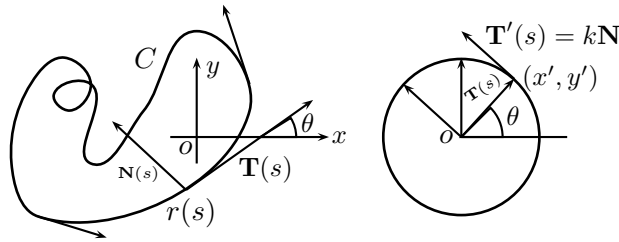


Figura 1.22: Indicatriz tangente.

Sea $\theta(s)$, $0 < \theta(s) < 2\pi$, el ángulo que forma $\mathbf{T}(s)$ con el eje x ; es decir, $x'(s) = \cos \theta(s)$, $y'(s) = \sin \theta(s)$. Puesto que $\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}$; $\theta = \theta(s)$ está bien definida como función diferenciable, en un pequeño intervalo en torno a s , y

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \frac{d(x'(s), y'(s))}{ds} = \frac{d(\cos \theta(s), \sin \theta(s))}{ds} \\ &= (-\sin \theta, \cos \theta)\theta' \\ &= J(\mathbf{T}(s))\theta'(s) = \mathbf{N}(s)\theta'(s). \end{aligned}$$

Puesto que $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$, entonces $\theta'(s) = k(s)$ lo cual sugiere definir una función global y diferenciable $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\theta(s) = \int_0^s k(s)ds.$$

Esta función global coincide, salvo constantes, con la definición local previa de θ , puesto que al derivar $\theta = \theta(s)$,

$$\theta'(s) = \left(\arctan \frac{y'(s)}{x'(s)} \right)' = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2},$$

obtenemos que $\theta'(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = k(s)$, por observación (1.6). Aquí se ha tenido en cuenta que $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$.

Intuitivamente, $\theta(s)$ mide la rotación total del vector tangente, es decir, el ángulo total descrito por el punto $T(s)$ de la indicatriz tangente, cuando recorremos la curva α desde 0 hasta s , donde $s \in [0, l]$. Ya que α es cerrada, este ángulo es un múltiplo entero I de 2π , o sea,

$$\int_0^l k(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I.$$

El número entero I es el *índice de rotación* de la curva α . En efecto, la indicatriz tangente $T : [0, l] \rightarrow S^1$ definida así; $T(s) = (x'(s), y'(s))$ satisface $T(0) = T(l) = p$, $p \in S^1$, por tanto T es un arco cerrado en S^1 , que pasa por p , el cual por la proposición (1.6), puede elevarse a un arco único $\tilde{T} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ que comienza en un punto $x \in \mathbb{R}$ con $\pi(x) = p$, donde π es la aplicación recubridora de S^1 , figura (1.23).

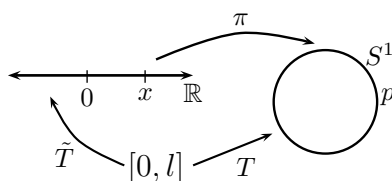


Figura 1.23: La aplicación $T : [0, l] \rightarrow S^1$

Note que $\tilde{T}(s) = \theta(s) = \int_0^s k(s)ds + x$, $s \in [0, l]$, pues $\tilde{T}(0) = x$, y

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{T}(s)) &= \pi(\theta(s)) = (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s)) \\ &= (x'(s), y'(s)) = T(s). \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \tilde{T}(l) - \tilde{T}(0) &= \int_0^l k(s) + x - \left(\int_0^0 k(s)ds + x \right) \\ &= \int_0^l k(s) = (\text{deg}T)2\pi = I(2\pi). \end{aligned}$$

En la figura (1.24) se muestran algunas trazas de curvas con su índice de rotación. Vemos que el índice de rotación cambia de signo cuando se cambia la orientación de la curva. Es más, se ha establecido la definición de forma que el índice de una curva cerrada y simple, orientada positivamente, sea positivo.

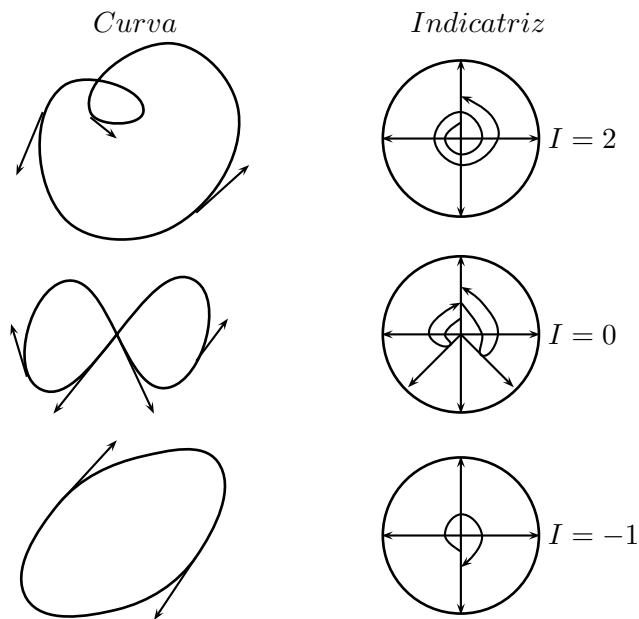


Figura 1.24: La curva y su indicatriz tangente.

Un hecho global importante sobre el índice de rotación lo da el siguiente teorema de *rotación de tangentes*, el cual afirma que este índice puede ser ± 1 , para ciertas curvas.

1.9. Teorema de rotación de tangentes

Teorema 1.4. Sea $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, plana, cerrada y simple. Entonces el índice de rotación de β es ± 1 (dependiendo de la orientación de β).

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una recta que no corta a la curva y la desplazamos paralelamente a sí misma hasta que sea tangente a la curva. Denotemos por L esta posición de la recta y por p al punto de tangencia de la curva con L . Es claro que la curva se encuentra totalmente contenida en un lado de la recta L , figura (1.25).

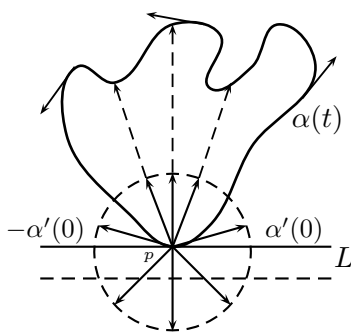


Figura 1.25: Rotación de tangentes.

Elijamos una nueva parametrización $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ para la curva de tal manera que $\alpha(0) = p$. Definamos ahora el triángulo (ver figura 1.26)

$$\tau = \{(t_1, t_2) \in [0, l] \times [0, l]; 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq l\},$$

y también la “aplicación secante” $\psi : \tau \rightarrow S^1$ mediante

$$\psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, & \text{si } t_1 = t_2 = t, \\ \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|}, & \text{si } t_1 \neq t_2, (t_1, t_2) \in \tau - \{(0, l)\}, \\ -\frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|}, & \text{si } t_1 = 0, t_2 = l \end{cases}$$

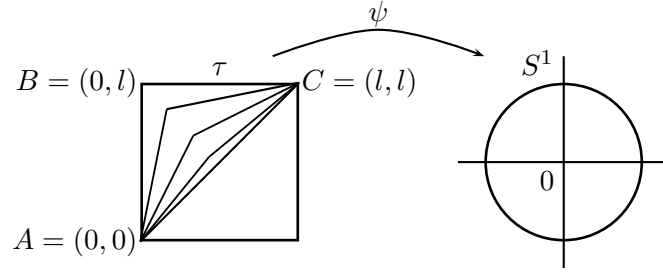


Figura 1.26: Rotación de tangentes. Homotopía y recubrimiento

Como α es regular, la aplicación ψ es continua.

Sean $A = (0, 0)$, $B = (0, l)$, $C = (l, l)$ los vértices de el triángulo τ (figura 1.26). Definamos los arcos $\omega_0 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\omega_0(s) = (s, s)$ y $\omega_1 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\omega_1(s) = \begin{cases} (0, 2s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{l}{2}, \\ (2s - l, l), & \text{si } \frac{l}{2} \leq s \leq l \end{cases}$$

Veamos que los arcos ω_0 y ω_1 , que unen los puntos $A = \omega_0(0) = \omega_1(0) = (0, 0)$ y $C = \omega_0(l) = \omega_1(l) = (l, l)$ son homotópicos, es decir, que cumplen con las condiciones de la definición (1.21). La aplicación $H : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \tau$ se define como (ver ejemplo 7)

$$H(s, t) = \omega_0(s) + \frac{t}{l}(\omega_1(s) - \omega_0(s)).$$

Entonces, para la condición 1: $H(s, 0) = \omega_0(s)$ y $H(s, l) = \omega_1(s)$. Para la condición 2: $H(0, t) = \omega_0(0) = A$ y $H(l, t) = \omega_0(l) = C$. Así, tenemos que ω_0 es homotópico a ω_1 .

Ahora, al restringir ψ al lado AC del triángulo τ , tenemos la aplicación $\psi \circ \omega_0 : [0, l] \rightarrow S^1$ definida como $\psi \circ \omega_0(s) = \psi(s, s)$. Entonces, por la definición de ψ , vemos que

$$\psi \circ \omega_0(0) = \psi(0, 0) = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|}, \quad \psi \circ \omega_0(l) = \psi(l, l) = \frac{\alpha'(l)}{|\alpha'(l)|}.$$

Al restringir ψ a los lados AB y BC del triángulo τ , obtenemos la aplicación

$\psi \circ \omega_1 : [0, l] \rightarrow S^1$ tal que

$$\psi \circ \omega_1(s) = \begin{cases} \psi(0, 2s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{l}{2}, \\ \psi(2s - l, l), & \text{si } \frac{l}{2} \leq s \leq l \end{cases}$$

y, por definición de ψ , tenemos que

$$\psi \circ \omega_1(0) = \psi(0, 0) = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|}, \quad \psi \circ \omega_1(l) = \psi(l, l) = \frac{\alpha'(l)}{|\alpha'(l)|}.$$

Definamos la aplicación $H^* : [0, l] \times [0, l] \rightarrow S^1$ como

$$H^*(s, t) = \psi \circ \omega_0(s) + \frac{t}{l}(\psi \circ \omega_1(s) - \psi \circ \omega_0(s)),$$

de donde vemos que $H^*(s, 0) = \psi \circ \omega_0(s)$, y $H^*(s, l) = \psi \circ \omega_1(s)$ y, también, que $H^*(0, t) = \psi \circ \omega_0(0)$ y $H^*(l, t) = \psi \circ \omega_0(l)$. Por tanto, por la definición (1.21), la aplicación $\psi \circ \omega_0$ es homotópica a la aplicación $\psi \circ \omega_1$.

Entonces, se ha reducido el problema a probar que el grado de la aplicación $\psi \circ \omega_1 : [0, l] \rightarrow S^1$ es ± 1 . Admitamos que las orientaciones del plano y de la curva $\alpha(t)$ son tales que el ángulo orientado de $\alpha'(0)$ a $-\alpha'(0)$ es π . Notemos que, cuando $0 \leq s \leq \frac{l}{2}$; $\psi \circ \omega_1$ recubre una mitad de S^1 en la dirección positiva y, cuando $\frac{l}{2} \leq s \leq l$, recubre la mitad restante también en la dirección positiva. Por tanto, el grado de $\psi \circ \omega_1$ es $+1$.

Puesto que $\psi \circ \omega_1$ es homotópica a $\psi \circ \omega_0$ se tiene, por el teorema (1.3), que el grado de $\psi \circ \omega_0$ es $+1$. Pero $\psi \circ \omega_0(s) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|}$ es la aplicación tangente, por lo tanto, por definición de índice, concluimos que el índice de rotación de β es $+1$. Invertiendo la orientación obtenemos que dicho índice es -1 . \square

1.10. La curvatura y la convexidad de una curva

Por la definición (1.14) sabemos lo que es una curva convexa. Si la curva $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es simple, la convexidad se puede expresar en términos de la curvatura. Recordando que,

para curvas planas, siempre se entiende que la curvatura está dotada de signo. Ahora veamos el siguiente lema y la proposición que relaciona los dos aspectos mencionados anteriormente.

Sea $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ la aplicación tangente de α y $\tilde{\varphi} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ la elevación de la curva α que empieza en $0 \in \mathbb{R}$.

Lema 1.1. *La curvatura k no cambia de signo si y sólo si $\tilde{\varphi}$ es monótona (creciente si $k \geq 0$, o decreciente si $k \leq 0$).*

En la figura (1.27) vemos una curva orientada (ver observación 1.5) de tal manera que si $t_0 < t_1 < t_2$, entonces $\theta(t_0) < \theta(t_1) < \theta(t_2)$, es decir, $\theta(t)$ es creciente y, con $\tilde{\varphi}(t) = \theta(t)$, tenemos que $\tilde{\varphi}(t)$ es creciente si $k > 0$.

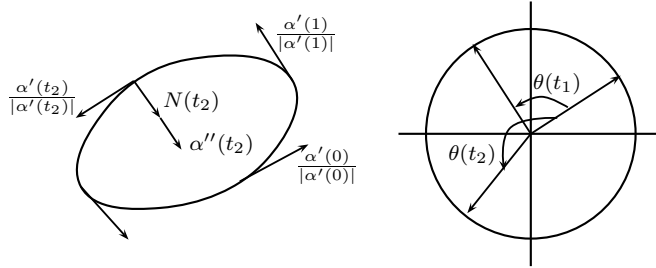


Figura 1.27: La aplicación $\tilde{\varphi}$: monótona creciente. $k \geq 0$

Ahora, en la figura (1.28) tenemos una curva orientada en sentido contrario (ver observación 1.5) de donde, si $t_0 < t_1 < t_2$, vemos que $\theta(t_0) > \theta(t_1) > \theta(t_2)$ luego $\theta(t)$ es no creciente y, puesto que $\tilde{\varphi}(t) = \theta(t)$, entonces $\tilde{\varphi}(t)$ es no creciente si $k < 0$.

En el otro sentido, si $\tilde{\varphi}$ es monótona la curvatura k no cambia de signo.

Proposición 1.9. *Sea una curva regular, cerrada y plana. Entonces la curva es simple y su curvatura k no cambia de signo si y solamente si la curva es convexa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea nuevamente $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ la aplicación tangente de α y $\tilde{\varphi} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ la elevación de la curva α que empieza en $0 \in \mathbb{R}$.

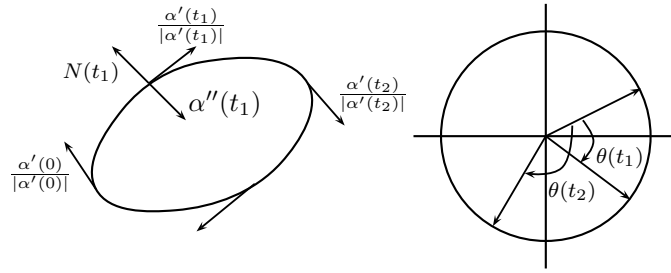


Figura 1.28: La aplicación $\tilde{\varphi}$: monótona decreciente. $k \leq 0$

Supongamos que α es simple y que k no cambia de signo. Podemos orientar el plano de la curva de forma que $k \geq 0$ (observación 1.5). Supongamos también que α no es convexa, entonces existe un $t_0 \in [0, l]$ tal que pueden encontrarse puntos de $\alpha([0, l])$ en los dos semiplanos determinados por la recta tangente T en $\alpha(t_0)$, figura (1.29). Sea $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t_0)$ el vector normal en t_0 y definamos la “función altura” $h_N : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$h_N(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \mathbf{N} \rangle, \quad t \in [0, l].$$

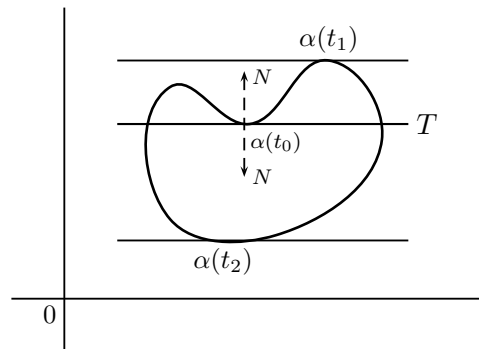


Figura 1.29: Proyección de $(\alpha(t) - \alpha(t_0))$ sobre \mathbf{N}

Como $[0, l]$ es compacto y los dos semiplanos asociados a la tangente T contienen puntos de la curva α , la función h_N (ver apéndice A.3), por el teorema (1.2), tiene un máximo en $t_1 \neq t_0$ y un mínimo en $t_2 \neq t_0$. Los vectores tangentes en los puntos t_0, t_1, t_2 son paralelos, por tanto, dos de ellos, por ejemplo, $\alpha'(t_0)$ y $\alpha'(t_1)$, tienen la misma dirección.

Entonces $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$ y, puesto que α es simple, por el teorema (1.4), $\tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{\varphi}(t_1)$.

Supongamos que $t_1 < t_0$, por lo expresado anteriormente, $\tilde{\varphi}$ es monótona no decreciente, luego es constante sobre $[t_0, t_1]$. Esto significa que $\alpha([t_0, t_1]) \subset T$. Pero esto contradice la elección de T , demostrándose así que α es convexa.

Recíprocamente, supongamos que α es convexa. Asumamos que la curva α no es simple, es decir que por lo menos tiene un punto de autointersección, entonces al trazar una tangente por este punto (figura 1.30a) o en las proximidades del mismo (figura 1.30b) se viola la condición de convexidad, luego la curva α es simple.

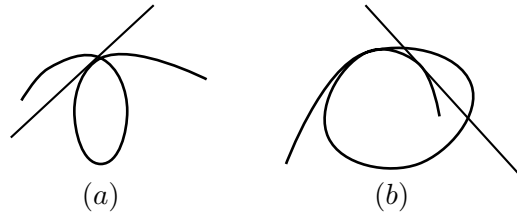


Figura 1.30: Curvas no simples

Admitamos ahora que α es convexa y que la curvatura k cambia de signo en $[0, l]$, entonces existen puntos $t_1, t_2 \in [0, l]$, $t_1 < t_2$, con $\tilde{\varphi}(t_1) = \tilde{\varphi}(t_2)$, donde $\tilde{\varphi}$ no es constante sobre $[t_1, t_2]$. La demostración concluirá cuando probemos que esto último conduce a una contradicción.

Por el teorema (1.4), existe un punto $t_3 \in [0, l]$ con $\varphi(t_3) = -\varphi(t_1)$. Por convexidad, dos de las tres tangentes paralelas en los puntos $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$, $\alpha(t_3)$ deben coincidir. Supongamos que es así el caso para $\alpha(t_1) = p$, $\alpha(t_3) = q$, $t_3 > t_1$. Afirmamos que el arco de α comprendido entre p y q es el segmento rectilíneo pq , figura (1.31).

En efecto, admitamos que $t \neq q$ es el último punto para el que este arco es un segmento rectilíneo (t podría coincidir con p). Como la curva se encuentra en el mismo lado de la recta pq , se ve fácilmente que alguna tangente T en las proximidades de p va a cortar el segmento pq en un punto interior, figura (1.31).

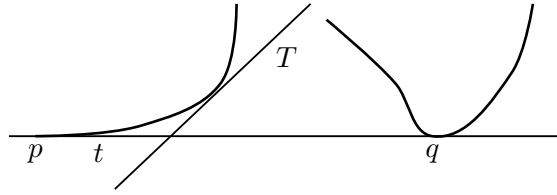


Figura 1.31: La recta pq

Entonces p y q se encuentran en lados distintos de T . Como esto es una contradicción, la afirmación queda demostrada. Se deduce entonces que las rectas tangentes coincidentes tienen las mismas direcciones; es decir, son realmente las rectas tangentes $\alpha(t_1)$ y $\alpha(t_2)$. Por tanto, $\tilde{\varphi}$ es constante en $[t_1, t_2]$, y esta contradicción demuestra que k no cambia de signo en $[0, l]$. □

Capítulo 2

Teorema de los cuatro vértices.

Forma simple

A continuación tenemos la demostración del teorema de los cuatro vértices en su forma simple, y al final se presenta una reformulación de este teorema. Cabe notar que para la demostración del teorema de los cuatro vértices en su forma simple se hace uso del siguiente lema y de conceptos del cálculo diferencial. Pero, para la demostración de la reformulación de este teorema, se utiliza toda la teoría mencionada anteriormente.

Lema 2.1. *Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana y cerrada parametrizada por longitud de arco y sean A, B y C números reales arbitrarios. Entonces*

$$\int_0^l (Ax + By + C) \frac{dk}{ds} ds = 0, \quad (2.1)$$

donde las funciones $x = x(s)$ y $y = y(s)$ vienen dadas por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y k es la curvatura de α .

DEMOSTRACIÓN. Hay que tener en cuenta que existe una función diferenciable $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x'(s) = \cos \theta(s)$, $y'(s) = \sin \theta(s)$. Así, $k(s) = \theta'(s)$

$$x'' = -\theta' \sin \theta = -ky', \quad y'' = \theta' \cos \theta = kx'. \quad (2.2)$$

Puesto que las funciones involucradas coinciden en 0 y en l tenemos que,

$$\int_0^l k' ds = [k(l) - k(0)] = 0.$$

Consideremos la siguiente integral,

$$\int_0^l \frac{d(xk)}{ds} ds = x(l)k(l) - x(0)k(0) = 0,$$

y puesto que

$$\frac{d(xk)}{ds} = x'(s)k(s) + x(s)k'(s),$$

tenemos que

$$\int_0^l \frac{d(xk)}{ds} ds = \int_0^l x'(s)k(s) ds + \int_0^l x(s)k'(s) ds = 0,$$

de donde se deduce que $\int_0^l x'k ds = -\int_0^l xk' ds$; y haciendo uso de las igualdades (2.2)

tenemos que

$$\int_0^l Axk' ds = -\int_0^l Ax'k ds = -\int_0^l Ay'' ds = -[A(y'(l) - y'(0))] = 0,$$

análogamente se deduce que $\int_0^l y'k ds = -\int_0^l yk' ds$; y por las igualdades (2.2) tenemos que

$$\int_0^l Byk' ds = -\int_0^l By'k ds = \int_0^l Bx'' ds = B(x'(l) - x'(0)) = 0.$$

Sumando los resultados anteriores se concluye que

$$\int_0^l (Axk' + Byk' + Ck') ds = \int_0^l (Ax + By + C)k' ds = 0.$$

□

Observación 2.1. Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, cerrada, diferenciable, parametrizada por la longitud de arco y sea $k : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ su función curvatura. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \alpha(l) \\ \alpha'(0) &= \alpha'(l) \\ \alpha''(0) &= \alpha''(l) \\ &\vdots \\ \alpha^{(n)}(0) &= \alpha^{(n)}(l) \end{aligned}$$

Por las fórmulas de Frenet $\alpha''(s) = \frac{dT}{ds} = k(s)N(s)$, por tanto $\alpha''(0) = k(0)N(0)$ y $\alpha''(l) = k(l)N(l)$, luego $k(0)N(0) = k(l)N(l)$. Ahora,

$$k(0)N(0) = k(l)J(T(l)) = k(l)J(\alpha'(l)),$$

como $\alpha'(l) = \alpha'(0)$ tenemos que $k(l)J(\alpha'(l)) = k(l)J(\alpha'(0))$.

Así, $k(0)N(0) \cdot N(0) = k(l)N(0) \cdot N(0)$ y por lo tanto $k(0) = k(l)$. Por otra parte $\alpha'''(s) = k'(s)N(s) + k(s)N'(s)$, entonces

$$\alpha'''(0) = k'(0)N(0) + k(0)N'(0)$$

$$\alpha'''(l) = k'(l)N(l) + k(l)N'(l),$$

de donde $\alpha'''(0)N(0) = k'(0) = \alpha'''(l)N(l) = k'(l)$.

Definición 2.1. *Un vértice en una curva regular plana $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un punto $t \in [a, b]$ en donde la derivada de la curvatura $k'(t) = 0$.*

Una circunferencia tiene, por ejemplo, infinitos vértices, y una elipse con semiejes distintos tiene exactamente cuatro vértices, a saber, los puntos donde los ejes cortan a la elipse. Es un hecho global interesante el que éste sea el número mínimo de vértices para todas las curvas cerradas convexas.

Ahora se enuncia el teorema de los cuatro vértices en su forma simple y se presenta su correspondiente demostración.

Teorema 2.1. *Una curva simple, cerrada y convexa tiene al menos cuatro vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una curva $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada, simple y convexa, parametrizada por la longitud de arco y sea $k : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ su función curvatura. Como $k = k(s)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[0, l]$ y, por la observación (2.1), $k(0) = k(l)$, $k'(0) = k'(l)$, además alcanza su máximo y su mínimo en éste intervalo, teorema (1.2). Es decir, existen puntos $s_1, s_2 \in [0, l]$ tal que, por ejemplo, $k(s_1)$ es el

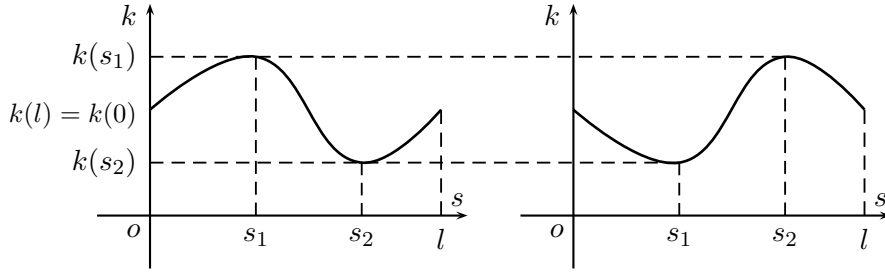


Figura 2.1: Función curvatura

máximo y $k(s_2)$ es el mínimo, figura (2.1). Así, α tiene al menos dos vértices, $\alpha(s_1) = p$ y $\alpha(s_2) = q$. Consideremos la recta L , cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$, que pasa por p y por q , y sean β y γ los dos arcos de la traza de la curva α determinados por los puntos p y q , figura (2.2a). Afirmamos que cada uno de estos arcos se encuentra en un lado definido de L , de otra forma la traza cortaría a L en un punto r distinto de p y q , figura (2.2a). Por convexidad, y ya que p , q y r son puntos distintos de α , la recta tangente en el punto

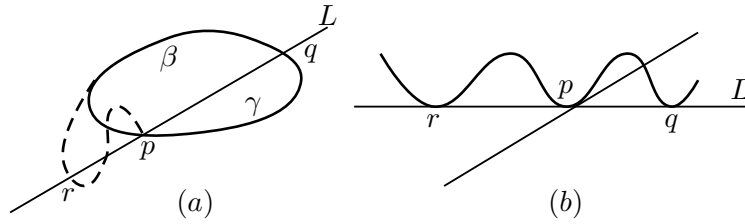


Figura 2.2:

intermedio, por ejemplo, el punto p , tiene que coincidir con L . De nuevo, por convexidad, esto implica que L es tangente a α en los tres puntos p , q y r . Pero entonces, la tangente en un punto cercano a p (el punto intermedio) tendrá a q y r en lados distintos, salvo que el segmento completo rq pertenezca a α , es decir, que la traza $\alpha([0, l])$ esté contenida en un segmento de recta, figura (2.2b). Esto implicaría que la curvatura $k = 0$ en p y q . Puesto que estos puntos corresponden al máximo y al mínimo de k , esto implica que $k(s) = 0$, para todo $s \in [0, l]$. Como $k(s) = \theta'(s)$, entonces $\theta(s)$ es *constante* lo cual es una contradicción pues la curva es cerrada y no una recta.

Si no hay más vértices, $k'(s)$ mantiene un signo constante sobre cada uno de los arcos β y γ . Ahora, como la recta $Ax + By + C = 0$ determina estos dos arcos β y γ , de la traza de la curva α , figura (2.3),

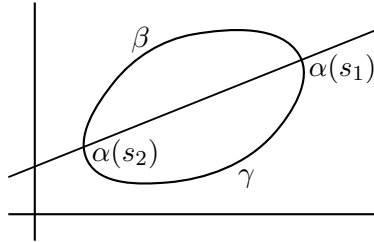


Figura 2.3: Traza de la curva α

vemos que se presentan los siguientes casos, suponiendo que $k(s_1)$ es el máximo y $k(s_2)$ es el mínimo.

Caso 1. $Ax(s_1) + By(s_1) + C = 0$, $Ax(s_2) + By(s_2) + C = 0$; y

$$Ax(s) + By(s) + C < 0, \forall s \in (0, s_1)$$

$$Ax(s) + By(s) + C > 0, \forall s \in (s_1, s_2)$$

$$Ax(s) + By(s) + C < 0, \forall s \in (s_2, l)$$

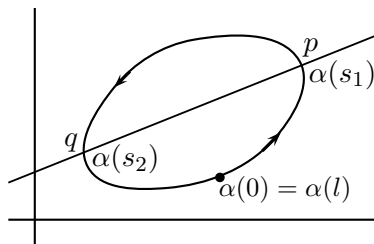


Figura 2.4:

En donde el signo de $\frac{dk}{ds}$ es:

$$\begin{aligned}\frac{dk(s)}{ds} &> 0, \forall s \in (0, s_1) \\ \frac{dk(s)}{ds} &< 0, \forall s \in (s_1, s_2) \\ \frac{dk(s)}{ds} &> 0, \forall s \in (s_2, l)\end{aligned}$$

Caso 2. $Ax(s_1) + By(s_1) + C = 0$, $Ax(s_2) + By(s_2) + C = 0$; y

$$Ax(s) + By(s) + C > 0, \forall s \in (0, s_1)$$

$$Ax(s) + By(s) + C < 0, \forall s \in (s_1, s_2)$$

$$Ax(s) + By(s) + C > 0, \forall s \in (s_2, l)$$

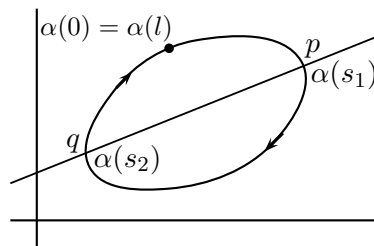


Figura 2.5:

En donde el signo de $\frac{dk}{ds}$ sigue siendo:

$$\begin{aligned}\frac{dk(s)}{ds} &> 0, \forall s \in (0, s_1) \\ \frac{dk(s)}{ds} &< 0, \forall s \in (s_1, s_2) \\ \frac{dk(s)}{ds} &> 0, \forall s \in (s_2, l)\end{aligned}$$

Así que podemos ajustar los signos de los coeficientes de la ecuación $Ax + By + C = 0$ y hacer que

$$\int_0^l (Ax(s) + By(s) + C) \frac{dk}{ds} ds > 0$$

lo cual es una contradicción, probando así que hay un tercer vértice y que $k'(s)$ cambia de signo en β o en γ ; supongamos que en β . Puesto que p y q son puntos de máximo y mínimo, $k'(s)$ cambia de signo dos veces en β , es decir, $k'(s) = 0$ en puntos distintos de p y q . Así, obtenemos cuatro vértices. \square

El anterior teorema 2.2 admite una reformulación y es la siguiente.

Teorema 2.2. *La función curvatura de una curva cerrada convexa es (no negativa y) o bien constante o bien tiene al menos dos máximos y dos mínimos.*

DEMOSTRACIÓN. En la proposición (1.9) se demuestra que una curva plana y cerrada es convexa si, y solamente si, es simple y puede orientarse de forma que su curvatura sea positiva o cero. Así que haciendo uso de esta proposición y de la demostración anterior, del teorema (2.1) se obtiene la prueba de este teorema. \square

A continuación tenemos dos ejemplos de dos curvas cerradas, simples y convexas, de las cuales se hizo mención anteriormente, en las que una de ellas tiene infinitos vértices y la otra solo tiene cuatro vértices.

Ejemplo 10. *Sea la aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, donde $I = (-\epsilon, 2\pi + \epsilon)$, figura (2.6). Entonces,*

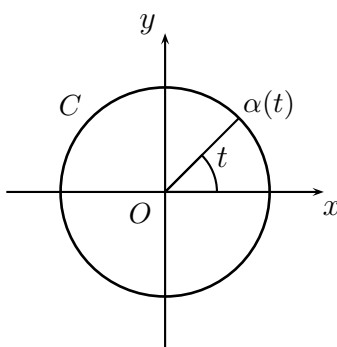


Figura 2.6: Vértices en la circunferencia.

$$x(t) = \cos t, \quad x'(t) = -\operatorname{sen} t,$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t, \quad y'(t) = \cos t,$$

luego la curvatura es

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) - (\cos t)(-\cos t)}{[(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2]^{3/2}} = 1$$

y derivando tenemos que $k'(t) = 0$, para todo $t \in I$, es decir, todos los puntos de la curvatura son críticos. Por lo tanto, la circunferencia tiene infinitos vértices.

Ejemplo 11. Sea la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y sea la aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, obtengamos la ecuación paramétrica de la elipse. De la figura (2.7) tenemos que:

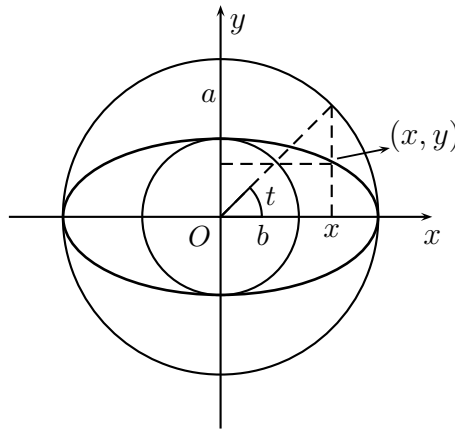


Figura 2.7: Vértices en la elipse.

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad x = a \cos t$$

$$\frac{y}{b} = \operatorname{sen} t, \quad y = b \operatorname{sen} t,$$

luego $\alpha(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$. Entonces, la ecuación paramétrica de la elipse queda:

$$\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \operatorname{sen} t)^2}{b^2} = 1.$$

Ahora, $x(t) = a \cos t$, $x'(t) = -a \operatorname{sen} t$; $y(t) = b \operatorname{sen} t$, $y'(t) = b \cos t$, de donde

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-b \operatorname{sen} t) - (b \cos t)(-a \cos t)}{[(-a \operatorname{sen} t)^2 + (b \cos t)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{ab}{[a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t]^{3/2}} = \frac{ab}{[(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t + b^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$. En seguida derivamos $k(t)$ y obtenemos;

$$k'(t) = \frac{-3ab(a^2 - b^2) \sin 2t}{2 [(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2]^{5/2}}.$$

Para que $k'(t) = 0$, tenemos que $-3ab(a^2 - b^2) \sin 2t = 0$, esto es que $2t = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, es decir, $t = \frac{m\pi}{2}$. Entonces, los puntos críticos son: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, los cuales corresponden a los cuatro vértices.

Apéndice A

A.1. Longitud de arco

Proposición A.1. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada diferenciable y $[a, b] \subset I$; entonces

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} L_a^b(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt. \quad (\text{A.1})$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|P| < \delta$, entonces

$$\left| L_\alpha(\alpha, P) - \int_\alpha \|\alpha'(t)\| dt \right| < \epsilon.$$

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$. Por otra parte, por el teorema del valor medio aplicado a cada una de las funciones x, y, z , tenemos que para cada intervalo de la partición existen $a_k, b_k, c_k \in (t_{k-1}, t_k)$ tales que

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(a_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(b_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(c_k)(t_k - t_{k-1})$$

Por lo tanto tenemos

$$L_a^b(\alpha, P) = \sum_{k=1}^n \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^n \|(x'(a_k), y'(b_k), z'(c_k))\| (t_k - t_{k-1}).$$

Si ahora consideramos la integral y aplicamos el teorema del valor medio, existen $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$, para cada $k = 1, \dots, n$ tales que

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{k=1}^n \|\alpha'(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} L_\alpha(\alpha, P) - \int_\alpha \|\alpha'(t)\| dt &= \\ \sum_{k=1}^n \|(x'(a_k), y'(b_k), z'(c_k))\| (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \|\alpha'(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}) &= \\ \sum_{k=1}^n (\|(x'(a_k), y'(b_k), z'(c_k))\| - \|(x'(\xi_k), y'(\xi_k), z'(\xi_k))\|) (t_k - t_{k-1}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ahora podemos considerar la función $f(t_1, t_2, t_3) = \sqrt{(x'(t_1))^2 + (y'(t_2))^2 + (z'(t_3))^2}$, definida entre $I \times I \times I$ y \mathbb{R} que, es claramente continua y por tanto, uniformemente continua en el compacto $[a, b] \times [a, b] \times [a, b] \subset I \times I \times I$. Esto significa que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $(t_1, t_2, t_3), (t'_1, t'_2, t'_3) \in [a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ y $|t_i - t'_i| < \delta$ para $i = 1, 2, 3$, entonces

$$\|f(t_1, t_2, t_3) - f(t'_1, t'_2, t'_3)\| < \frac{\epsilon}{b-a}. \quad (\text{A.3})$$

Por tanto si tomamos una partición P tal que $|P| < \delta$, dado que $a_k, b_k, c_k, \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, se cumple la condición (A.3) para los puntos (a_k, b_k, c_k) y (ξ_k, ξ_k, ξ_k) ; y teniendo en cuenta la igualdad (A.2) queda

$$\begin{aligned} \left| L_a^b(\alpha, P) - \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \right| &\leq \sum_{k=1}^n (\|f(a_k, b_k, c_k) - f(\xi_k, \xi_k, \xi_k)\|) (t_k - t_{k-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \epsilon. \end{aligned}$$

□

A.2. La curvatura

Proposición A.2. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable regular parametrizada, no necesariamente por la longitud de arco. Entonces

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ la reparametrización de α por la longitud de arco y sea $g : J \rightarrow I$ el cambio de parámetro. Por la proposición (1.3), tenemos que $k_\beta(s) = \langle \mathbf{T}'_\beta(s), \mathbf{N}_\beta(s) \rangle$. Por otra parte tenemos que $\mathbf{T}_\beta(s) = \beta'(s) = \alpha'(g(s))g'(s)$; y por tanto,

$$\mathbf{T}'_\beta(s) = \alpha''(g(s))(g'(s))^2 + \alpha'(g(s))g''(s) = \alpha''(t)(g'(s))^2 + \alpha'(t)g''(s).$$

Además $\mathbf{N}_\beta = JT_\beta(s) = J\alpha'(g(s))g'(s) = J\alpha'(t)g'(s)$. Entonces regresando a la igualdad inicial para $k_\beta(s)$,

$$\begin{aligned} k_\beta(s) &= \langle \alpha''(t)(g'(s))^2 + \alpha'(t)g''(s), J\alpha'(t)g'(s) \rangle = \\ &\langle \alpha''(t)(g'(s))^2, J\alpha'(t)g'(s) \rangle + \langle \alpha'(t)g''(s), J\alpha'(t)g'(s) \rangle = (g'(s))^3 \langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle \end{aligned}$$

puesto que $\langle \alpha'(t), J\alpha'(t) \rangle = 0$. Para concluir la demostración sólo hay que tener en cuenta que $g'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(g(s))\|} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$, (ver proposición 1.2). \square

A.3. La función altura

La *función altura* relativa a un vector unitario $v \in \mathbb{R}^3$, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(p) = p \cdot v$, $p \in S$, donde el punto denota el producto interior usual de \mathbb{R}^3 ; $h(p)$ es la altura de $p \in S$ relativa al plano normal a v que pasa por el origen, figura (A.1).

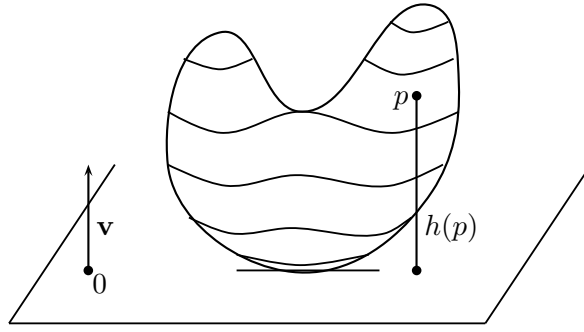


Figura A.1: Función altura

A.4. La unicidad de la aplicación elevadora

Proposición A.3. Sean $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $\alpha : [0, l] \rightarrow B$ un arco en B y $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ un punto de \tilde{B} tal que $\pi[\tilde{\alpha}(0)] = \alpha(0) = p_0$. Entonces, existe una única elevación $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ de α con origen en \tilde{p}_0 , es decir, con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$ (figura 1.13).

DEMOSTRACIÓN. Primero demostramos la unicidad. Sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ dos elevaciones de α con origen en \tilde{p}_0 . Sea el conjunto $A = \{t \in [0, l] : \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t)\}$. El conjunto A es no vacío y además probemos que es cerrado en $[0, l]$.

Sea la aplicación $\varphi : [0, l] \rightarrow \tilde{B} \times \tilde{B}$ tal que $\varphi(t) = (\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))$. El espacio \mathbb{R}^6 con la topología euclidiana \mathcal{T} es de Hausdorff. Si $p, q \in \mathbb{R}^6$, $p \neq q$, entonces existen bolas $B_{r_1}(p)$ y $B_{r_2}(q)$ tales que $B_{r_1}(p) \cap B_{r_2}(q) = \emptyset$. Sea la topología inducida $(\tilde{B} \times \tilde{B}, \mathcal{T}_{\tilde{B} \times \tilde{B}})$, donde $\mathcal{T}_{\tilde{B} \times \tilde{B}} = \{U \cap (\tilde{B} \times \tilde{B}) : U \subset \mathcal{T}\}$.

Puesto que $\tilde{B} \times \tilde{B}$ es de Hausdorff, tomemos el conjunto diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in \tilde{B}\}$ el cual es cerrado. Por lo tanto, su complemento, $\mathcal{C}\Delta$, es abierto. Sea $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}\Delta$, $x_0 \neq y_0$, entonces existen $U(x_0), V(y_0)$ tal que $U(x_0) \cap V(y_0) = \emptyset$, donde $U, V \in \mathcal{T}$; luego

$(x_0, y_0) \in U(x_0) \times V(y_0) \subset \mathcal{C}\Delta$ y $(U(x_0) \times V(y_0)) \cap \Delta = \phi$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(t) &= \{t \in [0, l] : \varphi(t) \in \Delta\} = \{t \in [0, l] : (\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)) \in \Delta\} \\ &= \{t \in [0, l] : \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t)\} = A,\end{aligned}$$

así, el conjunto A es cerrado.

Ahora veamos que A es abierto en $[0, l]$. Supongamos que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t) = \tilde{p}$. Sea un entorno V de \tilde{p} en el que π sea un homeomorfismo. Como $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son aplicaciones continuas, existe un intervalo abierto $I_t \subset [0, l]$ que contiene a t , tal que $\tilde{\alpha}(I_t) \subset V$ y $\tilde{\beta}(I_t) \subset V$. Como $\pi \circ \tilde{\alpha} = \pi \circ \tilde{\beta}$ y π es un homeomorfismo en V , entonces $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ en I_t , luego A es abierto. Por lo anterior $A = [0, l]$ y las dos elevaciones coinciden para cada $t \in [0, l]$.

Demostremos ahora la existencia. Como α es continua, para cada $\alpha(t) \in B$ existe un intervalo $I_t \subset [0, l]$ que contiene a t tal que $\alpha(I_t)$ está contenido en un entorno distinguido de $\alpha(t)$. La familia I_t es un recubrimiento abierto de $[0, l]$ que, por compacidad, admite un subrecubrimiento finito, por ejemplo, I_0, \dots, I_n .

Admitamos que $0 \in I_0$ (si no, podemos cambiar la numeración de los intervalos). Como $\alpha(I_0)$ está contenido en un entorno distinguido de U_0 de p , existe un entorno V_0 de \tilde{p}_0 tal que la restricción π_0 de π a V_0 es un homeomorfismo sobre U_0 . Definimos, para $t \in I_0$; $\tilde{\alpha}(t) = \pi^{-1} \circ \alpha(t)$, donde π_0^{-1} es la aplicación inversa en U_0 del homeomorfismo π_0 . Es claro que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$, $\pi \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $t \in I_0$.

Supongamos ahora que $I_1 \cap I_0 \neq \phi$ (en otro caso podemos cambiar el orden de los intervalos). Sea $t_1 \in I_1 \cap I_0$. Como $\alpha(I_1)$ está contenido en un entorno distinguido de U_1 de $\alpha(t_1)$, podemos definir una elevación de α en I_1 con origen en $\tilde{\alpha}(t_1)$. Por unicidad, este arco coincide con $\tilde{\alpha}$ en $I_1 \cap I_0$, y, por tanto, es una extensión de $\tilde{\alpha}$ a $I_1 \cup I_0$. Procediendo de esta manera, construimos un arco $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$ y $\pi \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $t \in [0, l]$. □

CONCLUSIONES

Como se puede apreciar, la prueba del teorema de los cuatro vértices, solamente en su forma simple, incluye muchos conceptos básicos de geometría diferencial y de la topología algebraica, los cuales se han pretendido reunir en este trabajo monográfico para que el lector pueda seguir la secuencia de la demostración de este teorema hasta llegar a la reformulación del mismo a través de la convexidad y la curvatura k de una curva.

Uno de los planteamientos de *Manfredo P. do Carmo*, con respecto a esta reformulación del teorema de los cuatro vértices en función de la curvatura de una curva es, que si tales funciones de curvatura caracterizan a las curvas convexas, es decir, se plantea la siguiente cuestión. Sea $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable no negativa tal que coincide, junto con todas sus derivadas en a y b . Supóngase que k es constante o tiene al menos dos máximos y dos mínimos. ¿Existe una curva simple cerrada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la curvatura de α sea $k(t)$? Para el caso en que $k(t)$ es estrictamente positiva, *H. Gluck* dio una respuesta afirmativa a dicha cuestión (ver [2]. *L'Enseignement Mathématique*, t.XVII, fasc. 3-4,1971, pp. 295-309).

El teorema de los cuatro vértices es válido para curvas no convexas, es decir para el caso general en el cual se afirma que toda curva cerrada simple tiene al menos cuatro extremos relativos de la función curvatura. Una prueba de esta forma general del teorema fue realizada, como se mencionó antes, por *Robert Osserman* (ver *The four or more vertex theorem*, *Am. Math. Month.*, 92 (1985), 332-337) o (ver [2]). El enunciado es el siguiente:

una curva plana cerrada simple tiene al menos cuatro vértices. El autor en mención inicia la demostración considerando el círculo C , de radio r , circunscrito sobre un compacto E en el plano con al menos dos puntos. De donde surgen las siguientes observaciones:

1. $E \cap C$ contiene al menos dos puntos y si solo dos, ellos deben estar situados a una distancia de $2r$ del uno al otro.
2. No puede haber un arco D de C más grande que la mitad del círculo tal que $D \cap E = \phi$.
3. En una pequeña vecindad de la curva al rededor de un punto p en $E \cap C$ debe suceder que $k \geq \frac{1}{r}$ y que la vecindad de E coincide con el interior de C .

Ha sido fundamental el hecho de que la curva α sea simple, puesto que si fuera solamente cerrada entonces este teorema sería falso, como lo podemos apreciar en el siguiente ejemplo donde tenemos una curva cerrada pero no simple con exactamente dos vértices. Sea la curva α que en coordenadas polares (r, θ) se define como $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$, es decir,

$$\alpha(t) = ((1 - 2 \operatorname{sen} t) \cos t, (1 - 2 \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t).$$

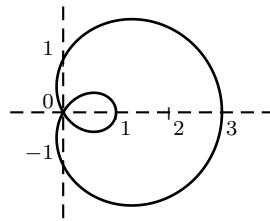


Figura A.2: Una curva con dos vértices

La curvatura de esta curva, cuya traza aparece en la figura (A.2), es

$$k(t) = \frac{9 - 6 \operatorname{sen} t}{(5 - 4 \operatorname{sen} t)^{3/2}}.$$

La derivada de la curvatura es la siguiente

$$k'(t) = \frac{24 \cos t - 12 \cos t \operatorname{sen} t}{(5 - 4 \operatorname{sen} t)^{5/2}} = \frac{12(2 - \operatorname{sen} t) \cos t}{(5 - 4 \operatorname{sen} t)^{5/2}},$$

y $k' = 0$ en los puntos donde $12(2 - \operatorname{sen} t) \cos t = 0$, es decir, en $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. H. EDWARDS, JR.; DAVID E. PENNEY. *Cálculo con Geometría Analítica*. Cuarta Edición. PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
- [2] DENNIS DETURCK; HERMAN GLUCK; DANIEL POMERLEANO; AND DAVID SHEA VICK. *The Four Vertex Theorem and Its Converse*. Notices of the AMS. Volume 54, Number 2.
- [3] EDUARDO AGUIRRE. *Geometría Diferencial De Curvas Y Superficies*. Curso 2006 - 2007 / Grupo E.
- [4] GUSTAVO N. RUBIANO O. *Fundamentos de Topología Algebraica*, 1A Edición. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. Facultad de Ciencias, 2007.
- [5] MANFREDO P. DO CARMO. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial. Versión española de José Claudio Sabina de Lis.
- [6] L. D. KUDRIÁVTSEV. *Curso de Análisis Matemático Tomo I*. Editorial Mir. Moscú.
- [7] RAFAEL LÓPEZ CAMINO. *Departamento de Geometría y Topología*. Universidad de Granada. Material docente para el alumno.
- [8] SEYMOUR LIPSCHUTZ. *Teoría y Problemas de Topología General*. MCGRAW-HILL.