ENSEÑANZA DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO UTILIZANDO LAS FÓRMULAS CUADRÁTICAS Y FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO USANDO LA CAJA DE POLINOMIOS.

JHOANA KATHERYNE SANDOVAL SERNA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2012

ENSEÑANZA DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO UTILIZANDO LAS FÓRMULAS CUADRÁTICAS Y FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO USANDO LA CAJA DE POLINOMIOS.

JHOANA KATHERYNE SANDOVAL SERNA

Director
Dr. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2012

Nota de aceptación:

El presente trabajo de
Grado fue aprobado
Por el asesor y
Respectivo evaluador

Vo. Bo. Wilmer Libardo Molina Yépes
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Yilton Ovirne Riascos Forero
Asesor

Vo. Bo. Eruin Alonso Sánchez Ordoñez
Evaluador

28 de Junio de 2012

AGRADECIMIENTOS

Ante todo doy gracias a Dios, que en todo momento a estado conmigo, a sus bendiciones y por haber puesto en mi camino aquellas que me han acompañado y apoyado incondicionalmente en la realización de esta práctica pedagógica Investigativa.

A mi familia por creer en mí, por todo su apoyo y comprensión, especialmente a mi madre María Elena Serna, a mi padre Carlos Sandoval y mi hermano Jhon Alexander, quienes siempre me han brindado la fortaleza necesaria para salir adelante.

Al profesor Yilton Riascos Forero por su sabiduría, apoyo, tiempo, paciencia, dedicación y colaboración. A los profesores y administrativos de la Universidad del cauca que de alguna manera me acompañaron, colaboraron o participaron en esta etapa de mi vida.

A mis amigos y compañeros de la Universidad del Cauca, por su confianza, sus aportes significativos y apoyo incondicional a lo largo de mis estudios.

A los estudiantes del grado 9D de la Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal), por su colaboración y tiempo. A los directivos y profesores, en especial al profesor Rodrigo Ordoñez D., por su paciencia, comprensión, sabiduría, amistad y colaboración.

En general a todas aquellas personas que de una forma u otra participaron en esta práctica pedagógica Investigativa, mis más sinceros agradecimientos.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FÍGURAS

LISTA DE IMÁGENES

LISTA DE DIAGRAMAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El proceso de Práctica Pedagógica es un espacio que pretende aproximar al estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas a la realidad profesional del Sistema Educativo Colombiano y Regional; propiciando el ejercicio de la docencia con espíritu investigativo, desde una perspectiva crítica, reflexiva y propositiva en instituciones de educación formal o no formal. A través del desarrollo de un proyecto pedagógico de intervención en el aula, en Matemáticas, la Práctica Pedagógica Investigativa busca facilitar la cualificación profesional del estudiante como educador mediante una experiencia directa, continua y progresiva del ejercicio docente, logrando que este futuro Licenciado en Matemáticas, sea capaz de tomar decisiones apropiadas en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, que le permitan ir más allá de lo aprendido, incorporando nuevas formas de enseñar, investigar y actuar. (Práctica Pedagógica, 2010).

Este trabajo se encuentra dividido en siete capítulos y presenta el proceso de practica pedagógica Investigativa, siguiendo los parámetros establecidos por el programa de Licenciatura en matemáticas. Inmerso en él, se describe el desarrollo de la intervención realizada en el grado 9D de la Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal), alrededor del tema solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas y la Caja de Polinomios. Además, se presentan los resultados de una investigación realizada en torno a la misma temática, la cual tuvo por objetivo analizar las estrategias que utilizan estos estudiantes para resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado, utilizando las fórmulas cuadráticas.

En el primer capítulo se presentan los referentes teóricos en los que está basado este informe de práctica, en donde se conocen algunos de los elementos más importantes de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, los lineamientos curriculares, las corrientes psicológicas que permiten dar respuesta a la parte investigativa de la práctica, se describe el objeto matemático formalmente y la Caja de Polinomios; y se detallan los antecedentes que giran alrededor de la enseñanza de este tema.

En el segundo capítulo se muestran las características del entorno donde se desarrolló la intervención en el aula. En el tercer capítulo, se describe la Práctica Pedagógica Investigativa teniendo en cuenta el diseño y ejecución de la práctica en las cuatro etapas que exige el currículo del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca. En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos en la Institución educativa y en la investigación. En el quinto capítulo se encuentra el análisis y discusión de los resultados mencionados en el capítulo anterior. Y finalmente, en el sexto y séptimo capítulo se muestran las conclusiones y recomendaciones respectivamente.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1.1. INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La investigación es "*un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema"* (Gutiérrez, 1991, pág. 2), en particular la actividad investigadora dentro de la Didáctica de las Matemáticas tiene como misión preferente "*ofrecer respuestas a los problemas planteados por los profesores y diseñadores de currículum cuando quieren conseguir que las matemáticas sean comprendidas mejor y aprendidas más profundamente por los estudiantes*" (pág. 1). En esa parte, igualmente presenta los elementos más importantes existentes en la actividad mencionada, de los cuales sólo se hablará a continuación de los que constituyen este trabajo de Práctica Pedagógica Investigativa (PPI).

Las características primarias de la investigación en Didáctica de las Matemáticas son: **a)** el perfeccionamiento de las actuales formas de actuación de los profesores de Matemáticas y la búsqueda de otras nuevas, con el objetivo final de promover una mejor enseñanza de herramientas y conceptos matemáticos a los estudiantes, y **b)** el logro de una mejor comprensión de los mecanismos mentales ligados a la actividad de aprendizaje de las Matemáticas, para así poder organizar buenos entornos formativos para los estudiantes y poder proporcionarles los medios necesarios para facilitar su aprendizaje (pág. 2).

Lesh (1979 citado en Gutiérrez 1991) dice que *"el objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la Didáctica de las Matemáticas"* (pág. 2), en donde la frase "desarrollar conocimientos útiles" hace referencia a: identificar problemas importantes para la enseñanza de las matemáticas; plantear conjuntos de cuestiones concretas (y resolubles) relacionadas entre sí y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el tema subyacente; encontrar respuestas a esas cuestiones que sean útiles en una diversidad de contextos, eliminando la información poco válida o inútil; y comunicar los resultados y conclusiones de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores (pág. 2).

Según los diferentes tipos y métodos de investigación en Didáctica de las Matemáticas descritas por Gutiérrez, se tiene que el tipo escogido para este trabajo se corresponde con el de una investigación práctica consistente en el "análisis de comportamiento":

> *Durante el proceso de aprendizaje de alguna parte concreta de las Matemáticas por los estudiantes, se van produciendo modificaciones en su comportamiento, es decir en sus conocimientos, destrezas operatorias, etc. Estas modificaciones suelen estar directamente relacionadas con cambios en su forma de entender los conceptos matemáticos involucrados o con el surgimiento de determinadas dificultades específicas. Para mejorar la enseñanza, es necesario averiguar cómo se desarrollan dichos procesos de aprendizaje y descubrir la evolución del pensamiento de los estudiantes, las causas de sus problemas y cómo adquiere las habilidades cognitivas que les permiten superarlos. Se trata de un tipo de investigaciones al que podemos dar el apelativo genérico de "análisis de comportamiento" de los sujetos (bien individualmente, bien como grupos).*
>
> *El análisis de los procesos y las dificultades en el aprendizaje de conceptos, algoritmos y estrategias de trabajo, que se reflejan en las formas como los estudiantes realizan determinadas tareas o en las respuestas que dan a ciertas preguntas, es una de las investigaciones más frecuentes de este tipo. Está comprobado por infinidad de trabajos que sólo una pequeña parte de los errores que comente los estudiantes cuando resuelven un determinado tipo de problema o ejercicio son fortuitos (generados, por ejemplo, por falta de atención o por un fallo puntual de la memoria). Por el contrario, la mayoría de los errores se comenten de forma sistemática y aparecen de nuevo cuando se propone a los estudiantes otro problema o ejercicio similar.*
>
> *Esto significa que los estudiantes se equivocan porque aplican alguna idea incorrecta (un concepto mal entendido, una técnica mal aprendida, etc.) o, lo que es más frecuente, porque se basan en alguna idea cuyo campo de validez deja fuera a la situación en la que el estudiante la está aplicando. En el primer caso, el problema generalmente se resuelve haciendo que los estudiantes lleguen a ser conscientes de que sus ideas son erróneas y*

> *haciendo que las desechen y las cambien por las correctas. El segundo caso suele ser el más difícil de resolver, pues se trata de "comprensiones parciales", es decir de ideas que los estudiantes han utilizado con éxito hasta un determinado momento, pero que ya no tiene calidez universal, al haberse incrementado el dominio de los conceptos en los que éstas se apoyan. La dificultad radica, por una parte, en que los estudiantes no entienden por qué el profesor ya no acepta sus respuestas, y por otra en que no se pueden desechar esas formas de trabajar, pues son ideas correctas, sino que hay que mostrar a los estudiantes cuándo se pueden usar y cuanto no.* (págs. 6-7)

Y los métodos de investigación elegidos, pertenecientes a las fases recogida de información y tratamiento de dicha información son: el *"*estudio de casos*"* y el *"*método cualitativo*"*, respectivamente. Uno complementario del otro.

El *"*estudio de casos*"* consiste en un seguimiento continuo, completo y detallado de un número pequeño de estudiantes durante una actividad, o de los procesos que están teniendo lugar en un determinado contexto (por ejemplo las interacciones profesor-alumno en un aula). Este tipo de observación del investigador es riguroso, porque el problema de investigación está relacionado directamente con el comportamiento de los estudiantes o con el análisis de sus habilidades intelectuales.

El número reducido de estudiantes observados representa la fuerza y debilidad del estudio de casos, ya que por una parte permite describir y controlar numerosas variables que dejan analizar con detalle el complejo mundo del comportamiento humano. Pero por otra, es problemático hacer generalizaciones a partir de muestras tan reducidas. Aun así, existen las técnicas "de rejilla", que permite clasificar a los individuos de una población heterogénea en una serie de tipos de características muy concretas, en función de sus valores para ciertas variables, de manera que los resultados de un estudio de casos se puede generalizar a los individuos del mismo tipo que los observados (pág. 9).

El "método cualitativo" tiene como principios básicos su forma de entender la educación, que los estudiantes son diferentes y que su comportamiento o su éxito en el aprendizaje no depende sólo de su habilidad o capacidad, sino que están relacionados con una serie de variables de tipo social que deben ser tenidas en cuenta (entorno familiar, escolar,…). Por su forma de interpretar el aprendizaje de las Matemáticas, los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos y que, en general, tratan de indagar sobre cómo se desarrolla un proceso cognitivo o de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él (pág. 10).

Dentro de las herramientas para la investigación en Didáctica de las matemáticas se encuentran las fuentes de documentación y los métodos de recogida de datos.

Las fuentes de documentación ofrecen al investigador conocimiento de lo que están haciendo otras personas interesadas por los mismos temas, ya sea local o internacional, también qué problemas están siendo resueltos, qué soluciones se están proponiendo, etc. Esta necesidad se originó en pro de la unificación de esfuerzos para la resolución eficaz de problemas educativos, lo cual sólo se puede lograr compartiendo ideas y trabajos. Pero también está motivada por la conveniencia de evitar la pérdida de tiempo que supone trabajar para llegar a conclusiones que ya han hecho públicas otras personas hace tiempo.

Gutiérrez (1991) considera:

> *… un principio básico de la investigación que cuando alguien se sienta interesado por un problema y quiera investigarlo, una de las primeras cosas que debe hacer es reunir una cantidad adecuada de información sobre investigaciones relevantes en ese problema, para estudiarla, organizarla y conseguir una idea clara de cuál es el estado de la cuestión en ese momento Jonson (1980b). Dos consecuencias de este esfuerzo son que el investigador comprenderá mejor el problema en el que va a trabajar y que antes le surgirán un número de preguntas y posibilidades interesantes de las que antes no era consciente.* (pág. 12).

Una de las principales técnicas usadas para la recolección de datos durante el "trabajo de campo" en investigación es el *"*análisis de errores*"*, ya que en determinados contextos, generalmente al hacer un análisis de comportamiento, resulta útil proponer a los estudiante una serie de problemas seleccionados, con el fin de analizar sus métodos de resolución y formas de uso de los conceptos y métodos matemáticos; en tales casos esta técnica se revela como una estrategia muy útil para hacer inferencias acerca de los procesos mentales de los estudiantes (pág. 14).

1.2. LINEAMIENTOS CURRICULARES

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia define Lineamientos Curriculares como: *"las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el MEN con el apoyo de la comunidad académica educativa para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación en su artículo 23"* (Ministerio de Educación Nacional, Lineamientos Curriculares). En los lineamientos se encuentran los logros que debe obtener un estudiante cada vez que curse un grado en el colegio, y a los profesores le indica lo que deben enseñar en cada año escolar.

Según el MEN los Estándares de Competencias Básicas son:

> *Criterios claros y públicos que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los niños y las niñas de todas las regiones del país, en todas las áreas que integran el conocimiento escolar.*
>
> *En los estándares básicos de calidad se hace un mayor énfasis en las competencias, sin que con ello se pretenda excluir los contenidos temáticos. No hay competencias totalmente independientes de los contenidos temáticos de un ámbito del saber -qué, dónde y para qué del saber-, porque cada competencia requiere conocimientos, habilidades, destrezas, comprensiones, actitudes y disposiciones específicas para su desarrollo y dominio. Sin el conjunto de ellos no se puede valorar si la persona es realmente competente en el ámbito seleccionado. La noción actual de competencia abre, por tanto, la posibilidad de que quienes aprenden encuentren el significado en lo que aprenden.* (Ministerio de Educación Nacional, ¿Qué son los estándares?).

El documento Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, (MEN, 2006) en su cuarto capítulo: ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MÁTEMÁTICAS, Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! (pág. 46), menciona que "competencia" está relacionada con el *saber qué,* el *saber qué hacer* y el *saber cómo, cuándo y* *porqué* hacerlo (pág. 50). De esta manera, para que un estudiante sea *matemáticamente competente* debe desarrollar de manera eficaz los diferentes procesos generales de la actividad matemática (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos), los cinco tipos de pensamiento matemático pertenecientes a los conocimientos básicos (el pensamiento numérico y los sistemas numéricos; el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas; el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos) en los contextos del aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con la Serie de Lineamientos Curriculares (MEN, (s.f.)), la enseñanza de solución de ecuaciones de segundo grado con las fórmulas cuadráticas y factorización de polinomios usando la caja de polinomios, en los procesos generales de la actividad matemática desarrolla:

- el razonamiento, ya que el estudiante da cuenta del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones y justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de los problemas, y además porque utilizan argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar (pág. 54).
- la resolución y planteamiento de problemas, pues el estudiante desarrolla y aplica estrategias para resolver problemas (pág. 52), en este caso problemas que involucran ecuaciones de segundo grado, y logra verificar e interpretar los resultados según el problema original.
- la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (pág. 81), puesto que genera habilidades en la solución de ecuaciones de segundo grado con las fórmulas cuadráticas y factorización de polinomios de segundo grado con la caja de polinomios, y en el hallazgo de la ecuación de segundo grado en función de la suma y producto de las soluciones.

Según esta Serie, la enseñanza de estos temas también desarrolla los conocimientos básicos en matemáticas, en particular el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, en efecto, las situaciones problemáticas llevan al estudiante a la construcción de expresiones algebraicas y a la solución de ecuaciones. Al utilizar la caja de polinomios en la factorización de polinomios de segundo grado el sistema de representación cambia, por tanto a parte del anterior pensamiento también desarrolla el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, pues la forma de manipular esta herramienta requiere de este pensamiento para lograr los objetivos.

El contexto en el aprendizaje de la enseñanza de solución de ecuaciones de segundo grado es el mismo, pues se desarrolla en equivalentes situaciones problemáticas.

1.3. CORRIENTES PSICOLÓGICAS

Para poder realizar lo descrito en el ítem 1.1 y desarrollar los procesos generales de la actividad matemática y los pensamientos variacional y espacial en los estudiantes (ítem 1.2), se debe conocer algunos referentes teóricos, en este caso psicológicos, para entender cómo los estudiantes construyen conocimiento y logran enfrentarse con problemas matemáticos. Los estudiantes utilizan la inteligencia y razonan para desarrollar estas actividades con ayuda del profesor.

Piaget (1936) señala que *"la inteligencia es una adaptación"* (pág. 5), en particular es una adaptación biológica. Afirmar esto, es suponer que la inteligencia es una organización y su función consiste en estructurar el universo como el organismo estructura el medio inmediato. Para él todos los organismos tienen inteligencia, entre los cuales los seres humanos tienen la capacidad de razonar.

La adaptación y la organización son invariantes funcionales, es decir que no cambian a lo largo del desarrollo cognitivo (transformaciones que se dan en el transcurso de la vida, por las cuales se aumentan los conocimientos y habilidades para percibir, pensar y comprender), además son inseparables y complementarios de un mecanismo único (pág. 7). La adaptación está constituida por dos procesos: asimilación y acomodación, la primera es la forma por la cual los seres humanos ingresan nuevos elementos exteriores a los esquemas mentales existentes en él, y la segunda es el proceso consistente en la reorganización de los esquemas mentales preexistentes y la incorporación de nuevos elementos. Piaget indica que la mente solo puede adaptarse a una realidad mediante una acomodación perfecta, es decir, si en esta realidad nada puede modificar los esquemas del sujeto; puede darse la posibilidad que la persona asimile y no acomode, pero por ningún motivo se presentará en forma contraria. Para Piaget: *"la asimilación jamás puede ser pura, ya que, al incorporar los elementos nuevos a los esquemas anteriores, la inteligencia modifica sin cesar estos últimos para ajustarlos a nuevos datos"* (pág. 7). La adaptación solo se completa cuando da lugar a un sistema estable, o sea cuando existe equilibrio entre acomodación y asimilación.

Cuando se habla de esquema mental, se está aludiendo a la idea de herramientas u objetos mentales, que juntos hacen posible que la persona organice y obtenga conocimientos del mundo exterior. Son acciones que pueden ser aplicadas directamente sobre los objetos (de acción) o sobre su representación tras ser interiorizados (operatorios).

La evolución de la inteligencia muestra la aparición progresiva de diferentes etapas, las cuales se diferencian entre sí por la construcción de esquemas cualitativamente diferentes. Según las edades de los niños, Piaget identifica cuatro periodos o estadios del desarrollo cognitivo que van desde que nacen hasta la adolescencia: *sensorio motor* (desde que nace hasta los 2 años de edad), *pre operacional* (desde los 2 años hasta los 7 años), *operaciones concretas* (de los 7 a 11 años) y *operaciones formales* (a partir de los 11 años de edad). Cómo las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan durante la infancia en esquemas de conducta, se internalizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento, y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta. Refiriéndose a los estudiantes que participaron en esta práctica pedagógica, sus edades varían entre los 13 y 15 años, según esto, ellos se ubican en el periodo de *“operaciones formales”,* lo que indica que están en la capacidad de generar pensamientos de tipo deductivo, lógico, abstracto e ilimitado (Brinkmann, (s.f.)).

En conclusión, Piaget muestra cómo las personas obtienen conocimiento constantemente a partir de sus relaciones con el entorno, y de qué forma logran interiorizarlo. También afirma que todos los niños son inteligentes y que aprenden de manera diferente. Él fue un gran investigador en el campo de la psicología genética, y creador de la teoría del desarrollo cognitivo. Muchas personas se interesaron por sus grandes estudios, en particular el filósofo, educador y psicólogo Gérard Vergnaud, él complementó la teoría de Piaget, proponiendo a partir de esta: *la teoría de los campos conceptuales* (1990).

La teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990) trata de una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización de lo real; pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas. También permite analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y los invariantes operatorios implícitos en las conductas del sujeto en situación (pág. 1).

Vergnaud define concepto como una tripleta de tres conjuntos $C=(S,I,\Gamma)$, donde S es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto, I es el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado), y Γ es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).

> *Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, en el curso del aprendizaje o durante su utilización, es necesariamente considerar estos tres planos a la vez. No hay en general biyección entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones. No se puede por tanto reducir el significado ni a los significantes, ni a las situaciones.* (pág. 7).

Si se está interesado en el aprendizaje y enseñanza de un concepto, este no puede ser reducido a su definición, pues sólo a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como este adquiere sentido para el niño. Se distinguen dos clases de situaciones:

- situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación. Este primer caso es característico porque las personas tienen conductas muy automatizadas, organizadas por un único esquema (pág. 2).
- situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas abortadas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso. Para este caso, las personas utilizarán varios esquemas sucesivos, que pueden entrar en competición y que, para la solución buscada, deben ser acomodados, separados y recombinados para concluir o no con lo buscado (pág. 2).

> *La observación de los alumnos en situación de resolución de problemas, el análisis de sus dudas y de sus errores, muestra que las conductas en situación abierta son igualmente estructuradas por los esquemas. Estos son tomados del vasto repertorio de esquemas disponibles, y especialmente de los que están asociados a las clases de situaciones que parecen tener una semejanza con la situación tratada actualmente. Simplemente como la semejanza no es sino parcial y eventualmente ilusoria, los esquemas son solamente esbozados, y las tentativas se interrumpen antes de haber sido concluidas; varios esquemas se pueden evocar sucesivamente, e incluso simultáneamente en una situación nueva para el sujeto (o considerada por él como nueva).* (pág. 4).

Cabe resaltar el hecho que el concepto de situación no tiene aquí el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea. El concepto de situación se limita al sentido que le da habitualmente el psicólogo: *los procesos cognitivos y las* *respuestas del sujeto son función de las situaciones a las cuales son confrontados* (págs. 8-10).

En esta teoría, cuando se habla de esquema se refiere *"a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada"* (pág. 2). En los esquemas es donde se debe investigar los conocimientos-en-acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria. Las competencias matemáticas son sostenidas por esquemas organizadores de la conducta, ejemplo: el esquema del recuento y el esquema de resolución de ecuaciones lineales. Los esquemas son frecuentemente eficaces, pero no siempre efectivos. Cuando un niño utiliza un esquema ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce bien a cambiar de esquema, bien a modificar este esquema (pág. 3).

Hay muchos ejemplos de esquemas en el aprendizaje de las matemáticas. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Una persona puede usar un esquema a una clase más pequeña que la que se podría aplicar eficazmente. Lo que indica la extensión de un esquema a una clase más amplia (pág. 4).

En relación a una psicología cognitiva centrada sobre las estructuras lógicas, como la de Piaget, la teoría de los campos conceptuales aparece más bien como una psicología de los conceptos, por tanto Vergnaud considera un campo conceptual en matemáticas como un conjunto de situaciones que requieren una o varias operaciones o combinaciones entre ellas, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas para lograr los objetivos propuestos en ella. Ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas (conjunto de situaciones que requiere una o varias adiciones o sustracciones o una combinación de ellas, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones) y el campo conceptual de las estructuras multiplicativas (conjunto de situaciones que requieren multiplicación, división o una combinación de ellas, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones) (págs. 7-8).

El sentido de los conceptos matemáticos no está en las situaciones mismas, ni tampoco en las palabras y símbolos matemáticos. Aunque se diga que son las situaciones las que le dan sentido a los conceptos. El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto (págs. 14-15). Entendiendo significado, como el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas y significante, como el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

La teoría de los campos conceptuales ofrece un referencial más jugoso que el piagetiano para el estudio del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de competencias complejas, particularmente en las matemáticas, teniendo en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual.

Vergnaud toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales, cuyo dominio por parte del estudiante toma bastante tiempo. Esta teoría es importante para fundamentar la enseñanza y la investigación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Moreira, 2002).

Uno de los términos relevantes para entender el funcionamiento cognitivo[1] de un concepto, es el de *estrategia*. INHELDER (2007) designa *estrategia* como:

> …*todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptibles de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto. Las nociones de medios y fin son por supuesto relativas, ya que un medio puede ocasionalmente convertirse en fin y recíprocamente. El problema central del estudio*

[1] Son los esquemas que un sujeto activa para solucionar un problema.

psicológico de las estrategias consistirá precisamente en determinar sus condiciones de éxito, es decir, en precisar los ajustamientos progresivos de los medios al fin y en analizar su formación. El análisis de las estrategias cognitivas versará pues sobre los sucesivos descubrimientos del sujeto y sobre las razones de las modificaciones operadas. (pág. 5).

1.4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICAS

El álgebra (elemental) es una rama de las matemáticas que estudia la cantidad de manera más general que la utilizada en aritmética. Según Baldor: *"en aritmética las cantidades se representan por números y estos expresan valores determinados"* y, *"en álgebra, para lograr generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores"* (1997, pág. 5). Estas letras que representan cantidades pueden ser conocidas o desconocidas.

Existen tres clases de signos utilizados en el álgebra: de operación (suma, resta, multiplicación, elevación a potencias y extracción de raíces), de relación (igualdad, mayor qué y menor qué) y de agrupación (el paréntesis ordinario ( ), el paréntesis angular o corchete [ ], las llaves { } y la barra o vínculo ||). Una expresión algebraica es una combinación de números, letras y signos, que permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje tradicional; se conocen varios tipos de expresiones algébricas q se clasifican según sus características:

- Monomio: también conocido como polinomios con un único término, es decir un solo sumando, ejemplos: $ax, ax^2, ax^n y^m, ax^n y^m w^k$, etc., donde $a, x, y, w \in R$, y $n, m, k \in Z^+$. a se llama coeficiente (incluye signo), x, y, w se llaman variables, n, m, k exponentes y el grado es la suma de los exponentes de las variables que lo acompañen, sí sólo tiene una variable el grado es el exponente de ella.
- Binomio: expresión formada por la suma de dos monomios, ejemplos: $x+y$, $a^n b + bc^k$, $mx^2 + t$, entre otros. Hay operaciones entre binomios como:

factor común, suma por diferencia, producto de binomios lineales (son expresiones que tienen una variable con exponente 1, ejemplo: $ax+b$, $cx+d$, etc.), cuadrado de un binomio, potencia de un binomio (binomio elevado a la *n-ésima* potencia)

- Trinomio: es un polinomio con tres términos, la suma de tres monomios. Ejemplo: trinomio cuadrado perfecto (surge al elevar al cuadrado un binomio), trinomios de segundo grado en una variable (ax^2+bx+c, $a,b,c \in R$).
- Polinomio: es una expresión formada por un conjunto finito de variables y coeficientes, utilizando únicamente las operaciones suma, resta y multiplicación, así como exponentes enteros positivos.

  El grado de un polinomio es el del monomio de mayor grado, ejemplo: el grado de los polinomios $a, ax+b, ax^2+bx^2, ax^2+bx+c, ax^5+d$ es $0, 1, 2, 3, 4$, respectivamente con $a,b,c \in R$.

Dos expresiones algebraicas separadas por el signo de relación "$=$" se llama ecuación, donde las incógnitas representadas en este caso por las variables, son los valores que se pretende encontrar. Los tipos de ecuaciones algebraicas más conocidas son las polinómicas o polinomiales: de primer grado o lineales y las de segundo grado o cuadráticas. De los cuales el último tipo con una incógnita es por la que se interesa esta práctica pedagógica.

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas con una incógnita son una igualdad algebraica que tienen la forma canónica $ax^2+bx+c=0$, donde a es el coeficiente principal diferente de cero(o coeficiente de la variable que esta elevada al cuadrado), b es el coeficiente del término lineal (variable que esta levada a la potencia 1) y c es el término independiente (que no depende de variables).

El valor de la variable que hace que la igualdad se verifique se llama solución de la ecuación, lo que indica que resolver una ecuación es encontrar la solución ó soluciones. Una ecuación se dice que es compatible si tiene solución e incompatible si no tiene solución. Dos o más ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman equivalentes (Ecuaciones de Segundo Grado, 2009).

De aquí en adelante el término: *ecuaciones de segundo grado o cuadráticas* hace referencia a ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Los métodos más conocidos para solucionar este tipo de ecuaciones son: la factorización, la complementación y por fórmulas cuadráticas (Olmos y Martínez, 2000, págs. 102-105). Otro método para solucionar estas ecuaciones es la caja de polinomios. (ver anexo 1)

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO UTILIZANDO LAS FÓRMULAS CUADRÁTICAS

Para indicar la solución de este tipo de ecuaciones, primero se hablará de la solución por el método de complementación, ya que siguiendo esta técnica se deducen las fórmulas cuadráticas.

El método de complementación se basa en una serie de pasos consecutivos, que mediante operaciones matemáticas, la idea es completar a un lado de la igualdad un trinomio cuadrado perfecto, y con propiedades de potencias y raíces se encuentra la incógnita x de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. El procedimiento indicado por Olmos y Martínez (2000, pág. 104) es el siguiente:

a. Se aísla el término independiente
b. Si el coeficiente de x^2 es diferente de 1, dividimos cada término de la ecuación por ese coeficiente
c. Sumamos a los dos términos de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, para formar trinomios cuadrado perfecto
d. Factorizamos
e. Aplicamos propiedad que relaciona potencias y raíces.
f. Despejamos x

Supongamos la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$ y $a\neq 1$ (si por algún motivo $a=1$ simplemente se obvia el paso *b.* e inmediatamente se continúa con el *c.*), continuando con el procedimiento anterior se debe aislar el término independiente:

$$ax^2+bx=-c$$

Cómo el coeficiente de x es diferente de 0 y 1, entonces se divide cada término de la ecuación por a:

$$\frac{a}{a}x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \quad \text{Esto es,}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

El coeficiente de x es $\frac{b}{a}$, entonces el cuadrado de la mitad de $\frac{b}{a}$ es: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

Ahora, sumando esta última operación a los dos términos de la ecuación se tiene:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

Factorizando,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Y aplicando la propiedad de las raíces a ambos lados:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las soluciones son

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las formulas de la ecuación cuadrática ó formulas cuadráticas son:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (*)$$

Para solucionar una ecuación de segundo grado cualquiera, simplemente se deben identificar en ella cada uno de los coeficientes $a, b,$ y c, y se reemplazan en las fórmulas $(*)$.

1.5. LA CAJA DE POLINOMIOS

Soto, Mosquera y Gómez (2005) definen la caja de polinomios como una herramienta para la educación básica que permite el desarrollo del algebra de polinomios (pág. 83).

Según la GUÍA No. 0: Historia y Fundamentación Matemática de la Caja de Polinomios (Gescas, Proyecto La Caja de Polinomios, Guía:No.0):

> *La Caja de Polinomios conjuga los aportes de cuatro matemáticos famosos: Euclides, siglo III a.C. quien con su libro de Los Elementos entrega a la humanidad el primer texto científico perfectamente sistematizado; de este libro de extracta el teorema 43 del Libro I que permite la construcción de fichas rectangulares de distintas dimensiones pero de igual área y que se apoya en la proposición 34 del mismo texto en la que demuestra que cualquier diagonal de un paralelogramo lo divide en partes iguales; así mismo se utiliza el tercer axioma o noción común en el cual Euclides asevera: "Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales;" estos conceptos se revisarán más adelante. El*

segundo matemático es Tabit ben Qurra el Harani, siglo X d.C. matemático dedicado a la contemplación de las cantidades y quien de manera generosa presenta el concepto de homogeneización, concepto que permite tratar a los polinomios a través del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y de la altura. Por último, el juego extiende su aplicación a polinomios con coeficientes negativos con la utilización del plano cartesiano, cuya creación se indilga a Pierre de Fermat y a Renato Descartes, siglo XVII d.C. El plano cartesiano ideado por estos franceses, conjuga sobre una misma representación la posición de un objeto en el tiempo, logrando describir de manera lógica y evidente una trayectoria. (pág. 1).

El matemático Tabit ben Qurra el Harani, además del concepto de homogeneización, también realizó importantes descubrimientos en el álgebra, en particular, en la solución de ecuaciones cuadráticas; él fue uno de los primeros en identificar una dificultad relacionada con la interacción entre las soluciones algebraica y geométrica de una ecuación cuadrática. Al intentar solucionar problemas que ahora se representarían de la forma $x^2+bx+c=0$, Tabit evidencia que no se puede igualar área con longitud, ni áreas y longitudes con números (objetos adimensionales) e introduce una nueva unidad de media μ para expresar la ecuación anterior como: $x^2+b\mu x+c\mu^2=0$, con lo cual ésta puede interpretarse geométricamente como suma de áreas. Concorde a esto, se construyen los primeros rectángulos básicos fundamentales:

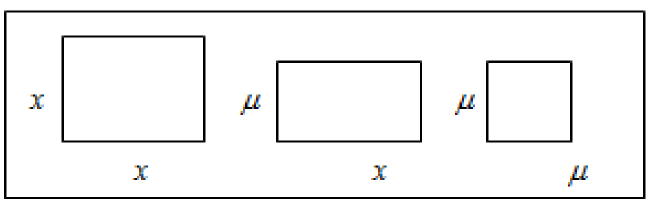


Figura 1.1 Primeros rectángulos básicos fundamentales

Los rectángulos de la *Figura 1.1* son los mismos si se denotan con x^2, x y 1 respectivamente. (*Figura 1.2*)

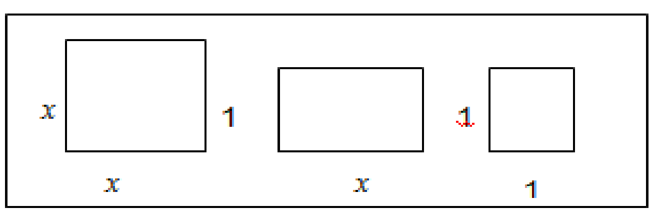


Figura 1.2 Rectángulos básicos fundamentales denotados con x^2, x *y* 1

La interpretación geométrica de Tabit ben Qurra permite adoptar x^2 como un cuadrado de lado x, la variable x está representada por un rectángulo de lados x y 1, y el 1 es un cuadrado de lado 1 (Gescas, Proyecto La Caja de Polinomios, Guía:No.0, pág. 6).

Con estos rectángulos básicos se pueden representar geométricamente un polinomio cuadrático con coeficientes enteros, pero no de grados superiores. En el año 2007, la Especialización en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Nariño abordó dicho inconveniente y su solución llevó a la construcción de la herramienta LA CAJA DE POLINOMIOS, la cual consta de un tablero que contiene el plano cartesiano y diferentes tipos de fichas. Este instrumento permite tratar el álgebra de polinomios hasta de cuarto grado y en dos variables. Las operaciones algebraicas con esta herramienta se basan en armar un rompecabezas, construyendo rectángulos con la única regla de que fichas contiguas coincidan en la dimensión de sus lados vecinos (Soto et al, 2005, pág. 84).

El trabajo de representar en un solo elemento la posición de un objeto en un tiempo determinado hizo concebir a Renato Descartes el plano cartesiano, el cual permite el desarrollo operatorio algebraico con polinomios de coeficientes enteros, de tal manera que en el primer y tercer cuadrante se coloca lo términos con coeficientes positivos y en el segundo y cuarto cuadrante los negativos (Gescas, Proyecto La Caja de Polinomios, Guía:No.0, pág. 8).

La caja de polinomios contiene once clases de fichas, pudiendo realizar juegos operatorios con polinomios de hasta cuarto grado en una variable, en teoría el grado es ilimitado, lo único es que la cantidad de fichas aumenta considerablemente.

Según la Guía No.0, el número de fichas distintas para trabajar con polinomios de grado $n \geq 2$ está dado por la expresión:

$$f(n)=\begin{cases} \frac{n^2+4n}{4} & \text{Si } n \text{ es par} \\ \\ \frac{n^2+4n-1}{4} & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Como el objeto matemático de esta práctica pedagógica es la solución de ecuaciones de segundo grado, entonces sólo se utilizan las fichas básicas de grado dos (*Figura 1.3*), ya que estas ecuaciones contienen una expresión algebraica polinomial de segundo grado.

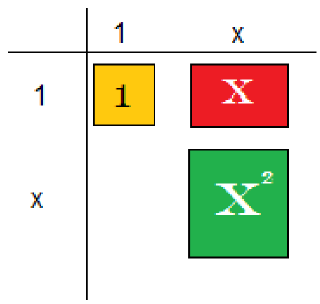


Figura 1.3 Fichas básicas de grado dos

Para leer y escribir un polinomio de grado dos en la caja de polinomios se necesita del uso del plano cartesiano, ya que sus cuadrantes permiten escribir cualquier polinomio de este tipo. En el primer cuadrante las coordenadas (x, y) de cada punto son positivas y en el tercer cuadrante son negativas; por tanto las fichas que se ubiquen en cualquiera de estos dos cuadrantes corresponden a términos positivos del polinomio. En el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada de las coordenadas (x, y) es positiva, mientras que en el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada de (x, y) es negativa; así que las fichas que se encuentren en estos cuadrantes pertenecen a términos negativos del polinomio. Esto indica que las fichas se ubican de acuerdo con el valor del término cuadrático, del coeficiente del término lineal y del término independiente que posea el polinomio.

Por ejemplo, dos formas de representar el polinomio x^2+x-1 en la caja de polinomio son:

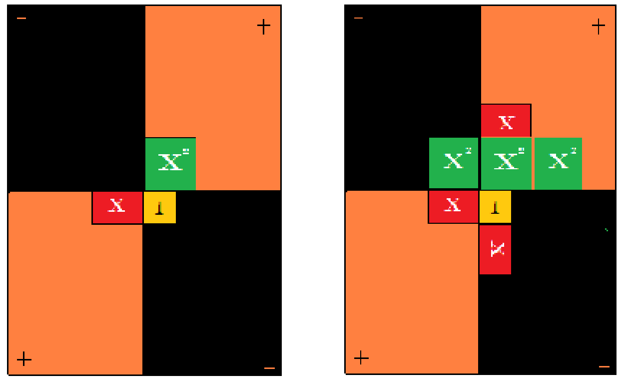


Figura 1.4 Representaciones del polinomio x^2+x-1 *en la caja de polinomios*

Note que en la figura anterior, aunque las dos representaciones son iguales, la segunda tiene cuatro fichas más que la primera, dado que en el primer cuadrante (positivo) y en el segundo cuadrante (negativo), las fichas de x^2 que se han ubicado tienen signo contrario y equivalen algebraicamente a cero, lo mismo sucede con un par de fichas x en los cuadrantes primero y cuarto. Para realizar una adecuada lectura de los polinomios con esta herramienta es conveniente retirar los pares de ceros que se encuentren (Gescas, Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 2: Lectura y Escritura de Polinomios, pág. 7).

Continuando con la guía No.3 (Adición y Sustracción de Polinomios Cuadráticos), para calcular la suma de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ se debe representar el primer sumando $p(x)$ utilizando únicamente los cuadrantes segundo y tercero; y el segundo sumando $q(x)$, en los cuadrantes primero y cuarto. En la caja de polinomios, la palabra sumar hace referencia a agregar, de tal manera que la suma de los dos polinomios es la lectura de las fichas que quedan después de retirar del plano todos los ceros que se hayan presentado (pág. 1).

El inverso aditivo de un polinomio $p(x)$ es $-p(x)$, es decir aquel que tiene todos los signos de sus coeficientes contrarios al original. Para hallar en la caja de polinomios este opuesto, se debe representar el polinomio y después trasladar todas las fichas que se encuentran en un cuadrante a otro de signo contrario, esto con el fin de que los signos de los coeficientes del polinomio queden con signo inverso (pág. 10).

El inverso aditivo de un polinomio es necesario cuando el objetivo es calcular la diferencia entre dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, los pasos a seguir son:

1. *Escribir el minuendo $p(x)$ en los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO.*
2. *Escribir el sustraendo $q(x)$ en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO.*
3. *Dado que restar es sinónimo de quitar, las fichas ubicadas en el primer cuadrante correspondientes a $q(x)$ deben cambiarse de signo, lo que equivale a trasladarlas al segundo cuadrante, de igual forma se procede con las fichas ubicadas en el cuarto cuadrante que deben trasladarse al tercer cuadrante.*
4. *Se retiran del tablero, los ceros que se hayan configurado.*
5. *La diferencia está constituida por las fichas que finalmente quedan en el tablero.* (pág. 6).

Las representaciones de polinomios y las operaciones suma, diferencia e inverso aditivo en la caja de polinomios, hacen uso del plano cartesiano con el fin de organizar las fichas según el signo de los coeficientes. Pero para realizar la multiplicación de polinomios se necesita además de esto, utilizar el plano cartesiano de manera diferente.

Recordando que *"el plano cartesiano está configurado a partir de dos ejes perpendiculares que se cortan en el origen de las coordenadas: cada uno de los ejes contiene dos direcciones opuestas: positiva y negativa". "Para cada rectángulo que se construya, de aquí en adelante, las dimensiones se leerán como base y altura en su orden siendo que la base corresponde al lado paralelo al eje x y la altura, el lado paralelo al eje y y en concordancia con la orientación de los ejes"* (Gescas, Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 4: Optimización del uso del plano cartesiano, pág. 1).

Esto indica que la ubicación de una ficha o un rectángulo a partir del origen y haciendo uso de los ejes coordenados tiene dimensiones diferentes. Por ejemplo, la *Figura 1.5* enseña las diferentes maneras de ubicación y de dimensiones de la ficha x a partir del origen de los ejes coordenados. Y la *Figura 1.6*, muestra la representación del polinomio $-x^2+4x-3$, donde se puede observar las dimensiones del rectángulo que forma.

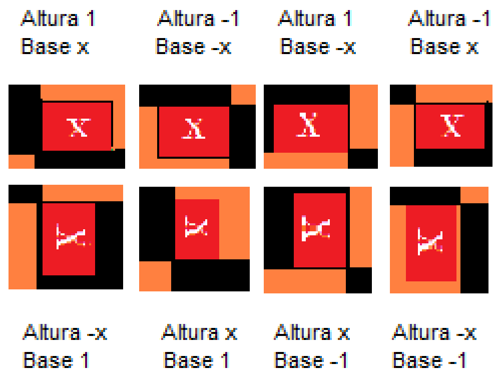


Figura 1.5 Ubicación y dimensiones de la ficha x a partir de los ejes coordenados

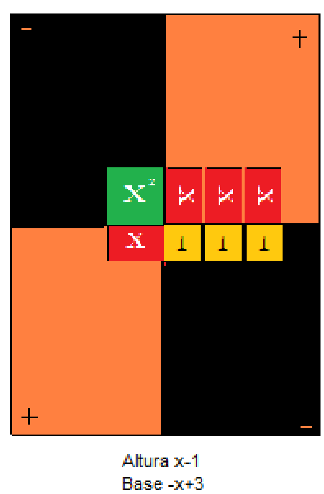


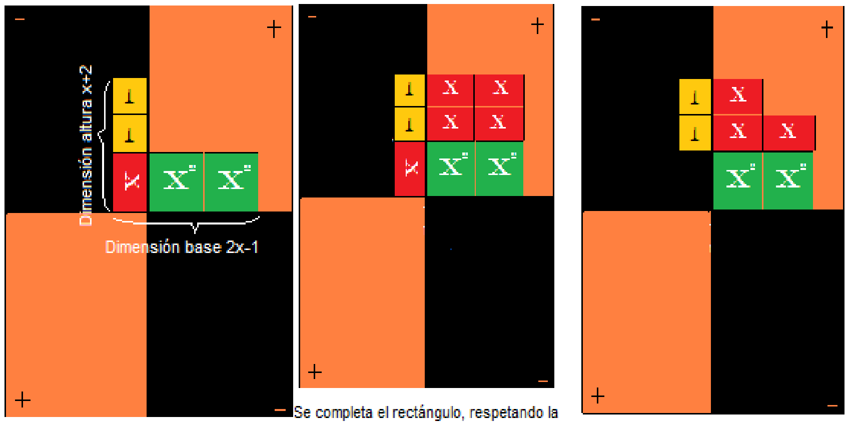
Figura 1.6 Dimensiones del rectángulo que representa el polinomio $-x^2+4x-3$

El producto entre dos polinomios lineales $p(x)=ax+b$ y $q(x)=cx+d$ se realiza siguiendo los pasos:

1. Se toma como base a uno de los polinomios, supongamos $p(x)$, y se ubica está dimensión en la caja de polinomios a partir de los ejes coordenados y haciendo uso adecuado de los dos sentidos que a partir de este tiene el eje x.
2. Utilizando el hecho: *"fichas contiguas coincidan en la dimensión de sus lados vecinos"* (Soto et al, 2005, pág. 84), se ordena la altura del rectángulo, la cual está dada por la dimensión de $q(x)$; su ubicación se hace de acuerdo a los sentidos que a partir del origen tiene el eje y.
3. Después de esto, se arma el rectángulo empleando tantas fichas como sea necesario, y seguidamente se retiran las fichas equivalentes a cero.
4. La lectura de las fichas restantes en el plano cartesiano es el producto $p(x)q(x)$. (Gescas, Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 5: Multiplicación de polinomios de la forma (ax+b)(cx+d), pág. 7).

Hay que tener en cuenta que la escogencia de las fichas para la ubicación de los polinomios se ejecuta sólo por el hecho de sus dimensiones, no por lo que representan en el polinomio.

Ejemplo, una de las formas de realizar el producto de los polinomios $p(x)=2x-1$ y $q(x)=x+2$ en la caja de polinomios es:



Ubicación de las dimensiones de los polinomios p(x) y q(x)

Se completa el rectángulo, respetando la regla de fichas adyacentes de la caja de polinomios

Se retiran los ceros y el polinomio restante es el producto de los polinomios lineales

Figura 1.7 Producto de los polinomios $p(x)=2x-1$ *y* $q(x)=x+2$ *en la caja de polinomios*

Factorizar un polinomio de segundo grado utilizando la herramienta la Caja de Polinomios es realizar una representación rectangular del mismo, siempre que esto sea posible (Gescas, Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 7: Factorización de polinomios de grado 2).

Un *encuadre minimal* es aquella forma de organizar las fichas que representa un polinomio, de tal manera que su complementación a rectángulo requiere del menor número de fichas. Un *encuadre minimal viable* es aquel encuadre minimal que necesita de ceros (par de fichas que se encuentran ubicados en cuadrantes opuestos) para completar el rectángulo que representa al polinomio inicial. Al completar dicho rectángulo, su factorización es el producto de las dimensiones de dos lados consecutivos del rectángulo (pág. 1).

Un polinomio se llama completo, cuando el proceso de factorización no requiere de la agregación de ceros; esto es, la representación del polinomio genera el encuadre minimal viable (pág. 3). También existen polinomios para los que es imposible elaborar un encuadre minimal viable, es decir, los polinomios que no son factorizables en los números enteros (pág. 4).

Si suponemos que el número menor de fichas que se utilizan para representar un polinomio es α, el número de fichas que se utilizarán en su factorización es el número de fichas más un número par: $\alpha + 2k$, con $k \in Z^{+}$. Si el número $\alpha + 2k$ es compuesto, $\alpha + 2k = p * q$, entonces el rectángulo que factoriza al polinomio tiene p filas y q columnas (pág. 5).

Ejemplo, para factorizar el polinomio $p(x) = 2x^2 + x - 1$, se debe representar este en un encuadre minimal (*Figura 1.8*). El número de fichas utilizadas para esto son cuatro, por tanto el número de fichas que utilizará para su factorización son $6 = 3*2$, lo cual indica que debe ser un rectángulo de 2 filas y 3 columnas (*Figura 1.9*).

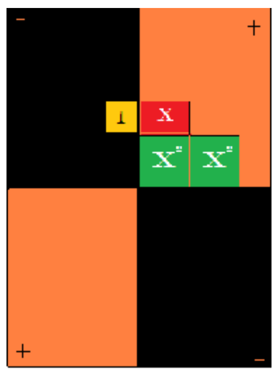


Figura 1.8 Encuadre minimal del polinomio $p(x) = 2x^2 + x - 1$

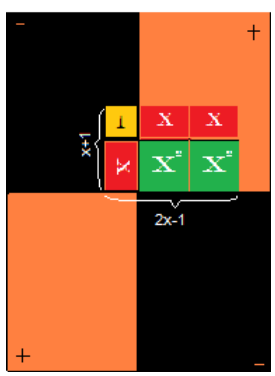


Figura 1.9 Factorización del polinomio $p(x) = 2x^2 + x - 1$

En la figura anterior se observa que sólo se agregó un cero (par de fichas x que se encuentran en cuadrantes primero y segundo).

Factorizando el polinomio $p(x) = 2x^2 + x - 1$ se tiene:

$$p(x) = 2x^2 + x - 1 = 2x^2 + 2x - x - x = (2x^2 + 2x) - (x + 1)$$
$$= 2x(x+1) - (x+1) = (x+1)(2x-1)$$

1.6. ANTECEDENTES

Como se menciona en el ítem 1.1., una de las herramientas más importantes para la investigación en Didáctica de las Matemáticas son las fuentes de documentación. En el caso de la enseñanza del contenido matemático tratado en esta práctica pedagógica (solución de ecuaciones de segundo grado con las fórmulas cuadráticas y factorización de polinomios de segundo grado usando la caja de polinomios) no se encontró documentos puntuales de estos temas en conjunto (mas no se niega la existencia de alguno), pero sí varios acerca de la enseñanza de ecuaciones de segundo grado y de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) utilizando la caja de polinomios.

Genicio María, Lazarte Graciela, Porcinito Silvia y Hernández Clarisa , de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Jujuy, Argentina, presentan el trabajo: *Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza* (2005), el cual: surge de un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. Este se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo y adopta la «Ingeniería Didáctica» como metodología para la investigación, buscando una enseñanza - aprendizaje más eficiente de ecuaciones cuadráticas.

La intencionalidad de este trabajo es que el estudiante construya el concepto de ecuación cuadrática mediante actividades que plantean una mayor implicación y razonamiento que en las propuestas tradicionales de enseñanza. Logrando con ellas, que el alumno deduzca la fórmula de la ecuación cuadrática, a determinar las propiedades de sus raíces, a factorizarla y a reconstruirla a partir de sus raíces. El abordaje de la resolución de ecuaciones cuadráticas se realiza sobre la construcción previa de los conceptos de función cuadrática: forma polinómica y forma canónica, representación gráfica, desplazamientos y estiramientos de la gráfica, coordenadas del vértice, existencia de ceros a partir de la gráfica (pág. 116).

En esta propuesta se plantea una vinculación permanente entre los conceptos de ecuación cuadrática y función cuadrática; así mismo se trabaja en distintos marcos: numérico, algebraico, gráfico, geométrico y funcional (pág. 114).

Varias de las actividades que proponen para cumplir estos objetivos son:

- Un taller que contiene doce ejercicios, donde los primeros nueve tratan de funciones cuadráticas y propiedades de sus gráficas en el plano cartesiano y los últimos tres de ecuaciones de segundo grado.
- un problema para resolver ecuaciones reducibles a cuadráticas.
- solucionar ecuaciones de segundo grado, y relacionar la suma y el producto de estas con la ecuación original.
- Ejercicios consistentes en solucionar ecuaciones de segundo grado y demostrar que existe una relación entre la factorización de la expresión algebraica de una ecuación cuadrática y sus soluciones, la cual es válida para cualquier expresión cuadrática de la forma $x^2 + bx + c$.
- realizar una integración entre lo desarrollado para función cuadrática y para ecuación cuadrática.

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa, Cruz Mendoza Elías realizó el trabajo: *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática* (2008). La investigación desarrollada en este trabajo gira alrededor de la problemática que tienen las personas al tratar de utilizar el método de factorización como método general en la solución de ecuaciones cuadráticas. Para salvar este obstáculo se propone una forma de encontrar dos números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación desde un entorno numérico y geométrico, este conocimiento es utilizado para factorizar cualquier trinomio cuadrado, permitiendo así generalizar el método (pág. 7).

La investigación realizada es utilizada para el diseño de una secuencia didáctica, que busca que la persona que la lleve a cabo, tenga la oportunidad de apropiarse del conocimiento. Esta secuencia toma en cuenta las componentes: didáctica, epistemológica y cognitiva; y esta dosificada en cuatro actividades.

Cruz concluye que fue de gran ayuda el hecho de conocer las concepciones escolares que se tienen de la solución de una ecuación cuadrática, en este sentido los cuestionarios aplicados a profesores y alumnos, fueron de apoyo para corroborar que existe un obstáculo, para poder tomar la factorización como método general para solucionar ecuaciones cuadráticas. Y cree que este obstáculo se presenta en el hecho de tomar la factorización como método general para solucionar ecuaciones cuadráticas, y esto porque en el discurso escolar actual, no proporciona un método para encontrar los números que hacen posible la factorización de un trinomio cuadrado, sino que se lleva a cabo por ensayo-error. Al involucrar la diferencia de dos números él logró hallar un método que pudiera salvar el principal obstáculo para factorizar trinomios cuadrados con cualquier tipo de raíz, pero además le brindó la oportunidad de significar y resignificar la solución de ecuaciones cuadráticas (pág. 190).

Meléndez Juan Pablo, para obtener el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Cauca realizó el trabajo de práctica pedagógica: *sistematización de la experiencia pedagógica: el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios, con el apoyo de una herramienta didáctica denominada la caja de polinomios* (2010).

Meléndez llevó a cabo esta sistematización en el grado octavo de la Institución Educativa Julumito, en la ciudad de Popayán. Inició con una actividad de conocimientos previos o de diagnóstico, con el propósito de considerar los conocimientos obtenidos hasta el momento por los estudiantes y las falencias que presentaban, y así poder determinar si tenían los conocimientos básicos para desarrollar su propuesta. Esta actividad se ejecutó con quince días de anticipación, mediante un taller que él denominó: *taller de conocimientos previos,* el cual contiene ejercicios acerca de operaciones entre números reales, representación en el plano cartesiano y potencias de números naturales. Debido a que se encontraron numerosos errores en este taller, él practicante tomo acciones en el asunto recordando y aclarando los aspectos más relevantes para poder pasar a su tema de interés.

Terminada esta primera parte, Meléndez inició el tema de la Caja de Polinomios con ejercicios de preparación (representación gráfica de rectángulos) para lograr en ellos la capacidad de representación gráfica de la operación de producto y sus propiedades con respecto a la suma. Seguido a esto, él abordó los temas: *representación de polinomios de grado dos con coeficientes enteros en la caja de polinomios, suma y resta de polinomios de grado dos con coeficientes enteros utilizando la Caja de Polinomios, multiplicación de polinomios lineales con la Caja de Polinomios, multiplicación de polinomios con coeficientes racionales y exponentes naturales de polinomios, División de polinomios de grado dos con coeficientes enteros usando la Caja de Polinomios.* Y en cada uno de ellos realizó un análisis de errores, siguiendo las diferentes categorizaciones y clasificaciones que ofrecen investigadores en este campo (Luis Rico (1995) y J Booth (1984)), los cuales se han reunido y organizado en la siguiente tabla:

TEMA	**ANÁLISIS DE ERRORES**		**DESCRIPCIÓN**
	ERROR	**CATEGORIZACIONES Y CLASIFICACIONES**	
Representación de polinomios de grado dos con coeficientes	Afirmar que el grado del monomio x es	Asimilación	Ya que incluye asociaciones incorrectas entre elementos singulares y la poca atención

TEMA	ANÁLISIS DE ERRORES		DESCRIPCIÓN
	ERROR	**CATEGORIZACIONES Y CLASIFICACIONES**	
enteros en la caja de polinomios	cero o que no tiene	Asociación	produjo un falta en la lectura y la escritura
	Colocar las fichas en el cuadrante equivocado	Dificultades para obtener información espacial	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas
		Datos mal utilizados	Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante
	No retirar las fichas con las cuales se representa un polinomio	Asimilación	Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción
Suma y resta de polinomios de grado dos con coeficientes enteros utilizando la Caja de Polinomios	Un estudiante no representó bien un polinomio pero realizó el procedimiento de eliminación de ceros correctamente.	Datos mal utilizados	El estudiante se olvida de un dato necesario para la solución del ejercicio
	Un estudiante al tratar de solucionar la operación resta en la Caja de polinomios, representa bien los polinomios y el inverso aditivo, pero no elimina los ceros lo que causa mala la respuesta del ejercicio.	Dificultades para obtener información espacial	La capacidad del estudiante para pensar mediante imágenes espaciales o visuales fueron fuente de dificultades en la realización del ejercicio
		Asimilación	Información mal procesada debido a fallas de percepción
		Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	El error se originó por deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos previos
	Al tratar de dejar la Caja de Polinomios a un lado y solucionar los ejercicios con papel y lápiz, cometen errores de aritmética	Comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes	Las dificultades que los estudiantes presentan en el álgebra muchas veces son problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. En la mayoría de los errores cometidos en aritmética, los alumnos reflejan dificultades de interiorización del concepto o falta de percepción
Multiplicación de polinomios lineales con la Caja de Polinomios	No colocar las fichas en dependencia de la altura, como lo indica la regla	Uso inapropiado de ‘’fórmulas’’ o ‘’reglas de procedimiento’’	Debido a que los estudiantes usan inadecuadamente una regla, no se apropian de ella
		Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	La actividad de lectura de gráficos es fundamental para el desarrollo de productos de polinomios con esta herramienta, ya que está directamente relacionada con el procedimiento, los estudiantes mostraron deficiencias en el manejo de este concepto

TEMA	ANÁLISIS DE ERRORES		DESCRIPCIÓN
	ERROR	CATEGORIZACIONES Y CLASIFICACIONES	
Multiplicación de polinomios con coeficientes racionales y exponentes naturales de polinomios			Los estudiantes solucionaron correctamente los ejercicios
División de polinomios de grado dos con coeficientes enteros usando la Caja de Polinomios			En el momento de la explicación del procedimiento que los estudiantes debían seguir para solucionar este tipo de operación, sus reacciones no fueron favorables, así que el practicante decidió ofrecer este tema de manera tradicional.

Tabla 1.1 Categorización y clasificación de los errores cometidos por los estudiantes en la experiencia pedagógica: el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios, con el apoyo de una herramienta didáctica denominada la caja de polinomios. (2010)

Cada una de las actividades y observaciones realizadas en esta experiencia pedagógica se hicieron bajo el marco de las situaciones didácticas, los estándares de calidad para la educación matemática, los errores en matemáticas, la herramienta la Caja de Polinomios, entre otros. Obteniendo conclusiones importantes, pues según Meléndez la asimilación de conceptos, definiciones, ejercicios sobre el álgebra de polinomios fue significativa, y además hubo buena respuesta por parte de los estudiantes al cambiar la manera de impartir este tema, generando ganas de trabajar en las clases.

Los trabajos anteriores tienen como principal movimiento mejorar la enseñanza y aprendizaje en temas específicos del álgebra: ecuaciones de segundo grado y operaciones básicas de polinomios, planteando diferentes maneras para desarrollar estos temas en el aula de clase.

Como se pudo observar, en Argentina proponen: *Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza*, planteando una vinculación permanente entre los conceptos de ecuación cuadrática y función cuadrática, trabajando en los marcos: numérico, algebraico, gráfico, geométrico y funcional; para cumplir con sus objetivos plantean seguir una serie de actividades de su autoría. En México, realizaron el: *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método* *de factorización en la solución de una ecuación cuadrática,* ahí le dan importancia a la problemática que tienen las personas al tratar de utilizar el método de factorización como método general en la solución de ecuaciones cuadráticas, y para salvar este obstáculo proponen una forma de encontrar dos números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación desde un entorno numérico y geométrico. Esta secuencia toma en cuenta las componentes: didáctica, epistemológica y cognitiva; y la dividen en cuatro actividades. Por último en Colombia, en la *sistematización de la experiencia pedagógica: el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios, con el apoyo de una herramienta didáctica denominada la caja de polinomios*, observan que empleando esta herramienta se mejora el aprendizaje del desarrollo de las operaciones básicas de polinomios.

Aunque todas estas personas han tomado en cuenta las ecuaciones de segundo grado y su forma de encontrar sus soluciones, y la enseñanza de operaciones en el álgebra con la herramienta, no tienen investigación alguna sobre la enseñanza de solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas y la factorización de polinomios de segundo grado usando la Caja de polinomios, que es a donde a punta esta práctica pedagógica investigativa.

CAPÍTULO 2. CARACTERÍSTICAS DEL ENTORNO

La práctica pedagógica investigativa se realizó en el grado noveno D (año lectivo 2011) de La Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal), ubicada en la Carrera 2 # 5N-31, barrio Tulcán.

Imagen 2.1 Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Esta Institución ofrece a la comunidad una modalidad de bachillerato técnico con énfasis en: ebanistería, electricidad, desarrollo de software, dibujo técnico, sistemas, mecánica industrial, mecánica automotriz y metalistería; en las jornadas mañana y tarde. Es oficial y de carácter mixto.

Fue creada en el año 1959, con el apoyo de la Ministra de Educación (Josefina Valencia de Ubach), del Gobernador del Departamento (Víctor Mosquera Chaux), del Secretario de Educación (Alvaro Simmonds) y del Rector de la Universidad del cauca (Antonio Lemos Guzmán) de la época correspondiente. Pero sólo hasta el mes de enero de 1960 logran ubicarse en el barrio Tulcán, después que la Universidad del Cauca donara sus instalaciones para tales intereses educativos. En sus inicios, solo se permitía estudiantes de sexo masculino, pero a partir del año 1975 se establece la matrícula para el personal femenino (Institución Educativa Técnico Industrial, pág. 2).

Aparte de la sede principal, en este momento la Institución cuenta con cinco sedes más: Mercedes Pardo de Simmonds, San Camilo, Laura Valencia, Jardín Piloto y Gerardo Garrido, con 2529 estudiantes de grado cero a once, 88 docentes, 9 directivos docentes y 25 administrativos (Manual de Convivencia, 2011).

La Institución, tiene la misión de educar a los niños y jóvenes de los niveles inicial, básico y medio de la región caucana. Forma personas integras capaces de ingresar a la educación superior y al sector productivo, fortaleciendo habilidades, capacidades, competencias académicas y laborales, mediante el conocimiento, adopción y la producción de tecnología que contribuyan al progreso social y económico del país (Institución Educativa Técnico Industrial, 2011, pág. 1).

Algunos de sus objetivos son: fomentar el desarrollo vocacional y la formación técnico-profesional basada en el respeto por la dignidad humana, el conocimiento y la tolerancia de las diferencias individuales y culturales en armonía con el entorno ambiental, que permita consolidar el perfil de ciudadanos competitivos y comprometidos con la transformación tecnológica del país; formular por áreas de estudio los proyectos pedagógicos y específicos determinados por las mismas necesidades, aspiraciones y normas contenidas en la Ley General de la Educación; descubrir las aptitudes e intereses de los educandos en las diferentes especialidades para una mejor orientación vocacional; promover en el alumno el desarrollo del proceso de valoración con el fin de contribuir a aumentar su autonomía y sentido de responsabilidad; capacitarlos académica-técnica en forma integral que les permita obtener un título que amerite un valor en el mundo ocupacional y el acceso a la Universidad y sus afines; desarrollar en el estudiante hábitos de estudio, investigación, trabajo, responsabilidad, honradez, austeridad, veracidad y puntualidad que lo conduzcan a ser buen ciudadano.

Según este lugar educativo, el docente debe actualizarse permanentemente para facilitar la innovación de estrategias pedagógicas que favorezcan el proceso de aprendizaje, el estudiante es el centro del proceso de aprendizaje y debe responder a las necesidades y expectativas del mismo, y el aprendizaje del alumno debe enmarcarse en una concepción humanística y científica que dinamice la relación de teoría con la práctica (Institución Educativa Técnico industrial, 2011, pág. 7).

El grado noveno D estaba conformado por 33 estudiantes (7 mujeres y 26 hombres); entre los 13 y 15 años de edad. El profesor encargado del área de matemáticas en este curso fue el ingeniero y licenciado en matemáticas Rodrigo Ordóñez Dulcey, el cual fue de gran apoyo para llevar a cabo esta intervención.

Diagrama 2.1: Diagrama Circular: estudiantes grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial

CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA INVESTIGATIVA

La Práctica Pedagógica Investigativa tomó rumbo cuando se reunieron los requisitos académicos que exige la universidad, los cuales son: tener más del 60% de los créditos requeridos en el plan de estudios del programa de Licenciatura en Matemáticas, y además haber aprobado o estar matriculado en el curso de Didáctica de las Matemáticas II.

El proceso de práctica pedagógica se divide en cuatro fases: *Práctica Pedagógica Investigativa I (fase de exploración y fundamentación teórica), Práctica Pedagógica Investigativa II (plan de acción y elaboración de materiales e instrumentos de intervención), Práctica Pedagógica Investigativa III (primera intervención y ejecución del plan de acción) y Práctica Pedagógica Investigativa IV (Segunda intervención y presentación de resultados)*, donde en cada una de ellas se realizan actividades continuas, contribuyendo al desarrollo de esta.

En la *Práctica Pedagógica Investigativa I* entró en juego el desarrollo de varias unidades temáticas de los núcleos: Matemáticas, cultura y sociedad, conocimiento matemático y científico, Educación Matemática y Filosofía de las Matemáticas, que ofrece la licenciatura; las cuales aportaron en la elección de la línea de interés para el desarrollo de la práctica y la identificación del problema, el cual desde el campo de la Educación Matemática pueda ser objeto de investigación educativa o formativa.

Al final de esta fase, el proyecto de práctica pedagógica investigativa estaba terminado y se titulaba: "R*esolución de problemas con ecuaciones de segundo grado: caso de la Caja de Polinomios como herramienta didáctica"* (2011), y para esto se estudiaron los referentes teóricos: "*Cómo plantear y resolver problemas"*, (Polya, 2001) y *"Guías: proyecto la caja de polinomios",* (Universidad de nariño). Aparte de esto, se pensaba tomar en cuenta autores cómo: Bruno D'amore, Raymond Duval, Guy Brousseau, entre otros, para la explicación de fenómenos que se pudieran presentar en el aula.

La *Práctica Pedagógica Investigativa II* inició con un proceso de reflexión sobre la línea de interés (resolución de problemas) a la que estaba adscrita la práctica, y se decidió dar el cambió por la de Didáctica de las Matemáticas, proponiendo un nuevo objetivo de Práctica Pedagógica Investigativa: "*enseñanza de solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas y factorización de polinomios de segundo grado usando la caja de polinomios"*, ya que esta se acerca más a la parte investigativa que se quiere afrontar.

Se abordaron nuevos referentes teóricos enmarcados en el campo de la Didáctica de las matemáticas (capítulo I): Gutiérrez Rodríguez (1991), Piaget (1936) y Vergnaud (1990). Junto a esto se estudiaron los antecedentes que giran alrededor de los temas de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones de segundo grado con fórmulas cuadráticas y la caja de polinomios, y el objeto matemático que se encuentra inmerso en cada uno de estos temas.

Después de tener claro lo que se quería realizar con la enseñanza del tema matemático mencionado, se dio la tarea establecer un convenio con una Institución Educativa que permitiera desarrollar este nuevo proyecto en ella. Aprovechando el trabajo que habían realizado unos estudiantes de práctica del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca anteriormente con la Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal), se optó por continuar con esta Institución (capítulo II) para realizar la intervención; la cual acogió la propuesta y ofreció sus cursos con los diferentes profesores de matemáticas del año lectivo (2011) para dicho objetivo.

El tema matemático: Ecuaciones de segundo grado, se ubica en el cuarto periodo del grado noveno. El cual, en la Institución educativa estaba orientado por el profesor Rodrigo Ordóñez Dulcey en los cursos A, B, C, D, y E en el año 2011. De los cinco cursos el escogido por él para la práctica fue el D, ya que para su concepto era el más manejable de todos.

Teniendo en cuenta el tema que se pretendía desarrollar, y el curso, se planteó la pregunta: *¿Qué estrategias utilizan los estudiantes del grado 9D de la Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal) para resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas?*, la cual se convirtió en la pregunta de investigación que se desarrolla en este trabajo de práctica pedagógica Investigativa.

Continuo a esto, se dio inicio con la preparación de actividades matemáticas, para el diseño de las clases que se llevarían a cabo en la Institución educativa. Para esto se tuvieron en cuenta libros, textos y páginas de internet, que se encuentran resumidos en la siguiente tabla:

LIBROS Y TEXTOS	• Matemática Práctica 9 (Olmos y Martínez, 2000) • Matemática en construcción 9° (Matemática en Construcción 9°, 2004) • Matemática en Construcción 8° (Matemática en Construcción 8°, 2004) • Matemática Universal 9 (Matemática Universal 9, 2005) • ALGEBRA (Baldor, 1997) • Algebra y Trigonometría (Zill Dewar) • La Caja de Polinomios (Soto et al, 2005) • PROYECTO LA CAJA DE POLINOMIOS, GUÍA:No.0 (Gescas, 2005) • PROYECTO: LA CAJA DE POLINOMIOS GUÍA No. 2: Lectura y Escritura de Polinomios (Gescas, (s.f.)) • PROYECTO: LA CAJA DE POLINOMIOS GUÍA No. 3: Adición y Sustracción de Polinomios Cuadráticos (Gescas, (s.f.)) • PROYECTO: LA CAJA DE POLINOMIOS GUÍA No. 4: Optimización del uso del plano cartesiano (Gescas, (s.f.)) • PROYECTO: LA CAJA DE POLINOMIOS GUÍA No. 5: Multiplicación de polinomios de la forma (ax+b)(cx+d) (Gescas, (s.f.)) • PROYECTO: LA CAJA DE POLINOMIOS GUÍA No. 7: Factorización de polinomios de grado 2 (Gescas, (s.f.))
PÁGINAS DE INTERNET	• ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (Ministerio de educación Cutltura y Deporte) • Ecuaciones de segundo grado (o cuadráticas) (Ecuaciones de segundo grado (o cuadráticas), http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuaciones_Seg_grado.html)

	• Ecuaciones de segundo grado (Ecuaciones de segundo grado, http://80.24.129.36/mates/descartes/4a_eso/Ecuacion_de_segundo_grado/Ecua_seg.htm) • Problemas de ecuaciones de segundo grado (Problemas de ecuaciones de segundo grado, http://www.vitutor.com/ecuaciones/2/p_e.html)).

Tabla 3.1 Libros, textos y páginas de internet que se tuvieron en cuenta para el diseño de las clases que se llevaron a cabo en la Institución Educativa Técnico Industrial

A partir de esto, se elaboró el documento *Clases: Solución de ecuaciones de segundo grado con las fórmulas cuadráticas y factorización de polinomios de segundo grado usando la caja de polinomios. Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)* (Ver anexo 1), donde se encuentran las clases, ejercicios, talleres y exámenes que se realizaron en la institución, este escrito se colocó a consideración del director de la práctica pedagógica Investigativa y del profesor Rodrigo Ordóñez, de donde se tuvo en cuenta sus recomendaciones para el buen desarrollo de estas en el aula de clases.

También se construyeron en madera 30 Cajas de Polinomios, esto es, 30 tableros de medida $23cm \times 35cm$ y 1380 fichas, divididas en tres grupos diferentes (240 fichas de lado x, 360 fichas de lados x y 1, y 780 fichas de lado 1), para las actividades de las clases que involucraban esta herramienta.

En la *Práctica Pedagógica Investigativa III,* antes de comenzar con la etapa de enseñanza en la institución, se realizó por dos semanas la etapa de observación, asistiendo a todas las clases de matemáticas en los horarios: lunes de 3:00pm a 4:40pm, Martes 3:50pm a 4:40pm y viernes 1:00pm a 2:30 pm, los días 12, 13, 16, 19, 20 y 23 de Septiembre de 2011. Y se tuvo en cuenta:

- En el profesor: su faceta educativa y personal, el manejo de aula, sus relaciones con los estudiantes, con los directivos y con los demás profesores, el desarrollo de actividades educativas, su responsabilidad y compromiso.
- En los estudiantes: su comportamiento en el aula y fuera de ella, el interés por las clases, sus relaciones con el profesor, directivos y demás estudiantes, la participación en las actividades educativas, su responsabilidad, compromiso y puntualidad.

- En el aula: el tamaño, el número de estudiantes y espacio de circulación.
- En la institución: la ubicación, la planta física (oficinas y salones).

En este mismo momento, por sugerencia de profesor del grado 9D, se realizó el *''plan de clase Institución educativa técnico Industrial''* para tener una mejor organización en el momento de la intervención. Y junto a esto se escribió el *''plan de acción''* (Ver anexo 2) en el que se consideraron las actividades a desarrollar en las clases, las cuales fueron avaladas por el docente de la Institución.

Después de la actividad de observación, se colocó en marcha el desarrollo de actividades en la Institución durante 10 semanas, en los mismos horarios de la etapa de observación, menos el día martes, ya que en esa hora de clase se orientaba geometría. Durante este transcurso, el diseño de las clases (Ver anexo 1), el plan de clase y el plan de acción (Ver anexo 2), fueron ajustados de acuerdo con las sugerencias del director de la práctica, del profesor Rodrigo Ordóñez y de las características del entorno (como: reunión de padres de familia, cinco días de receso estudiantil, días sin clase, en ocasiones reducción de minutos de las horas de clase, entre otros) que impedían el normal desarrollo de la intervención en el aula.

El profesor de matemáticas de 9D de la institución, al final de cada clase realizó una evaluación oral a la practicante acerca de su desempeño como profesor y dio recomendaciones, con el fin de mejorar el ejercicio en el aula. Además, durante la intervención, la presencia del docente de la Institución fue disminuyendo, ya que se pretendía que la practicante adquiriera progresivamente el manejo del grupo.

El documento *Clases: Solución de ecuaciones de segundo grado con las fórmulas cuadráticas y factorización de polinomios de segundo grado usando la caja de polinomios. Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)* (Ver anexo 1), se divide en cuatro secciones: solución de ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática, suma y producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado, problemas que se resuelven usando ecuaciones de segundo grado, y la caja de polinomios.

La primera sección se dividió en tres clases magistrales, cada una en bloques de dos periodos de clase (para la institución un periodo equivale a 50 minutos), y se realizaron las actividades:

1. Deducción de las fórmulas cuadráticas,
2. Solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.

Esto con el fin de observar cómo los estudiantes utilizan la deducción para encontrar dichas fórmulas y cómo se apropian de ellas para solucionar ecuaciones. La última parte es importante porque se quiso observar a los estudiantes solucionar ecuaciones con las fórmulas sin la necesidad de empezar por el método de complementación, y continuar con las fórmulas cuadráticas, como se había hecho en la deducción anterior.

La segunda sección se dividió en tres clases y media magistrales, tres en bloques de dos periodos de clase y la media clase en un periodo de clase, y se realizaron las actividades:

1. Hallar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado.
2. A partir de las soluciones escribir la ecuación a la que pertenecen.
3. Taller: Ecuaciones de segundo grado y problemas de aplicación.
4. Examen: Ecuaciones de segundo grado.

El objetivo de estos ejercicios, fue introducir a los estudiantes a la solución de aplicaciones sencillas que involucran ecuaciones de segundo grado.

La tercera sección se dividió en cuatro clases y mitad de clase de la sección siguiente; cuatro en bloques de dos periodos de clase y la media clase en un periodo de clase. Las actividades que se realizaron fueron:

1. Solucionar problemas que involucran ecuaciones de segundo grado
2. Taller: Ecuaciones de segundo grado y problemas de aplicación.
3. Examen: problemas que se resuelven utilizando ecuaciones de segundo grado.
4. Examen Opcional: Ecuaciones de segundo grado.

En esta parte, todos los ejercicios son de aplicación. Esta sección es una de las partes más importantes para la respuesta de la pregunta investigativa de este trabajo de práctica, ya que a partir de sus soluciones y de la observación en el aula, se pretendió tener un acercamiento a las estrategias que los estudiantes utilizan para resolver los problemas.

La última sesión se desarrolló en cuatro clases y media magistrales, cuatro en bloques de dos periodos de clase y la media clase en un periodo de clase. Se realizaron las actividades:

1. Familiarización con la caja de polinomios.
2. Suma y resta de polinomios de segundo grado con coeficientes enteros utilizando la caja de polinomios.
3. Multiplicación de polinomios lineales con coeficientes enteros utilizando la caja de polinomios.
4. Factorización de polinomios de segundo grado con coeficientes enteros utilizando la caja de polinomios
5. Problemas que se resuelven utilizando la caja de polinomios.

La Caja de Polinomios es una herramienta para el desarrollo del algebra de polinomios, en este caso polinomios de hasta grado dos con coeficientes enteros. Para el diseño de estas actividades, los ejercicios como: suma, resta, multiplicación y factorización se hicieron tomando en cuenta las Guías diseñadas por el Grupo Gescas de la Universidad de Nariño, y el documento La caja de polinomios (Tabla 3.1); pero los problemas fueron adaptados de otros que se encontraron en libros y páginas de internet (Tabla 3.1) de tal manera, que se puedan resolver utilizando la Caja de Polinomios. La parte investigativa se enriquece de estas actividades, ya que con esto se pretendió que los estudiantes mostraran sus estrategias para solucionar problemas con esta herramienta.

Para la evaluación de todas estas actividades se decidió tener en cuenta el trabajo en clase, talleres, ejercicios y exámenes. De tal forma que se incluyeran todas las facetas de los estudiantes en el desarrollo de los temas.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En el desarrollo de la enseñanza de solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas y la caja de polinomios, en la Institución Educativa Técnico Industrial, se quiso que los estudiantes del grado 9D desarrollaran los diferentes procesos generales de la actividad matemática, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; provocando en los estudiantes incremento de inteligencia, teniendo en cuenta la perspectiva psicológica de Piaget (1936) (capítulo 1). Lo cual tiene sentido, ya que los estudiantes se ubican en el periodo de *"operaciones formales",* es decir, que están en la capacidad de generar pensamientos de tipo deductivo, lógico, abstracto e ilimitado. (Capitulo 1).

La participación de los estudiantes del grado 9D en cada una de las actividades (Ver anexo 1) desarrolladas durante la intervención en el aula, se pueden observar en las notas que obtuvieron (Tabla 4.1). La escala de evaluación de la Institución es de 0.0 a 5.0, donde para aprobar cualquier actividad, su nota debe ser mayor o igual a 3.0. Los conocimientos adquiridos por los estudiantes, fueron calificados de esta manera porque así lo exige el centro educativo

Para la evaluación de estas actividades (ver anexo 1) se tuvo en cuenta:

- Exámenes, talleres y ejercicios; los cuales los podían realizar individualmente y otras en grupo.

• Participación en clase, dando la oportunidad a los estudiantes individualmente y en ocasiones en grupo de realizar ejercicios y presentar inmediatamente al practicante su solución, con el objetivo de observar su actitud en la clase y su desempeño en el tema. Como el número de estudiantes era muy elevado, en las participaciones se tomaba en cuenta a los primeros cuatro estudiantes que presentaran bien la solución de la actividad, obteniendo un punto por esto, y uno adicional por explicarlo en el tablero a todos los compañeros de la clase,

Imagen 4.1 Participación en clase, grado 9D Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Imagen 4.2 Participación en clase, grado 9D Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Imagen 4.3 Participación en clase, grado 9D Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

4.1 RESULTADOS DEL TRABAJO EN EL AULA

Nº	GRADO NOVENO D NOMBRES	Ex. Ecuaciones de 2do grado	Ex. Opcional Ec. de 2do grado	Notal final Ec. de 2do Grado	Nota Extra 1	Taller	Sorteo sustentacuón del taller	Notal Final Taller	Nota Extra 2	Ex. De Aplicación (puntos 1 y 2)	Ex. De Aplucación (punto 3)	Notal Final Ex. De Aplicación	Participación en Clase	Particcipación Caja de Polinomios	Nota final participación en clase	**Nota Final**
1	ARIAS MUÑOZ BRAYAN ALEXANDER	3,5	1,5	5,0	0	3,5		3,5	0	3,8		3,8	4,4	0,5	4,9	**4,3**
2	CAMPO SOLARTE KATHERIN	1		1,0	0	2		2	0	0,5	1	1,5			0	**1,1**
3	CERON BURBANO JHON FREDY	3,5	2,2	5,0	0,7	4,5		4,5	0	1	1	2	1,6	3	4,6	**4,0**
4	CERON FERNANDEZ DIEGO ARMANDO	1		1,0	0			0	0	2,4		2,4		3	3	**1,6**
5	CHILITO BENAVIDEZ LUIS ALEJANDRO	1	2	3,0	0	4,5		4,5	0	0,5	1	1,5	1,5	3	4,5	**3,4**
6	CUERVO DORADO CRISTIAN CAMILO	1,5		1,5	0	2		2	0	0	1	1		2	2	**1,6**
7	CUETIA RIVERA MANUEL ALEJANDRO	1,5	1	2,5	0	3		3	0	2,4	1	3,4		3,5	3,5	**3,1**
8	DIAZ IPIA EDWAR SANTIAGO	5	1,5	5,0	1,5	4		4	0	2,9	1	3,9	1	3	4	**4,2**
9	DIAZ MONTENEGRO SANTIAGO FELIPE	2		2,0	0	2		2	0	2,9	1	3,9		2,5	2,5	**2,6**
10	ESPAÑA ROJAS SANTIAGO	4,5	2,5	5,0	2			0	0	2,5		2,5	3,7	2,5	5	**3,1**
11	GONZALEZ PINO RICARDO ANDRES	5	3	5,0	3	4		4	0	1	1	2	3,8	4,5	5	**4,0**
12	MANQUILLO CHILMA SONIA YARLEDI	2,5		2,5	0			0	0	1		1		2,5	2,5	**1,5**
13	MEJIA BUITRON DAVID STEVEN	0,5		0,5	0			0	0	0	1	1		4,5	4,5	**1,5**
14	MEJIA OROZCO NILSON ALIRIO	3	2,3	5,0	0,3	3,2		3,2	0	2		2	0,1	1,5	1,6	**3,0**
15	MORA PATIÑO JESSICA	5		5,0	0	4	5	5	4	2		2	1,9	1,5	3,4	**3,9**
16	MOSQUERA CORTEZ LUIGI DUVAN	1,5		1,5	0	3,5		3,5	0	2	1	3		1,5	1,5	**2,4**
17	MOSQUERA PEREZ FABIAN ANDRES	2,5	0,3	2,8	0	4		4	0	1,5		1,5		3,5	3,5	**3,0**
18	MUÑOZ CERON ANDRES FELIPE			0,0	0			0	0	0		0		0,5	0,5	**0,1**
19	ORDOÑEZ JHONATAN SANTIAGO	1	0,9	1,9	0	3,6		3,6	0	1,9	1	2,9		3,5	3,5	**3,0**
20	ORDOÑEZ MARTINEZ STIVEN ARMANDO	1,5	2,5	4,0	0	3,5		3,5	0	3,1	1	4,1		3	3	**3,7**
21	ORTEGA RAMOS MARIA CAMILA	2	1,2	3,2	0	4		4	0	1,3	1	2,3			0	**2,4**
22	PARDO RIAÑO KELLY JOHANA	0,5		0,5	0	3,5		3,5	0	0,5		0,5		3	3	**1,9**
23	PERILLA DAZA JHONATAN ALEXANDER	2	2,5	4,5	0	4,5	5	5	4,5	0,8	1	1,8	0,5	4,5	5	**4,1**
24	RIOS RUIZ DANIEL ALEXANDER	1	0,8	1,8	0			0	0	0,5		0,5		2,5	2,5	**1,2**
25	RIVERA FLOREZ JUAN SEBASTIAN	1	0,6	1,6	0	3,5		3,5	0	1,3		1,3		3	3	**2,4**
26	ROJAS HOYOS WILLIAM GUILERMO	1,5	1,4	2,9	0	2,5		2,5	0	1,9	1	2,9		4	4	**3,1**
27	SAMNCHEZ ROSERO MICHELLE JOANA	3	2,5	5,0	0,5	3		3	0	3,3		3,3	2,6	3	5	**4,1**
28	TROYANO CASTILLO LEONARDO FABIO	3	2,5	5,0	0,5			0	0	0		0	0,1	4,5	4,6	**2,4**
29	VALENCIA HERRERA OSCAR		1	1,0	0			0	0	1,6		1,6		5	5	**1,9**
30	VELASQUEZ HURTADO MARIA ALEJANDRA	1,6		1,6	0	4		4	0	1,2	1	2,2		4	4	**3,0**
31	ZEMANATE MENESES CARLOS BLADIMIR	0,5		0,5	0	4,5		4,5	0	1,3	1	2,3	0,8	4	4,8	**3,0**
32	ZUÑIGA BAOS HECTOR JAVIER	1		1,0	0			0	0	1		1		3,5	3,5	**1,4**
33	MUÑOZ MARTINEZ PABLO ALEJANDRO	5		5,0	0	5		5	0	3,3		3,3	5	4	5	**4,6**

Tabla 4.1: notas grado 9D Institución Educativa técnico Industrial

Según la Institución Educativa Técnico Industrial (sede principal), el grado 9D constaba de 40 estudiantes, pero durante la intervención de la práctica, hubo 7 estudiantes que nunca asistieron a clase ni presentaron actividades. Estos estudiantes no se tienen en cuenta para el análisis de los resultados, por tanto siempre que se hable del grado 9D, se referirá a los 33 estudiantes restantes. (*Ver tabla 4.1*).

En la Tabla 4.1 se puede observar que:

- La *Nota final Ecuaciones de segundo grado*, es la suma de las notas E*xamen Ecuaciones de segundo grado* y *Examen Opcional Ecuaciones de segundo grado*, en esta ocasión, para algunos estudiantes la suma de estas notas se pasa de 5.0 y según la escala de calificaciones de la institución esto no puede darse, por tanto, este resto de nota se tiene en cuenta como *nota extra 1.* (*ver imagen 4.4*).

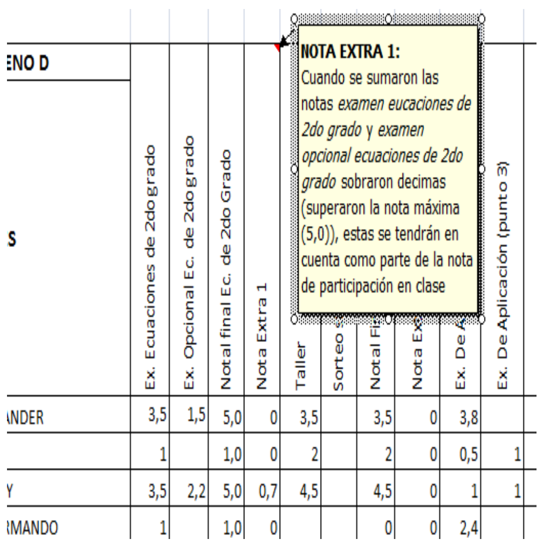


Imagen 4.4: Nota extra 1

El diagrama de caja Nota Final Ecuaciones de segundo grado (*diagrama 4.1*), está organizado por género y se tiene que:

1. Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica sacaron notas entre 0.0 y 2.0 en la actividad Nota Final de Ecuaciones de segundo grado, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 0.0 y 1.0

aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 1.1 y 1.5 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 1.6 y 1,8 aproximadamente y el último 25% entre 1.8 y 2.0 aproximadamente. El estudiante número 28, aprobó el tema pero perdió los temas impartidos en la Práctica. (*Ver* D*iagrama 4.1*).

Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, obtuvieron notas entre 0.5 y 5.0 en la actividad Nota Final de Ecuaciones de segundo grado, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 0.5 y 2.8 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 2.9 y 4.5 aproximadamente; y el último 50% notas entre 4.6 y 5.0 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.1*).

2. Las estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.5 y 3.2 en la actividad Nota Final de Ecuaciones de segundo grado, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 0.5 y 0.8 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 0.9 y 1.8 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 1.9 y 2,8 aproximadamente y el último 25% entre 2.9 y 3.2 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.1*).

   Las estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, obtuvieron notas entre 1.6 y 5.0 en la actividad Nota Final de Ecuaciones de segundo grado, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 1.6 y 3.5 aproximadamente; y el otro 75% de estos estudiantes obtuvo notas entre 3.6 y 5.0 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.1*).

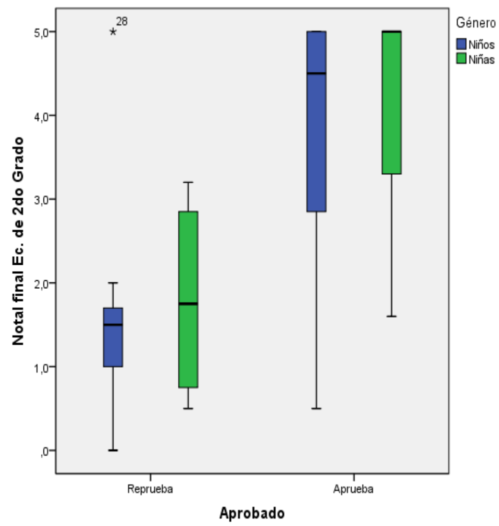
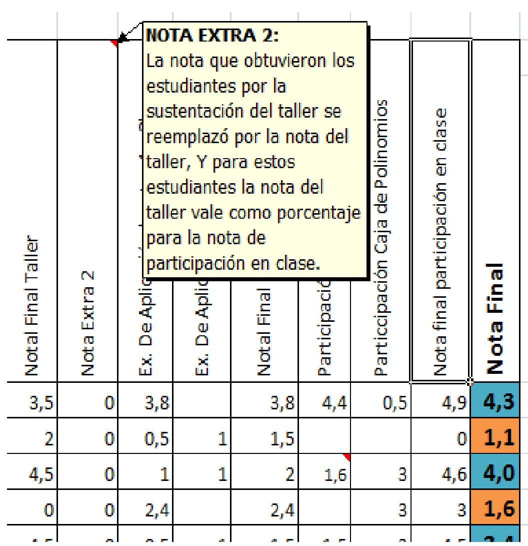


Diagrama 4.1: diagrama de caja Nota final Ecuaciones de segundo grado

- La *Nota Final Taller* es la suma de las notas *Taller* y *Sorteo sustentación del taller*. Para obtener esta segunda nota se sacaron dos números de la lista al azar, a estos estudiantes se les pidió sustentar dos ejercicios del taller en el tablero. La nota que obtuvieron en la sustentación se reemplazó por la nota que sacaron en el taller, y la nota del taller es la *nota extra 2*. (*ver imagen 4.5*).



NOTA EXTRA 2:
La nota que obtuvieron los estudiantes por la sustentación del taller se reemplazó por la nota del taller, Y para estos estudiantes la nota del taller vale como porcentaje para la nota de participación en clase.

Notal Final Taller	Nota Extra 2	Ex. De Aplic	Ex. De Aplic	Notal Final	Participació	Particcipación Caja de Polinomios	Nota final participación en clase	**Nota Final**
3,5	0	3,8		3,8	4,4	0,5	4,9	**4,3**
2	0	0,5	1	1,5			0	**1,1**
4,5	0	1	1	2	1,6	3	4,6	**4,0**
0	0	2,4		2,4		3	3	**1,6**

Imagen 4.5: Nota extra 2.

- El diagrama de caja Nota Final Taller (D*iagrama 4.2*), está organizado por género y se tiene que:

1. Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica sacaron notas entre 0.0 y 3.5 en la actividad *Nota Final Taller*, distribuidos así: el 50% de estos estudiantes sacó 0.0; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 0.1 y 2.0 aproximadamente; y el último 25% entre 2.1 y 3.5 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.2*).

   Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica obtuvieron notas entre 2.5 y 5.0 en la actividad *Nota Final Taller*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 2.5 y 3.5 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 3.6 y 4.0 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 4.1 y 4.5 aproximadamente; y el último 52% notas entre 4.6 y 5.0 aproximadamente. El estudiante número 10 no entregó el taller, ni participó en el sorteo pero aprobó el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica. (*Ver* D*iagrama 4.2*).
2. Las estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 4.0 en la actividad *Nota Final Taller*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 0.0 y 1.0 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 1.1 y 2.8 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 2.9 y 3,7 aproximadamente y el último 25% entre 3.8 y 4.0 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.2*).

   Las estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, obtuvieron notas entre 3.0 y 5.0 en la actividad *Nota Final Taller*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 3.0 y 3.4 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 3.5 y 4.0 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 4.1 y 4.5 aproximadamente y el último 25% entre 4.5 y 5.0 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.2*).

Los estudiantes que tienen 0.0 en la nota del taller, es porque no lo entregaron.

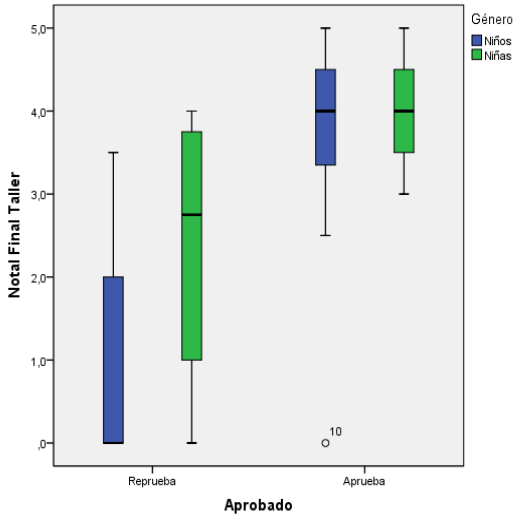


Diagrama 4.2: diagrama de caja Nota Final Taller

- La *Nota Final Examen de Aplicación* es el total de la suma de las notas E*xamen de Aplicación (puntos 1 y 2)* y *Examen de Aplicación (punto 3)*. El examen de aplicación constó de tres puntos y se realizó en dos partes, los dos primeros puntos lo debían solucionar en el salón de clase, y el tercer punto en la casa y lo debían entregar a la clase siguiente del día del examen. (*Tabla 4.1*).

El diagrama de caja Nota Final Examen de Aplicación (D*iagrama 4.3*), está organizado por género y se tiene que:

1. Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 3.0 en la actividad *Nota Final Examen de Aplicación*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó 0.0 y 0.7 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 0.8 y 1.0 aproximadamente; el siguiente 25% de estos estudiantes obtuvo notas entre 1.1 y 2.0 aproximadamente y el último 25% entre 2.1 y 3.0 aproximadamente. El estudiante número 9 aprobó el Examen de Aplicación pero reprobó el promedio de la Práctica. (*Ver* D*iagrama 4.3*).

   Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, obtuvieron notas entre 1.5

y 4.0 en la actividad *Nota Final Examen de Aplicación*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 1.5 y 2.0 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 2.1 y 2.5 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 2,6 y 3.4 aproximadamente; y el último 25% notas entre 3.5 y 4.0 aproximadamente. (*Ver Diagrama 4.3*).

2. Las estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.5 y 2.3 en la actividad *Nota Final Examen de Aplicación*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 0.5 y 0.8 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 0.9 y 1.3 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 1.4 y 1.8 aproximadamente y el último 25% entre 1.9 y 2.3 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.3*).

   Las estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, obtuvieron notas entre 2.0 y 3.3 en la actividad *Nota Final Examen de Aplicación*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 2.0 y 2.2 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 2.3 y 2.4 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 2.5 y 2.8 aproximadamente y el último 25% entre 2.9 y 3.3 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.3*).

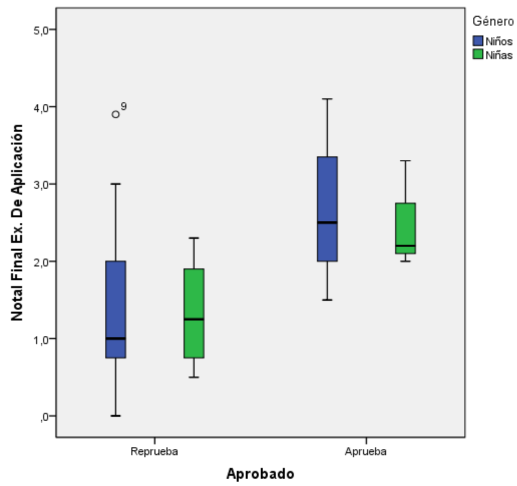


Diagrama 4.3: diagrama de caja Nota Final Examen de Aplicación.

- La *Nota Final Participación en Clase* es el total de la suma de las notas *Participación en Clase* y *Participación Caja de Polinomios*. La *Nota Extra1*, *Nota Extra 2*, y las notas equivalentes al número de puntos obtenidos en clase por participar en la solución de ejercicios (*Participación en Clase* y *Participación Caja de Polinomios*), constituyen la *Nota Final Participación en Clase de la siguiente manera:*

$$(10\% * Nota\ \ Extra\ 1) + (\ 10\% * Nota\ \ Extra\ \ 2) + (Participación\ en\ clase)$$
$$+ (Participación\ caja\ \ de\ \ polinomios) = Nota\ Final\ \ participación\ en\ Clase$$

El diagrama de caja Nota final participación en clase (D*iagrama 4.4*), está organizado por género y se tiene que:

1. Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.5 y 5.0 en la actividad *Nota Final Participación en Clase*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó 0.5 y 2.3 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvio notas entre 2.4 y 3.0 aproximadamente; el siguiente 25% de estos estudiantes obtuvieron notas entre 3.1 y 4.0

aproximadamente y el último 25% entre 4.1 y 5.0 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.4*).

Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, obtuvieron notas entre 1.5 y 4.9 en la actividad *Nota Final Participación en Clase*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 1.5 y 3.5 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 3.6 y 4.4 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvieron notas entre 4,5 y 4.7 aproximadamente; y el último 25% notas entre 4.8 y 4.9 aproximadamente. (*Ver Diagrama 4.4*).

2. Las estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 3.0 en la actividad *Nota Final Participación en Clase*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 0.0; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvieron notas entre 0.0 y 1.3 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 1.4 y 2.7 aproximadamente y el último 25% entre 2.8 y 3.0 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.4*).

   Las estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, obtuvieron notas entre 3.5 y 5.0 en la actividad *Nota Final Participación en Clase*, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 3.5 y 3.7 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 3.8 y 4.0 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 4.1 y 4.5 aproximadamente y el último 25% entre 4.6 y 5.0. (*Ver* D*iagrama 4.4*).

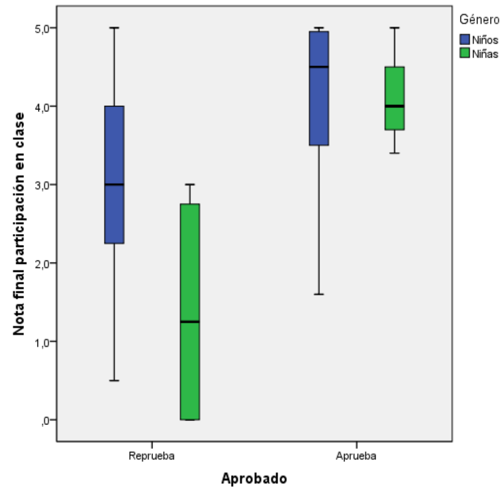


Diagrama4.4: Diagrama de Caja Nota final participación en clase

- La ***Nota Final*** es el promedio de las notas: *Nota final Ecuaciones de segundo grado*, *Nota Final Taller, Nota Final Examen de Aplicación* y *Nota Final Participación en Clase.*

  El diagrama de caja Nota Final (D*iagrama 4.5*), está organizado por género y se tiene que:

  1. Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.1 y 2.6, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó 0.1 y 1.4 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 1.5 y 1.7 aproximadamente; el siguiente 25% de estos estudiantes obtuvieron notas entre 1.8 y 2.3 aproximadamente y el último 25% entre 2.4 y 2.6 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.5*).

     Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica obtuvieron notas entre 3.0 y 4.6, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 3.0 y 3.1 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 3.2 y 3.4 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 3.5 y 4.0 aproximadamente; y el último 25% notas entre 4.1 y 4.6 aproximadamente. (*Ver Diagrama 4.5)*.

2. Las estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 1.1 y 2.4, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 1.1 y 1.2; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 1.3 y 1.6 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 1.7 y 2.1 aproximadamente y el último 25% entre 2.2 y 2.4 aproximadamente. (*Ver* D*iagrama 4.5*).

   Las estudiantes que aprobaron el promedio de los temas impartidos en la práctica obtuvieron notas entre 3.0 y 4.1, distribuidos así: el 25% de estos estudiantes sacó notas entre 3.0 y 3.5 aproximadamente; el siguiente 25% de los estudiantes obtuvo notas entre 3.5 y 3.8 aproximadamente; el siguiente 25 % entre 3.9 y 4.0 aproximadamente y el último 25% su nota fue 4.1. (*Ver* D*iagrama 4.5*).

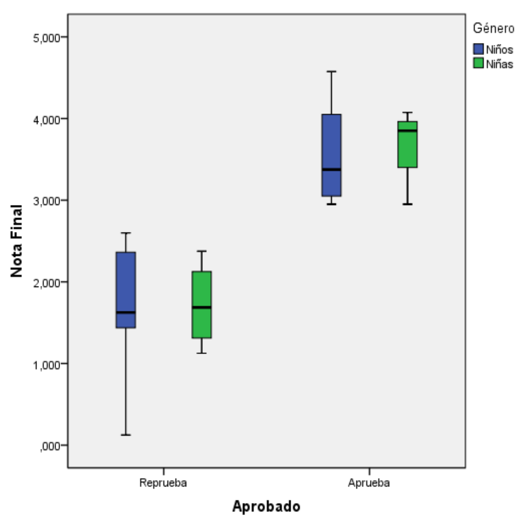


Diagrama4.5: Diagrama de Caja Nota Final

4.2 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

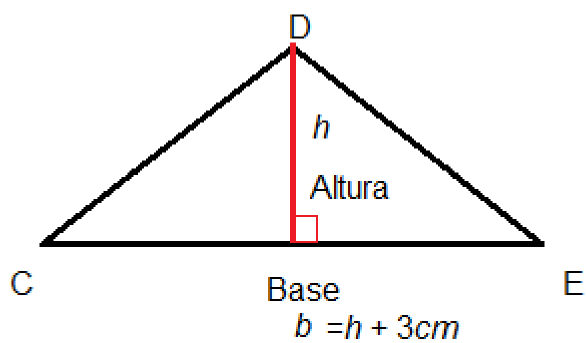
Para dar respuesta a la pregunta de investigación (*¿Qué estrategias utilizan los estudiantes del grado 9D de la Institución Educativa Técnico Industrial Popayán* *(sede principal) para resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas?,* (capítulo 3)), se eligió el punto No.1 del Examen: problemas que se resuelven utilizando ecuaciones de segundo grado (ver anexo 1):

Calcular la base y la altura de un triangulo cuya área mide $2cm^2$*, si la base mide* $3cm$ *más que la altura.*

A continuación se presentará la solución de este ejercicio, siguiendo los pasos descritos en clase:

SOLUCIÓN:

Sea CDE un triángulo cualquiera con las características del problema:



1. El área de un triángulo es $\frac{base \times altura}{2}$.

2. Sea b la letra que representa la base y h la letra que representa la altura, entonces la base $b = h + 3cm$,

3. Como él $área\Delta CDE = \frac{b \times h}{2}$, y además el $área\Delta CDE$ mide $2cm^2$, entonces si se reemplazan estos valores en la fórmula del área del triángulo tenemos:

$$área\Delta CDE = \frac{(h+3) \times h}{2} = 2$$

4.

$$\frac{h^2+3h}{2}=2$$

$$h^2+3h=2\times 2$$

$$h^2+3h-4=0$$

5. Para encontrar el valor de la altura h, se utilizarán las fórmulas cuadráticas

$$h_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\quad h_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\underset{a}{(1)}h^2+\underset{b}{(3)}h+\underset{c}{(-4)}=0$$

Reemplazando estos valores se tiene:

- $h_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{(3)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}=\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3+\sqrt{25}}{2}=$
  $=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1$
- $h_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{(3)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}=\frac{-3-\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3-\sqrt{25}}{2}=$
  $=\frac{-3-5}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

Las posibles soluciones son: $h_1=1$, $h_2=-4$

6. Como la altura es una longitud, entonces la única solución al problema es $h=1$. Para verificar esta afirmación se reemplazará este número en la ecuación: $h^2+3h-4=0$

$$h^2+3h-4=(1)^2+3(1)-4=1+3-4=4-4=0$$

Por tanto, la altura del ΔCDE mide $h = 1cm$ y la base $b = 4cm$.

Teniendo en cuenta que para esta Práctica Pedagógica investigativa, el tipo de investigación escogido es práctico, consistente en el ''análisis de comportamiento'' (*análisis de los procesos y las dificultades en el aprendizaje de conceptos, algoritmos y estrategias de trabajo, que se reflejan en las formas como los estudiantes realizan determinadas tareas o en las respuestas que dan a ciertas preguntas*), y los métodos de investigación pertenecientes a las fases recogida de información y tratamiento de dicha información son: el *"*estudio de casos*"* y el *"*método cualitativo*"* (capítulo 1)*;* se estudió rigurosamente la solución de este punto del examen de cada estudiante y se implementó la técnica de rejilla, clasificando a los estudiantes según las estrategias utilizadas por ellos en dicho ejercicio.

A continuación se presenta la clasificación de los estudiantes en cuatro grupos jerárquicamente organizados, según el nivel alcanzado en el desarrollo de la actividad y las estrategias utilizadas:

- **Estrategias de Nivel uno**: En ninguno de estos casos hay funcionamiento adecuado del concepto: solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.
- **Estrategias de Nivel dos**: La estrategia identifica el área del triángulo.
- **Estrategias de Nivel tres**: La estrategia identifica el área del triángulo y reconoce la información del problema que le permite transformar la fórmula del área en una ecuación de segundo grado.
- **Estrategias de Nivel cuatro**: La estrategia identifica el área del triángulo y reconoce la información del problema que le permite transformar la fórmula del área en una ecuación de segundo grado, la soluciona utilizando las fórmulas cuadráticas y concluye a partir de ellas.

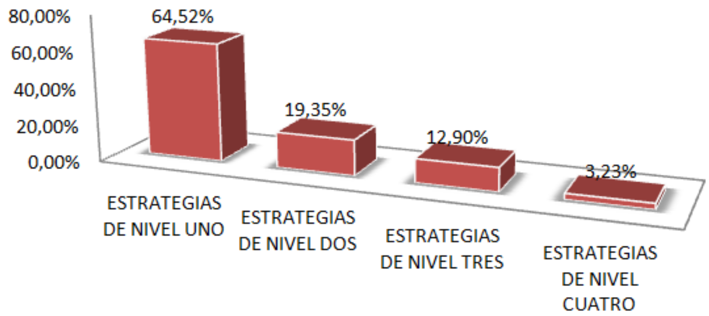


Diagrama 4.6 Diagrama de barras distribución porcentual en niveles según las estrategias de los estudiantes del grado 9D

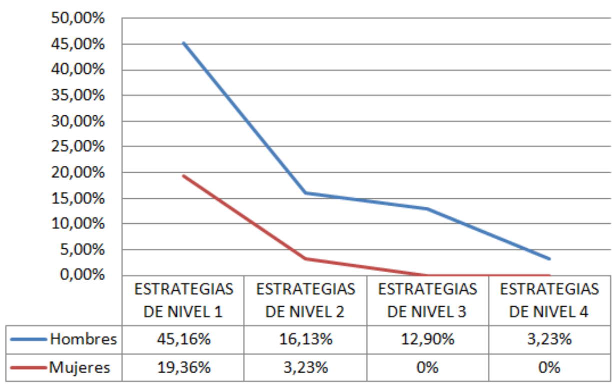


Diagrama 4.7 Diagrama de línea distribución porcentual en niveles según las estrategias de los estudiantes del grado 9D teniendo en cuenta el género

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1 DEL TRABAJO EN EL AULA

Imagen 5.1 Practicante en el aula, grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Antes de presentar el examen *Ecuaciones de segundo grado* los estudiantes asistieron a seis clases magistrales y media, en donde se abarcaron los temas: solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas y hallar la ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones (ver anexo 1); junto a esto, los estudiantes solucionaron ejercicios en clase y realizaron la primera parte de un taller en grupo acerca de estos temas, el cual, una vez terminado debían presentarlo escrito individualmente. El hecho de hallar la suma y el producto de soluciones de una ecuación de segundo grado y después enseñarles que a partir de ellas se puede encontrar la ecuación, les empezó a abrir el campo de problemas matemáticos con este tema, y a partir de esto iniciar las clases: problemas que se resuelven usando ecuaciones de segundo grado. (Ver anexo 1).

Después de obtener los resultados de este examen, se decidió realizar un examen opcional sobre el mismo tema, con el objetivo de mejorar la primer nota. Estas dos notas descritas se fusionaron convirtiéndose en la *Nota Final Ecuaciones de segundo grado.*

Observando la tabla 4.1, de los 33 estudiantes activos en el grado 9D, 21 (63,6%) atendieron el llamado del examen opcional, de donde se puede concluir que más de la mitad de los estudiantes optaron por mejorar su nota, mostrando interés por el tema.

De las siete mujeres del salón solo dos decidieron presentar el segundo examen, teniendo en cuenta que una de ellas ya había aprobado el primer examen; lo cual indica que a este género no les llamó la atención la segunda actividad, a pesar que de las otras cinco estudiantes, sólo una había ganado el examen.

Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 3.2 en la actividad Nota Final de Ecuaciones de segundo grado, pero hay que resaltar el hecho que las niñas que reprobaron, sacaron mejores notas que los niños que reprobaron. Hay un caso especial entre estos estudiantes, el número 28 de la lista de los estudiantes activos obtuvo la nota 5.0 en este tema pero reprobó al final, teniendo en cuenta las demás notas, más adelante se observará en qué momento el estudiante bajo su rendimiento académico. (D*iagrama 4.1*).

Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.5 y 5.0 en la actividad Nota Final de Ecuaciones de segundo grado, pero de nuevo las niñas sobresalieron en relación con las notas de los niños que reprobaron. (D*iagrama 4.1*).

Una vez terminado este tema, se dio inicio al siguiente titulado: *problemas que se resuelven usando ecuaciones de segundo grado,* el cual se realizó en cuatro clases magistrales. Durante este tiempo, se completó la solución del taller, y la oportuna entrega por parte de los estudiantes. Según la tabla 4.1, de los 33 estudiantes solo 24 presentaron el taller, esto indica que el 72,7% participaron en esta actividad, aunque la mayoría de las preguntas del taller los estudiantes las desarrollaron en clase y se dieron dos oportunidades para entregarlo. En varias ocasiones se realizaron preguntas a los nueve estudiantes restantes acerca del taller, pero no dieron respuesta alguna, entre estos el estudiante número 28 de la lista y el estudiante número 10 no entregaron el taller, ni participaron en el sorteo pero aprobó el promedio de la Práctica. (D*iagrama 4.2*).Después de la segunda fecha de entrega de esta actividad, se dio inicio con la sustentación del taller, con el fin de observar el comportamiento de los estudiantes explicando la solución de los ejercicios. Los estudiantes que fueron elegidos al azar, entre ellos una mujer, realizaron la actividad de la mejor manera, obteniendo la máxima nota.

Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 4.0 en la actividad Nota Final Taller, pero hay que resaltar el hecho que las niñas que reprobaron, sacaron mejores notas que los niños que reprobaron. (D*iagrama 4.2*).

Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 2.5 y 5.0 en la actividad Nota Final Taller, pero de nuevo las niñas sobresalieron en relación con las notas de los niños que aprobaron. El estudiante número 10 de la lista no entregó el taller, ni participó en el sorteo pero aprobó el promedio de la Práctica. (D*iagrama 4.2*).

Durante el desarrollo de estos temas también se propusieron ejercicios para participación en clase. Al Finalizar estos temas, se procedió a realizar el examen: problemas que se resuelven utilizando ecuaciones de segundo grado.

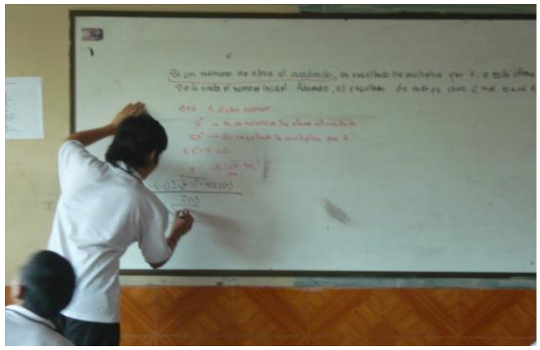


Imagen 5.2 Participación en clase, problemas que se resuelven usando ecuaciones de segundo grado, grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 3.0 en la actividad Nota Final Examen de Aplicación, pero hay que resaltar el hecho que las niñas que reprobaron, aunque no sacaron mejores notas que los niños, tampoco sacaron las notas más bajas. (D*iagrama 4.3*). El estudiante número 9 de la lista aprobó el Examen de Aplicación pero reprobó el promedio de la Práctica (D*iagrama 4.3*), observando la tabla 4.1 se puede detallar que este estudiante en las anteriores actividades saco notas de 2.0 y no presentó el examen opcional de ecuaciones de segundo grado. De ahí es claro el porqué su bajo rendimiento académico al final de todos los temas.

El tema: *La caja de polinomios*, se desarrollo en cinco clases magistrales, en esta parte las notas las obtuvieron solo realizando participación en clase, en donde no solo se tomaba en cuenta a los primeros cuatro estudiantes, si no a todo aquel que quisiera participar.

El siguiente diagrama muestra el desempeño de las participaciones de los estudiantes en las anteriores clases:

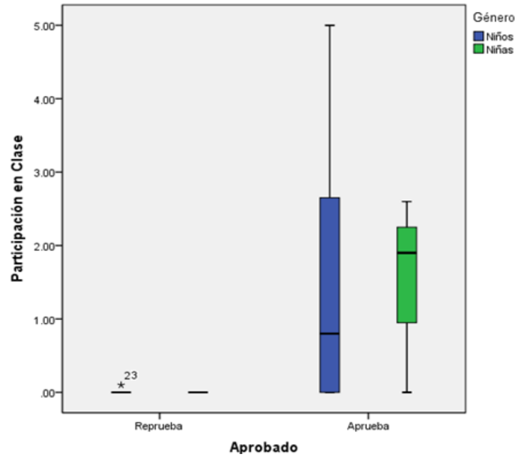


Diagrama 5.1 diagrama de caja Nota Participación en clase

Según diagrama 5.1, de los 33 estudiantes solo participaron en clase 13 estudiantes (39,4%), entre estos 2 mujeres.

Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 0.5 en Participación en Clase. Hay que resaltar el hecho que los estudiantes que reprobaron trabajaron más que las niñas que reprobaron. (*Diagrama 5.1*).

Los estudiantes que aprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 5.0 en participación en clase, pero de nuevo los niños sobresalieron en relación con las notas de las niñas que aprobaron. (D*iagrama 5.1*).

Imagen 5.3 Participación en clase, Grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Los estudiantes que no tienen la nota, significa que no participaron en clase, por tanto su nota es 0.0.

El siguiente diagrama muestra el desempeño de las participaciones de los estudiantes en las clases con la herramienta: La Caja de Polinomios:

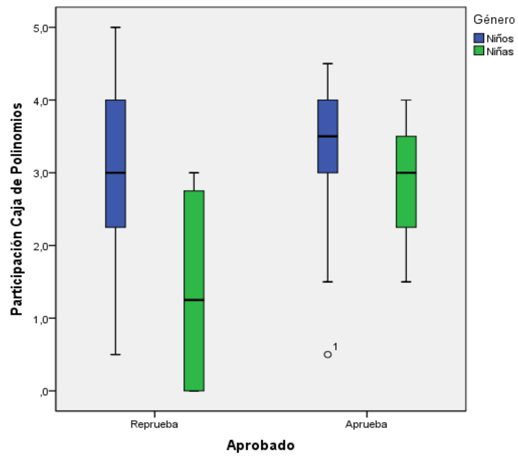


Diagrama 5.2: diagrama de caja Nota Participación Caja de Polinomios

En las clases: *La Caja de Polinomios,* participaron 31 estudiantes (93,9%), las 2 personas que no lo hicieron son mujeres.

Los estudiantes que reprobaron el promedio de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 0.0 y 5.0 en Participación con la herramienta La Caja de Polinomios, pero hay que resaltar el hecho que los niños que reprobaron, sacaron mejores notas que las niñas que reprobaron. (D*iagrama 5.2*).

Los estudiantes que aprobaron el promedio de de las notas correspondientes a los temas enseñados en la práctica pedagógica, sacaron notas entre 1.5 y 4.5 en Participación con la herramienta La Caja de Polinomios, pero en este caso también los niños sobresalieron en relación con las notas de las niñas que aprobaron. El estudiante número 1 de la lista, fue poco activa su participación, pero aprobó todos los temas de la práctica con la segunda mejor nota del curso. (D*iagrama 4.2*).

Los estudiantes que no tienen la nota, significa que no participaron en clase, por tanto su nota es 0.0.

Imagen 5.4 Participación en clase con la herramienta la Caja de Polinomios, Grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Imagen 5.5 Participación en clase con la herramienta la Caja de Polinomios, Grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Imagen 5.6 Participación en clase con la herramienta la Caja de Polinomios, Grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Imagen 5.7 Participación en clase con la herramienta la Caja de Polinomios, Grado 9D, Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

Según las notas del estudiante número 1 de la lista, se puede concluir que no le llama la atención participar en actividades con la Caja de Polinomios, pero si resolverlas de la forma tradicional (Ver anexo 1). Un acercamiento a la explicación de esta situación, es que el estudiante tiene claro cómo solucionar ecuaciones de segundo grado y cómo resolver problemas utilizando dichas ecuaciones de forma cotidiana, es como si no necesitara explorar más formas para resolver ejercicios que involucren estos temas.

El estudiante número 33 de la lista, es repitente de matemáticas del grado 9; obtuvo la mejor nota en el promedio de los temas impartidos en la práctica, siempre destacó por la participación y buena disposición en clase.

El trabajo con la Caja de Polinomios, presentó gran dificultad en la coordinación de las actividades con este número de estudiantes, por tanto, no se pueden realizar observaciones puntuales en ellos.

5.2 DE LA INVESTIGACIÓN

Desde la perspectiva psicológica de Vergnaud (1990) se interesa conocer el funcionamiento cognitivo del concepto solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas a través de las estrategias que utilizan los estudiantes del grado 9D para resolver problemas que involucren este concepto, para aproximarse a el, y teniendo en cuenta que los esquemas mentales que los estudiantes poseen no se pueden ver a simple vista, se planteó un ejercicio en una prueba escrita con el fin de promover la acción en el estudiante al tratar de resolverla y observar en los estudiantes las estrategias utilizadas por ellos para solucionar la situación.

Para iniciar la descripción del funcionamiento cognitivo se definirán las estrategias identificadas en las soluciones a los problemas presentados por los estudiantes.

ESTRATEGIAS DE NIVEL UNO

En ninguno de estos casos hay funcionamiento adecuado del concepto: solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas. Observando las soluciones de la situación propuesta a los estudiantes, sus estrategias se organizaron y se categorizaron jerárquicamente así:

ESTRATEGIA 1: A partir de los datos de la base, el área y la altura del problema, tratan de definir las variables b, a y h respectivamente.

Ejemplo:

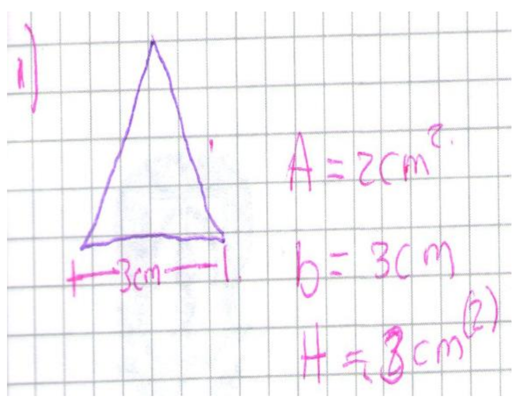


Imagen 5.8 Estrategia 1, Estrategias de nivel uno

ESTRATEGIA 2: Reemplazan los datos del problema en las fórmulas cuadráticas.

Ejemplo:

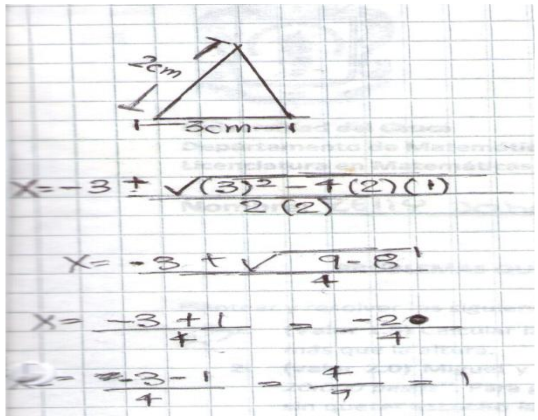


Imagen 5.9 Estrategia 2, Estrategias de nivel uno

ESTRATEGIA 3: A partir de los datos del problema proponen una ecuación de segundo grado y la soluciona utilizando las fórmulas cuadráticas.

Ejemplo.

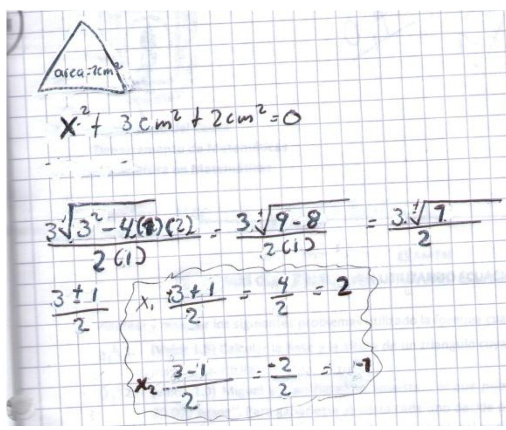


Imagen 5.10 Estrategia 3, Estrategias de nivel uno

ESTRATEGIA 4: Reconocen la información del problema que le permite transformar la fórmula del área en una ecuación de segundo grado, pero no logran convertirla. A partir de los datos del problema propone y soluciona una ecuación de segundo grado con las fórmulas cuadráticas.

Ejemplo:

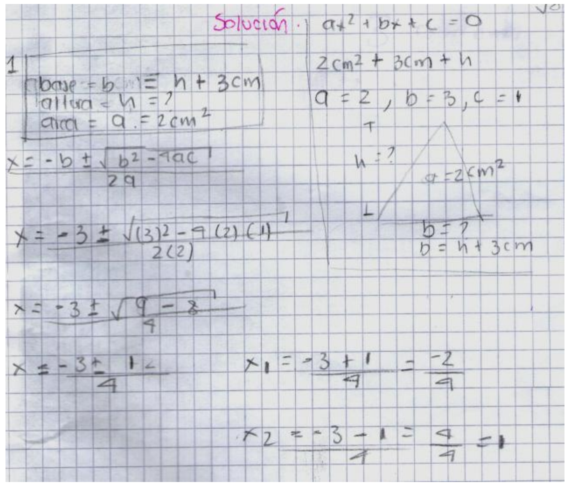


Imagen 5.11 Estrategia 4, Estrategias de nivel uno

El 62,52% que representa el grupo de los estudiantes que no tienen un funcionamiento adecuado del concepto: solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas, está distribuido según las estrategias de la siguiente manera:

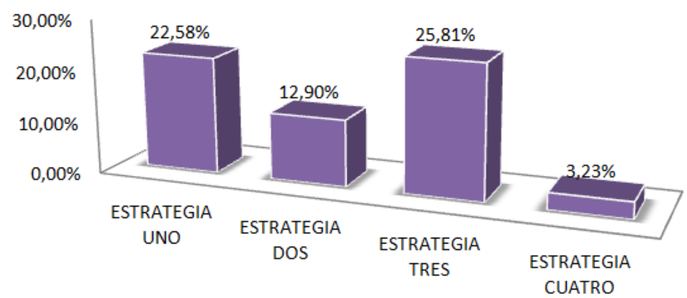


Diagrama 5.3 Diagrama de barras distribución porcentual Estrategias de nivel uno.

Esto indica que el grupo de estudiantes que tienen estrategias de nivel uno utilizan más la estrategia 3.

ESTRATEGIAS DE NIVEL DOS

La estrategia identifica el área del triángulo. Observando las soluciones de la situación propuesta a los estudiantes, sus estrategias se organizaron y se categorizaron jerárquicamente de la siguiente manera:

ESTRATEGIA 1: A parir del área del triángulo, tratan de solucionar el problema reemplazando los datos del problema en la fórmula.

Ejemplo:

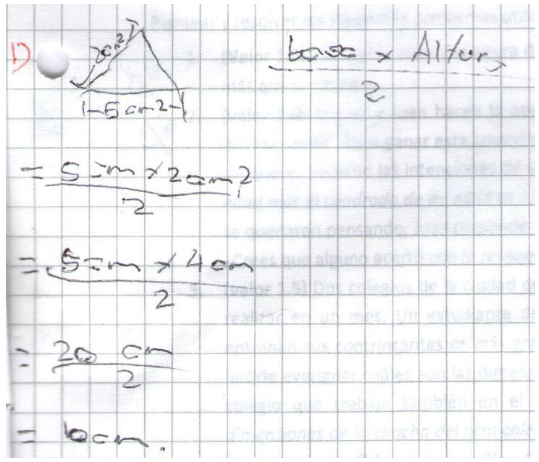


Imagen 5.12 Estrategia 1, Estrategias de nivel dos

Los estudiantes que eligieron esta estrategia, aunque inician bien reconociendo la fórmula del área del triángulo, no logran asociar esto con el resto de la información del problema adecuadamente, ya que reemplazan los datos del problema en la fórmula del área del triángulo.

ESTRATEGIA 2: Identifica el área del triángulo y reemplazan los datos del problema en las formulas cuadráticas, pero en ningún momento proponen una ecuación de segundo grado a solucionar.

Ejemplo:

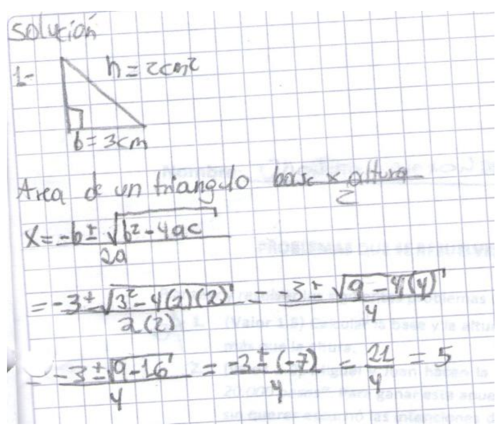


Imagen 5.13 Estrategia 2, Estrategias de nivel dos

Los estudiantes que eligieron esta estrategia, aunque inician bien reconociendo la fórmula del área del triángulo, no logran asociar esto con el resto de la información del problema adecuadamente, ya que reemplazan los datos del problema en las fórmula cuadráticas. Los estudiantes asocian la solución del problema con la solución de una ecuación de segundo grado, pero no logran organizar bien sus ideas.

ESTRATEGIAS 3: Identifica el área del triángulo y propone una ecuación de segundo grado a partir de los datos del problema.

Ejemplo:

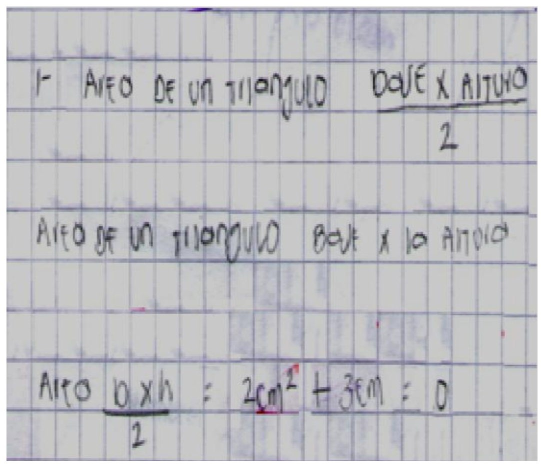


Imagen 5.14 Estrategia 3, Estrategias de nivel dos

Los estudiantes que eligieron esta estrategia, aunque inician bien reconociendo la fórmula del área del triangulo, no logran asociar esto con el resto de la información del problema adecuadamente y plantean una ecuación de segundo grado errónea. Los estudiantes asocian la solución del problema con una ecuación de segundo grado.

El hecho que los estudiantes planteen una ecuación de segundo grado utilizando como variable las unidades cm^2, está indicando que esto les genera a ellos un obstáculo cognitivo[2]; aunque tienen presente el concepto de ecuación de segundo grado para hallar la solución de este problema, les obliga a buscar de alguna manera esta igualdad matemática, relacionado a primera vista algún dato elevado al cuadrado.

ESTRATEGIA 4: Identifica el área del triángulo y propone una ecuación de segundo grado a partir de los datos del problema y halla su solución.
Ejemplo:

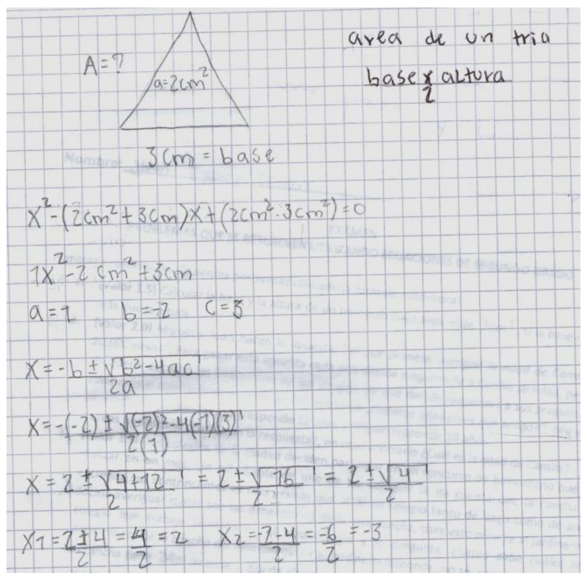


Imagen 5.15 Estrategia 4, Estrategias de nivel dos

Los estudiantes que eligieron esta estrategia, aunque inician bien reconociendo la fórmula del área del triangulo, no logran asociar esto con el resto de la información del problema adecuadamente y plantean una ecuación de segundo grado errónea y la solucionan utilizando las fórmulas cuadráticas. Los estudiantes asocian la solución del problema con una ecuación de segundo grado, hallan la solución, aunque estas no resuelven el problema no saben qué hacer con ellas.

[2] Aquel conocimiento que ha sido, en general, satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente resulta inadecuado, y difícil de adaptarse, cuando el alumno se enfrenta a problemas nuevos. (Brousseau 1983 citado por Serradó, 2005)

ESTRATEGIA 5: Identifica el área del triángulo pero socia mal la información del problema y con esto erróneamente transforma la fórmula del área en una ecuación de segundo grado.

Ejercicio:

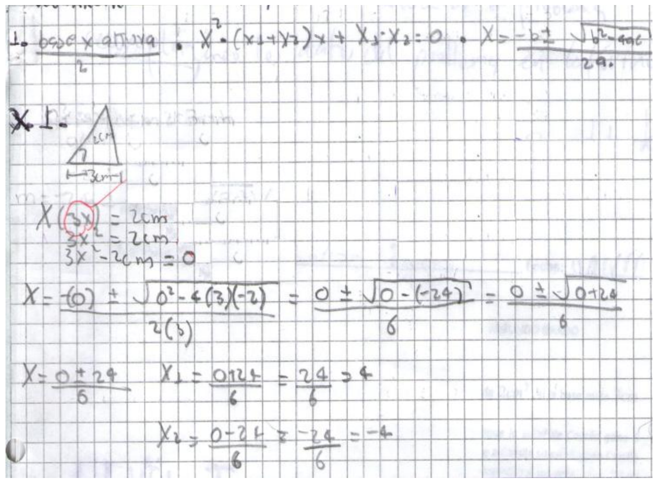


Imagen 5.16 Estrategia 5, Estrategias de nivel dos

Los estudiantes que eligieron esta estrategia, aunque inician bien reconociendo la fórmula del área del triangulo, tratan de asociar esto con la información del problema que le permite transformar la fórmula del área en una ecuación de segundo grado, a partir de esto plantea una ecuación de segundo grado errónea y la solucionan utilizando las fórmulas cuadráticas. Los estudiantes asocian la solución del problema con una ecuación de segundo grado tratando de utilizar la fórmula del área del triángulo, hallan la solución utilizando las fórmulas cuadráticas, aunque estas no resuelven el problema no saben qué hacer con ellas.

El 19, 35% que representa las estrategias de nivel dos, está distribuido según las estrategias de los estudiantes de la siguiente manera:

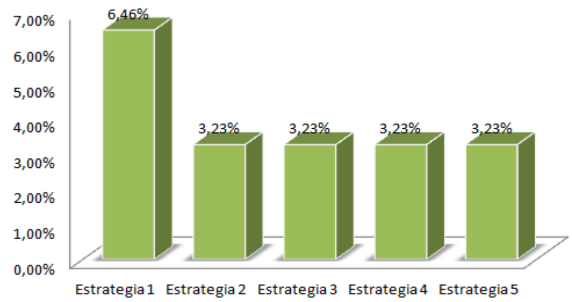


Diagrama 5.4 Diagrama de barras distribución porcentual Estrategias de nivel dos

Esto indica que los estudiantes que se ubican en las estrategias de nivel dos, utilizan más la estrategia 1.

ESTRATEGIAS DE NIVEL TRES

La estrategia identifica el área del triángulo y reconoce la información del problema que le permite transformar la fórmula del área en una ecuación de segundo grado, pero:

ESTRATEGIA 1: No logran plantear la ecuación de segundo grado que da la solución al problema.

Ejemplos:

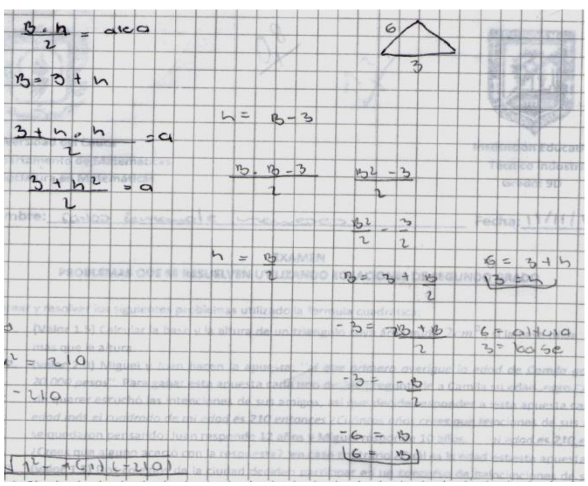


Imagen 5.17 Estrategia 1, Estrategias de nivel tres

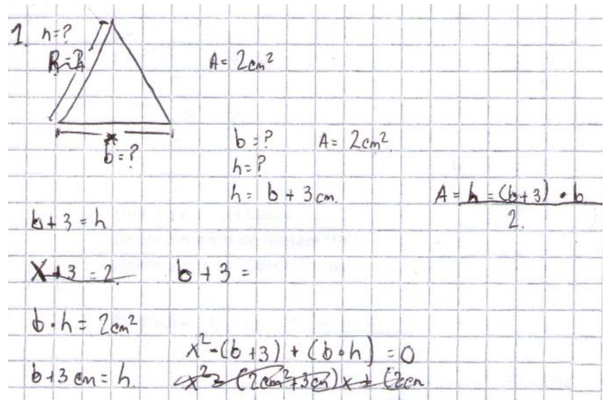


Imagen 5.18 Estrategia 1, Estrategias de nivel tres

Los estudiantes que eligieron esta estrategia, aunque reconocen la fórmula del área de la figura geométrica y la información del problema que le permite transformar la fórmula del área en una ecuación de segundo grado, tienen dificultades en operaciones algebraicas básicas para organizar esta nueva ecuación en una de segundo grado.

El 12, 90% que representa las estrategias de nivel dos, utilizan esta única estrategia.

ESTRATEGIAS DE NIVEL CUATRO

La estrategia identifica el área del triángulo y reconoce la información del problema que le permite transformar la fórmula del área en una ecuación de segundo grado, la soluciona utilizando las fórmulas cuadráticas y concluye a partir de ellas.

ESTRATEGIA 1: Realiza correctamente el ejercicio siguiendo los pasos lógicos enseñados en el aula de clase durante la práctica.

Ejemplo:

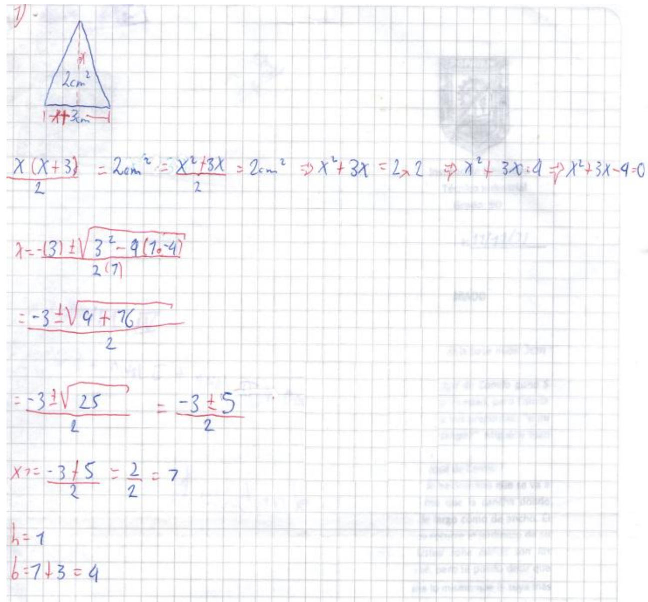


Imagen 5.19 Estrategia 1, Estrategias de nivel cuatro

El 3, 23% que representa el nivel 4, utilizan una sola estrategia.

Según las estrategias utilizadas por los estudiantes y siguiendo la corriente psicológica de Piaget (1936), se puede observar que el funcionamiento del concepto que construye un estudiante en el momento de solucionar el problema número uno del examen puede representarse así:

.

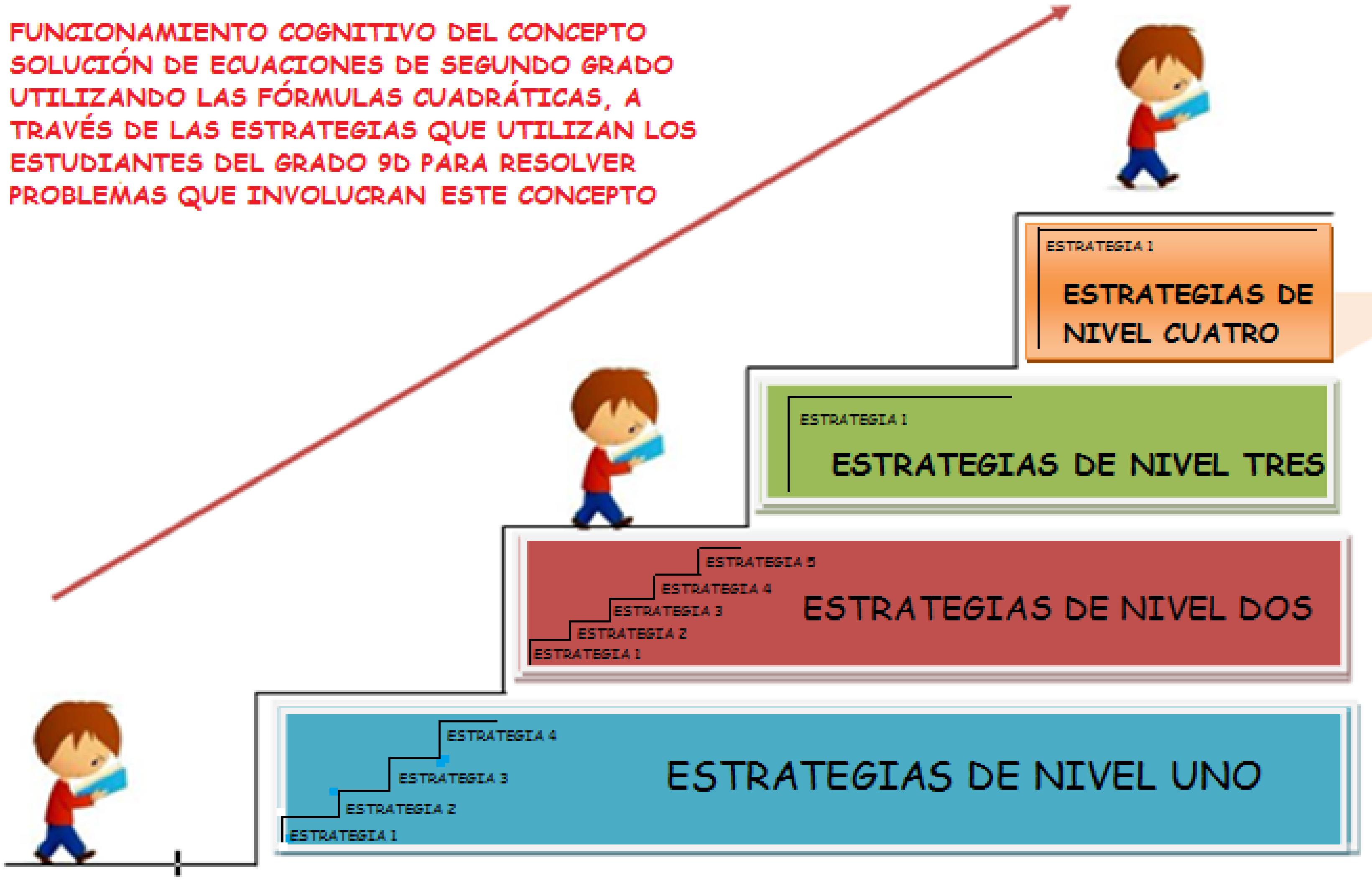


Figura 5.1 *Funcionamiento cognitivo.*

De tal manera que si un estudiante soluciona un problema siguiendo la misma secuencia lógica enseñada en la práctica pedagógica (Ver Anexo 1), las estrategias que él utiliza para su solución, se pueden ubicar en alguno de estos niveles y junto a esto, el profesor inmediatamente puede reconocer el nivel de conocimientos e inteligencia que tiene en ese instante; para procurar la forma más adecuada de retroalimentación, con el fin de que el estudiante continúe mejorando su funcionamiento cognitivo.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

- El desarrollo de la práctica pedagógica: enseñanza de solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas y la Caja de Polinomios, se concluyó satisfactoriamente.

- El objetivo de investigación de la práctica pedagógica, de encontrar las estrategias que utilizan los estudiantes del grado 9D de la Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal), para resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado empleando las fórmulas cuadráticas, se logró. Y a partir de estas, se propuso en el trabajo una escala de funcionamiento cognitivo del concepto solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.

- Según las estrategias que utilizaron los estudiantes para solucionar la situación propuesta, se observó que colocarles a ellos, que apenas están iniciando en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de segundo grado, datos con unidades cuadradas (ejemplo cm^2) genera obstáculos cognitivos.

- Durante la etapa de observación, se registró a los estudiantes que no participaban en clase y en el transcurso de la intervención en el aula de esta práctica, estos estudiantes se hicieron notar por sus intervenciones en la mayoría de las actividades.

- De los 33 estudiantes del grado 9D de la Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal), la participación en clase de las estudiantes fue muy reducida en comparación con el género masculino, pero las mujeres en numerosas actividades sacaron mejores notas que los hombres.

- Muchos de los estudiantes que participaron en las clases con la herramienta la Caja de Polinomios, no lo habían hecho en las anteriores clases.
- Trabajar el tema de soluciones de ecuaciones de segundo grado utilizando la Caja de Polinomios es muy atractivo para los estudiantes, pero es complicado en el aula de clase calificar las actividades cuando el número de alumnos es grande.

CAPÍTULO 7. RECOMENDACIONES

- Tener en cuenta las características del centro educativo a escoger para realizar la práctica pedagógica, con el fin de estar prevenido con los diferentes inconvenientes que se pueden presentar durante el desarrollo de los temas a enseñar y que el posible cambio de “plan de clase” no tome por sorpresa al practicante.

- Ejecutar la etapa de observación en el centro educativo a realizase la práctica es de vital importancia, ya que se da un preámbulo a lo que será enfrentarse a la realidad educativa, y más cuando se es primíparo en el asunto.

- Cuando el docente de matemáticas del centro educativo, presente el practicante a los estudiantes del grado a intervenir, lo haga como un colega más y no como la figura de estudiante que en realidad es, esto con el fin que ellos sientan el mismo respeto, compromiso y responsabilidad con las clases y las actividades que él realizará.

- Es importante que la Universidad del Cauca tenga un mayor número de convenios con centros educativos, en donde se pueda desarrollar la práctica pedagógica.

- Aumentar el número de créditos de la Práctica Pedagógica Investigativa III y IV, ya que estas etapas requiere más tiempo de dedicación que el planteado por la Universidad.

- Para los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad, es importante que cuando lleguen al proceso de la Practica

Pedagógica Investigativa, inicien con más tiempo la escritura del documento final, ya que el lapso de tiempo que indica el programa es muy corto.

- Por la experiencia en esta Práctica Pedagógica, cuando se trabaje el tema de resolución de problemas que involucran ecuaciones de segundo grado con la Caja de Polinomios, se haga con un grupo reducido de estudiantes (entre 5 y 10), ya que calificar las actividades con esta herramienta en el aula de clase se vuelve complicada, y aún más en investigación, cuando se quiere hacer observación para analizar el comportamiento de los estudiantes.

CAPÍTULO 8. BIBLIOGRAFÍA

Baldor, (1997). *ALGEBRA.*

Brinkmann, ((s.f.)). *Desarrollo Cognitivo, Apuntes de Psicología del Desarrollo.* Obtenido de http://www2.udec.cl/~hbrinkma/des_cognit_sensom.pdf

Serradó, (2005). *International Association for Statistical Education.* LOS OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONOCIMIENTO PROBABILÍSTICO: SU INCIDENCIA DESDE LOS LIBROS DE TEXTO. Obtenido de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf

Cruz, (2008). *Instituto Politécnico Nacional, México. Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática.*

Departamento de Matemáticas, (2010). *Práctica Pedagógica.* Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca. Obtenido de http://www.unicauca.edu.co/matematicas/ContenidosProgramaticos/PracticaPedagogica1234.pdf

Ecuaciones de segundo grado (o cuadráticas), ((s.f.)). Obtenido de *http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuaciones_Seg_grado.html.*

Ecuaciones de segundo grado, ((s.f)). Obtenido de *http://80.24.129.36/mates/descartes/4a_eso/Ecuacion_de_segundo_grado/Ecua_seg.htm.*

Genicio y Hernández, (2005). *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, volumen 18 . Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza.*

Gescas, (2005). *Proyecto La Caja de Polinomios, Guía:No.0.* Obtenido de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/file.php/418/guia00.pdf

Gescas, ((s.f.)). *Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 2: Lectura y Escritura de Polinomios.*

Gescas, ((s.f.)). P*royecto: la caja de polinomios guía No. 3: Adición y Sustracción de Polinomios Cuadráticos.*

Gescas, ((s.f.)). *Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 4: Optimización del uso del plano cartesiano.*

Gescas, ((s.f.)). *Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 5: Multiplicación de polinomios de la forma (ax+b)(cx+d).*

Gescas, ((s.f.)). *Proyecto: La Caja de Polinomios Guía No. 7: Factorización de polinomios de grado 2.*

Gutiérrez, (1991). *LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.*

INHELDER, (2007). *Las estrategias cognitivas: aproximacion al estudio de los procedimientos de resolucion de problemas.* Obtenido de http://www.raco.cat/index.php/anuariopsicologia/article/viewFile/60556/88125

Institución Educativa Técnico Industrial, ((s.f.)). *Institución Educativa Técnico Industria.*

Institución Educativa Técnico industrial, (2011). *Manual de Convivencia.*

Matemática en Construcción 8°, (2004). Oxford University Press.

Matemática en Construcción 9°, (2004). Oxford University Press.

Matemática Universal 9, (2005). Bedout editores S.A.

Melendez, (2010). *Universidad del Cauca. Sistematización de la experiencia pedagógica: el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios, con el apoyo de una herramienta didáctica denominada la caja de polinomios.*

MEN, (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Obtenido de Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN, ((s.f.)). *Serie de Lineamientos Curriculares.* Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de educación Cutltura y Deporte, (2009). *Ecuaciones de Segundo Grado*. Ministerio de educación, Cutltura y Deporte, españa. Obtenido de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena3/3eso_quincena3.pdf

Ministerio de Educación Nacional, ((s.f.)). *¿Qué son los estándares?* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87440.html

Ministerio de Educación Nacional, ((s.f.)). *Lineamientos Curriculares*. Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-80860.html

Moreira, (2002). *LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES DE VERGNAUD, LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA INVESTIGACIÓN EN EL ÁREA.* Obtenido de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf

Olmos y Martínez, .. (2000). *MATEMÁTICA PRÁCTICA 9.* Voluntad.

Piaget, (1936). *EL NACIMIENTO DE LA INTELIGENCIA EN EL NIÑO.*

Polya, (2001). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.*

Problemas de ecuaciones de segundo grado, ((s.f.)). Obtenido de *http://www.vitutor.com/ecuaciones/2/p_e.html.*

Sandoval, (2011). *PROYECTO DE PRÁCTICA PEDAGÓGICA INVESTIGATIVA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO: CASO DE LA CAJA DE POLINOMIOS COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA.*

Soto, Mosquera y Gómez, (2005). *La Caja de Polinomios.*

Universidad de nariño, ((s.f.)). *Guías: Proyecto la Caja de Polinomios.*

Vergnaud, (1990). *LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES.*

Zill Dewar, (2000). *Algebra y Trigonometría.* McGraw-Hill.

ANEXOS

ANEXO 1:

Clases: Solución de ecuaciones de segundo con las fórmulas cuadráticas y factorización de polinomios usando la caja de polinomios. Institución Educativa Técnico Industrial Popayán (sede principal)

<u>SESIÓN 1</u>

Clase No. 1

Objetivos:

- Deducir las fórmulas cuadráticas a partir de la solución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ por el método de complementación.
- solucionar ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.

En las clases anteriores se estudiaron dos métodos distintos para solucionar ecuaciones de segundo grado: por factorización y por complementación.

Ahora, en lugar de repetir el proceso de completar cuadrado para cada ecuación de segundo grado que no sea fácil de factorizar, se puede generalizar este método para llegar a unas fórmulas que facilite la solución de cualquier ecuación de segundo grado. Estas fórmulas se conocen con el nombre de <u>fórmulas de la ecuación de segundo grado</u> o <u>fórmulas cuadráticas.</u>

Recordemos con un ejemplo el método para solucionar ecuaciones de segundo grado por complementación.

$$5x^2 - 26x + 24 = 0$$

Siguiendo los pasos para resolver la ecuación, aislemos el término independiente

$$5x^2 - 26x = -24$$

Como el coeficiente de x^2 es diferente de 1, dividimos cada término de la ecuación por este coeficiente

$$\frac{5}{5}x^2 + \left(\frac{-26}{5}\right)x = -\frac{24}{5} \quad \text{Obteniendo}$$

$$x^2 + \left(-\frac{26}{5}\right)x = -\frac{24}{5}$$

El cuadrado de la mitad del coeficiente de x es:

$$\left(-\frac{26}{2*5}\right)^2=\left(-\frac{26}{10}\right)^2$$

Ahora, sumamos a cada miembro de la ecuación este valor:

$$x^2+\left(-\frac{26}{5}\right)x+\left(-\frac{26}{10}\right)^2=-\frac{24}{5}+\left(-\frac{26}{10}\right)^2$$

Como $\left(-\frac{26}{10}\right)^2=\left(\frac{26}{10}\right)^2$ entonces,

$$x^2-\frac{26}{5}x+\left(\frac{26}{10}\right)^2=-\frac{24}{5}+\left(\frac{26}{10}\right)^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$\left(x-\frac{26}{10}\right)^2=-\frac{24}{5}+\left(\frac{26}{10}\right)^2$$

Simplificando se tiene

$$\left(x-\frac{26}{10}\right)^2=-\frac{24}{5}+\left(\frac{13}{5}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{26}{10}\right)^2=\frac{169}{25}-\frac{24}{5}=\frac{169-120}{25}$$

$$\left(x-\frac{26}{10}\right)^2=\frac{49}{25}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{26}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{25}}$$

$$x-\frac{26}{10}=\pm\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}=\pm\frac{7}{5}$$

$$x = \frac{26}{10} \pm \frac{7}{5}$$

$$x = \frac{26 \pm 14}{10}$$

Así tenemos las soluciones,

$x_1 = \frac{26+14}{10} = \frac{40}{10} = 4$; $\quad x_2 = \frac{26-14}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$, es decir las soluciones son:

$$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = \frac{6}{5}$$

Verifiquemos que estas sean solución de la ecuación $5x^2 - 26x + 24 = 0$

- $x_1 = 4$
  $5(4)^2 - 26(4) + 24 = 5(16) - 104 + 24 = 80 - 104 + 24 = -24 + 24 = 0$
- $x_2 = \frac{6}{5}$

$$5\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 26\left(\frac{6}{5}\right) + 24 = 5\left(\frac{36}{25}\right) - \frac{156}{5} + 24 = \frac{180}{25} - \frac{156}{5} + 24 = \frac{180 - 780 + 600}{25} = \frac{0}{25} = 0$$

Ejercicio: siguiendo el método de complementación, solucionar la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ Donde a es diferente de 0.

Solución:

Siguiendo los pasos para resolver la ecuación, aislemos el término independiente

$$ax^2 + bx = -c$$

De a solo sabemos que es diferente de 0, entonces dividamos cada término de la ecuación por este coeficiente

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$ esto es,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Ahora, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x es: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, y sumando este a cada miembro de la ecuación

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{ab^2-4a^2c}{4a^3}=\frac{a\left(b^2-4ac\right)}{4a^3}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$ Ahora,

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Las soluciones son

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\;;\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las formulas de la ecuación cuadrática ó formulas cuadráticas son:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Usando las formulas cuadráticas resolver

$$x^2-7x=-10$$

Solución:

Organizando la ecuación tenemos

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Es decir,

$$\underbrace{(1)}_{a}x^2 + \underbrace{(-7)}_{b}x + \underbrace{10}_{c} = 0$$

Entonces $a = 1$, $b = -7$ y $c = 10$. Reemplazando estos valores en las formulas cuadráticas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2}$$ Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5; \quad x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$

- $x_1 = 5$
  $x^2 - 7x + 10 = (5)^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = -10 + 10 = 0$
- $x_2 = 2$
  $x^2 - 7x + 10 = (2)^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = -10 + 10 = 0$

Ejercicio: Usando las formulas cuadráticas resolver

- $5x^2 - x - 18 = 0$ (Rpta: $x = 2; x = -\frac{9}{5}$)
- $x^2 - 4x = -4$ (Rpta: $x = 2$)

Clase No. 2

Objetivo:

- Encontrar las soluciones (reales) de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.

La clase anterior se dejaron como ejercicio solucionar dos ecuaciones de segundo grado, para recordar este tema resolver estos puntos.

Solución:

- $5x^2 - x - 18 = 0$

$$\underbrace{(5)}_{a}x^2 + \underbrace{(-1)}_{b}x + \underbrace{(-18)}_{c} = 0$$

Entonces $a = 5$, $b = -1$ y $c = -18$. Reemplazando estos valores en las fórmulas cuadráticas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(5)(-18)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 20(-18)}}{10}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 360}}{10}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{10}$$

$$x = \frac{1 \pm 19}{10}$$ Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{1 + 19}{10} = \frac{20}{10} = 2\,; \quad x_2 = \frac{1 - 19}{10} = \frac{-18}{10} = -\frac{9}{5}$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $5x^2 - x - 18 = 0$

- $x_1 = 2$

  $5x^2 - x - 18 = 5(2)^2 - (2) - 18 = 20 - 2 - 18 = 18 - 18 = 0$

- $x_2 = -\dfrac{9}{5}$

  $$5x^2 - x - 18 = 5\left(-\frac{9}{5}\right)^2 - \left(-\frac{9}{5}\right) - 18 = 5\left(\frac{81}{25}\right) + \frac{9}{5} - 18 = \frac{81}{5} + \frac{9}{5} - 18 =$$

  $$\frac{81 + 9 - 90}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

- $x^2 - 4x = -4$

  Primero se debe organizar el polinomio y encontrar a, b y c

  $$x^2 - 4x + 4 = 0$$

  $$\underbrace{(1)}_{a}x^2 + \underbrace{(-4)}_{b}x + \underbrace{(4)}_{c} = 0$$

  Entonces $a = 1$, $b = -4$ y $c = 4$. Reemplazando estos valores en las fórmulas cuadráticas:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

  $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

  $$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(4)}}{2}$$

  $$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

  $$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$ Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene dos soluciones iguales $x_1 = 2$

Verifiquemos que esta sea la solución de la ecuación

- $x_1 = 2$
  $x^2 - 4x + 4 = (2)^2 - 4(2) + 4 = 4 - 8 + 4 = -4 + 4 = 0$

Ejercicio: Usando las fórmulas cuadráticas resolver

$$9x^2 + 6x = 1$$

Solución:

Organizando la ecuación tenemos

$$9x^2 + 6x - 1 = 0$$

Es decir,

$$\underbrace{(9)}_{a}x^2 + \underbrace{(6)}_{b}x + \underbrace{(-1)}_{c} = 0$$

Entonces $a = 9$, $b = 6$ y $c = -1$. Reemplazando estos valores en las fórmulas cuadráticas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(9)(-1)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 36}}{18}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{72}}{18}=\frac{-6\pm\sqrt{9*4*2}}{18}=\frac{-6\pm\sqrt{9}\sqrt{4}\sqrt{2}}{18}=\frac{-6\pm 3*2\sqrt{2}}{18}=\frac{-6\pm 6\sqrt{2}}{18}=\frac{6\left(-1\pm\sqrt{2}\right)}{6(3)}$$

$\frac{-1\pm\sqrt{2}}{3}$ Las soluciones son:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{2}}{3};\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{2}}{3}$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $9x^2+6x-1=0$

- $x_1=\frac{-1+\sqrt{2}}{3}$

$$9x^2+6x-1=9\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{3}\right)^2+6\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{3}\right)-1=$$
$$=9\left(\frac{1-2\sqrt{2}+2}{9}\right)+2\left(-1+\sqrt{2}\right)-1=$$
$$=1-2\sqrt{2}+2-2+2\sqrt{2}-1=0$$

- $x_2=\frac{-1-\sqrt{2}}{3}$

$$9x^2+6x-1=9\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{3}\right)^2+6\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{3}\right)-1=$$
$$=9\left(\frac{1+2\sqrt{2}+2}{9}\right)+2\left(-1-\sqrt{2}\right)-1=$$
$$=1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}-1=0$$

Ejercicio: Usando las formulas cuadráticas resolver

$$z^2+8z+6=0$$

Solución:

$$\underset{a}{(1)}z^2+\underset{b}{(8)}z+\underset{c}{(6)}=0$$

Entonces $a=1$, $b=8$ y $c=6$. Reemplazando estos valores en las fórmulas cuadráticas:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$z = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 24}}{2}$$

$$z = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4 * 10}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}\sqrt{10}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{2\left(-4 \pm \sqrt{10}\right)}{2(1)}$$

$= -4 \pm \sqrt{10}$ Las soluciones son:

$$z_1 = -4 + \sqrt{10}\ ;\quad z_2 = -4 - \sqrt{10}$$

Verifiquemos que estas sean la soluciones de la ecuación $z^2 + 8z + 6 = 0$

- $z_1 = -4 + \sqrt{10}$
  $z^2 + 8z + 6 = \left(-4 + \sqrt{10}\right)^2 + 8\left(-4 + \sqrt{10}\right) + 6 = 16 - 8\sqrt{10} + 10 - 32 + 8\sqrt{10} + 6 = 16 - 8\sqrt{10} + 8\sqrt{10} - 16 = 0$
- $z_2 = -4 - \sqrt{10}$
  $z^2 + 8z + 6 = \left(-4 - \sqrt{10}\right)^2 + 8\left(-4 - \sqrt{10}\right) + 6 = 16 + 8\sqrt{10} + 10 - 32 - 8\sqrt{10} + 6 = 16 + 8\sqrt{10} - 8\sqrt{10} - 16 = 0$

Ejercicio: Usando la fórmula cuadrática resolver

- $5x^2 - 26x = -24$ (Rpta: $x = 4; x = -\frac{3}{2}$)
- $x^2 = -4x + 5$ (Rpta: $x = -5; x = 1$)
- $y^2 + 36 = 0$ (Rpta: $x = 6i; x = -6i$)

Clase No. 3

Objetivo:

- Encontrar las soluciones (complejas) de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.

Las soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ donde a es diferente de 0 es $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (*)

Obsérvese que la operación b^2-4ac de (*) tiene tres posibilidades:

$$b^2-4ac>0,\quad b^2-4ac<0 \text{ y } b^2-4ac=0,$$

En las clases anteriores se han estudiado caos en que $b^2-4ac>0$ y $b^2-4ac=0$, esto es, dos soluciones reales, y soluciones iguales respectivamente.

Ahora se estudiará el caso en que las soluciones sean complejas, es decir cuando $b^2-4ac<0$.

Nota:

- $(-i)^2=(-i)(-i)=i^2=-1$
- $(a+bi)\ =a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=a^2+2abi-b^2$
- $(a-bi)\ =a^2-2abi+(bi)^2=a^2-2abi+b^2i^2=a^2-2abi-b^2$

Ejercicio: Usando las fórmulas cuadráticas resolver

$$y^2+36=0$$

Solución:

$$\underbrace{(1)}_{a}y^2+\underbrace{(0)}_{b}y+\underbrace{(36)}_{c}=0$$

Entonces $a=1$, $b=0$ y $c=36$. Reemplazando estos valores en las fórmulas cuadráticas:

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$y=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(36)}}{2(1)}$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{-144}}{2}=\frac{\pm\sqrt{(-1)(144)}}{2}=\frac{\pm\sqrt{-1}\sqrt{144}}{2}=\frac{\pm i*12}{2}=\frac{\pm 12i}{2}$$

$y=\frac{\pm 12i}{2}$ Las soluciones son:

$$y_1=\frac{12i}{2}=6i\,;\quad y_2=\frac{-12i}{2}=-6i$$

Verifiquemos que estas sean las soluciones de la ecuación $y^2+36=0$

- $y_1=6i$
  $y^2+36=(6i)^2+36=6^2i^2+36=36(-1)+36=-36+36=0$
- $y_2=-6i$
  $y^2+36=(-6i)^2+36=(-6)^2i^2+36=36(-1)+36=-36+36=0$

Ejercicio: Usando las fórmulas cuadráticas resolver

$$x^2-12x+45=0$$

Solución:

$$\underbrace{(1)}_{a}x^2+\underbrace{(-12)}_{b}x+\underbrace{(45)}_{c}=0$$

Entonces $a=1$, $b=-12$ y $c=45$. Reemplazando estos valores en las fórmulas cuadráticas:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Tenemos,

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(1)(45)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-180}}{2}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$x=\frac{12\pm i\sqrt{36}}{2}$$

$$x=\frac{12\pm 6i}{2}$$ Las soluciones son:

$$x_1=\frac{12+6i}{2}=\frac{2(6+3i)}{2}=6+3i\ ;\quad x_2=\frac{12-6i}{2}=\frac{2(6-3i)}{2}=6-3i$$

Verifiquemos que estas sean las soluciones de la ecuación $x^2-12x+45=0$

- $x_1=6+3i$
  $x^2-12x+45=(6+3i)^2-12(6+3i)+45=\left((6^2)+2(6)(3i)+(3i)^2\right)-$
  $(72+36i)+45=36+36i+(3)^2(i)^2-72-36i+45=$
  $36-72+45+9(-1)+36i-36i=0+0i=0$
- $x=6+3i$
  $x^2-12x+45=(6-3i)^2-12(6-3i)+45=\left((6^2)-2(6)(3i)+(3i)^2\right)-$
  $(72-36i)+45=36-36i+(3)^2(i)^2-72+36i+45=$
  $36-72+45+9(-1)+36i-36i=0+0i=0$

Ejercicio: Usando las fórmulas cuadráticas resolver

$$3x^2+2x+5=0$$

Solución:

$$\underset{a}{(3)}x^2+\underset{b}{(2)}x+\underset{c}{(5)}=0$$

Entonces $a=3$, $b=2$ y $c=5$. Reemplazando estos valores en las formulas cuadráticas:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(3)(5)}}{2(3)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-60}}{6}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-56}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{(-1)(56)}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{-1}\sqrt{56}}{6}$$

$$x=\frac{-2\pm i\sqrt{56}}{6}=\frac{-2\pm i\sqrt{7*8}}{6}=\frac{-2\pm i\sqrt{7}\sqrt{8}}{6}=\frac{-2\pm i2\sqrt{7}\sqrt{2}}{6}=\frac{-2\pm 2\sqrt{14}i}{6}=$$

$$x=\frac{2}{2}\left(\frac{-1\pm\sqrt{14}i}{3}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{14}i}{3}$$ Las soluciones son:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{14}i}{3};\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{14}i}{3}$$

Verifiquemos que estas sean las soluciones de la ecuación $3x^2+2x+5=0$

- $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{14}i}{3}$

$$3x^2+2x+5=3\left(\frac{-1+\sqrt{14}i}{3}\right)^2+2\left(\frac{-1+\sqrt{14}i}{3}\right)+5=$$

$$=3\left(\frac{1-2\sqrt{14}i+14i^2}{9}\right)+\frac{-2+2\sqrt{14}i}{3}+5=$$

$$=\frac{1-2\sqrt{14}i-14}{3}+\frac{-2+2\sqrt{14}i}{3}+5=$$

$$=\frac{1-2\sqrt{14}i-14-2+2\sqrt{14}i+15}{3}=0$$

- $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{14}i}{3}$

$$3x^2+2x+5=3\left(\frac{-1-\sqrt{14}i}{3}\right)^2+2\left(\frac{-1-\sqrt{14}i}{3}\right)+5=$$

$$=3\left(\frac{1+2\sqrt{14}i+14i^2}{9}\right)+\frac{-2-2\sqrt{14}i}{3}+5=$$

$$= \frac{1+2\sqrt{14}i-14}{3}+\frac{-2-2\sqrt{14}i}{3}+5=$$

$$= \frac{1+2\sqrt{14}i-14-2-2\sqrt{14}i+15}{3}=0$$

Ejercicio: Usando la formula cuadrática resolver

- $x^2-2x=-5$ (Rpta: $x=1+2i; x=1-2i$)
- $x^2=-4x-12$ (Rpta: $x=-2+2\sqrt{2}i; x=-2-2\sqrt{2}i;$)
- $9y^2+25=0$ (Rpta: $y=\frac{5i}{3}\ y=\frac{-5i}{3}$)

SESIÓN 2

Clase No. 4

Objetivos:

- Encontrar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado.
- Relacionar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado con la ecuación inicial.

SUMA Y PRODUCTO DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Llamemos x_1 y x_2 las soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ donde a es diferente de 0

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Observemos que la suma de estas soluciones de la ecuación de segundo grado da como resultado: a menos el coeficiente de x dividido por el coeficiente de x^2.

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)+\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}=$$

$$\frac{(-b-b)+\left(\sqrt{b^2-4ac}-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}=\frac{-2b+0}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

Y que el producto de estas soluciones de la ecuación de segundo grado da como resultado: el termino independiente dividido por el coeficiente de x^2.

$$x_1*x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{(2a)(2a)}=$$

$$\frac{(-b)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)+\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}=$$

$$\frac{\left(b^2+b\sqrt{b^2-4ac}\right)+\left(-b\sqrt{b^2-4ac}-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2\right)}{4a^2}=$$

$$\frac{b^2+b\sqrt{b^2-4ac}-b\sqrt{b^2-4ac}-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=$$

$$\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Note que si a la ecuación $ax^2+bx+c=0$ donde a es diferente de 0, se divide por a se tiene:

$$\frac{a}{a}x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Los coeficientes de x^2 y x y el término independiente tienen relación con la suma y el producto de las soluciones.

Ejemplo: Hallar la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones.

1. $x^2-5x+6=0$
2. $6x^2+7x-20=0$

Solución:

1. $x^2-5x+6=0$

Recordando cómo se soluciona una ecuación de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas se procede de la siguiente manera:

$$\underset{a}{(1)}x^2+\underset{b}{(-5)}x+\underset{c}{6}=0$$

Entonces $a=1$, $b=-5$ y $c=6$. Reemplazando estos valores en la fórmula cuadrática:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x=\frac{5\pm1}{2}$$ Las soluciones son:

$$x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3;\quad x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $x^2-5x+6=0$

- $x_1 = 3$
  $x^2-5x+6=(3)^2-5(3)+6=9-15+6=-6+6=0$
- $x_2 = 2$
  $x^2-5x+6=(2)^2-5(2)+6=4-10+6=-6+6=0$

Sea $x_1=3$ y $x_2=2$ las soluciones, ahora:

$x_1+x_2=3+2=5$

$x_1*x_2=3*2=6$

Obsérvese que $x_1+x_2=5$ y $x_1*x_2=6$ tienen relación con el coeficiente de x y el término independiente, respectivamente de la ecuación $x^2-5x+6=0$

Ejercicio:

- Resolver el segundo punto del ejemplo anterior.
- Hallar la suma y producto de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas de los ejercicios de las anteriores clases y encontrar su relación con le ecuación.

Clase No. 5

Objetivos:

- Encontrar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado.
- Relacionar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado con la ecuación inicial.

2. $6x^2+7x-20=0$

Recordando cómo se soluciona una ecuación de segundo grado por la fórmula cuadrática se procede de la siguiente manera:

$$\underbrace{(6)}_{a}x^2+\underbrace{(7)}_{b}x+\underbrace{(-20)}_{c}=0$$

Entonces $a=6$, $b=7$ y $c=-20$. Reemplazando estos valores en la fórmula cuadrática:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4(6)(-20)}}{2(6)}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+480}}{12}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{529}}{12}$$

$$x=\frac{-7\pm 23}{12}$$ Las soluciones son:

$$x=\frac{-7+23}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3};\quad x=\frac{-7-23}{12}=\frac{-30}{12}=-\frac{5}{2}$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $6x^2+7x-20=0$

- $x=\dfrac{4}{3}$

$$6x^2+7x-20=6\left(\frac{4}{3}\right)^2+7\left(\frac{4}{3}\right)-20=6\left(\frac{16}{9}\right)+\frac{28}{3}-20$$
$$=\frac{32}{3}+\frac{28}{3}-\frac{60}{3}=0$$

- $x=-\dfrac{5}{2}$

$$6x^2+7x-20=6\left(-\frac{5}{2}\right)^2+7\left(-\frac{5}{2}\right)-20=6\left(\frac{25}{4}\right)-\frac{35}{2}-20$$
$$=\frac{75}{2}-\frac{35}{2}-\frac{40}{2}=0$$

Sea $\frac{4}{3}\ x_1=3$ y $x_2=-\frac{5}{2}$ las soluciones, ahora:

$$x_1+x_2=\frac{4}{3}+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{3}-\frac{5}{2}=\frac{8-15}{6}=-\frac{7}{6}$$

$$x_1 * x_2=\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{20}{6}$$

Supongamos que se conocen las soluciones de una ecuación cuadrática, el objetivo de hacer las operaciones de suma y producto con estas soluciones, es encontrar cada uno de los coeficientes a, b y c para obtener la ecuación ax^2+bx+c.

En las anteriores clases siempre se tenía la ecuación $ax^2+bx+c=0$ y su objetivo era encontrar las soluciones, ahora vamos en sentido opuesto, dadas las soluciones encontrar la ecuación.

Recordemos que la ecuación de segundo grado en forma general es de la forma:

$ax^2+bx+c=0$ Donde a es diferente de 0

Para encontrar su solución se realizaban los siguientes pasos:

Aislar su término independiente,

$$ax^2+bx=-c$$

Dividir cada término de la ecuación por el coeficiente $a\neq 0$,

$\frac{a}{a}x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ Esto es,

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Organizando tenemos,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Recordemos que por ley de signos,

$$+\frac{b}{a}=-\left(-\frac{b}{a}\right)$$, entonces

$$x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

Entonces reemplazando en la ecuación $ax^2+bx+c=0$ la suma y el producto, se obtiene:

$$x^2-(x_1+x_2)x+(x_1 * x_2)=0$$

De esta manera se observa cómo teniendo las soluciones de una ecuación de segundo grado se puede llegar a la ecuación.

Ejercicio: A partir de las soluciones $-\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$, encontrar la ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$.

Solución:

Sea $x_1=-\frac{2}{3}$ y $x_2=\frac{3}{2}$

La suma de las soluciones es:

$$x_1+x_2=-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{-4+9}{6}=\frac{5}{6}$$

El producto de las soluciones es:

$$x_1 * x_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{6} = -1$$

Luego la ecuación es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 * x_2) = x^2 - \left(\frac{5}{6}\right)x + (-1) = x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$$

Ahora, Multiplicando a ambos lados de la ecuación por el denominador del coeficiente de x, que es 6, tenemos:

$$6\left(x^2 - \frac{5}{6}x - 1\right) = 6(0)$$

$$6x^2 - (6)\left(\frac{5}{6}x\right) - 6 = 0$$

$$6x^2 - 5x - 6 = 0$$

La ecuación es: $6x^2 - 5x - 6 = 0$.

Verifiquemos que esta sea la ecuación pedida, para esto se resolverá esta ecuación, y se comparará sus soluciones con las del ejercicio:

$$\underbrace{(6)}_{a}x^2 + \underbrace{(-5)}_{b}x + \underbrace{(-6)}_{c} = 0$$

Entonces $a = 6$, $b = -5$ y $c = -6$. Reemplazando estos valores en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(6)(-6)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{12}$$

$$x=\frac{5\pm 13}{12}$$ Las soluciones son:

$$x_1=\frac{5+13}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2};\quad x_2=\frac{5-13}{12}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}$$

Ejercicio: A partir de las siguientes soluciones de ecuaciones de segundo grado, encontrar la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

- 0 y -4 (solución: $x^2+4x=0$)
- -5 y 2 (solución: $x^2+3x-10=0$)
- $\frac{3}{2}$ y -1 (solución: $2x^2-x-3=0$)
- $\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ y $\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ (solución: $2x^2+6x+1=0$)

Clase No. 6

Objetivo:

- Solucionar los dos primeros puntos del taller, los cuales abarcan todos los temas vistos hasta el momento.

Universidad del Cauca
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Institución Educativa
Técnico Industrial
Grado: 9D

Nombre:____ **Fecha:**____________

TALLER
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general:

a) $3x^2 - 6x = 0$ **b)** $x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $4y^2 + 11y = 3$ **d)** $3x^2 - 10x + 3 = 0$

e) $2x^2 - 16x + 30 = 0$ **f)** $8z^2 + 53z = 21$

g) $14z^2 - 29z - 15 = 0$ **h)** $-3x^2 - 17x - 10 = 0$

i) $-2x^2 - x = -15$ **j)** $49x^2 - 7 = 0$

2. Encontrar dos números teniendo en cuenta que:

a) La suma es 11 y el producto 30
b) La suma es -33 y el producto 260
c) La suma es -1 y el producto -306
d) La suma es $\frac{3}{2}$ y el producto -1
e) La suma es $\frac{1}{4}$ y el producto $-\frac{3}{8}$

3. Resolver los siguientes problemas:

a) El área de un círculo es de $36\pi cm^2$, determinar la longitud del radio utilizando la fórmula del área del círculo.

b) Si un número se eleva al cuadrado, su resultado se multiplica por 2; a esta última operación se le resta el número inicial. Además, el resultado de todo es cero. ¿Cuál será dicho número?

c) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado sea igual a 5 veces el número?

d) Hallar las dimensiones de un rectángulo de $18cm^2$ de área, si su base es el doble de la altura.

e) La base de un rectángulo es el doble de la altura aumentada en 2. Hallar las dimensiones del rectángulo, si su área equivale a $40m^2$.

f) Un pedazo de alambre de 60cm se dobla en 2 partes con el objeto de formar un triangulo rectángulo. Si la hipotenusa mide 26 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los catetos del triangulo rectángulo?

g) Si René tiene 10 años más que David, y el cuadrado de la edad de René, aumentado en el cuadrado de la edad de David, equivale a 338 años, hallar ambas edades.

h) Encontrar las dimensiones de un rectángulo cuya área es $34m^2$ y su perímetro es $24m$.

i) Un triangulo rectángulo tiene lados cuyas longitudes expresadas en metros, son enteros consecutivos. Calcular la longitud de cada lado.

Clase No. 7

Objetivos:

- (Mediante un examen) Evaluar el conocimiento de los estudiantes que adquirieron durante las cinco clases anteriores.
- Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.

Universidad del Cauca
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Institución Educativa
Técnico Industrial
Grado: 9D

Nombre:____ **Fecha:**____________

EXAMEN
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. **(Valor 2.0)** Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula cuadrática:
   - $-2p^2 + 7p = 3$
   - $7x^2 - 28 = -21x$
   - $3x^2 + 3 - 10x = 0$

2. **(Valor 1.5)** Encontrar dos números x_1 y x_2 teniendo en cuenta que la suma de estos números es 5, y el producto -84.

3. **(Valor 1.5)** Encontrar dos números x_1 y x_2 teniendo en cuenta que la suma de estos números es $\frac{3}{2}$, y el producto $\frac{1}{2}$

SECCIÓN 3

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN USANDO ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La solución de muchos problemas implica el planteamiento de ecuaciones de segundo grado (o ecuaciones cuadráticas). Como al solucionar las ecuaciones de segundo grado se obtienen dos soluciones, es importante verificar cuales de ellas cumple con las condiciones que exige el problema.

Ejemplo: Encontrar los números que satisfacen la propiedad de que cuando el número se sume a sí mismo, esta suma sea igual al producto del número por sí mismo.

Solución:

1. Sea x el número al que se refiere el problema.
2. De acuerdo al problema mencionado, se tiene que:

$$x + x = x * x$$

3. $$2x = x^2$$

4. $$2x - x^2 = 0$$ Es decir,

$$(-1)x^2 + (2)x + 0 = 0$$

Se ha encontrado la ecuación cuadrática la cual dará las soluciones, o la solución del problema.

5. Recordando cómo se soluciona una ecuación de segundo grado por la formula cuadrática se procede de la siguiente manera:

$$\underbrace{(-1)}_{a}x^2 + \underbrace{(2)}_{b}x + \underbrace{0}_{c} = 0$$

Entonces $a = -1$, $b = 2$ y $c = 0$. Reemplazando estos valores en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-1)(0)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-0}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2}{-2}$$ Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-2+2}{-2} = \frac{0}{-2} = 0\,; \quad x_2 = \frac{-2-2}{-2} = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} = 2$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $-x^2 + 2x = 0$

- $x = 0$
  $-x^2 + 2x = -(0)^2 + 2(0) = -0 + 0 = 0$
- $x = 2$
  $-x^2 + 2x = -(2)^2 + 2(2) = -4 + 4 = 0$

6. De esta manera observamos que $x = 0$ y $x = 2$ son soluciones para la ecuación $-x^2 + 2x = 0$, pero verifiquemos que satisfacen el problema inicial: en efecto, este es un problema de tipo numérico sin alguna restricción. Por lo tanto, los números con esta propiedad son 0 y 2.

Otra solución: por factorización,

$$x + x = x * x$$

$$2x = x^2$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ o } 2 - x = 0$$

$$x = 0 \text{ o } x = 2$$

Otra solución: por complementación,

$$x + x = x * x$$

$$2x = x^2$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 + 1$$

$$(x-1)^2 = 1$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{1}$$

$$x - 1 = \pm 1$$

$x - 1 = 1$ o $x - 1 = -1$

$x = 1 + 1$ o $x = -1 + 1$

$x = 2$ o $x = 0$

Ejercicio: El área de un círculo es de $36\pi cm^2$, determinar la longitud del radio utilizando la fórmula del área del círculo

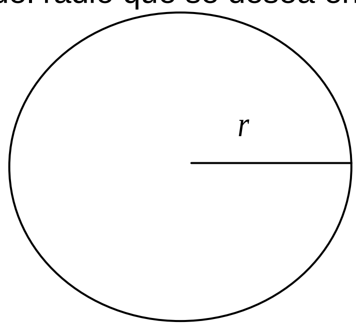
Clase No. 8

Objetivo:

- Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.

Solución:

Sea r la longitud del radio que se desea encontrar,



$$area\ del\ \ circulo = 36\pi cm^2$$

1. Recordemos que la fórmula del área del círculo es πr^2.

2. Sea r la longitud del ángulo a hallar

3. Como el área del circulo es πr^2, entonces $\pi r^2 = 36\pi$

4. $$\pi r^2 - 36\pi = 0$$

$$(\pi)r^2 + (0)r + (-36\pi) = 0$$

Se ha encontrado la ecuación cuadrática la cual dará las soluciones, o la solución del problema.

5. Recordando cómo se soluciona una ecuación de segundo grado por la fórmula cuadrática se procede de la siguiente manera:

$$\underbrace{(\pi)}_{a}x^2 + \underbrace{(0)}_{b}x + \underbrace{(-36\pi)}_{c} = 0$$

Entonces $a = \pi$, $b = 0$ y $c = -36\pi$. Reemplazando estos valores en la formula cuadrática:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$x=\frac{-0\pm\sqrt{(0)^2-4(\pi)(-36\pi)}}{2\pi}$$

$$x=\frac{-0\pm\sqrt{144\pi^2}}{2\pi}$$

$$x=\frac{0\pm12\pi}{2\pi}$$ Las soluciones son:

$$x_1=\frac{0+12\pi}{2\pi}=\frac{12\pi}{2\pi}=\frac{12}{2}=6\ ;\quad x_2=\frac{0-12\pi}{2\pi}=\frac{-12\pi}{2\pi}=\frac{-12}{2}=-6$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $\pi r^2-36\pi=0$

- $x_1=6$

$\pi r^2-36\pi=\pi(6)^2-36\pi=36\pi-36\pi=0$

- $x_2=-6$

$\pi r^2-36\pi=\pi(-6)^2-36\pi=36\pi-36\pi=0$

6. De esta manera observamos que $x_1=6$ y $x_2=-6$ son soluciones para la ecuación $\pi r^2-36\pi^2=0$, pero verifiquemos que satisfacen el problema inicial: en efecto, este es un problema de tipo geométrico en donde tiene una restricción importante; el hecho de que el radio es una longitud, esto hace que dicho número sea positivo, así que la solución es $x=6$. Es decir, el radio tiene una longitud de 6cm.

Otra solución: por factorización,

$$\pi r^2=36\pi$$

$$\pi r^2-36\pi=0$$

$$\pi(r^2-36)=0$$

$$r^2-36=0$$

$$(r-6)(r+6)=0$$

$$r-6=0 \quad \text{o} \quad r+6=0$$

$$r=6 \quad \text{o} \quad r=-6$$

Ejemplo: Si un número se eleva al cuadrado, su resultado se multiplica por 2; a esta última operación se le resta el número inicial. Además, el resultado de todo es cero. ¿Cuál será dicho número?

Solución:

1. Sea y dicho número, entonces:

2. ‘’si un número se eleva al cuadrado’’ $\longrightarrow y^2$

3. ‘’su resultado se multiplica por 2’’ $\longrightarrow 2y^2$

‘’a esta última operación se le resta el número inicial’’ $\longrightarrow 2y^2-y$

4. ‘’el resultado de todo esto es cero’’ $\longrightarrow 2y^2-y=0$

La ecuación encontrada es:

$$2y^2-y=0$$

5. Recordando cómo se soluciona una ecuación de segundo grado por la fórmula cuadrática se procede de la siguiente manera:

$$\underset{a}{(2)}y^2+\underset{b}{(-1)}y+\underset{c}{(0)}=0$$

Entonces $a=2$, $b=-1$ y $c=0$. Reemplazando estos valores en la fórmula cuadrática:

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$y=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(2)(0)}}{2(2)}$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-0}}{4}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$y = \frac{1 \pm 1}{4}$$ Las soluciones son:

$$y_1 = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1-1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $2y^2 - y = 0$

- $y_1 = \frac{1}{2}$

  $2y^2 - y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
- $y_2 = 0$

  $2y^2 - y = 2(0)^2 - 0 = 0 - 0 = 0$

6. De esta manera observamos que $y_1 = \frac{1}{2}$ y $y_2 = 0$ son soluciones para la ecuación $2y^2 - y = 0$, pero verifiquemos que satisfacen el problema inicial: en efecto, este es un problema de tipo numérico sin alguna restricción. Por lo tanto, los números con esta propiedad son $\frac{1}{2}$ y 0.

Otra solución: por factorización,

$$2y^2 - y = 0$$

$$y(2y - 1) = 0$$

$$y = 0 \text{ o } 2y - 1 = 0$$

$$y = 0 \text{ o } 2y = 1$$

$$y = 0 \text{ o } y = \frac{1}{2}$$

Otra solución: por complementación,

$$2y^2 - y = 0$$

$$\frac{2y^2}{2}-\frac{y}{2}=0$$

$$y^2-\left(\frac{1}{2}\right)y=0$$

$$y^2-\left(\frac{1}{2}\right)y+\left(\frac{1}{4}\right)^2=0+\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$y^2-\left(\frac{1}{2}\right)y+\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{16}$$

$$\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

$$\sqrt{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$y-\frac{1}{4}=\pm\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \text{ o } y=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

Ejercicio: Resolver los siguientes problemas:

- **¿**Cuál es el número cuyo cuadrado es igual a cinco veces el mismo número?
- Hallar las dimensiones de un rectángulo de $18cm^2$ de área, si su base es el doble de la altura

Clase No. 9

Objetivo:

- Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.

Solución:

- ¿Cuál es el número cuyo cuadrado es igual a cinco veces el mismo número?
  1. Sea z el número que cumple las propiedades del problema
  2. El número elevado al cuadrado es: z^2
  3. El número elevado al cuadrado igual a cinco veces el número:

$$z^2 = 5z$$

  4.

$$z^2 - 5z = 0$$

5. Recordando cómo se soluciona una ecuación de segundo grado por la fórmula cuadrática se procede de la siguiente manera:

$$\underbrace{(1)}_{a}z^2 + \underbrace{(-5)}_{b}z + \underbrace{(0)}_{c} = 0$$

Entonces $a = 1$, $b = -5$ y $c = 0$. Reemplazando estos valores en la fórmula cuadrática:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Tenemos,

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 0}}{2}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$z = \frac{5 \pm 5}{2}$ Las soluciones son:

$$z_1 = \frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5; \quad z_2 = \frac{5-5}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

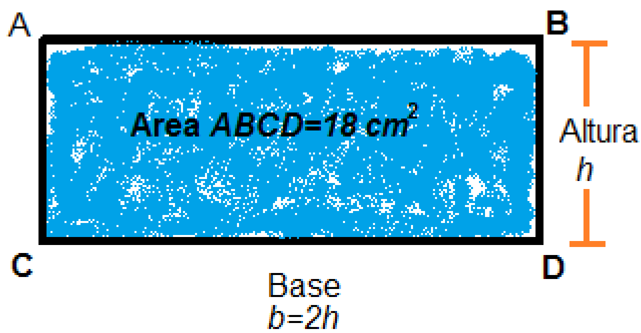
Verifiquemos que estas sean la solución de la ecuación $z^2 - 5z = 0$

- $z_1 = 5$
  $z^2 - 5z = 5^2 - 5(5) = 25 - 25 = 0$
- $z_1 = 0$
  $z^2 - 5z = (0)^2 - 5(0) = 0 - 0 = 0$

6. De esta manera observamos que $z_1 = 5$ y $z_2 = 0$ son soluciones para la ecuación $z^2 - 5z = 0$, pero verifiquemos que satisfacen el problema inicial: en efecto, este es un problema de tipo numérico sin alguna restricción. Por lo tanto, los números con esta propiedad son 5 y 0.

- Hallar las dimensiones de un rectángulo de $18cm^2$ de área, si su base es el doble de la altura

  Sea $ABCD$ un rectángulo cualquiera con las características del problema:



1. El área de un rectángulo es $base \times altura$,

2. Sea b la letra que representa la base y h la letra que representa la altura, entonces $b = 2h$ $áreaABCD = b \times h$,

3. como él área del $áreaABCD = bxh$ y además el $áreaABCD$ mide $18cm^2$ entonces si se reemplazan estos valores en la fórmula del área del triángulo tenemos:

$$áreaABCD = (2h) \times h = 18$$

4.
$$(2h)\times h = 18$$

$$2h^2 = 18$$

$$h^2 = 9$$

$$h^2 - 9 = 0$$

5. Para encontrar el valor de la altura h, se utilizarán las fórmulas cuadráticas

$$h_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\quad h_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\underbrace{(1)}_{a}h^2 + \underbrace{(0)}_{b}h + \underbrace{(-9)}_{c} = 0$$

Reemplazando estos valores se tiene:

- $$h_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-0+\sqrt{(0)^2-4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
- $$h_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-0-\sqrt{0^2-4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{-\sqrt{36}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Las posibles soluciones son: $h_1 = 3$, $h_2 = -3$

6. Como la altura es una longitud, entonces la única solución al problema es $h = 3$. Para verificar esta afirmación se reemplazará este número en la ecuación: $h^2 - 9 = 0$

$$h^2 - 9 = (3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

Por tanto, la altura del $ABCD$ mide $h = 3cm$ y la base $b = 6cm$.

Clase No. 10

Objetivos:

- Mejorar la nota del tema: solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.
- Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.

Universidad del Cauca
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Institución Educativa
Técnico Industrial
Grado: 9D

Nombre:____ **Fecha:**____________

EXAMEN OPCIONAL
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. **(Valor 1.5)** Resolver la siguiente ecuación de segundo grado utilizando la fórmula cuadrática:

$$3z - \frac{1}{2} - 4z^2 = 0$$

2. **(Valor 1.5)** Encontrar dos números x_1 y x_2 teniendo en cuenta que la suma de estos números es -3, y el producto -18.

Ejercicio: Iniciar en clase la Solución el tercer punto del taller, y entregar la próxima clase la solución de todo el taller en hojas de cuadernillo individualmente.

Clase No. 11

Objetivos:

- (Mediante un examen) Evaluar el conocimiento de los estudiantes que adquirieron en el tema*: problemas que se resuelven usando ecuaciones de segundo grado.*
- Reconocer la caja de polinomios como herramienta para representar, y operar con polinomios.

Universidad del Cauca
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Institución Educativa
Técnico Industrial
Grado: 9D

Nombre:____ **Fecha:**___________

EXAMEN
PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN UTILIZANDO ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

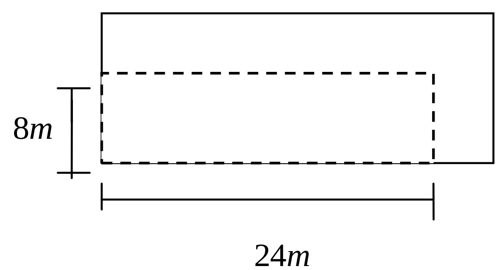
Plantear y resolver los siguientes problemas utilizado la formula cuadrática:

1. **(Valor 1.5)** Calcular la base y la altura de un triangulo cuya área mide $2cm^2$, si la base mide $3cm$ más que la altura.

2. **(valor 2.0)** Miguel y Juan hacen la apuesta: *''el que primero averigue la edad de Camila gana $ 20.000 pesos''*. Para ganar esta apuesta cada uno decide preguntarle a Camila su edad, pero Camila sin querer escuchó las intenciones de sus amigos, así que decide responder a sus preguntas: *''si mi edad más el cuadrado de mi edad es 210 entonces ¿Cuántos años crees que tengo?''.* Miguel y Juan se quedaron pensando; Juan responde 12 años y Miguel responde 10 años.
¿Crees que alguno acertó con la respuesta?, en caso contrario ¿Cuál es la edad de Camila?

3. **(valor 1.5)** Dos colegios de la ciudad deciden participar en un concurso de balonmano que se va a realizar en un mes. Un estudiante de uno de los colegios se da cuenta que la cancha donde entrenan sus contrincantes es más grande que la de su colegio tanto de largo como de ancho. Él decide averiguar cuáles son las dimensiones de la otra cancha, para esto recurre al jardinero de su colegio que trabaja también en el otro colegio y le pregunta: *¿Usted sabe cuáles son las dimensiones de la cancha del otro colegio?* Y el jardinero responde: no sé, pero te puedo decir que tu cancha tiene $24m$ de base y $8m$ de altura, y que la otra cancha tiene lo mismo que la tuya más una cantidad igual en la base y en la altura, además de esto el área de la otra cancha es $336m^2$.

   ¿Cuánto deben aumentar en cada lado para que su cancha quede igual a la de sus contrincantes?



SECCIÓN 4:

LA CAJA DE POLINOMIOS

La caja de polinomios es una herramienta que permite realizar operaciones entre polinomios, en este caso se utilizarán polinomios hasta segundo grado con coeficientes enteros.

Conozcamos la caja de polinomios

Para utilizar la caja de polinomios se requiere del plano cartesiano (*Imagen 1*), donde sus cuadrantes sirven para escribir cualquier polinomio; fichas cuadradas de perímetro 4 y $4x$, y área 1 y x^2 respectivamente (*Imagen 2*); fichas rectangulares de perímetro $2x+2$ y área x (*Imagen 3*), las cuales sirven para representar los polinomios.

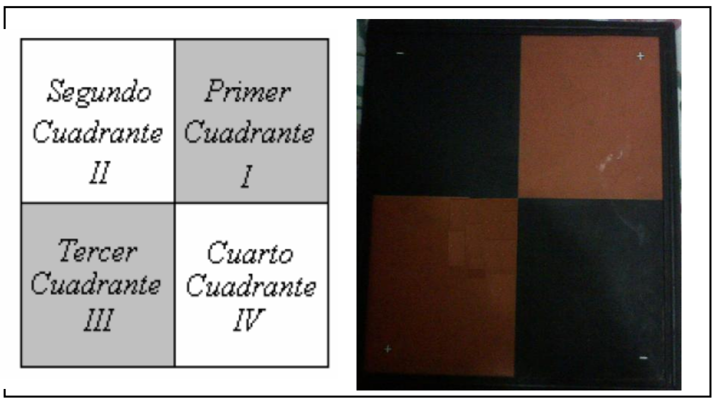


Imagen 1

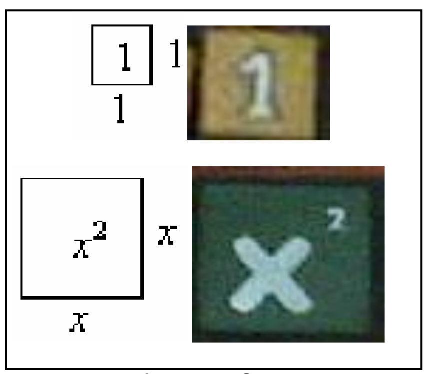


Imagen 2

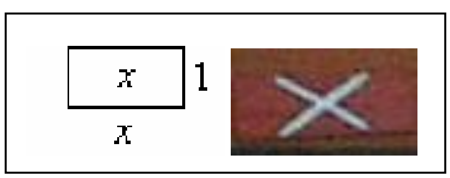
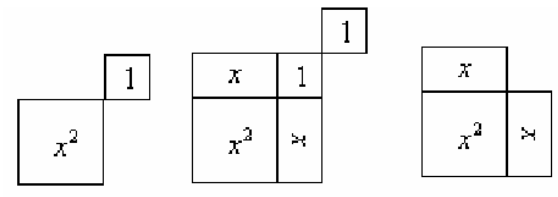
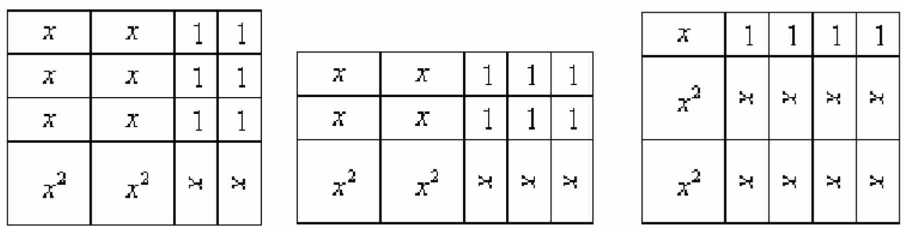


Imagen 3

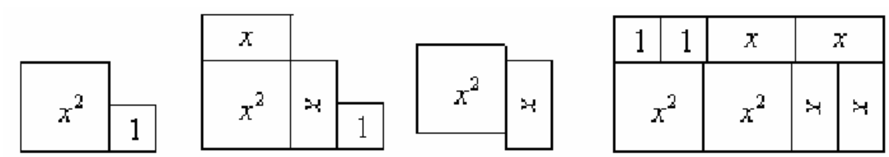
REPRESENTACION DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO EN LA CAJA DE POLINOMIOS

Con varias de estas fichas se pueden hacer figuras de diversas formas poligonales; particularmente rectángulos. Para poder realizar esto, se debe tener presente la regla: fichas vecinas deben coincidir en su lado de vecindad. Cuando no es posible que esto ocurra, el contacto de vecindad se obliga a ser un vértice. Las siguientes seis figuras poligonales se han formado respetando la regla:





Las siguientes cuatro no satisfacen la regla



Observando la imagen 1, vemos que en el primer cuadrante las coordenadas (x, y) de cada punto son positivas y en el tercer cuadrante las coordenadas son negativas, por tanto, las fichas de la Caja que se ubiquen en estos cuadrantes corresponden a términos positivos del polinomio. En el segundo cuadrante, las coordenadas de un punto (x, y) muestran que su abscisa x es negativa y su ordenada y positiva, mientras que en el cuarto cuadrante, la abscisa es positiva y la ordenada es negativa, de donde se deduce que las fichas ubicadas en estos cuadrantes representen términos negativos del polinomio. De acuerdo con lo anterior, las fichas se ubican de acuerdo a su valor algebraico.

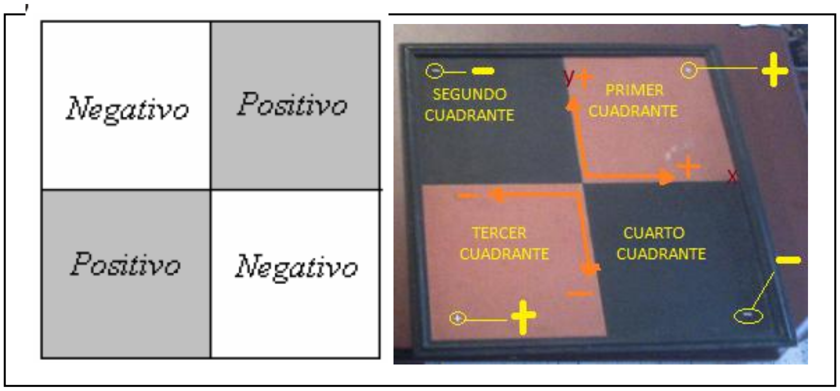

Negativo
Positivo
Positivo
Negativo
SEGUNDO CUADRANTE
PRIMER CUADRANTE
TERCER CUADRANTE
CUARTO CUADRANTE
y
x

Imagen 4

Clase No. 12

Objetivos:

- Representar polinomios de hasta segundo grado utilizando la caja de polinomios.
- Calcular la suma y diferencia de polinomios de segundo grado en una variable, utilizando la Caja de Polinomios como herramienta de cálculo.

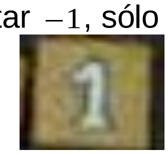
Ejemplo: Representar en la caja de polinomios x^2+x-1

Solución:

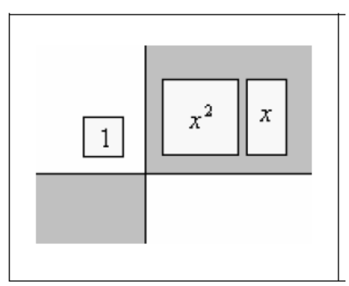
- Observemos que el coeficiente de x^2 es un numero positivo, así que va ubicado en uno de los cuadrantes positivos del plano cartesiano de la caja de polinomios. Y Para representar x^2, sólo se utilizará la ficha:

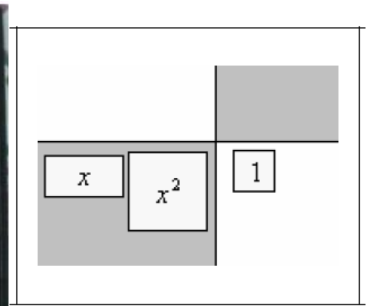
- El coeficiente de x es positivo, así que va ubicado en uno de los cuadrantes positivos del plano cartesiano de la caja de polinomios. Y para representar x, sólo se utilizará la ficha:

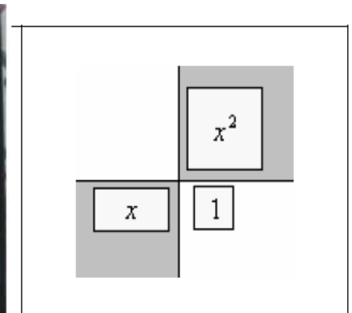
- El término independiente del polinomio es un número negativo, así que va ubicado en uno de los cuadrantes negativos del plano cartesiano de la caja de polinomios. Y para representar -1, sólo se utilizará la ficha:



Existen varias representaciones en la caja de polinomios de x^2+x-1, entre los cuales tenemos:



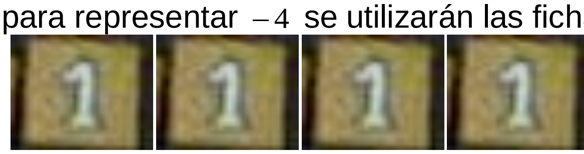
Ejemplo: Representar en la caja de polinomios $2x^2+2x-4$

Solución:

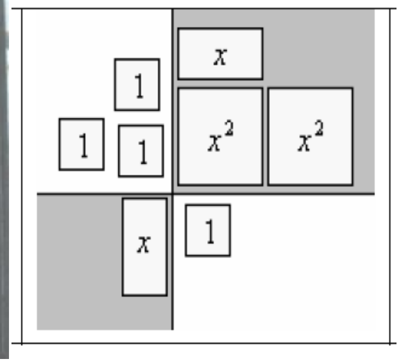
- Observemos que el coeficiente de x^2 es un numero positivo, así que va ubicado en uno de los cuadrantes positivos del plano cartesiano de la caja de polinomios. Y para representar $2x^2$ se utilizarán las fichas:

- El coeficiente de x es positivo, así que va ubicado en uno de los cuadrantes positivos del plano cartesiano de la caja de polinomios. Y para representar $2x$ se utilizarán las fichas:

- El término independiente del polinomio es un número negativo, así que va ubicado en uno de los cuadrantes negativos del plano cartesiano de la caja de polinomios. Y para representar -4 se utilizarán las fichas:



Organizando las fichas en la caja de polinomios tenemos:

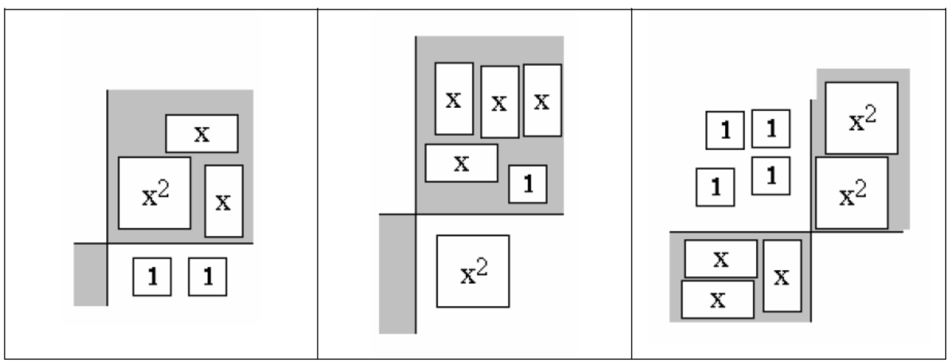


Ejercicio:

Representar los siguientes polinomios:

- $-x^2 + 5x - 4$
- $2x^2 + 2x + 2$

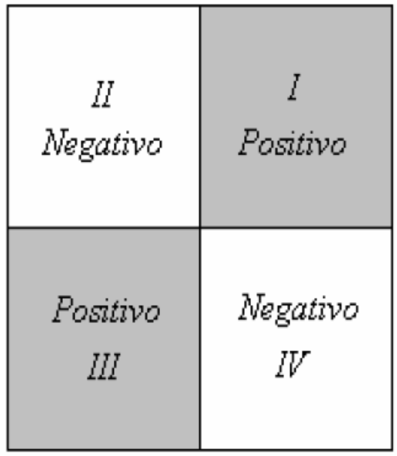
Leer cada uno de los siguientes polinomios:



SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO UTILIZANDO LA CAJA DE POLINOMIOS

Para realizar la suma y resta de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ en la caja de polinomios, se deben representar cada uno de estos en la caja de la siguiente manera: $p(x)$ ocupando los cuadrantes segundo y tercero; y $q(x)$ ocupando los cuadrantes primero y cuarto.

$p(x)$ $q(x)$ $p(x)$ $q(x)$



SUMA

Para sumar estos polinomios, se debe representar el polinomio $p(x)$ en los cuadrantes segundo y tercero; y representar el polinomio $q(x)$ en los cuadrantes primero y cuarto de la caja de polinomios. Después se deberán retirar los ceros que resulten de dicha representación

<u>Nota:</u> la palabra ''ceros'' hace referencia al par de fichas semejantes que quedan en cuadrantes opuestos por el signo.

Ejemplo: Sumar los polinomios $2x^2 - 3x + 4$ y $-x^2 + x - 2$

Solución:

Sea $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ y $q(x) = -x^2 + x - 2$

Ahora, representando cada polinomio en los cuadrantes correspondientes tenemos

$p(x)$ $q(x)$

Es decir:

$p(x)$ $q(x)$

Y se eliminan los ceros

De esta manera se encuentra la suma de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, que es: $x^2 - 2x + 2$

<u>Prueba:</u>
$p(x) + q(x) = (2x^2 - 3x + 4) + (-x^2 + x - 2) = 2x^2 - 3x + 4 - x^2 + x - 2 = x^2 - 2x + 2$

Ejercicio: Sumar los polinomios:

- $x^2 - x + 2$ y $2x^2 + 2x - 3$
- $-x^2 - x + 3$ y $-3x^2 - 2x + 2$

RESTA

Para restar dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, se debe representar el polinomio $p(x)$ en los cuadrantes segundo y tercero; y representar el polinomio $q(x)$ en los cuadrantes primero y cuarto de la caja de polinomios. Después se deben cambiar las fichas que representan el polinomio $q(x)$ de signo, es decir, las que se encuentran en el primer cuadrante deberán pasarse al segundo cuadrante; y las que están en el cuarto cuadrante se deberán pasar al tercer cuadrante. Continuo a esto se deberán retirar los ceros que resulten de dicha representación

Ejemplo: Restar los polinomios $2x^2 - 3x + 2$ y $x^2 - 2x + 1$

Solución:

Sea $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$

Ahora, representando cada polinomio en los cuadrantes correspondientes tenemos:

$p(x)$ $q(x)$

Ahora se debe cambiar de signo las fichas que representan el polinomio $p(x)$

Y se eliminan los ceros

De esta manera se encuentra la suma de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, que es: $x^2 - x + 1$

<u>Prueba:</u>

$$p(x) - q(x) = (2x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 3x + 2 - x^2 + 2x - 1 = x^2 - x + 1$$

Ejercicio: Restar los polinomios:

- $x^2 - x + 2$ y $-2x^2 - 2x + 3$
- $-x^2 - x + 3$ y $2x^2 + 2x + 5$

Clase No. 13

Objetivo:

- Realizar producto de polinomios lineales en la caja de polinomios.

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS LINEALES UTILIZANDO LA CAJA DE POLINOMIOS

Para multiplicar polinomios lineales o de la forma $(ax+b)(cx+d)$, es necesario recordar el plano cartesiano y en particular las direcciones de los ejes coordenados como elementos fundamentales para establecer el valor algebraico de las fichas y de los rectángulos que se construyen alrededor del origen de coordenadas.

El plano cartesiano está configurado a partir de dos ejes perpendiculares que se cortan en el origen de coordenadas; cada uno de los ejes contiene dos direcciones opuestas: positiva y negativa (*Imagen 4)*:

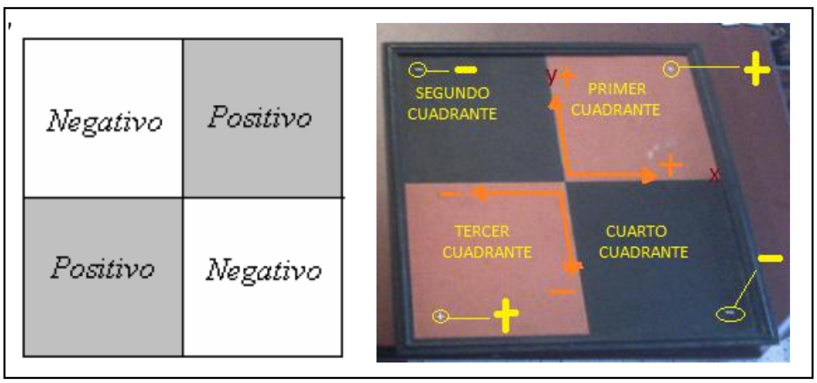


Imagen 4

Para cada rectángulo que se construya, de aquí en adelante, las dimensiones se leerán como base y altura en su orden, siendo la base corresponde al lado paralelo al eje x y la altura el lado paralelo al eje y, y en concordancia con la orientación de los ejes. De esta manera, la ubicación de una ficha o de un rectángulo a partir del origen y haciendo uso de los ejes coordenados establece unas dimensiones distintas, como se muestra con las siguientes disposiciones de la ficha x:

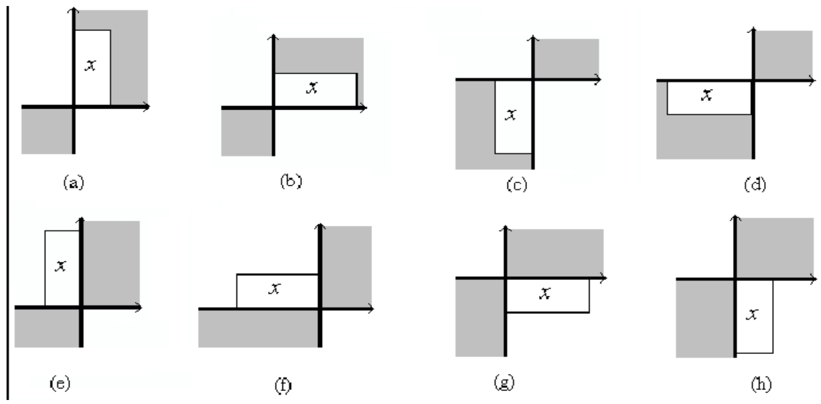
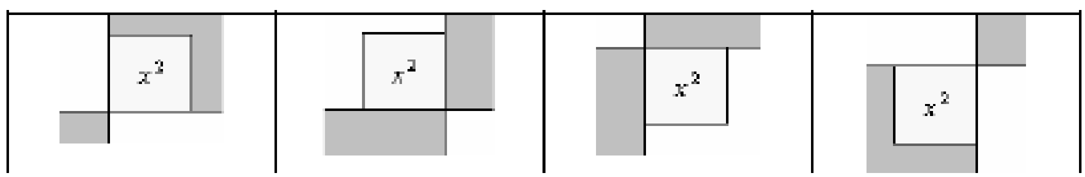


Imagen 5

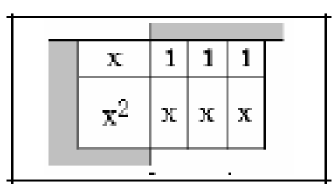
Las figuras (a), (b), (c) y (d) son fichas con valor algebraico x y tienen dimensiones 1 y x, x y 1, -1 y $-x$, $-x$ y -1 respectivamente. Las figuras (e), (f), (g) y (h) tienen valor algebraico $-x$ y tienen dimensiones -1 y x, $-x$ y 1, x y -1, 1 y $-x$ respectivamente.



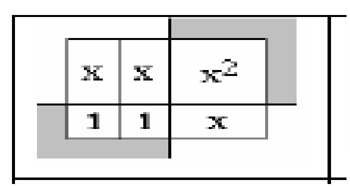
x y x $\qquad$ $-x$ y x $\qquad$ x y $-x$ $\qquad$ $-x$ y $-x$

Ejemplo: Escribir la base y la altura de:

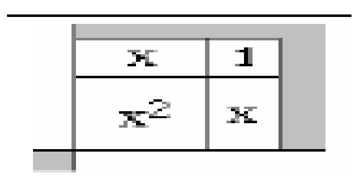
1.



2.



2.



Solución:

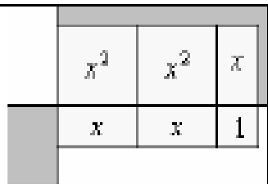
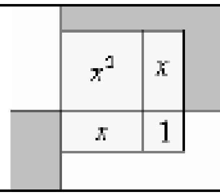
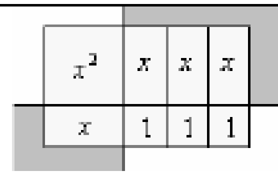
1. Base: $-x+3$

Altura: $-x-1$

2. Base: $x-2$
Altura: $x-1$

3. Base: $x+1$
Altura: $x+1$

Cada rectángulo puesto en el plano cartesiano alrededor del origen de coordenadas, representa un polinomio, en nuestro caso de segundo grado, cuyas dimensiones son relativas a las posiciones de las fichas respecto a los ejes coordenados. Por ejemplo las siguientes representaciones de polinomios:

		
$p(x)=2x^2-x-1$	$p(x)=x^2-1$	$p(x)=-x^2+4x-3$

En este ejemplo se muestra como representar polinomios de tal forma que las fichas queden de forma rectangular y en ocasiones esto se logra aumentándole ceros para que no se altere el polinomio inicial.

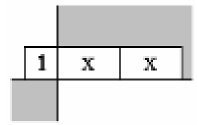
El procedimiento para calcular productos de la forma $(ax+b)(cx+d)$ es de la siguiente manera:

1. Se toma al polinomio $P(x)=ax+b$ como base y se ubica en el plano cartesiano de la caja de polinomios a partir del origen y haciendo uso adecuado de los ejes coordenados.
2. Se toma al polinomio $q(x)=cx+d$ como altura y se ubica en el plano cartesiano de la caja de polinomios teniendo en cuenta la regla básica: fichas vecinas deben coincidir en su lado de vecindad. Cuando no es posible que esto ocurra, el contacto de vecindad se obliga a ser un vértice.
3. Se arma completamente el rectángulo utilizando tantas fichas como sea necesario.
4. Finalmente se procede a retirar fichas que equivalen a cero y se procede a leer la respuesta teniendo en cuenta la ubicación de las fichas en sus respectivos cuadrantes.

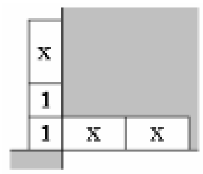
Ejemplo: Utilizando la caja de polinomios realizar $(2x-1)(x+2)$

Solución:

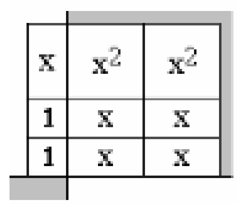
1. Se toma al polinomio $P(x)=2x-1$ como base y se ubica en el plano cartesiano de la caja de polinomios a partir del origen y haciendo uso adecuado de los ejes coordenados:



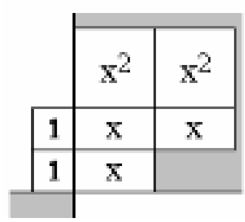
2. Se toma al polinomio $q(x)=x+2$ como altura y se ubica en el plano cartesiano de la caja de polinomios teniendo en cuenta la regla básica: fichas vecinas deben coincidir en su lado de vecindad. Cuando no es posible que esto ocurra, el contacto de vecindad se obliga a ser un vértice:



3. Ahora, se arma completamente el rectángulo utilizando tantas fichas como sea necesario:



4. Finalmente se procede a retirar fichas que equivalen a cero; en este caso, un par de fichas rotuladas con x y se procede a leer la respuesta teniendo en cuenta la ubicación de las fichas en sus respectivos cuadrantes:

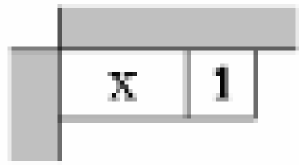


Prueba: $(2x-1)(x+2)=2x^2+4x-x-2=2x^2+3x-2$

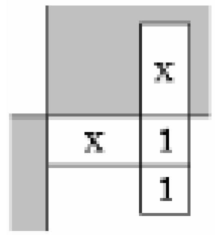
Ejemplo: Utilizando la caja de polinomios realizar $(x+1)(x-2)$

Solución:

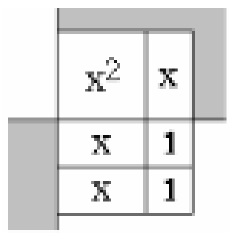
1. Se toma al polinomio $P(x)=x+1$ como base y se ubica en el plano cartesiano de la caja de polinomios a partir del origen y haciendo uso adecuado de los ejes coordenados:



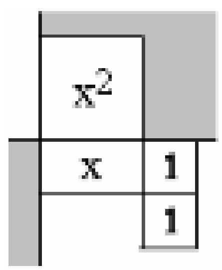
2. Se toma al polinomio $q(x) = x - 2$ como altura y se ubica en el plano cartesiano de la caja de polinomios teniendo en cuenta la regla básica: fichas vecinas deben coincidir en su lado de vecindad:



3. Ahora, se arma completamente el rectángulo utilizando tantas fichas como sea necesario:



4. Finalmente se procede a retirar fichas que equivalen a cero; en este caso, un par de fichas rotuladas con x y se procede a leer la respuesta teniendo en cuenta la ubicación de las fichas en sus respectivos cuadrantes:

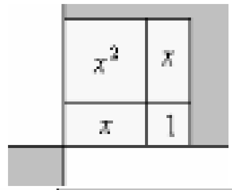


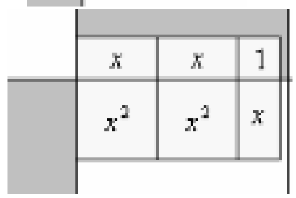
Prueba: $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$

Ejercicio: Realizar las siguientes multiplicaciones en la caja de polinomios:

- $(2x+1)(1-x)$
- $(-2x+1)(-x+1)$
- $(2x+2)(1-x)$

Ejercicio: Las siguientes gráficas corresponden a la multiplicación de algunos polinomios, indicar los factores que se multiplican y el producto encontrado:

- 

- 

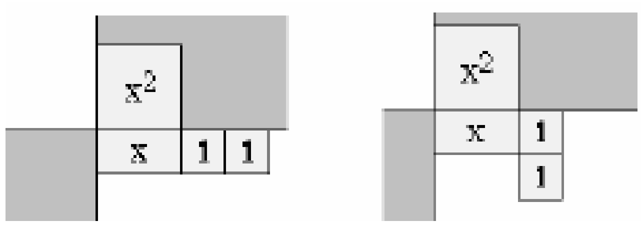
Clase No. 14

Objetivo:

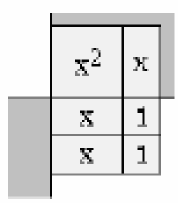
- Factorizar polinomios de segundo grado con coeficientes enteros utilizando la caja de polinomios.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO UTILIZANDO LA CAJA DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio de segundo grado en la Caja de Polinomios equivale a realizar una representación rectangular del mismo, siempre que esto sea posible. Para realizar esto a veces es necesario la agregación de ceros. Para que la factorización sea satisfactoria se requiere el menor número de fichas que representan al polinomio.
Por ejemplo el siguiente grafico muestra dos formas de representar el polinomio $x^2 - x - 2$



Recordemos que para completar el rectángulo se necesita de la agregación de ceros, entonces para esto la representación número dos es la adecuada, pues permite agregar un cero sin la necesidad de utilizar más fichas para completar el rectángulo, a comparación de la primera imagen.

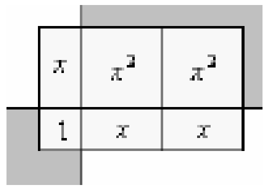


Observemos que el rectángulo que representa el polinomio $p(x)$ muestra la factorización que es el producto de las dimensiones de dos lados consecutivos del rectángulo $(x+1)(x-2)$ y $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$.

Note que el número de fichas que necesitan para representar el polinomio $x^2 - x - 2$ en la caja de polinomios son 4, entonces el número total de fichas que se necesitaran para obtener su factorización son $4 + 2k$, donde k varia en todos los números naturales incluyendo el cero. Por ejemplo en este ejercicio con $k = 0$ tenemos $4 + 2(0) = 4$ y con cuatro fichas no se puede formar un rectángulo, continuemos con $k=1$ tenemos $4+2(1)=6$ y con seis fichas se completo el rectángulo que dio la factorización.

Ejemplo: Factorizar el polinomio $2x^2-3x+1$

Solución: Representemos el polinomio en la caja de polinomios



Y aquí nos damos cuenta que con $k=0$**,** $6+2(0)=6$ se necesitan seis fichas para organizar el polinomio como un rectángulo, que son las mismas 6 fichas que se utilizan para su representación.

Ejercicio: Factorizar los polinomios:

- $2x^2+3x+1$
- $-x^2+2x+3$
- $-x^2+4$

Clase No. 15

Objetivo:

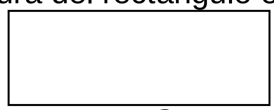
- Resolver situaciones problema que involucren ecuaciones de segundo grado utilizando la caja de polinomios.

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN USANDO LA CAJA DE POLINOMIO

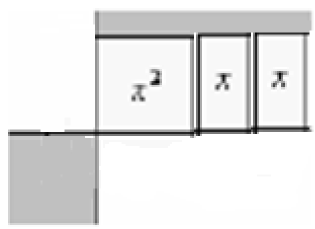
Problema 1: Suponga que se tiene un rectángulo donde el área mide $3cm^2$ y además la base mide dos veces más que la altura, encontrar el valor de cada dimensión.

Solución:

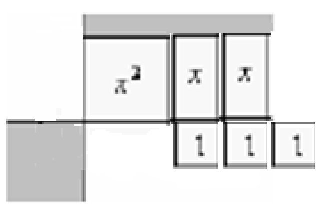
1. Supongamos que x es la altura del rectángulo entonces

x

$x+2$

2. Representemos el gráfico en la caja de polinomios, teniendo en cuenta la altura y la base de este

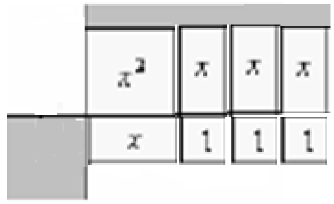


Y observemos que este rectángulo da un polinomio con factorización $x(x+2)$ que equivale al área de este rectángulo y además hay que tener en cuenta que según el problema el área mide $3cm^2$, es decir que $x(x+3)=3$, lo que es equivalente a $x(x+2)-3=0$, esto indica que a la caja de polinomios debemos agregar 3 fichas de unidad en cuadrantes negativos:



3. Y de esta manera tenemos representado el polinomio x^2+2x-3 y completemos el rectángulo con ceros. El número de fichas que se utilizan para representarlo son 6, así que con $k=0$ tenemos $6+2(0)=6$ y no sirve

para completarlo, continuamos, con $k=1$ tenemos $6+2(1)=8$, y con 8 fichas si se completa, pues agregamos un cero con fichas de valor x:



Y su respectiva factorización es: $(x+3)(x-1)$, como necesitamos encontrar las dimensiones y este rectángulo equivale a $x^2+2x-3=x(x+3)-3=0$, entonces $(x+3)(x-1)=0$, así que, las soluciones son: $x+3=0$ o $x-1=0$, es decir $x=-3$ o $x=1$.

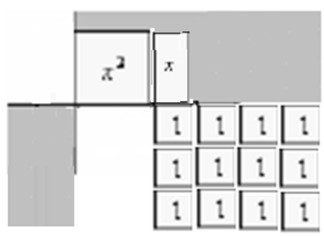
4. como las dimensiones son de valor positivo entonces el valor de x es 1.

   Comprobemos que en realidad la solución es 1, el valor de la base del rectángulo es $x+2=1+2=3$ y el área seria 3*1=3, así que 3 es la solución.

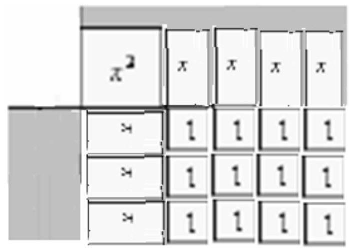
Problema 2: Si mi edad más el cuadrado de mi edad es 12 ¿Cuál es mi edad?

Solución:

1. Supongamos que x es la edad a encontrar.
2. Ahora la frase '' mi edad más el cuadrado de mi edad es 12'' es equivalente a $x+x^2=12$, es decir $x+x^2-12=0$.
3. Representemos el polinomio en la caja de polinomios:



Y de esta manera tenemos representado el polinomio x^2+x-12 y completemos el rectángulo con ceros. El número de fichas que se utilizan para representarlo son 14, así que con $k=0$ tenemos $14+2(0)=14$ y no sirve para completarlo, continuamos, con $k=1$ tenemos $14+2(1)=16$, continuamos, con $k=2$ tenemos $14+2(2)=18$, continuamos, con $k=3$ tenemos $14+2(3)=20$ y con 20 fichas si se completa, pues agregamos tres ceros con fichas de valor x :



Y su respectiva factorización es: $(x+4)(x-3)$, como necesitamos encontrar la edad y este rectángulo equivale a $x^2+x-12=(x+4)(x-3)=0$, entonces $(x+4)(x-3)=0$, entonces las soluciones son: $x+4=0$ o $x-3=0$, es decir $x=-4$ o $x=3$.

4. Como la edad es de valor positivo entonces el valor de x es 3. Comprobemos que en realidad la solución es 3, mi edad más el cuadrado de mi edad es: $x+x^2=12$ entonces $3+3^2=12$, así que la solución es 3.

Ejercicio: En grupo resolver:

- En un triángulo rectángulo la base mide x, la altura $1cm$ más que la base, y la hipotenusa $2cm$ más que la base. Hallar la altura y la base.
- Si en un rectángulo la altura mide x y la base es el doble que la altura aumentado en $2cm$; además el área es $40cm^2$, entonces cuales son las dimensiones de dicho rectángulo.

ANEXO 2:

PLAN DE ACCIÓN

SECCIÓN N°	CLASE N°	OBJETIVOS	TIEMPO	RECURSOS	OBSERVACIONES
1	1	• Deducir las fórmulas cuadráticas a partir de la solución de la ecuación de segundo grado por el método de complementación. • solucionar ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	
	2	•Encontrar las soluciones (reales) de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	
	3	• Encontrar las soluciones (complejas) de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	
2	1	• Encontrar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado. • Relacionar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado con la ecuación inicial.	1 Hora + 30 Minutos	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	Reducción de tiempo en cada hora en la Instutción Educativa
	2	• Encontrar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado. • Relacionar la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado con la ecuación inicial.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	
	3	• Solucionar los dos primeros puntos del taller, los cuales abarcan todos los temas vistos hasta el momento.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Fotocopias del taller $ 3400	
	1/2	• Mediante un examen evaluar el conocimiento de los estudiantes que adquirieron durante las cinco clases anteriores.	1 Hora	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Fotocopias del examen $ 1700, y Hojas de cuadernillo $ 3400	
	1	• Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.	1 Hora	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	

3	1	• Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.	1 Hora	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	
	2	• Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	
	3	• Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.	1 Horas + 30 Minutos	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador.	Reducción de tiempo en cada hora en la Instutción Educativa
	4	• Mejorar la nota del tema: solución de ecuaciones de segundo grado utilizando las fórmulas cuadráticas. • Plantear y resolver situaciones problema utilizando ecuaciones de segundo grado.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Fotocopias del examen $ 1700, y Hojas de cuadernillo $ 3400	
4	1/2	• Evaluar el conocimiento de los estudiantes que adquirieron en el tema: problemas que se resuelven usando ecuaciones de segundo grado.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Fotocopias del examen $ 1700, y Hojas de cuadernillo $ 3400	
	1/2	• Reconocer la caja de polinomios como herramienta para representar, y operar con polinomios.	1 Hora	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Cajas de Polinomios $70 000	
	1	• Representar polinomios de hasta segundo grado utilizando la caja de polinomios. • Calcular la suma y diferencia de polinomios de segundo grado en una variable, utilizando la Caja de Polinomios como herramienta de cálculo.	1 Hora	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, Hojas y borrador. Financieros: Cajas de Polinomios $70 000	Reducción de tiempo en cada hora en la Instutción Educativa

4				Polinomios $70 000	
	2	• Realizar producto de polinomios lineales en la caja de polinomios	1 Hora	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Cajas de Polinomios $70 000	Reducción de tiempo en cada hora en la Instutción Educativa
	3	• Factorizar polinomios de segundo grado con coeficientes enteros utilizando la caja de polinomios.	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Cajas de Polinomios $70 000	
	4	• Resolver situaciones problema que involucren ecuaciones de segundo grado utilizando la caja de polinomios	2 Horas	Humanos: Estudiantes y Docente de Matemáticas de la Institución. Material lapíz, hojas y borrador. Financieros: Cajas de Polinomios $70 000	