ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y SU REPRESENTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO CON EL USO DEL SOFTWARE EDUCATIVO DERIVE 6 DIRIGIDO A ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO

Universidad
del Cauca

DIEGO ARMANDO DAZA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2011

ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y SU REPRESENTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO CON EL USO DEL SOFTWARE EDUCATIVO DERIVE 6 DIRIGIDO A ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO

DIEGO ARMANDO DAZA

Documento de sistematización de la Práctica Pedagógica

Directora:

Gabriela Arbeláez Rojas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2011

Nota de aceptación

La directora y el evaluador han revisado este documento, han escuchado la sustentación del mismo por su autor y lo encuentran satisfactorio.

Vo. Bo. Wilmer Molina
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Gabriela Arbeláez Rojas
Directora

Vo. Bo. Ángel Hernán Zúñiga
Evaluador

Popayán, 17 de Noviembre de 2011

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Mediante la elaboración e implementación de la propuesta metodológica sobre la enseñanza de las *ecuaciones de segundo grado y su representación en el plano cartesiano con el uso del software educativo derive 6* hemos pretendido incidir, de alguna manera, en la formación matemática de los estudiantes de grado décimo del Colegio Julumito; Institución en donde se llevó a cabo el proyecto que culmina con este documento donde se sistematizará todo el proceso de la Práctica Pedagógica. Se espera que mediante esta herramienta, novedosa en la Institución, los estudiantes hayan sido capaces de aprender, pensar, descubrir, analizar y argumentar nuevos conocimientos matemáticos. De igual manera que algunos de ellos, en un futuro próximo, estén dispuestos a seguir usando esta y otras herramientas tecnológicas, mejor conocidas, como TIC; que les permitan un aprendizaje significativo de muchos conceptos matemáticos y así haber contribuido, aunque sea en pequeña escala, al desarrollo intelectual de los estudiantes con quienes se llevó a cabo el proyecto.

Aunque las clases magistrales, tienen su importancia y su momento en la práctica escolar, creemos también que hay que hacer uso de otras herramientas más acordes con el desarrollo tecnológico actual para que el aprendizaje de las matemáticas se vuelva más agradable y los estudiantes se interesen por aprender nuevos conocimientos. Así, el docente debe encaminar sus clases de tal manera que los alumnos se sientan motivados a descubrir nuevas técnicas de estudio y tener en cuenta la incorporación de nuevas tecnologías para que puedan poner en práctica, los conocimientos adquiridos con la ayuda de herramientas distintas a los elementos habituales como el lápiz y papel.

La elaboración de la propuesta metodológica se llevó a cabo mediante diferentes sesiones de trabajo, en las cuales se puedan analizar los conocimientos que adquieren los estudiantes, de tal manera que hagan buen uso de dicha herramienta en los eventos que lo requieran. El objetivo principal de las sesiones es evitar los procedimientos mecánicos. Como por ejemplo hallar, mediante la fórmula o utilizando casos de factorización, las raíces de una ecuación de segundo grado. Es decir, el estudiante debe realizar una buena lectura de ciertos problemas relacionados con dicho tema matemático para luego analizar y plantear una ecuación de segundo grado y posteriormente aplicar los procesos adecuados para resolverla. Finalmente el estudiante debe comprender el significado que tiene las soluciones (raíces de la ecuación) encontradas, mediante la gráfica correspondiente. Es un hecho que el programa derive 6 facilita la elaboración de las respectivas gráficas y entonces el énfasis se puede hacer en el análisis detallado de su comportamiento en el plano cartesiano, reflejando los cambios que se originen al modificar los valores de los coeficientes en la ecuación.

Antes de llevar a cabo dicho procedimiento se deben tener en cuenta las capacidades que tiene cada alumno sobre esta clase de temas matemáticos. Para ello se llevarán a cabo sesiones de tipo diagnóstico de tal manera que se puedan analizar las virtudes y falencias que presenten los estudiantes en conceptos, tales como: ecuaciones lineales, métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, polinomios, en lo que a las operaciones fundamentales se refiere y los casos de factorización; cuyo fin es que se apropien de éstos y se preparen para abordar los contenidos acerca de las ecuaciones de segundo grado.

El documento que a continuación presentaremos, inicia con una breve descripción del contexto en el que se llevó a cabo la experiencia. Nos referimos no solamente a la Institución Educativa Julumito, sino al marco geográfico que la rodea, tomando en cuenta algunos aspectos históricos del corregimiento en donde está situada, así como los cambios que ha sufrido desde sus inicios hasta la época actual. Esta descripción, aunque superficial, nos permite aproximarnos a unas condiciones socio-culturales y académicas de los estudiantes de la Institución, que se constituyen en un factor importante para direccionar las motivaciones en el momento de enseñar los conceptos matemáticos que entran en juego. También se informa sobre los servicios educativos que ofrece la Institución, reconociendo la labor de los docentes y directivos que la conforman, poniendo en referencia los beneficios que pueden obtener sus alumnos después de culminar la etapa de bachillerato, como por ejemplo: la oportunidad de continuar con estudios superiores, ya que existen convenios con la Corporación Universitaria Autónoma del Cauca.

Posteriormente se presentan los referentes teóricos que se tuvieron en cuenta para la elaboración de la propuesta metodológica. Y finalmente se efectúa la descripción y análisis de cada una de las etapas que se desarrollaron durante el proceso de intervención en el aula, con el propósito de presentar una reflexión de la experiencia y contribuir con futuros trabajos relacionados con la Práctica Pedagógica del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca.

JUSTIFICACIÓN

La práctica pedagógica es un eje esencial en la formación de un Licenciado en Matemáticas, ya que a partir de ésta se adquiere la experiencia que un docente debe tener en el momento de transmitir sus conocimientos a una cantidad de estudiantes en el aula de clase. Motivo por el cual la Universidad del Cauca ofrece una formación en la línea de la Educación Matemática, en donde se destacan cuatro etapas que corresponden la práctica pedagógica, las cuales se mencionan a continuación:

I. Estudio de teorías relacionadas con el significado del término sistematización de experiencias.

II. Elaboración de la propuesta metodológica

III. Intervención en el aula

IV. Sistematización de la experiencia

En la etapa cuatro (práctica pedagógica 4) se realiza cierto proceso de sistematización de la experiencia vivida en el aula; con el propósito de implementar una propuesta metodológica diseñada en las etapas iniciales. En nuestro caso la propuesta se refiere a la *enseñanza de las ecuaciones de segundo grado y su representación en el plano cartesiano con el uso del software educativo derive 6*, con la cual se busca tener una mejor comprensión de esta experiencia y compartir con futuras generaciones de profesionales de matemáticas en su ejercicio como docentes.

El producto que se pretende mostrar al final de nuestra intervención en el aula es un documento, en donde se analizan las experiencias vividas durante el proceso, y será socializado con el fin de dar a conocer los resultados que se obtienen después de implementar la propuesta metodológica de acuerdo al desarrollo de los temas seleccionados para dicha acción.

1. CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

1.1. Breve historia del Corregimiento de Julumito

El nombre de Julumito proviene del nombre de un Cacique llamado JULUMU o Cucumico, las primeras familias fueron de apellidos Chamizo, Trujillo, Angucho, Guasca, Yacumal y Luligo. En el libro Muros de Bronce del Autor Diego Castrillon Arboleda dice que el nombre de Julumito proviene del Quechua JUCU que significa Mojado y MITAYU que significa esclavo, asumido de los Indios Yanaconas, los cuales habitaban este sector.

El corregimiento de Julumito está localizado a 8 km al occidente de la ciudad de Popayán, sobre la cuenca del río Cauca, con un área de 1.152,17 hectáreas. Julumito limita con los siguientes corregimientos: al norte con San Rafael y Santa Rosa, al oriente con San Bernardino, al occidente con la Meseta y al sur con Cajete.

La población del corregimiento de Julumito está conformada por: Julumito, Julumito Alto y los Tendidos. Sus principales fuentes hídricas son: Río Saté y las quebradas de La Buitrera, Filipina, La Paz, El Uvo, Garrachal o Pambazo, Rojas, Quitacalzón, La Laja, San Roque, El Bosque, El Aljibe, Taguayaco. En las tres veredas solo existe bosque protector en muy pequeñas áreas ubicadas en las riveras de las fuentes de agua. El corregimiento de Julumito cuenta con la siguiente distribución agrícola: Café (259.2 ha), caña (20.6 ha), plátano (2.9 ha), pasto (528.5 ha), Maíz (7.8 ha), hortalizas (0.9 ha), fríjol (1.3 ha), otros cultivos (1.9 ha), rastrojos (232.4 ha).

En las veredas de Julumito y Julumito Alto, se practican métodos de conservación de suelos y en la vereda los Tendidos, aún se realizan quemas, deforestaciones, contaminación de las fuentes de agua y ya existe erosión puntual. El corregimiento de Julumito tiene el siguiente equipamiento de servicio social:

Vereda Julumito:

- ✓ Colegio 1(sexto a once grado).
- ✓ Escuela 1 (primaria).
- ✓ Puesto de Salud
- ✓ Parque infantil

- ✓ Acueducto
- ✓ Energía
- ✓ Iglesia

Vereda Los Tendidos

- ✓ Salón comunal
- ✓ Juegos Infantiles
- ✓ Escuela

Vereda Julumito Alto

- ✓ Energía
- ✓ Acueducto
- ✓ Teléfono
- ✓ Puesto de Salud
- ✓ Salón Comunal
- ✓ Iglesia
- ✓ Escuela

En las regiones cercanas a Julumito encontramos las siguientes Instituciones Educativas

- ✓ Santa Rosa
- ✓ La Tetilla Noroccidental
- ✓ Las Mercedes
- ✓ Metropolitano
- ✓ José Eusebio Caro

1.2. La Institución Educativa Julumito

El Centro Docente Julumito conocido anteriormente como La ESCUELA RURAL MIXTA DE JULUMITO inició sus labores académicas con los grados de 1º a 4º en el año de 1958. Posteriormente, entre 1972 – 1973 y como consecuencia del incremento en el número de estudiantes, la Institución ofrece estudios de 1° a 5° de primaria. La Escuela se renombra como Escuela Rural Mixta Integrada de Julumito. Debido a los problemas económicos y de transporte que se presentaban en la comunidad para continuar sus estudios académicos, la junta de acción de la década de los 90`, presenta un proyecto para crear el "Colegio Departamental Agrícola de Julumito"; el cual por problemas administrativos no logró establecerse como Institución Educativa. Solo cuando nace en Colombia la propuesta de los colegios satélites, se consigue el apoyo del Rector del INEM de Popayán y en convenio con él, se abre el grado sexto y luego, con docentes pagos por la comunidad, se continúan estudios de bachillerato en el Salón de la Junta de Acción Comunal. Así nace el colegio de Julumito como un satélite del INEM "Francisco José de Caldas".

En el año 2000 se hacen las gestiones necesarias para independizar al Colegio y se logra la aprobación de estudios, con lo cual la secretaria de Educación departamental lo llama Colegio Básico de Julumito; el cual posteriormente sería fusionado con la Escuela Rural Mixta Los Tendidos y el Colegio Básico de Julumito. Designando este último como Sede Principal, esto debido a un decreto establecido por la Secretaria de Educación Cultura y Deporte Departamental.

En el año 2004, la Secretaria de Educación del Municipio de Popayán reconoce oficialmente la Institución y la autoriza para expedir el certificado de Bachiller Básico y certificar a quienes culminen los estudios de grado décimo.

En el año 2005 se reconoce oficialmente los estudios de grado 10° y 11° lo que permitió la presentación de las Pruebas de Estado y la entrega del título de "Bachiller Académico", quedando sus egresados listos para el ingreso a la Educación Superior.

Finalmente, en el año 2009 se fusiona una nueva sede Educativa "La Laja" perteneciente al Corregimiento de Santa Rosa.

Actualmente, la Institución cuenta con una Coordinadora, 26 Docentes, una Auxiliar de Secretaría, 630 estudiantes de la región Julumito, conformada por las Veredas La Laja, Los Tendidos, Julumito Alto y Julumito y los Asentamientos de Chama y Nuevo Tequendama y el barrio Lomas de Granada, y un Rector.

La Institución está interesada en la formación de personas integrales. Esto es, que los alumnos además de una buena formación académica, sean seres con valores; para ello el colegio ha dispuesto docentes capacitados, que estén comprometidos con la formación de los estudiantes. También debe formar personas capaces de seguir con sus estudios universitarios, para ello la educación de esta Comunidad Educativa está basada en cuatro aprendizajes fundamentales:

Aprender a conocer es decir adquirir los instrumentos de la comprensión.

Aprender a hacer, para poder influir sobre el propio entrono

Aprender a vivir juntos, para participar y cooperar con los demás en todas las actividades humanas.

Aprender a ser, un proceso fundamental que recoge los anteriores elementos y que le permitirán al estudiante una formación integral.[1]

[1]INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO (s.f.). Proyecto Educativo Institucional (PEI). Popayán, p. 5.

Para medir el nivel cognitivo de los estudiantes, la Institución dispone de un sistema de evaluación que se realiza en cuatro periodos de igual duración a lo largo del año lectivo. Además, para que los estudiantes puedan apreciar el avance de su formación, se presentan informes descriptivos al finalizar cada periodo, con el fin de analizar su situación académica.

La valoración se expresa teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

Excelente (E): (9.5- 10). Cuando el estudiante supera ampliamente la mayoría de los logros propuestos.

Sobresaliente (S): (7.5- 9.4). Cuando el estudiante obtiene los logros propuestos, con algunas limitaciones en los requerimientos.

Aceptable (A): (6.7- 7.4). Aún cuando haya superado algunos logros aún presente dificultades.

Insuficiente (I): (3.5- 6.6). Cuando NO se alcanza la mayoría de los requerimientos previstos en los logros.

Deficiente (D): (1- 3.4). Cuando, a pesar de realizar actividades de recuperación y nivelación, el estudiante no haya cumplido con ninguno de los compromisos académicos.

Por otra parte, la Institución Educativa está conformada por estudiantes pertenecientes a los estratos 1 y 2; cuyos ingresos están por debajo del salario mínimo. Además, algunos de ellos hacen parte de comunidades indígenas y desplazados por la violencia, factores que influyen en el poco interés hacia la educación formal; pues al finalizar el ciclo de bachillerato los estudiantes en su mayoría se dedican a las labores propias del campo. Algunos se dedican a la construcción y otros aspiran ingresar a las fuerzas militares y a la Policía Nacional. Solo un pequeño porcentaje de los estudiantes tiene la posibilidad y la disciplina para seguir estudios superiores, por ejemplo Tecnologías, cursos con énfasis en sistemas y preuniversitarios. Particularmente, de los 19 egresados del año lectivo 2010, solo el 10.5% de los estudiantes accedieron a la educación superior en la Corporación Universitaria Autónoma del Cauca, debido a los acuerdos realizados previamente con la Institución. Es necesario aclarar que esta corporación es de carácter privado, pero ofrece a los estudiantes facilidades económicas. Por otra parte, la Universidad del Cauca es de carácter público, pero las dos personas que se inscribieron no aprobaron el examen interno.

Los profesores con que cuenta la Institución son en su mayoría de formación profesional y especialistas en cada una de sus áreas, los cuales son personas dedicadas a sus labores académicas, tratando de proporcionar una buena formación a los estudiantes, tanto académica como personal. Además, consideran a las matemáticas como un área fundamental en el desarrollo de los proyectos institucionales centrados en la productividad del campo, también es una parte fundamental para el ingreso a la educación superior.

Es importante mencionar que la Institución está en el proceso de cambio de metodología de enseñanza de una escuela tradicional a una escuela activa. Es decir, el estudiante está más comprometido en su proceso de aprendizaje, con lo cual se facilita un espacio dentro del aula para desarrollar talleres de forma individual y grupal. Además la presentación de trabajos expositivos, y para el estudio de la geometría se va a implementar el software educativo Cabri.

La implementación de la propuesta metodológica para estudiar las ecuaciones de segundo grado y su representación en el plano cartesiano se realizó en la sede principal de la Institución Educativa Julumito que consta de una cancha, una sala de profesores, 5 salones. También se destaca la existencia de una sala de computadores dotados cada uno de internet; que fueron útiles para llevar a cabo la propuesta, ya que por medio de éstos se pudo instalar y utilizar el programa Derive 6 para el desarrollo de dicho tema, que se llevó a cabo en el grado décimo, que cuenta con un total de 37 alumnos.

Los estudiantes, aunque predominaba la indisciplina, son personas respetuosas, sin embargo su rendimiento académico no era el mejor. Pero, poco a poco iban progresando y trataban de cumplir con las tareas asignadas, pese a que las matemáticas no eran de mucho interés para algunos, entonces la idea que surge es motivarlos para que cambien de opinión y aumenten el interés por estudiar los contenidos de ésta área de conocimiento y de alguna manera instruirlos para que, una vez terminado la etapa del bachillerato se inclinen por seguir estudios superiores. Motivo por el cual surge la idea de implementar un software educativo, ya que en la Institución no se han realizado procesos con éste tipo de herramienta educativa.

2. MARCO CONCEPTUAL

En la presente práctica pedagógica acudimos a teorías que expliquen los procedimientos diseñados en la propuesta metodológica: *enseñanza de las ecuaciones de segundo y su representación en el plano cartesiano por medio del software educativo Derive 6, dirigido a estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Julumito.*

Es interesante el estudio del concepto de las ecuaciones de segundo grado, puesto que a partir de ellas se pueden modelar de manera algebraica situaciones de la vida cotidiana, que serán resueltas a partir del cálculo de sus raíces. A continuación se presenta una pequeña historia acerca de las ecuaciones de este tipo:

Hasta el siglo XVII, la teoría de ecuaciones estuvo limitada; pues los matemáticos no aceptaban que los números negativos y complejos podían ser raíces de ecuaciones polinómicas. Sólo los antiguos matemáticos Indios, como Brahmagupta, conocían las raíces negativas, pero fuera de China e India no se trabajaba con coeficientes negativos en los polinomios. Una ecuación polinómica tiene la siguiente forma general: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$; donde los coeficientes a_0, a_1,..., a_n son números cualesquiera. El *grado* de una ecuación polinómica es igual al número entero positivo n, si $a_n \neq 0$.

Una *raíz* es un valor de la variable x tal que al sustituirlo en la ecuación polinómica se obtiene 0 = 0. Para resolver una ecuación polinómica, hay que encontrar todas las raíces de la ecuación.

La ecuación *cuadrática,* o de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos raíces, las cuales se pueden calcular mediante la aplicación de los métodos de factorización de polinomios o utilizando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \mathrm{a} \neq 0$$

Los egipcios utilizaban el método de la falsa posición para encontrar una raíz en ecuaciones de segundo grado sencillas. Para ecuaciones cuadráticas con un término en x, como $x^2 - 5x = 6$. Las primeras soluciones no se encuentran hasta en los libros de matemáticas babilonios del 2000 a.C. Aunque los babilonios no conocían las raíces negativas ni las complejas, su método de búsqueda de las raíces positivas reales es el mismo que se utiliza en esta época.

Actualmente, hay evidencias de que los babilonios, alrededor del año 1600 a.C., ya conocían un método para resolver ecuaciones de segundo grado, aunque no tenían una notación algebraica para expresar la solución. Este conocimiento pasó a los egipcios, que las usaban para redefinir los límites de las parcelas anegadas por el Nilo, en sus crecidas. Posteriormente, los griegos, al menos a partir del año 100 a.C., resolvían las ecuaciones de segundo grado con métodos geométricos, métodos que también utilizaban para resolver algunas ecuaciones de grado superior. Parece ser que fue Diofanto de Alejandría quien le dió un mayor impulso al tema. La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el Matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya, en su "Liber Embadorum".

Para resolver la ecuación $x^2 - 10x = -9$, el matemático indio Brahmagupta (628 d. C.) propuso el siguiente procedimiento:

Multiplica el número –9, por el Coeficiente del cuadrado, 1; el resultado es –9.

El matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi utilizó la siguiente estrategia para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$. Debes tomar la mitad del número de las raíces, que es 5, y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número, que es 8, y le restas la mitad de las raíces, 5, y obtienes 3, que es el valor buscado.

En 1629 el matemático francés Albert Girard aceptó raíces de ecuaciones tanto negativas como complejas y fue, por tanto, capaz de finalizar el aún incompleto estudio que François Viète había realizado sobre la relación entre las raíces de una ecuación algebraica y sus coeficientes. Viète había descubierto que si *a* y b son las raíces de $x^2 - px + q = 0$, entonces $p = (a + b)$ y $q = a \cdot b$.

Generalizando, Viète demostró que si el coeficiente del término de mayor grado de la ecuación $p(x) = 0$ es la unidad, entonces el coeficiente del segundo término de mayor grado cambiado de signo es igual a la suma de todas las raíces; el coeficiente del tercer término es igual a la suma de todos los productos formados al multiplicar las raíces de dos en dos; el coeficiente del cuarto término cambiado de signo es igual a la suma de todos los productos que resultan de multiplicar las raíces de tres en tres. Si el grado de la ecuación es par, el coeficiente del último término es igual al producto de todas las raíces; si es impar, es el producto de todas las raíces cambiado de signo. Viète también aportó importantes métodos numéricos para encontrar aproximaciones a las raíces de una ecuación.

En 1635 el matemático y filósofo francés René Descartes publicó un libro sobre la teoría de ecuaciones, incluyendo su *regla de los signos* para saber el número de raíces positivas y negativas de una ecuación. Unas cuantas décadas más tarde, el físico y matemático inglés Isaac Newton descubrió un método iterativo para encontrar las raíces de ecuaciones.

Después de este breve recuento histórico sobre las ecuaciones de segundo grado, continuemos describiendo los referentes teóricos que se tendrán en cuenta para el proceso de enseñanza de éste concepto matemático con el uso del software educativo derive 6.

La idea principal que se presenta para tal efecto es diseñar guías de trabajo, las cuales serán objeto de estudio durante la intervención en el aula. De esta manera se pretende cambiar las clases magistrales, en donde el alumno no tiene participación dinámica, por una formación activa, lo cual significa que el estudiante está más comprometido en su proceso de aprendizaje, desarrollando talleres de forma individual y grupal. Además, presentación de trabajos expositivos que manifiesten el entendimiento del conocimiento matemático. Es necesario tener en cuenta teorías, previamente estudiadas que sean la base fundamental en el análisis de los resultados obtenidos durante la intervención en el aula.

La didáctica de las matemáticas es un campo bastante amplio en la educación que considera diversas teorías que contribuyen a idealizar procesos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A partir de ésta se pueden referenciar conceptos importantes en la construcción y desarrollo del plan de estudio diseñado para la respectiva intervención en el aula, entre los que se destacan: situaciones didácticas y contrato didáctico. A continuación se presentan algunas visiones sobre la didáctica de las matemáticas expuestas por pensadores como Bruno D'Amore y Regine Douady.

Se puede afirmar que la Didáctica de una disciplina, es la ciencia que estudia, para un campo en particular, los fenómenos de enseñanza, las condiciones de la transmisión de la "cultura" propias de una Institución y las condiciones de adquisición de conocimientos. Es decir, comprende los procesos que se deben tener en cuenta para garantizar un buen desempeño, tanto en lo educativo como en la buena relación que el ser humano debe llevar a cabalidad ante sus semejantes. Según Douady (1984):

> **La didáctica de las matemáticas** es el estudio de los procesos de transmisión y de adquisición de los diferentes contenidos de ésta ciencia (la matemática) y se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre su enseñanza y aprendizaje. No se reduce a buscar una buena forma de enseñar una determinada noción.[2]

[2]D'AMORE, Bruno. *Didáctica de la Matemática*, Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá – Colombia, 2006, p. 49.

Además, Bruno D'Amore afirma:

> El término Didáctica, no debe referirse necesaria y únicamente a la enseñanza, pues también es necesaria la formación personal y colectiva". También dice: "la Didáctica se halla en el sector de la Pedagogía, que tiene por objeto el estudio de los métodos de enseñanza.[3]

Lo cual significa que la didáctica no se encarga de enseñar a "enseñar", sino dar explicaciones al docente para experimentar ideas acerca de los procesos tenidos en cuenta para desarrollar métodos educativos que satisfagan una buena relación académica entre las dos partes Maestro - Alumno y así equilibrar un buen ambiente escolar.

Dentro de la teoría de la didáctica se definen conceptos de vital importancia en el desarrollo de nuestro trabajo, donde se establecen las consideraciones que realiza el docente para interactuar de manera colectiva con el estudiante, cuyo objetivo es apropiarlo de un nuevo conocimiento matemático. *Situación didáctica*, es uno de estos conceptos, el cual Guy Brousseau lo define así:

> La situación didáctica como un conjunto de relaciones establecidas explícita e implícitamente entre el alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (comprendido eventuales instrumentos u objetos) y un sistema educativo (el docente) con el fin de que los alumnos se apropien un saber constituido o en vía de construirse.[4]

También, el contrato didáctico es fundamental para la intervención en el aula; ya que a partir de éste, tanto el maestro como el alumno se comprometen a desempeñar un rol académico dentro del salón de clase, el cual contribuye a las necesidades de cada uno.

---

[3] D'AMORE, Bruno. Didáctica de la Matemática, Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá – Colombia, 2006, p. 33.

[4] MABEL PANIZZA. Conceptos básicos de la teoría de situación didáctica. http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf (último acceso: 12 de Abril de 2011).

> El contrato didáctico, es el conjunto de condiciones que determinan implícitamente aquello que cada pareja, el docente y el alumno, tiene la responsabilidad de asumir y en donde cada uno está comprometido delante del otro. El docente cumple su contrato dando lecciones para aprender y ejercicios para hacer. Debe prever en su clase partes que el alumno pueda aprender. El alumno cumple su contrato si él aprende sus lecciones y si él hace sus ejercicios. Si el alumno no comprende o no sabe cómo hacerlo, el docente debe ayudarlo.[5]

En el contrato didáctico se plantea un convenio entre maestro y alumno sobre la metodología de estudio que se va a llevar a cabo en las sesiones de trabajo, en donde definen los temas a tratar y la forma de evaluación, llegando a un acuerdo entre las dos partes. Es decir, el docente se compromete a diseñar un plan de trabajo cuyo objetivo es que los estudiantes comprendan el significado de los conceptos expuestos en clase, y a su vez se comprometan a cumplir las actividades académicas propuestas por el docente.

En este trabajo nos interesa analizar la forma en que los estudiantes abordan una situación de la vida cotidiana que involucra una problemática que es susceptible de analizarse matemáticamente de tal manera que apliquen la teoría matemática; con el objetivo de elaborar y desarrollar una estrategia metodológica que conlleve a la solución de dichos contenidos. Para ello; resulta la idea de proponer actividades para examinar la forma en que el estudiante aplica los conocimientos adquiridos y demuestren que han asimilado los conceptos estudiados. En éste sentido optamos por la concepción de situaciones problema que ofrece Jhon Jairo Múnera, siendo ésta:

> La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva, para que esto suceda debe tener las siguientes características: Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender. Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él. Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.

[5]CHEVELARD, Y. Sur l'ingénierie didactique. *Texte préparé pour la deuxième Ecole d'Eté de didactique des Mathémaiques*. Orléans: Juillet, 1982.

> Una *situación problema* la podemos interpretar como un espacio para el aprendizaje, en el que los estudiantes al interactuar con el objeto de conocimiento, dinamizan la actividad cognitiva, generando procesos de reflexión conducentes a la adquisición de nuevos conocimientos. Es decir, en el caso de las matemáticas, una situación problema la podemos entender, como un espacio para generar y movilizar los procesos de pensamiento que permitan la construcción sistemática de conceptos matemáticos.[6]

Esto es, el estudiante se enfrentará a situaciones que se pueden analizar matemáticamente, las cuales serán resueltas por medio de la interpretación que el alumno le asigne a los conceptos matemáticos puestos en práctica. De ésta manera se pretende que el estudiante analice y proponga ideas que conlleven a la solución de los interrogantes planteados, con el fin de hacer a un lado los procesos mecánicos, en donde para obtener soluciones debe aprenderse una fórmula o algoritmo de memoria.

Para plantear una situación problema el docente debe adecuar los interrogantes a un contexto en donde los estudiantes alcancen a generar propuestas de solución, o proporcionarle la información adecuada para dicha acción, con el fin de suministrar ideas de cómo abordar el análisis de los datos para desarrollar procedimientos apropiados y así obtener resultados favorables, contribuyendo al progreso intelectual de los estudiantes.

En muchos casos la metodología de enseñanza de las matemáticas que se ha privilegiado en las instituciones de Educación Básica y Media del país, ha sido la clase expositiva, en la que el maestro copia en un tablero sin brindar al estudiante la oportunidad de participar en la clase, dedicándose a memorizar fórmulas y algoritmos para desarrollar ejercicios o problemas matemáticos. Pero en los últimos años, los docentes se han planteado diversos métodos de enseñanza, con el fin de apropiar a los alumnos nuevas formas de aprender conceptos matemáticos. Para contribuir con dicho objetivo; surge el proyecto de adecuar un software educativo para estudiar matemáticas, puesto que en la actualidad, los estudiantes crecen rodeados de tecnología. Por ésta razón el elemento principal de la implementación de la propuesta es el uso de herramientas tecnológicas, mejor conocidas como las TIC, con la intención de proponer un método de estudio en el aula a través de la utilización del software educativo Derive 6, ya que por

---

[6] OBANDO, Gilberto y MÚNERA Jhon Jairo. Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. http://cmapspublic.ihmc.us/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1171396978406_177445627_21642 (último acceso: 10 de Abril de 2011).

primera vez en la Institución Educativa Julumito se presenta este tipo de ayuda didáctica.

De ésta manera se considera que los conocimientos pueden ser transmitidos con la debida utilización de nuevos medios como el computador, el software educativo e internet y así mejorar las actividades académicas; permitiendo en los estudiantes:

Ampliar el acceso a recursos educativos, puesto que la implementación de elementos modernos de estudio origina en los alumnos, diversas e innovadoras bases académicas, cuyo fundamento se justifica principalmente en el análisis de la información dotada por el maestro con el fin de aplicar dicho conocimiento matemático planteando ideas para la solución de problemas, que se logran a partir del buen manejo del software puesto en uso.

Ayudar en la organización y análisis de la información, es decir el estudiante antes de resolver un problema en el computador ajusta los datos suministrados por el docente y comprende la pregunta formulada, la cual se responde con una reflexión detallada de los procedimientos efectuados en la máquina.

Facilitarle al alumno para que se vuelva protagonista de su propio aprendizaje, lo cual significa que los estudiantes, mediante el uso del software educativo logren detectar y analizar aciertos y/o errores que se pueden originar cuando plasme en pantalla con la ayuda del recurso tecnológico los procedimientos elaborados mediante el uso del lápiz y papel. De esta manera corregir las falencias que se presenten y de algún modo el alumno se vuelva autocrítico, asumiendo con responsabilidad sus errores y sentirse satisfecho por los resultados adquiridos, contribuyendo con su buen desempeño académico.

Motivar y promover el trabajo cooperativo en el aula, en donde se pudo reflejar la forma en que el estudiante que tiene mayor claridad de los procesos tenidos en cuenta para resolver los interrogantes de cada problema se disponen a guiar al compañero que no tiene muy claro el procedimiento a desarrollar; y así darle pautas con el propósito de obtener nuevas ideas para abordar el método y lograr resolver correctamente las incógnitas propuestas por el docente.

Es conveniente aclarar que la implementación de las nuevas tecnologías en el estudio de las matemáticas no necesariamente es para facilitarle los cálculos al estudiante, ya que si se acepta de esta manera se le estaría evaluando a una máquina y no al proceso de aprendizaje, sino producir nuevas formas de presentar el conocimiento, en donde se refleja la creatividad con que el maestro haga uso de las tecnologías y cómo exponga su forma de evaluación, determinando la manera en que los estudiantes utilicen el software educativo.

Entre las orientaciones para el área de educación en tecnología dadas por el Ministerio de Educación se destacan las siguientes:

> Entender la tecnología como un campo de naturaleza interdisciplinar que constituye un factor eficaz de integración curricular, lo cual se concreta al abordar las actividades tecnológicas escolares que enfrentan a los estudiantes a problemas propios de su entorno cuya solución no puede darse desde el marco de una sola disciplina.
>
> Capacitar a los estudiantes en la vida y para la vida, es decir, en el manejo de principios y valoraciones esenciales de la tecnología sobre los que se basan y fundamentan los distintos desarrollos tecnológicos como preparación para el mundo del trabajo en procura de su desempeño social exitoso.
>
> Asumir a la educación en tecnología como un proceso permanente y continuo de adquisición y transformación de los conocimientos, valores y destrezas propias al diseño y producción de artefactos, procedimientos y sistemas tecnológicos.
>
> Apuntar a la preparación de las personas en la comprensión, uso y aplicación de la tecnología para la satisfacción de las necesidades individuales y sociales.[7]

También en el texto del Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares para la Educación Matemática se desarrolla el siguiente planteamiento sobre el uso de la tecnología en el aula:

> Hacer caso omiso de las nuevas tecnologías en la enseñanza está creando una barrera entre la vida diaria de los estudiantes y las experiencias que tiene en la escuela.[8]

---

[7]COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares para la Educación Matemática.* Bogotá: MEN, 1999, p. 15-16.

[8]COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares para la Educación Matemática.* Bogotá: MEN, 1999, p. 17.

Para que la educación matemática de soluciones a las necesidades actuales y del futuro, se necesita implementar en este momento nuevas herramientas de estudio como lo son los programas educativos y realizar el esfuerzo de hallar la mejor manera de utilizarlos.

La implementación de nuevas tecnologías para el estudio de las ecuaciones de segundo grado y su representación en el plano cartesiano, se basa principalmente en que los estudiantes interactúen con ésta clase de programas, en nuestro caso trabajaremos con Derive 6, el cual se facilita para analizar los métodos que se utilizan para resolver problemas concernientes al tema descrito. Además plasmar gráficamente con mayor exactitud la curva que representa una ecuación de segundo grado, ubicando ciertos puntos como por ejemplo: intersecciones con los ejes de coordenadas, el vértice de la curva, ejes de simetría. De este modo los estudiantes analizan los cálculos realizados mediante el uso del lápiz y papel, detectando errores o aciertos en los respectivos procedimientos.

> Además, el computador hace posible que fórmulas, tablas de números y gráficas que se enlacen rápidamente. Cambiar una representación y ver los cambios en las otras, ayuda a los estudiantes a comprender las relaciones entre ellas.[9]

Es decir, el software permite que los estudiantes modifiquen datos en una(s) ecuación(es) para relacionar los cambios que genera la respectiva gráfica desde diferentes puntos de vista en el plano cartesiano.

[9]COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares para la Educación Matemática.* Bogotá: MEN, 1999, p. 35.

3. SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

A continuación se presentará la descripción y análisis de los resultados de las actividades académicas desarrolladas en cada una de las etapas en que se divide el proceso de la Práctica Pedagógica del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca.

3.1. Etapa I

La propuesta principal de la etapa I es analizar el significado del término sistematización, motivo por el cual estudiamos el texto de Óscar Jara: "*la sistematización de experiencias y las corrientes innovadoras del pensamiento latinoamericano – una aproximación histórica"*, en el cual afirma lo siguiente:

> La sistematización es aquella interpretación crítica de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explica la lógica del proceso vivido, los factores que han intervenido en dicho proceso, cómo se han relacionado entre sí y por qué lo han hecho de ese modo[10].

Una interpretación crítica, ya que es el resultado de todo un esfuerzo por comprender el sentido de las experiencias vividas en el aula de clase, es decir se efectúa un análisis a cada uno de los hallazgos obtenidos durante la intervención en el aula, el cual es realizado por el sujeto que desarrolla la propuesta metodológica, en este caso el practicante.

---

[10]JARA, Oscar. La sistematización de experiencias y las corrientes innovadoras del pensamiento Latinoamericano_ una aproximación histórica. http://dialogosaberes.ubv.edu.ve/Descargar/article/62/La%20sistematizacion%20de%20experiencias%20y%20las%20corrientes%20innovadoras%20del%20pensamiento%20latinoamericano-una%20aproximacion%20historica.pdf (último acceso: 04 de abril de 2011).

Cuando se habla de una reconstrucción y ordenamiento, se refiere a que la interpretación es posible si se recuperan las experiencias y se ordena el proceso vivido en esas experiencias. De esta manera, al reconstruir el proceso, permite identificar sus elementos, clasificándolos y ordenándolos, con el fin de ver con cierta objetividad el proceso vivido en el aula.

Para llevar a cabo la actividad de sistematización se acude a la cooperación de tres integrantes: el practicante, los estudiantes y la Institución. También se puede afirmar que una vez realizada la práctica, la sistematización es un proceso en el cual se deben tener en cuenta los siguientes detalles:

Ordenar lo acontecido, es decir permite reconstruir la forma en que se llevó a cabo la experiencia, argumentando las razones del por qué se eligieron los temas de estudio y los métodos utilizados para enseñarlos.

Recuperar la memoria histórica, esto es describir paso a paso los procesos llevados a cabo en la intervención de acuerdo a un orden lógico que permita dar a entender la forma en que se implementa la propuesta metodológica.

Interpretar, es decir realizar un análisis detallado de los resultados obtenidos en el proceso llevado a cabo en el aula.

De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que la sistematización lleva implícito un ejercicio de organización, en base a un orden lógico de los hechos y los conocimientos de la experiencia, una forma de ordenar que permita llevar a cabo la interpretación de la misma. Para ello es necesario: Un registro ordenado de los hechos, Un orden y reconstrucción del proceso vivido, un orden de los conocimientos que surgieron en el transcurso de la intervención.

También estudiamos los estándares básicos de competencias en matemáticas, los cuales son el punto de referencia de lo que un alumno debe estar en la capacidad de saber y saber hacer, en cierta área y en determinado nivel, cuyo objetivo es que a partir de éstos se pueda elaborar la propuesta metodológica, eligiendo un determinado tema matemático, y así contribuir a que los alumnos se apropien de nuevos conocimientos y los apliquen a su vida cotidiana.

Otro aspecto importante tratado en ésta etapa es el manejo de un diario de campo, en el cual se registran las observaciones hechas en el salón de clase, de tal forma que se pueda analizar el desarrollo de cada sesión, incluyendo factores como la disciplina y el interés por parte de los estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. La estructura que se debe tener en cuenta para realizar un diario de campo es describir el tema a desarrollar en cada sesión, poniendo en referencia el título de la temática, la fecha correspondiente, el objetivo que se quiere alcanzar al final de la clase y describir los sucesos más importantes, los cuales serán objeto de reflexión por parte del docente.

Una vez concluida la fase del estudio de las diferentes teorías, y a su vez seleccionado el tema a desarrollar en el aula, el docente encargado establece un acuerdo con la Institución Educativa Julumito (Sede principal) para llevar a cabo la implementación de la propuesta metodológica que será elaborada en la segunda etapa.

Es conveniente aclarar que en dicha Institución no existía ningún convenio oficial con la Universidad sino que se tenían referencias de otras personas que habían realizado su Práctica Pedagógica en dicho lugar, obteniendo resultados satisfactorios para el colegio en cuanto al estudio de las matemáticas. Motivo por el cual el rector acepta la idea de brindarnos la oportunidad de transmitir nuestros conocimientos, en mi caso en el grado décimo, donde iba a iniciar mis primeros pasos como docente.

Después de haber analizado cada una de las teorías, surge el siguiente planteamiento:

Cuando hablamos de sistematización nos referimos directamente a un proceso secuencial o mejor aún dinámico en el cual se pone en juego no solo la práctica sino también la reflexión del proceso que se lleva a cabo.

La sistematización además de un análisis es un proceso en el cual directamente estamos produciendo conocimiento práctico en el hacer profesional a través de la experiencia obtenida en la práctica, donde tanto los alumnos como el profesor hacen parte de ella.

3.2. Etapa II

En la segunda etapa se llevó a cabo el reconocimiento de la Institución Educativa Julumito y la elaboración de la propuesta metodológica.

En la Institución mencionada se llevó a cabo una reunión entre el rector, el docente encargado y por supuesto los practicantes, en la cual se determina que la intervención se llevaría a cabo en horarios extra clase dirigido a estudiantes de los grados sexto, séptimo, décimo y once, en mi caso el grado décimo, cuyo tema a desarrollar es el concepto de ecuaciones de segundo grado y su representación en el plano cartesiano con el uso del software educativo derive 6. Los horarios otorgados por el rector de la Institución fueron: sexto y séptimo los días sábado en la mañana; para décimo y once lunes en la tarde.

En primera instancia se desarrolló un taller diagnóstico (ver anexo A) con el objetivo de identificar las debilidades y fortalezas de los estudiantes del grado décimo en algunos temas en el área de matemáticas tales como: operaciones con números enteros, números racionales, solución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales, ya que los alumnos deben tener presentes dichos conceptos que les permitan abordar el tema de ecuaciones de segundo grado.

Los resultados del taller diagnóstico no fueron los esperados, ya que los estudiantes presentan dificultades en temas como: operaciones fundamentales entre números fraccionarios y números enteros, cómo despejar una variable al resolver un sistema de ecuaciones lineales, los cuales son conceptos básicos que se manejan en secundaria.

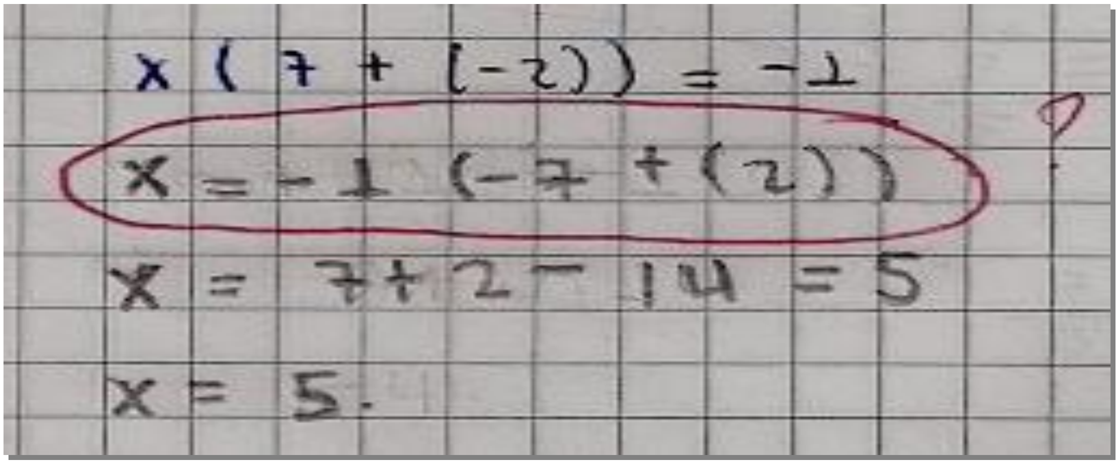
Debido a esto, la práctica debe tomar un rumbo totalmente diferente al que se tenía pensado inicialmente, puesto que no es conveniente desarrollar una propuesta metodológica sin antes superar los inconvenientes mencionados. Por ésta razón decidimos reforzar el tema de ecuaciones lineales, ya que a partir de su estudio se incluyen operaciones entre fraccionarios y números enteros, pues éstas permiten realizar simplificaciones en las igualdades y así despejar las incógnitas involucradas en cada una de las ecuaciones que serán objeto de estudio. Además, se pretende que los estudiantes comprendan la definición e identifiquen éste tipo de ecuaciones, y de esta manera se encaminen al concepto de ecuaciones de segundo grado, que es el tema principal de la Práctica Pedagógica. Para ello se plantearon algunos métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales tales como: Sustitución, igualación, reducción y gráfico.

La estrategia metodológica para llevar a cabo dicha acción se desarrolla mediante clases magistrales, puesto que se pretende avanzar en el proceso de nivelación debido a que para la implementación de la propuesta metodológica se requiere de una mayor dedicación y tiempo.

La evaluación se realiza teniendo en cuenta la participación de los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo, además la elaboración de talleres y pruebas escritas para analizar si los alumnos están comprendiendo los contenidos matemáticos. Fueron siete sesiones dedicadas al estudio de ecuaciones lineales y dichos temas están registrados en el anexo B.

Durante el desarrollo de las sesiones de trabajo en el proceso de nivelación es notoria la ausencia de los estudiantes, ya que el promedio de participantes por sesión es 7 alumnos, de los cuales 3 fueron los más constantes en su asistencia, sin embargo el proceso debía continuar. Es conveniente aclarar que los estudiantes que asistían a las clases mostraban interés por aprender.

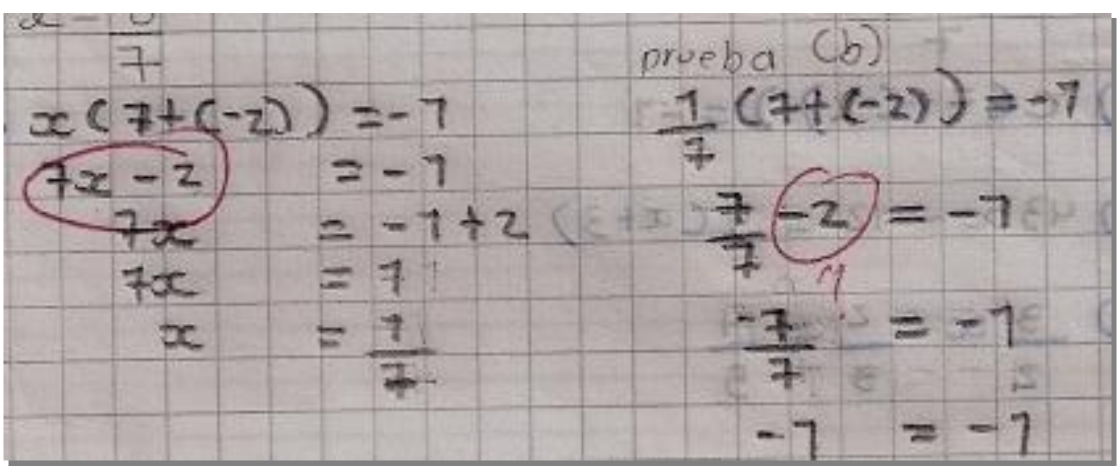
Una vez estudiado el tema de ecuaciones lineales, se proponen 2 ejercicios (ver ejercicio (I) anexo B) con el objetivo de analizar la forma en que los alumnos proceden para solucionarlos y de esta manera determinar si han superado las dificultades que presentaban al inicio de la intervención. En la siguiente evidencia se muestra un error que cometen a menudo los estudiantes para solucionar ejercicios de éste estilo.



En la resolución del ejercicio, en el cual se solicita calcular el valor de la incógnita x que verifique la igualdad se presenta la dificultad de la eliminación de paréntesis, además realiza un producto en lugar de la operación que indica el problema (suma).

Es difícil encontrar las posibles razones sobre la forma en que proceden los estudiantes, ya que los errores mencionados sobre el ejercicio anterior reflejan que no tienen claridad en la forma en que se resuelve una ecuación lineal. Además las dificultades que se presentan no son propias de un estudiante de grado décimo, porque las operaciones indicadas en el planteamiento del ejercicio son conceptos que se han visto al inicio de la secundaria y conviven con su estudio en todo momento de su proceso académico en el bachillerato, pero la realidad muestra todo lo contrario.

La siguiente es otra versión del procedimiento efectuado para resolver el ejercicio anterior, que ratifica los comentarios anteriores:

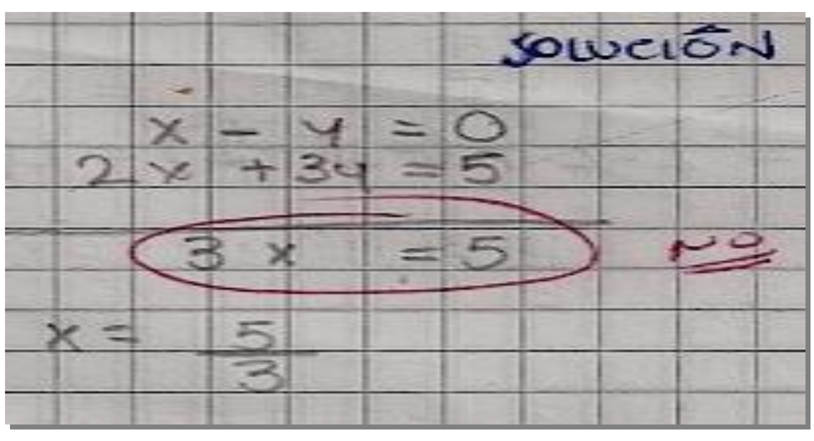


Como se puede observar en la imagen; para eliminar el paréntesis respectivo el estudiante procede mediante la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, pero olvida multiplicar la incógnita x por 2, el procedimiento realizado posteriormente no presenta inconveniente. Pero evidentemente cuando efectúa la prueba de los resultados no aplica correctamente las operaciones matemáticas indicadas. Lo más interesante es analizar la desaparición del término 2 y la modificación del signo de la fracción 7/7, en este caso el estudiante comete dicho error porque es la única manera de obtener la igualdad que necesita. Una vez comentada la situación con el estudiante, menciona que fue una distracción y no se dio cuenta del error cometido.

Es necesario aclarar que los errores comentados sobre el ejercicio anterior se presentan en la mayoría de los 11 estudiantes que asistieron a la respectiva sesión, pues los argumentos expuestos tienen similitud, motivo por el cual se retoma el tema para explicar en forma más detallada de cómo resolver una ecuación lineal por medio de ejemplos que contribuyan a mejores resultados.

Es en estas situaciones en donde el papel del docente en el aula es fundamental, ya que debe buscar la manera en que los estudiantes superen las dificultades, es decir debe diseñar una metodología apropiada para que los alumnos tengan participación activa durante el desarrollo de cada una de las sesiones de trabajo, contribuyendo a un mejor desempeño académico.

Ahora consideremos la manera en que los estudiantes proceden para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2, es decir dos ecuaciones y dos incógnitas. Para ello, se presentará la siguiente evidencia correspondiente al segundo ejercicio, en el cual se pretende que solucionen el sistema de ecuaciones lineales indicado. Miremos:

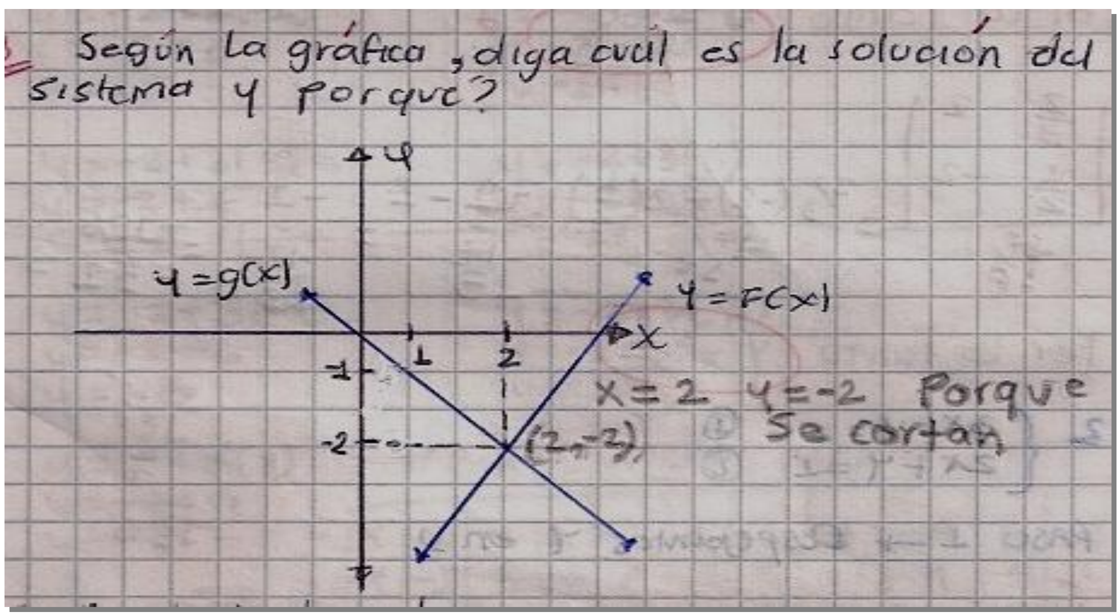


Respecto al procedimiento utilizado para la solución del ejercicio, el alumno menciona que aplica el método de eliminación, pero analizando sus argumentos no tiene claridad en los mismos, ya que la forma en que procede no coincide con el método expuesto. Como se puede apreciar, el estudiante opera directamente los coeficientes, eliminado la incógnita y arbitrariamente, cometiendo un error en el cálculo de x, cuya consecuencia es la solución incorrecta del sistema de ecuaciones lineales, ya que al calcular el valor de y va a obtener un resultado incorrecto que no corresponde a las condiciones del ejercicio.

Prosiguiendo con el proceso de nivelación de conocimiento, se dará inicio al estudio del método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, en el cual los estudiantes no presentan mayor dificultad, ya que según el análisis de las evidencias que se mostrarán a continuación se puede garantizar la claridad en los procesos realizados por los alumnos para resolver problemas de este tipo.

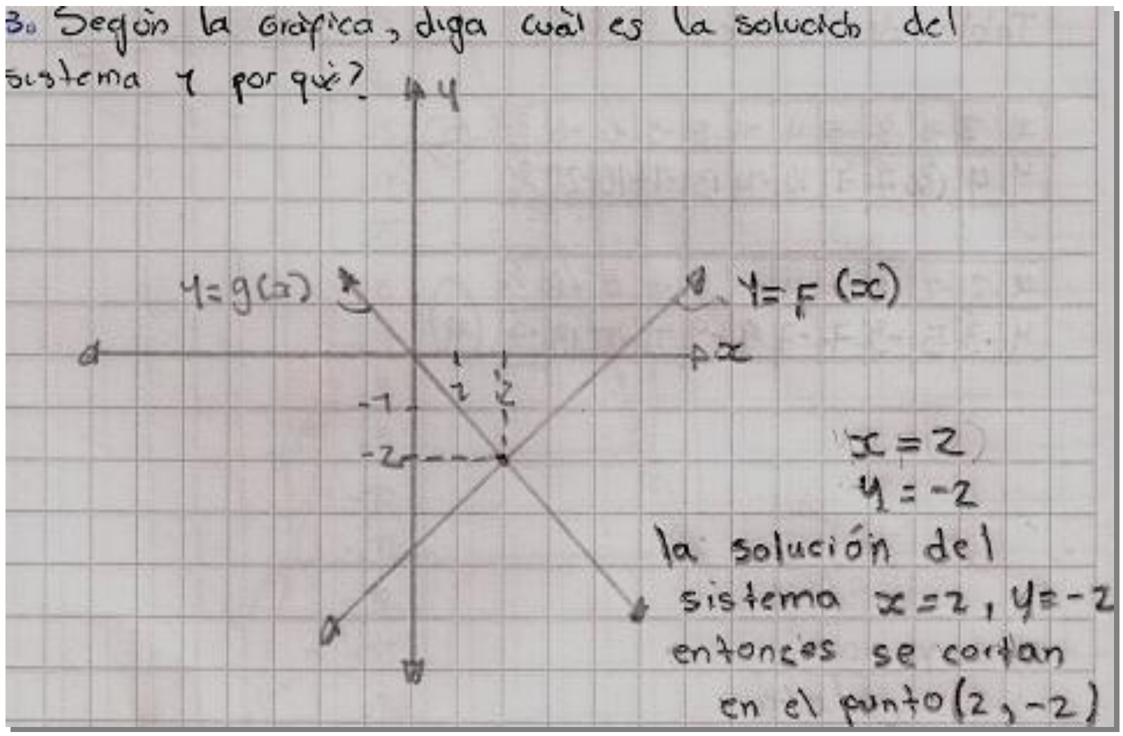
Observemos los puntos de vista planteados para determinar la solución del punto (1) del ejercicio (II) anexo B. En el cual se propone, mediante el análisis de la gráfica correspondiente decidir cuál es la solución del sistema y argumentar el por qué de su respuesta.

Los estudiantes que trabajaron el ejercicio mencionado fueron 5, de los cuales el 100% lo resuelven correctamente. Consideremos 2 de las 5 respuestas dadas por los estudiantes:



En esta ocasión se considera una gráfica, en donde se pretende, mediante el uso de un criterio grafico; identificar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. El estudiante afirma que la solución del sistema es “x = 2, y = -2 porque se cortan”, es decir muestra que tiene claro el criterio matemático que afirma que la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, visto gráficamente es el punto donde se interceptan las rectas implicadas en el problema.

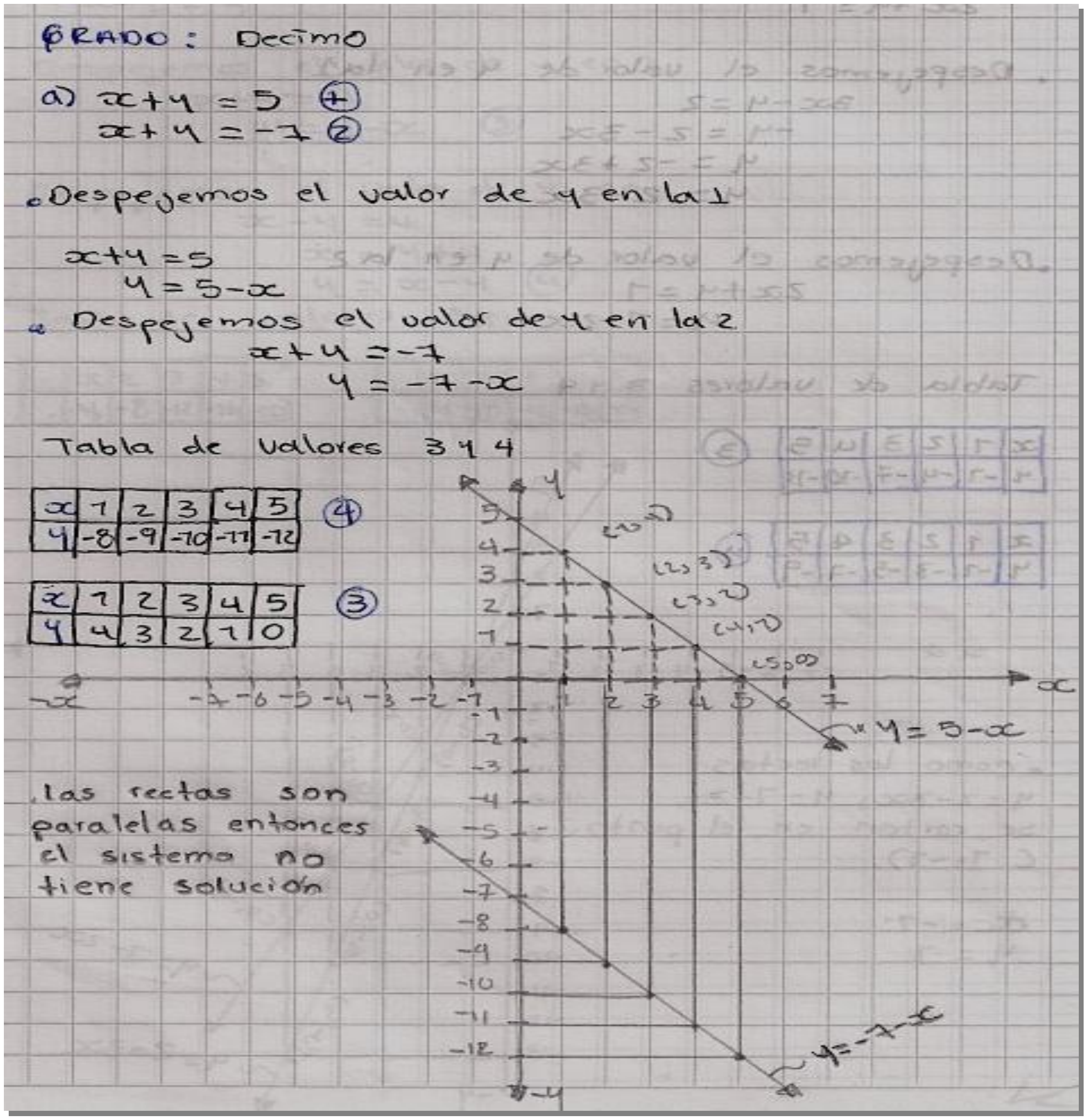
Detallemos la respuesta de otro estudiante, que verifica la correcta utilización del criterio grafico:



Los anteriores fueron dos planteamientos que realizaron los estudiantes para determinar la solución de los ejercicios, en los cuales se verifica que analizaron con detalle las gráficas, puesto que ambas respuestas cumplen con las condiciones del problema.

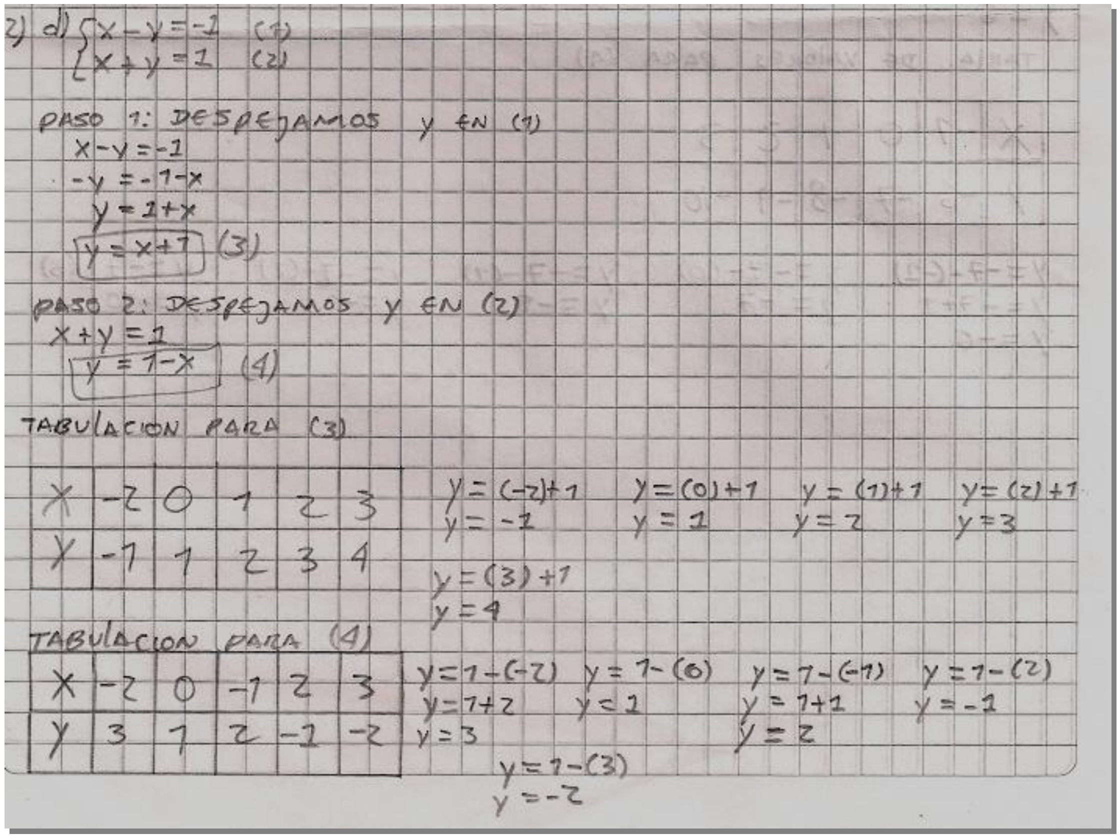
Ahora se presenta la manera en que los estudiantes resuelven sistemas de ecuaciones lineales usando un método inverso al anterior, es decir se presentan las ecuaciones y de acuerdo a la gráfica obtenida, deciden la solución del sistema.

Para la elaboración de la sesión correspondiente al método mencionado, se realiza un taller (ver anexo C) para resolverlo en clase, pero la asistencia fue mínima, ya que asistieron 2 estudiantes, quienes trabajaron en forma eficiente, obteniendo resultados satisfactorios, ya que los procesos realizados son los adecuados para la ocasión. Analicemos los procedimientos mencionados, mediante la siguiente evidencia que muestra la solución del ejercicio (a), en el cual se pide resolver por el método gráfico el sistema de ecuaciones lineales:



Claramente, en la figura se puede analizar que el alumno realiza un procedimiento, el cual además de ser correcto, es muy organizado en sus planteamientos, en donde se aprecia la manera en que determina los puntos para ubicarlos en el plano cartesiano, mostrando las ecuaciones de las rectas del problema. Además, la escritura de la respuesta del problema es la correcta y muy bien formulada, motivo por el cual se puede determinar la claridad en la aplicación de los conceptos matemáticos adquiridos.

La siguiente evidencia muestra con más detalle un procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales, (ver ejercicio (d)), mediante la obtención y análisis de la gráfica correspondiente. Veamos:



2) d) $\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ x + y = 1 & (2) \end{cases}$

PASO 1: DESPEJAMOS y EN (1)

$x - y = -1$

$-y = -1 - x$

$y = 1 + x$

$\boxed{y = x + 1}$ (3)

PASO 2: DESPEJAMOS y EN (2)

$x + y = 1$

$\boxed{y = 1 - x}$ (4)

TABULACION PARA (3)

x	-2	0	1	2	3
y	-1	1	2	3	4

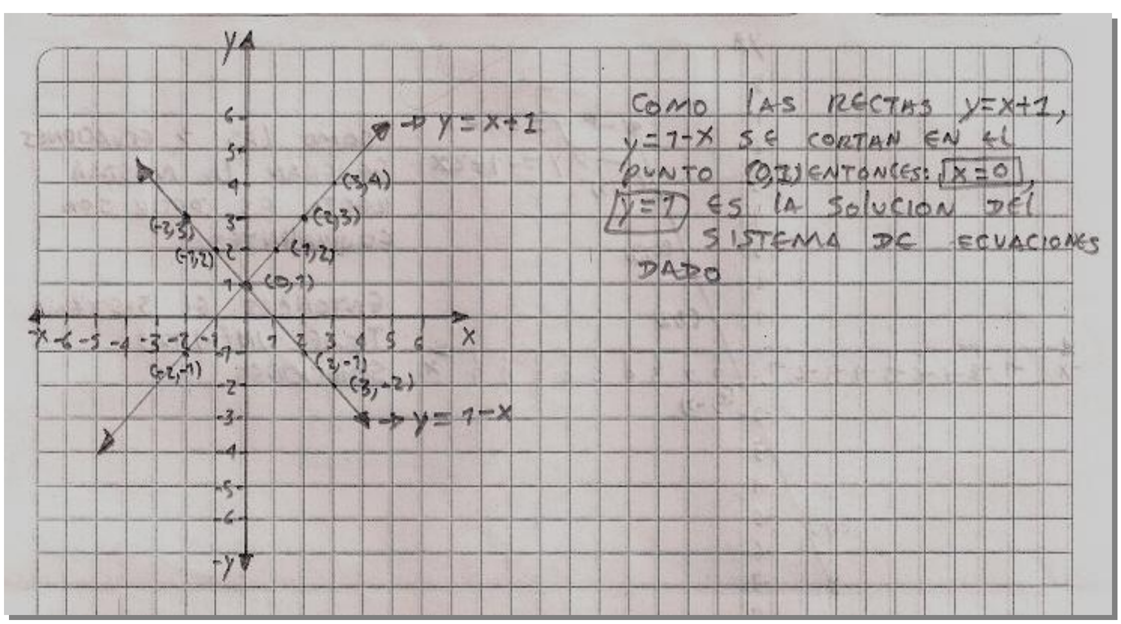
$y = (-2) + 1$, $y = -1$; $y = (0) + 1$, $y = 1$; $y = (1) + 1$, $y = 2$; $y = (2) + 1$, $y = 3$; $y = (3) + 1$, $y = 4$

TABULACION PARA (4)

x	-2	0	-1	2	3
y	3	1	2	-1	-2

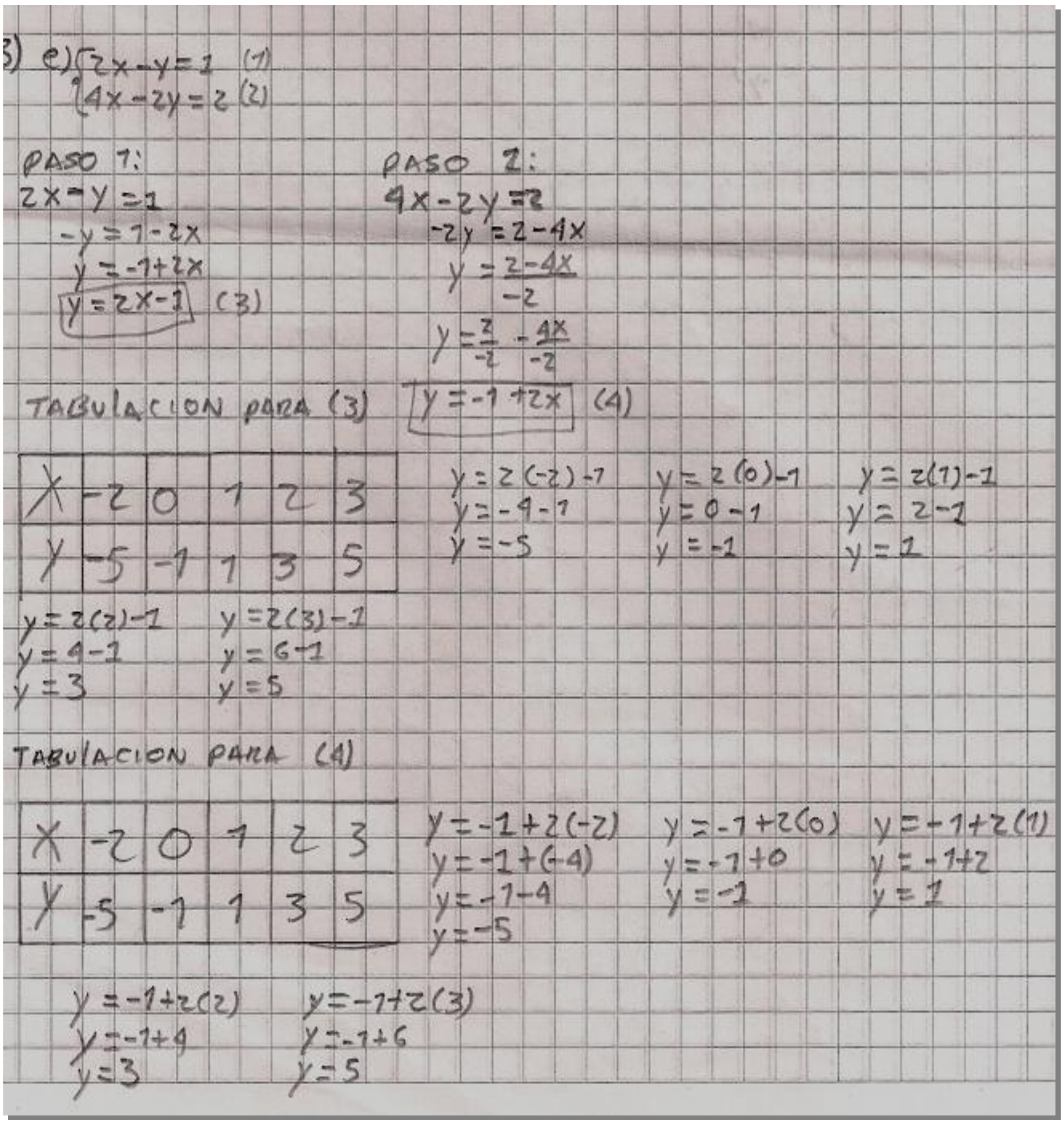
$y = 1 - (-2)$, $y = 1 + 2$, $y = 3$; $y = 1 - (0)$, $y = 1$; $y = 1 - (-1)$, $y = 1 + 1$, $y = 2$; $y = 1 - (2)$, $y = -1$; $y = 1 - (3)$, $y = -2$

Como se puede apreciar, los planteamientos expuestos por el estudiante para la solución del ejercicio muestran un orden sobresaliente. En la primera parte del procedimiento se detalla una estructura muy bien elaborada en la cual se obtienen las ecuaciones del problema y los puntos a ubicar en el plano cartesiano.



La segunda parte del ejercicio es plasmar la gráfica correspondiente a las ecuaciones del sistema y el respectivo análisis de la misma, el cual satisface las condiciones del problema, ya que la redacción de la respuesta obtenida está muy bien redactada.

Para terminar el estudio de ecuaciones lineales apreciemos en el siguiente ejemplo la buena disposición de los 2 estudiantes en cuanto al procedimiento utilizado para verificar que un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones y la explicación de éste hecho. También se dieron cuenta que las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales son únicas, infinitas o en otros casos no existen.



3) e) $\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ 4x - 2y = 2 & (2) \end{cases}$

PASO 1:

$2x - y = 1$

$-y = 1 - 2x$

$y = -1 + 2x$

$\boxed{y = 2x - 1}$ (3)

PASO 2:

$4x - 2y = 2$

$-2y = 2 - 4x$

$y = \frac{2 - 4x}{-2}$

$y = \frac{2}{-2} - \frac{4x}{-2}$

$\boxed{y = -1 + 2x}$ (4)

TABULACION PARA (3)

X	-2	0	1	2	3
Y	-5	-1	1	3	5

$y = 2(-2) - 1$, $y = -4 - 1$, $y = -5$

$y = 2(0) - 1$, $y = 0 - 1$, $y = -1$

$y = 2(1) - 1$, $y = 2 - 1$, $y = 1$

$y = 2(2) - 1$, $y = 4 - 1$, $y = 3$

$y = 2(3) - 1$, $y = 6 - 1$, $y = 5$

TABULACION PARA (4)

X	-2	0	1	2	3
Y	-5	-1	1	3	5

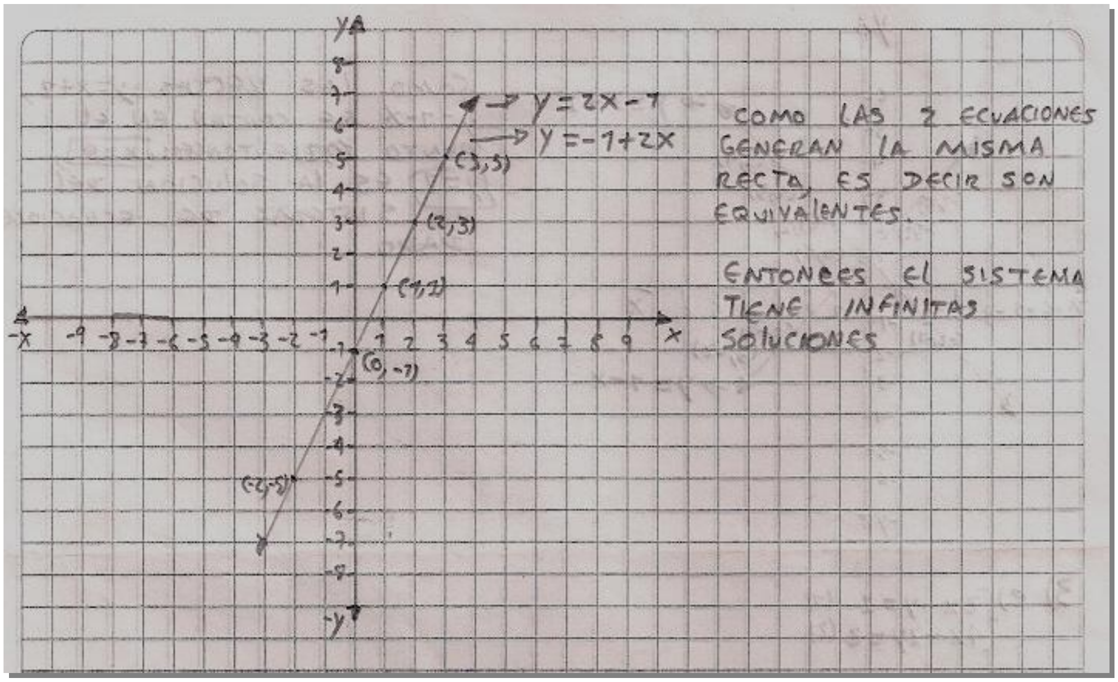
$y = -1 + 2(-2)$, $y = -1 + (-4)$, $y = -1 - 4$, $y = -5$

$y = -1 + 2(0)$, $y = -1 + 0$, $y = -1$

$y = -1 + 2(1)$, $y = -1 + 2$, $y = 1$

$y = -1 + 2(2)$, $y = -1 + 4$, $y = 3$

$y = -1 + 2(3)$, $y = -1 + 6$, $y = 5$



Debido a los resultados obtenidos en el método gráfico para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, es interesante analizar el por qué las dificultades se presentan en los procesos en los cuales no se muestra un dibujo. Un posible punto de vista sobre ello puede ser que los estudiantes no tienen claridad para despejar una variable de una ecuación, por esta razón para los alumnos se torna más claro el hecho de observar el punto de intersección de dos rectas en el plano cartesiano y así decidir la solución del sistema de ecuaciones. Además se puede afirmar que se les dificulta el manejo de los términos que aparecen en una ecuación, los cuales pueden causar confusión en el momento de simplificar una expresión para luego despejar las incógnitas que aparecen en los problemas.

Posteriormente se trabajaron los siguientes temas: monomio, binomio, trinomio, polinomio estudiando su definición, operaciones fundamentales: suma, resta, multiplicación y división, así como los casos de factorización, con el objetivo de que los estudiantes vayan adquiriendo conocimiento que les permita abordar el tema de las ecuaciones cuadráticas. Para el desarrollo de dichos temas (ver anexo D) se emplearon 10 sesiones de trabajo.

En esta ocasión se cambia la metodología con la cual se venía trabajando, de tal manera que los estudiantes tengan una participación más activa en el desarrollo de cada una de las clases. Cada sesión se divide en dos momentos mencionados a continuación:

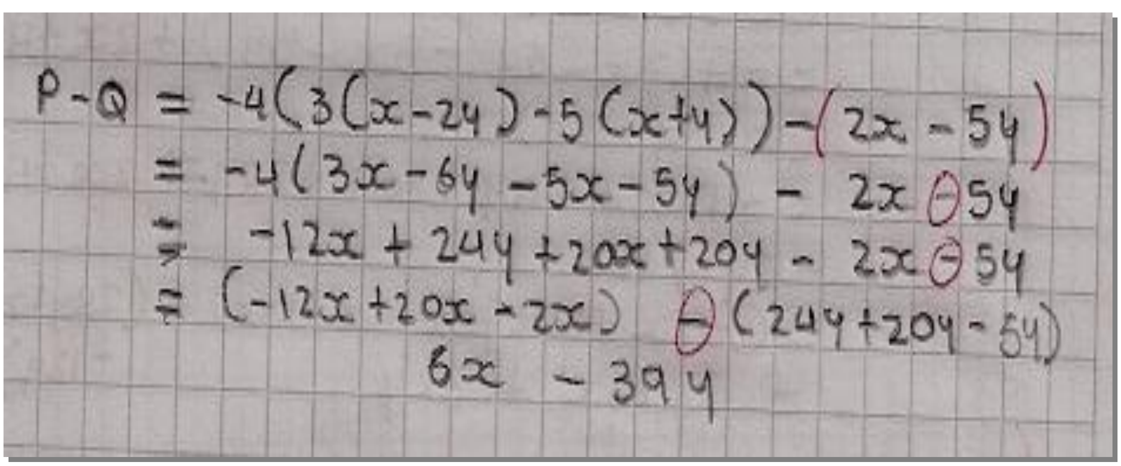
En el primer momento se estudia la teoría correspondiente; formulando ejemplos que muestren con claridad el concepto matemático puesto en referencia, con el propósito de que los estudiantes elaboren interrogantes para aclarar dudas que se vayan presentando. También se les otorga la oportunidad de expresar sus ideas resolviendo problemas en el tablero con el propósito de obtener mayor participación en clase.

Al principio fue complicado convencer a los estudiantes para que expresaran sus ideas frente al profesor y a sus compañeros por temor a las burlas que los últimos le puedan ocasionar, pero cuando tomaban la decisión de salir al tablero, los resultados fueron satisfactorios ya que predominó el respeto por la persona que participaba en la clase, motivo por el cual el temor presentado al inicio se iba superando.

En el segundo momento se plantean ejercicios para que fueran resueltos en grupos de trabajo, cuyo fin es examinar los resultados de cada una de las sesiones y así verificar la comprensión de los conceptos estudiados y brindarles la oportunidad de trabajar colectivamente. De esta manera se presenta un ejemplo de contrato didáctico, ya que se pone en evidencia la metodología que se llevará a cabo en cada una de las sesiones. Es decir, se llega a un acuerdo entre las dos partes maestro- alumno sobre la forma en que se desarrollaran las clases.

En el estudio de polinomios, respecto a la definición no tuvieron mayor dificultad, ya que aprendieron a identificar monomio, binomio y trinomio, de acuerdo al número de términos que aparecieran en cada expresión formulada. Las dificultades surgen al aplicar las operaciones entre polinomios y los métodos de factorización.

En la siguiente imagen se muestra la forma en que un estudiante procede para resolver un ejercicio propuesto en clase que involucra operaciones entre polinomios, en el cual se presentan dos expresiones algebraicas, denotadas de la siguiente manera: P = -4(3(x – 2y) – 5(x + y)) y Q = 2x – 5y, para que realicen la operación P - Q.

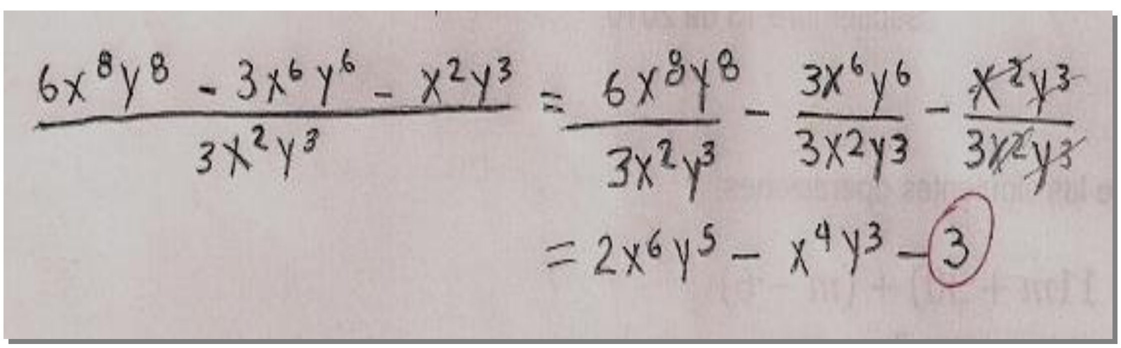


La dificultad que presenta el estudiante al resolver el ejercicio es que no representa adecuadamente la sustracción de todo el polinomio Q. De esta manera no aplica la operación indicada en el ejercicio. Debido a que solo un estudiante trabajó el ejercicio planteado se toma la decisión que en la siguiente sesión se resolverían dudas acerca de las operaciones entre polinomios para resolver las dificultades que presentan los alumnos, ya que es preocupante que cometan errores sobre temas que deben dominar, puesto que no son conceptos nuevos para ellos, y se pretende que los retomen, ya que son necesarios para abordar los procedimientos para la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Una vez realizado dicho proceso, en el cual los estudiantes que asisten a la sesión participan activamente de la misma, formulando interrogantes acerca de sus dudas, además el ánimo que mostraban para resolver ejercicios en el tablero, ya que en el momento de expresar sus ideas a los compañeros, se establecía un acuerdo colectivo que consiste en que los errores se superaran teniendo en cuenta la opinión de cada uno de los asistentes.

Para analizar si los alumnos que asistieron regularmente a las clases mejoraron las dificultades que presentaron al inicio de la intervención se realiza una prueba escrita (ver anexo E) que deberían trabajar de manera individual. Para dicha sesión asistieron 6 estudiantes.

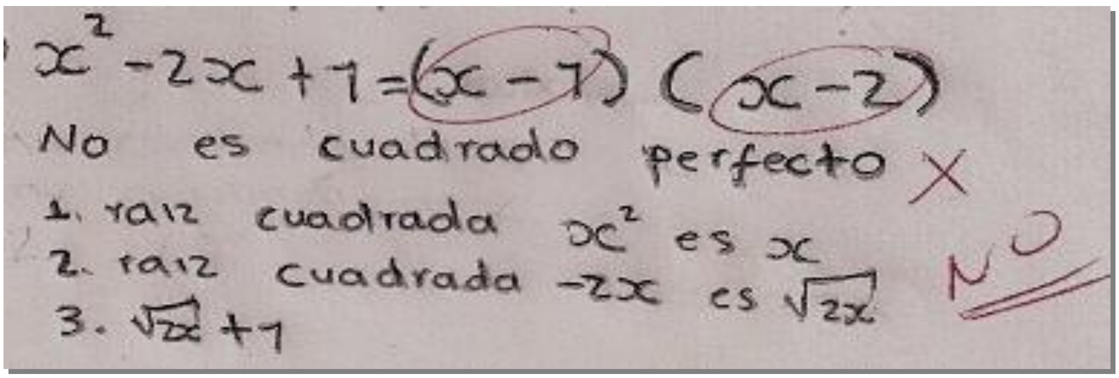
En el siguiente ejercicio del numeral 1 (c), en el cual se pide que simplifiquen la expresión indicada, es decir distribuir el denominador con cada término del numerador y realizar las operaciones respectivas. Notemos que la mayoría de los cálculos son correctos:



Claramente se verifica que el estudiante distribuye correctamente el denominador y simplifica términos semejantes, pero al final pasa por alto que el resultado es 1/3, el cual es diferente de 3. Una vez realizada la observación al alumno, afirma que no se dio cuenta de su error.

Los estudiantes; en la mayoría de los casos cometen errores de esta naturaleza, es decir son detalles que pasan por alto en el momento de plantear un procedimiento. Debido a esto, se les sugiere verificar cuidadosamente las operaciones que realizan en cada paso de sus planteamientos y así evitar cometer errores de este estilo.

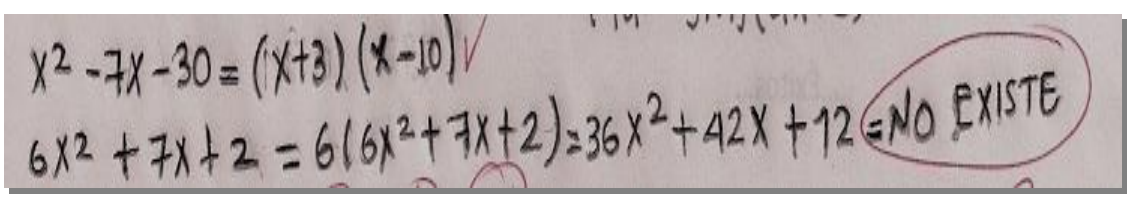
En la siguiente imagen se muestra la forma en que se resuelve el ejercicio 2 (b), en el cual el objetivo es analizan si un trinomio es cuadrado perfecto, la evidencia que se va a mostrar se selecciona porque fue un error común que se presenta en los estudiantes, además es necesario entender el concepto de trinomio cuadrado perfecto, ya que a partir de este se adquieren nuevos argumentos para resolver de una manera rápida y eficaz ecuaciones de segundo grado. Observemos:



La factorización que aparece en la solución del ejercicio es incorrecta, luego calcula la raíz cuadrada de x, la cual es una buena decisión. Pero el siguiente paso es hallar la raíz cuadrada de 1, proceso obviado por el estudiante quien afirma que la raíz cuadrada -2x es √2x y termina agregándole 1 al resultado. Dicho procedimiento es para confirmar que el trinomio no es cuadrado perfecto.

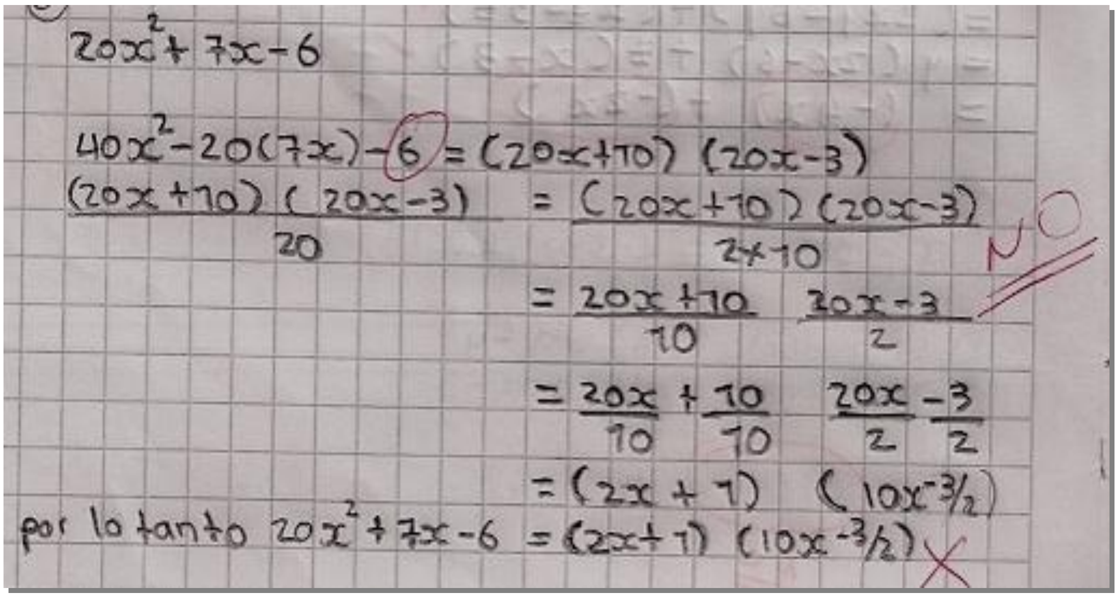
También se estudiaron algunos casos de factorización de polinomios, tales como: trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$, en los cuales el mayor problema se presenta en el segundo caso, el cual 5 de 6 estudiantes que asisten a la sesión correspondiente no aplican el procedimiento para factorizar un trinomio de esta forma.

Detallemos pruebas que verifiquen nuestra afirmación, en la solución del ejercicio 3 (c), (d), cuyo objetivo es factorizar los trinomios indicados:



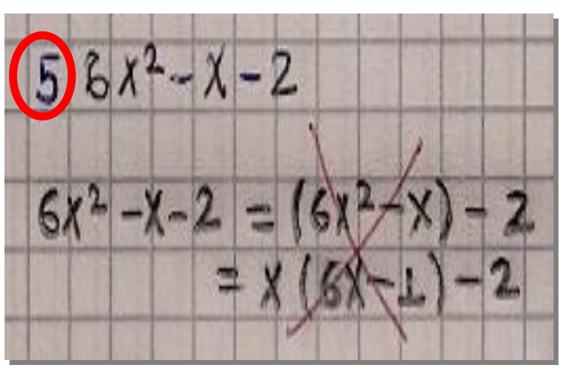
La parte (c) no presenta inconveniente alguno, en el cual 3 alumnos lo resuelven de manera adecuada; pero a pesar de que inicia correctamente el enunciado (d), en el cual se pide la factorización de la expresión algebraica indicada, al final afirma que no existe solución, sin ponerse en la tarea de analizar minuciosamente que puede aplicar el método utilizado en el numeral c.

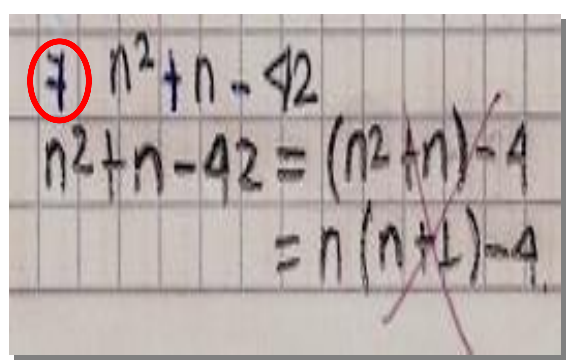
El único estudiante que trabajó en su totalidad el ejercicio presenta el siguiente procedimiento:



El error cometido por el alumno se presenta al multiplicar la expresión por el coeficiente de x^2, es decir multiplica cada término menos el tercero, de ahí en adelante la forma en que procede es correcta, pero debido a la falla inicial, no obtiene la respuesta que satisface las condiciones del ejercicio.

Las dificultades que se presentan para utilizar adecuadamente los métodos de factorización es reconocer con cuál de ellos proceder para resolver problemas de este estilo, lo cual se puede comprobar en las siguientes evidencias, en donde se presenta un error común en los estudiantes, observemos:





En ambos casos se opta por factorizar mediante un método que no corresponde, por esta razón se califica como incorrecto el procedimiento realizado, ya que éste no es un caso en donde se factorice la expresión por medio del método de factor común. Debido a esto, se propone a los estudiantes que antes de proceder con un ejercicio que involucra factorización, analicen con detalle el polinomio y reconozcan el proceso para resolverlo.

Sobre el proceso, se puede afirmar que el fundamento principal para que los estudiantes obtuvieran mejores resultados que al inicio de la intervención se debe al oportuno cambio en la metodología de trabajo, ya que se les brinda mayor participación en cada sesión, lo cual es de gran ayuda para la implementación de la propuesta principal de la práctica pedagógica, que se desarrollará en la siguiente etapa.

3.3. Etapa III

Como se mencionó en la etapa anterior, en el proceso de nivelación la inasistencia de los estudiantes fue la dificultad que no se podía remediar, debido a esto; se propone una posible solución a dicho inconveniente, la cual consistió en solicitarle al rector de la Institución permitir la realización de la intervención en horarios habituales a las jornadas de clase, con el objetivo de contar con la participación de la totalidad de los estudiantes. Dicha petición fue aprobada por el rector con la debida autorización del docente encargado.

Para la implementación de la propuesta metodológica se elaboraron guías de trabajo, con el objetivo de desarrollarlas en cada una de las sesiones correspondientes al manejo del programa educativo derive 6. Fueron siete sesiones dedicadas a la implementación de la propuesta metodológica referente al proceso de enseñanza del concepto de ecuaciones de segundo grado y su representación en el plano cartesiano con el uso del software educativo derive 6, las cuales se mencionan a continuación:

3.3.1. Sesión 1. En la primera sesión, para la cual asistieron 27 alumnos se llevó a cabo el estudio de los siguientes temas: ecuaciones de segundo grado con una incógnita, raíces de una ecuación de segundo grado (ver anexo F), cuyo objetivo es familiarizar a los estudiantes con el concepto de ecuación de segundo grado y el significado de resolverlas.

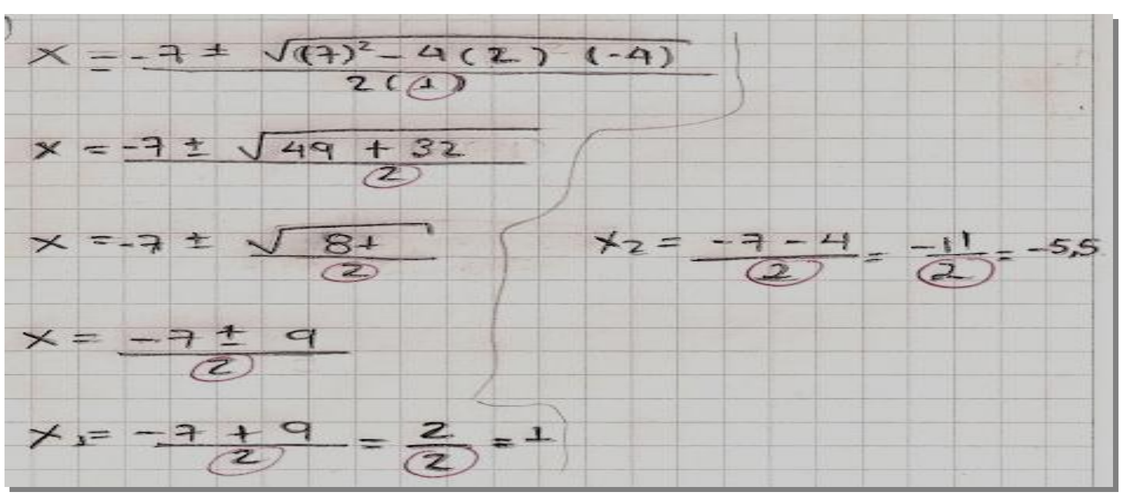
Cuando los alumnos tienen la oportunidad de participar activamente en el desarrollo de una clase, adquieren una dinámica de estudio que les permite asimilar los conceptos. Por esta razón, en la sesión 1 se llevó a cabo cierta dinámica que consistió en la resolución de ejercicios en el tablero, y de esta manera analizar la forma en que expresan sus ideas ante sus compañeros para argumentar los métodos utilizados para la solución de un determinado problema matemático.

En el primer momento de la sesión se presentaron los temas mencionados, por medio de ejemplos que contribuyan a que los estudiantes comprendan cada uno de los conceptos, formulando interrogantes y desarrollando ejercicios en el tablero.

Cuando se plantea una ecuación de segundo grado para calcular sus raíces, lo primero que un estudiante debe hacer es analizar la expresión para determinar el método más eficaz que ayude a resolver el ejercicio, por esta razón en el segundo momento de la sesión se plantearon una serie de ecuaciones para que las solucionaran utilizando el procedimiento más adecuado que les permita abordar dicha actividad, llevada a cabo mediante la conformación de grupos de cuatro personas, con el objetivo de analizar la forma en que se trabaja colectivamente, es decir cada integrante del grupo debe aportar ideas para solucionar cada uno de los puntos del taller, el cual consiste en resolver las siguientes ecuaciones:

1) $2x^2 + 7x - 4 = 0$
2) $x^2 + 7x = 18$
3) $7x^2 - 14 = 0$
4) $x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$

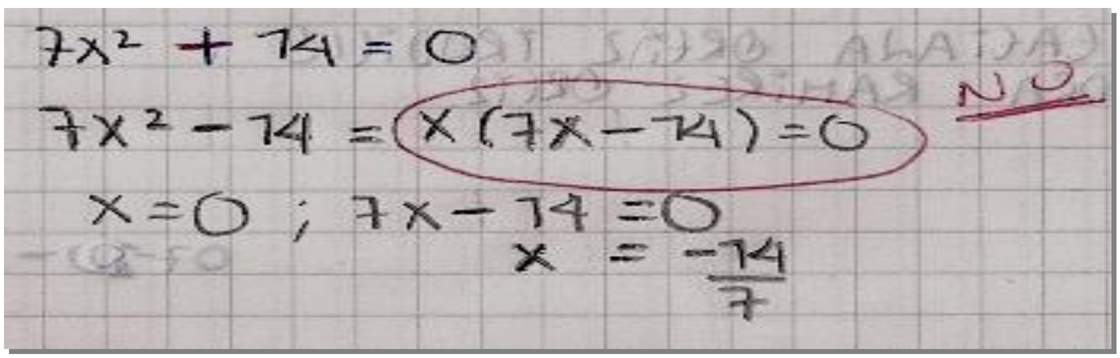
Los resultados del taller no fueron los esperados, ya que ninguno de los 7 grupos desarrolló la totalidad de los ejercicios. Analicemos algunos errores cometidos por los estudiantes para resolver ecuaciones de segundo grado. En la siguiente evidencia se muestra la solución del ejercicio 1 del taller, el cual consiste en resolver la ecuación cuadrática propuesta:



El método elegido por el grupo para calcular las raíces de la ecuación es la utilización de la fórmula cuadrática. Pero no se aplica correctamente, ya que no identifican los coeficientes de la ecuación para ser reemplazados en la fórmula, lo cual implica la obtención de soluciones que no satisfacen las condiciones del ejercicio.

La evidencia fue seleccionada porque muestra un error común en 5 de los 7 grupos que trabajaron el ejercicio. Es decir, se les dificulta reemplazar los coeficientes de la ecuación, por ende no aplican el método para resolver ecuaciones de segundo grado referente al manejo de la formula cuadrática. Motivo por el cual se realiza la respectiva aclaración en el manejo correcto de la misma.

Analicemos un procedimiento realizado para solucionar el ejercicio 3 del taller, en donde se pretende la resolución de la ecuación de segundo grado correspondiente. La siguiente evidencia es seleccionada ya que fue un error común en los grupos de trabajo, veamos:



Es necesario aclarar que la escritura de la ecuación es $7x^2 - 14 = 0$. Respecto a los argumentos utilizados para resolver el ejercicio son incorrectos, ya que factoriza de manera inadecuada la expresión, es decir x no es el factor común, por consiguiente las raíces calculadas no satisfacen la igualdad.

Una primera aproximación analítica sobre los resultados que presenta la solución de la ecuación es que los estudiantes no tienen claridad en el caso de factorización aplicado. Es decir, un factor común en una expresión no necesariamente es una variable, también existen casos en que el factor común es un número.

Es conveniente aclarar que cuando los alumnos explican sus ideas en el tablero muestran seguridad en sus argumentos y si presentaban alguna dificultad, los compañeros les brindan una alternativa para solucionar el inconveniente. Pero en el momento de resolver los ejercicios planteados en el taller no presentan resultados satisfactorios, lo cual significa que para solucionar un ejercicio necesitan ayudas que les permita afrontar los problemas y de esta manera obtener mejores resultados.

El objetivo de un docente en el aula de clases es que los estudiantes comprendan los conceptos desarrollados en la misma, y que desarrollen la capacidad de plantear propuestas para solucionar ejercicios que involucran temas que se han estudiado. Pero en esta ocasión los alumnos no han adquirido dicha capacidad ya que, según los resultados de la sesión dan a entender que se les dificulta analizar ciertas expresiones algebraicas. Motivo por el cual no expresan por si mismos ideas que contribuyan a solucionar cualquier problema matemático.

Dicha situación puede originarse porque los alumnos se vuelven dependientes de las ayudas que les pueden otorgar el docente o sus compañeros, pues demuestran que no son capaces de expresar sus propias ideas, tal vez por temor a equivocarse. Pero cuando se pretende adquirir nuevos conocimientos, es necesario afrontar los errores que se puedan cometer, ya que a partir de su análisis se pueden superarlos y no volver a caer en ellos. Por esta razón, para obtener nuevos conocimientos es conveniente dejar a un lado el temor a equivocarse y así los resultados serán positivos y mejorarán el nivel intelectual de los estudiantes.

3.3.2. Sesión 2. El tema a desarrollar en esta sesión, cuya asistencia fue de 32 alumnos es la representación y solución grafica de ecuaciones de segundo grado (ver anexo E), con el fin de facilitarle al estudiante un método gráfico para la solución de ecuaciones de este tipo, de tal manera que, mediante el análisis de la gráfica correspondiente determinen que las raíces de dichas ecuaciones son los interceptos con el eje x.

El tema a estudiar es la forma de graficar en el plano cartesiano, en éste caso se tienen en cuenta ecuaciones de segundo grado, de tal manera que cada alumno pueda determinar cuáles son las raíces de las ecuaciones que serán objeto de estudio, dicha acción se llevó a cabo sin utilizar el método de tabulación, sino calculando ciertos puntos importantes que determinan el comportamiento de las curvas que representan las respectivas ecuaciones, tales como: interceptos con los ejes x e y; vértice, ejes de simetría.

Una vez estudiado el procedimiento mencionado se plantea un ejercicio, cuyo objetivo es que los estudiantes se apropien del tema. La idea es que los desarrollen o los expongan en el tablero para analizar la manera en que se dirigen a sus compañeros para argumentar cada paso que realizaron al resolver un problema de ecuaciones de segundo grado, mediante el método gráfico.

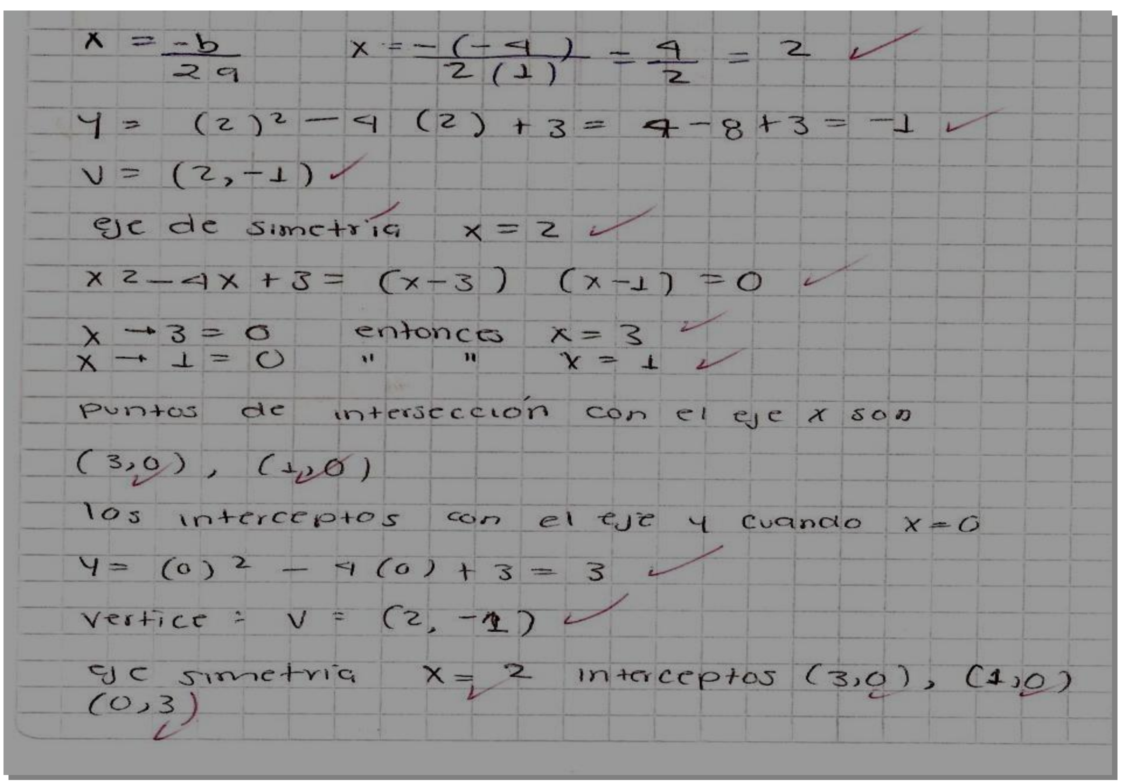
El ejercicio es el siguiente: resolver gráficamente la siguiente ecuación: $x^2 = 3x + 10$

El tiempo cedido para que los estudiantes resuelvan el ejercicio es de 15 minutos, ya que los cálculos que deben efectuar no son tan complejos. El siguiente paso es seleccionar un alumno para que realice la explicación de sus planteamientos y de esta manera brindarles la oportunidad de resolver dudas que se puedan originar cuando se trabaja individualmente.

El estudiante seleccionado expone muy bien los argumentos para explicar los pasos que utilizó para resolver gráficamente la ecuación. Es decir, calcula los datos que le ayudan a plasmar la gráfica como: vértice, eje de simetría, interceptos con los ejes coordenados y finalmente la representación gráfica, la cual después de analizarla afirma que las raíces de la ecuación son los interceptos con el eje x, esto es cuando y es igual a cero.

Finalmente, se formula un ejercicio, en el cual se pretende que los estudiantes representen gráficamente, realizando un procedimiento similar para determinar las raíces de la siguiente ecuación: $x^2 - 4x + 3 = 0$ para que sea resuelto en grupos de cuatro personas y así analizar la comprensión de los conceptos matemáticos estudiados.

Como se presentó en el proceso de nivelación, los resultados obtenidos cuando se resuelven, en este caso ecuaciones de segundo grado mediante el método gráfico son positivos, ya que la totalidad de los grupos proceden correctamente para la solución del ejercicio. Veamos un ejemplo que ratifique el comentario:


$x = \frac{-b}{2a}$ $x = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$

$y = (2)^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

$V = (2, -1)$

eje de simetria $x = 2$

$x2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) = 0$

$x - 3 = 0$ entonces $x = 3$

$x - 1 = 0$ " " $x = 1$

puntos de intersección con el eje x son

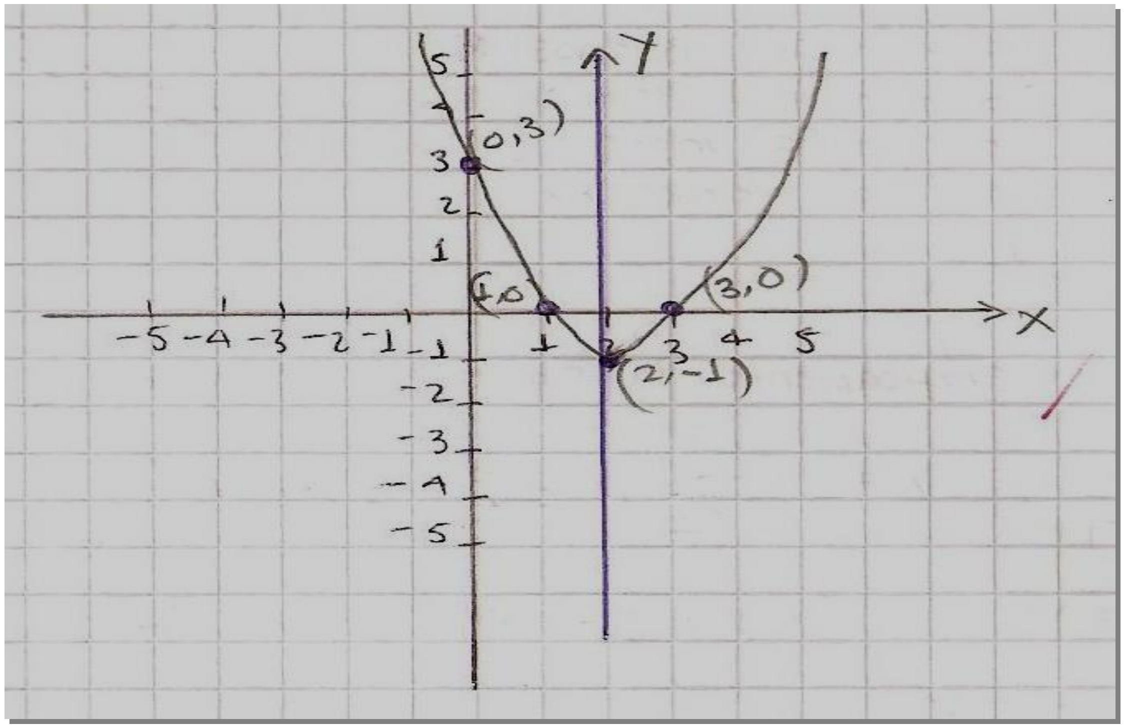
$(3,0)$, $(1,0)$

los interceptos con el eje y cuando $x = 0$

$y = (0)^2 - 4(0) + 3 = 3$

vertice : $V = (2, -1)$

eje simetria $x = 2$ interceptos $(3,0)$, $(1,0)$ $(0,3)$



Como se puede detallar, la evidencia muestra la claridad en el proceso utilizado para calcular los puntos solicitados para representar gráficamente la ecuación de segundo grado, pero no especifican cuales son las raíces de la ecuación, motivo por el cual en el momento de presentarles los resultados afirman que la solución de la ecuación es $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$. Argumento válido que verifica la comprensión del método gráfico para solucionar ecuaciones de segundo grado.

Debido a los resultados en el método gráfico para la solución de ecuaciones de segundo grado, es interesante analizar las dificultades que se presentan en los casos en donde no se muestra un dibujo. Una explicación es que los estudiantes no tienen claridad en la manera en que se procede para despejar una variable de una ecuación. Por esta razón para los alumnos se torna más claro el hecho de observar los puntos de intersección con el eje x en el plano cartesiano para determinar las raíces de una ecuación de segundo grado. También se puede afirmar que se les dificulta el manejo de los términos que aparecen en una ecuación, los cuales pueden causar confusión en el momento de simplificar una expresión para luego despejar las incógnitas que aparecen en los problemas.

Una descripción del lenguaje conque están escritos los textos matemáticos, hace diferenciar dos tipos de signos: uno formado por signos que se consideran propios de las matemáticas; y otro formado por los signos que se utilizan en el lenguaje natural. Los diferentes sistemas utilizados como sistemas de representación, en matemáticas son: las figuras, las gráficas, la escritura simbólica. En la mayoría de los sistemas de escritura hay ciertas relaciones estructurales como son el orden y la posición, que permiten a los símbolos combinarse para producir nuevos símbolos. También se debe tener en cuenta que en los textos de matemáticas se usan ciertas construcciones que no se usan en el lenguaje natural. Por esta razón, los estudiantes están comprendiendo ciertos conceptos matemáticos por medio de figuras, ya que se les dificulta utilizar el lenguaje en que se representan expresiones algebraicas para resolver problemas matemáticos. Motivo por el cual; el trabajo del docente de matemáticas es proponer metodologías de estudio que contribuyan a que los estudiantes obtengan un mejor conocimiento del lenguaje propio de la simbología matemática.

3.3.3. Sesión 3. Para esta sesión acudieron 10 alumnos, cuyo tema a desarrollar es el estudio de problemas de aplicación de las ecuaciones de segundo grado, con el objetivo de analizar detalladamente la capacidad de los estudiantes para interpretar una situación dada en lenguaje cotidiano para luego representarla en lenguaje algebraico (ver anexo E).

Para interpretar los enunciados de las situaciones que se presentan para plantear una ecuación de segundo grado se deben tener en claro expresiones como: hallar el doble, triple, la tercera parte de un número, encontrar el cuadrado de un número, encontrar cierta cantidad de números que sean consecutivos, entre otras. Las cuales se pueden descubrir en el contexto de los problemas que se van a abordar.

En esta sesión se trabaja colectivamente, con el propósito de afrontar éste tipo de temas matemáticos con mayor seguridad, interpretando de manera clara y precisa los contenidos de los problemas puestos en referencia.

Los estudiantes estuvieron muy atentos a las respectivas explicaciones y obtuvieron buenos resultados, ya que con la ayuda del grupo se plantearon las ecuaciones que se necesitaban para resolver los problemas propuestos y así responder los interrogantes diseñados en los mismos. Los problemas a desarrollar son los siguientes:

- ✓ María Guadalupe tiene dos años más que su hermano Iker Lorenzo y la suma de los cuadrados de ambas edades equivale a 130 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

- ✓ La longitud de un terreno rectangular es doble que el ancho. Si la longitud se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se hace doble. Hallar las dimensiones del terreno.

- ✓ La diferencia de precios de dos automóviles es de 7 euros, y su suma, multiplicada por el precio del automóvil más barato equivale a 184 euros. ¿Cuál es el precio de cada automóvil?

En el desarrollo de la sesión se observa la cooperación y el esfuerzo del grupo para entender cada uno de los enunciados para plantear y solucionar la ecuación cuadrática correspondiente que permita obtener las respuestas a los interrogantes de cada uno de los problemas.

La experiencia que se adquiere cuando se da la oportunidad a los estudiantes para que propongan ideas sobre la resolución de un problema matemático es positiva, puesto que este tipo de metodologías ayudan a los alumnos a reflexionar sobre las opiniones que van a aportar y de alguna manera obtener bases para mejorar su comprensión de lectura.

Para la actividad final de la clase, los estudiantes se distribuyen en parejas para solucionar un problema que será resuelto por medio de ecuaciones de segundo grado. La dinámica de esta actividad es que cada pareja realice el planteamiento de la ecuación de segundo grado que da solución al problema correspondiente, es decir se proporcionan ayudas para que cada grupo exprese sus ideas, contribuyendo a una mejor comprensión de la situación propuesta. Esto es, aplicar una buena metodología para guiar al estudiante para que entienda las afirmaciones que aparecen en cada ejercicio y así formular respuestas adecuadas.

Los resultados fueron satisfactorios, porque todos los grupos plantearon correctamente las ecuaciones de segundo grado, y en su mayoría solucionaron los interrogantes diseñados en cada uno de los problemas. Indaguemos algunos argumentos realizados por los estudiantes:

María, juan y carmen obtuvieron los tres primeros lugares en un concurso de dibujo, en donde María ocupó el primer lugar, Juan el segundo y Carmen el tercer puesto. El premio es una cierta cantidad de lapiceros finos que serán repartidos de la siguiente manera:

La cantidad de lapiceros de cada uno de ellos debe corresponder a tres números consecutivos, de tal forma que el cociente del premio mayor entre el premio menor corresponda a los 3/10 del premio del segundo lugar.

¿Cuántos lapiceros le corresponde a cada uno?

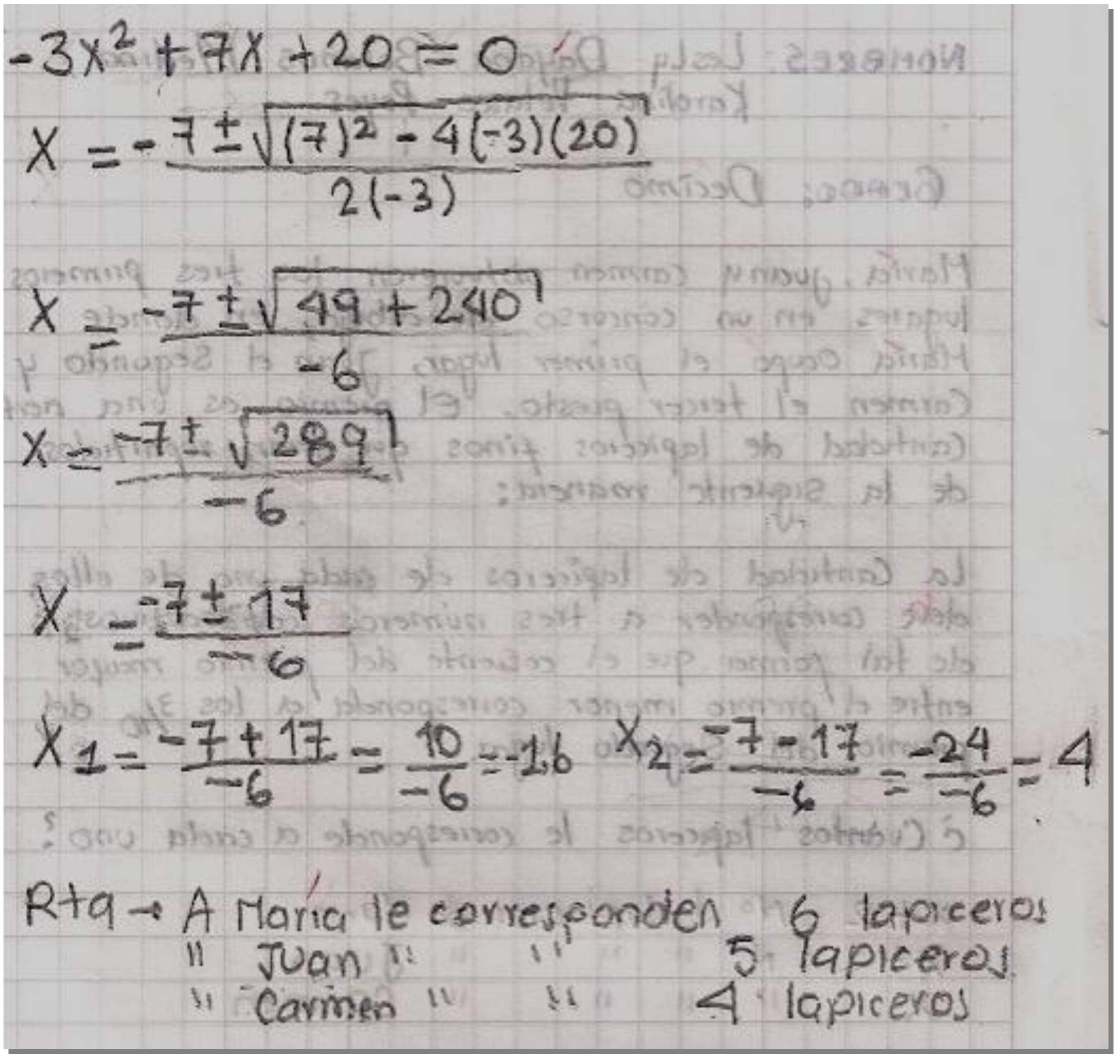
$x+2$: N° de lapiceros de María
$x+1$: N° " " " Juan
x " " " " Carmen

$$\frac{x+2}{x} = \frac{3}{10}(x+1)$$

$$\frac{x+2}{x} = \frac{3x+3}{10}$$

$$(x+2)10 = (3x+3)x$$

$$10x + 20 = 3x^2 + 3x$$
$$10x - 3x - 3x^2 = -20$$
$$7x - 3x^2 + 20 = 0$$



$$-3x^2 + 7x + 20 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(-3)(20)}}{2(-3)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{-6}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{-6}$$

$$x = \frac{-7 \pm 17}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 17}{-6} = \frac{10}{-6} = -1.6 \qquad x_2 = \frac{-7 - 17}{-6} = \frac{-24}{-6} = 4$$

Rta → A María le corresponden 6 lapiceros
" Juan " " 5 lapiceros
" Carmen " " 4 lapiceros

Respecto a la solución del problema se puede determinar la claridad con que se plantea una ecuación de segundo grado y la forma de resolverla. De esta manera los estudiantes manifiestan seguridad en el momento de responder el interrogante indicado, ya que en este caso obtiene dos raíces de la ecuación y después de analizar los valores obtenidos argumentan correctamente la respuesta que cumple con las condiciones del problema.

A continuación se presenta el procedimiento del único grupo que a pesar de haber planteado adecuadamente la ecuación no responde el interrogante, debido a que no la resuelven de manera eficiente. Miremos:

Juanito repartió a sus dos hijas pepita y Jacinta cierta cantidad de monedas y les propuso lo siguiente:

Distribúyanse las monedas de tal forma que la suma de las dos cantidades sea 9 y además, al sumar sus cuadrados obtengamos 53

¿Que cantidad de monedas lecorresponde a cada uno?

Solucion

x: Cantidad de monedas pepita

y: " " " Jacinta

$$x + y = 9 \qquad x + y = 9$$

$$y = 9 - x$$

$$x^2 + y^2 = 53$$

$$x^2 + (9 - x)^2 = 53$$

$$x^2 + 81 - 18x + x^2 = 53$$

$$x^2 + 81 - 18x + x^2 - 53 = 0$$

$$\boxed{2x^2 + 28 - 18x = 0}$$

Resuelvo la ecuación

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{(28)^2 - 4(2)(-18)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{784 + 144}}{4}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{928}}{4} = \frac{28 \pm 30.4}{4}$$

$$x_1 = \frac{28 + 30.4}{4} = \frac{58.4}{4} = 146$$

$$x_1 = 146$$

$$x_2 = \frac{28 - 30.4}{4} = \frac{-2,4}{4}$$

$$x_2 = -0,6$$ NO

En la figura se muestra el buen planteamiento de la ecuación de segundo grado correspondiente al problema. Pero al resolverla no identifican los coeficientes para reemplazarlos en la fórmula, por consiguiente van a obtener valores que no satisfacen la igualdad.

Nuevamente, se cometen errores en la aplicación de la fórmula cuadrática, puesto que a pesar de plantear una ecuación de este tipo no identifican sus coeficientes. Es decir, suponen los coeficientes por orden de aparición en la ecuación y no analizan que el valor de b es el coeficiente que acompaña a la variable x (en forma lineal) y c es el término independiente.

Sin embargo, debido a que la mayoría de los estudiantes muestran claridad en sus argumentos; se puede afirmar que los resultados obtenidos en esta sesión son positivos porque la metodología utilizada contribuyó a que los alumnos expresen en lenguaje algebraico ciertas situaciones presentadas en lenguaje natural. Motivo por el cual comprendí que el trabajo grupal es importante para abordar éste tipo de situaciones, siempre y cuando haya una participación colectiva.

3.3.4. Sesión 4. En esta sesión asistieron 30 estudiantes. Cuyo objetivo es facilitar una herramienta tecnológica de trabajo, con la cual puedan verificar la solución de los problemas planteados y analizar los errores que se cometan cuando se trabaja sin la ayuda del programa. Para ello se realizó la respectiva introducción sobre el manejo del software Derive 6.

El software mencionado presenta funciones interesantes para que los alumnos se apropien de nuevas herramientas de estudio, ya que a partir de estas se puede mostrar de manera más detallada el comportamiento de una o varias curvas en el plano cartesiano que a simple vista es complejo de analizar. También se puede identificar cualquier punto en el plano y resolver algebraicamente ecuaciones de segundo grado.

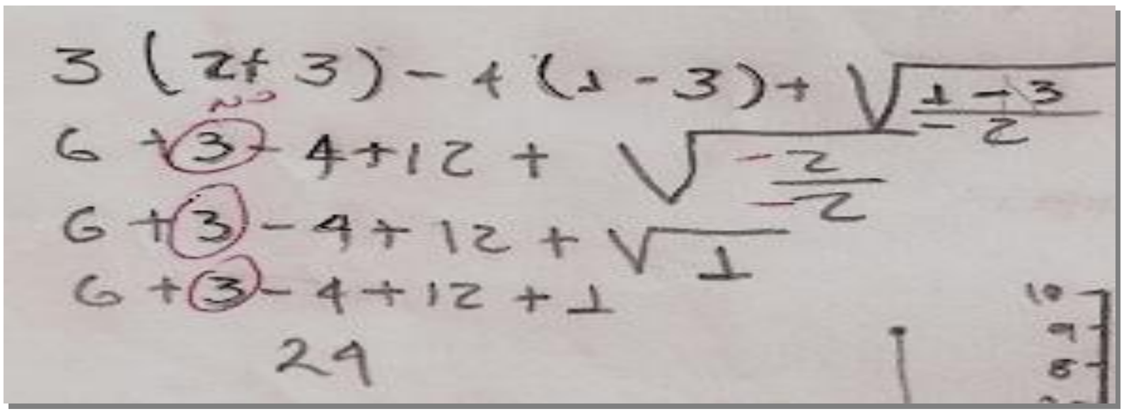
Respecto al manejo de dichas funciones, los estudiantes no presentaron dificultad con el uso de cada una. Es decir, se familiarizaron rápidamente con la notación que debían manejar para ingresar datos en la pantalla y así realizar los respectivos cálculos.

La metodología que se llevó a cabo es que los estudiantes resuelvan ciertos ejercicios planteados en la guía de trabajo que involucran conceptos estudiados en el proceso de nivelación de conocimientos (ver anexo E), sin la ayuda del programa derive 6 y posteriormente, mediante la utilización de dicha herramienta muestren en pantalla la solución de cada punto, explicando los comandos que utilizaron para tal fin . Dicha acción se desarrolló en grupos de máximo tres personas.

Al realizar la respectiva revisión de los trabajos presentados por los estudiantes me pude dar cuenta que 4 de los 10 grupos resolvieron en su totalidad los ejercicios planteados en la guía, los 6 restantes, de 7 preguntas obtuvieron entre 1 y 4 puntos correctos. Mostremos el desarrollo de uno de los ejercicios planteados en la guía que más dificultad causó en los 6 grupos, se trata del ejercicio 4, en el cual se les presentó la siguiente expresión:

$$3(a+b) - 4(c - d) + \sqrt{(c - d)/-a}$$

Y el ejercicio consiste en reemplazar los siguientes datos para obtener un valor numérico. a = 2; b = 3; c = 1; d = 3. El proceso realizado fue el siguiente:

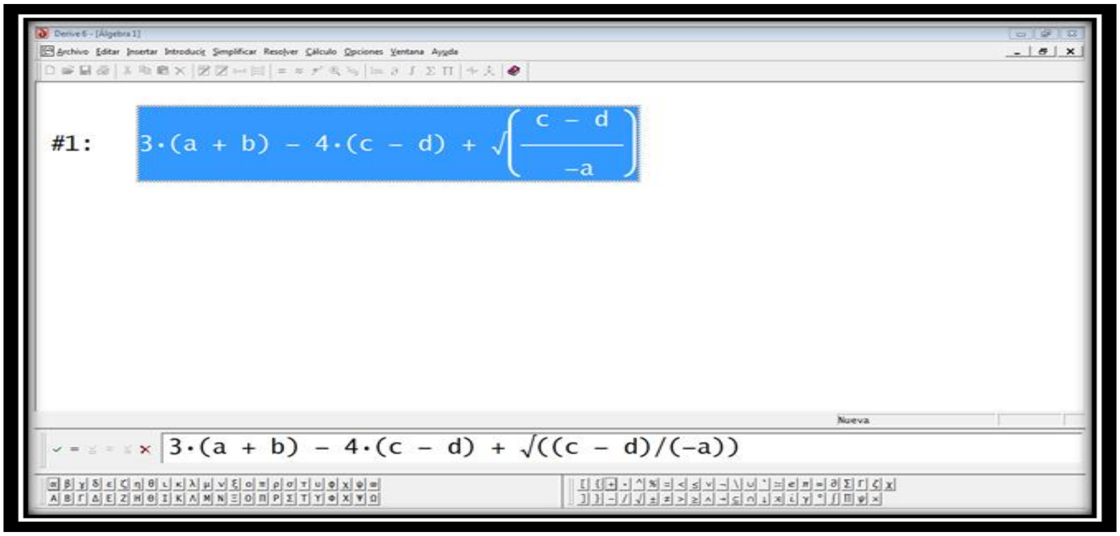


Respecto a la solución del ejercicio, el reemplazo de los valores asignados de las variables no tiene problema. Para eliminar los paréntesis aplica la ley distributiva del producto respecto a la suma, una buena decisión. Pero, como se puede notar en el primer paréntesis no hace la operación 3x3, es decir no utiliza adecuadamente dicha propiedad. Además, al final del procedimiento realiza una suma incorrecta.

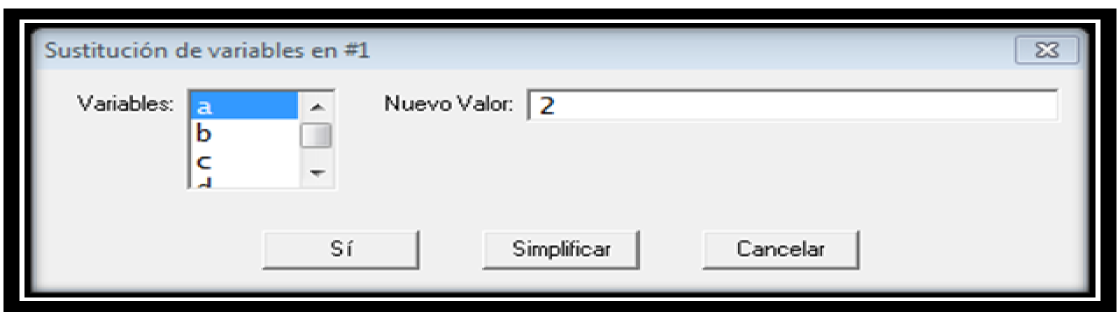
Cuando se formulan ejercicios donde se involucren operaciones elementales, se espera que un estudiante de grado décimo no presente problema en resolverlo, ya que son conceptos con los que convive durante todo su proceso de formación académica en matemáticas. Debido a esto, se puede afirmar que los estudiantes no manejan la parte operatoria, es decir se les dificulta realizar cálculos sencillos que involucran aplicar las operaciones fundamentales de la aritmética, las cuales se estudian desde la primaria hasta que se termina la etapa de bachillerato. Por esta razón, deben reflexionar sobre la metodología que utilizan para estudiar en sus ratos libres y así afianzar conceptos básicos de la matemática que son importantes en cada etapa de su vida.

Detallemos las siguientes imágenes, en las cuales se presenta la manera en que los estudiantes resuelven el mismo punto de la guía, pero con la ayuda del software:

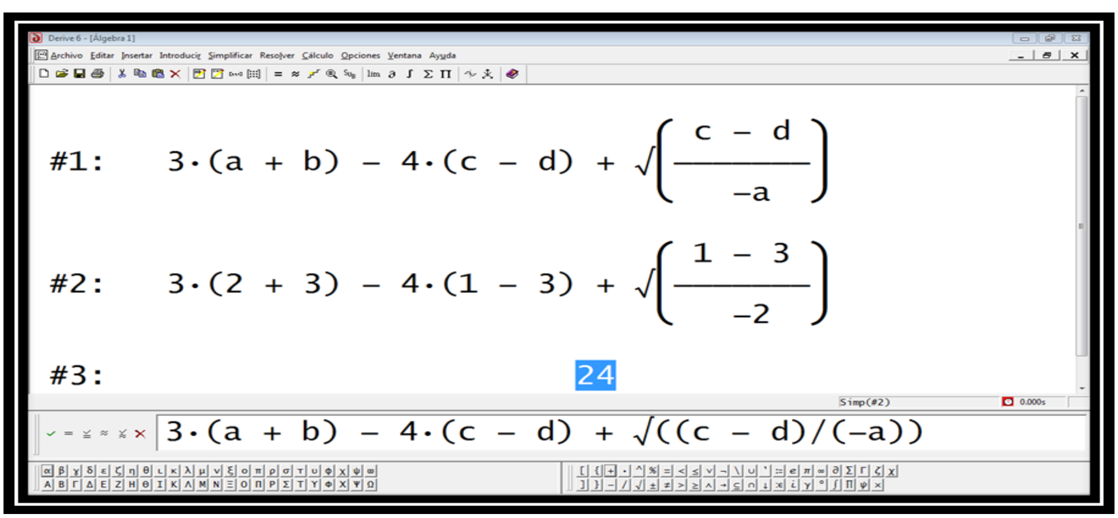
Paso 1: Insertar la expresión algebraica en la barra de texto



Paso 2: asignar los valores indicados a las variables por medio de la opción "sustitución de variables".



Paso 3: mostrar el resultado numérico



En primera instancia se digita la expresión correspondiente en la barra de texto, y posteriormente se presenta en formato de texto del software derive 6. El siguiente paso es asignarle los valores indicados a cada una de las variables, lo cual se puede apreciar en el segundo grafico, en donde se verifica la utilización de la opción sustitución de variables, que es la adecuada para éste tipo tareas. Finalmente, se efectúa el cálculo indicado pulzando el icono igual (=) ubicado en la barra de tareas, obteniendo como resultado 24. De esta menera se presenta la respuesta que satiface las condiciones del ejercicio.

Así se llevó a cabo el reconocimiento por parte de los alumnos de una herramienta de estudio distinta a las que venían utilizando en su proceso de formación en cuanto a la matemática se refiere, obteniendo buenos resultados en el manejo de las funciones que permiten realizar los respectivos cálculos que involucraba la guía de trabajo.

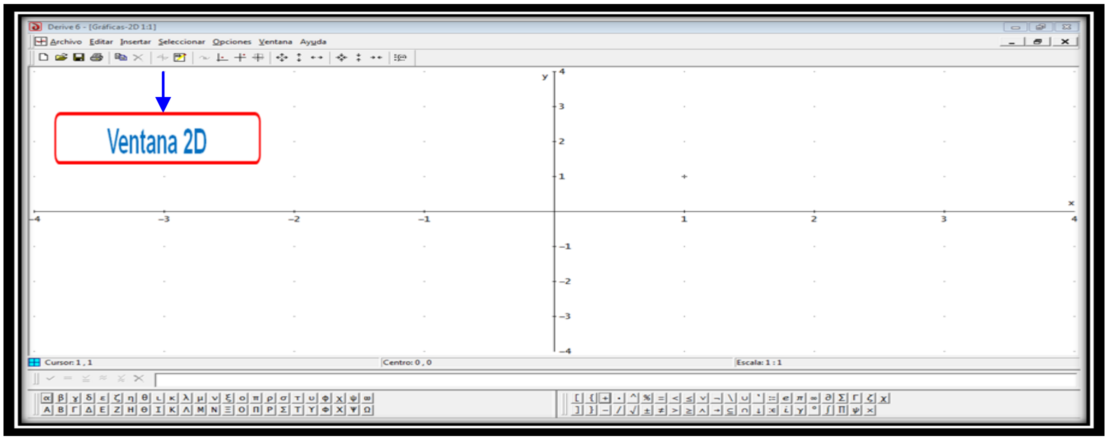
3.3.5. Sesión 5. La sesión se llevó a cabo con la participación de 23 estudiantes, con el propósito de analizar la manera en que se apropian de la herramienta tecnológica Derive 6, para resolver la guía de trabajo correspondiente (ver anexo E).

La dinámica de la sesión se llevó a cabo mediante el manejo del software educativo derive 6, donde los estudiantes resuelven los problemas planteados en la guía utilizando ésta herramienta tecnológica realizando la debida explicación de cada uno de los resultados.

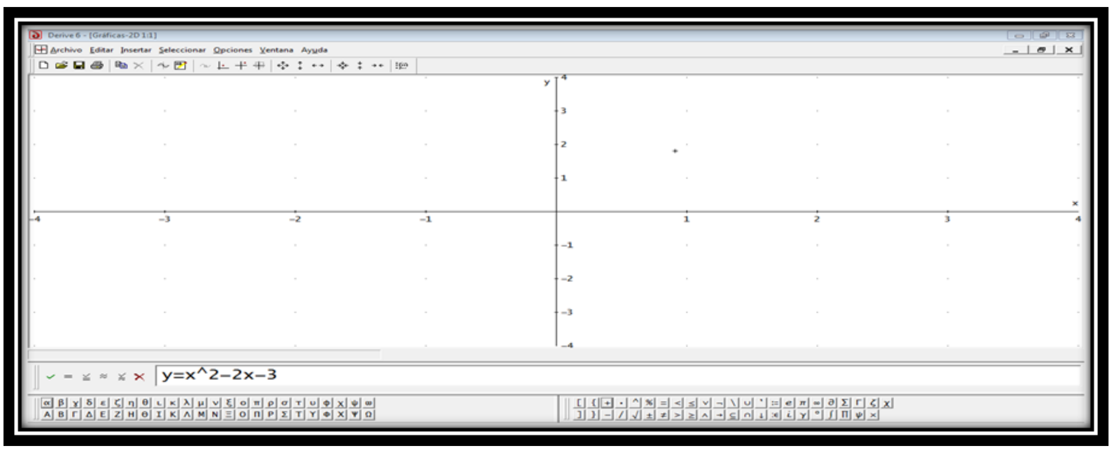
Los estudiantes de la actualidad son muy creativos cuando tienen la oportunidad de trabajar en un computador; puesto que cada día están conviviendo con tecnologías que les permiten obtener nuevas fuentes de investigación y así crear nuevas formas de obtener conocimiento por medio de herramientas de trabajo que llaman más la atención en un estudiante de Bachillerato. Pues, mediante el manejo del software se refleja el interés por aprender nuevas formas de estudiar matemáticas porque tratan de plasmar en pantalla con la mayor claridad del caso la solución de los interrogantes planteados en la guía.

Observemos algunos resultados de la solución del ejercicio 3 de la guía que consiste en representar gráficamente la siguiente ecuación $x^2 – 2x – 3 = 0$, identificando los interceptos con los ejes coordenados, eje de simetría y vértice. Para ello realizaron los siguientes pasos:

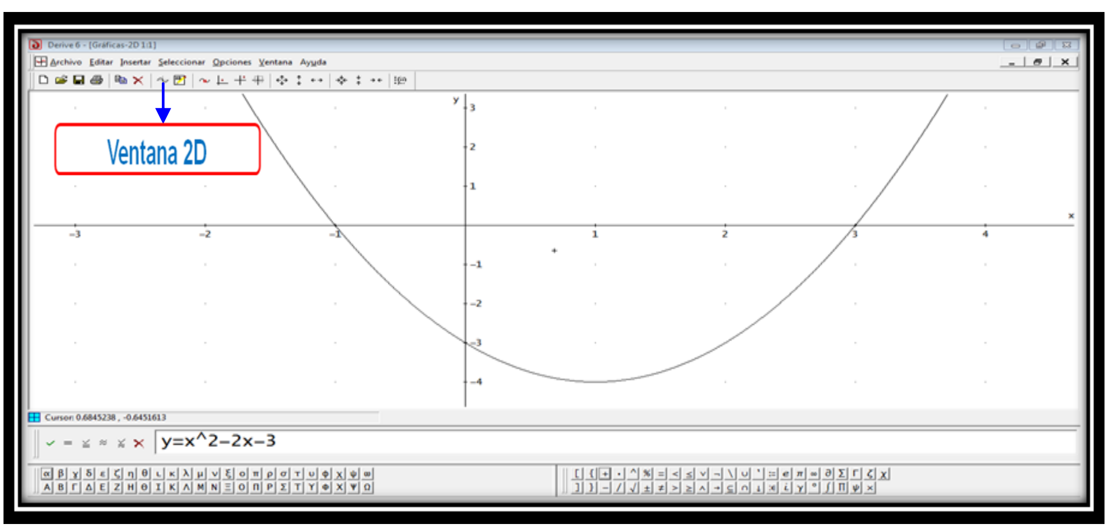
Paso 1: mostrar el plano cartesiano por medio del botón ventana 2D



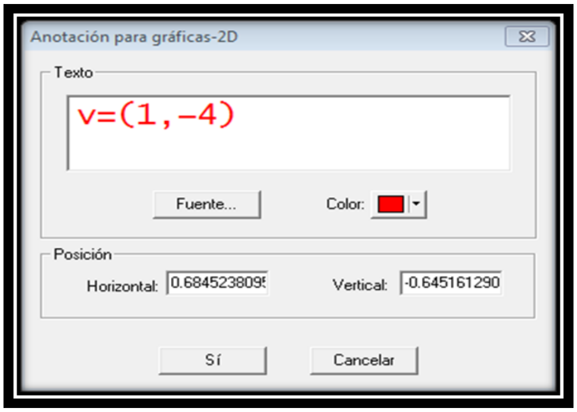
Paso 2: insertar la expresión algebraica en la barra de tareas

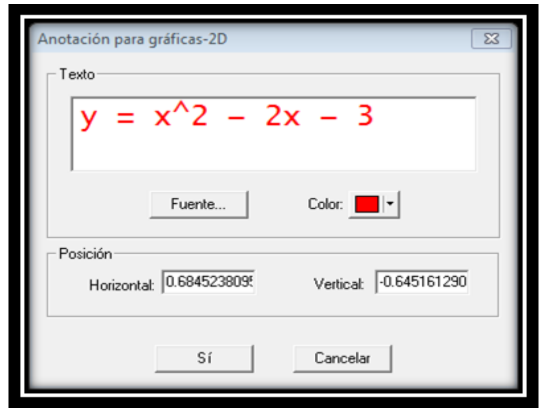


Paso 3: graficar la curva con la utilización de la opción ventana 2D

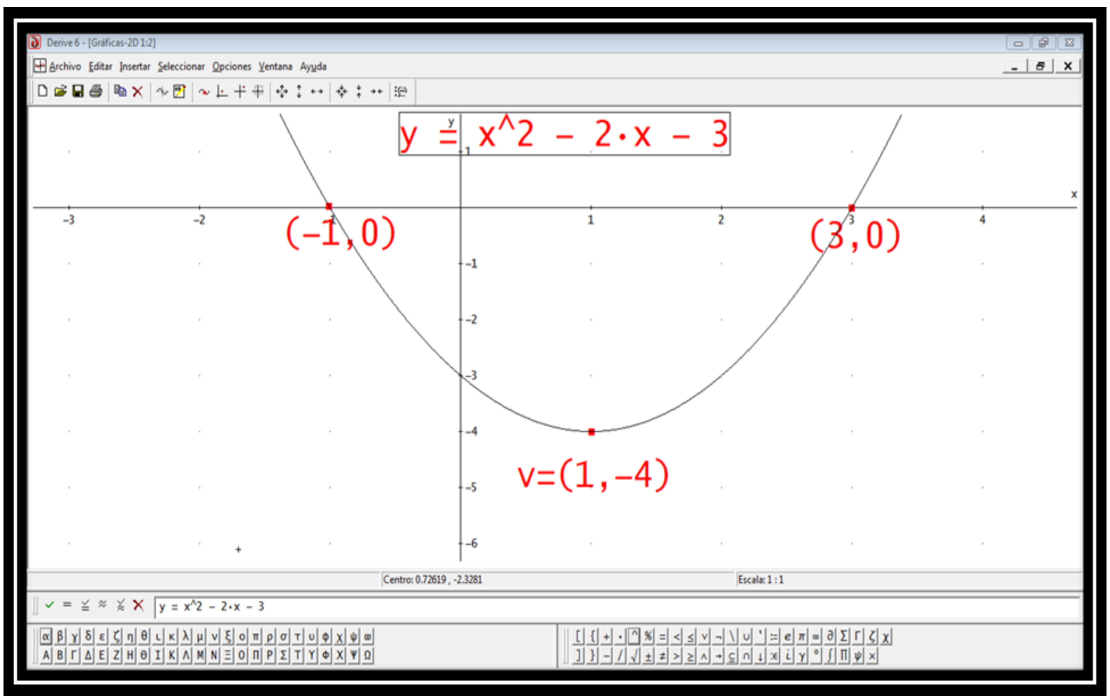


Paso 4: insertar anotaciones



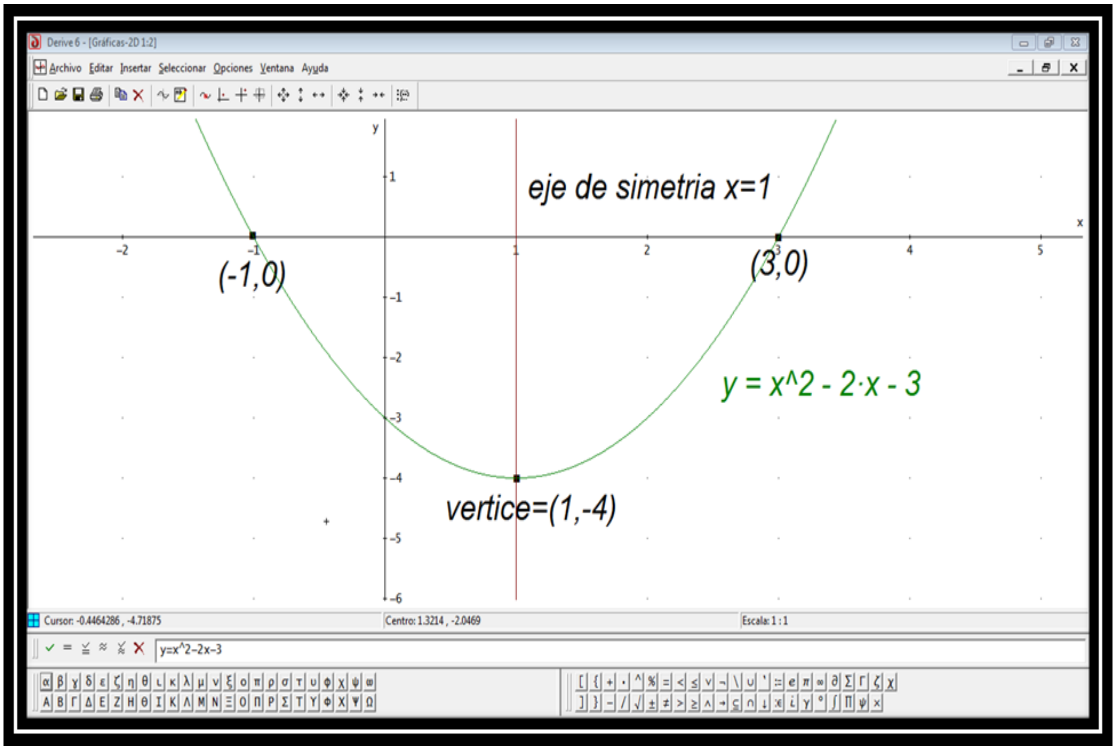


Paso 5: obtención de la gráfica



Respecto a la gráfica obtenida de la ecuación de segundo grado correspondiente, el grupo de trabajo ubica correctamente los interceptos con el eje x, y el vértice de la curva, pero no ubica el eje de simetría. A pesar de ello se puede afirmar que han asimilado las funciones de los comandos del software que les permite presentar esta clase de resultados.

En la exposición de sus resultados afirman que las raíces de la ecuación de acuerdo a la gráfica son $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$. Es decir, dan a entender que tienen claridad sobre el concepto matemático que se refiere a que las raíces de una ecuación de segundo grado, visto gráficamente son los interceptos con el eje x, es decir cuándo y = 0. Otro resultado del mismo ejercicio presentado por otro grupo, utilizando las mismas opciones (expuestas anteriormente) se muestra en la siguiente evidencia:

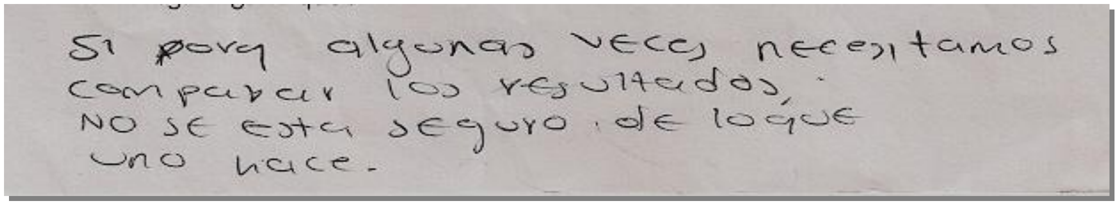


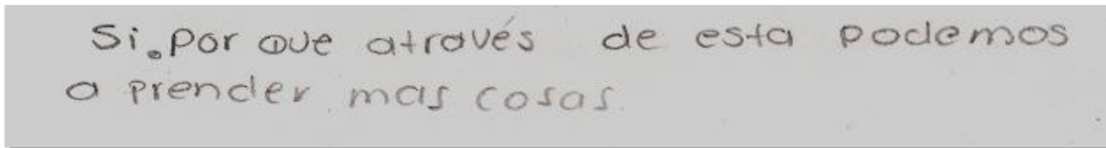
En este caso, a diferencia del anterior muestran el eje de simetría, es decir la recta x = 1, además de los interceptos con el eje x, que afirman son las raíces de la ecuación.

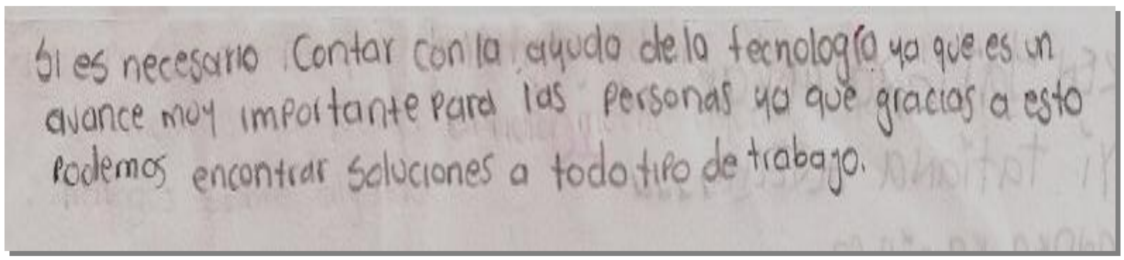
De acuerdo a la imagen, es interesante detallar la creatividad con la que los estudiantes representan en pantalla la gráfica de una ecuación de segundo grado ubicando algunos puntos importantes. De ésta manera se apropian de una herramienta distinta que les permite visualizar el comportamiento de una curva en el plano cartesiano.

Una vez expuestos los resultados de cada grupo, algunos estudiantes expresaron que es positivo utilizar programas para estudiar problemas matemáticos, ya que los cálculos se realizan con mayor seguridad y en menos tiempo del que se tomarían resolviendo mediante el uso del lápiz y papel. Mientras que otros afirmaron que no necesitaban ningún software porque los cálculos se pueden efectuar sin la ayuda de éste tipo de herramienta.

Analicemos algunas respuestas presentadas por los estudiantes de la siguiente pregunta que corresponde al punto 4 de la guía: ¿Es necesario el uso de herramientas tecnológicas para resolver gráficamente ecuaciones de segundo grado? ¿Por qué? Veamos algunas respuestas:


Si porq algunas veces necesitamos
comparar los resultados,
NO SE esta seguro de loque
uno hace.

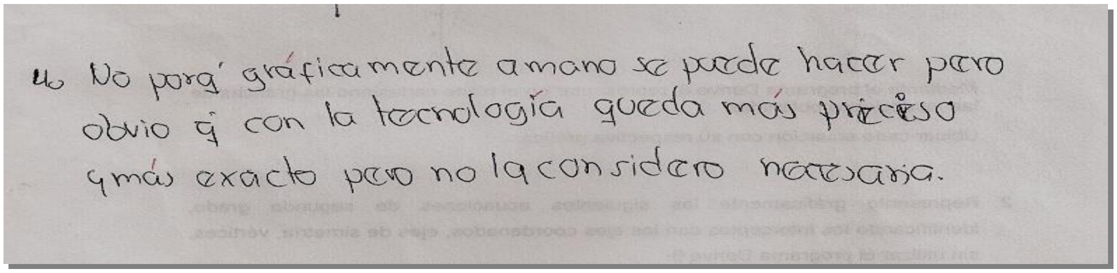

Si. Por que através de esta podemos
a prender mas cosas.

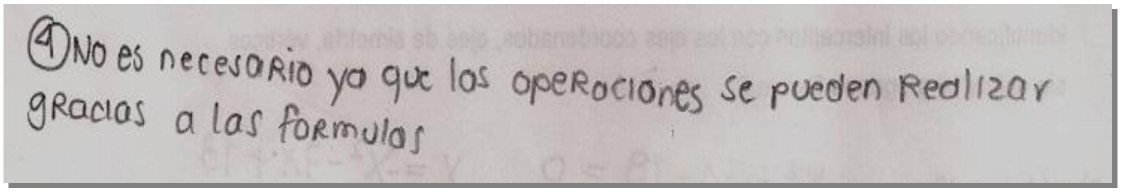

Si es necesario Contar con la ayuda dela tecnología ya que es un
avance muy importante para las personas ya que gracias a esto
podemos encontrar Soluciones a todo tipo de trabajo.

Los anteriores son algunos argumentos de aquellos estudiantes que afirman que es necesario acudir a herramientas tecnológicas para estar más seguro de los resultados. Además, manifiestan que a través de su utilización se puede aprender más cosas y comparar los procedimientos realizados sin la ayuda del software para verificar si son correctos, y si no es así encontrar los errores que se están cometiendo.

La palabra “comparar” es motivo de análisis, ya que mediante la aplicación de un software educativo no necesariamente es para comparar resultados, sino para que los estudiantes adquieran un medio de interacción, en el cual puedan resolver problemas matemáticos que a simple vista no se pueden visualizar claramente. Por ejemplo, el comportamiento de una curva en el plano no siempre es sencillo de mostrar. Pero la herramienta tecnológica se compone de comandos que posibilitan ubicar exactamente puntos en el plano o cambiar coeficientes en cualquier ecuación y de esta manera analizar el comportamiento de varias curvas simultáneamente.

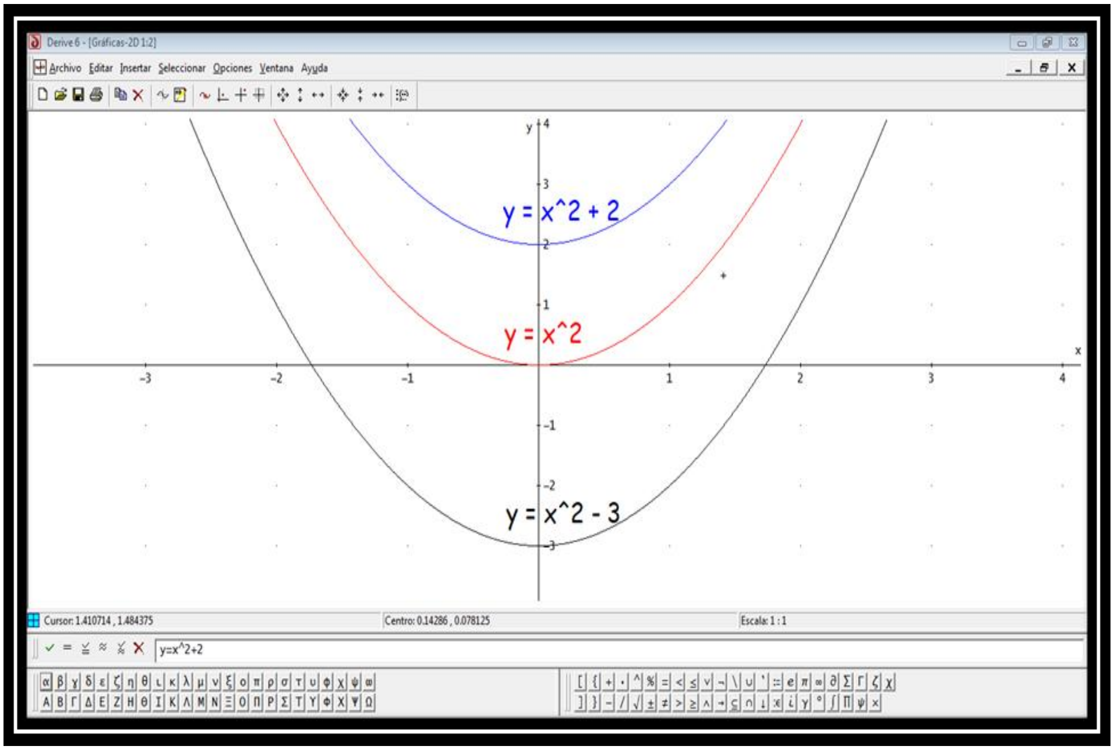
Ahora consideremos algunas explicaciones de aquellos estudiantes que afirman que la tecnología no es necesaria para estudiar conceptos matemáticos, en éste caso la representación gráfica de ecuaciones de segundo grado. Veamos:

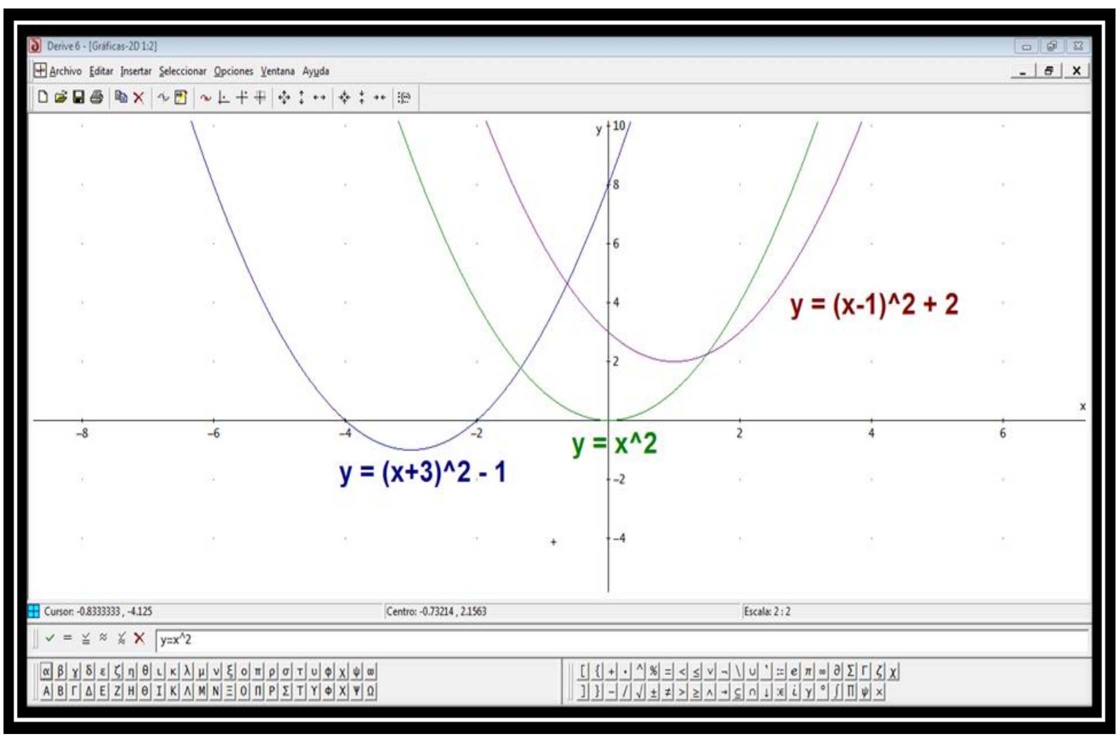

4. No porq' gráficamente a mano se puede hacer pero obvio q' con la tecnología queda más preciso y más exacto pero no la considero necesaria.


④ No es necesario ya que los operaciones se pueden Realizar gracias a las formulas

Todas las respuestas son interesantes, ya que a través del interrogante se pretende que los estudiantes opinen sobre el uso de una herramienta educativa que es nueva para ellos, puesto que en la Institución era la primera vez que se trabajaba con este tipo de software. Sin embargo; es necesario aclarar que la implementación de un programa para estudiar matemáticas es un mecanismo que permite abordar problemas que a simple vista son complejos de visualizar y a su vez obtener mejores resultados en la comprensión de conceptos matemáticos.

3.3.6. Sesión 6. La sesión se llevó a cabo con la participación de 24 estudiantes, y se desarrolló en la sala de sistemas para resolver la guía de trabajo correspondiente (ver anexo E). El objetivo de esta sesión es continuar trabajando con el software educativo. La guía correspondiente fue diseñada con el fin de que los estudiantes representen gráficamente varias curvas simultáneamente, identificando las diferencias y similitudes que existen entre ellas, ubicando el vértice, los interceptos con los ejes coordenados y los ejes de simetría de cada una de las curvas. De esta manera se dará a entender que las herramientas tecnológicas utilizadas para estudiar conceptos matemáticos no necesariamente es un mecanismo de comparación de los resultados obtenidos mediante el uso del lápiz y papel. El mecanismo del software para graficar en el plano cartesiano es escribir, teniendo en cuenta la notación que maneja el programa, la ecuación correspondiente. Después se puede visualizar el comportamiento de la curva y el objetivo es que los estudiantes ubiquen, por medio de cajas de texto y con la ayuda del cursor los puntos que se les sugiere en la guía. Analicemos la manera en que los alumnos plasmaron en pantalla las gráficas de las ecuaciones presentadas a continuación:





En cuanto a la representación en pantalla de las gráficas de las ecuaciones indicadas no presentan inconveniente. La dificultad que pude identificar es en el momento de reconocer los puntos que se les pide en la guía, como ejes de simetría, interceptos con ejes coordenados y el vértice, detalles que reconocían en la sesión anterior. Por esta razón se retoman dichos conceptos con la ayuda del software, en el cual se graficaron las mismas ecuaciones y se argumenta lo más claro posible el comportamiento de cada una de las curvas.

Esta situación se puede presentar porque los alumnos se conforman con entender mientras se encuentran en el colegio y no retoman en sus tiempos libres cada uno de los temas desarrollados en clase, dando a entender que solo asisten a una Institución Educativa por cumplir y no porque ven la necesidad de aprender nuevos conocimientos, en este caso mediante la implementación de nuevas metodologías de estudio que les permitan interactuar de manera más precisa con conceptos matemáticos que a simple vista no se pueden representar claramente. Además, deben comprender que el estudio de las matemáticas es un proceso, lo cual significa que se deben tener presentes los conocimientos adquiridos en etapas anteriores, porque en cualquier momento se van a necesitar. Dicha observación se les presenta a los estudiantes con el propósito de que comprendan que el estudio de las matemáticas no se limita a lo que se pueda estudiar mientras permanecen en el colegio, sino que en cada instante se deben retomar conceptos que se han aprendido con anterioridad porque para entender los contenidos matemáticos es fundamental tener presente los conocimientos adquiridos para aplicarlos cuando se vea la necesidad de hacerlo.

3.3.7. Sesión 7. Para la última sesión asistieron un total de 27 estudiantes, en la cual se desarrolló la guía de trabajo correspondiente.

La guía es diseñada con el objetivo de que los alumnos resuelvan ecuaciones de segundo grado con la ayuda del software Derive 6, por los métodos algebraico y gráfico (ver anexo E).

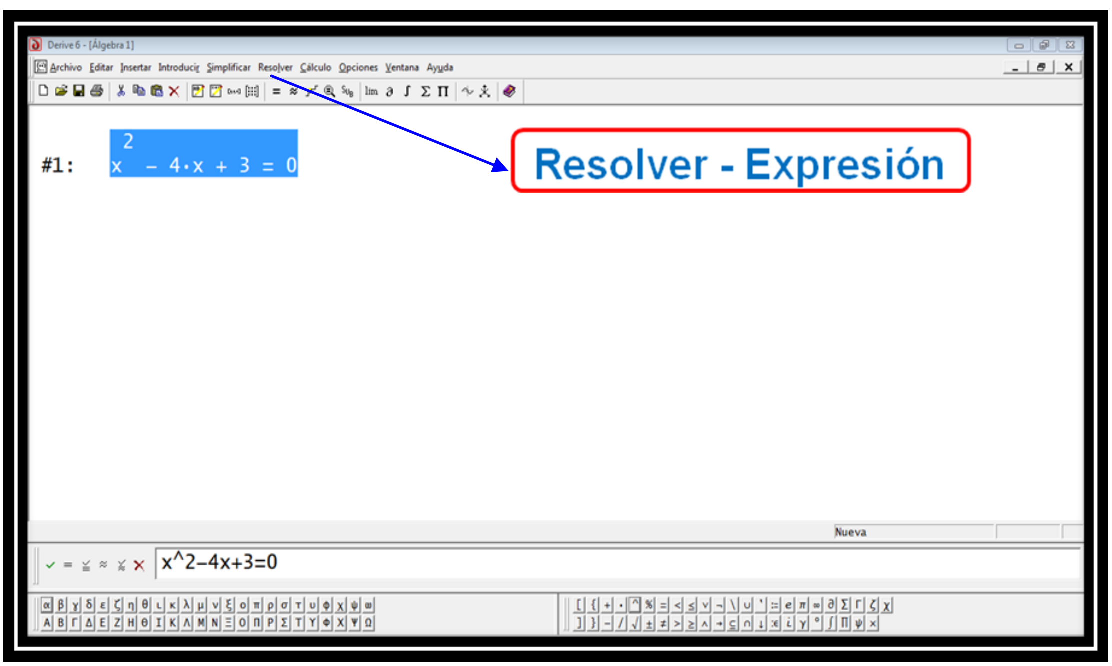
La primera parte de la guía consistió en que los estudiantes resolvieran ecuaciones de segundo grado por el método algebraico utilizando los comandos del software. Una vez obtenidas las soluciones, reemplazar los datos que aparecen en pantalla en la ecuación correspondiente para verificar que en efecto; la herramienta tecnológica funciona correctamente.

En esta actividad los estudiantes no presentaron dificultad, ya que la totalidad del grupo resolvió correctamente los puntos planteados en la guía, realizando las explicaciones sobre la manera en que mostraron las ecuaciones en pantalla y el comando que utilizaron para obtener sus raíces. Analicemos la solución del punto tres de la guía, en el cual se pide completar la tabla de acuerdo a las raíces obtenidas de cada una de las ecuaciones. Veamos:

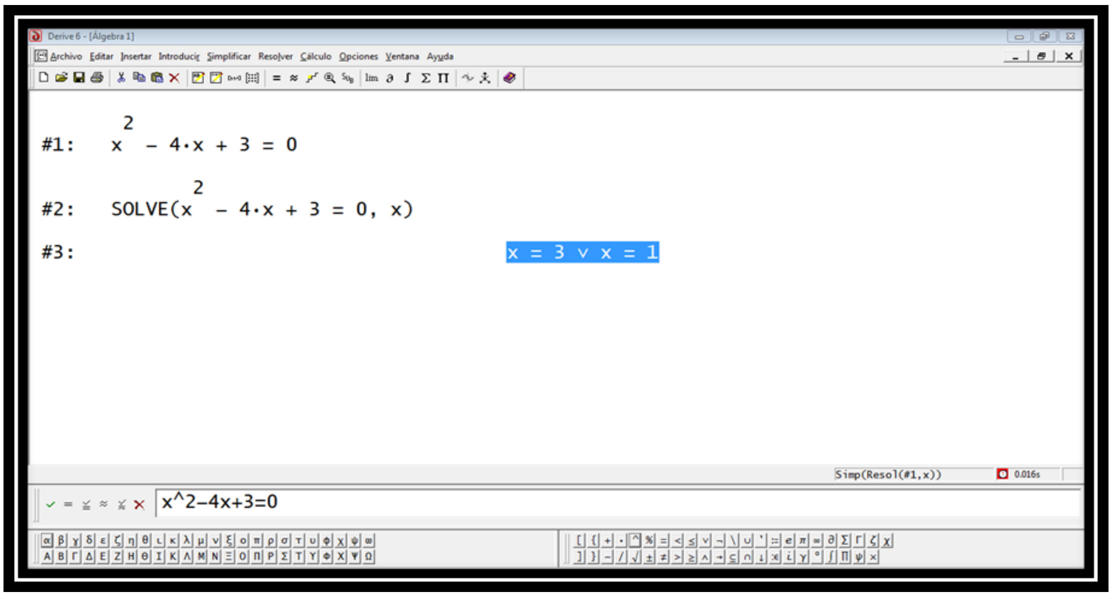
1. $3x^2 = 48$	(1)	$x_1 = -4; \quad x_2 = 4$
2. $5x^2 + 4 = 2(x+2)$	(5)	$x_1 = 1; \quad x_2 = 3$
3. $(4x-1)(2x+3) = (x+3)(x-1)$	(2)	$x_1 = 0; \quad x_2 = 2/5$
4. $x^2 = 3x + 10$	(3)	$x_1 = 0; \quad x_2 = -8/7$
5. $x^2 - 4x + 3 = 0$	(4)	$x_1 = -2; \quad x_2 = 5$

Los estudiantes argumentaron de manera clara y precisa la forma en que habían obtenido las raíces de cada una de las ecuaciones, para luego ubicar el numeral correspondiente en cada paréntesis de acuerdo a las soluciones que habían obtenido. Veamos el proceso realizado para dicha acción:

Paso 1: Insertar la expresión algebraica en la barra de tareas y posteriormente, seleccionar la opción “resolver – expresión”.



Paso 2: para obtener las raíces de la ecuación, se elige la opción “resolver”

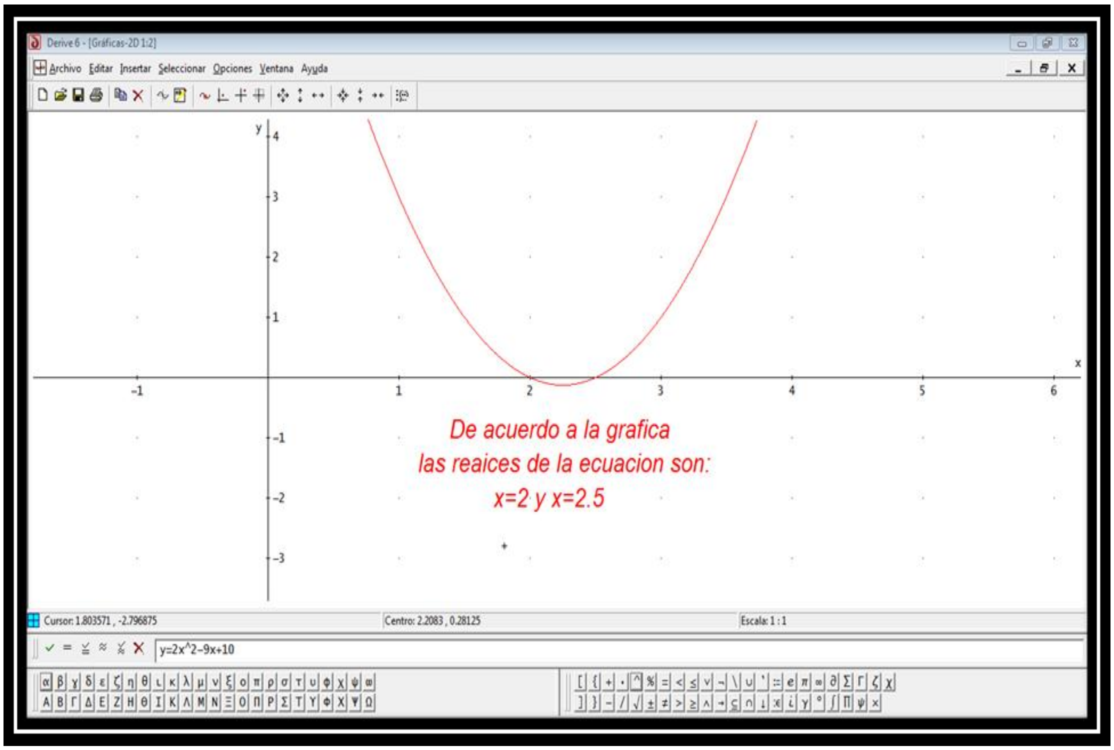


Los resultados obtenidos en este punto fueron satisfactorios, ya que la totalidad del grupo lo resuelve correctamente, justificando cada paso que habían realizado para dicha acción.

En la sala de sistemas se escuchaban comentarios por parte de los estudiantes que se admiraban de la forma tan inmediata en que resolvían una ecuación de segundo grado, y algunos se sentían conformes con los resultados. Pero muy pocos se preguntaban el por qué no podían hacer lo mismo sin la ayuda del software. Por ésta razón; antes de implementar un software educativo en el aula de clase debemos diseñar propuestas metodológicas que contribuyan a que los alumnos no se vuelvan dependientes de la tecnología, es decir trabajar detalladamente la teoría, para luego pasar a la práctica.

Continuando con el desarrollo de la guía, la segunda parte es graficar ciertas ecuaciones e identificar sus raíces de acuerdo al análisis de cada una de las gráficas obtenidas. En esta actividad los resultados fueron positivos, ya que la totalidad de los grupos exponen correctamente la solución de los ejercicios propuestos.

Analicemos la solución del ejercicio 4(a) de la guía, en donde se pretende que representen gráficamente con la ayuda del software la siguiente ecuación: $2x^2 - 9x + 10 = 0$ y exponer cuáles son sus raíces.



Los planteamientos en la respuesta dada por el grupo de estudiantes son correctos, ya que los valores de x mencionados se pueden verificar ubicando el cursor en el espacio donde se requiere para determinarlos. Demostrando su creatividad para trabajar en el computador. De ésta manera, a pesar de las dificultades que presentaron durante todo el proceso; en la última sesión cumplieron con las metas propuestas.

Así concluye la intervención en el aula de clase, en donde la experiencia adquirida en la Institución Educativa Julumito fue fundamental en mi formación como docente, puesto que me pude dar cuenta de la manera en que me debo dirigir a un grupo de estudiantes, tratando de ser lo más claro posible en cada una de las explicaciones de los conceptos tratados en cada clase, con el objetivo principal de que los alumnos comprendan el significado de estudiar matemáticas.

4. CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones que surgieron a partir de la experiencia vivida en la Institución Educativa Julumito:

El software educativo permitió mostrar con precisión la curva que representa una ecuación de segundo grado, reflejando los cambios que se originan al modificar los valores de los coeficientes de la ecuación. De esta manera se establecieron las diferencias que presentaron cada una de las gráficas como por ejemplo: vértices, ejes de simetría y los interceptos con los ejes coordenados. Con lo cual se manifiesta que el computador hace posible que los cambios de una representación ayuda a los estudiantes a comparar las relaciones entre ellas.

También la incorporación de los computadores en el salón de clase facilitó la elaboración de nuevas estrategias pedagógicas con el propósito de que los estudiantes adquieran diversas formas de obtener conocimiento. Por esta razón se les concedió el uso de la tecnología como un medio didáctico para alcanzar la comprensión del concepto de ecuaciones de segundo grado y su representación en el plano cartesiano.

La dinámica que se llevó a cabo para que los estudiantes planteen una ecuación de segundo grado hizo que aumentaran su capacidad de comprensión de lectura, puesto que representaron algebraicamente situaciones expresadas en lenguaje cotidiano, resolviendo los interrogantes que se planteaban en cada una de ellas.

Durante el desarrollo de cada una de las sesiones de trabajo se evidenció la disposición que tuvieron los alumnos para aprender nuevas maneras de adquirir conocimientos matemáticos. Es decir, manifestaron interés y dedicación por adaptar una nueva herramienta educativa que les permitió analizar detenidamente los temas que se contemplan en el estudio del concepto de ecuaciones de segundo grado.

Respecto al proceso de la Práctica Pedagógica reconozco que requiere de mucho esfuerzo y dedicación, y como estudiantes debemos conocer con anticipación todo lo referente a ésta, para más adelante evitar dificultades que se presentaron en ésta experiencia formativa. También me acercó con la realidad con la que se convive en la comunidad en cuanto a la educación y permitió darme cuenta que la formación personal del docente es muy importante para ejercer su profesión. Además, el reconocimiento del contexto en el cual se encuentran inmersos tanto la Institución Educativa como los alumnos que la componen es de mucha utilidad, puesto que conseguí adecuar las clases de acuerdo a las condiciones sociocultural y académica de los estudiantes.

Mediante el proceso vivido en la Práctica Pedagógica comprendí que no toda propuesta de estudio se puede desarrollar al pie de la letra, ya que depende principalmente del contexto y a quienes va dirigida, ya que se pueden presentar inconvenientes que hacen necesario cambiar actividades que ya se tenían planeadas.

El razonamiento crítico del presente trabajo en el cual se presentó la descripción del proceso de la Práctica Pedagógica llevado a cabo en la Institución Educativa Julumito me ayudará en un futuro a diseñar de manera adecuada la propuesta metodológica que permita alcanzar los resultados que se pretenden al iniciar el proceso.

Según la opinión de los estudiantes, la metodología utilizada para llevar a cabo el desarrollo de la propuesta metodológica es positiva, ya que en la evaluación docente manifestaron que las clases fueron dinámicas y les permitió tener participación activa en las sesiones, comprendiendo conceptos que no habían asimilado en sus grados anteriores.

Los alumnos del grado décimo de la Institución Educativa Julumito que asistieron regularmente a la academia de matemáticas presentaron un avance, con respecto a los resultados que obtuvieron en las sesiones de nivelación de conocimiento y comprendieron que el estudio de la matemáticas, es un proceso en el cual se deben tener en cuenta conceptos que se aprenden desde el inicio de su formación académica, puesto que para comprender los contenidos sobre ecuaciones de segundo grado se vieron en la necesidad de recordar conceptos que ya habían estudiado en cursos anteriores y que fueron fundamentales para encontrar las soluciones de ecuaciones de este tipo.

BIBLIOGRAFÍA

BROUSSEAU, Guy. «Fondements et méthodes de la didactiques des.» *Recherches en Didactique des Mathématiques* VII, nº 2 (1986): p. 33-115.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares para la Educación Matemática.* Bogotá: MEN, 1999, p. 13-38.

CHEVELARD, Y. Sur l'ingénierie didactique. Texte préparé pour la deuxième Ecole d'Eté de didactique des Mathémaiques. Orléans: Juillet, 1982.

D'AMORE, Bruno. *Didáctica de la Matemática*, Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá – Colombia, 2006, p. 33-53.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO (s.f). Proyecto Educativo Institucional (PEI). Popayán, p. 5.

JARA, Oscar. La sistematización de experiencias y las corrientes innovadoras del pensamiento Latinoamericano_ una aproximación histórica. http://dialogosaberes.ubv.edu.ve/Descargar/article/62/La%20sistematizacion%20de%20experiencias%20y%20las%20corrientes%20innovadoras%20del%20pensamiento%20latinoamericano-una%20aproximacion%20historica.pdf (último acceso: 04 de abril de 2011).

LONDOÑO, Nelson y BEDOYA, Hernando. Serie de matemática progresiva 8º.álgebra y geometría. Segunda edición. Editorial Norma S.A. Colombia: 1993.

MABEL PANIZZA. Conceptos básicos de la teoría de situación didáctica. http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf (último acceso: 12 de Abril de 2011).

MÚNERA, Jhon Jairo. «Construcción de aprendizajes matemáticos desde el enfoque de situaciones problema.» *Formándonos Maestros. Institución Educativa Normal Superior De Envigado*, nº 3 (2006).

OBANDO, Gilberto y MÚNERA Jhon Jairo. *Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática*. http://cmapspublic.ihmc.us/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1171396978406_177445627_21642 (último acceso: 10 de Abril de 2011).

Polya, George. Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas, vigésima quinta reimpresión, México: 2001. p. 17-53.

ANEXOS

Anexo A. Taller diagnóstico

1) Resolver las siguientes operaciones:

a) $2 + (-4) + (-5) - 3 + 7 - (- 4)$

b) $(5 + (-3)) - (60 - 4 + 8 - 2 + 3)$

c) $4 - 3 + 8 - (-12 + (-4))$

d) $4/5 + (1/2 \times 2/5) - 1/10$

e) $(8/7) \div (5/3)$

2) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 3 = x - 4(5 - x) + 11$

b) $9 - 2x = 5x - 19$

c) $x + 3 = 1/2(4x + 8)$

3) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 7y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 3 \\ x/2 + (2/5)\, y = -1 \end{cases}$

4) Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

a) $2a + [a - (a + b)] - 2$

b) $2m - [(m - n) - (m + n)]$

Anexo B. Temario sobre ecuaciones lineales

Objetivo: Al terminar esta lección podrás definir lo que es una ecuación lineal y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Una ecuación es una igualdad que satisface para algún(os) valor(es) de la(s) incógnita(s). Cuando el grado de las variables es uno se dice que es una ecuación lineal. Ejemplos: $12x - 7 = 23$; $4x + 9 = 13 - 2(x + 3)$; $2x + 3 = x - 4(5 - x) + 1$.

Es necesario aclarar que los ejemplos anteriores se resolvieron con el fin de mostrarles a los estudiantes la manera en que se procede para solucionar ecuaciones lineales.

Sistema de ecuaciones lineales: es una expresión que consta de dos o más ecuaciones lineales, cuyo objetivo es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen el sistema. Consideremos los siguientes métodos para resolverlos: sustitución, Igualación y reducción. Tomaremos como referencia el siguiente sistema de ecuaciones lineales para explicar cada uno de los métodos anteriores.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

Método de igualación: Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \textbf{(1)} \\ 3x - y = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Despejemos cualquiera de las incógnitas; por ejemplo x, en ambas ecuaciones.

Despejando x en **(1)**: $2x = 1 - 3y$. Luego, $x = (1 - 3y)/2$. Ahora despejemos x en **(2)** así: $3x = y$. Luego, $x = y/3$. Ahora, se igualan entre si los dos valores de x que hemos obtenido: $(1 - 3y)/2 = (y/3)$. Y ya tenemos una sola ecuación con una incógnita; hemos eliminado a x. resolviendo esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 3(1 - 3y) &= 2y \\ 3 - 9y &= 2y \\ 2y + 9y &= 3 \\ 11y &= 3 \\ y &= 3/11 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en **(2)**, se tiene: $3x - 3/11 = 0$. De donde, $3x = 3/11$. Así que $x = 1/11$.

Respuesta:

$$\begin{cases} x = 1/11 \\ y = 3/11 \end{cases}$$

Prueba: Sustituyendo los valores obtenidos en las dos ecuaciones dadas, ambas se convierten en una identidad. En la ecuación **(1)** se tiene:

$$\begin{aligned} 2(1/11) + 3(3/11) &= 1 \\ 2/11 + 9/11 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Ahora reemplacemos dichos datos en la ecuación **(2)**:

$$\begin{aligned} 3(1/11) - 3/11 &= 0 \\ 3/11 - 3/11 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Como en ambas ecuaciones obtuvimos identidades, es decir 1 = 1 y 0 = 0, entonces los valores encontrado de las variables x e y son los correctos y se dice que son la solución del sistema.

Método por sustitución: Resolvamos el sistema anterior:

Despejemos una cualquiera de las incógnitas, por ejemplo x, en una de las ecuaciones. Vamos a despejarla en la ecuación **(1)**. De esta manera se obtiene: $x = (1 - 3y)/2$. Este valor de x se sustituye en la ecuación **(2)**:

$$\begin{aligned} 3[(1 - 3y)/2] - y &= 0 \\ 3 - 9y - 2y &= 0 \\ 3 - 11y &= 0 \end{aligned}$$

Esto es, $y = 3/11$. Luego, sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en **(2),** se tiene: $3x - 3/11 = 0$, esto es $3x = 3/11$. Así que, $x = 1/11$

Respuesta:

$$\begin{cases} x = 1/11 \\ y = 3/11 \end{cases}$$

La prueba de que los valores encontrados de x e y se verificaron.

Método por reducción: Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \textbf{(1)} \\ 3x - y = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

En este método se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas. Igualemos los coeficientes de y, multiplicando la ecuación **(2)** por 3.

$2x + 3y = 1$
$9x - 3y = 0$

Como los coeficientes de y que hemos igualado tiene signos distintos, se suman estas ecuaciones porque con ello se elimina y, efectuando dicho proceso se obtiene: $11x = 1$. Luego, $x = 1/11$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en **(2)** se tiene: $3(1/11) - y = 0$. En consecuencia, $y = 3/11$

Respuesta:

$$\begin{cases} x = 1/11 \\ y = 3/11 \end{cases}$$

La prueba de que los valores encontrados de x e y se verificaron.

Finalmente se van a proponer algunos ejercicios relacionados con los temas tratados, con el fin de afianzar los conocimientos adquiridos.

Ejercicio (I):

1) Resolver la siguiente ecuación lineal realizando la prueba: $x\ (7 + (-2)) = -1$

2) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

Método gráfico

Resolvamos gráficamente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = -2 & \textbf{(1)} \\ x + y = 4 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Primer paso: Despejamos el valor de *y* en la ecuación **(1)** y elaboramos una tabla dando a *x* valores arbitrarios: x - y = - 2, luego y = x + 2 **(3)**

x	-1	0	1	2
y	1	2	3	4

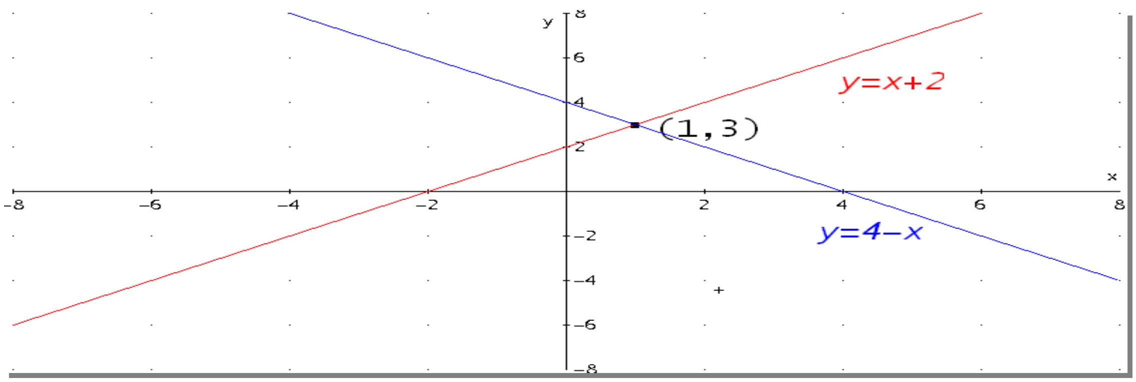
(4)

Segundo paso: Despejemos el valor de *y* en la ecuación **(2)** y elaboremos una tabla de valores, dándole a *x* valores arbitrarios: x + y = 4, luego y = 4 – x **(5)**

x	-2	0	1	3
y	6	4	3	1

(6)

Tercer paso: Ubicamos en el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabulación:



Como puedes observar, el punto de intersección de las rectas (1,3), lo que equivale a decir que la solución del sistema es x = 1, y = 3.

Ahora resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 3 & \textbf{(1)} \\ x + y = -4 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

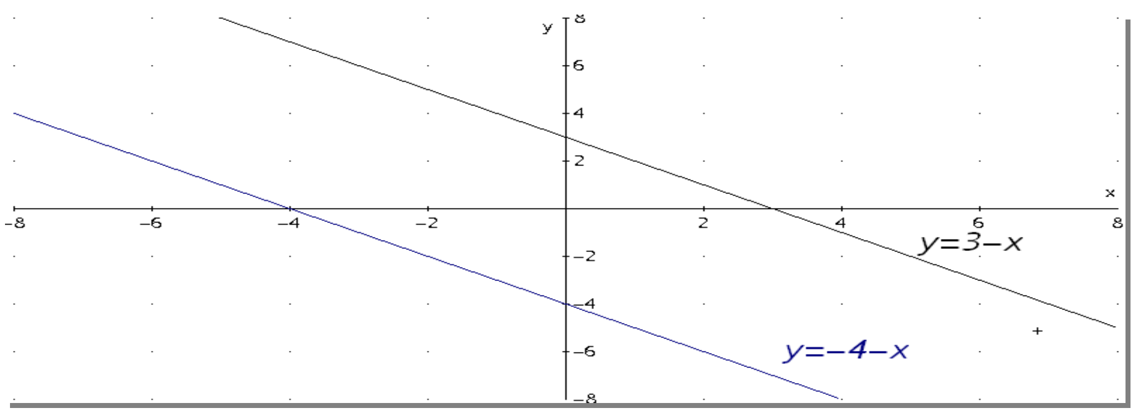
Primer paso: Despejamos el valor de *y* en la ecuación **(1)** y elaboramos una tabla dando a *x* valores arbitrarios: x + y = 3, luego y = 3 – x **(3)**

x	-1	0	1	2	**(4)**
y	4	3	2	1	

Segundo paso: Despejemos el valor de *y* en la ecuación **(2)** y elaboremos una tabla de valores, dándole a *x* valores arbitrarios: x + y = -4, luego y = -4 – x **(5)**

x	-2	0	1	3	**(6)**
y	-2	-4	-5	-7	

Tercer paso: Ubicamos en el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabulación:



Como puedes observar las rectas son paralelas, es decir, no se cortan en ningún punto, en consecuencia el sistema no tiene solución.

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 & \textbf{(1)} \\ x - y = 2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Primer paso*:* Despejamos el valor de *y* en la ecuación **(1)** y elaboramos una tabla dando a *x* valores arbitrarios: 2x - 2y = 4, luego y = x – 2 **(3)**

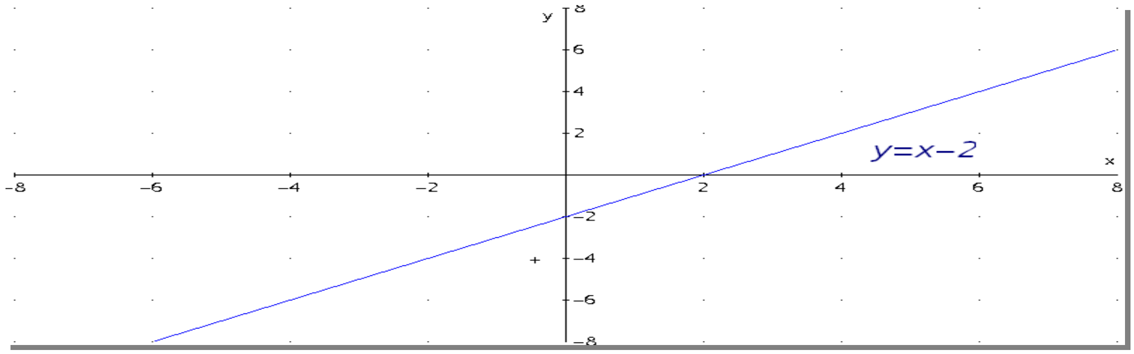
x	-1	0	1	2	**(4)**
y	-3	-2	-1	0	

Segundo paso: Despejemos el valor de *y* en la ecuación **(2)** y elaboremos una tabla de valores, dándole a *x* valores arbitrarios: x - y = 2, luego y = x – 2 **(5)**

x	-2	0	1	3
y	-4	-2	-1	1

(6)

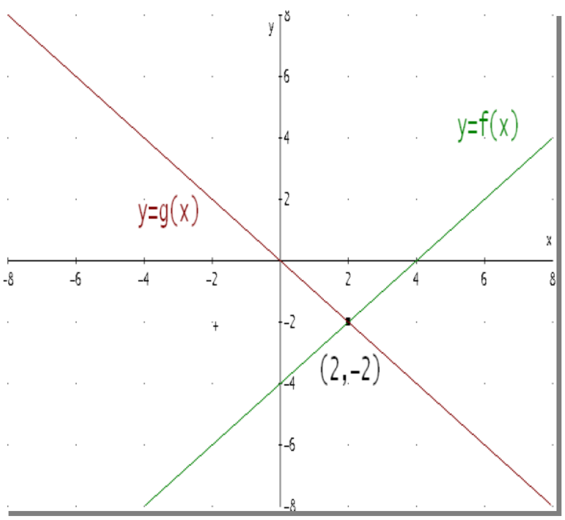
Tercer paso: Ubicamos en el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabulación:



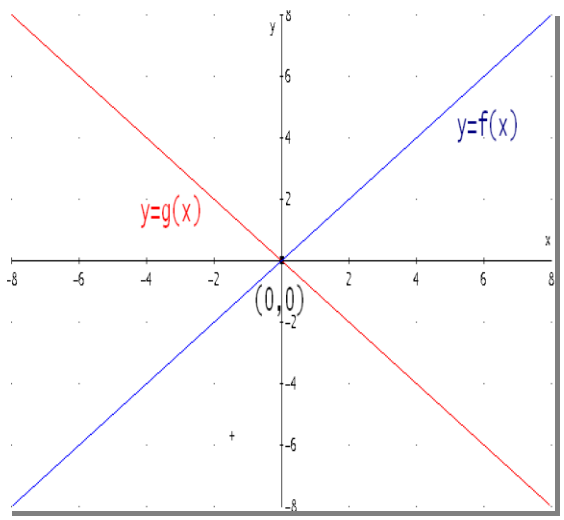
Como las ecuaciones **(3)** y **(5)**, son equivalentes, esto es, generan la misma recta, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejercicio (II): Según la gráfica, diga cuál es la solución del sistema y ¿por qué?

(1)



(2)



Anexo C. Ejercicios sobre sistemas de ecuaciones lineales:

Resolver, por el método gráfico los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x/4 + 5y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

Anexo D. Temario sobre expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de símbolos representativos de números reales, mediante las operaciones suma, diferencia, producto y cociente. Ejemplo: la expresión $4x + 3(x - (y – z))$, donde x, y, z son números reales es una expresión algebraica.

Observaciones: El producto de m y n se escribe mn, o sea que, el signo “x” de multiplicación se omite en la escritura algebraica. Las letras usadas en las expresiones algebraicas se llaman variables. Las cantidades separadas por los signo + o – se llaman términos de la expresión algebraica. Por ejemplo: la expresión $2x – 3y +1$ tiene tres términos. Cada término consta de: signo, coeficiente y parte literal. Digamos que en el término $-4x^2y$; el signo es negativo, el coeficiente 4 y la parte literal x^2y.

Clasificación de las expresiones algebraicas

Monomio: es una expresión algebraica que consta de un sólo término. Ejemplos: $3m$, $-5v$, $24x^3y^3z$.

Polinomio: es una expresión algebraica que consta de más de un término.

Ejemplos: $a + b$, $2x + 3y$, $x^3yz + y^2zx^3 – 12x + 3y – 1$.

Binomio: es un polinomio que consta de dos términos. Ejemplos: $y – x$, $x^2 – y^2$, $y^2 + z^3$.

Trinomio*:* es un polinomio que consta de tres términos. Ejemplos: $x^2 + y^2 + z^2$, $a + b – c$, $x^2 – 8x – 3$

Suma de polinomios: Ejemplo: sumar $3x^2 – 4xy + y^2$; $-5xy + 6x^2 – 3y^2$; $-6y^2 – 8xy – 9x^2$. Para sumar polinomios agrupamos términos semejantes así: $(3x^2 + 6x^2 – 9x^2) + (– 4xy -5xy – 8xy) + (y^2 – 3y^2 -6y^2) = -17xy – 8y^2$

Resta de polinomios: Ejemplo: de $4x – 3y + z$ restar $2x + 5z – 6$

$$4x – 3y + z – (2x + 5z – 6) = 4x – 3y + z – 2x - 5z + 6 = (4x – 2x) -3y + (z – 5z) +6$$
$$= 2x - 3y – 4z + 6.$$

Ejercicio: Dados los siguientes polinomios: $P = -4(3(x – 2y) – 5(x + y))$ y $Q = 2x – 5y$, realizar la operación $P – Q$.

Multiplicación de monomios: analicemos los siguientes ejemplos:

1. Multiplicar: $2m^2$ por $3m^3$
   $(2m^2)(3m^3) = 6m^{2+3} = 6m^5$.

2. Multiplicar: $-xy^2$ por $-5mx^4y^3$.
   $(-xy^2)(-5mx^4y^3) = 5mx^{1+4}y^{2+3} = 5mx^5y^5$.

Multiplicación de polinomios por monomios: analicemos el siguiente ejemplo: multiplicar $3x^2 – 6x + 7$ por $4ax^2$

$$\begin{aligned}(3x^2 – 6x + 7)(4ax^2) &= 3x^2(4ax^2) – 6x(4ax^2) + 7(4ax^2).\\ &= 12ax^4 – 24ax^3 + 28ax^2.\end{aligned}$$

Multiplicación de polinomios por polinomios: analicemos los siguientes ejemplos:

1. Multiplicar $(x – 4)$ por $(3 + x)$

$$\begin{aligned}(x – 4)(3 + x) &= 3(x) + (x)(x) – 12 – 4(x)\\ &= 3x + x^2 – 12 – 4x\\ &= x^2 – x – 12.\end{aligned}$$

2. Multiplicar $(4x – 3y)$ por $(– 2y + 5x)$

$$\begin{aligned}(4x – 3y)(–2y + 5x) &= (4x)(-2y) + (4x)(5x) – (3y)(-2y) – (3y)(5x)\\ &= -8xy + 20x^2 + 6y^2 – 15xy\\ &= -23xy + 20x^2 + 6y^2\\ &= 20x^2 -23xy + 6y^2\end{aligned}$$

Cociente de monomios: analicemos los siguientes ejemplos:

1. Dividir $4m^3n^2$ entre $-2mn$
   $4m^3n^2 / -2mn = (4 /-2)\, m^{3-1}\, n^{2-1} = -2m^2n$

2. Dividir $-5x^4y^3z$ entre $–x^2y$
   $-5x^4y^3z /–x^2y = 5x^{4-2}y^{3-1}z = 5x^2y^2z$

División de polinomios por monomios: analicemos el siguiente ejemplo:

Dividir $(3x^3 – 6x^2y + 9xy^2)$ entre $3x$

$3x^3 – 6x^2y + 9xy^2 / 3x = (3x^3 / 3x) – (6x^2y / 3x) + (9xy^2 / 3x) = x^2 – 2xy + 3y^2$.

División de dos polinomios: En la clase se desarrollaron los siguientes ejemplos para mostrar el algoritmo de la división entre dos polinomios.

1) Dividir $(3x^2 + 2x - 8)$ entre $(x + 2)$

2) Dividir $(28m^2 - 30n^2 - 11mn)$ entre $(4m - 5n)$

3) Dividir $(2x^3 - 2 - 4x)$ entre $(2 + 2x)$

4) Dividir $(3p^5 + 10p^3q^2 - 21p^4q + 32pq^4)$ entre $(p^3 - 4pq^2 - 5p^2q)$

5) Dividir $(11x^3 - 3x^5 - 46x^2 + 32)$ entre $(8 - 6x - 3x^2)$

Métodos para factorizar polinomios: estudiemos algunos casos de factorización:

I. Factor común: analicemos los siguientes ejemplos:

Factorizar las siguientes expresiones:

1) $4x^3 - 8x^2 = 4x^2 (x - 2)$
2) $5mx^3 - 10mx = 5mx (x^2 - 2)$
3) $y^4 /2 + 3y^5 /2 + 5y^6 /2 = y^4/2 (1 + 3y + 5y^2)$

II. Factor común por agrupación de términos: consideremos los siguientes ejemplos:

1) Factoricemos: $xz + yz + xu + yu = (xz + yz) + (xu + yu)$
$= z (x + y) + u (x + y)$
$= (x + y) (u + z)$

2) Factoricemos: $ab + 2a + 3b + 6 = (ab + 2a) + (3b + 6)$
$= a (b +2) + 3 (b + 2)$
$= (b + 2) (a + 3)$

3) $4ax (x^2 + 1) + a (x^2 + 1) = (x^2 + 1) (4ax + a)$
$= (x^2 + 1) a (4x + 1)$
$= a (4x + 1) (x2 + 1)$

4) $3x^3 + x^2 + 6xy + 2y = (3x^3 + x^2) + (6xy + 2y)$
$= x^2 (3x + 1) + 2y (3x + 1)$
$= (x^2 + 2y) (3x +1)$

III. Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Un trinomio es *cuadrado perfecto* cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, es el producto de dos binomios iguales. Así, $a^2 + 2ab + b^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de a + b. En efecto, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Regla para conocer si un trinomio es cuadrado perfecto

Un trinomio ordenado con relación a una variable es *cuadrado perfecto* cuando el primer y tercer término son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas. Por ejemplo, el trinomio $a^2 + 2ab + b^2$ es cuadrado perfecto, ya que:

Raíz cuadrada de $a^2 = a$
Raíz cuadrada de $b^2 = b$
El doble productos de estas raíces es 2ab, que es el segundo término del trinomio

Regla para factorizar un trinomio cuadrado perfecto
Factorizar $m^2 + 2m + 1$

Verificar que en efecto el trinomio es cuadrado perfecto:

Raíz cuadrada de $m^2 = m$
Raíz cuadrada de 1 = 1
El doble productos de estas raíces es 2m, que es el segundo término del trinomio.
En consecuencia $m^2 + 2m + 1 = (m +1)(m + 1) = (m + 1)^2$

IV. Diferencia de cuadrados perfectos

Ejemplo: factorizar los siguientes binomios:

1) $1 – y^2 = (1 + y)(1 – y)$

Es decir la diferencia de cuadrados perfectos es el producto de la suma por la diferencia de sus raíces cuadradas.

2) $16x^2 – 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$
3) $m^2 /4 – n^4/9 = (m/2 + b^2/3)(m/2 - b^2/3)$

V. Suma y diferencia de cubos

Los siguientes ejemplos se desarrollaron en clase para mostrar la manera en que se factorizan una suma y diferencia de cubos.

1) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 – xy + y^2)$
2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

3) $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
4) $8m^6 + n^3 = (2m^2 + n)(4m^4 – 2m^2n + n^2)$
5) $8x^6 – 27y^{12} = (2x^2 – 3y^4)(4x^4 + 6x^2y^4 + 9y^8)$

VI. Factorización de trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$

Ejemplo 1: Si deseamos factorizar con coeficientes enteros, el trinomio $x^2 + 5x + 6$, debemos tratar de escribir $x^2 + 5x + 6 = (x + a)(x + b)$. Esto quiere decir que debemos encontrar dos números enteros a y b tales que su producto sea 6 y su suma sea 5. Es decir, $ab = 6$ y $a + b = 5$. Los únicos dos números enteros que cumplen estas condiciones son: $a = 3$ y $b = 2$. Luego, la descomposición en factores de $x^2 + 5x + 6$, con coeficientes enteros será: $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$.

Ejemplo 2: Si deseamos factorizar con coeficientes enteros, el trinomio $x^2 + 2x – 15$, debemos tratar de escribir $x^2 + 2x – 15 = (x + a)(x + b)$. Esto quiere decir que debemos encontrar dos números enteros a y b tales que su producto sea -15 y su suma sea 2. Es decir, $ab = -15$ y $a + b = 2$. Los únicos dos números enteros que cumplen estas condiciones son: $a = 5$ y $b = -3$. Luego, la descomposición en factores de $x^2 + 2x – 15$, con coeficientes enteros será: $x^2 + 2x – 15 = (x + 5)(x - 3)$.

VII. Factorización de trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$

Factoricemos $6x^2 - 7x – 3$ realizando los siguientes pasos:

a) Multipliquemos el trinomio por el coeficiente de x^2, que es 6.

$6(6x^2 - 7x – 3) = 36x^2 – 6(7x) – 18$

b) Descomponer el trinomio que hemos obtenido como en el caso de factorización anterior, esto es: $36x^2 – 6(7x) – 18 = (6x - 9)(9x + 2)$

c) Como al inicio multiplicamos por 6, ahora dividamos entre 6 así:

$(6x – 9)(9x + 2)/6$. Pero como ninguno de los dos binomios es divisible por 6 entonces notemos: $6 = 3(2)$. Luego, $(6x – 9)(9x + 2)/3*2 = (2x – 3)(3x + 1)$. En consecuencia, $6x^2 – 7x – 3 = (2x – 3)(3x + 1)$

Ejercicio: utilizando un método similar al anterior, factorizar los siguientes trinomios:

1) $20y^2 + 7y – 6$
2) $18m^2 – 13m – 5$

Anexo E. Prueba escrita sobre polinomios

Punto1: Realice las siguientes operaciones:

a) $(m^2 – 11m + 30) \div (m – 6)$

b) $(3y^3 + 5 – 6y) (y^2 + 2)$

c) $(6x^8y^8 – 3x^6y^6 – x^2y^3) / (3x^2y^3)$

Punto 2: Diga cuáles de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos:

a) $y^4 + 2y^2 + 1$

b) $x^2 – 2x + 1$

c) $a^2 – 4ab + 4b^2$

Punto 3: Factorizar las siguientes expresiones:

a) $1 – 4m^2$

b) $4c^3x – 4c^2b + 3bm – 3cmx$

c) $x^2 – 7x – 30$

d) $6x^2 + 7x + 2$

e) $x^6 – y^9$

…Éxitos…

Anexo F. Sesiones de trabajo

Primera sesión: Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Objetivo: Familiarizar a los estudiantes con el concepto de ecuación de segundo grado y el significado de resolver ecuaciones de este tipo.

Ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada; el mayor exponente de la incógnita es dos. Por ejemplo $4x^2 + 7x + 6 = 0$ es una ecuación de segundo grado.

Ecuaciones completas de segundo grado son ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, que tiene un término en x^2; un término en x y un término independiente de x. Así, $2x^2 + 7x – 15 = 0$ y $x^2 – 8x = 15$ ó $x^2 – 8x – 15 = 0$ son ecuaciones completas de segundo grado.

Ecuaciones incompletas de segundo grado son de la forma $ax^2 + bx = 0$ que carecen del término independiente ó de la forma $ax^2 + c = 0$ que carecen del término en x. Por ejemplo: $x^2 – 16 = 0$ y $3x^2 + 5x = 0$ son ecuaciones incompletas de segundo grado.

Raíces de una ecuación de segundo grado: Son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación. Toda ecuación de segundo grado tiene dos raíces. Así las raíces de la ecuación $x^2 – 2x – 3 = 0$ son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$; ambos valores satisfacen ésta ecuación. Resolver una ecuación de segundo grado es hallar las raíces de la ecuación.

Solución de ecuaciones completas de segundo grado aplicando la fórmula general: La fórmula general que se utiliza para resolver ecuaciones de segundo grado es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ a \neq 0$$

Verifiquemos que en efecto, las raíces de la ecuación $x^2 – 2x – 3 = 0$ utilizando la fórmula general:

$x = [- (-2) \pm \sqrt{(-2)^2 – 4(1)(-3)}] / 2(1) = 2 \pm \sqrt{4 + 12} / 2 = (2 \pm \sqrt{16})/2 = (2 \pm 4)/2$
$\mathbf{x_1} = (2 + 4) / 2 = 3$; $x_2 = (2 - 4) / 2 = -1$

Otra forma de resolver la ecuación es Factorizando el trinomio: $x^2 – 2x – 3$ buscando dos números (enteros) cuyo producto sea -3 y suma -2. Dichos números son: -3 y 1. Luego, $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$. De donde $x - 3 = 0$; $x + 1 = 0$; es decir; $x = 3$; $x = -1$ que son las raíces de la ecuación dada.

Solución de ecuaciones incompletas de segundo grado: Resolver la ecuación $x^2 + 5 = 7$, esto es $x^2 = 2$, de donde $x = \pm\sqrt{2}$.

Resolver la ecuación: $5x^2 + 3x = 0$. De donde, mediante factor común se tiene lo siguiente: $x(5x + 3) = 0$; es decir $x = 0$; $5x + 3 = 0$; con lo cual $x = -3/5$. En consecuencia, las raíces de la ecuación dada son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -3/5$.

Mediante el desarrollo de los temas mencionados, en el transcurso de la clase se llevará la dinámica de que los alumnos resuelvan ejercicios en el tablero con el fin de comprobar si realmente están entendiendo los conceptos.

Finalmente se llevará a cabo el siguiente trabajo en grupo (máximo 4 personas), con el objetivo de analizar la comprensión de los temas tratados en la sesión.

Taller en clase: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 + 7x - 4 = 0$
b) $x^2 + 7x = 18$
c) $7x^2 - 14 = 0$
d) $x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$

Segunda sesión: representación y solución gráfica de ecuaciones de segundo grado

Objetivo: Facilitar al estudiante un método gráfico para la solución de ecuaciones de segundo grado, de tal manera que, mediante el análisis de la gráfica correspondiente determinen que las soluciones de la ecuación puesta en referencia son los interceptos con el eje y.

Antes de iniciar con la parte gráfica, vamos a resolver ciertos problemas en los cuales nos dan las raíces de la ecuación y el ejercicio es encontrar la respectiva ecuación.

Observación: la suma de las raíces de toda ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$ es igual al coeficiente del segundo término con el signo cambiado y el producto es igual al tercer término con su propio signo. Por ejemplo: las raíces de una ecuación de segundo grado son 3 y -5. Determinar la ecuación.

De acuerdo a la observación se tiene lo siguiente: Suma de las raíces: $3 + (-5) = 3 - 5 = -2$. Producto: $3(-5) = -15$. La suma de las raíces es -2, luego el coeficiente del segundo término de la ecuación será 2; el producto de las raíces es -1, luego, -15 será el tercer término de la ecuación. Por lo tanto, la ecuación será:

$x^2 + 2x – 15 = 0$. Ahora vamos a proponer dos ejercicios de este estilo, con el objetivo de que los estudiantes participen activamente en la clase.

Ejercicios:

Las raíces de una ecuación son 2 y -3/4. Determinar la ecuación.

Hallar la ecuación cuyas raíces son -4 y -3/5.

Continuando con los temas indicados, vamos a estudiar la forma de graficar en el plano cartesiano, en nuestro caso tendremos como referencia ecuaciones de segundo grado, de tal manera que cada alumno pueda determinar con la mayor claridad del caso, cuáles son las raíces de la ecuación puesta en desarrollo, vamos a realizar dicha actividad sin utilizar el método de tabulación.

Para la segunda parte de la sesión se van a proponer ciertos ejercicios, con el fin de que los estudiantes se apropien del tema tratado, y la dinámica será que los desarrollen o los expongan en el tablero.

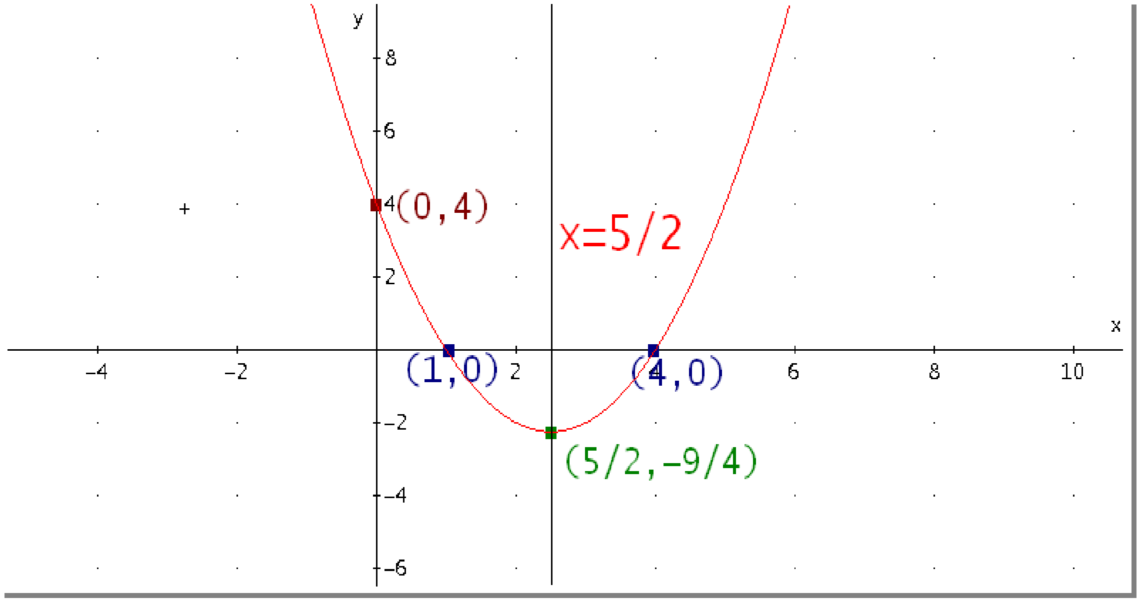
Finalmente vamos a proponer ejercicios, para ser resueltos grupalmente para analizar el resultado del trabajo desarrollado.

Toda ecuación de segundo grado con una sola incógnita en x representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje de las ordenadas. Ejemplo: Representar y resolver gráficamente la ecuación: $x^2 – 5x + 4 = 0$. Igualando la función a y tenemos: $y = x^2 – 5x + 4$. Para realizar la gráfica vamos a calcular los siguientes datos:

Vértice de la parábola: el vértice lo vamos a calcular con la siguiente expresión: $x = -(b / 2a)$. Para encontrar el valor de la ordenada reemplazamos el valor encontrado anteriormente en la respectiva ecuación. Esto es: para la ecuación dada tenemos que $b = -5$; $a = 1$, luego $x = - (-5 / 2(1)) = 5/2$. Reemplazando este valor en la ecuación $y = x^2 – 5x + 4$, obtenemos:

$y = (5/2)^2 – 5(5/2) + 4 = 25/4 – 25/2 +4 = (25 – 50 + 16)/4 = - 9/4$.

En conclusión el vértice de la parábola es el punto (5/2, -9/4). El eje de simetría será la recta $x = 5/2$. Los interceptos con el eje x serán las raíces de la ecuación, es decir cuándo y es igual a cero, esto es (1,0); (4,0). Los interceptos con el eje y serán cuando x sea igual a cero, es decir (0,4). Luego representaremos dichos puntos en el plano cartesiano y el resultado será una parábola.

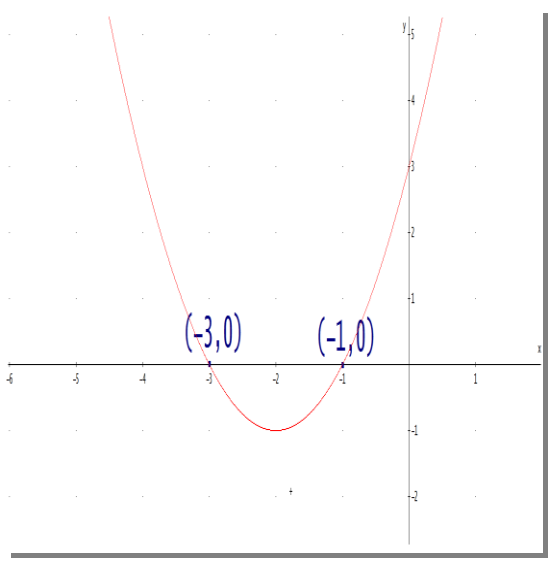


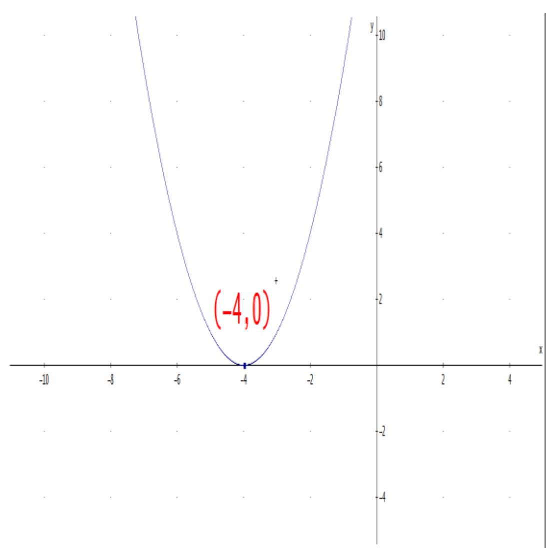
Los ejercicios son los siguientes:

I. Representar gráficamente, ubicando el vértice, eje de simetría, interceptos con los ejes y señalar claramente las raíces de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$
b) $x^2 - 4 = 0$
c) $x^2 = 3x + 10$

II. De acuerdo a las siguientes gráficas, encontrar la ecuación que representa:





Tercera sesión: problemas que se resuelven por ecuaciones de segundo grado.

Objetivo: Analizar detalladamente la capacidad de los estudiantes en el instante de interpretar un problema, para luego plantear la respectiva ecuación, que mediante su correcta solución dará la respuesta a un determinado problema.

La dinámica de esta sesión es resolver diferentes tipos de problemas, cuya solución se determina por medio de un buen planteamiento y solución de ecuaciones de segundo grado.

En esta sesión se plantearán ciertos problemas que van a ser desarrollados de manera individual y grupal, con el fin de que los estudiantes expongan la respectiva solución.

Cuando el planteo de un problema da origen a una ecuación de segundo grado, al resolver esta ecuación se obtienen dos valores para la incógnita. Solamente se aceptan como soluciones del problema los valores de la incógnita que satisfagan las condiciones del problema y se rechazan los que no se cumplan.

Ejemplos:

- ✓ **María Guadalupe tiene dos años más que Iker Lorenzo y la suma de los cuadrados de ambas edades es 130 años. Hallar ambas edades.**

Sea x: edad de María Guadalupe, entonces $x – 2$: edad de Iker Lorenzo

Según las condiciones: $x^2 + (x – 2)^2 = 130$

Simplificando se obtiene $x^2 – 2x – 63 = 0$

Resolviendo $(x – 9) (x + 7) = 0$, de donde $x = 9$; $x = -7$

Se rechaza la solución $x = -7$ porque la edad de María Guadalupe no puede ser -7 años y se acepta $x = 9$. Entonces María Guadalupe tiene 9 años e Iker Lorenzo tiene $x – 2 = 7$ años

- ✓ **La longitud de un terreno rectangular es doble que el ancho. Si la longitud se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se hace doble. Hallar las dimensiones del terreno.**

Sea x: ancho del terreno. Entonces 2x: longitud del terreno

El área del terreno es: $x (2x) = 2x^2$

Aumentando la longitud en 40 m. ésta sería $(2x + 40)$ m; y aumentando el ancho en 6m. Éste sería $(x + 6)$ m.

El área ahora sería $(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240m^2$; pero según las condiciones, ésta nueva área sería doble que la anterior $2x^2$; luego, tenemos la ecuación: $2x^2 + 52x + 240m^2 = 4x^2$

Transponiendo y reduciendo: $-2x^2 + 52x + 240m^2 = 0$
Multiplicando por (-1) y dividiendo por 2 se tiene: $x^2 - 26x - 120 = 0$
Resolviendo la ecuación: $x = 30$ y $x = -4$. Aceptando la solución $x = 30$, entonces el ancho del terreno es 30 metros y la longitud es $2x = 60$ metros.

- ✓ **La diferencia de precios de dos automóviles es de 7 euros, y su suma, multiplicada por el precio del automóvil más barato equivale a 184 euros. ¿cuál es el precio de cada automóvil?**

Sea x: precio del automóvil más costoso

Sea $x - 7$: precio del automóvil más barato

Luego,

$$(x + x - 7)(x - 7) = 184$$
$$(2x - 7)(x - 7) = 184$$
$$2x^2 - 14x - 7x + 49 = 184$$

Resolviendo la ecuación planteada, obtenemos las siguientes soluciones:
$2x^2 - 21x - 135 = 0$; se tienen las siguientes raíces: $x_1 = 15$; $x_2 = -9/2$. Según el problema rechazamos la opción -9/2, puesto que no existen precios negativos, en consecuencia el precio del automóvil más costoso es 15 euros y por ende el precio del más barato es 7 euros.

Problemas propuestos:

- ✓ Un ingeniero necesita construir una sala, las instrucciones para su elaboración son las siguientes: la longitud de la sala debe exceder a su ancho en cuatro metros. Si cada dimensión se aumenta en cuatro metros el área será doble. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la sala?

- ✓ Juan fue al mercado a comprar guayabas y naranjas, esto fue lo que le dijo al vendedor: necesito cierta cantidad de guayabas y naranjas de tal forma que la suma de todas las frutas sea 23 y el producto sea 102. ¿Cuántas manzanas y naranjas le deben entregar el vendedor?

- ✓ María, Juan y Carmen obtuvieron los tres primeros lugares en un concurso de dibujo, en donde María ocupó el primer lugar, Juan el segundo y Carmen el tercer puesto. El premio es una cierta cantidad de lapiceros finos que serán repartidos de la siguiente manera: la cantidad de lapiceros de cada uno de ellos debe corresponder a tres números consecutivos, de tal forma que el cociente del premio mayor entre el premio menor corresponda a los 3/10 del premio del segundo lugar. ¿Cuántos lapiceros le corresponde a cada uno?

- ✓ Luis necesita comprar cuadernos y lapiceros, pero está muy ocupado en su trabajo; por ésta razón le pide el favor a su hijo Juan que vaya a la papelería y los compre, Juan hace la siguiente pregunta: ¿padre, cuántos cuadernos y lapiceros debo comprar? Luis responde: si multiplicas la cantidad de cuadernos por la cantidad de lapiceros obtendrás un total de 180, y si divides ambas cantidades el resultado debe ser 5/4. ¿Cuántos cuadernos y lapiceros debe traer Juan?

- ✓ Alicia le pide a sus padres dinero para salir de paseo con su hermano menor, ellos le entregan cierta cantidad de pesos y le piden que los reparta con su hermano de tal forma que al multiplicar las dos cantidades de dinero logre como resultado 352 pesos y que a ella le corresponde la parte mayor de la distribución, de manera que al dividirla entre el dinero que le corresponde a su hermano obtenga como cociente 2 y residuo 10. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno?

- ✓ Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos.

- ✓ Héctor está ahorrando dinero para irse de rumba el próximo fin de semana, en este momento la cantidad de dinero de Héctor corresponde al cuadrado de los ahorros de María, su hermana. Héctor abonó 24 euros más a su cuenta, así el total de dinero ahorrado por Héctor será el doble de la cantidad de dinero que tiene su hermana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Universidad del Cauca	**Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación** **Departamento de Matemáticas.** **Diego Armando Daza** **SESIÓN 4: Guía 1**	**Institución Educativa Julumito** **Popayán** **Grado 10º**

1) Realizar las siguientes operaciones:

a) $2 - 8\,(5 - (3x4))$

b) $5/4 + 7/5 - 1/2\,(1/2 - 10/4)$

2) Simplificar las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - x)\,(x - 2) - (x^3 + 2x^2)$

b) $-3x\,(x^2 - 1) - 3x^3 - (3x + 1)$

3) Sumar $x^2 - 3xy$ con $3xy - y^2$ y al resultado restarle x^2.

4) Teniendo en cuenta la siguiente expresión:

$3(a+b) - 4(c - d) + \sqrt{(c - d)/-a}$

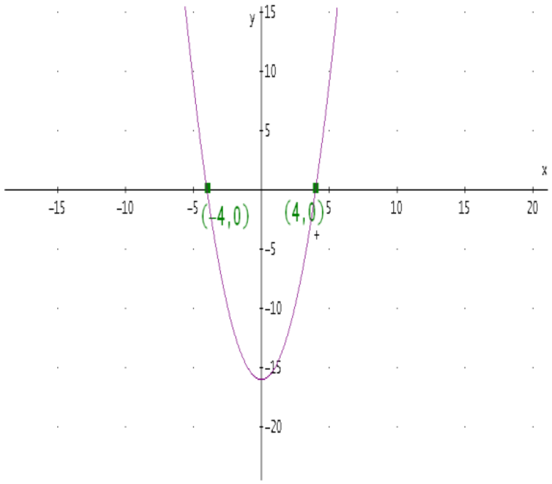
Considerando los siguientes valores:

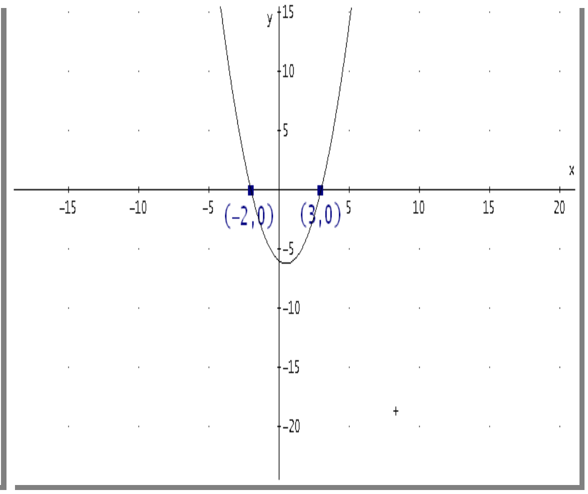
$a = 2;\ b = 3;\ c = 1;\ d = 3$

Calcule el valor numérico de dicha expresión

Universidad del Cauca	**Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación** **Departamento de Matemáticas.** **Diego Armando Daza** **SESIÓN 5: Guía 2**	**Institución Educativa Julumito** **Popayán** **Grado 10º**

1) De acuerdo con las siguientes gráficas, encontrar la ecuación que corresponde a cada una de ellas.





Mediante el programa Derive 6, representar en el plano cartesiano las gráficas de las ecuaciones obtenidas.

Ubicar cada ecuación con su respectiva gráfica

2) Represente gráficamente las siguientes ecuaciones de segundo grado, identificando los interceptos con los ejes coordenados, ejes de simetría, vértices, sin utilizar el programa Derive 6.

a) $x^2 + 7x = 18$

b) $x^2 – 2x – 3 = 0$

3) Repetir el proceso anterior con la ayuda del programa Derive y comparar los resultados obtenidos.

4) ¿Es necesario el uso de herramientas tecnológicas para resolver gráficamente ecuaciones de segundo grado? ¿Por qué?

Universidad del Cauca	**Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación** **Departamento de Matemáticas.** **Diego Armando Daza** **SESIÓN 6: Guía 3**	**Institución Educativa Julumito** **Popayán** **Grado 10º**

1) Graficar las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano: $y = x^2$; $y = x^2 + 2$; $y = x^2 – 3$**;** y completa la siguiente tabla:

Funciones	$y = x^2$	$y = x^2 + 2$	$y = x^2 – 3$
Vértice			
Eje de simetría			
Puntos de intersección con los ejes x e y			

2) Graficar las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano: $y = x^2$; $y = (x – 1)^2 + 2$; $y = (x + 3)^2 - 1$ y completa la siguiente tabla:

Funciones	$y = x^2$	$y = (x – 1)^2 + 2$	$y = (x + 3)^2 - 1$
Vértice			
Eje de simetría			
Puntos de intersección con los ejes x e y			

3) Graficar la ecuación $y = -3x^2 + 2x + 1$, y responder:

a) ¿Hacia dónde está abierta la parábola?
b) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
c) ¿Cuál es el eje de simetría?
d) ¿Cuáles son los puntos de intersección de la parábola con los ejes x e y?

Universidad del Cauca	**Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación** **Departamento de Matemáticas.** **Diego Armando Daza** **SESIÓN 7: Guía 4**	**Institución Educativa Julumito** **Popayán** **Grado 10º**

1) Resolver las siguientes ecuaciones con ayuda del programa Derive 6.

a) $6/x^2 – 9/x + 4/3 = 0$

b) $(x – 2)^2 – (2x + 3)^2 + 80 = 0$

2) Sin utilizar el programa Derive 6, resolver la siguiente ecuación:

$2x^2 + 4x – 4 = x^2 + 9x + 200$

Ahora, encontrar las raíces utilizando Derive 6 y comparar los resultados obtenidos.

3) De acuerdo a la solución de cada una de las siguientes ecuaciones, completar el siguiente cuadro, es decir, ubicar en los paréntesis la posición de cada ecuación dependiendo las raíces obtenidas.

(a) $3x^2 = 48$	( )	$x_1 = 4; x_2 = -4$
(b) $5x^2 + 4 = 2 (x + 2)$	( )	$x_1 = 1; x_2 = 3$
(c) $(4x – 1) (2x + 3) = (x + 3) (x – 1)$	( )	$x_1 = 0; x_2 = 2/5$
(d) $x^2 = 3x + 10$	( )	$x_1 = 0; x_2 = -8/7$
(e) $x^2 – 4x + 3 = 0$	( )	$x_1 = -2; x_2 = 5$

Anexo G. Evaluación docente

Apreciados estudiantes requerimos de su colaboración para que la presente evaluación se convierta en un instrumento valioso para mejorar nuestra labor docente. Por tanto, le solicitamos que responda de manera sincera y responsable el siguiente cuestionario acerca del trabajo que realizamos en matemáticas durante el año lectivo 2010.

Nombre Docente: ____

¿Cree usted que el trabajo realizado en el año lectivo fue útil e importante para su desempeño en matemáticas?

Si _____ No. ______ ¿Por qué?

Exprese su opinión sobre el método utilizado para desarrollar las sesiones de clase.

¿Considera usted que hubo claridad en la presentación de los distintos temas?

Si. _____ No. _____ ¿Por qué?

¿Cómo evaluaría la asistencia y puntualidad del profesor?

Buena ____ Regular ____ Mala ____ ¿Por qué?

¿Cómo califica usted el trabajo realizado por el docente en matemáticas durante el año lectivo?

Bueno ____ Regular ____ Mala ____ ¿Por qué?

Las siguientes dos preguntas debe tomarlas como una manera de autoevaluar su desempeño en las distintas sesiones de matemáticas que estuvieron a nuestro cargo.

¿Asistió usted regularmente a la academia de matemáticas?

¿Cómo califica su desempeño en la academia de matemáticas?