TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ Y APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES

PAULO CESAR NAVIA GONZÁLEZ
MANUEL EMIRO HURTADO PINEDA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2006

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ Y APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES

PAULO CESAR NAVIA GONZÁLEZ
MANUEL EMIRO HURTADO PINEDA

Presentado como requisito parcial para
optar al título de
MATEMÁTICO

Director:
Especialista ALEX MONTES PADILLA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2006

Nota de aceptación

Director

Esp. Alex Manuel Montes P.

Comité evaluador

Lic. Gerardo Arturo Loaiza M.

Esp. Elkin Dario Cardenas D.

Fecha de sustentación: Popayán, 21 de noviembre de 2006

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin la ayuda de Dios y demas personas a quienes aquí les expresamos nuestro sinceros agradecimientos:

- A nuestras familias quienes en todo momento nos brindaron una voz de aliento y entusiasmo para culminar nuestros estudios.

- **Especialista Alex Manuel Montes Padilla**, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca y director del trabajo, por la asesoría, dedicación y constancia, al releer nuestro manuscrito, aportandonos sus conocimientos.

- **Licenciado Gerardo Arturo Loaiza y Especialista Elkin Dario Cardenas**, profesores de la Universidad del Cauca, jurados asignados en la revisión del trabajo, por sus valiosas y acertadas sugerencias para exitosa finalización del seminario.

- Profesores del Departamento de Matematicas de la Universidad del Cauca quienes nos prepararon y formaron en el conocimiento de las matemáticas.

- A todas aquellas personas que contribuyeron para la culminación de este trabajo mil gracias.

Fecha de sustentación: Popayán, 21 de noviembre de 2006

CONTENIDO

NOTACIÓN

$A \subseteq B$	A es subconjunto de B
$A \times B$	producto cartesiano A por B
$x \in A$	x es elemento de A
$x \notin A$	x no es elemento de A
$\emptyset$	conjunto vacío
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{R}^-$	conjunto de los números reales negativos
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\overline{A}$	adhrencia de A
$B(x_0, r)$	bola abierta, centrada en x_0, de radio r
p'	exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$
c.t.p.	para casi todo punto
$m(A)$	medida (de lebesgue) del conjunto A.
$Supp \quad f$	soporte de la función f
$f * g$	producto de convolución
ρ_n	sucesión regularizante
$C_0(\Omega)$	funciones continuas con soporte compacto en Ω
$C^k(\Omega)$	funciones k veces continuamente diferenciables en Ω
$W^{1,p}, W_0^{1,p}$	espacios de Sobolev

INTRODUCCIÓN

La importancia del estudio del Análisis Funcional como una de las ramas de la Matemáticas, radica en su evolución y actual desarrollo que ha tenido a través de las mismas Matemáticas, como el Algebra, la Teoría de Números,la Geometría y Teoría de conjuntos entre otras. Pero es indiscutible, el gran aporte que la primera le ha dado a la misma, tanto en el campo abstracto como en el aplicado. Sus múltiples progresos han estimulado considerablemente la teoría de las Ecuaciones Diferenciales, como se conoce, es una de las ramas de las Matemáticas que tiene gran aplicación. La experiencia ha demostrado la dificultad de obtener teorías matemáticas genéricas a las soluciones de ecuaciones diferenciales, salvo para unos pocos tipos; ahí radica en concreto, la necesidad de estudiar tipos especiales de ecuaciones. En este trabajo estudiaremos los problemas de Dirichlet homogneo y no homogneo en dimensión uno.

El teorema de representación de Riesz junto con otros teoremas de Análisis, como el teorema de Stampacchia y el de Lax-Milgran constituyen una herramienta útil del Análisis Funcional para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales.

La noción de espacio de Sobolev es esencial para el estudio de lo que suele llamarse soluciones débiles. De tal manera que resulta interesante mostrar como se utilizan estos resultados en la solución de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 1

Preliminares

Teniendo en cuenta que el propósito principal de este trabajo es realizar una aplicación del Análisis Funcional a la teoría de Ecuaciones Diferenciales, en esta sección se exponen las bases fundamentales para el desarrollo de dicha aplicación.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ medible y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función.

Definición 1.1. *Sea $1 \leq p \leq \infty$; se dice que q es el* ***conjugado*** *de p si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definición 1.2. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se define el* ***soporte*** *de f por*

$$Supp\ f = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}.$$

Observación 1.1. *Por fuera del Supp f la función se anula.*

Observación 1.2. *Si el Supp f es compacto entonces se dice que f es una función de* ***soporte compacto****.*

Definición 1.3. *Decimos que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si f es una función integrable sobre todo subconjunto compacto de Ω.*

Definición 1.4. *Sea $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < \infty$ se define*

$$L^p(\Omega)=\{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \text{medible y} \int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty \quad c.t.p. \ en\ \Omega\}.$$

Si $p = \infty$

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) \ &= \ \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \text{medible y existe } C \geq 0 \text{ tal que} \\ & \qquad |f(x)| < C \ c.t.p. \ en\ \Omega\}. \end{aligned}$$

Observación 1.3. *$L^p(\Omega)$ es un espacio normado con la norma definida por*

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = \infty$

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = Inf\left\{C \geq 0 : |f(x)| < C \ c.t.p. \ en\ \Omega\right\}.$$

Proposición 1.1. *Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces $\varphi \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 1.1 (Densidad). *El espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*[1]

Teorema 1.2. *Sea $f \in L^1(\Omega)$ tal que $\int\limits_\Omega fu = 0 \quad \forall u \in C_0^1(\Omega)$ entonces $f = 0$ c.t.p. en Ω.*[2]

Teorema 1.3. *El espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach*[3] *para $1 \leq p \leq \infty$.*[4]

Teorema 1.4 (Desigualdad de Hölder). *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

---

[1] *ver teorema IV.12 de [3]*
[2] *ver lema IV.2 de [3]*
[3] *Espacio normado y completo.*
[4] *ver teorema IV.8 de [3]*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$ [5]

Teorema 1.5 (Convergencia dominada). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$. Supongamos que*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en* Ω,

ii) existe una función $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad c.t.p \text{ en } \Omega.$$

Entonces

$$f \in L^1(\Omega) \;\; y \;\; \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0.$$ [6]

Teorema 1.6 (Fubini). *Supongamos que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Entonces para casi todo* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad y \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Igualmente, para casi todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad y \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Además se verifica

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$ [7]

Teorema 1.7. *Sean $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, tales que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que*

$$f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x) \text{ c.t.p. en } \Omega.$$ [8]

Teorema 1.8 (Convolución). *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}$, se define*

[5] *ver teorema IV.6 de [3]*
[6] *ver teorema IV.2 de [3]*
[7] *ver teorema IV.4 de [3]*
[8] *ver teorema IV.9 de [3]*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Entonces

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}) \quad y \quad \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$ [9]

Proposición 1.2. *Sean $f \in C_o^k(\mathbb{R})$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donde $k \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$(f * g) \in C^k(\mathbb{R}) \qquad y \qquad D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$ [10]

Observación 1.4. *Dada una función f se escribe $\breve{f}(x) = f(-x)$.*

Proposición 1.3. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ y $h \in L^q(\mathbb{R})$ donde q es el conjugado de p. Entonces*

$$\int (f * g)\, h = \int g(\breve{f} * h).$$ [11]

Proposición 1.4. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^p(\mathbb{R})$. Entonces*

$$Supp\ (f * g) \subset \overline{Supp\ f + Supp\ g}.$$ [12]

Definición 1.5. *Se llama* ***sucesión regularizante*** *a toda sucesión $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ de funciones tal que:*

a) $\rho_n \geq 0$ *en* $\mathbb{R}$.

b) $\rho_n \in C_0^\infty$.

c) $Supp(\rho_n) \subset B(0, 1/n)$.

d) $\int \rho_n = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$[13].

Teorema 1.9. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $\rho_n * f \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R})$.*[14]

Teorema 1.10. *Sea H un espacio de Hilbert y X un subespacio convexo y cerrado de H. Entonces X es Hilbert.*[15]

[9] *ver teorema IV.15 de [3]*
[10] *ver proposicón IV.20 de [3]*
[11] *ver proposición IV.16 de [3]*
[12] *ver proposición IV.18 de [3]*
[13] *ver pag. 70 de [3]*
[14] *ver teorema IV.22 de [3]*
[15] *ver theorem 2G de [4]*

Capítulo 2

Teorema de representación de Riesz

El teorema de representación de Riesz es uno de los teoremas del Análisis Funcional que tiene una gran aplicación en la teoría de Ecuaciones Diferenciales; para nuestro interés será de gran ayuda en el método variacional, al problema de Dirchlet homogéneo y no homogéneo.

Definición 2.1. *Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Una **norma** es una función*

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface: que para todo $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$

i) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 2.2. *Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Un **producto interno** es una función*

$$\langle\ ,\ \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

que satisface que para todo $x, y, z \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$

I) $\langle x,x\rangle \geq 0,\ \ \langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x=0.$

II) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle .$

III) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha \langle x,y\rangle .$

IV) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}.$

Observación 2.1. *Con (I)-(IV) se prueban las siguientes propiedades, para todo* $x,y \in X$, $\alpha \in \mathbb{k}$

1. $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle.$

2. $\langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle.$

3. $\langle x,0\rangle = 0.$

Observación 2.2. *En adelante consideremos* $\mathbb{k}=\mathbb{R}$*. Por tanto en (IV), obtenemos,* $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ *y además en (2), de la obsevación 2.1 tenemos* $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha \langle x,y\rangle .$

Teorema 2.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea* X *un espacio con un prducto interno* $\langle\ ,\ \rangle$ *entonces, para todo* $x,y\in X$ *se tiene que*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}} .$$

Demostración. Para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, de (I), tenemos $\langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \geq 0$, luego

$$\begin{aligned}\langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle &= \langle x,x\rangle - \alpha\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle - \alpha\langle y,x\rangle - \ \alpha\left[\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,y\rangle\right].\end{aligned}$$

Si $y\neq 0$, tomamos $\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$, entonces, como $\alpha\left[\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,y\rangle\right] = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,x\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \frac{|\langle y,x\rangle|^2}{\langle y,y\rangle},
\end{aligned}$$

de donde

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}} .$$

Si $y=0$, el resultado se obtiene inmediatamente. $\square$

Teorema 2.2. *Si X es un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$, entonces $\langle\ ,\ \rangle$ induce una norma $\|\cdot\|$, definida por*

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} .$$

Esta norma se le denomina norma inducida por el producto interno.

Demostración. Veamos que $\|\cdot\|$ satisface las propiedades de norma

$i)$ Por definición de producto interno tenemos que $\langle x,x\rangle \geq 0$ para todo $x\in X$, luego $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$, además

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$ii)$ Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in X$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|^2 &= \langle \alpha x, \alpha x\rangle \\
\|\alpha x\|^2 &= \alpha^2 \langle x,x\rangle \\
\|\alpha x\| &= |\alpha| \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} ,
\end{aligned}$$

así

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| .$$

iii) Dados $x, y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\left|\langle x, y\rangle\right| + \|y\|^2, \end{aligned}$$

luego por desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

de donde se concluye

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$\square$

Teorema 2.3. *Si X es un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$, entonces $\langle\ ,\ \rangle$ induce una métrica d, definida por*

$$d(x, y) = \|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

para todo $x, y \in X$.

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

i) Por definición de producto interno tenemos que $\langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$, luego como $\langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}} = d(x, y) \geq 0$ y además

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x-y, x-y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x-y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \langle x,x \rangle - \langle y,x \rangle - \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle \\
&= \langle y,y \rangle - \langle y,x \rangle - \langle x,y \rangle + \langle x,x \rangle \\
&= \langle y-x, y-x \rangle \\
&= [d(y,x)]^2 ,
\end{aligned}$$

así

$$d(x,y) = d(y,x).$$

iii)

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \langle x-z+z-y, x-z+z-y \rangle \\
&= \langle (x-z)+(z-y), (x-z)+(z-y) \rangle \\
&= \langle x-z, x-z \rangle + \langle x-z, z-y \rangle + \langle z-y, x-z \rangle + \langle z-y, z-y \rangle \\
&= \langle x-z, x-z \rangle + 2\left|\langle x-z, z-y \rangle\right| + \langle z-y, z-y \rangle ,
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &\leq \langle x-z, x-z \rangle + 2\langle x-z, x-z \rangle^{\frac{1}{2}} \langle z-y, z-y \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle z-y, z-y \rangle \\
&= [d(x,z)]^2 + 2d(x,z)d(z,y) + [d(z,y)]^2 \\
&= [d(x,z) + d(z,y]^2 ,
\end{aligned}$$

de aquí se tiene que,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

□

Definición 2.3. *Sea H un espacio con producto interno $\langle \ , \ \rangle$. H se dice que es un* ***espacio de Hilbert*** *si es completo con la métrica inducida por el producto interno.*

Definición 2.4. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; una función*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice que es ***un funcional lineal*** *si*

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y) \qquad \forall x, y \in X \ y \, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.5. *Sea f un funcional lineal se define el* ***núcleo*** *de f por*

$$N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Definición 2.6. *Sea X un espacio vectorial, se dice que X es la* ***suma directa*** *de dos subespacios Y y Z de X, si para todo $x \in X$ existen únicos $y \in Y$ y $z \in Z$ tales que $x = y + z$; y denotamos $X = Y \oplus Z$.*

Definición 2.7. *Sea X un espacio con producto interno y Y un subconjunto de X. Se define el* ***complemento ortogonal*** *de Y por*

$$Y^{\perp} = \{z \in X : \langle z, y \rangle = 0 \ para \ todo \ y \in Y\}.$$

Definición 2.8. *Sea X un espacio normado. Un funcional lineal f, es* ***acotado*** *si existe $C > 0$, tal que*

$$\mid f(x) \mid \leq C \parallel x \parallel \qquad \forall x \in X.$$

Definición 2.9. *Sea X un espacio normado y sea f un funcional lineal acotado, se define la* ***norma*** *de f por*

$$\|f\| = \underset{\substack{x \in X \\ x \neq 0}}{Sup} \frac{\mid f(x) \mid}{\parallel x \parallel}.$$

Observación 2.3. *Note que la definición anterior tiene sentido ya que si f es un funcional acotado, entonces existe $C \geq 0$ tal que*

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq C \quad \forall x \in X, \ x \neq 0,$$

así existe tal supremo.

Observación 2.4. *La norma del funcional f anteriormente definida es equivalente a la norma*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$$

Demostración. Sea $a = \|x\|$ y sea $y = \left(\frac{1}{a}\right) x$ entonces,

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \left(\tfrac{1}{a}\right) x \right\| \\ &= \left| \left(\tfrac{1}{a}\right) \right| \|x\| \\ &= \left(\tfrac{1}{a}\right) a, \end{aligned}$$

es decir, $\|y\| = 1$; Como f es un funcional lineal acotado se tiene

$$\begin{aligned} \|f\| &= \underset{\substack{x\in X \\ x\neq 0}}{Sup} \frac{\mid f(x) \mid}{\| x \|} \\ &= \underset{\substack{x\in X \\ x\neq 0}}{Sup} \left(\frac{1}{a} \mid f(x) \mid\right) \\ &= \underset{\substack{x\in X \\ x\neq 0}}{Sup} \left| f\left(\frac{1}{a} x\right) \right| \\ &= \underset{\substack{y\in X \\ \|y\|=1}}{Sup} |f(y)|. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1. *Sea X un espacio vectorial y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal acotado, entonces*

i) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que $x_n \longrightarrow x$, $x \in X$, entonces

$$f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

ii) *$N(f)$ es cerrado.*

Demostración.

i) Mostremos que $|f(x_n) - f(x)| \longrightarrow 0$.

Como f es un funcional lineal tenemos

$$| f(x_n) - f(x) | = | f(x_n - x) |$$

y además como es acotado

$$|f(x_n - x)| \leq C \|x_n - x\|,$$

para algún $C \geq 0$, es decir

$$| f(x_n) - f(x) | \leq C \|x_n - x\|$$

como $x_n \longrightarrow x$ entonces $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, así

$$|f(x_n) - f(x)| \longrightarrow 0,$$

por lo tanto $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.
ii) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $N(f)$ y $x \in X$ tal que

$$x_n \longrightarrow x.$$

Veamos que $x \in N(f)$, por (i) tenemos que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

pero $x_n \in N(f)$ lo que implica que $f(x_n) = 0$, luego por unicidad de convergencia se tiene que $f(x) = 0$, es decir $x \in N(f)$ por lo tanto $N(f)$ es cerrado. □

Teorema 2.4. *Sea X un espacio con producto interno y sea $M \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y completo (con la métrica inducida por el producto interno) de X, entonces, para todo $x \in X$, existe un único $\mu \in M$ tal que*

$$\delta = Inf\,\{\|x - y\| : y \in M\} = \|x - \mu\|.$$

Si además, M es un subespacio de X, entonces $z = x - \mu$ es ortogonal a M.

Demostración.

$i)$ **Existencia.**

Sea $x \in X$, $\delta = Inf\{\| x - \ddot{y} \|: \ddot{y} \in M\}$ y Sea $\delta_n =\| x - y_n \|;\;\; y_n \in M$ tal que

$$\delta_n \longrightarrow \delta.$$

Veamos que $\{y_n\}$ es de Cauchy en M. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $v_n = y_n - x$, se tiene que

$$\| v_n \| = \delta_n, \tag{2.1}$$

y

$$\begin{aligned} \| v_n + v_m \| &= \| y_n - x + y_m - x \| \\ &= \| y_n + y_m - 2x \| \\ &= 2 \,\| \tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_m - x \|, \end{aligned}$$

luego como M es convexo se tiene que $(\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m) \in M$ y además $\delta \leq \| x - \ddot{y} \|$ para todo $\ddot{y} \in M$, así

$$\| v_n + v_m \| \geq 2\delta. \tag{2.2}$$

Por otra parte

$$\| y_n - y_m \|^2 = \| v_n - v_m \|^2 \,.$$

y por identidad de paralelogramo tenemos

$$\| y_n - y_m \|^2 = 2 \,\| v_n \|^2 + 2 \,\| v_m \|^2 - \;\| v_n + v_m \|^2,$$

utilizando (2.1) y (2.2) obtenemos

$$\| y_n - y_m \|^2 \;\leq 2\delta_n^2 + 2\delta_m^2 - 4\delta^2 \longrightarrow 0,$$

es decir $\| y_n - y_m \| \longrightarrow 0$, de donde $\{y_n\}$ es de Cauchy en M. Por ser M completo, existe $\mu \in M$ tal que $y_n \longrightarrow \mu$. Probemos que

$$\| x - \mu \| = \delta.$$

Como $\mu \in M$ se tiene que

$$\delta \leq \| x - \mu \|,$$

además para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} \| x - \mu \| &\leq \| x - y_n \| + \| y_n - \mu \| \\ &= \delta_n + \| y_n - \mu \|, \end{aligned}$$

como $\delta_n \longrightarrow \delta$ obtenemos

$$\| x - \mu \| \leq \delta$$

en consecuencia

$$\| x - \mu \| = \delta.$$

ii) **Unicidad**

Sean $\mu, \mu_0 \in M$ tales que:

$$\| x - \mu \| = \delta \quad \text{y} \quad \| x - \mu_0 \| = \delta,$$

luego

$$\begin{aligned} \| \mu - \mu_0 \|^2 &= \| (\mu - x) - (\mu_0 - x) \|^2 \\ &= 2 \| \mu - x \|^2 + 2 \| \mu_0 - x \|^2 - \| (\mu - x) + (\mu_0 - x) \|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - \| \mu + \mu_0 - 2x \|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2 \| \tfrac{1}{2}(\mu + \mu_0) - x \|^2, \end{aligned}$$

pero tenemos que $\frac{1}{2}(\mu + \mu_0) \in M$ lo que implica que

$$\| \frac{1}{2}(\mu + \mu_0) - x \|^2 \geq \delta^2,$$

por lo tanto

$$4\delta^2 - 4 \parallel \frac{1}{2}(\mu + \mu_0) - x \parallel^2 \leq 0,$$

es decir

$$\parallel \mu - \mu_0 \parallel \leq 0,$$

de manera que

$$\parallel \mu - \mu_0 \parallel = 0,$$

por lo tanto

$$\mu = \mu_{0.}$$

Ahora probemos que $z = x - \mu$ es ortogonal a M, si M es subespacio de X. Supongamos que z no es ortogonal a M, es decir existe un $y_1 \in M$ tal que

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0,$$

es claro que $y_1 \neq 0$, ya que si $y_1 = 0$ entonces

$$\langle z, y_1 \rangle = 0.$$

Para un escalar α tenemos

$$\begin{aligned}
\parallel z - \alpha y_1 \parallel^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z \rangle - \alpha \langle z, y_1 \rangle - \alpha[\langle y_1, z \rangle - \alpha \langle y_1, y_1 \rangle] \\
&= \langle z, z \rangle - \alpha\beta - \alpha[\beta - \alpha \langle y_1, y_1 \rangle],
\end{aligned}$$

tomando $\alpha = \dfrac{\beta}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\parallel z - \alpha y_1 \parallel^2 &= \langle z, z \rangle - \frac{\beta}{\langle y_1, y_1 \rangle}\beta \\
&= \parallel z \parallel^2 - \frac{\mid \beta \mid^2}{\langle y_1, y_1 \rangle},
\end{aligned}$$

como $\| z \|=\| x-\mu \|= \delta$ y $\dfrac{| \beta |^2}{\langle y_1, y_1\rangle} > 0$, entonces

$$\| z-\alpha y_1 \|^2 = \| z \|^2 - \frac{| \beta |^2}{\langle y_1, y_1\rangle} < \delta^2$$

lo que es una contradicción, ya que

$$z-\alpha y_1 = x-y_2,$$

tomando $y_2=\mu+\alpha y_1$, como M es subespacio se tiene $y_2 \in M$. Así

$$\| z-\alpha y_1 \| = \| x-y_2 \|,$$

luego por definición de $\delta = Inf\{\| x-\ddot{y} \| : \ddot{y} \in M\}$, se tiene

$$\| z-\alpha y_1 \| \geq \delta,$$

por lo tanto $z=x-\mu$ es ortogonal a M. □

Proposición 2.2. *Sea X un espacio métrico completo y Y un subespacio de X. Si Y es cerrado entonces, Y es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en Y, entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy en X. por lo tanto $\{x_n\}$ converge en X, pero $\{x_n\}$ está en Y y Y es cerrado, entonces $\{x_n\}$ converge en Y. □

Teorema 2.5 (Representación de Riesz). *Sea H un espacio de Hilbert. Para todo funcional lineal y acotado $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$, existe un único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y\rangle \qquad \forall x \in H$$

además

$$\|f\| = \|y\|.$$

Demostración.

Existencia. Si $f = 0$ tomamos $y = 0$, entonces

$$f(x) = \langle x, 0\rangle = 0 \qquad \forall x \in H,$$

además

$$\| f \| = \underset{\substack{x \in H \\ x \neq 0}}{Sup} \frac{| f(x) |}{\| x \|} = 0 = \| y \| .$$

Supongamos que $f \neq 0$ y sea $M = N(f)$, por proposición 2.1 tenemos que M es cerrado y también subespacio de H. Como M es un subespacio cerrado de H entonces tenemos que M es completo y convexo, luego por teorema 2.4, se tiene que para cada $x \in H$ existe un único $y \in M$ tal que satisface lo siguiente

i) $\delta = Inf\{\| x - \ddot{y} \| : \ddot{y} \in M\} = \|x - y\|$.

ii) $z = (x - y) \perp M$ es decir $z \in M^{\perp}$.

iii) Es el único $y \in M$ tal que $x = y + z$.

Así podemos ver a H como la suma directa de M y su complemento ortogonal $M^{\perp}$, esto es

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

como $M \neq H$ (puesto que $f \neq 0$), existe $\omega \in M^{\perp}$ tal que

$$f(\omega) \neq 0.$$

Sea $z = \dfrac{\omega}{f(\omega)} \in M^{\perp}$, ya que $M^{\perp}$ es un subespacio de H, luego para todo $x \in H$

$$(x - f(x)z) \in M.$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
f(x - f(x)z) &= f(x) - f[f(x)z] \\
&= f(x) - f(x)f(z) \\
&= f(x) - f(x)f\left(\frac{\omega}{f(\omega)}\right) \\
&= f(x) - f(x)\frac{f(\omega)}{f(\omega)} \\
&= f(x) - f(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Así, $(x - f(x)z) \perp z$, de donde

$$0 = \langle x - f(x)z, z\rangle,$$

o sea que

$$0 = \langle x, z\rangle - f(x)\|z\|^2,$$

por lo tanto

$$f(x) = \langle x, \frac{z}{\|z\|^2}\rangle,$$

tomando

$$y = \frac{z}{\|z\|^2},$$

obtenemos

$$f(x) = \langle x, y\rangle.$$

Unicidad.

Sean $y, \ddot{y} \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, y\rangle \text{ y } f(x) = \langle x, \ddot{y}\rangle,$$

entonces, para todo $x \in H$

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \ddot{y}\rangle$$

de manera que

$$\langle x, y - \ddot{y}\rangle = 0,$$

lo que implica

$$y - \ddot{y} = 0,$$

por lo tanto

$$y = \ddot{y}.$$

Ahora probemos que

$$\| f \| = \| y \| .$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$| f(x) | = | \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \| y \|,$$

para $x \neq 0$

$$\frac{| f(x) |}{\| x \|} \leq \| y \|,$$

de donde

$$\underset{\substack{x \in H \\ x \neq 0}}{Sup} \frac{| f(x) |}{\| x \|} \leq \| y \|,$$

por lo tanto

$$\| f \| \leq \| y \| .$$

De otro lado

$$\begin{aligned} f(y) &= \langle y, y \rangle \\ f(y) &= \| y \|^2 \\ \| y \| &= \frac{f(y)}{\| y \|} \\ \| y \| &\leq \underset{\substack{x \in H \\ x \neq 0}}{Sup} \frac{| f(x) |}{\| x \|}, \end{aligned}$$

así

$$\| y \| \leq \|f\| ,$$

por lo tanto

$$\| f \| = \| y \| .$$

$\square$

Capítulo 3

Espacios de Sobolev

Estos espacios tendrán una gran utilidad para nuestros propósitos, ya que presentan características especiales del Análisis Funcional, las cuales las mostraremos en este capítulo. Además cabe resaltar la importancia de estos espacios para el estudio de las derivadas débiles. De aquí en adelante se supone conocidos los elementos básicos de la teoría integral (en especial se tomará la integral de Lebesgue) y se utilizarán algunos resultados de espacios L^p.

Sea $I = (a, b)$ un intervalo no necesariamente acotado y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 3.1. *El espacio de **Sobolev** $W^{1,p}(I)$ se define por*

$$W^{1,p}(I) =$$
$$\left\{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \ \textit{tal que} \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \forall \varphi \in C_0^1(I)\right\}.$$

Cuando $p = 2$ denotamos $W^{1,2}(I)$ por $H^1(I)$.

Observación 3.1. *Si para $u \in L^p(I)$ existe tal g en $L^p(I)$ que cumple*

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^1(I),$$

se dice que g es la **derivada débil** de u y se esribe $u' = g$. Además la derivada débil es única salvo en un conjunto de medida cero. En efecto, sean $g_1, g_2 \in L^p(I)$ tal que

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g_1\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I)$$

y

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g_2\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I),$$

luego

$$-\int_I g_1\varphi = -\int_I g_2\varphi,$$

de donde

$$\int_I (g_1 - g_2)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(I),$$

entonces por teorema 1.2 tenemos que

$$g_1 - g_2 = 0 \qquad c.t.p. \text{ en } I.$$

Por lo tanto

$$g_2 = g_1 \qquad c.t.p. \text{ en } I.$$

Observación 3.2. *Si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$, y $u' \in L^p(I)$ donde u' es la derivada usual de u, entonces $u \in W^{1,p}(I)$ y la derivada usual de u coincide con la derivada en el sentido débil. En particular si I es acotado se tiene que $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$.*

Teorema 3.1. *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ está dotado de la norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

La cual es equivalente a la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 3.2. *El espacio $W^{1,2}(I) = H^1(I)$ está dotado del producto interno*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u', v'\rangle_{L^2},$$

con

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_I (uv).$$

Este producto interno induce la norma

$$\|u\|_{H^1} = [\langle u, u\rangle_{H^1}]^{\frac{1}{2}} = [\langle u, u\rangle_{L^2} + \langle u', u'\rangle_{L^2}]^{\frac{1}{2}} = \left[\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

que es equivalente a la norma en $W^{1,2}(I)$ (ver capítulo 1 de [2]).

Teorema 3.3. *El espacio $W^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach. En particular $H^1(I)$es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(I)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(I)} + \|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)} < \varepsilon \text{ siempre que } n, m \geq \eta,$$

de donde $\{u_n\}$ y $\{u_n'\}$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(I)$, y como $L^p(I)$ es completo, existen $u, g \in L^p(I)$ tales que

$$u_n \longrightarrow u \qquad \text{y} \qquad u_n' \longrightarrow g \text{ en } L^p(I).$$

Ahora, si $\varphi \in C_0^1(I)$ se cumple que

$$\int_I u_n\varphi' \longrightarrow \int_I u\varphi' \qquad \text{y} \qquad \int_I u_n'\varphi \longrightarrow \int_I g\varphi.$$

En efecto

$$\left|\int_I u_n\varphi' - \int_I u\varphi'\right| = \left|\int_I (u_n - u)\varphi'\right| \leq \int_I |u_n - u||\varphi'|,$$

luego por desigualdad de Hölder se tiene que

$$\left|\int_I u_n\varphi' - \int_I u\varphi'\right| \leq \|u_n - u\|_{L^p(I)} \|\varphi'\|_{L^q(I)}$$

donde q es el conjugado de p, por tanto

$$\left|\int_I u_n\varphi' - \int_I u\varphi'\right| \longrightarrow 0,$$

es decir,

$$\int_I u_n\varphi' \longrightarrow \int_I u\varphi'.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\int_I u_n'\varphi \longrightarrow \int_I g\varphi.$$

Entonces como $\int_I u_n\varphi' = -\int_I u_n'\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^1(I)$, ya que $u_n \in W^{1,p}(I)$, se tiene que

$$\int_I u'\varphi = -\int_I g\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^1(I).$$

Por lo tanto $u \in W^{1,p}(I)$ con $u' = g$, además

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u_n - u\|_{L^p(I)} + \|u_n' - u'\|_{L^p(I)} \longrightarrow 0,$$

de donde

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } W^{1,p}(I),$$

en consecuencia $W^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. $\square$

Observación 3.3. *De la demostración anterior rescatamos el hecho de que si una sucesión $\{u_n\}$ en $W^{1,p}$ converge a u en L^p y $\{u_n'\}$ converge a una g en L^p entonces $u \in W^{1,p}$ y $u' = g$.*

Lema 3.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^1(I).$$

Entonces existe una constante C tal que $f = C$ c.t.p. en I.

Demostración. Sea $\psi \in C_0(I)$ una función fija tal que

$$\int_I \psi = 1.$$

Para toda función $\omega \in C_0(I)$ existe $\varphi \in C_0^1(I)$ tal que

$$\varphi' = \omega - \left(\int_I \omega\right)\psi.$$

En efecto, sea

$$h = \omega - \left(\int_I \omega\right)\psi,$$

entonces h es continua, con soporte compacto en I. Además

$$\begin{aligned}
\int_I h &= \int_I \omega - \left(\int_I \omega\right)\psi \\
&= \int_I \omega - \left(\int_I \omega\right)\left(\int_I \psi\right) \\
&= \int_I \omega - \int_I \omega = 0,
\end{aligned}$$

así la función

$$\varphi(x) = \int_a^x h(t)dt,$$

es de soporte compacto en I y es tal que

$$\varphi' = h = \omega - \left(\int_I \omega\right)\psi,$$

por lo tanto

$$\int_I f\left[\omega - \left(\int_I \omega\right)\psi\right] = 0 \quad \forall \omega \in C_0^1(I),$$

o sea

$$\int_I f\omega - \left(\int_I \omega\right)\int_I f\psi = 0 \quad \forall \omega \in C_0^1(I),$$

es decir

$$\int_I \omega\left[f - \int_I f\psi\right] = 0 \quad \forall \omega \in C_0^1(I).$$

Luego por teorema 1.2 tenemos que

$$f - \int_I f\psi = 0 \;\text{ c.t.p en } I,$$

por consiguiente $f = C$; donde $C = \int_I f\psi$. $\square$

Lema 3.2. *Sea $g \in L^1_{loc}(I)$; para y_0 fijo en I definimos*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt, \quad x \in I.$$

Entonces $v \in C(I)$ *y*

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_0^1(I)$

$$\begin{aligned}
\int_I v\varphi' &= \int_I \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right] \varphi'(x)dx \\
&= \int_a^{y_0} \int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dtdx + \int_{y_0}^{b} \int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dtdx \\
&= -\int_a^{y_0} \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dtdx + \int_{y_0}^{b} \int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dtdx.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_I v\varphi' &= -\int_a^{y_0} \int_a^{t} g(t)\varphi'(x)dxdt + \int_{y_0}^{b} \int_t^{b} g(t)\varphi'(x)dxdt \\
&= -\int_a^{y_0} \left[g(t)\varphi(x)\,\big|_a^t\right] dt + \int_{y_0}^{b} \left[g(t)\varphi(x)\,\big|_t^b\right] dt \\
&= -\int_a^{y_0} \left[g(t)(\varphi(t) - \varphi(a))\right] dt + \int_{y_0}^{b} \left[g(t)(\varphi(b) - \varphi(t))\right] dt \\
&= -\int_a^{y_0} \left[g(t)\varphi(t)\right] dt - \int_{y_0}^{b} \left[g(t)\varphi(t)\right] dt \\
&= -\int_I g(t)\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.4. *Del lema anterior se deduce que la primitiva* v *de una función* g *de* L^p *pertenece a* $W^{1,p}$ *siempre que* $v \in L^p$.

Teorema 3.4. *Sea* $u \in W^{1,p}(I)$; *entonces existe una función* $\widetilde{u} \in C\left(\overline{I}\right)$ *tal que*

$$u = \widetilde{u} \qquad c.t.p. \text{ en } I$$

y

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \qquad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demostración. Se fija $y_0 \in I$ y sea

$$\overline{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt,$$

luego por lema 3.2, se tiene

$$\begin{aligned} \int_I \overline{u}\varphi' &= -\int_I u'\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^1(I) \\ &= \int_I u\varphi' \qquad \forall\varphi \in C_0^1(I), \end{aligned}$$

por tanto

$$\int_I (u-\overline{u})\,\varphi' = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^1(I),$$

y por lema 3.1

$$u - \overline{u} = C \qquad \text{c.t.p. en } I.$$

Entonces tomando $\widetilde{u}(x) = \overline{u}(x) + C$ se tiene que $\widetilde{u} \in C(\overline{I})$ y es tal que $u = \widetilde{u}$ *c.t.p* en I.

Sean $x, y \in I$

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) &= \overline{u}(x) - \overline{u}(y) \\ &= \int_y^x u'(t)dt. \end{aligned}$$

$\square$

Observación 3.5. *Observese que si $u \in W^{1,p}$ y si $u' \in C(\overline{I})$ entonces $u \in C^1(\overline{I})$.*

Observación 3.6. *Sea f una función definida en (a,b) denotamos*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ a < x < b \\ \\ 0 & si\ x \geq b. \end{cases}$$

Lema 3.3. *Si $u \in W^{1,p}(a,b)$ entonces,*

$$\xi\widetilde{u} \in W^{1,p}(a,\infty) \quad y \quad (\xi\widetilde{u})' = \xi'\widetilde{u} + \xi\widetilde{u}',$$

donde $\xi \in C^1(\mathbb{R})$, es una función fija tal que $0 \leq \xi \leq 1$ y

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < \frac{b-a}{4} \\ 0 & si \quad x > \frac{3(b-a)}{4}. \end{cases}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_a^\infty |\xi \widetilde{u}|^p &= \int_a^\infty |\xi|^p |\widetilde{u}|^p \\ &\leq \int_a^\infty |\widetilde{u}|^p \\ &= \int_a^b |u|^p, \end{aligned}$$

por tanto $\xi \widetilde{u} \in L^p(a, \infty)$.

Sea $\varphi \in C_0^1(a, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \xi \widetilde{u} \varphi' &= \int_a^b \xi \widetilde{u} \varphi' + \int_b^\infty \xi \widetilde{u} \varphi' \\ &= \int_a^b u \xi \varphi', \end{aligned}$$

como $\xi\varphi \in C_0^1(a, b)$, se tiene que $(\xi\varphi)' = \xi'\varphi + \xi\varphi'$, luego

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \xi \widetilde{u} \varphi' &= \int_a^b u \left[(\xi\varphi)' - \xi'\varphi \right] \\ &= \int_a^b u (\xi\varphi)' - \int_a^b u \xi' \varphi \\ &= -\int_a^b u' \xi \varphi - \int_a^b u \xi' \varphi \\ &= -\int_a^\infty \widetilde{u}' \xi \varphi - \int_a^\infty \widetilde{u} \xi' \varphi \\ &= -\int_a^\infty (\widetilde{u}' \xi + \widetilde{u} \xi') \varphi. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $(\widetilde{u}'\xi + \widetilde{u}\xi') \in L^p(a, \infty)$.

$$\begin{aligned} \int_a^\infty |\widetilde{u}' \xi|^p &= \int_a^\infty |\widetilde{u}'|^p |\xi|^p \\ &\leq \int_a^\infty |\widetilde{u}'|^p \\ &= \int_a^b |\widetilde{u}'|^p \\ &= \int_a^b |u'|^p. \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \int_a^\infty |\widetilde{u} \xi'|^p &= \int_a^\infty |\widetilde{u}|^p |\xi'|^p \\ &\leq \|\xi'\|_{L^\infty(a,\infty)}^p \int_a^b |\widetilde{u}|^p, \end{aligned}$$

luego $(\widetilde{u}'\xi + \widetilde{u}\xi') \in L^p(a,\infty)$ y entonces se tiene que

$$\xi\widetilde{u} \in W^{1,p}(a,\infty) \quad \text{y} \quad (\xi\widetilde{u})' = \xi'\widetilde{u} + \xi\widetilde{u}'.$$

□

Teorema 3.5 (Operador prolongación). *Sea* $1 \leq p \leq \infty$. *Existe un operador de prolongación* $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ *lineal y continuo tal que*

i) $Pu\big|_I = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{L^p(I)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

Demostración. Consideremos primero el caso $I = (a,\infty)$ y demostremos que dada $u \in W^{1,p}(I)$, la prolongación por reflexión definida por

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \geq a \\ u(-x) & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

es lineal y satisface las condiciones deseadas.

$$\begin{aligned}
\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left[\textstyle\int_{\mathbb{R}} |u^*(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&= \left[\textstyle\int_{-\infty}^{a} |u^*(x)|^p\,dx + \int_a^\infty |u^*(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&= \left[\textstyle\int_{-\infty}^{a} |u(-x)|^p\,dx + \int_a^\infty |u(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&= \left[\textstyle\int_{\infty}^{a} -|u(x)|^p\,dx + \int_a^\infty |u(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&= \left[2\textstyle\int_a^\infty |u(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\leq C\,\|u\|_{L^p(I),}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{L^p(I).} \tag{3.1}$$

Ahora sea

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > a \\ -u'(-x) & \text{si } x < a, \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^p \, dx &= \int_{-\infty}^{a} |v(x)|^p \, dx + \int_{a}^{\infty} |v(x)|^p \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{a} |-u'(-x)|^p \, dx + \int_{a}^{\infty} |u'(x)|^p \, dx \\ &= \int_{\infty}^{a} - |u'(x)|^p \, dx + \int_{a}^{\infty} |u'(x)|^p \, dx \\ &= C \int_{a}^{\infty} |u'(x)|^p \, dx, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \, \|u'\|_{L^p(I).} \tag{3.2}$$

Por otro lado se tiene

$$u^*(x) - u(a) = \int_a^x v(t) dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, si $x < a$ entonces

$$\begin{aligned} \int_a^x v(t) dt &= \int_a^x -u'(-t) dt \\ &= \int_x^a u'(-t) dt \\ &= \int_{-x}^a -u'(t) dt \\ &= \int_a^{-x} u'(t) dt \\ &= u(-x) - u(a), \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_a^x v(t) dt = u^*(x) - u(a).$$

Si $x > a$ entonces

$$\begin{aligned} \int_a^x v(t) dt &= \int_a^x u'(t) dt \\ &= u(x) - u(a) \\ &= u^*(x) - u(a), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_a^x v(t)dt = u^*(x) - u(a) \quad c.t.p \text{ en } I,$$

entonces por la observación 3.4 se concluye que $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y además

$$(u^*)' = v.$$

Por (3.1) y (3.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} &= \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(u^*)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&= \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq C_1 \|u\|_{L^p(I)} + C_2 \|u'\|_{L^p(I)} \\
&\leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}
\end{aligned}$$

así

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I).} \tag{3.3}$$

Consideramos ahora el caso de que I es un intervalo acotado. Sea $I = (a, b)$.

Dada $u \in W^{1,p}(I)$ se escribe

$$u = \xi u + (1 - \xi)u.$$

Por el lema 3.3, la función ξu se prolonga a (a, ∞) por $\xi\widetilde{u}$ y luego por reflexión prolongamos a $\mathbb{R}$, obteniendose así una función $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, que prolonga a ξu. Luego como $\xi\widetilde{u} \in W^{1,p}(a, \infty)$ por (3.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq C \|\xi\widetilde{u}\|_{L^p(a,\infty)} \\
&= C \|\xi u\|_{L^p(I)} \\
&\leq C \|u\|_{L^p(I).}
\end{aligned}$$

Además por (3.3) se tiene

$$
\begin{aligned}
\|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} &\leq 2\,\|\xi\widetilde{u}\|_{W^{1,p}(a,\infty)}\\
&= 2\,\|\xi u\|_{W^{1,p}(I)}\\
&= 2\left[\|\xi u\|_{L^p(I)} + \|(\xi u)'\|_{L^p(I)}\right]\\
&\leq 2\left[\|u\|_{L^p(I)} + C\,\|u'\|_{L^p(I)}\right]\\
&\leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I).}
\end{aligned}
$$

Ahora procedemos prolongar $(1-\xi)u$ por $(1-\xi)\widetilde{u} \in W^{1,p}(-\infty, 1)$ donde

$$
\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } a < x < b \\ \\ 0 & \text{si } -\infty < x < a. \end{cases}
$$

y a $(1-\xi)\widetilde{u}$ la prolongamos por reflexión a $\mathbb{R}$ (respecto al punto 1) a una función $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, de tal manera que

$$
\begin{aligned}
\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq C\,\|(1-\xi)\widetilde{u}\|_{L^p(-\infty,b\ )}\\
&= C\,\|(1-\xi)u\|_{L^p(I)}\\
&\leq C\,\|u\|_{L^p(I)}
\end{aligned}
$$

igualmente por (3.3) tenemos

$$
\begin{aligned}
\|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} &\leq C\,\|(1-\xi)\widetilde{u}\|_{W^{1,p}(-\infty,b)}\\
&= C\,\|(1-\xi)u\|_{W^{1,p}(I)}\\
&= C\left[\|(1-\xi)u\|_{L^p(I)} + \left\|[(1-\xi)u]'\right\|_{L^p(I)}\right]\\
&\leq C\left[\|u\|_{L^p(I)} + C_1\,\|u'\|_{L^p(I)}\right]\\
&\leq K\,\|u\|_{W^{1,p}(I).}
\end{aligned}
$$

Así $Pu = v_1 + v_2$ satisface:

i) $Pu\big|_I = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

En efecto, sea $x \in I$

$$\begin{aligned}(Pu)(x) &= v_1(x) + v_2(x)\\ &= (\xi u)(x) + [(1-\xi)u](x)\\ &= u(x).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\|Pu\|_{L^P(\mathbb{R})} &= \|v_1 + v_2\|_{L^P(\mathbb{R})}\\ &\leq \|v_1\|_{L^P(\mathbb{R})} + \|v_2\|_{L^P(\mathbb{R})}\\ &\leq C_1 \|u\|_{L^P(I)} + C_2 \|u\|_{L^P(I)}\\ &= C \|u\|_{L^P(I).}\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\|Pu\|_{W^{1,P}(\mathbb{R})} &= \|v_1 + v_2\|_{W^{1,P}(\mathbb{R})}\\ &\leq \|v_1\|_{W^{1,P}(\mathbb{R})} + \|v_2\|_{W^{1,P}(\mathbb{R})}\\ &\leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(I)} + C_2 \|u\|_{W^{1,p}(I)}\\ &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(I).}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|Pu - Pv\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} &= \|P(u-v)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}\\ &\leq C \|u-v\|_{W^{1,p}(I),}\end{aligned}$$

se tiene la continuidad de la prolongación. □

Lema 3.4. *sea $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $v \in W^{1,p}\ (\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\rho * v \in W^{1,p}\ (\mathbb{R}) \quad y \quad (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Demostración. Supongamos primero que ρ es de soporte compacto. Como $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ y $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, $\rho * v \in L^p(\mathbb{R})$.

Sea $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$ por las proposiciones 1.2 y 1.3 se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (\rho * v)\, \varphi' &= \int_{\mathbb{R}} v\, (\check{\rho} * \varphi') \\
&= \int_{\mathbb{R}} v\, (\check{\rho} * \varphi)' \\
&= -\int_{\mathbb{R}} v'\, (\check{\rho} * \varphi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} (\rho * v')\, \varphi,
\end{aligned}
$$

de donde $(\rho * v) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y $(\rho * v)' = \rho * v'$.

Si ρ no es de soporte compacto, entonces existe una sucesión $\{\rho_n\}$ de $C_0^1(\mathbb{R})$ tal que $\rho_n \longrightarrow \rho$ en $L^1(\mathbb{R})$, entonces por lo anterior si $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

$$
\rho_n * v \in W^{1,p} \quad \text{y} \quad (\rho_n * v)' = \rho_n * v'.
$$

Además

$$
\begin{aligned}
\|\rho_n * v - \rho * v\|_{L^p} &= \|(\rho_n - \rho) * v\|_{L^p} \\
&\leq \|\rho_n - \rho\|_{L^1} \|v\|_{L^p} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

por consiguiente,

$$
\rho_n * v \longrightarrow \rho * v \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{R}),
$$

de igual manera,

$$
\rho_n * v' \longrightarrow \rho * v' \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{R}),
$$

luego por observación 3.3 se tiene que,

$$
(\rho * v) \in W^{1,p} \quad \text{y que} \quad (\rho * v)' = \rho * v'.
$$

$\square$

Lema 3.5. *Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \leq 1$, una función fija tal que*

$$
\psi(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 2. \end{cases}
$$

Entonces dada la sucesión

$$\psi_n(x) = \psi\left(\tfrac{x}{n}\right) \quad \textit{para} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

se tiene que $\psi_n f \longrightarrow f$ *en* $L^p(\mathbb{R})$, *para toda* $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Demostración.

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le n \\ 0 & \text{si } |x| \ge 2n. \end{cases}$$

Usaremos el teorema de la convergencia dominada para demostrar el resultado.

Para $x \in \mathbb{R}$, existe $\eta \in \mathbb{N}$ tal que $|x| < \eta$, de tal manera que si $n \ge \eta$ se tiene que

$$|\psi_n(x)f(x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

Y de otro lado,

$$\begin{aligned} |\psi_n f - f|^p &= |\psi_n - 1|^p |f|^p \\ &\le |f|^p, \end{aligned}$$

donde $|f|^p \in L^1(\mathbb{R})$, entonces por teorema de la convergencia dominada se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_n f - f|^p \longrightarrow 0,$$

o sea que

$$\|\psi_n f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

$\square$

Teorema 3.6 (Densidad). *Sea* $u \in W^{1,p}\ (I)$, *con* $1 \le p < \infty$, *entonces existe una sucesión* $\{u_n\}$ *en* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *tal que*

$$u_n\big|_I \longrightarrow u \quad \textit{en} \quad W^{1,p}\ (I).$$

Demostración. Supongamos primero que $I = \mathbb{R}$.

Sean $\{\rho_n\}$ una sucesión regularizante y ψ_n la sucesión que se definió en el lema anterior. Demostremos que la sucesión $\{u_n\}$ definida por

$$u_n = \psi_n(\rho_n * u),$$

converge a u en $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Primero veamos que $\|u_n - u\|_{L^p} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{L^p} &= \|\psi_n[(\rho_n * u) - u] + [\psi_n u - u]\|_{L^p} \\
&\leq \|\psi_n[(\rho_n * u) - u]\|_{L^p} + \|\psi_n u - u\|_{L^p} \\
&\leq \|(\rho_n * u) - u\|_{L^p} + \|\psi_n u - u\|_{L^p} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

En virtud de la proposición 1.2 se tiene

$$\begin{aligned}
u_n' &= \psi_n'(\rho_n * u) + \psi_n(\rho_n * u)' \\
&= \psi_n'(\rho_n * u) + \psi_n(\rho_n * u'),
\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
\|u_n' - u'\|_{L^p} &= \|\psi_n'(\rho_n * u) + \psi_n(\rho_n * u') - u'\| \\
&\leq \|\psi_n'(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\psi_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p} \\
&= \|\psi_n'(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\psi_n(\rho_n * u') - \psi_n u' + \psi_n u' - u'\|_{L^p} \\
&\leq \frac{1}{n}\|\psi'\|_{L^\infty}\|\rho_n * u\|_{L^p} + \|\psi_n[(\rho_n * u') - u']\|_{L^p} + \|\psi_n u' - u'\|_{L^p} \longrightarrow
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

Ahora, sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $I \neq \mathbb{R}$, consideramos su prolongación $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ de tal manera que existe una sucesión $\{u_n\}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n \longrightarrow Pu$ en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\left\| u_n\big|_I - u \right\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|u_n - Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

$\square$

Teorema 3.7. *Existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(I),$$

o sea que $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$.

Demostración. Supongamos que $I = \mathbb{R}$.

Sea $v \in C_0^1(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ y definase

$$G(s) = |s|^{p-1} s.$$

Entonces $G'(s)$[1]$= p\,|s|^{p-1}$, de donde si $w = G(v)$ se tiene que $w \in C_0^1(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} w' &= G'(v)v' \\ &= p\,|v|^{p-1} v'. \end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p\,|v(t)|^{p-1} v'(t)dt,$$

es decir,

$$|v(x)|^{p-1} v(x) = \int_{-\infty}^{x} p\,|v(t)|^{p-1} v'(t)dt.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |v(x)|^p &= \left||v(x)|^{p-1}v(x)\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{x} p\,|v(t)|^{p-1} v'(t)dt\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{x} p\,|v(t)|^{p-1} |v'(t)|\, dt \\ &\leq p\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{p-1} |v'(t)|\, dt \\ &\leq p\left[\int_{\mathbb{R}} \left(|v(t)|^{p-1}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}} |v'(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

[1]si $s \geq 0$, $G'(s) = (p-1)s^{p-2}s + s^{p-1} = ps^{p-1}$
si $s < 0$, $G'(s) = (p-1)(-s)^{p-2}(-s) + (-s)^{p-1} = p(-s)^{p-1}$

donde
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$
por consiguiente
$$\begin{aligned} |v(x)|^p &\le p\left[\int_{\mathbb{R}}|v(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{q}}\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= p\left[\left(\int_{\mathbb{R}}|v(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}}\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= p\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$
y por desigualdad de Young
$$\begin{aligned} |v(x)|^p &\le p\left[\tfrac{1}{q}\left(\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\right)^q+\tfrac{1}{p}\left(\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}\right)^p\right] \\ &\le A\left[\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^p+\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right], \end{aligned}$$
luego
$$\begin{aligned} |v(x)| &\le C\left[\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^p+\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= C\,\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}),} \end{aligned}$$
o sea que
$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C\,\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall v\in C_0^1(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$
Sea $u\in W^{1,p}(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{u_n\}$ en $C_0^1(\mathbb{R})$ tal que
$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}),$$
luego $\{u_n\}$ es de Cauchy en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Por (3.4)
$$\|u_n-u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le C\,\|u_n-u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}\longrightarrow 0,$$
de manera que $\{u_n\}$ es de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R})$ y como $L^\infty(\mathbb{R})$ es completo existe $\overline{u}$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ tal que
$$u_n \longrightarrow \overline{u} \quad \text{en} \quad L^\infty(\mathbb{R}),$$

veamos que $u = \overline{u}$. Como $u_n \longrightarrow u \quad$ en $\; W^{1,p}(\mathbb{R})$, entonces existe una subsucesión u_{n_k} tal que

$$|u_{n_k}(x) - u(x)| \longrightarrow 0 \quad c.t.p. \text{ en } \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned} |u(x) - \overline{u}(x)| &\leq |u(x) - u_{n_k}(x)| + |u_{n_k}(x) - \overline{u}(x)| \\ &\leq |u(x) - u_{n_k}(x)| + \|u_{n_k}(x) - \overline{u}(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

por tanto

$$\overline{u} = u \; c.t.p. \text{ en } \mathbb{R}.$$

Además se tiene que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \lim_{n\to\infty} C\|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})},$$

de donde se obtiene que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}.$$

Sea $\; u \in W^{1,p}(I)$ con $I \neq \mathbb{R}$, entonces existe $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \;$ tal que $Pu\big|_I = u$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(I)} &= \|Pu\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq \|Pu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq C\,\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \\ &\leq K\,\|u\|_{W^{1,p}(I)}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.8 (derivación de un producto). *Sean* $u, v \in W^{1,p}(I)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces*

$$uv \in W^{1,p}(I) \quad y \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Además se verifica la fórmula de integración por partes

$$\int_y^x u'v = u\,(x)\,v\,(x) - u\,(y)\,v\,(y) - \int_y^x uv'.$$

Demostración. Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ entonces $u \in L^{\infty}(I)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_I |uv|^p &= \int_I |u|^p\,|v|^p \\ &\leq C\int_I |v|^p\,, \quad \text{para algún } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De donde $uv \in L^p(I)$. Ahora supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $u, v \in W^{1,p}(I)$ entonces existen $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ sucesiones en $C_0^1(\mathbb{R})$ tales que

$$u_n\big|_I \longrightarrow u \quad \text{y} \quad v_n\big|_I \longrightarrow v \quad \text{en} \quad W^{1,p}(I),$$

de donde

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{y} \quad v_n \longrightarrow v \quad \text{en} \quad L^p(I)$$

y

$$u_n' \longrightarrow u' \quad \text{y} \quad v_n' \longrightarrow v' \quad \text{en} \quad L^p(I),$$

de aquí

$$u_n v_n \longrightarrow uv \quad \text{en} \quad L^p(I).$$

y

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \longrightarrow u'v + uv' \quad \text{en} \quad L^p(I),$$

luego por observación 3.3 tenemos que $uv \in W^{1,p}(I)$, además

$$(uv)' \;=\; u'v + uv'. \tag{3.5}$$

Integrando (3.5)

$$\int_y^x (uv)'\,(t)dt = \int_y^x (u'v + uv')(t)dt,$$

luego

$$u\,(x)\,v\,(x) - u\,(y)\,v\,(y) = \int_y^x u'(t)v(t)dt + \int_y^x u(t)v'(t)dt,$$

por consiguiente

$$\int_y^x u'(t)v(t)dt \ = \ u\,(x)\,v\,(x) - u\,(y)\,v\,(y) - \int_y^x u(t)v'(t)dt.$$

Ahora supongamos que $u, v \in W^{1,\infty}(I)$, entonces $u, v, u', v' \in L^\infty(I)$ es decir,

$$uv \in L^\infty(I) \ \text{ y } \ u'v + uv' \in L^\infty(I).$$

Probemos que

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\,\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^1(I).$$

Sea $\varphi \in C_0^1(I)$ y $J \subset I$ un intervalo abierto y acotado tal que $Supp\ \varphi \subset J$. $u, v \in W^{1,p}(J)$ con $1 \le p < \infty$, en efecto

$$\int_J |u|^p \ \le \ \|u\|^p_{L^\infty}\, m(J),$$

y además para $\psi \in C_0^1(J)$

$$\begin{aligned} \int_J u\psi' \ &= \ \int_I u\psi' \\ &= \ -\int_I u'\psi \\ &= \ -\int_J u'\psi, \end{aligned}$$

es decir, $u \in W^{1,p}(J)$. De manera análoga se demuestra que $v \in W^{1,p}(J)$. Luego por el caso anterior $uv \in W^{1,p}(J)$, para $1 \le p < \infty$, de donde

$$\int_J uv\varphi' \ = \ -\int_J (u'v + uv')\varphi,$$

o sea que

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi,$$

por lo tanto $uv \in W^{1,\infty}(I)$ y además

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{para} \ \ u, v \in W^{1,\infty}(I),$$

integrando ahora por partes como se hizo en el caso de $(1 \le p < \infty)$ se obtiene

$$\int_y^x u'(t)v(t)dt = u\left(x\right)v\left(x\right) - u\left(y\right)v\left(y\right) - \int_y^x u(t)v'(t)dt.$$

$\square$

Teorema 3.9 (Derivación de una composición). *Sea* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $G(0) = 0$ *y sea* $u \in W^{1,p}(I)$, *entonces*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad y \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(I)$ y $M = \|u\|_{L^\infty(I)}$. Como $G(0) = 0$, existe una constante C tal que

$$|G(s)| \leq C\,|s| \quad \text{para} \;\; s \in [-M, +M]\,.$$

En efecto. Dado $s \in [-M, +M]$, existe $t \in (0, s)$ tal que

$$\left|\frac{G(s) - G(0)}{s - 0}\right| = |G'(t)| \leq C,$$

para alguna constante C. Además, existe K tal que

$$|G'(x)| \leq K \quad \text{para} \;\; x \in [-M, M].$$

Probemos que $G \circ u, (G' \circ u)\,u' \in L^p(I)$.

$$\int_I |(G \circ u)(x)|^p\,dx \;\; \leq \;\; C \int_I |u(x)|^p\,dx,$$

y

$$\int_I |(G' \circ u)(x)u'(x)|^p\,dx \;\; \leq \;\; K \int_I |u'(x)|^p\,dx.$$

Falta comprobar que

$$\int_I (\,G \circ u)\,\varphi' = -\int_I (G' \circ u)\,u'\varphi \quad\;\; \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Supongamos primero que $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{u_n\}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$u_n\big|_I \longrightarrow u \;\; \text{en} \;\; W^{1,p}(I),$$

entonces por el teorema 3.7 se tiene

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \leq C\,\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \longrightarrow 0. \tag{3.6}$$

Como G es continua se tiene que

$$|(G \circ u_n)(x) - (G \circ u)(x)| \;=\; |G(u_n(x)) - G(u(x))| \longrightarrow 0,$$

luego

$$\left[\int_I |(G \circ u_n)(x) - (G \circ u)(x)|^p\, dx\right]^{1/p} \longrightarrow 0,$$

y por lo tanto

$$G \circ u_n \longrightarrow G \circ u \quad \text{en} \quad L^p(I).$$

Por el mismo razonamiento anterior se tiene que

$$(G' \circ u_n)\, u_n' \longrightarrow (G' \circ u)\, u' \quad \text{en} \quad L^p(I).$$

Luego por observación 3.3 tenemos $G \circ u_n \in W^{1,p}(I)$. De donde

$$\int_I (G \circ u_n)\, \varphi' = -\int_I (G' \circ u_n)\, u_n' \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Sea $\varphi \in C_0^\infty(I)$ mostremos que

i) $\int_I (G \circ u_n)\varphi' \longrightarrow \int_I (G \circ u)\varphi'$.

ii) $\int_I [(G' \circ u_n)u_n']\, \varphi \longrightarrow \int_I [(G' \circ u)\, u]\, \varphi$.

En efecto

$$\left|\int_I (G \circ u_n)\varphi' - \int_I (G \circ u)\varphi'\right| = \left|\int_I (G \circ u_n - G \circ u)\varphi'\right|,$$

luego por desigualdad de Hölder (1.4) se tiene

$$\left|\int_I (G \circ u_n - G \circ u)\varphi'\right| \leq \|G \circ u_n - G \circ u\|_{L^p(I)}\, \|\varphi'\|_{L^q(I)},$$

por tanto

$$\left|\int_I (G \circ u_n - G \circ u)\varphi'\right| \longrightarrow 0,$$

es decir,

$$\int_I (G \circ u_n)\varphi' \longrightarrow \int_I (G \circ u)\varphi'.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\int_I \left[(G' \circ u_n)u_n'\right] \varphi \longrightarrow \int_I \left[(G' \circ u)u'\right] \varphi.$$

Así se tiene

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = -\int_I \left[(G' \circ u)u'\right] \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),$$

por lo tanato $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ con $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.

Para el caso $p = \infty$ se procede como en el teorema 3.8. □

Definición 3.2. *Dado $1 \leq p < \infty$, se designa por $W_0^{1,p}(I)$ a la adherencia de $C_0^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$. Denotamos $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

El espacio $W_0^{1,p}$ está dotado de la norma inducida por $W^{1,p}$; además H_0^1 está dotado del producto interno inducido por H^1.

Observación 3.7. *Cuando $I = \mathbb{R}$, por teorema 3.6 se tiene que $C_0^1(\mathbb{R})$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R})$ y por tanto $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(I)$.*

Observación 3.8. *Utilizando una sucesión regularizante $\{\rho_n\}$ se comprueba*

(i) $C_0^\infty(I)$ es denso en $W_0^{1,p}(I)$.

(ii) Si $u \in W^{1,p}(I) \bigcap C_0(I)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Teorema 3.10. *Sea $u \in W^{1,p}(I)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$ si y sólo si $u = 0$ sobre ∂I.*

Demostración. Si $u \in W_0^{1,p}(I)$, existe una sucesión $\{u_n\}$ de $C_0^1(I)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } W^{1,p}(I).$$

Entonces, para todo $x \in I$ se tiene

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \| u_n - u \|_{L^\infty(I)} \leq \| u_n - u \|_{W^{1,p}(I)} \longrightarrow 0,$$

por consiguiente $u_n \longrightarrow u$ uniformemente sobre $\overline{I}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n(a) = u_n(b) = 0$ entonces $u = 0$ sobre ∂I.

Sea $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u = 0$ sobre ∂I. Se fija una función $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| \leq 1 \\ t & \text{si} \quad |t| \geq 2 \end{cases}$$

y

$$|G(t)| \leq |t| \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definimos $u_n = \frac{1}{n} G(nu)$ de tal manera que $u_n \in W^{1,p}(I)$.

Por otra parte

$$Supp\ u_n \subset \left\{ x \in I : \ |u(x)| \geq \tfrac{1}{n} \right\}.$$

Si I es acotado entonces $Supp\ u_n$ es acotado y por lo tanto $Supp\ u_n$ es un compacto incluido en I.

Si I no es acotado. Sin perdida de generalidad supongamos que $I = (a, \infty)$, entonces

$$u(a) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} u(x) = 0,$$

por lo tanto para n fijo, existe $x_0 \in I$ tal que

$$|u(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{siempre que} \quad x \geq x_0,$$

luego

$$Supp\ u_n \subset \left\{ x \in I : |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \subset (a, x_0)$$

así $Supp\ u_n$ es acotado, por lo tanto $Supp\ u_n$ es un compacto incluido en I, por consiguiente $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ (ver observacón 3.8). Luego usando el teorema de la convergencia dominada (teorema 1.5) se comprueba que $u_n \longrightarrow u$ en $W^{1,p}$. En efecto, dado $x \in I$ se puede encontrar un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|nu(x)| \geq 2 \quad \text{siempre que} \quad n \geq N_0,$$

entonces

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u(x)| &= \left|\frac{1}{n}G(nu(x)) - u(x)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{n}nu(x) - u(x)\right| = 0, \quad \text{para } n \geq N_0. \end{aligned}$$

Por otra parte para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |u_n - u|^p &= \left|\frac{1}{n}G(nu) - u\right|^p \\ &\leq \left[\frac{1}{n}|G(nu)| + |u|\right]^p \\ &\leq |u|^p + |u|^p, \end{aligned}$$

luego

$$\textstyle\int_I |u_n - u|^p \longrightarrow 0,$$

es decir,

$$\|u_n - u\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

Ahora veamos que $\|u_n' - u'\|_{L^p} \longrightarrow 0$.

Dado $x \in I$, existe $\eta \in \mathbb{N}$ tal que $|\eta u(x)| \geq 2$, luego para $n \geq \eta$

$$\begin{aligned} |u_n'(x) - u'(x)| &= |G'(nu(x))u'(x) - u'(x)| \\ &= |u'(x)[G'(nu(x)) - 1]| = 0 \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
|u_n' - u'|^p &= |G'(nu)u' - u'|^p \\
&= |[G'(nu) - 1]u'|^p \\
&= |G'(nu) - 1|^p |u'|^p \\
&\leq K|u'|^p,
\end{aligned}$$

entonces $u_n' \longrightarrow u'$ en L^p.

Por lo tanto

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en} \quad W^{1,p}(I).$$

Ahora, para n fijo existe $v_{n_k} \in C_0^1(I)$ tal que

$$v_{n_k} \longrightarrow u_n \quad \text{en} \quad W^{1,p}(I)$$

tomemos un n tal que

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si} \quad k \geq k_0 \quad \text{entonces} \quad \|v_{n_k} - u_n\|_{W^{1,p}(I)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces para $k \geq k_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|v_{n_k} - u\|_{W^{1,p}} &= \|v_{n_k} - u_n + u_n - u\|_{W^{1,p}} \\
&\leq \|v_{n_k} - u_n\|_{W^{1,p}} + \|u_n - u\|_{W^{1,p}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

por lo tanto $u \in W_0^{1,p}(I)$. $\square$

Capítulo 4

Aplicación del método variacional al problema de Dirichlet

En este capítulo aplicaremos el método variacional de la teoría de Ecuaciones Diferenciales al problema de Dirichlet homogéneo y no homogéneo.

Las etapas del método variacional son las siguientes:

ETAPA A. Solución débil. En esta etapa se precisa la noción de solución débil, para esto se utiliza los espacios de Sobolev.

ETAPA B. Existencia y unicidad de una solución débil. Se establece la existencia y unicidad de una solución débil, en este caso, via el teorema de representación de Riesz.

ETAPA C. Regularidad. Se demuestra, bajo ciertas condiciones que la solución débil es de clase C^2.

ETAPA D. Recuperación de la solución clásica. Se demuestra que toda solución débil de clase C^2 es solución clásica.

4.1. Problema de Dirichlet homogéneo

Consideremos el problema de hallar una función u que verifique

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en} \quad I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

con $f \in C\left(\overline{I}\right)$.

Etapa A. Una solución clásica de 4.1 es una función $u \in C^2(\overline{I})$ que verifica 4.1 en el sentido usual.

Definición 4.1. *Una solución débil de 4.1 es una función $u \in H_0^1(I)$ que verifica*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Toda solución clásica es solución débil. En efecto sea u una solución clásica, es decir $u \in C^2(\overline{I}) \subset W^{1,2}(I) \subset L^2$ tal que

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en} \quad I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

entonces $u \in W^{1,2}(I)$ y $u = 0$ en ∂I luego por teorema 3.10 se tiene que $u \in H_0^1(I)$. Sea $v \in H_0^1(I)$ y tenemos que u verifica

$$-u'' + u \;=\; f,$$

de donde

$$-\int_I u''v + \int_I uv = \int_I fv.$$

Luego por corolario 3.9 se tiene

$$-\left[u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_I u'v'\right] + \int_I uv \;=\; \int_I fv$$

por lo tanto

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Etapa B. Existencia y unicidad de una solución débil.

Teorema 4.1. *Para toda $f \in L^2(I)$ existe una única $u \in H_0^1(I)$ tal que*

$$\int_I u'v' + \int_I uv \;=\; \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Demostración. Sea $\varphi : H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional definido por

$$\varphi(v) = \int_I fv$$

Claramente φ es lineal, veamos que es acotado.

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &= |\textstyle\int_I fv| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} (\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2}) \\ &\leq K \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Recordemos que en $H_0^1(I)$ se define el producto interno

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_I g_1 g_2 + \int_I g_1' g_2'.$$

Luego por teorema de representación de Riesz (teorema 2.5), existe una única $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\varphi(v) = \langle u, v \rangle_{H_0^1(I)}$$

o sea que

$$\int_I fv = \int_I uv + \int_I u'v'.$$

$\square$

Etapa C. Regularidad. Sea $u \in H_0^1(I)$ una solución débil de 4.1 entonces,

$$\int_I u'v' + \int_I uv \;=\; \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I)\ ,$$

o sea que,

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in C_0^1(I),$$

de donde

$$\int_I u'v' = -\int_I (u-f)v \quad \forall v \in C_0^1(I),$$

por lo tanto $u' \in H^1$ ya que $(u-f) \in L^2$ y

$$(u')' = u - f.$$

Además como $f \in C(\overline{I})$, $(u')' \in C(\overline{I})$ y entonces $u' \in C^1(\overline{I})$ por observación 3.5, por tanto $u \in C^2(\overline{I})$.

Etapa D. Recuperación de la solución clásica. Supongamos que $u \in C^2(\overline{I})$ y que cumple

$$\int_I u'v' + \int_I uv \;=\; \int_I fv \;\; \forall v \in H_0^1(I),$$

o sea que

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_I u''v + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

es decir

$$-\int_I u''v + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

de donde

$$\int_I (-u'' + u - f)v = 0 \quad \forall v \in C_0^1(I),$$

entonces

$$-u'' + u = f \;\; \text{para casi todo punto en } I.$$

Pero como $u \in C^2(\overline{I})$ entonces

$$-u'' + u = f \qquad \text{en todo punto de } I.$$

4.2. Problema de Dirichlet no homogéneo

Consideremos el problema de hallar una función u que verifique

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{en} \quad I = (0,1) \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases} \tag{4.2}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f \in C\left(\overline{I}\right)$.

Sea $u_0 \in C^2(\overline{I})$ tal que $u_0(0) = \alpha$ y $u_0(1) = \beta$. Y sea $\overline{u}$ la solución del problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f + u_0'' - u_0 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Entonces $u = \overline{u} + u_0$ es la solución de 4.2, en efecto

$$-u'' + u \;=\; -\overline{u}'' + \overline{u} - u_0'' + u_0,$$

de donde

$$-u'' + u \;=\; f + u_0'' - u_0 - u_0'' + u_0,$$

por tanto

$$-u'' + u \;=\; f.$$

Además

$$u(0) \;=\; \overline{u}(0) + u_0(0) = 0 + \alpha = \alpha$$

y

$$u(1) \;=\; \overline{u}(1) + u_0(1) = 0 + \beta = \beta.$$

Bibliografía

[1] APOSTOL, Tom. Análisis Matemático. Editorial Reverté, S.A. Barcelona. 1988

[2] BURENKOV, V.I. Sobolev Spaces on Domains. Disponible en Internet. http://www.cardif.ac.uk/maths/people/sobol.pdf.

[3] BRÉZIS, Haim. Análisis Funcional. Alianza Editorial. París. 1983

[4] CHEN, W.L. Linear Functional Analysis. Disponible en interenet. http://www.maths.mq.edu.au/wchen/lnlfafolder/lfa01-ims.pdf.

[5] G. KREYSZIG, Erwin. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley Sons. New York. 1978.

[6] REDDY, J.N, RASMUSSEN, M.L. Análisis Matemático Avanzado con Aplicaciones a Ingeniera y Ciencias. Editorial Limusa. México.1992.

[7] RUDIN, Walter. Principles of Mathematical Analysis. Editorial Mc Graw Hill. Auckland. 1976.