FÓRMULA LOCAL DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE LA CLASE $AC([a,b])$, USANDO DERIVADAS FRACCIONARIAS DE RIEMANN-LIOUVILLE

ADRIANA ISABEL BAUTISTA SARRIA
LEDY YOLIMA PALECHOR QUITIAQUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES,
EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2008

FÓRMULA LOCAL DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE LA CLASE $AC([a,b])$, USANDO DERIVADAS FRACCIONARIAS DE RIEMANN-LIOUVILLE

ADRIANA ISABEL BAUTISTA SARRIA
LEDY YOLIMA PALECHOR QUITIAQUEZ

TRABAJO DE GRADO

En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director

Mg. JHON JAIRO PÉREZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES,
EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA

2008

Nota de aceptación

Director

Mg Jhon Jairo Pérez

Comité evaluador

Ph.D Francisco Enríquez

Esp. Alex Montes

Fecha de sustentación: Popayán,21 noviembre de 2008

Este trabajo se hizo posible gracias a Dios y todas aquellas personas que nos brindaron su apoyo y paciencia durante el proceso. También agradecemos de todo corazón a nuestros familiares y amigos por haber confiado siempre en nosotras

Índice general

INTRODUCCIÓN

Son bien conocidas las numerosas aplicaciones que posee el concepto de derivada, no solamente dentro de distintas disciplinas matemáticas, sino también en las ciencias naturales y la tecnología. Por ejemplo, es sabido que ciertos problemas de la mecánica clásica pueden resolverse de manera sencilla mediante el uso de determinados "agregados" integrales, conocidos como operadores de derivación e integración fraccionaria según Riemann-Liouville. Tal es el caso del problema de la braquistocrona[1].

No obstante, para el análisis moderno la definición clásica de derivada resulta insuficiente. De esta manera, la necesidad de determinadas ramas de las matemáticas, tales como el cálculo variacional, las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones integrales conllevan a la introducción de ciertas "generalizaciones" del concepto habitual de diferenciación. Entre estas últimas, se destacan por su simplicidad y similitud con las derivadas de orden entero, las llamadas derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.

Por otro lado, desde el punto de vista práctico, es claro que la fórmula local de Taylor juega un papel importante en la aproximación de funciones suaves. Más aún, existen resultados clásicos que proveen estimaciones adecuadas para el error de aproximación en dependencia de la suavidad de la función que se pretende aproximar mediante el polinomio de Taylor. A dicho término residual se le puede dar distintas formas y según el problema tratado

[1]Braqistocrona (del griego brachistos, "el mas breve" y cronos, "tiempo"); problema formulado por Johann Bernoulli en 1696, el cual consiste en encontrar la trayectoria que debe describir un cuerpo para pasar de un punto dado hacia otro en el tiempo mas corto.

unas resultan ser más convenientes que otras.
En el presente trabajo se estudia una variante de la fórmula de Taylor que utiliza como aparato teórico principal la diferenciación fraccionaria. Esto ilustra en particular, una aplicación elemental de dicha teoría y por otra parte muestra la correlación entre el "calculo fraccionario" y el respectivo resultado clásico.

Cabe señalar que la "escritura" de dicha fórmula de Taylor es la variante no entera de la fórmula clásica: este resultado es consecuencia del hecho de que las operaciones de diferenciación e integración fraccionarias son inversas sólo en cierto sentido: la fórmula de inversión de tales operadores integrales es aún mas compleja y se describe de manera satisfactoria en términos de los espacios de Lebesgue Lp.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos y se incluye una breve reseña histórica sobre el surgimiento y evolución de la idea de integrodiferenciación no entera y la fórmula de Taylor. En el primer capítulo se presentan algunas herramientas previas para el desarrollo del trabajo. El segundo está dedicado al estudio de las derivadas fraccionarias de Riemman-Louville y algunas propiedades. Finalmente en el tercero se estudia la caracterizción de la clase de funciones $AC^n([a,b])$ y su relación con la fórmula de Taylor expresada a través de derivadas fraccionarias. Es en este capítulo donde se alcanza el objetivo fundamental del trabajo.

Notaciones

$\mathbb{R}$	campo de los números reales
$\mathbb{R}^n$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{N}_0$	conjunto de enteros no negativos
p.c.t.	para casi todo
$C'(A)$	espacio de funciones continuamente diferenciables en $A \subset \mathbb{R}$
$AC([a, b])$	espacio de funciones absolutamente continuas en el segmento [a,b]
$AC^n([a, b])$	generalización del espacio $AC([a, b])$
$Lip([a, b])$	espacio de funciones Lipschitz en el segmento [a,b]
$BV([a, b])$	espacio de funciones de variación acotada en el segmento [a,b]
$\mathcal{R}([a, b])$	espacio de funciones Riemann integrables en [a,b]
$\int$	integral de Lebesgue
$I^\alpha\varphi$	integral de orden α según Louville de la función φ
$D^\alpha\varphi$	derivada de orden α según Louville de la función φ
$[\cdot]$	parte entera
$\{\cdot\}$	parte fraccionaria
$\square$	culminación de una demostración

RESEÑA HISTÓRICA

Se podría decir que la historia de la fórmula de Taylor,inicia con el filósofo pitagórico Zenón de Elea, quién consideró el problema de sumar una serie infinita de términos para lograr un resultado finito, pero lo descartó por considerarlo imposible; como resultado surgieron las paradojas de Zenon. Posteriormente Aristóteles propuso una resolución filosófica de las paradojas pero el contenido matemático de ésta no quedó resuelto hasta que lo retomaron Demócrito y más adelante Arquímedes.

En el siglo XIV los primeros ejemplos y usos de la serie de Taylor y métodos similares fueron dados por Madhava Sangamagrama. A pesar de que hoy en día ningún registro de su trabajo ha sobrevivido a los años, escritos posteriores de matemáticos hindúes sugieren que él encontró un número de casos especiales de la serie de Taylor, incluidos aquellos para las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, arcotangente.

Más adelante en el siglo XVII James Gregory publicó varias series de Maclaurin y en 1715 en el libro "Methodus Incrementorum" publicado por Brook Taylor, se presentó la fórmula que lleva su nombre. Las series de Maclaurin fueron nombradas así por Colin Maclaurin un profesor de Edimburgo quién dio a conocer el caso especial de las series de Taylor en el siglo XVIII.

La fórmula de Taylor que abre el camino para la mayoría de los cálculos en el análisis aplicado, es muy importante desde el punto de vista práctico. La idea de aproximar una función mediante polinomios o representarla como una suma de un número finito de funciones más sencillas alcanzó un gran desarrollo en el análisis, donde constituye ahora parte de una rama independiente: la teoría de aproximación de funciones.

De otra parte la idea de generalizar la noción de diferenciación $\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}$ a valores no enteros de α se remonta a la época del surgimiento del cálculo. El primer intento de tal discusión fue encontrado en la correspondencia de Leibniz, donde se observó que en una de sus cartas (relacionada con el teorema sobre la diferenciación de producto de funciones) J. Bernoulli preguntó sobre el significado de este teorema en el caso de diferenciación de orden no entero. En 1695 Leibniz escribe a G. L'Hôpital y a Wallis (1697) haciendo observaciones sobre la posibilidad de considerar diferenciales y derivadas de orden $\frac{1}{2}$.

Leonard Euler en 1738 observó que al cálculo de $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ se le podría dar sentido para p no entero. Años después, en el tratado de S.F Lacroix (1820) se retoma la idea de Euler y se cita la fórmula explícita para el cálculo de $\frac{d^{1/2}x^\alpha}{dx^{1/2}}$.
El siguiente paso fue dado por Jean Baptiste Joseph Fourier (1822) quien sugirió la idea de usar la igualdad:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(tx - t\lambda + \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

para definir las derivadas de orden no entero.
Estos episodios se pueden considerar parte de la prehistoria de la integrodiferenciación fraccionaria. La historia propiamente dicha se debería considerar a partir de los trabajos de Niels Henrik Abel (1823-1826) y J. Louville relacionados con el problema de la tautocrona, la cual se describe mediante la ecuación integral:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\mu} dt = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \mu < 1.$$

Poco tiempo después (1832-1837) aparece una serie de documentos de Liouville que hicieron de él el fundador de la teoría de la integro-diferenciación fraccionaria. La definición inicial sugerida por Liouville (1832) se basa en la fórmula de diferenciación de la función exponencial y es aplicable para funciones $f(x)$ que tienen expansión mediante la serie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{a_k x}.$$

Para tales funciones la definición de Liouville es:

$$D^{\alpha}f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_k^{\alpha} e^{a_k x}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

En este mismo trabajo Louville deduce no muy rigurosamente la fórmula:

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{(-1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \varphi(x+t)t^{\alpha-1}dt; \qquad -\infty < x < +\infty, \quad Re\alpha > 0,$$

llamada actualmente (sin el factor $(-1)^{\alpha}$) derivada fraccionaria según Riemann-Louville. Junto a los trabajos de Louville están los de Riemann realizados en 1847 y que conllevan a la siguiente construcción de integral fraccionaria:

$$I^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > 0,$$

que se convirtió desde entonces en la principal fórmula de integración fraccionaria junto con la construcción de Liouville.

En 1867 A. K. Grünwald y en 1868 A. V. Létnikov desarrollan un método de integrodiferenciación basado en la generalización de la fórmula de Riemann

$$f^{n}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n},$$

donde $(\Delta_h^1 f)(x) = f(x) - f(x-h)$, al caso de α no entero:

$$D^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}}.$$

A comienzos del siglo XX aparece un trabajo importante de J. Hadamard (1892) quién usa la idea de diferenciar término a término la serie de Taylor de una función analítica f:

$$(D^{\alpha}f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-a)} C_k (z-z_k)^{k-\alpha}, \qquad C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Se debe comentar el trabajo de A. Marshaud (1927) en el que se introduce una nueva forma de derivación fraccionaria:

$$(D^{\alpha}f)(x) = c\int_0^{\infty} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt, \qquad \alpha > 0;$$

donde $(\Delta_t^l f)(x)$ es la diferencia finita de orden $l > \alpha$; $\quad l = 1, 2, 3, \ldots$, $\quad c$ es constante.
Esta forma coincide con la definición de Louville

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n-1}}, \qquad n = [\alpha] + 1,$$

para funciones "suficientemente buenas".

A partir de 1941 hasta la fecha, las contribuciones científicas referentes al desarrollo del cálculo fraccional se propagan hasta el punto que en 1974 (New Haven) se realiza el primer congreso internacional de este tema. En los años de 1984 (Glasgow, Gran Bretaña) y 1989 se realizan el segundo y tercer congreso internacional de cálculo fraccional.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En esta sección presentamos funciones de valor y variable real, algunas definiciones y teoremas fundamentales, en los cuales se basan los resultados expuestos en los siguientes capítulos.

1.1. Fórmula local de Taylor para funciones de variable real

A continuación mostraremos que en un entorno del punto $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ cualquier función real que satisfaga ciertas condiciones, puede representarse por un polinomio salvo infinitésimos[1] de orden mas alto que los términos del polinomio.

Teorema 1. *Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Si f es continuamente diferenciable hasta el orden n en cierto intervalo que contiene al punto x_0, entonces:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big). \tag{1.1}$$

Esta fórmula se llama *fórmula local de Taylor* de n-ésimo orden de la función f en el punto $x = x_0$, con término residual $o((x-x_0)^n)$ en la forma de *Peano.*[2]
El polinomio $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$ se llama polinomio de Taylor de grado n y $r_n := f - P_n$ se conoce como el término residual de orden n de la fórmula de Taylor.
En el caso $x_0 = 0$ esta fórmula se denomina *fórmula de Maclaurin.*

[1] Ver Kudriávtsev [8], tomo I, numeral 5.11

[2] La teoría de o-minúscula y O-mayúscula se puede encontrar en Kudriávtsev [8], tomo I, numeral 8.2

Demostración. Veamos si existe un polinomio P_n de grado no mayor que n, tal que:

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{y} \tag{1.2}$$

$$f(x_0) = P_n(x_0),\ f'(x_0) = P_n'(x_0),\ \dots\ , f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{1.3}$$

Busquemos este polinomio en forma de potencias de $(x - x_0)$ con coeficientes indeterminados:

$$P_n(x) = C_o + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + ... + C_n(x - x_0)^n. \tag{1.4}$$

Calculemos los coeficientes $C_0, C_1, \dots, C_n$ de modo que se cumplan las condiciones (1.2) y (1.3). Como las derivadas de P_n tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} P'(x) &= C_1 + 2C_2(x - x_0) + 3C_3(x - x_0)^2 + ... + nC_n(x - x_0)^{(n-1)}, \\ P''(x) &= 2C_2 + 2 \cdot 3C_3(x - x_0) + ... + n(n-1)C_n(x - x_0)^{(n-2)}, \\ \vdots & \\ P^{(n)}(x) &= n(n-1) \cdots 2 \cdot 1\, C_n = n!C_n, \end{cases} \tag{1.5}$$

entonces sustituyendo x por x_0 en (1.4) y (1.5), y considerando (1.3) tenemos:

$$f(x_0) = C_0 \quad \Rightarrow C_0 = f(x_0),$$

$$f'(x_0) = C_1 \quad \Rightarrow C_1 = f'(x_0),$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot 1C_2 \ \Rightarrow C_2 = \frac{f(x_0)}{2 \cdot 1},$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1C_n \Rightarrow C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Ahora reemplazamos en la fórmula (1.4) los valores hallados $C_0, C_1, ..., C_n$ y obtenemos el polinomio buscado:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

De esta forma se cumplen todas las relaciones de (1.3). Falta entonces probar que se satisface (1.2). Sea $r_n := f - P_n$, $n \in \mathbb{N}$. De la condición (1.3) se deduce que:

$$r_n^{(k)}(x_0) = 0, \qquad k = 0, ..., n.$$

Veamos que $r_n(x_0) = o((x-x_0)^n)$ en un entorno de x_0, es decir que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x_0)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

En efecto, aplicando n-veces la regla del L'Hospital se obtiene:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n'(x_0)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

□

Consecuencia 1. *Si f es continuamente diferenciable hasta el orden $n+1$ en un intervalo del punto x_0, entonces:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O((x-x_0)^{n+1}). \tag{1.6}$$

Demostración. Del teorema 1 se tiene que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1}), \qquad x\to x_0;$$

y por las propiedades de o-minúscula y O-mayúscula[3]

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}O((x-x_0)^{n+1}) + o((x-x_0)^{n+1}) = O(x-x_0)^{n+1}.$$

De donde se deduce (1.6).

□

Observación 1. *Bajo las hipótesis de la consecuencia anterior, el residuo de la fórmula de Taylor se puede representar como:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \tag{1.7}$$

Consecuencia 2. *Si f es continuamente diferenciable hasta el orden n en un entorno de x_0, entonces para todo x de este entorno y toda función ψ continua en $[x_0, x]$, con $\psi'(t) \neq 0$ sobre (x_0, x); existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que:*

$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)}\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

[3] $f(x) = O(f(x))$ y $cO(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$, donde c es constante

Demostración. Sea ψ continua en $[x_0, x]$, con $\psi'(t) \neq 0$ sobre (x_0, x) y consideremos la función continua φ en $[x_0, x]$ definida como:

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Además φ es diferenciable en $[x_0, x]$, así:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right), \\
&= f'(t) - f'(t) + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \\
&= \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Por lo cual se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy (ver Kudriávtsev [8], tomo I, página 220) para las funciones ψ y φ; entonces existe $\xi \in (x_0, x)$, tal que:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \tag{1.9}$$

Pero $\varphi(x) = f(x)$, $\varphi(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ y $\varphi'(\xi) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}$. Reemplazando en (1.9) tenemos:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

Recordemos que $f - P_{n-1} = r_{n-1}$; de este modo tenemos que:

$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

□

A continuación presentamos algunas formas básicas del residuo en la fórmula de Taylor las cuales se escogen según el problema tratado.

Para $\psi(t) = (x-t)^n$ en la ecuación (1.8) tenemos:

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

que es conocido como residuo en forma de *Lagrange*.

En particular para $\xi \in (x_0, x)$, es decir $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ con $\theta \in (0,1)$, tenemos el residuo en la forma de *Cauchy*:

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n.$$

Ejemplos. Calculemos la fórmula de Maclaurin en el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0$ para algunas funciones elementales.

1. $f(x) = \sin x$ tiene derivadas de todos los órdenes. Sabemos que para $k \in \mathbb{N}_0$

   $$f^{(m)}(0) = \sin(m\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m = 2k \\ (-1)^k & \text{si} \quad m = 2k+1. \end{cases}$$

   Según el teorema 1.1,

   $$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

   Aquí, el término residual no está en la forma $o(x^{2n+1})$ ya que el término del polinomio, siguiente al último sumando, es igual a cero. De forma análoga obtenemos:

   $$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

2. Para la función $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Luego:

   $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

   Sustituyendo x por $-x$ obtenemos:

   $$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n).$$

   Además como

   $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

   tenemos:

   $$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{y} \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

3. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|x| < \varepsilon < 1$. Como
   $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, entonces:
   $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$ y por tanto:

   $$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

En particular para $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Si $\alpha = -1/2$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2!2^2}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!2^3}x^3 + ... + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!2^n}x^n + o(x^n)$$

4. Para $|x| < \varepsilon < 1$, $f(x) = \ln(1+x)$, tenemos:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Observación 2. *Por la consecuencia 1, las fórmulas obtenidas anteriormente, se pueden escribir utilizando el símbolo O (O-mayúscula) de la forma siguiente:*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}).$$

1.2. Funciones absolutamente continuas

En esta sección presentamos la clase de funciones absolutamente continuas en el segmento $[a, b]$ y algunas de sus propiedades más importantes. El conocimiento de dichas funciones reviste especial importancia, ya que nos será de gran utilidad en resultados que expondremos en los capítulos posteriores.

Definición 1. *La función f es absolutamente continua en $[a,b]$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (a_1, b_1),...,(a_n, b_n); $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ se verifica:*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \;\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n}[f(b_k) - f(a_k)]\right| < \epsilon.$$

Denotaremos al espacio lineal de funciones absolutamente continuas como $AC([a,b])$.

Observación 3. *Toda función absolutamente continua en $[a,b]$ es de variación acotada en dicho segmento (se demostrará mas adelante).*

Observación 4. *El sentido de la definición 1 no cambia si:*

1. *En lugar de la condición $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}[f(b_k) - f(a_k)]\right| < \epsilon$, se pide la condición más fuerte:*

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

2. *La condición sobre el sistema de intervalos se extiende a una cantidad numerable de ellos.*

Observación 5. *Toda función $f \in AC([a,b])$ es uniformemente continua en $[a,b]$. El recíproco es falso.*

Demostración. Sean $x, y \in [a,b]$, $x < y$. Como $f \in AC([a,b])$, entonces:
$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, (a,b) \subset [a,b]$:

$$b - a < \delta \Rightarrow |f(b) - f(a)| < \epsilon \tag{1.10}$$

Pero $y - x \leq b - a < \delta$, así por (1.10) tenemos $|f(y) - f(x)| < \epsilon$.

□

Veamos mediante el siguiente ejemplo que en verdad si una función es uniformemente continua en $[a,b]$, no necesariamente es $AC([a,b])$.

Ejemplo. La función

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

es uniformemente continua en $[0,1]$, pero f no es absolutamente continua en dicho segmento ya que no es de variación acotada.

Una manera de describir las funciones absolutamente continuas es a través de la clase de funciones Lipschitz, es por eso que presentamos la siguiente:

Definición 2. *Una función f verifica la condición de Lipschitz en $[a,b]$, si existe una constante $L>0$ tal que*

$$\forall x,y\in[a,b],\qquad |f(x)-f(y)|\leq L|x-y|.$$

Al espacio lineal de funciones Lipschitz en $[a,b]$ lo notaremos $Lip([a,b])$.

Es claro que $f\in AC([a,b])$ satisface la condición de Lipschitz. Es decir, si $f\in Lip([a,b])$, entonces $f\in AC([a,b])$. En efecto, puesto que para cualquier sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (a_1,b_1),...,(a_n,b_n); $(a_k,b_k)\subset[a,b]$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\leq\sum_{k=1}^{n}L|b_k-a_k|=L\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<L\delta=\epsilon.$$

Entonces $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{\epsilon}{L}>0$:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon.$$

Es decir $f\in AC([a,b])$.

Teorema 2. *Si $f,g\in AC([a,b])$, entonces $f+g\in AC([a,b])$, $f-g\in AC([a,b])$ y $f\cdot g\in AC([a,b])$. Además si $\forall x\in[a,b]$, $g(x)\neq 0$, entonces $f/g\in AC([a,b])$.*

Demostración. Similares a los respectivos casos de funciones continuas. □

A diferencia de las funciones continuas, la composición de funciones absolutamente continuas, no necesariamente lo es. Los siguientes teoremas nos muestran condiciones adicionales para que la composición de funciones $AC([a,b])$ sea absolutamente continua.

Teorema 3. *Sea $g\in AC([a,b])$ cuyos valores se encuentran en el segmento $[A,B]$. Si la función f definida sobre $[A,B]$ satisface la condición de Lipschitz, entonces $f\circ g\in AC([a,b])$.*

Demostración. Como $f \in Lip([A,B])$, $\exists L > 0, \forall x, y \in [A,B]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Tomemos cualquier $\epsilon > 0$. Entonces, para $\epsilon/L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (a_1, b_1),...,(a_n, b_n) : $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ se verifica que:

$$\sum_{k=1}^{n} |f[g(b_k)] - f[g(a_k)]| \leq L \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon.$$

Así para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (a_1, b_1),...,(a_n, b_n) : $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f[g(b_k)] - f[g(a_k)]| < \epsilon.$$

Por lo tanto $f \circ g \in AC([a,b])$.

□

Teorema 4. *Sea $g \in AC([a,b])$ estrictamente creciente. Si $f \in AC([g(a), g(b)])$, entonces $f \circ g \in AC([a,b])$.*

Demostración. Sea $g \in AC([a,b])$. Luego para todo $\epsilon' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (a_1, b_1),...,(a_n, b_n); $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \epsilon'.$$

Además $f \in AC([g(a), g(b)])$ es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta^* > 0$ tal que para todo sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (A_1, B_1),...,(A_m, B_m); $(A_k, B_k) \subset [g(a), g(b)]$ tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{m}(B_k - A_k) < \delta^* \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} |f(B_k) - f(A_k)| < \epsilon. \tag{1.11}$$

Los intervalos $(g(a_k), g(b_k))$ son disjuntos dos a dos por ser g continua y estrictamente creciente. De este modo si en calidad de ϵ' consideramos δ^* en (1.11), entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |f[g(b_k)] - f[g(a_k)]| < \epsilon.$$

Por lo tanto para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (a_1, b_1),...,(a_n, b_n); $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f[g(b_k)] - f[g(a_k)]| < \epsilon.$$

Con lo cual el teorema queda demostrado. $\square$

1.2.1. Propiedades diferenciales de las funciones AC

El hecho de que una función $f \in AC([a, b])$ significa que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de tal forma que dicha función en un segmento de longitud menor que δ varía en un valor que no excede ϵ. A continuación introducimos un concepto que nos ayuda a determinar si la variación de f en $[a, b]$ es finita, además mostraremos como se relaciona este concepto con el de continuidad absoluta.

Definición 3. *La función f es de variación acotada en $[a, b]$, si para toda partición $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ del segmento $[a, b]$,*

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty.$$

Al espacio lineal de funciones de variación acotada en $[a, b]$ lo denotaremos por $BV([a, b])$.

Como ejemplo de esta clase de funciones se encuentran aquellas monótonas en un segmento.

Teorema 5. *Toda función absolutamente continua en $[a, b]$ es de variación acotada en dicho segmento.*

Demostración. Como $f \in AC([a, b])$, para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que para todo sistema finito de intervalos disjuntos dos a dos (a_1, b_1),...,(a_n, b_n) : $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < 1. \tag{1.12}$$

Sea $b - a > \delta > 0$, entonces $b - a > \frac{\delta}{2}$; por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\frac{\delta}{2} \geq b - a$. Consideremos la partición:

$$P = \left\{x_0 = a, x_1 = a + \frac{\delta}{2}, \cdot\cdot\cdot, x_{N-1} = a + (N-1)\frac{\delta}{2}, x_N = b\right\}.$$

Donde $|x_j - x_{j-1}| = |a + j\frac{\delta}{2} - (a + (j-1)\frac{\delta}{2})| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Por (1.12),

$$|f(x_j) - f(x_{j-1})| < 1.$$

Luego para cualquier partición del segmento $[x_{j-1}, x_j]$, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j - x_{j-1}| < N\delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \sum_{j=1}^{N} 1 = N.$$

Así

$$\bigvee_{x_{j-1}}^{x_j}(f) \leq 1 \Rightarrow \bigvee_{a}^{b}(f) \leq N,$$

donde $\bigvee_{a}^{b}(f) := \sup\limits_{p \in P([a,b])} \sum\limits_{p} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$ es la variación total de f en el segmento $[a, b]$. El teorema queda demostrado.

□

Ejemplo. Consideremos nuevamente la función

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} xcos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Esta función no es de variación acotada. Efectivamente, tomando la partición:

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

tenemos:

$$\sum_{k=1}^{2n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

esta suma no es acotada para todo n, ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Por lo tanto la función no es absolutamente continua en $[0, 1]$.

Consecuencia 3. *Si $f \in AC([a, b])$, entonces p.c.t $x \in [a, b]$, ésta función tiene derivada finita la cual es Lebesgue integrable.*

Demostración. Como $f \in AC([a, b])$ entonces por el teorema anterior f es de variación acotada y si $f \in BV([a, b])$, entonces p.c.t $x \in [a, b]$ existe y es finita la derivada, la cual es Lebesgue integrable.

□

En adelante, los términos "medida", "medible", etc se referirán a la teoría de la medida según Lebesgue. En particular, si cierta propiedad $\mathcal{P}$ se verifica p.c.t $x \in E$, se entenderá que el conjunto $\{x : \mathcal{P} \text{ no se verifica}\}$ tiene medida cero. Además diremos que dos funciones son equivalentes ($f \sim g$) en E, si como funciones son iguales excepto en un conjunto de medida cero, esto es, el conjunto $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es de medida cero.

Teorema 6. *Sea $f \in AC([a, b])$. Si $f'(x) = 0$ p.c.t. $x \in [a, b]$, entonces f es constante.*

Demostración. Ver Natanson [9], capítulo IX, página 266. □

Consecuencia 4. *Sean $f, g \in AC([a, b])$. Si $f' \sim g'$, entonces $f - g$ es constante.*

Demostración. En efecto, sí del segmento $[a, b]$ se eliminan los puntos en donde al menos una de las funciones f y g no tienen derivada finita o sus derivadas no son iguales, entonces en los puntos restantes se tiene $(f-g)' = 0$ es decir, como $f, g \in AC[a, b]$ y $f' \sim g'$, entonces $f' - g' \sim 0 \Rightarrow (f - g)' \sim 0$ y por tanto $f - g$ es constante. □

A continuación presentamos un criterio para la composición de funciones absolutamente continuas a través del concepto de variación acotada.

Teorema 7. *(G.M. Fichtengoltz)*
Sean $f, g \in AC([a, b])$ y los valores de g se encuentran en el segmento donde está definida f. Entonces $f \circ g \in AC([a, b])$ sí, y sólo sí $f \circ g$ es de variación acotada.

Demostración. La demostración puede verse por ejemplo en Natanson [9], capítulo IX, página 271. □

1.2.2. Integral indefinida de Lebesgue

En las dos subsecciones siguientes presentamos ciertas propiedades de la integral de Lebesgue tomada en el segmento $[a, x]$, como función de x. Además se establece cómo se relaciona este concepto con los mencionados anteriormente en esta sección.

Definición 4. *Sea $f \in L_1([a, b])$. La función*

$$\varphi(x) = c + \int_a^x f(t)dt, \qquad c\text{-constante}, \qquad x \in [a, b];$$

se denomina integral indefinida de Lebesgue de la función f en el segmento $[a, b]$.

De esta forma, la función f tiene una cantidad infinita de integrales indefinidas que se diferencian en una constante. En adelante la primitiva de f es

$$\varphi(x) = f(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Una de las propiedades mas relevantes de la integral de Lebesgue, se refleja en el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en Natanson [9].

Teorema 8. *Toda integral indefinida en* $[a, b]$ *es absolutamente continua en* $[a, b]$*.*

En algunos resultados del capítulo 2 se usa la siguiente representación de las funciones absolutamente continuas.

Teorema 9. *Toda función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada.*

Demostración. Supongamos que $F \in AC([a, b])$, según la consecuencia 3 F' existe en p.c.t y $F' \in L_1([a, b])$. Sea

$$\varphi(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt. \tag{1.13}$$

En virtud del teorema 8, $\varphi \in AC([a, b])$ y su derivada $\varphi'(x) = F'(x)$ p.c.t $x \in [a, b]$ puesto que

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x F'(t)dt + F'(a) = F'(x) - F'(a) + F'(a).$$

Ahora, demostremos que $\varphi = F$.

$$\varphi'(x) - F'(x) = (\varphi(x) - F(x))' = 0,$$

de acuerdo con el teorema 6,

$$\varphi(x) - F(x) = c.$$

Sea $x = a$, entonces $\varphi(a) - F(a) = c$. Por (1.13) tenemos: $\varphi(a) = F(a)$, así $c = 0$. Es decir que $\varphi(x) = F(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Reemplazando en (1.13),

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

$\square$

Como pudimos observar, los dos teoremas anteriores muestran la estrecha relación que existe entre los conceptos de continuidad absoluta y el de integral indefinida de Lebesgue.

1.2.3. Funciones continuas de variación acotada

Nos ocuparemos ahora de las funciones f continuas de variación acotada en [a,b]. Recordemos que para dichas funciones existe la derivada en casi todas partes y esta es integrable según Lebesgue.

Definición 5. *Llamaremos función singular a la función continúa de variación acotada, distinta de la función constante y cuya derivada es cero en casi todas partes.*

Un ejemplo de función singular, es la función de Cantor. Para definirla consideremos en $[0,1]$ el conjunto de Cantor y definamos primero f en los k-ésimos intervalos contiguos de n-ésimo rango (incluyendo sus extremos). Es decir el orden en que se van excluyendo los intervalos del conjunto de cantor; contando de izquierda a derecha de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{k}{2^n}, \qquad k = 1, 3, 5, ..., 2n - 1.$$

Es decir, $f(t) = \frac{1}{2}$ para $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$, $f(t) = \frac{1}{4}$ para $\frac{1}{9} \leq t \leq \frac{2}{9}$, $f(t) = \frac{3}{4}$ para $\frac{7}{9} \leq t \leq \frac{8}{9}$, etc. Como se muestra en la siguiente figura.

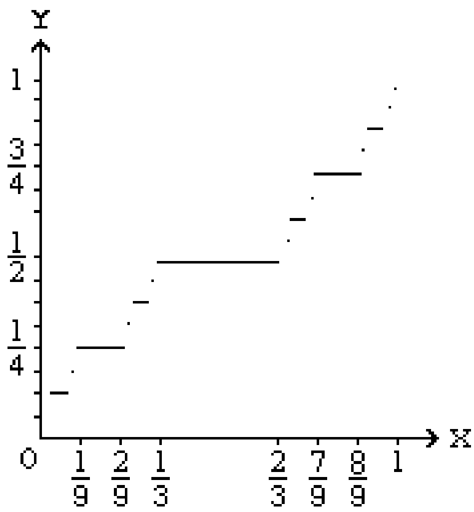

Figura 1.1: Función de Cantor.

Ahora, para definir la función f en los puntos que no pertenecen a los intervalos contiguos, ni al conjunto de sus extremos, consideramos $t^\star$ uno de dichos puntos y $\{t_n\}$ una sucesión creciente de puntos extremos de los intervalos contiguos, convergente hacia $t^{\star}$. Entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} f\{t_n\}$; análogamente $\lim\limits_{n\to\infty} f\{t'_n\}$ también existe, donde $\{t'_n\}$ es una sucesión decreciente de puntos extremos de los intervalos contiguos, que converge hacia $t^{\star}$; además los límites anteriores coinciden. Consideremos el valor común igual a $f(t^{\star})$. Definiendo f de esta forma, obtenemos una función monótona y continua en todo el segmento $[0,1]$. Esta función es también conocida como escalera de Cantor y su derivada es igual evidentemente a cero en cada punto de cualquier intervalo contiguo, es decir, en casi todos los puntos de $[0,1]$.

Observación 6. *Es claro que una función singular no puede ser absolutamente continua, ya que de lo contrario ella sería constante.*

Del teorema 9 y de la definición 5 se obtiene el siguiente resultado, que reviste especial interés, ya que describe qué tan "similares"son las funciones continuas en un segmento a las funciones AC.

Teorema 10. *Toda función f continua de variación acotada en $[a,b]$ se representa de manera única en la forma: $f(x)=\varphi(x)+r(x)$, donde $\varphi\in AC([a,b])$, $\varphi(a)=f(a)$ y r es una función singular.*

Demostración. Como f es de variación acotada en $[a,b]$, su derivada $f'(x)$ existe p.c.t. $x\in[a,b]$ y es integrable. Sea

$$\varphi(x)=f(a)+\int\limits_a^x f'(t)dt.$$

Entonces usando el teorema 8, $\varphi\in AC([a,b])$. Sea además $r=f-\varphi$. Mostremos que r es singular. Como f y φ son continuas y de variación acotada entonces r también lo es. Así

$$r'(x)=f'(x)-\varphi'(x)=f'(x)-f'(x)=0,\qquad \text{p.c.t. } x\in[a,b];$$

por tanto r es singular (pues si r fuera constante, f seria absolutamente continua por ser la suma de dos funciones absolutamente continuas).

Demostremos la unicidad de dicha representación. Supongamos que f admite dos representaciones como la indicada en el enunciado del teorema: $f=\varphi+r=\varphi_1+r_1$, y sean $\varphi, \varphi_1 \in AC([a,b])$, $\varphi(a) = f(a) = \varphi_1(a)$, r y r_1 funciones singulares. Entonces,

$$\varphi - \varphi_1 = r - r_1,$$

con $\varphi'(x) - \varphi_1'(x) = 0$ p.c.t. $x \in [a,b]$. Según el teorema 6, $\varphi(x) - \varphi_1(x) = c \ \forall x \in [a,b]$. Reemplazando $x = a$, $\varphi(a) - \varphi_1(a) = c$, tenemos que $\varphi(a) = \varphi_1(a) = f(a)$, entonces $c = 0$ y por lo tanto $\varphi = \varphi_1$. Luego $r = r_1$ y en consecuencia f se representa de manera única.

□

Teorema 11. *Sean f continua de variación acotada en $[a,b]$, $\varphi \in AC([a,b])$, $\varphi(a) = f(a)$ y r es una función singular tal que $f = \varphi + r$. Si f es creciente en $[a,b]$, entonces sus componentes φ y r también lo son en dicho segmento.*

Demostración. Del crecimiento de f se desprende que $f'(x) \geq 0$, p.c.t $x \in [a,b]$; de aquí se sigue que la función $\varphi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ crece en $[a,b]$. Es conocido el siguiente resultado para funciones monótonas,[4]

$$\int\limits_a^x f'(t)dt \leq f(x) - f(a).$$

Ahora veamos que r es creciente. Sean $x, y \in [a,b]$ tales que $y > x$. Tenemos que:

$$\varphi(y) = f(a) + \int_a^y f'(t)dt \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Así,

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y f'(t)dt \leq f(y) - f(x).$$

Luego,

$$0 < [f(y) - \varphi(y)] - [f(x) - \varphi(x)] = r(y) - r(x).$$

Es decir, para todo $x, y \in [a,b]$, $r(x) \leq r(y)$.

□

Consecuencia 5. *Sea f continua y creciente en $[a,b]$. Para que $f \in AC([a,b])$ es necesario y suficiente que*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \tag{1.14}$$

[4] Ver Natanson [9], capítulo VIII, página 231

Demostración. Necesidad. Es evidente, pues si $f \in AC([a,b])$ y es creciente, entonces por el teorema 9 se tiene (1.14).

Suficiencia. Supongamos que $f \notin AC([a,b])$. Como φ es $AC([a,b])$ y r singular, entonces

$$f(b) - f(a) = \varphi(b) - \varphi(a) + r(b) - r(a),$$
$$0 < f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx + r(b) - r(a).$$

Pero r crece (por el teorema 11) luego, no se da la igualdad de (1.14). Así la consecuencia queda demostrada. □

1.3. Algunos conceptos relacionados con los espacios Lp

En esta sección consideramos a $E \subset \mathbb{R}^n$ medible según Lebesgue.

Definición 6. *Sean $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que $f \in Lp(E)$, $1 \leq p < +\infty$ si*

i. f es medible en E.

ii. Es finita la integral:

$$\int_E |f(x)|^p \, dx.$$

Es decir

$$Lp(E) := \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad medible \quad y \quad \int_E |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$

$$L_\infty(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} : f \;\; medible \;\; y \;\; existe \;\; C \geq 0 \;\; tal \;\; que \;\; |f(x)| < C \;\; p.c.t. \;\; x \in E\}.$$

Es claro que toda función acotada es un elemento de $L_\infty(E)$. El recíproco es falso.

Observación 7. *$L_p(E)$ es un espacio seminormado con la seminorma definida mediante*

$$\|f\|_{L_p(E)} := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Si $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty(E)} := Inf \left\{ C \geq 0 : |f(x)| < C \quad p.c.t. \quad x \in E \right\}.$$

Teorema 12. ***(Desigualdad de Hölder)*** *Sean* $1 \leq p \leq +\infty$ *y* q *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in Lp(E)$ *y* $g \in Lq(E)$, *entonces* $fg \in L_1(E)$ *y es válida la desigualdad*

$$\left| \int_E fg dx \right| \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_q(E)} .$$

Observación 8. *Para* $p = 1$, *se considera* $q := \infty$; *y para* $q = 1$, $p := \infty$.

Ejemplo. Sea $f \in L_1([a, b])$ y $g(x) = (b - x)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\left| \int_a^b f(t)(b-t)^{1-\alpha} dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha} dt \leq \|f\|_{L_1} \|(b-t)^{1-\alpha}\|_{L_\infty} < +\infty. \tag{1.15}$$

Puesto que $\|(b-t)^{1-\alpha}\|_{L_\infty} = \sup\limits_{t \in [a,b]} |b-t|^{1-\alpha} = (b-a)^{1-\alpha} < +\infty$.

Los siguientes teoremas que presentamos sin demostración (ver Apóstol [1], numeral 15.8, página 504) son de gran importancia ya que, bajo ciertas condiciones nos permite realizar intercambio en el orden de integración; situación en la que nos encontraremos mas adelante en la demostración de ciertos resultados.

Teorema 13. ***(Teorema de Fubini)*** *Sea* $f \in L_1(E \times F)$ *donde* $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^n$, *con* E *y* F *conjuntos medibles. Entonces*

1. $f(x, \cdot)$ *es integrable en* F *como función de* y *p.c.t.* $x \in E$.

2. $\int\limits_F f(x, y)dy$ *es integrable en* E *como función de* x.

3. $f(\cdot, y)$ *es integrable en* E *como función de* x, *p.c.t.* $y \in F$.

4. $\int\limits_E f(x, y)dx$ *es integrable en* F *como función de* y *y además son válidas las igualdades*

$$\int\limits_E \left(\int\limits_F f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_F \left(\int\limits_E f(x,y)dx \right) dy = \iint\limits_{E \times F} f(x,y)dxdy. \tag{1.16}$$

Teorema 14. ***(Teorema de Tonelli)*** *Si al menos una de las integrales*

$$\int\limits_E \left(\int\limits_F |f(x,y)|\, dy \right) dx, \qquad \int\limits_F \left(\int\limits_E |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

es finita, entonces existen las tres integrales de (1.16) y además (1.16) es válida.

1.4. Integrales dependientes de parámetro

Como herramienta auxiliar utilizaremos ciertas integrales donde una o varias variables intervienen en calidad de parámetros. Tales integrales y sus propiedades se detallan en Kudriávsev [8] (tomo II, numerales 53 y 54). Aquí nos limitaremos a presentar solamente la formulación de los resultados.

Definición 7. *Supongamos que $Y \subset \mathbb{R}$, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, $\psi : Y \to \mathbb{R}$ con $\varphi(y) \leq \psi(y)$ y la función $f(x, y)$ está definida en el conjunto*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in Y, x \in [\varphi(y), \psi(y)]\right\}.$$

Las integrales de la forma (si existe la integral finita)

$$\Phi(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx,$$

se denominan integrales dependientes de parámetro, donde y es el parámetro.

Teorema 15. ***(Regla de Leibniz)*** *Si la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ son continuas en $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b;\ A \leq y \leq B\}$, entonces la función $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ es derivable en el segmento $[A, B]$ y*

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Teorema 16. ***(Regla generalizada de Leibniz)***
Sea $\Phi(y) := \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$. Supongamos que

1. *Las funciones $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ son continuas en:*

$$P = \{(x, y) : a \leq x \leq b; A \leq y \leq B\};$$

2. *las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son diferenciables respecto al parámetro y, donde $a \leq \varphi(y) \leq b$ y $A \leq \psi(y) \leq B$.*

Entonces tiene lugar la siguiente igualdad

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx - f(\varphi(y), y)\frac{d\varphi(y)}{dy} + f(\psi(y), y)\frac{d\psi(y)}{dy}; \quad A \leq y \leq B.$$

1.5. Funciones Gamma y Beta

Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$. Se llama función Beta a la integral:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{1.17}$$

Sea $s \in \mathbb{R}^+$. Se llama función Gamma a la integral:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx. \tag{1.18}$$

Las integrales (1.17)-(1.18) convergen únicamente para los valores señalados de p, q y s.

Propiedades de las funciones Gamma y Beta.

1. Si $p > 0$ y $q > 0$,

$$B(p,q) = B(q,p).$$

2. Si $p, q \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

3. La función Beta es infinitamente diferenciable y para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k}{\partial p^k}B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln^k x dx.$$

   Además

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta}B(\alpha,\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right] \\ &= \Gamma(\alpha)\left(\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{\Gamma(\beta)\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma^2(\alpha+\beta)}\right).\end{aligned}$$

4. Si $p \in \mathbb{R}^+$, entonces es válida la llamada fórmula de reducción:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

5. Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\Gamma(p-n), \quad p > n.$$

6. Si $n \in \mathbb{N}_0$, entonces:

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

Capítulo 2

INTEGRALES Y DERIVADAS FRACCIONARIAS

A continuación desarrollaremos las respectivas definiciones de integral y derivada de orden no entero (o también llamadas fraccionarias) y presentaremos sus propiedades elementales.

2.1. Ecuación integral de Abel

La noción de integral no entera está estrechamente ligada con la ecuación integral de Abel, que abordaremos a continuación.

Definición 8. *La ecuación integral*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = f(x), \qquad x > a, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{2.1}$$

considerada en el segmento finito $[a, b]$ *se llama ecuación de Abel.*

En esta ecuación f es dada y φ incógnita. Mas adelante en el teorema 17 mostraremos que esta ecuación en la clase $L_1([a, b])$ tiene solución única y se representa de la siguiente forma:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt. \tag{2.2}$$

De forma análoga se considera la ecuación de Abel como:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt = f(x), \qquad x < b, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

y su respectiva solución es de la forma

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt.$$

Para f, consideremos la siguiente función auxiliar

$$f_{1-\alpha}(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt, \qquad x > a \qquad 0 < \alpha < 1.$$

En adelante

$$f'_{1-\alpha} := \frac{d}{dx}f_{1-\alpha}(x) \qquad \text{y} \qquad (f')_{1-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Proposición 1. *Sea $0 < \alpha < 1$. Si $f \in L_1([a,b])$, entonces $f_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$.*

Demostración. Mostremos que

$$\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha}dt.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\, dx &= \int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_a^x \left|\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\right| dt\right) dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b \left(\int_a^x |f(t)|\,(x-t)^{-\alpha}dt\right) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b \left(\int_t^b |f(t)|\,(x-t)^{-\alpha}dx\right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |f(t)|\, \left.\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=t}^{x=b} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^b |f(t)|\,(b-t)^{1-\alpha}dt.
\end{aligned}$$

Ahora por la desigualdad de Hölder (Ver (1.15))y por el teorema de Tonelli tenemos que $f_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$.

□

Teorema 17. *Para que la ecuación de Abel (2.1) sea soluble en $L_1([a,b])$, con $0 < \alpha < 1$, es necesario y suficiente que:*

$$f_{1-\alpha} \in AC([a,b]) \qquad y \qquad f_{1-\alpha}(a) = 0.$$

Observación 9. *Bajo el cumplimiento de estas condiciones la ecuación de Abel tiene solución única.*

Demostración. Necesidad. Supongamos que $\varphi \in L_1([a,b])$ y en la ecuación de Abel (2.1) cambiando x por t, t por s y multiplicando ambas partes por $(x-t)^{-\alpha}$ obtenemos

$$\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds = \Gamma(\alpha)\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Integrando respecto a t en virtud de la proposición 1, tenemos:

$$\int_a^x \left(\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right)dt = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Intercambiando el orden de integración en la parte izquierda, lo cual es válido por el teorema de Tonelli llegamos a la igualdad

$$\int_a^x \left(\varphi(s)\int_s^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}}dt\right)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

La integral interna se calcula fácilmente después de la sustitución $t = s + \tau(x-s)$, usando las fórmulas para Gamma y Beta tenemos:

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Por esto

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt. \tag{2.3}$$

Luego después de diferenciar,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

De esta manera si la ecuación de Abel tiene solución, entonces ésta tiene la forma (2.2) y por lo tanto es única.

Consideremos la ecuación (2.3)

$$\int_a^x \varphi(s)ds \quad = \quad f_{1-\alpha}(x).$$

Por el teorema 8 como la parte izquierda de la igualdad es la primitiva de una función integrable, entonces $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$. Además evaluando en $x = a$ tenemos $f_{1-\alpha}(a) = 0$.

Suficiencia. Supongamos que $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y $f_{1-\alpha}(a) = 0$. Como $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$, por la consecuencia 3 p.c.t. $x \in [a,b]$ existe la derivada de esta función la cual es integrable; además

$$f'_{1-\alpha}(x) \quad = \quad \varphi(x).$$

Probemos que en verdad ella es la solución de la ecuación de Abel; para esto la reemplazamos en la ecuación (2.1) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = g(x). \tag{2.4}$$

Mostremos que $g \sim f$.

La igualdad (2.4) es la ecuación de Abel respecto a $f'_{1-\alpha}$ y de esta forma ella es soluble y esta dada por:

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt. \tag{2.5}$$

Así $f'_{1-\alpha} = g'_{1-\alpha}$, sin embargo $f_{1-\alpha}$ es absolutamente continua en $[a,b]$ por hipótesis y seguidamente vemos que $g_{1-\alpha}$ también es absolutamente continua en $[a,b]$ pues es la integral indefinida de la función integrable $f'_{1-\alpha}$;

$$\int_a^x f'_{1-\alpha}(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt = g_{1-\alpha}(x).$$

De este modo tenemos que $f_{1-\alpha}-g_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y por (2.5) $[f_{1-\alpha}-g_{1-\alpha}]' = 0$, entonces $f_{1-\alpha}(x)-g_{1-\alpha}(x) = c$ en virtud de el teorema 6. De otra parte al evaluar en $x = a$ tenemos que $f_{1-\alpha}(a) - g_{1-\alpha}(a) = 0$. De esta manera

$$f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = 0 \qquad \text{luego} \qquad \int_a^x \frac{f(t)-g(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt = 0.$$

Pero esta última igualdad es la ecuación homogénea de Abel y debido a la unicidad de la solución tenemos $f \sim g$.

□

Las condiciones necesarias y suficientes para la solución de la ecuación integral de Abel han sido formuladas en términos de la función auxiliar $f_{1-\alpha}$, la cual puede no calcularse fácilmente en algunos casos, por esto el siguiente lema y su consecuencia nos presentan una condición necesaria en términos de la función f.

Lema 1. *Sea $0 < \alpha < 1$. Si $f \in AC([a,b])$, entonces $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$. Además,*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Big[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt\Big]. \tag{2.6}$$

Demostración. Como $f \in AC([a,b])$ por el teorema 9 tenemos

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds,$$

donde $f' \in L_1([a,b])$. Reemplazando $f(t)$ en la función auxiliar tenemos:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\frac{1}{(x-t)^\alpha} \int_a^t f'(s)ds \right) dt. \tag{2.7}$$

Aquí el primer término es $AC([a,b])$ puesto que $(x-a)^{1-\alpha}$ es la primitiva de una función integrable. En efecto,

$$(x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \int_a^x (t-a)^{-\alpha} dt.$$

Mostremos que

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\frac{1}{(x-t)^\alpha} \int_a^t f'(s)ds \right) dt \in AC([a,b]). \tag{2.8}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt \right| &\leq \int_a^x \left(|x-t|^{-\alpha} \int_a^t |f'(s)|ds \right) dt \\
&\leq \int_a^x |x-t|^{-\alpha} \left(\int_a^b |f'(s)|ds \right) dt \\
&= \|f'\|_{L_1([a,b])} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} < +\infty.
\end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración en (2.8) (válido por el teorema de Fubini) tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\frac{1}{(x-t)^\alpha} \int_a^t f'(s)ds \right) dt &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_a^t \frac{f'(s)}{(x-t)^\alpha} ds \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(f'(s) \int_s^x (x-t)^{-\alpha} dt \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha} ds \qquad (2.9) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(f'(s) \int_s^x (t-s)^{-\alpha} dt \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_s^x \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} dt \right) ds.
\end{aligned}$$

Cambiando nuevamente el orden de integración,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_s^x \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} dt \right) ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right) dt \qquad (2.10) \\
&= \int_a^x \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right) dt \\
&= \int_a^x (f')_{1-\alpha}(t) dt.
\end{aligned}$$

Como $f \in AC([a,b])$ entonces $f' \in L_1([a,b])$ luego, $(f')_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$. Así

$$\int_a^x (f')_{1-\alpha}(t)dt \quad \in AC([a,b]).$$

Por tanto $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$. Ahora cambiando s por t en (2.9) y reemplazando en la función (2.7) se tiene:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt\right].$$

□

Consecuencia 6. *Si $f \in AC([a,b])$, entonces la ecuación de Abel es soluble en $L_1([a,b])$ para $0 < \alpha < 1$ y además dicha solución puede representarse en la siguiente forma:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^\alpha}ds\right].$$

Demostración. Supongamos que $f \in AC([a,b])$, entonces por el lema 1 la función $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y por las igualdades (2.6) y (2.10) $f_{1-\alpha}(a) = 0$; así la ecuación de Abel es soluble en $L_1([a,b])$ para $0 < \alpha < 1$. Además

$$f_{1-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha}dt\right].$$

Pero

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{d}{dx}f_{1-\alpha}(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{f(a)(1-\alpha)}{(x-a)^\alpha} + \frac{d}{dx}\int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt\right].
\end{aligned}$$

Por (2.9) y (2.10) tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt &= (1-\alpha)\int_a^x \left(\int_t^x \frac{f'(t)}{(s-t)^\alpha}ds\right)dt\\
&= (1-\alpha)\int_a^x \left(\int_a^s \frac{f'(t)}{(s-t)^\alpha}dt\right)ds.
\end{aligned}$$

Ahora, derivando respecto a x,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt &= (1-\alpha)\frac{d}{dx}\int_a^x \left(\int_a^s \frac{f'(t)}{(s-t)^\alpha}dt\right)ds\\
&= (1-\alpha)\int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}dt.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^\alpha}ds\right].$$

□

Observemos que simultaneamente hemos obtenido una nueva representación para la solución de la ecuación de Abel, que es aplicable para funciones absolutamente continuas.

2.2. Integrales fraccionarias

Supongamos que $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ y consideremos la integral indefinida:

$$(I\varphi)(x) \overset{not}{=} \int_a^x \varphi(s)ds.$$

Integrando nuevamente y luego de ciertos cálculos elementales tenemos:

$$\begin{aligned} [I(I\varphi)](x) &= \int_a^x \left(\int_a^t \varphi(s)ds\right) dt \\ &= \int_a^x \left(\int_s^x \varphi(s)dt\right) ds \\ &= \int_a^x \varphi(s)(x-s)ds. \end{aligned}$$

Por inducción matemática es fácil verificar, que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(I^n\varphi)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt. \tag{2.11}$$

Vemos que la parte derecha de la igualdad tiene sentido para n no entero. De esta manera la anterior fórmula conduce de manera natural a la siguiente:

Definición 9. *Sean $\varphi \in L_1([a,b])$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Las integrales*

$$(I_{a+}^\alpha\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad x > a; \tag{2.12}$$

$$(I_{b-}^\alpha\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \qquad x < b, \tag{2.13}$$

se llaman integrales de orden α según Riemann-Liouville de la función φ en $[a,b]$, por izquierda y derecha respectivamente.

Teniendo en cuenta que las propiedades para los operadores I^{α}_{a+} e I^{α}_{b-} son similares, en adelante nos ocuparemos de uno de ellos, por ejemplo de I^{α}_{a+}, el cual notaremos simplemente como I^{α}.

Observación 10. *El miembro izquierdo de la ecuación integral de Abel (2.1) es lo que definimos como la integral fraccionaria de orden $1-\alpha$ de la función φ.*

Ejemplos. Calculemos la integral fraccionaria para algunas funciones elementales.

1. Sea $\alpha = 1/2$ y $f(x) = x$ en $[0,1]$.

$$I^{1/2}_{0+}x = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x \frac{t}{(x-t)^{1/2}}dt.$$

Haciendo la sustitución $s = \dfrac{t}{x}$ y usando las propiedades de las funciones Gamma y Beta obtenemos:

$$\begin{aligned} I^{1/2}_{0+}x &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 sx^2x^{-1/2}(1-s)^{-1/2}ds = \frac{x^{3/2}}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 s(1-s)^{-1/2}ds \\ &= B(2,1/2)\frac{x^{3/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

2. Sea $f(x) = (x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$, con $\beta > 0$ en $[a,b]$. Entonces

$$(I^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}\ln(t-a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \quad \alpha > 0.$$

Haciendo la sustitución $s = \dfrac{t-a}{x-a}$ tenemos:

$$\begin{aligned} (I^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[\ln s + \ln(x-a)]ds \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}\ln s ds + \ln(x-a)\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds\right] \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}B(\alpha,\beta) + \ln(x-a)B(\alpha,\beta)\right]. \end{aligned}$$

Además, por la propiedad 3 de las funciones Gamma y Beta

$$\begin{aligned} (I^{\alpha}f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha)\left(\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{\Gamma(\beta)\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma^2(\alpha+\beta)}\right) + \ln(x-a)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \ln(x-a)\right). \end{aligned}$$

La función "Psi" de Euler se define como: $\Psi(p) := \dfrac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}$ para $p > 0$. De este modo obtenemos

$$(I^{\alpha}f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[\psi(\beta) - \psi(\beta+\alpha) + \ln(x-a)].$$

3. Un caso particular del ejemplo anterior es cuando $\beta = 1$, así $f(x) = \ln(x-a)$ y

$$(I^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}[\psi(1) - \psi(\alpha+1) + \ln(x-a)].$$

Propiedades de los operadores I_{a+}^{α} e I_{b-}^{α} en $[a,b]$.

Antes de determinar la relación que existe entre los operadores de integración en un segmento, presentamos la siguiente definición.

Definición 10. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se llama operador de reflexión en el segmento $[a,b]$ y se denota "Q"a la operación que cumple:*

$$(Q\varphi)(x) := \varphi(a+b-x), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Donde $x = \dfrac{b-a}{2}$ es el eje de reflexión.

Bajo ciertas condiciones (Ver Bucheli; Sotelo [3], capítulo II, sección 2.2) son válidas las siguientes fórmulas:

1. $$QI_{a+}^{\alpha}\varphi = I_{b-}^{\alpha}Q\varphi.$$

2. $$\int_a^b \varphi(x)(I_{a+}^{\alpha}\psi)(x)dx = \int_a^b \psi(x)(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)dx.$$

   (Fórmula de integración por partes).

Ejemplos sobre estos operadores se pueden encontrar en Bucheli; Sotelo [3], capítulo II, página 15.

El siguiente teorema será de gran ayuda en los capítulos posteriores ya que nos permite componer los operadores de integración.

Teorema 18. ***(Propiedad de Semigrupo)*** *Sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y la función $\varphi \in L_1([a, b])$. Entonces*

$$\begin{array}{ll} (i) & I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi \\ (ii) & I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} \varphi = I_{b-}^{\alpha+\beta} \varphi \end{array}$$

Demostración. (i) Por definición tenemos

$$\begin{aligned} (I^{\alpha} I^{\beta} \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left(\int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración, lo cual es válido por el teorema de Tonelli. Tenemos,

$$(I^{\alpha} I^{\beta} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) \left(\int_{\tau}^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} \right) d\tau.$$

Sea $s = \dfrac{t-\tau}{x-\tau}$. Entonces $t = s(x-\tau) + \tau$ y $(x-t) = (x-\tau)(1-s)$. Luego

$$\begin{aligned} (I^{\alpha} I^{\beta} \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) \left(\int_0^1 \frac{x-\tau}{[(x-\tau)(1-s)]^{1-\alpha}[s(x-\tau)]^{1-\beta}} ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) \left(\int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} ds \right) d\tau \\ &= \frac{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}} d\tau \\ &= I^{\alpha+\beta} \varphi(x). \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra (ii). □

2.3. Derivadas Fraccionarias

En esta sección introducimos la diferenciación fraccionaria como operación inversa de la integración fraccionaria haciendo uso de la inversión obtenida en la ecuación de Abel.

Definición 11. *Sea $0 < \alpha < 1$. Si existen y son finitas las integrales*

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \qquad x > a; \tag{2.14}$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) := -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt, \qquad x < b, \tag{2.15}$$

entonces ellas se llaman derivadas de orden α según Riemann-Liouville por izquierda y derecha respectivamente, de la función f definida en $[a, b]$.

Similarmente como se procedió para I^α en adelante notaremos D^α en lugar de D^α_{a+}.

Observación 11. *Notemos que la solución de la ecuación de Abel es la derivada de orden α de la función f.*

Ejemplos. Calculemos la derivada fraccionaria de las siguientes funciones

1. Sea $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$. Entonces

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Con la sustitución $s = \dfrac{t-a}{x-a}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(x-t)^\alpha} dt &= \int_0^1 \frac{s^{\alpha-1}(x-a)^\alpha}{(x-a)^\alpha (1-s)^\alpha} ds \\ &= \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^\alpha ds = B(\alpha, 1-\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} B(\alpha, 1-\alpha) = 0.$$

2. Observemos el caso más general. Sea $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ con $0 < \mu < 1$, $\alpha + \mu < 1$. Entonces,

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(t-a)^{-\mu}}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Bajo la misma sustitución $s = \dfrac{t-a}{x-a}$ y aplicando el mismo proceso tenemos:

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}.$$

Observación 12. *En particular $D^\alpha f(x) = 0$ si $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$, lo cual significa que la función f para la derivada fraccionaria $D^\alpha f$ juega el mismo papel que una constante para la diferenciación habitual.*

A continuación damos una condición suficiente para la existencia de las derivadas de orden no entero, cuya demostración se encuentra en Bucheli; Sotelo [3], capítulo II, sección 2.3 .

Teorema 19. *Si $f(x) \in AC([a,b])$, $0 < \alpha < 1$, entonces se tiene:*

1. *$D^{\alpha}_{a+}f$ y $D^{\alpha}_{b-}f$ existen en casi todas partes.*
2. *Dichas derivadas también pueden representarse de la siguiente manera:*

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \tag{2.16}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{f'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}\right]. \tag{2.17}$$

3. *Si $1 \leq r < 1/\alpha$, $D^{\alpha}_{a+}f$ y $D^{\alpha}_{b-}f \in L_r([a,b])$.*

Notemos que en la definición 11, a diferencia de las integrales fraccionarias que se determinan para cualquier $\alpha > 0$, las derivadas de orden no entero están definidas solamente para $0 < \alpha < 1$. En seguida presentamos el caso $\alpha \geq 1$. Para este fin utilizaremos la siguiente notación $\alpha := [\alpha] + \{\alpha\}$, donde $[\alpha]$ es la parte entera de α y $\{\alpha\}$ la parte fraccionaria de α, $0 \leq \{\alpha\} < 1$.

Recordemos que si α es un número entero, entonces por derivada de orden α entenderemos la diferenciación habitual:

$$D^{\alpha}_{a+} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \qquad \text{y} \qquad D^{\alpha}_{b-} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}.$$

Para α no entero procedemos de la siguiente manera:

Definición 12. *Sea $\alpha > 1$, representamos las derivadas de orden α mediante las fórmulas:*

$$D^{\alpha}_{a+}f := \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{a+}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f,$$

$$D^{\alpha}_{b-}f := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{b-}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{b-}f.$$

Es decir,

$$D^{\alpha}_{a+}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \qquad n = [\alpha]+1, \tag{2.18}$$

$$D^{\alpha}_{b-}f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt, \qquad n = [\alpha]+1. \tag{2.19}$$

En lo sucesivo utilizaremos la notación $D^{\alpha}_{a+} = I^{-\alpha}_{a+}$. Además la existencia de (2.18) y (2.19) se garantizará en el capítulo posterior.

Ejemplos.

1. Sean $0 < \mu < 1$, $\mu + \alpha \notin \mathbb{N}$. La función $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ posee derivada fraccionaria de orden α:
$$(D^{\alpha} f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}.$$

2. Sea $f(x) = (x-a)^{\alpha-n}$ donde $n = 1, 2, ..., [\alpha]+1$. Entonces
$$(D^{\alpha} f)(x) = 0.$$

   En efecto,
$$\begin{aligned}
(D^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}(x-a)^{\alpha-n} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(1-\{\alpha\}+\alpha-n+1)}(x-a)^{1-\{\alpha\}+\alpha-n} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} \frac{\Gamma(\alpha-[\alpha])}{\Gamma(1-\{\alpha\}+\alpha-[\alpha])}(x-a)^{\alpha-\{\alpha\}-[\alpha]} = 0.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

LA CLASE $AC^n([a,b])$ Y LA FÓRMULA DE TAYLOR

A continuación introducimos una clase de funciones que es generalización de $AC([a,b])$ y la cuál es herramienta fundamental para el cumplimiento del objetivo principal del presente trabajo.

3.1. La clase $AC^n([a,b])$

Definición 13. *La clase de funciones f continuamente diferenciables hasta el orden $n-1$ en $[a,b]$ y con $f^{(n-1)}$ absolutamente continua en dicho segmento, se denota $AC^n([a,b])$. Es decir,*

$$AC^n([a,b]) := \left\{ f \in C^{(n-1)}([a,b]) : f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

Observación 13. *Es claro que $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$ y además*

$$C^n([a,b]) \subset AC^n([a,b]) \subset C^{n-1}([a,b]).$$

El siguiente resultado generaliza el teorema 9 y relaciona la clase $AC^n([a,b])$ con la integral n-múltiple de Lebesgue:

Teorema 20. *A la clase $AC^n([a,b])$ pertenecen únicamente las funciones f que se pueden representar en la forma:*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-n}} dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k, \tag{3.1}$$

donde $\varphi = f^{(n)} \in L_1([a,b])$ *y* $C_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Así,

$$f \in AC^n([a,b]) \Longleftrightarrow f(x) = \left(I^n f^{(n)}\right)(x) + P_{n-1}(x), \tag{3.2}$$

Donde $P_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Demostración. Procedemos inductivamente:

(i) El caso $n = 1$ se verifica en virtud del teorema 9.

(ii) Supongamos que para $n = k$ se tiene (3.2), es decir $f \in AC^k([a,b])$ si, y sólo si,

$$f(x) = \left(I^k f^{(k)}\right)(x) + P_{k-1}(x). \tag{3.3}$$

Probemos que esta afirmación también es válida para $k+1$.

Como $f \in AC^{k+1}([a,b])$, entonces $f, f', f'', ..., f^{(k)} \in C([a,b])$ y $f^{(k)} \in AC([a,b])$. Para la función $f' \overset{not}{=} g$ se tiene que $g \in AC^k([a,b])$ y por (3.3),

$$g(x) = \left(I^k g^{(k)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j.$$

Integrando respecto a x en la igualdad anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[I\left(I^k g^{(k)}\right)\right](x) + f(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(a)}{(j+1)!}(x-a)^{j+1} \\ &= \left(I^{k+1} f^{(k+1)}\right)(x) + f(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j+1)}(a)}{(j+1)!}(x-a)^{j+1} \\ &= \left(I^{k+1} f^{(k+1)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j. \end{aligned}$$

Es decir,

$$f(x) = \left(I^{k+1} f^{(k+1)}\right)(x) + P_n(x).$$

Por el principio de inducción matemática la igualdad (3.1) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Ejemplo. Sea $f(x) = (x-a)^{\alpha-n}$, $n = 1, 2, ..., [\alpha]+1$. Veamos que $f \in AC^n([a,b])$, es decir:

$$f(x) = [I^n(D^n f)](x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En efecto, para $k = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$\begin{aligned} D^k f(x) &= (\alpha-n)(\alpha-n-1)\cdots(\alpha-n-k+1)(x-a)^{\alpha-n-k}, \\ D^k f(a) &= 0. \end{aligned}$$

Luego $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k!)}(x-a)^k = 0$ y

$$D^n f(x) = (\alpha-n)(\alpha-n-1)\cdots(\alpha-2n+1)(x-a)^{\alpha-2n}.$$

Así,

$$I^n D^n f(x) = \frac{(\alpha-n)(\alpha-n-1)\cdots(\alpha-2n+1)}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}(t-a)^{\alpha-2n}dt.$$

Haciendo la sustitución $u = \dfrac{t-a}{x-a}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} I^n D^n f(x) &= \frac{(\alpha-n)(\alpha-n-1)\cdots(\alpha-2n+1)}{\Gamma(n)}(x-a)^{\alpha-n}\int_0^1 u^{\alpha-2n}(1-u)^{n-1}du \\ &= \frac{(\alpha-n)(\alpha-n-1)\cdots(\alpha-2n+1)}{\Gamma(n)}(x-a)^{\alpha-n}B(\alpha-2n+1, n) \\ &= (\alpha-n)(\alpha-n-1)\cdots(\alpha-2n+1)\frac{\Gamma(\alpha-2n+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(x-a)^{\alpha-n} \\ &= (x-a)^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in AC^n([a,b])$.

Lema 2. *Sea $\alpha > 0$. Si $f \in AC^n([a,b])$, entonces*

$$f_{n-\alpha}(x) := I^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b]), \quad \textit{donde} \;\; n = [\alpha]+1.$$

Este lema se presenta si demostración ya que se sale de los objetivos del trabajo, sin embargo se garantiza usando la siguiente resultado (Ver Samko; Kilvas; Marichev [10], fórmula (14.27), teoremas 14.8 y 14.9, página 267).

Proposición 2. *Sea $0 < \alpha < 1$. Las funciones de la forma*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{\mu}}, \qquad 0 \leq \mu < 1-\alpha, \qquad \textit{donde} \qquad f^*(x) \in AC([a,b])$$

se representan mediante la integral fraccionaria $f = I^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_1([a,b])$ y además,

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)} \int_a^x \frac{(1-\alpha)f(t) + (t-a)f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt.$$

El teorema que presentamos a continuación garantiza la existencia de la derivada de orden α ($\alpha > 0$).

Teorema 21. *Sea $\alpha > 0$ y $f \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha] + 1$. Entonces*

(i) $D^\alpha f$ existe p.c.t. $x \in [a,b]$.

(ii) Es válida la fórmula:

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

Demostración. Supongamos $f \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha] + 1$.

(i) Como $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$ entonces $\left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha} f$ existe p.c.t. $x \in [a,b]$ y además es integrable.

(ii) Según (3.1),

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{1-n}} ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

Por la fórmula (2.18) tenemos:

$$\begin{aligned}(D^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{1-n}} ds \right) dt + \\ & \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(t-a)^k dt.\end{aligned}$$

sean A y B el primer y segundo término respectivamente, de la última igualdad. Entonces,

$$A = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\int_a^t \frac{(t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} ds \right) dt.$$

Mostremos que

$$\int_a^x \left(\int_a^t \frac{(t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} ds \right) dt = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x \frac{(x-s)^n f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha+1-n}} ds. \qquad (3.4)$$

Como $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$ entonces $f^{(n)} \in L_1([a,b])$, luego $(x-s)^n f^{(n)}(s) \in L_1([a,b])$ (en virtud de la desigualdad de Hölder). Además $0 < \alpha - n + 1 = \{\alpha\} < 1$, así por la proposición 1 tenemos que la integral de la derecha en (3.4) es finita, lo cual garantiza el intercambiando el orden de integración.

$$\begin{aligned}
\int_a^x \left(\int_a^t \frac{(t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} ds \right) dt &= \int_a^x \left(\int_s^x \frac{(t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \right) ds \\
&= \int_a^x \left(f^{(n)}(s) \int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} ds \right) dt.
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = \dfrac{t-s}{x-s}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^x \left(\int_a^t \frac{(t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} ds \right) dt &= \int_a^x \left(f^{(n)}(s) \int_0^1 \frac{u^{n-1}(x-s)^n}{(x-s)^{\alpha-n+1}(1-u)^{\alpha-n+1}} du \right) ds \\
&= \int_a^x \left(f^{(n)}(s) \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{(n-\alpha)-1} du \right) ds \\
&= \int_a^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha+1-2n}} B(n, n-\alpha) ds \\
&= \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha+1-2n}} ds.
\end{aligned}$$

Luego,

$$A = \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha-2n+1}} ds.$$

Según la regla generalizada de Leibniz,

$$A = \frac{(2n-\alpha-1)}{\Gamma(2n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} \int_a^x (x-s)^{2n-2-\alpha} f^{(n)}(s) ds;$$

continuando con este proceso $n-1$ veces finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(2n-\alpha-1)(2n-\alpha-2)\cdots(2n-\alpha-n)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{n-\alpha-1} ds \\
&= \frac{\Gamma(2n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{n-\alpha-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha-n+1}} ds. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Ahora calculemos B,

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!} \int_a^x \frac{(t-a)^k}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{(t-a)^k}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt;
\end{aligned}$$

de igual manera como se procedió para A, hacemos la sustitución $u = \dfrac{t-a}{x-a}$, para obtener

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{k-\alpha+n} \int_0^1 u^k (1-u)^{(n-\alpha)-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k-\alpha+n+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k-\alpha+n+1)} (x-a)^{\alpha-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Así, de (3.5) y (3.6) tenemos:

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

□

Ejemplo. Consideremos nuevamente la función $f(x) = (x-a)^{\alpha-n}$, $n = 1, 2, ..., [\alpha]+1$. En este caso $f \in AC^n([a,b])$ y según el teorema anterior, existe la derivada fraccionaria p.c.t. $x \in [a,b]$ donde,

$$(D^\alpha f)(x) = 0.$$

3.2. Integración y diferenciación fraccionaria como operaciones inversas

Es bien conocido que la diferenciación $\dfrac{d}{dx}$ y la integración $\int\limits_a^x dt$ son operaciones inversas siempre que consideremos la siguiente composición: $\dfrac{d}{dx} \int\limits_a^x \varphi(t)dt$ es decir,

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x).$$

Pero la expresión $\int\limits_a^x \varphi'(t)dt$, se distingue de la función φ en una constante; en general $I^n \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \varphi$ se diferencia de la función φ en un polinomio de grado $n-1$. Un resultado similar debe esperarse para las derivadas e integrales de orden no entero. Para estudiar la composición de los operadores D^α, I^α es conveniente iniciar con la caracterización de las funciones de la clase $I^\alpha(L_1)$.

Definición 14. *Sea $\alpha > 0$, a la clase $I^{\alpha}(L_1)$ pertenecen las funciones que se representan mediante la integral de orden α de cierta función sumable: $f = I^{\alpha}\varphi$, $\varphi \in L_1([a,b])$.*
Es decir,

$$I^{\alpha}(L_1) := \{f : f = I^{\alpha}\varphi, \varphi \in L_1([a,b])\}.$$

A continuación presentamos una generalización del teorema 17.

Teorema 22. *Para que $f \in I^{\alpha}(L_1)$, $\alpha > 0$ es necesario y suficiente que*

$$f_{n-\alpha} \in AC^{\,n}([a,b]), \tag{3.7}$$

donde $n = [\alpha] + 1$, y que

$$f^{(k)}_{n-\alpha}(a) = 0; \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1. \tag{3.8}$$

Demostración. Necesidad. Sean $n = [\alpha] + 1$ y $f = I^{\alpha}\varphi$, con $\varphi \in L_1([a,b])$. En virtud de la propiedad de semigrupo tenemos:

$$\begin{aligned} (I^{n-\alpha}f)(x) &= (I^{n-\alpha}(I^{\alpha}\varphi))(x), \\ f_{n-\alpha}(x) &= (I^{n}\varphi)(x). \end{aligned}$$

Así por el teorema 20 la función $f_{n-\alpha}$ pertenece a la clase $AC^{\,n}([a,b])$, donde $P_{n-1}(x) = 0$; pero esta representación es única, así

$$C_k \;=\; f^{(k)}_{n-\alpha}(a) \;=\; 0, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Suficiencia. Sean $f_{n-\alpha} \in AC^{\,n}([a,b])$ y $f^{(k)}_{n-\alpha}(a) = 0$, para $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. En virtud del teorema 20

$$\begin{aligned} (I^{n-\alpha}f)(x) &= (I^{n}\varphi)(x), \qquad \varphi \in L_1([a,b]). \\ (I^{n-\alpha}f)(x) &= [I^{n-\alpha}(I^{\alpha}\varphi)](x). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$[I^{n-\alpha}(f - I^{\alpha}\varphi)](x) = 0.$$

Esta última igualdad es la ecuación homogénea de Abel, la cual tiene solución trivial:

$$(f - I^{\alpha}\varphi)(x) = 0,$$

puesto que $0 < n - \alpha = 1 - \{\alpha\} < 1$. Por lo tanto $f \in I^{\alpha}(L_1)$.

$\square$

Observación 14. *Existen funciones que poseen derivada fraccionaria y sin embargo no pertenecen a la clase $I^\alpha(L_1)$, como es el caso de la función $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$ con $0 < \alpha < 1$, donde $(D^\alpha f)(x) = 0$; pero esta función infringe la condición (3.8) del teorema 22 pues $f_{1-\alpha}(a) = \Gamma(\alpha) \neq 0$.*

Teniendo en cuenta que la existencia de la derivada en casi todas partes y su integrabilidad garantizan la "recuperación" de la función a través de su primitiva es decir, $\int_a^x f'(t)dt \neq f(x)+c$, c es constante (Ver por ejemplo la función de Cantor, sección 1.2.3). Esta clase de "fenómenos" desaparecen para funciones absolutamente continuas. Igualmente en la teoría fraccionaria la afirmación:"$D^\alpha f$ existe en casi todas partes y es sumable" no es suficiente para la representación de f como la integral fraccionaria de orden α. Para ello se debe imponer una condición más fuerte, por lo cual introducimos la siguiente

Definición 15. *Sean $\alpha > 0$ y $f \in L_1([a,b])$. Diremos que la función f tiene derivada fraccionaria sumable $D^\alpha f$ si, y sólo si $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha] + 1$.*

Teorema 23. *Sea $\alpha > 0$. Si $\varphi \in L_1([a,b])$, entonces*

$$(D^\alpha I^\alpha \varphi)(x) = \varphi(x). \tag{3.9}$$

Demostración. Sea $\varphi \in L_1([a,b])$. Por la ecuaciones (2.18) y (2.12) tenemos:

$$\begin{aligned}
(D^\alpha I^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1} ds \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)(t-s)^{\alpha-1}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} ds \right) dt.
\end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración en virtud del teorema de Tonelli (ver teorema 14) y de la sustitución $\tau = \dfrac{t-s}{x-s}$, tenemos:

$$\int_a^x \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)(t-s)^{\alpha-1}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} ds \right) dt = \int_a^x \left(\varphi(s) \int_s^x \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \right) ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^x \left(\varphi(s)(x-s)^{n-1} \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \right) ds \\
&= B(\alpha, n-\alpha) \int_a^x \varphi(s)(x-s)^{n-1} ds \\
&= \Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)(I^n\varphi)(x).
\end{aligned}
$$

La última igualdad se tiene por la ecuación (2.11). De esta forma,

$$(D^\alpha I^\alpha \varphi)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^n\varphi)(x) = \varphi(x).$$

□

Teorema 24. *Sea $\alpha > 0$. Si $f \in I^\alpha(L_1)$, entonces es válida la igualdad:*

$$(I^\alpha D^\alpha f)(x) = f(x).$$

Demostración. Es inmediata en virtud de la ecuación (3.9). □

Ejemplos. En la siguiente tabla se presentan algunas funciones (en la columna derecha) pertenecientes a la clase $I^\alpha(L_1)$ para las cuales se verifica la igualdad del teorema anterior. Se entiende que los parámetros que intervienen toman valores dentro del dominio de definición de las respectivas funciones:

Tabla de integrales

$\varphi(x),\ a < x < b$	$(I^\alpha\varphi)(x),\ \beta > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$
$(x-a)^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}$
$\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^\alpha(b-x)^\beta}$
$\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(x\pm c)^{\alpha+\beta}}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a\pm c)^\alpha(x\pm c)^\beta}, a \pm c > 0$
$\ln(x-a)$	$\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\ln(x-a) + \psi(1) - \psi(\alpha+1)\right].$
$(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\left[\psi(\beta) - \psi(\alpha+\beta) + \ln(x-a)\right].$
$(x-a)^{\beta-1}\ln^m(x-a)$	$(x-a)^{\alpha+\beta-1}\sum\limits_{k=0}^{m} C_k^m \frac{d^k}{d\beta^k}\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\ln^{m-k}(x-a)$
$(x-a)^{\beta-1}e^{\lambda x}$	$\frac{\Gamma(\beta)e^{\lambda a}}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}{}_1F_1(\alpha; \alpha+\beta; \lambda x - \lambda a)$

3.3. Fórmula de Taylor

En esta parte presentamos el objetivo fundamental del trabajo: la variante fraccionaria de la fórmula de Taylor y algunas aplicaciones elementales de dicha teoría.

Teorema 25. ***(Fórmula de Taylor)*** *Si $f \in L_1([a,b])$ con derivada $D^\alpha f$ sumable (en el sentido de la definición 15), entonces*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha-k-1} f(a)}{\Gamma(\alpha-k)} (x-a)^{\alpha-k-1} + R_n(x), \tag{3.10}$$

donde $n = [\alpha] + 1$ y $R_n(x) = (I^\alpha D^\alpha f)(x)$.

Demostración. Como $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$, entonces por teorema 20 y la representación (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
(I^{n-\alpha} f)(x) &= [I^n(D^n I^{n-\alpha} f)](x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[D^k(I^{n-\alpha} f)](a)}{k!} (x-a)^k \\
&= [I^n(I^{-\alpha} f)](x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{k+\alpha-n} f(a)}{k!} (x-a)^k \\
&= [I^n(D^\alpha I^\alpha) D^\alpha f)](x) + \tilde{P}_{n-1}(x) \\
&= [I^{n-\alpha}(I^\alpha D^\alpha f)](x) + \tilde{P}_{n-1}(x). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Sea $\tilde{P}_{n-1}(x) = (I^{n-\alpha}\psi)(x)$ donde $\varphi \in L_1([a,b])$. Reemplazando en (3.11) obtenemos la ecuación homogénea de Abel,

$$\begin{aligned}
\left[I^{n-\alpha}(f - I^\alpha D^\alpha f - \psi)\right](x) &= 0, \\
(f - I^\alpha D^\alpha f - \psi)(x) &= 0. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Pero,

$$\psi(x) = (D^{n-\alpha} \tilde{P}_{n-1})(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{k+\alpha-n} f(a)}{\Gamma(\alpha+k-n+1)} (x-a)^{k+\alpha-n}.$$

Así en (3.12) tenemos:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{k+\alpha-n} f(a)}{\Gamma(\alpha+k-n+1)} (x-a)^{k+\alpha-n} + (I^\alpha D^\alpha f)(x).$$

Ahora considerando la sustitución $m = n-1-k$,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha-m-1} f(a)}{\Gamma(\alpha-m)} (x-a)^{\alpha-m-1} + R_n(x)$$

□

Observaciones.

- En particular para $0 < \alpha < 1$, la fórmula (3.10) se reduce a:

$$f(x) = \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + (I^\alpha D^\alpha f)(x).$$

- Otra forma de escritura para la fórmula de Taylor es:

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{D^{\alpha+j} f(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j} + (I^{\alpha+n} D^{\alpha+n} f)(x).$$

En efecto, de la fórmula (3.10) donde $n-1 \leq \alpha < n$ tenemos $2n-1 \leq \alpha+n < 2n$ y

$$f(x) = \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{D^{\alpha+n-m-1} f(a)}{\Gamma(\alpha+n-m)}(x-a)^{\alpha+n-m-1} + (I^{\alpha+n} D^{\alpha+n} f)(x).$$

Haciendo la sustitución $k = n-m-1$,

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{D^{\alpha+j} f(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j} + (I^{\alpha+n} D^{\alpha+n} f)(x)$$

- Sea $\alpha = m$ con $m \in \mathbb{N}$, así en la ecuación (3.10) tenemos:

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + (I^m D^m f)(x).$$

Es decir, la fórmula clásica de Taylor con el residuo en forma integral.

3.4. Aplicaciones

Presentamos finalmente algunas funciones fácilmente representables en la fórmula de Taylor.

1. Sea $f(x) = (x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-2}$, $1 \leq \alpha < 2$, así $n = 2$ y se obtiene la fórmula:

$$f(x) = \frac{(D^{\alpha-1} f)(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + \frac{(D^{\alpha-2} f)(a)}{\Gamma(\alpha-1)}(x-a)^{\alpha-2} + R_2(x). \tag{3.13}$$

Como $(D^{\alpha-1} f)(x) = \Gamma(\alpha)$ y $(D^{\alpha-2} f)(x) == \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2)}(x-a) + \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(1)}$, entonces en la ecuación (3.13) tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)}(x-a)^{\alpha-2} + R_2(x) \\ &= (x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-2} + R_2(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_2(x) = 0$.

En este caso observamos que $(I^\alpha D^\alpha f)(x) \neq f(x)$, ya que

$$(I^\alpha D^\alpha f)(x) = R_2(x) = 0.$$

2. Sea la función $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}\ln(x-a)$.

   Supongamos $2 \leq \alpha < 3$, así $n = 3$ y

$$\begin{aligned}
(I^{1-\alpha} f)(x) &= \Gamma(\alpha)\left[\psi(\alpha) - \psi(1) + \ln(x-a)\right], \\
(D^{\alpha-1} f)(a) &= \Gamma(\alpha)\left[\psi(\alpha) - \psi(1)\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I^{2-\alpha} f)(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2)}(x-a)\left[\psi(\alpha) - \psi(2) + \ln(x-a)\right], \\
(D^{\alpha-2} f)(a) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I^{3-\alpha} f)(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3)}(x-a)^2\left[\psi(\alpha) - \psi(3) + \ln(x-a)\right], \\
(D^{\alpha-3} f)(a) &= 0.
\end{aligned}$$

   Reemplazando en la fórmula de Taylor tenemos,

$$(x-a)^{\alpha-1}\ln(x-a) = (x-a)^{\alpha-1}\left[\psi(\alpha) - \psi(1)\right] + R_3(x).$$

3. Sea $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$. De acuerdo a la tabla de integrales,

$$(I^\beta f)(x) = \frac{\Gamma(\alpha)e^{\lambda a}}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}{}_1F_1(\alpha;\alpha+\beta;\lambda x - \lambda a).$$

   Aquí ${}_1F_1(\alpha;\alpha+\beta;\lambda x - \lambda a)$ es la función hipergeométrica de Gauss que se define como:

$${}_1F_1(\alpha;\alpha+\beta;\lambda x - \lambda a) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_j}{(j^2)!}(\lambda x - \lambda a)^j, \qquad (\alpha)_j := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1) \text{ y } (\alpha)_0 := 1.$$

   Si $1 \leq \alpha < 2$ entonces $n = 2$ y por lo tanto,

$$f(x) = \frac{(D^{\alpha-1} f)(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + \frac{(D^{\alpha-2} f)(a)}{\Gamma(\alpha-1)}(x-a)^{\alpha-2} + R_2(x).$$

   Observemos que:

$$\begin{aligned}
(I^{1-\alpha} f)(x) &= \Gamma(\alpha)e^{\lambda a}{}_1F_1(\alpha;1;\lambda x - \lambda a), \\
(D^{\alpha-1} f)(a) &= \Gamma(\alpha)e^{\lambda a};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(I^{2-\alpha} f)(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)e^{\lambda a}}{\Gamma(2)}(x-a)_1F_1(\alpha;2;\lambda x-\lambda a),\\
(D^{\alpha-2} f)(a) &= 0.
\end{aligned}
$$

De esta manera obtenemos:

$$(x-a)^{\alpha-1}e^{\lambda x} = (x-a)^{\alpha-1}e^{\lambda a} + R_2(x).$$

En el caso de funciones elementales se hace necesario el uso de derivadas fraccionarias que se expresan a través de funciones especiales las cuales no presentamos por su complejidad (Ver Samko; Kilvas; Marichev [10]).

Bibliografía

[1] APÓSTOL, T. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, Colombia S.A. 1998.

[2] APÓSTOL, T. *Cálculus.* Volumen I. Editorial Reverté, Colombia S.A. 1998.

[3] BUCHELI, J. SOTELO, J. *Comparación de las derivadas de orden no entero según Louville y Marshout.* Trabajo de grado. Universidad del Cauca, Colombia, 2006.

[4] BURENKÓV, V.I. *Espacios Funcionales. Desigualdades Integrales Fundamentales, relacionadas con los Espacios Lp.* Editorial U.D.N. Moscú, 1989.

[5] BURENKÓV, V.I. *Espacios Funcionales. Espacios Lp.* Editorial U.D.N. Moscú, 1987.

[6] DEMIDÓVICH, V.P. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Nauka, Moscú,1990.

[7] KOLMOGÓROV, A.N. FOMÍN,S.V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Editorial Nauka. Moscú, 1989.

[8] KUDRIÁVTSEV, L.D.*Curso de Análisis Matemático.* Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú,1983.

[9] NATANSÓN, I.P. *Teoría de las Funciones de Variable Real.* Editorial Nauka, Moscú, 1960.

[10] SAMKO, S.G. KILVAS, A.A. MARICHEV, O.I. *Fractional Integrals and Derivaties.Theory and applications.* Editorial Gordon and Breach Science Publishers S.A, Amsterdam, 1993.