NORMAS EQUIVALENTES PARA LOS ESPACIOS DE MARCINKIEWICZ Y SU INCLUSIÓN EN LOS ESPACIOS Lp

JHON ELBER GÓMEZ DAZA

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2010

NORMAS EQUIVALENTES PARA LOS ESPACIOS DE MARCINKIEWICZ Y SU INCLUSIÓN EN LOS ESPACIOS Lp

JHON ELBER GÓMEZ DAZA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título en Matemáticas otorgado por la Universidad del Cauca

Ph.D. Francisco Enríquez
Director

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán
2010

Nota de Aceptación

Ph.Dr. Francisco Enríquez
Director

Dr. Jairo Roa
Comité seguimiento

Mg. Jhon Jairo Pérez
Comité de seguimiento

Popayán, Mayo 19 de 2010

Por su amor incondicional,
dedico este trabajo a mis padres.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por ser mi fortaleza en mi vida. Mis padres por su orientación y apoyo incondicional. A mi hermano que siempre me ha brindado su compañia en los momentos que más lo he necesitado.

Mi director el profesor Francisco Enríquez, a quien quiero manifestar mi más sincero agradecimiento, por sus valiosas indicaciones y por todo el tiempo que ha empleado en enseñarme a organizar este trabajo. Así mismo, deseo expresar mi gratitud hacia los profesores Jhon Jairo Pérez y Jairo Roa por su ayuda y colaboración en el desarrollo del mismo.

A mis profesores, que con sus enseñanzas han mantenido vivo en mi, ese estímulo que se necesita para culminar este ideal.

A todas las personas que de una u otra forma contribuyeron a la realización de este trabajo.

JHON ELBER GÓMEZ DAZA

Universidad del Cauca
Mayo de 2010

Tabla de Contenido

Introducción

Para el estudio de distintas propiedades de las funciones, con frecuencia se recurre a ciertos espacios lineales de funciones, entre los cuales un papel singular juegan los llamados espacios de Lebesgue L_p de funciones integrables y sus distintos subespacios (dotados de ciertas métricas). Así por ejemplo, en distintas preguntas de las EDDP, se usan ampliamente espacios de funciones diferenciables, tales como los espacios de Sóbolev W_p^l $(l \in N,\ 1 \leq p \leq \infty)$. Además, operadores integrales concretos han sido bien estudiados en marcos de la "L_p-teoría"; las transformaciones integrales fundamentales, tales como la transformación de Laplace, Fourier y Méllin, actúan de L_p hacia L_q, bajo ciertas condiciones sobre los parámetros p y q.

De otro lado, las necesidades de la teoría de la interpolación de operadores integrales lineales requieren de otras clases de funciones, cuyas características integrales se describen mediante otros mecanismos del análisis funcional. Tal es el caso de los espacios de Marcinkiewicz M_p, a veces llamados (en otra terminología) "espacios débiles de Lebesgue". La utilidad de tales espacios esta bien reflejada por ejemplo, en resultados tan importantes como los teoremas de Hausdorff-Yaung y Riesz-Torín, con ayuda de los cuales se dan condiciones suficientes para la existencia de las convoluciones de las funciones de la clase L_p.

El aparato teórico fundamental para el estudio de los espacios M_p son las funciones de distribución y los reordenamientos de funciones en orden descendente. Estas dos funciones son continuas, no crecientes y dependen de una variable no negativa; además dan una descripción cómoda del "tamaño" de una función de varias variables.

El presente trabajo está dedicado al estudio elemental de los espacios de Marcinkiewicz $M_p(E)$, $0 < p \leq \infty$, donde $E \subset R^N$, E es un conjunto Lebesgue medible y su interrelación con los espacios L_p.

El documento se divide en dos capítulos: en el primero se exponen brevemente ciertos elementos de la teoría de la medida de Lebesgue y de los espacios L_p, necesarios para el desarrollo del tema central. También se estudian previamente las propiedades fundamentales de la distribución λ_f de la función f.

El segundo capítulo está dedicado al reordenamiento decreciente f^* para la función f y se muestra que bajo ciertas condiciones, f^* es la inversa de λ_f. También se presenta la definición de los espacios de Marcinkiewicz y sus distintas normas, definidas en términos de f^* y λ_f, mostrando la equivalencia de las mismas. La interrelación entre los espacios M_p y L_p, como también las respectivas inclusiones entre estas clases, es abordada en este capítulo.

A manera de aplicación se cita el teorema de O'Neill, el cual precisa el teorema de Young para convoluciones.

Notaciones

$\mathbb{R}$	campo ordenado de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$.
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos.
$\mathbb{N}_0$	conjunto de enteros no negativos
$\forall$	para todo
$p.c.t$	para casi todo
$(A)^\circ$	interior del conjunto A
${}^cA$	complemento del conjunto A
$\approx$	equivalencia de funciones
$\equiv$	Equivalencia en conjuntos numéricos
$\sim$	Equivalencia de conjuntos
$Lp(E)$	espacio de funciones p-Lebesgue integrables en $E \subset \mathbb{R}^N,\ \ 0 < p \leq \infty$.
$\|[\cdot]\|$	parte entera
$\{\cdot\}$	parte fraccionaria
χ_{E}	Función característica del conjunto E
$\mu(E)$	medida de Lebesgue en $E \subset \mathbb{R}$
$\mu_N(E)$	medida de Lebesgue en $E \subset \mathbb{R}^N$

En lo que respecta a la teoría de la medida, consideramos solamente la medida integral de Lebesgue.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo pretende sentar las bases de la teoría de los espacios de Marcinkiewicz. Se presentarán algunos conceptos de la teoría de la medida e integración según Lebesgue y se culminará con las funciones de distribución y reordenamientos de funciones. Será un capítulo esencialmente expositorio, incluyendo sólamente aquellas demostraciones que se consideran relevantes para el posterior desarrollo del trabajo. No obstante, se proporcionarán las respectivas referencias bibliográficas.

1.1 La medida de Lebesgue

En la teoría de funciones de variable N-dimensional, el concepto de medida de un conjunto de puntos desempeña un rol vital. Esta noción generaliza el concepto de longitud de un intervalo, área de un rectángulo, volumen de un N-paralelepípedo con $N \geq 3$ y posee interesantes propiedades, como por ejemplo la continuidad y completitud.

Existen distintas formas de definir la medida de un conjunto del espacio euclídeo R^N. Así, con frecuencia se utilizan en análisis matemático y la teoría de las probabilidades, las medidas según Lebesgue, Borel, Jordan. En marcos del presente trabajo, se utilizará exclusivamente la construcción de la teoría de la medida e integral según Lebesgue. Además todos los conjuntos aquí mencionados serán subconjuntos de R^N. Se asume que el lector conoce los conceptos fundamentales de la teoría de la medida, los cuales juegan en este trabajo un papel auxiliar.

Conjuntos medibles

Como punto de partida de esta teoría se utilizarán intervalos cerrados $N-$dimensionales

$$I = \{x : a_j < x_j < b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\},$$

cuyo volumen o medida se considera conocida e igual al número

$$\upsilon(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Sea E un conjunto arbitrario sobre $\mathbb{R}^N$. Se denomina recubrimiento $S = S(E)$ de un conjunto E a todo sistema finito o numerable de intervalos $\{I_k\}$, la suma de los cuales contiene el conjunto E. La suma de longitudes de todos los intervalos $\{I_k\}$ que integran el recubrimiento $S = S(E)$ se denotará con el símbolo $\sigma(S)$
así pues

$$\sigma(S) = \sum_{I_k \in S} \upsilon(I_k) \leq \infty.$$

Definición 1.1.1 *Se denomina medida exterior del conjunto E a una cota inferior exacta de $\sigma(S)$ sobre el conjunto de todos los recubrimientos $S = S(E)$ del conjunto E.*

La medida exterior del conjunto E se denotará con el símbolo $\mu^*_{_N}(E)$. Así pues por definición

$$\mu^*_{_N}(E) = \inf_{S(E)} \sigma(S).$$

Teorema 1.1.2 *Para un conjunto arbitrario E y un número arbitrario $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto G que contiene E y es de tal índole que $\mu^*_{_N}(G) \leq \mu^*_{_N}(E) + \epsilon$, o sea*

$$\mu^*_{_N}(E) = \inf_{G \supset E} \mu^*_{_N}(G).$$

Demostración.
Dado un $\epsilon > 0$, escoja intervalos I_k tales que:

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon(I_k) \ \leq\ \mu^*_{_N}(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea I^*_k un intervalo que contiene I_k en su interior $(I^*_k)^\circ$ tal que:

$$\upsilon(I^*_k) \ \leq\ \upsilon(I_k) + \epsilon 2^{-k-1}.$$

Si $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I^*_k)^\circ$, entonces G es abierto y contiene E; además

$$\mu^*_{_N}(G) \ \leq\ \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon(I^*_k) \ \leq\ \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon(I_k) + \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \ \leq\ \mu^*_{_N}(E) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \qquad \blacksquare$$

Definición 1.1.3 *Un conjunto E se dice medible, si para cualquier número positivo ϵ existe un conjunto abierto G que contiene E y es de tal índole que la medida exterior de la diferencia $G \setminus E$ es inferior a ϵ. La medida exterior del conjunto medible E se llamará medida de dicho conjunto y se denotará con el símbolo $\mu_{_N}(E)$.*

Conjuntos no medibles

La existencia de conjuntos no medibles dentro de la teoría de Lebesgue depende del proceso de construcción dado, el uso del axioma de elección y fundamentalmente la propiedad de invariancia de la medida respecto a las traslaciones.

Ejemplo 1.1.4 (Vitali) *Sea A un conjunto acotado de números reales con $\mu(A) > 0$. Supongase por ejemplo que, $A \subset [-r, r)$ y defina sobre A la relación de equivalencia*

$$x \sim y, \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}.$$

Obviamente cada clase de equivalencia es de la forma $(x + \mathbb{Q}) \cap A$, luego es un conjunto numerable. Se deduce entonces, que existe una cantidad no numerable [1] de clases de equivalencia.

Sea V un conjunto obtenido seleccionando en cada clase un único representante (obsérvese que para ello se hace uso del Axioma de Elección) y considere para cada racional q del intervalo $[-2r, 2r)$, el conjunto $V_q = q + V$.

Se tiene entonces:

1. Los conjuntos V_q son disjuntos dos a dos.
   En efecto, si $x \in V_{q_1} \cap V_{q_2}$, entonces

   $$x = q_1 + a_1 = q_2 + a_2 \;\Rightarrow\; a_1 - a_2 \in \mathbb{Q},$$

   Es decir los puntos a_1, a_2 de V, están relacionados y esto implica por la construcción de V que $a_1 = a_2$ y por tanto, $q_1 = q_2$.

2. $A \subset \bigcup_{q \in I} V_q \subset [-3r, 3r)$, donde $q \in I = \mathbb{Q} \cap [-2r, 2r)$.

   En efecto, sea $x \in A$, entonces por la construcción de V existe un $a \in V$ tal que $x - a \in \mathbb{Q}$, o sea $x - a = q$. Luego,

   $$x = q + a \in q + V = V_q,$$

   donde $|q| = |x - a| < 2r$, puesto que x como a están en $[-r, r)$.

[1] Un conjunto A es numerable si A es equivalente a $\mathbb{N}$ ($A \sim \mathbb{N}$).

De igual modo si $x \in V_q$, o sea $x = q + a$ con $-2r \leq q < 2r$ y $a \in V$ $(-r \leq a < r)$, entonces $x \in [-3r, 3r)$.

Teniendo en cuenta lo anterior, se va a comprobar que

$$\mu\left(\bigcup_{q \in I} V_q\right) \neq \sum_{q \in I} \mu(V_q),$$

Por una lado, de la monotonía de la medida [2] se deduce que

$$0 < \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{q \in I} V_q\right) \leq 6r.$$

Por otro lado, como la medida es invariante por traslaciones, $\mu(V_q) = \mu(V)$ y por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{q \in I} \mu(V_q) &= 0, && \text{si } \mu(V) = 0 \\ \sum_{q \in I} \mu(V_q) &= \infty, && \text{si } \mu(V) > 0. \end{aligned}$$

Tanto en un caso como en otro, sería imposible que

$$\mu\left(\bigcup_{q \in I} V_q\right) = \sum_{q \in I} \mu(V_q).$$

Los siguientes dos teoremas dan propiedades de la medida de Lebesgue que son de fundamental importancia, los cuales se conocen como continuidad de la medida.

Teorema 1.1.5 *Si $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_k \cdots$, es una sucesión creciente de conjuntos medibles, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(B_k).$$

Se dice en este caso que μ es de medida continua.

Demostración.
Puesto que la sucesión de conjuntos es creciente, es claro que $\forall k \geq 2$,

$$\begin{aligned} B_k &= B_1 \sqcup (B_2 \setminus B_1) \sqcup \cdots \sqcup (B_k \setminus B_{k-1}),^{3} \quad \text{y} \\ \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k &= B_1 \sqcup (B_2 \setminus B_1) \sqcup \cdots \sqcup (B_k \setminus B_{k-1}) \cdots \end{aligned}$$

[2]**Monotonía de la medida:** Si $A \subset B$ con A, B conjuntos medibles, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$

Por lo tanto

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k) = \mu(B_1) + \sum_{k=2}^{\infty}\mu(B_k \setminus B_{k-1})$$
$$= \mu(B_1) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\mu(B_k \setminus B_{k-1}) = \lim_{k\to\infty}\mu(B_k). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.1.6 *Si $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k \cdots$, es una sucesión decreciente de conjuntos de medida finita, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty}\mu(B_k).$$

Demostración.
Sea la sucesión creciente de conjuntos medibles

$$(B_1 \setminus B_2) \subset (B_1 \setminus B_3) \subset \cdots \subset (B_1 \setminus B_k) \subset \cdots$$

De la proposición anterior resulta que

$$\mu\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_k)\right] = \lim_{k\to\infty}\mu(B_1 \setminus B_k) \quad \text{y} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_k) = B_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

Entonces teniendo en cuenta que los conjuntos son de medida finita, esto es

$$\mu(B_1 \setminus B_k) = \mu(B_1) - \mu(B_k),$$

resulta

$$\mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_k)\right], \text{ y}$$
$$\lim_{k\to\infty}\mu(B_1 \setminus B_k) = \mu(B_1) - \lim_{k\to\infty}\mu(B_k);$$

lo que implica que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty}\mu(B_k). \quad \blacksquare$$

---

[3] $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ significa que los conjuntos B_k son disjuntos dos a dos

Nota 1.1.7 *Es habitual presentar el resultado anterior con la hipótesis más débil: "alguno" de los conjuntos B_k es de medida "finita". Para probar que el resultado anterior se mantiene también con esta hipótesis, basta observar que por ser la sucesión de conjuntos decreciente, para cada índice j se tiene que*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=j}^{\infty} B_k.$$

Por tanto si $\mu(B_j) < \infty$ (lo que implica $\mu(B_k) < \infty$ para todo $k \geq j$), se deduce que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcap_{k=j}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k).$$

Los ejemplos siguientes demuestran que sin la hipótesis de que todos los conjuntos son de medida finita, el resultado anterior no es válido en general.

Ejemplos 1.1.8

1. Sea $B_k = (k, \infty)$; $k = 1, 2, \ldots$. Es claro que

   $$\mu(B_k) = \infty \implies \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \infty;$$

   en cambio

   $$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset \implies \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0.$$

2. Sean V y V_q los conjuntos construidos en el ejemplo de Vitali; considere $V_1, V_2, \ldots$ los conjuntos $\{V_q\}_{q\in\mathbb{Q}}$, y defina $A_k := \bigcup_{j\geq k} V_j$. Entonces, como la medida es invariante por traslaciones ($\mu(V) = \mu(V_k)$) es fácil comprobar que la sucesión decreciente de conjuntos $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ satisface que

   $$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset, \text{ y } \mu(A_k) \geq \mu(V) > 0.$$

   Luego

   $$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0, \text{ mientras que } \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \geq \mu(V) > 0.$$

1.2 Espacios $Lp(E)$

Entre las diferentes clases de espacios normados que se emplean en el análisis, una de las más importantes es la de los espacios de funciones sumables, para las cuales la potencia $p-$ésima ($p > 0$) de dichas funciones es integrable. Estas clases son conocidas como espacios L_p o de Lebesgue. A continuación se presenta su definición luego de algunos conceptos previos.

Definición 1.2.1 *Un espacio lineal X sobre el campo de escalares $\mathbb{R}$ se denomina espacio normado, si en él está definida una función $\|.\|_X : X \to [0, +\infty)$, que cumple los siguientes axiomas:*

1. $\|x\|_X \geq 0, \ \forall x \in X.$
2. $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \, \|x\|_X \, , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in X.$
3. $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \ \ \forall x, y \in X.$
4. *Si* $\|x\|_X = 0$, *entonces* $x = \theta$, *donde* θ *es el elemento neutro de* X.

Notas 1.2.2

1. El espacio lineal X se denomina *seminormado* si cumple los axiomas 1, 2, 3 y $\|.\|_X$ se denomina *seminorma*.
2. El espacio lineal X se denomina *cuasinormado* si cumple los axiomas 1, 2, 4 y en lugar de 3 cumple: $\forall \, x, y \in X, \ \exists \, C > 1 : \ \|x + y\|_X \leq C \left(\|x\|_X + \|y\|_X \right).$ En este caso $\|.\|_X$ se denomina *cuasinorma*.

Definición 1.2.3 *Todo espacio normado completo se denomina espacio de* Banach. *Todo espacio cuasinormado completo se denomina* cuasiBanach.

Definición 1.2.4 *Sea $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^N$. Se denomina conjunto de Lebesgue de la función f al conjunto,*

$$E_a := \{x \in E : f(x) > a\} ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

Se dice que una función $f : E \to \mathbb{R}$ con $E \subset \mathbb{R}^N$ es medible en $E \neq \emptyset$ si:

1. *E es medible.*
2. *Para todo $a \in \mathbb{R}$, E_a es medible.*

Definición 1.2.5 *Sean* $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^N$ *con* E *medible. Se denomina supremo escencial de la función* f *en* E *denotado como supvrai, a:*

$$\sup_{x\in E} vrai\, f(x) := \inf_{\substack{e\subset E\\ \mu(e)=0}} \sup_{x\in E\setminus e} f(x).$$

Definición 1.2.6 *Sean* $E \subset \mathbb{R}^N$*, E-medible,* $f : E \to \mathbb{C}$ *y* $0 < p \leq +\infty$*. Se dice que* $f \in Lp(E)$*, si:*

1. f *es medible en* E*,*

2. *Es finita la expresión* $\|f\|_{L_p(E)}$*, donde:*

$$\|f\|_{L_p(E)} := \begin{cases} \left(\int\limits_E |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & si \quad 0 < p < +\infty \\ \\ \sup\limits_{x\in E} vrai\, |f(x)|, & si \qquad p = +\infty. \end{cases}$$

Observaciones 1.2.7

1. El concepto de supremo esencial (denotado también como *essup*), difiere del supremo "habitual". Por ejemplo para la función de Dirichlet:

$$D(x) := \begin{cases} 1, si & x \in \mathbb{Q} \\ 0, si & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$\sup\limits_{\mathbb{R}} D(x) = 1$ pero $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} vrai\ D(x) = 0$ ya que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

2. El supremo esencial de una función no excede el supremo de la misma.

3. Si f es una función continua en un abierto de $\mathbb{R}^N$, entonces el supremo esencial coincide con el supremo habitual (Ver [2] pag. 46).

4. Los espacios L_p para $1 \leq p \leq +\infty$ son de Banach y cuasiBanach para $0 < p < 1$ con la norma $\|\cdot\|_{L_p(E)}$ (Ver [2] pags. 71-76).

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Introducimos aquí la siguiente definición:

$$p' := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{para} \quad 1 < p < \infty \\ \infty & \text{para} \quad p = 1 \\ 1 & \text{para} \quad p = \infty \end{cases}$$

Entonces siempre tenemos que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$. Los números p y p' se denominan conjugados.

Ahora se citan dos desigualdades integrales importantes y se demostrará la primera de ellas.

1.2.1 Desigualdad de Hölder

Teorema 1.2.8 *Sean* $E \subset \mathbb{R}^N$ *y* $1 \leq p \leq +\infty$*. Si* $f \in L_p(E)$ *y* $g \in L_{p'}(E)$*. Entonces* $fg \in L_1(E)$ *y es válida la desigualdad:*

$$\int_E |f(x)g(x)|\ dx \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}\,. \tag{1.1}$$

Para la demostración de esta desigualdad es necesario el siguiente lema citado sin demostración (Ver [2] pags. 55-56).

Lema 1.2.9 *Sea* $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$*, una función continua y estrictamente creciente. Además* $\varphi(0) = 0$*,* $\varphi(+\infty) = +\infty$*. Entonces para todo* $a, b \geq 0$*:*

$$ab \ \leq \int_0^a \varphi(x)\,dx \ + \int_0^b \varphi^{-1}(y)\,dy.$$

Consecuencia 1.2.10 *Si en la desigualdad anterior para* $p > 1$ *se hace* $\varphi(x) = x^{p-1}$*, se tiene que* $\varphi'(x) = (p-1)x^{p-2} > 0$*, entonces* φ *satisface las condiciones del lema 1.2.9, es decir para* $y = x^{p-1}$ *se tiene que* $x = y^{p'-1}$ *y luego de ciertos cálculos se prueba que:*

$$ab \ \leq \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}; \quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ p > 1.$$

Demostración del teorema 1.2.8
Con $\mu(E) = 0$, la desigualdad (1.1) se verifica trivialmente.
Por ello se considerará que $\mu(E) > 0$.

Sea $1 < p < +\infty$.

1. Si $\|f\|_{L_p(E)} = 0$, o $\|g\|_{L_{p'}(E)} = 0$ (esto se cumple si y sólo si $f \approx 0$ o $g \approx 0$) entonces $f \cdot g \approx 0$ en E [4]. Por lo tanto

   $$\int_E |f(x)g(x)|\,dx = 0;$$

   en consecuencia la desigualdad (1.1) se cumple trivialmente.

2. Sea $0 < \|f\|_{L_p(E)} < +\infty$ y $0 < \|g\|_{L_{p'}(E)} < +\infty$.

[4] La equivalencia se entiende en el sentido de la teoría de la medida: Dos funciones f y g son equivalentes, si la medida del conjunto de puntos donde las funciones difieren es cero. Se denota $f \approx g$.

Reemplazando en la consecuencia 1.2.10:

$$a = \frac{|f|}{\|f\|_{L_p(E)}} \quad b = \frac{|g|}{\|g\|_{L_{p'}(E)}},$$

se tiene:

$$\frac{|f|\,|g|}{\|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_{p'}(E)}} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{\|f\|^p_{L_p(E)}} + \frac{1}{p'}\,\frac{|g|^{p'}}{\|g\|^{p'}_{L_{p'}(E)}}.$$

Integrando esta desigualdad en E se obtiene:

$$\frac{\int\limits_E |f(x)g(x)|\;dx}{\|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_{p'}(E)}} \;\leq\; \frac{\int\limits_E |f(x)|^p\;dx}{p\,\|f\|^p_{L_p(E)}} \;+\; \frac{\int\limits_E |g(x)|^{p'}\;dx}{p'\,\|g\|^{p'}_{L_{p'}(E)}} \;=\; \frac{1}{p} \;+\; \frac{1}{p'} \;=\; 1.$$

Por lo tanto:

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|\;dx \;\leq\; \|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_{p'}(E)}\,.$$

Si $p = 1$, entonces $p' = +\infty$. Luego para casi todo $x \in E$ [5]

$$|f(x)g(x)| \leq \left(\sup_E vrai\,|g(x)|\right)|f(x)|\,.$$

Integrando esta desigualdad en E, se obtiene:

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|\;dx \;\leq\; \|g\|_{L_\infty(E)}\int\limits_E |f(x)|\,dx \;=\; \|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_\infty(E)}\,.$$

Si $p = +\infty$, entonces $p' = 1$. El proceso se hace análogamente a lo anterior.

■

De esta desigualdad se tiene una consecuencia importante.

Consecuencia 1.2.11 *Sean* $0 < p \leq q \leq +\infty$, $E \subset \mathbb{R}^N$ *y* $\mu(E) < +\infty$. *Si* $f \in L_q(E)$, *entonces* $f \in L_p(E)$, *es decir* $L_q(E) \subset L_p(E)$ *y se verifica la desigualdad:*

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq [\mu(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,\|f\|_{L_q(E)}\,. \tag{1.2}$$

[5] "Para casi todo" significa que el conjunto de elementos donde no se cumpla la condición citada es de medida cero. Se simboliza $(p.c.t)$.

Observaciones 1.2.12

1. Según lo anterior, a "mayor" índice p, menor es el espacio L_p (para $\mu(E) < +\infty$). Por eso el espacio L_∞ es el más "pequeño"; o sea para todo $p > 0$
$L_\infty(E) \subset L_p(E)$.

2. El resultado anterior puede fallar si $\mu_N(E) = \infty$, considere por ejemplo la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $(1, \infty)$. Claramente $f \in L^2$ pero $f \notin L^1$.

3. Si $\mu(E) = 0$ o $p = q$, la desigulday (1.2) se cumple trivialmente.

Por ello se considerará solamente $0 < \mu(E) < +\infty$ y $0 < p < q \leq +\infty$.

Demostración.

1. Sea $0 < p < q < +\infty$, $f \in L_q(E)$. Se verificará la desigualdad (1.2).
Aplicando la desigualdad de Hölder con índice $P = \frac{q}{p} > 1$, entonces: $P' = \frac{P}{P-1}$,

$$\|f\|^p_{L_p(E)} = \int_E |f(x)|^p \cdot 1\, dx \leq \left[\int_E (|f(x)|^p)^P dx\right]^{\frac{1}{P}} \left[\int_E 1^{P'}\, dx\right]^{\frac{1}{P'}},$$

$$\|f\|^p_{L_p(E)} \leq \left[\int_E |f(x)|^q\, dx\right]^{\frac{p}{q}} [\,\mu(E)]^{1-\frac{p}{q}}.$$

Elevando a la potencia $\frac{1}{p}$, se tiene:

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_q(E)} [\,\mu(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Luego $f \in L_p(E)$ y se cumple (1.2).

2. Sean $q = +\infty$ y $f \in L_\infty(E)$. Para todo $p > 0$,

$$|f(x)|^p = |f(x) \cdot 1|^p \leq \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^N} vrai\, |f(x)|\right]^p,$$

Integrando en $E \subset \mathbb{R}^N$ se tiene:

$$\int_E |f(x)|^p\, dx \leq \left(\int_E 1dx\right) \|f\|^p_{L_\infty(E)} = \mu(E)\, \|f\|^p_{L_\infty(E)}.$$

Es decir,

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq [\,\mu(E)]^{\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L_\infty(E)} < +\infty.$$

De 1 y 2 la desigualdad (1.2) queda demostrada. ■

1.2.2 Desigualdad de Minkowsky

Sean $f, g \in Lp(E)$ y $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces: $f + g \in Lp(E)$ y además:

$$\|f + g\|_{Lp(E)} \leq \|f\|_{Lp(E)} + \|g\|_{Lp(E)} .$$

La demostración de esta desigualdad se encuentra en ([10] pags. 112-113).

Teorema 1.2.13 *Si* $\mu_{_N}(E) > 0$ *entonces* $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_{L_\infty(E)}$.

Demostración. Sea $M = ||f||_{L_\infty(E)}$.
Si $M' < M$. Entonces el conjunto $A = \{x \in E : |f(x)| > M'\}$ tiene medida positiva y

$$||f||_{L_p(E)} \geq \left(\int_A |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq M' \left[\, \mu_{_N}(A)\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Como $[\, \mu_{_N}(A)]^{\frac{1}{p}} \to 1$ cuando $p \to \infty$, entonces $\liminf\limits_{p\to\infty} ||f||_{L_p(E)} \geq M'$,
lo que implica que

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_{L_p(E)} \geq M.$$

Además se tiene que

$$||f||_{L_p(E)} \geq \left(\int_E M^p\right)^{1/p} \geq M \left[\, \mu_{_N}(E)\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Por lo tanto

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_{L_p(E)} \geq M.$$

En consecuencia $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = M = \|f\|_{L_\infty(E)}$. ■

Observación 1.2.14 *El resultado anterior puede fallar si* $\mu_{_N}(E) = \infty$*; considérese por ejemplo la función constante* $f(x) = c$, $c \neq 0$ *en* $(0, \infty)$. *Claramente* $f \in L_\infty(E)$ *pero* $f \notin L_p(E)$ *para* $0 < p < \infty$.

En lo sucesivo (si no se dice lo contrario) E representará un conjunto medible.

1.3 Funciones de Distribución

Uno de los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo es la función de distribución. Con ella se puede tener idea del "tamaño" de una función f dada.

Definición 1.3.1 *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Se denomina función de distribución λ_f de la función f a:*

$$\lambda_f(t) := \mu_N \{x \in E : |f(x)| > t\}, \ (t \geq 0).^6 \tag{1.3}$$

De la definición se sigue directamente que:

1. $\lambda_{|f|} = \lambda_f$; o sea para todo $t \in [0, +\infty)$, $\lambda_{|f|}(t) = \lambda_f(t)$.
2. Si $g \approx f$ en E, entonces $\lambda_g \equiv \lambda_f$ en $[0, +\infty)$.
3. Si para casi todo $x \in E$, $|g(x)| \geq |f(x)|$, entonces para todo $t \geq 0$, $\lambda_g(t) \geq \lambda_f(t)$.
4. Si $a \in \mathbb{C} \setminus 0$. Entonces para todo $t \geq 0$, $\lambda_{af}(t) = \lambda_f\left(\frac{t}{|a|}\right)$.

Demostración.

1. El resultado se sigue directamente de la definición de λ_f.
2. Considérense los conjuntos

   $$E_t = \{x \in E : |f(x)| > t\} \ \text{ y } \ e = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}.$$

   Entonces

   $$\mu_N(E_t) = \lambda_f(t) \ \text{ y } \ \mu_N(e) = 0.$$

   Así,

   $$\begin{aligned}\{x \in E : |g(x)| > t\} &= \{x \in e : |g(x)| > t\} \cup \{x \in E \setminus e : |g(x)| > t\} \\ &= \{x \in e : |g(x)| > t\} \cup \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\}.\end{aligned}$$

   Dado que el conjunto $\{x \in e : |g(x)| > t\}$ es de medida cero, se obtiene:

   $$\begin{aligned}\lambda_g(t) &= \mu_N \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\} \\ &= \mu_N \{x \in e : |f(x)| > t\} + \mu_N \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\} \\ &= \mu_N \{x \in E : |f(x)| > t\} = \mu_N(E_t).\end{aligned}$$

   Por consiguiente $\lambda_g(t) = \lambda_f(t)$.

[6] *El índice $N \in \mathbb{N}$ en μ_N se escribe con el fín de resaltar que se trata de la medida de Lebesgue N-dimensional. Para $N = 1$, $\mu_1 \equiv \mu$. Lo anterior se hace necesario porque se observarán funciones tanto en R^N como en R cuyas distribuciones coinciden.*

3. Considere el conjunto $e = \{x \in E : |g(x)| \leq |f(x)|\}$. Entonces por hipótesis $\mu_N(e) = 0$ y los conjuntos

$$E_t(f) = \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\} \;\; y \;\; E_t(g) = \{x \in E \setminus e : |g(x)| > t\},$$

satisfacen que $E_t(f) \subset E_t(g)$ entonces $\mu_N[E_t(f)] \leq \mu_N[E_t(g)]$.
Luego,

$$\mu_N(E_t(f)) + \mu_N(\{x \in e : |f(x)| > t\}) \leq \mu_N(E_t(g)) + \mu_N(\{x \in e : |g(x)| > t\}),$$
$$\lambda_f(t) \leq \lambda_g(t).$$

4. De acuerdo a la definición de λ_f se tiene:

$$\lambda_{af}(t) = \mu_N\{x \in E : |af(x)| > t\} = \mu_N\left\{x \in E : |f(x)| > \frac{t}{|a|}\right\} = \lambda_f\left(\frac{t}{|a|}\right).$$

■

Se debe tener en cuenta que no siempre es posible calcular la función de distribución $\lambda_f(t)$. A continuación se citarán algunos ejemplos donde es posible calcular la función.

Ejemplo 1.3.2 *Sea* $E = \mathbb{R}_+$ *y* $f(x) = x^\gamma$ *con* $\gamma \in \mathbb{R}$. *Calcular* $\lambda_{x^\gamma}(t)$, $t \geq 0$.

1. Si $\gamma > 0$, *entonces*

$$E_t = \{x \in E : x^\gamma > t\} = \left\{x \in E : x > t^{1/\gamma}\right\} = \left(t^{1/\gamma}, +\infty\right).$$

Por consiguiente

$$\forall t \geq 0, \;\; \lambda_{x^\gamma}(t) = +\infty.$$

2. Si $\gamma = 0$ *entonces* $f(x) = 1$, *asi que* $E_t = \{x \in E : 1 > t\}$. *Esto es,*

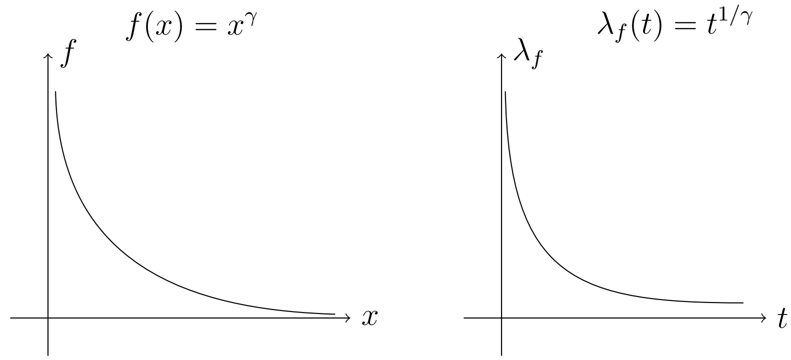
$$E_t = \begin{cases} \emptyset & si\ t \geq 1. \\ \mathbb{R}_+ & si\ 0 \leq t < 1. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \geq 1. \\ +\infty & si\ 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

3. Si $\gamma < 0$

$$E_t = \{x \in E : x^\gamma > t\} = \left\{x \in E : x < t^{1/\gamma}\right\} = \left(0,\, t^{1/\gamma}\right).$$

En consecuencia

$$\forall t > 0, \;\; \lambda_{x^\gamma}(t) = t^{1/\gamma}.$$



Interpretación geométrica de $\lambda_f(t)$ caso continuo

Ejemplo 1.3.3 *Supóngase que para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x) := g(|x|)$ donde la función g esta definida en $[0, +\infty)$, es medible y decreciente en $(0, \infty)$. Entonces para $t \geq 0$, $\lambda_f(t) = \upsilon_{_N}(\lambda_g(t))^N$, ($\upsilon_{_N}$ es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$).*

Considerando el conjunto,

$$e_t = \{u \geq 0 : |g(u)| > t\}, \ t \geq 0,$$

se tiene que e_t posee supremo por ser un conjunto acotado superiormente.

Tomando $r_t = sup \ e_t$ y dado que g decrece, se obtiene que $e_t = [0, r_t)$ *o* $e_t = [0, r_t]$ en cualquier caso $\mu(e_t) = r_t$; es decir $\lambda_g(t) = r_t$.

Pero $f(x) = g(u)$ con $u = |x|$, así que

$$\begin{aligned} E_t &= \{x \in E : |f(x)| > t\} = \{u \geq 0 : |g(u)| > t, \ u = |x|\} \\ &= e_t = \{x \in E : |x| < t\} = B_{r_t}, \end{aligned}$$

donde $B_{r_t} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r_t\}$ es la bola abierta de radio r_t y centro en el origen.

Entonces se tiene que $\mu_{_N}(E_t) = \mu_{_N}(B_{r_t}) = \upsilon_{_N} r_t^N$. Esto indica que $\lambda_f = \upsilon_{_N}(\lambda_g)^N$.

Ejemplos 1.3.4

1. Tomando en consideración los ejemplos (1.3.2) y (1.3.3), se sigue que para $\gamma < 0$, $\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \upsilon_{_N} t^{N/\gamma}$ (con $\lambda_{|x|^\gamma}(0) = \infty$).

2. Si la función $|x|^\gamma$ se considera en la bola B_r con $\gamma < 0$ se tiene:

$$E_t := \{x \in B_r : |x|^\gamma > t\} = \left\{|x| < r \wedge |x| < t^{\frac{1}{\gamma}}\right\} = B_r \cap B_{t^{\frac{1}{\gamma}}},$$

entonces

$$\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \upsilon_{_N} r^N & \text{si } 0 < r < t^{\frac{1}{\gamma}}. \\ \upsilon_{_N} t^{\frac{N}{\gamma}} & \text{si}\, r > t^{\frac{1}{\gamma}}. \end{cases} \qquad \text{es decir} \qquad \lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \upsilon_{_N} r^N & \text{si } 0 \le t \le r^\gamma. \\ \upsilon_{_N} t^{\frac{N}{\gamma}} & \text{si}\, t \ge r^\gamma. \end{cases}$$

3. Si la función $|x|^\gamma$ se considera en el complemento de la bola $({}^cB_R)$ con $\gamma < 0$ se tiene

$$E_t := \{x \in^c B_r : |x|^\gamma > t\} = \left\{|x| \ge r \wedge |x| < t^{\frac{1}{\gamma}}\right\} =^c B_r \cap B_{t^{\frac{1}{\gamma}}},$$

entonces

$$\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \upsilon_{_N} \left(t^{\frac{N}{\gamma}} - r^N\right) & \text{si } 0 < r < t^{\frac{1}{\gamma}} \\ 0 & \text{si}\, r > t^{\frac{1}{\gamma}} \\ \infty & \text{si}\, t = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \upsilon_{_N} \left(t^{\frac{N}{\gamma}} - r^N\right) & \text{si } 0 < t \le r^\gamma \\ 0 & \text{si}\, t \ge r^\gamma \\ \infty & \text{si}\, t = 0 \end{cases}$$

Teorema 1.3.5 *Sean* $N = 1$, $E = (0, +\infty)$, f *una función positiva, continua y estrictamente decreciente en* $(0, +\infty)$*; además* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$*. Entonces* $\lambda_f(0) = +\infty$ *y para* $t \in (0, +\infty)$, $\lambda_f(t) = f^{-1}(t)$ *lo que significa que* λ_f *también es continua y decrece estrictamente en* $(0, +\infty)$.

Demostración.
En efecto, si se considera el conjunto

$$E_t = \{x \in E : |f(x)| > t\} = \{x \in E : f(x) > t)\} = \left\{x \in E : x < f^{-1}(t)\right\} = \left(0, f^{-1}(t)\right),$$

se tiene que

$$\lambda_f(t) = \mu(E(t)) = f^{-1}(t).$$

Obsérvese ahora que $\lambda_f = f^{-1}$ es continua y decrece estrictamente en $(0, +\infty)$.
En efecto:

1. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión que converge a t en $(0, +\infty)$, entonces $f^{-1}(t_n) = a_n$, es decir $t_n = f(a_n)$. Como f es continua entonces $f(a_n) \to f(a)$ siempre que $a_n \to a$, esto es $f^{-1}(t_n) \to f^{-1}(t)$. Asi f^{-1} es continua.

2. Como f decrece, se tiene que si $x < y$ entonces $f(x) > f(y)$, ahora si t_1, t_2 son tales que $t_1 < t_2$ entonces $f^{-1}(t_1) = a$, $f^{-1}(t_2) = b$ luego $t_1 = f(a)$, $t_2 = f(b)$ y $f(a) < f(b)$ implican que $a > b$.
   Por lo tanto $f^{-1}(t_1) > f^{-1}(t_2)$ con $t_1 < t_2$ es decir f^{-1} decrece.

$\blacksquare$

Un caso especial donde la función de distribución λ_f se calcula facilmente se ilustra en el siguiente lema.

Lema 1.3.6 *Sean* $m \in \mathbb{N}$ $a_0 := 0$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$; $E_1, \ldots, E_m$ *subconjuntos medibles de* E *no vacios disjuntos dos a dos, tales que* $E = \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k$ *y*

$$f := \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E(k)}, \tag{1.4}$$

donde $\chi_{E(k)}$ *es la función característica del conjunto* E_k*. Entonces*

$$\forall t \in [a_m, +\infty), \quad \lambda_f(t) = 0 \ \ y$$

$$\forall t \in [a_{k-1}, a_k), \ \forall k \in \{1, \ldots, m\}, \ \lambda_f(t) = \sum_{l=k}^{m} \mu_N(E_l). \tag{1.5}$$

Demostración.
Para $t \in [a_m, +\infty)$ se tiene:

$$\lambda_f(t) = \mu_N \{x \in E : |f(x)| > t\} = \mu_N \left\{ x \in E : \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_k > t \right\} = \mu_N(\emptyset) = 0.$$

Esto indica que para $t \in [a_m, +\infty)$, $\lambda_f(t) = 0$.

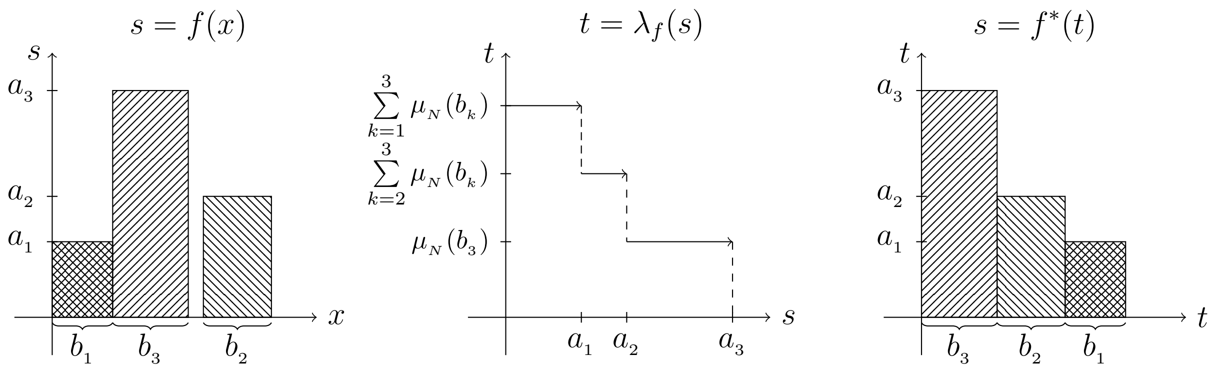
Ahora supóngase que $t \in [a_{k-1}, a_k)$ donde $k \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_f(t) &= \mu_N \{x \in E : |f(x)| > t\} = \mu_N \left\{ x \in E : \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_k > t \right\} \\ &= \mu_N \left(\bigsqcup_{l=k}^{m} E_l \right) = \sum_{l=k}^{m} \mu_N(E_l). \end{aligned}$$

Lo cual muestra que

$$\forall t \in [a_{k-1}, a_k) \ \text{ y } \ \forall k \in \{1, \ldots, m\}, \ \ \lambda_f(t) = \sum_{l=k}^{m} \mu_N(E_l).$$

■



Gráfica 1

Lema 1.3.7 *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ con $\mu_{_N}(E) < +\infty$, $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Entonces:*

1. $\lambda_f(0) = \mu_{_N}(E_1)$ *donde* $E_1 := \{x \in E : f(x) \neq 0\}$.

2. *La función* λ_f *decrece monótonamente en* $[0, +\infty)$.

3. $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda_f(t) = 0$.

4. *Para todo* $t \in \Big(0, \|f\|_{L_\infty(E)}\Big)$, $\lambda_f(t) > 0$. *Si* $\|f\|_{L_\infty(E)} < \infty$ *entonces para todo* $t \in \Big[\|f\|_{L_\infty(E)}, +\infty\Big)$, $\lambda_f(t) = 0$

5. *La función* λ_f *es continua por la derecha sobre* $[0, +\infty)$.

Demostración.

1. La propiedad (1) se sigue directamente de la definición.

2. Sea $t \geq 0$, $E_t := \{x \in E : |f(x)| > t\}$ entonces $\lambda_f(t) = \mu_{_N}(E_t)$.
   Si $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$, entonces $E_{t_2} \subset E_{t_1}$ y $\mu_{_N}(E_{t_2}) \leq \mu_{_N}(E_{t_1})$.
   Por consiguiente $\lambda_f(t_2) \leq \lambda_f(t_1)$.

3. Para toda sucesión creciente de números no negativos $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = +\infty$ se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, $E_{t_{k+1}} \subset E_{t_k}$ *y* $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{t_k} = \emptyset$.
   Por ello $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_f(t_k) = \lim\limits_{k \to +\infty} \mu_{_N}(E_{t_k}) = 0$, de donde se obtiene (3).

4. De acuerdo a la definición de supremo escencial se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu_{N}(E_t) = 0 &\iff \mu_{N}\{x \in E : |f(x)| > t\} = 0 \iff p.c.t\, x \in E,\ |f(x)| \leq t \\ &\iff \exists\ E' \subset E : \mu_{N}(E \setminus E') = 0 \iff \forall x \in E',\ |f(x)| \leq t \\ &\iff \sup_{x \in E'} |f(x)| \leq t \iff \inf \left\{ \sup_{x \in E'} |f(x)| : E \supset E' \ y\ \mu_{N}(E \setminus E') = 0 \right\} \leq t \\ &\iff \sup_{E} vrai|f(x)| \leq t \iff \|f\|_{L_\infty(E)} \leq t.\end{aligned}$$

5. Sea $t_0 \geq 0$. Para toda sucesión decreciente $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = t_0$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $E_{t_k} \subset E_{t_{k+1}} \subset E_{t_0}$ y

$$E_{t_0} = \{x \in E : |f(x)| > t_0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E : |f(x)| > t_k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{t_k}.$$

Por esto y según el teorema 1.1.6

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_f(t_k) = \lim_{k \to +\infty} \mu_{N}(E_{t_k}) = \mu_{N}(E_{t_0}) = \lambda_f(t_0).$$

■

Observación 1.3.8 *El lema 1.3.7 en general no es cierto si $\mu_{N}(E) = +\infty$, considere por ejemplo la función $f(x) = x^\gamma$ para $\gamma > 0$. Claramente de el ejemplo 1.3.2 $\lambda_f(t) = +\infty$ y para $t \geq 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda_f(t) = \infty$, en contradicción con el inciso 3 del lema anterior.*

A continuación se presentarán dos resultados que muestran que bajo ciertas condiciones es posible garantizar la continuidad de la función de distribución λ_f.

Definición 1.3.9 *Dado $t \geq 0$, sea:*

$$\begin{aligned}\lambda_f(t-0) &= \lim_{t_k \to \infty} \lambda_f(t_k) && \text{para } 0 \leq t_k < t, \\ \lambda_f(t+0) &= \lim_{t_k \to \infty} \lambda_f(t_k) && \text{para } 0 \leq t < t_k.\end{aligned}$$

Ellos denotan los límites de λ_f por la izquierda y derecha de t respectivamente.

Observación 1.3.10 *La función λ_f es continua en el punto t_0 si*

$$\lambda_f(t_0 - 0) = \lambda_f(t) = \lambda_f(t_0 + 0)$$

Proposición 1.3.11 *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, $\mu_{N}(E) < +\infty$, $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Entonces para todo $t \in (0, +\infty)$,*

$$\lambda_f(t+0) - \lambda_f(t-0) = \lambda_f(t) - \lambda_f(t-0) = \mu_{N}\{x \in E : |f(x)| = t\}.$$

Demostración.
El hecho de que la función de distribución es continua por la derecha se obtiene que

$$\lambda_f(t+0) = \lambda_f(t).$$

Ahora para $t_k \geq 0$, sea $e_{t_k} := \{x \in E : |f(x)| > t_k\}$. Entonces $\lambda_f(t_k) = \mu_{_N}(e_{t_k})$.

Además para $0 \leq t_k < t$ se tiene que

$$e_t \subset e_{t_k} \;\Rightarrow\; \mu_{_N}(e_{t_k} \setminus e_t) = \mu_{_N}(e_{t_k}) - \mu_{_N}(e_t) < +\infty.$$

Donde $e_{t_k} \setminus e_t = \{x \in E : t_k < |f(x)| \leq t\}$.

Para la sucesión creciente $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a t se satisface que la sucesión $\{e_{t_k} \setminus e_t\}$ decrece. Considérese entonces el conjunto

$$E_t := \bigcap_{k=1}^{\infty} (e_{t_k} \setminus e_t) = \{x \in E : |f(x)| = t\},$$

esto indica que

$$\mu_{_N}(E_t) = \mu_{_N}\{x \in E : |f(x)| = t\}.$$

Entonces,

$$\mu_{_N}(E_t) = \lim_{k\to\infty} \mu_{_N}(e_{t_k} \setminus e_t) = \lim_{k\to\infty} \mu_{_N}(e_{t_k}) - \mu_{_N}(e_t) = \lim_{k\to\infty} \lambda_f(t_k) - \lambda_f(t) = \lambda_f(t-0) - \lambda_f(t).$$

Luego,

$$\lambda_f(t-0) - \lambda_f(t+0) = \lambda_f(t-0) - \lambda_f(t) = \mu_{_N}\{x \in E : |f(x)| = t\}. \qquad \blacksquare$$

Consecuencia 1.3.12 *La función λ_f es continua en el punto $t \in (0, +\infty)$ si y sólo si*

$$\mu_{_N}\{x \in E : |f(x)| = t\} = 0.$$

Proposición 1.3.13 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y de medida finita y f una función analítica en Ω, f no constante. Entonces la función de distribución λ_f es continua y decrece estrictamente en $[0, +\infty)$ (ver [3] pag. 33).*

Lema 1.3.14 *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, f y f_k $(k \in \mathbb{N})$ funciones medibles no negativas en E y además p.c.t $x \in E$ $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$. Entonces para todo $t \in [0, +\infty)$,*

$$\lambda_{f_k}(t) \leq \lambda_{f_{k+1}}(t) \leq \lambda_f(t), \quad \lim_{k\to+\infty} \lambda_{f_k}(t) = \lambda_f(t).$$

Demostración.
Sea $t \geq 0$, y $k \in \mathbb{N}$, considérense los conjuntos:

$$E_t := \{x \in E : |f(x)| > t\} \quad \text{y} \quad E_t^{(k)} := \{x \in E : f_k(x) > t\}.$$

Entonces

$$E_t^{(k)} \subset E_t^{(k+1)} \subset E_t \quad \text{y} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_t^{(k)} = E_t.$$

De aqui se sigue que

$$\forall t \in [0, +\infty), \quad \lambda_{f_k}(t) \leq \lambda_{f_{k+1}}(t),$$

y de acuerdo con el teorema 1.1.6 se obtiene

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_{f_k}(t) = \lim_{k \to +\infty} \mu_N \left(E_t^{(k)}\right) = \mu_N(E_t) = \lambda_f(t). \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.3.15 *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, f una función medible en E. Entonces para $0 < p < +\infty$,*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \lambda_f(t) dt\right)^{1/p} = \left(-(S) \int_0^{+\infty} t^p d[\lambda_f(t)]\right)^{1/p}, \tag{1.6}$$

y para $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \sup\left(supp\, \lambda_f\right). \tag{1.7}$$

En particular para $p = 1$,

$$\|f\|_{L_1(E)} = \|\lambda_f\|_{L_1(0,+\infty)}.$$

Demostración.
PASO 1 Supóngase inicialmente que f satisface las condiciones del lema 1.3.6, o sea

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E(k)},$$

entonces para $0 < p < +\infty$,

$$\int_E |f|^p dx = \sum_{k=1}^{m} a_k^p \mu_N(E_k).$$

De acuerdo con el lema (1.3.6) y las propiedades de la integral de Lebesgue-Stiltjes [7]

$$-(S)\int_0^\infty t^p d[\lambda_f(t)] = -\sum_{k=1}^m a_k^p\,[\lambda_f(a_k+0)-\lambda_f(a_k-0)] = \sum_{k=1}^m a_k^p\,\mu_{_N}(E_k).$$

Además de acuerdo con el lema 1.3.6,

$$p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)\,dt = \sum_{k=1}^m p\int_{a_{k+1}}^{a_k} t^{p-1}\left(\sum_{l=k}^m \mu_{_N}E_l\right)dt = \sum_{k=1}^m \left(a_k^p - a_{k-1}^p\right)\sum_{l=k}^m \mu_{_N}(E_l).$$

Utilizando la transformación de Abel [8] obtenemos

$$p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)\,dt = \sum_{k=1}^m a_k^p\,\mu_{_N}(E_k)$$

De esta forma se sigue la igualdad (1.6).

Para $p=+\infty$ la igualdad (2.3) se concluye directamente del lema 1.3.6 ya que

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \inf_{\substack{e\subset E\\ \mu(E)=0}}\ \sup_{x\in E\setminus e}|f(x)| = \inf_{\substack{e\subset E\\ \mu(E)=0}}\ \sup_{x\in E\setminus e}\left|\sum_{k=1}^m a_k\chi_k\right| = a_m.$$

$$\begin{aligned}\sup\left(\operatorname{supp}\lambda_f(t)\right) &= \sup\left(\overline{\{t\geq 0:\lambda_f(t)>0\}}\right)\\ &= \sup\left(t\in[a_{k-1},a_k],\ \ k\in\{1,\cdots,m\}\right) = a_m.\end{aligned}$$

PASO 2 Ahora sea f una función medible arbitraria en E. Puede construirse una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como las usadas en el PASO 1 tales que:

$$p.c.t\ x\in E,\ \ f_k(x)\ \leq\ f_{k+1}(x),\ \ \text{y}\ \ \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x),\ \ (*)$$

Por ejemplo tales funciones en $(*)$ pueden ser:

$$f_k(x) := 2^{-k}|[2^k|f(x)|]|\chi_{_{E(k)}}(x)$$

[7]Sea $f\in C\left([a,b]\right)$ y g función escalonada en los intervalos $(a,c_1),\ldots,(c_m,b)$ donde $c_0=a<c_1<\cdots<c_m<c_{m+1}=b$. Entonces $\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k+n}^{m+1}\left[g(c_k+0)-g(c_k-0)\right]f(c_k)$.

[8]Transformación de Abel (Fórmula de sumación por partes), Sean $u_1,u_2,u_3,\ldots v_1,v_2,v_3,\ldots$ números arbitrarios, $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$, n y p números reales cualesquiera. Entonces es válida la identidad: $\sum_{k=n}^{m+p} v_k\left(S_k-S_{k-1}\right) = S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k\left(v_{k+1}-v_K\right)$.

donde $\chi_{_{E(k)}}(x)$ es la función característica del conjunto

$$E(k) := \{x \in E : |x| \leq k,\ |f(x)| \leq k\}.$$

En el apéndice A se detallará un ejemplo de la sucesión $\{f_k\}$.

Así del lema 1.3.14 se sigue que

$$\forall t \in [0, +\infty), \quad \lambda_{f_k}(t)\ \leq\ \lambda_f(t)\ \text{ y }\ \lim_{k\to\infty} \lambda_{f_k}(t) = \lambda_f(t)$$

y para $0 < p < +\infty$ se tiene que,

$$\int\limits_E |f_k|^p\,dx = p\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\lambda_{f_k}(t)\,dt = -\int\limits_0^{+\infty} t^p\,d\left[\lambda_{f_k}(t)\right];$$

pasando al límite cuando $k \to +\infty$ en la igualdad y de acuerdo al teorema de Levi [9] se tiene (1.6).

Para $p = +\infty$ es suficiente mostrar que $\|f\|_{L_\infty(E)} = \lim\limits_{k\to+\infty} \|f_k\|_{L_\infty(E)}$.
En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \|f_k\|_{L_\infty(E)} &= \lim_{k\to+\infty} \sup\left(\operatorname{supp}\lambda_{f_k}\right) = \lim_{k\to+\infty} \sup \overline{\{t > 0 : \lambda_{f_k}(t) > 0\}} \\ &= \sup \overline{\{t > 0 : \lambda_f(t) > 0\}} = \sup\left(\operatorname{supp}\lambda_f\right) = \|f\|_{L_\infty(E)}.\end{aligned}$$

El paso al límite ocurre por:

1. si una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de un conjunto Ω es no decreciente ($A_n \subset A_{n+1}$ para todo n), entonces es convergente, (ver [4] pag. 145) $(\limsup\limits_n A_n = \liminf\limits_n A_n = \lim\limits_n A_n)$ y $\lim\limits_n A_n = \bigcup\limits_n A_n$.

2. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{t \in [0,\ \infty) : \lambda_{f_k}(t) > 0\} = \{t \in [0,\ \infty) : \lambda_f(t) > 0\}.$

■

[9] $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0,\ \forall x \in E\ \ f_k(x) \leq f(x)$ con f_k, f funciones positivas y $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ entonces $\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_E f_k(x)\,dx.$

1.4 Reordenamiento de conjuntos

Dentro de los conceptos importantes para el estudio de los espacios de Marcinkiewicz son los reordenamientos; aquí se pretende mostrar a través de su caso discreto la forma como se ordenan los conjuntos de una manera sencilla y clara. Se estará interesado en sucesiones finitas de números no negativos, las cuales denotaremos por (a),(b),...donde:

$$(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n\},$$

$$(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n\}.$$

Por ejemplo en (a) cuando j asume los valores $1, 2, \dots, n$, se definirá una función de permutación $\phi(j)$ como una función que lleva cada uno de los valores $1, 2, \dots, n$, una vez sobre (a) cuando j varia, es decir:

$$a_{\phi(j)} = a'_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

entonces $(a') = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$ describirá un reordenamiento de (a).
Por ejemplo un reordenamiento de

$$(a) = \{3, 5, 2, 1\},$$

será:

$$(a') = \{5, 1, 2, 3\}.$$

Se denotará como $(\bar{a})$ al conjunto (a) ordenado en forma ascendente, esto es:

$$\bar{a}_1 \leq \bar{a}_2 \leq \dots \leq \bar{a}_n.$$

Teorema 1.4.1 (Desigualdad de reordenamientos) *Si (a) y (b) son dos sucesiones finitas con igual cantidad de elementos, entonces $\sum a_j b_j$ es máxima cuando ambas son monótonas en orden ascendente (descentente) y mínima cuando una es monótona en orden ascendente y la otra en orden descendente, es decir:*

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \, \bar{b}_{n+1-j} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \, b_j \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \, \bar{b}_j$$

Demostración. Se puede observar que $\sum a_j b_j$ no se altera si consideramos (a) en orden ascendente, pues basta renombrar los elementos de (a) de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \, b_j = a_1 \, b_1 + \cdots + a_n \, b_n = \bar{a}_1 \, b_1 + \cdots + \bar{a}_n \, b_n,$$

entendiendo que los elementos de (b) son diferentes, entonces dados los números $a_j < a_k$ donde $b_j < b_k$ se tiene que:

$$\begin{aligned} a_j\, b_k + a_k\, b_j - (a_j\, b_j + a_k\, b_k) &= a_k\ (b_j - b_k) - a_j\ (b_j - b_k) \\ &= (a_k - a_j)\ (b_j - b_k) \leq 0. \end{aligned}$$

o sea,

$$a_j\, b_k + a_k\, b_j \leq a_j\, b_j + a_k\, b_k.$$

Esto indica que se ha disminuido la $\sum a\, b$ al cambiar b_j por b_k,
Si ahora se considera el producto $a_l\, b_l$ entonces:

$$\begin{aligned} &a_j\, b_k + a_k\, b_j + a_l\, b_l \leq a_j\, b_j + a_k\, b_k + a_l\, b_l && \text{si } b_j < b_l \\ &a_j\, b_k + a_k\, b_l + a_l\, b_j \leq a_j\, b_k + a_k\, b_j + a_l\, b_l && \text{si } b_k < b_l \\ &a_j\, b_l + a_k\, b_k + a_l\, b_j \leq a_j\, b_k + a_k\, b_l + a_l\, b_j; && \end{aligned}$$

así que con un número finito de pasos $\left(\text{a lo mas } \frac{n(n+1)}{2}\right)$ se tiene que $\bar{b}$ está ordenada en forma decreciente, esto es:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j\, \bar{b}_{n+1-j} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j\, b_j.$$

De igual forma se demuestra la otra desigualdad.
Solo basta considerar los números $a_j \leq a_k$ donde $b_j > b_k$. ■

Con este argumento se establece una variante del teorema que también se puede usar. Si $\sum ab' \leq \sum ab$ para todo reordenamiento (b') de (b) entonces (a) y (b) estan ordenadas en forma ascendente (descentente).

Aplicación
Sean $(\bar{x})$ y $(\bar{y})$ dos sucesiones finitas de números con igual cantidad de elementos donde (y') un reordenamiento de (y). Probar que

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - y'_k)^2\,.$$

Solución
Como (y') es un reordenamiento de (y), entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \geq \sum_{k=1}^{n} x_k\, y'_k,$$

sumando la expresión $\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2$ a ambos miembros de la desigualdad se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \leq \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k\, y'_k,$$

como

$$\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} {y'_k}^2,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k + \sum_{k=1}^{n} {y_k}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k\, y'_k + \sum_{k=1}^{n} {y'_k}^2.$$

Por lo tanto se concluye que

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - y'_k)^2 .$$

Capítulo 2

Espacios de Marcinkiewicz

Józef Marcinkiewicz (1910-1940), matemático Polaco nacido en Cimoszka, Bialystok, tenía la intuición y técnica excepcionalmente fuertes en variable real. Los resultados por él obtenidos en la teoría de funciones han sido ampliados a funciones de varias variables dando un fuerte empuje a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Sus principales trabajos se pueden clasificar en campos tan variados de la matemática como:

- funciones de variable real,
- series trigonométricas,
- interpolación por polinomios trigonométricos,
- funciones de operadores,
- series ortogonales,
- funciones de variable compleja,
- teoría de probabilidades.

2.1 Reordenamiento de funciones

Al igual que las funciones de distribución, los reordenamientos de funciones serán la base de los espacios estudiados en este trabajo, ellas ordenan en forma decreciente la función dada. De igual forma se observará que la función de reordenamiento f^* está relacionada con la función de distribución λ_f mediante el hecho de que f^* es "aproximadamente igual" a λ_f^{-1}.

Definición 2.1.1 *Sea $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Se denomina función de reordenamiento de f en orden decreciente a la función,*

$$f^*(t) := \inf \{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) \leq t\}, \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

De la definición se sigue directamente que:

1. Para $t \in [0, \infty)$, $|f|^*(t) = f^*(t)$.

2. Si $g \approx f$ en E, entonces para $t \in [0, +\infty)$, $g^*(t) = f^*(t)$.

3. Si la función λ_f es positiva, continua y estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$. Entonces $f^*(t) = \lambda_f^{-1}(t)$.

4. Si $a \in \mathbb{C} \setminus 0$. Entonces para todo $t \geq 0$, $(af)^*(t) = |a| f^*(t)$.

Demostración.

1. Recuerde que $\lambda_{|f|} = \lambda_f$, así de la definición de reordenamiento se tiene:

$$|f|^*(t) = \inf \left\{s \in [0, +\infty) : \lambda_{|f|}(s) \leq t\right\} = \inf \{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) \leq t\} = f^*(t),$$

2. Obsérvese que

$$g^*(t) = \inf \{s \in [0, +\infty) : \lambda_g(s) \leq t\},$$

como $g \approx f$ entonces de las propiedades de las funciones de distribución se tiene que $\lambda_g \equiv \lambda_f$, es decir

$$g^*(t) = \inf \{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) \leq t\} = f^*(t).$$

3. Como λ_f admite inversa,

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \inf \{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) \leq t\} = \inf \left\{s \in [0, +\infty) : s > \lambda_f^{-1}(t)\right\} \\ &= \inf \left(\lambda_f^{-1}(t), +\infty\right) = \lambda_f^{-1}(t); \end{aligned}$$

4. De acuerdo a la definición de f^* y las propiedades de λ_f se tiene que:

$$\begin{aligned} (af)^*(t) &= \inf \{s \in [0, \infty) : \lambda_{af}(s) \leq t\} = \inf \left\{s \in [0, \infty) : \lambda_f \left(\frac{s}{|a|}\right) \leq t\right\} \\ &= \inf \{u \in [0, \infty) : |a| \lambda_f(u) \leq t\} = |a| \inf \{u \in [0, \infty) : \lambda_f(u) \leq t\} = |a| f^*(t). \end{aligned}$$

■

Al igual que λ_f, f^* no siempre puede escribirse explícitamente. Las siguientes propiedades ilustran algunos casos donde es posible calcular f^*.

Ejemplo 2.1.2 *Es fácil verificar que:* $(|x|^\alpha)^*(t) = \left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\alpha/N}$, *(*$\upsilon_N-$*Volumén de la bola unitaria en* $\mathbb{R}^N$*) para* $N \geq 1$, $\alpha < 0$ *y* $t \geq 0$.

En efecto, de acuerdo con el ejemplo 1.3.3 se tiene que:

$$\lambda_{|x|^\alpha}(t) = \upsilon_N t^{N/\alpha} \text{ para } N \geq 1,\ \alpha < 0,\ t > 0.$$

Así $\lambda_{|x|^\alpha}(t)$ es una función continua y decreciente, esto es:

$$\begin{aligned}(|x|^\alpha)^*(t) &= \inf\left\{s \in [0,\infty) :\ \lambda_{|x|^\alpha}(s) \leq t\right\} = \inf\left\{s \in [0,\infty) :\ \upsilon_N s^{N/\alpha} \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{s \in [0,\infty) :\ s^{N/\alpha} \leq \upsilon_N^{-1} t\right\} = \inf\left\{s \in [0,\infty) :\ s \geq \left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\alpha/N}\right\} \\ &= \inf\left[\left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\alpha/N}, \infty\right) = \left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\alpha/N}.\end{aligned}$$

Lema 2.1.3 *Sean* $m \in \mathbb{N}$, $a_0 := 0$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$; $E_1, \ldots, E_m$ *subconjuntos medibles de* E *no vacios disjuntos dos a dos, tales que* $E = \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k$ *y* $f := \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E(k)}$, *donde* $\chi_{E(k)}$ *es la función característica del conjunto* E_k*. Entonces*

$$\forall t \in [c_1, +\infty),\quad f^*(t) = 0,\quad y$$

$$\forall t \in [c_{k+1}, c_k),\quad con\ \ k \in \{1, \ldots, m\},\quad f^*(t) = a_k;$$

donde

$$c_k = \sum_{l=k}^{m} \mu_N(E_l),\quad con\ \ k \in \{1, \ldots, m\},\ c_{m+1} := 0.$$

Observación 2.1.4

$$c_{k+1} = \sum_{l=k+1}^{m} \mu_N(E_l) < \sum_{l=k}^{m} \mu_N(E_l) = c_k.$$

Demostración.
Recuerde del lema 1.3.6 que:

$$\forall s \in [a_m, \infty],\quad \lambda_f(s) = 0 \text{ y}$$

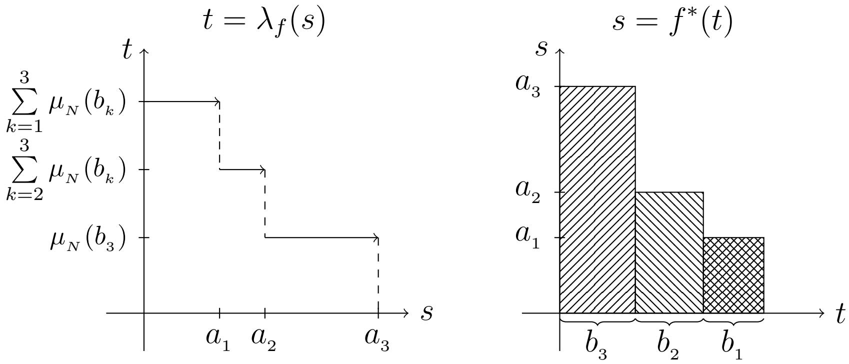
$$\forall s \in [a_{k-1}, a_k),\ k \in \{1, 2, \cdots, m\},\ \lambda_f(s) = \sum_{l=k}^{m} \mu_N(E_l).$$

observe entonces que para

$$s \geq a_0, \;\; \lambda_f(s) \leq c_1 = \sum_{l=1}^{m} \mu_{_N}(E_l); \;\; \text{así} \;\; f^*(t) = a_0 = 0,$$

$$s \geq a_k, \;\; \lambda_f(s) \leq c_{k+1} = \sum_{l=k+1}^{m} \mu_{_N}(E_l); \;\; \text{así} \;\; f^*(t) = a_k.$$

■



Gráfica3

Lema 2.1.5 *Sea $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Entonces:*

1. $f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)}$ *y para todo* $t \in (0, +\infty)$, $\; 0 \leq f^*(t) < +\infty$.

2. *La función* f^* *decrece en* $[0, +\infty)$.

3. *Si* $\mu_{_N}(E_1) < +\infty$, *donde* $E_1 := \{x \in E : f(x) \neq 0\}$. *Entonces para* $t \in [0, \mu_{_N}(E_1))$, $f^*(t) > 0$ *y para* $t \in [\mu_{_N}(E_1), +\infty)$, $\; f^*(t) = 0$.

4. *Para* $t \in [0, +\infty)$, $\; \lambda_f(f^*(t)) \leq t$.

5. *La función* f^* *es continua por la derecha sobre* $[0, +\infty)$.

Demostración.

1. De acuerdo a la definición de f^* se tiene que:

$$\begin{aligned} f^*(0) &= \inf\{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) \leq 0\} = \inf\{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) = 0\} \\ &= \inf\{s \in [0, +\infty) : \mu_{_N}\{x \in E : |f(x)| > s\} = 0\} = \|f\|_{L_\infty(E)}.^1 \end{aligned}$$

Ahora como $\lim\limits_{s \to +\infty} \lambda_f(s) = 0$, entonces:

$$\forall t > 0, \exists s_0 \in (0, +\infty) : \; \forall s \geq s_0 \;\; \lambda_f(s) \leq t.$$

[1] Puede verificarse que $\sup\limits_{x \in E} vrai\, |f(x)| = \inf\{s \in [0, +\infty) : \mu_{_N}\{x \in E : |f(x)| > s\} = 0\}$ (ver [2] pags. 45-46).

Por esto,

$$f^*(t) = \inf\{s \in [0,+\infty) : \lambda_f(s) \leq t\} \leq s_0.$$

2. Para $0 < t_1 < t_2 < +\infty$ se tiene:

$$\{s \in [0,+\infty) : \lambda_f(s) \leq t_1\} \subset \{s \in [0,+\infty) : \lambda_f(s) \leq t_2\}.$$

Entonces

$$f^*(t_2) \leq f^*(t_1).$$

3. Puesto que la función λ_f es decreciente, entonces la condición $f^*(t) = 0$ es equivalente a que

$$\forall s > 0, \ \ \lambda_f(s) \leq t.$$

También de la condición $\lim\limits_{s\to 0+} \lambda_f(s) \ \leq t$, y de la continuidad por la derecha de λ_f se tiene que:

$$\lim_{s\to 0+} \lambda_f(s) = \lambda_f(0) = \mu_{_N}(E_1).$$

Por consiguiente,

$$f^*(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \ \mu_{_N}(E_1) \leq t.$$

4. De acuerdo con la definición de f^*,

$$\forall s > f^*(t) \ \text{ se tiene que } \ \lambda_f(s) \leq t.$$

Pero por lema 1.3.7, inciso 3 se tiene que

$$\lambda_f\left[f^*(t)\right] \leq \lambda_f(s) \leq t.$$

5. Sea $t_0 \in [0,+\infty)$. Entonces de acuerdo con (1) se tiene que:

   (a) $f^*(t_0) < \infty$.

   (b) $f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)} = \infty$.

(a) Si $f^*(t_0) = 0$ entonces para todo $t \geq t_0$, $f^*(t) = 0$ (puesto que f^* es no negativa y decreciente), por lo tanto f^* es continua a la derecha del punto t_0.

Suponga que $f^*(t_0) > 0$ y que no es continua a la derecha del punto t_0. Como la función f^* decrece, significa que

$$\lim_{t\to t_0+0} f^*(t) \ = \ \sup_{t>t_0} f^*(t) \ =: a \ < \ f^*(t_0),$$

es decir, para todo $t > t_0$, $f^*(t) < a$.

Como la función λ_f decrece, entonces $\lambda_f(a) \leq \lambda_f(f^*(t)) \leq t$, lo que implica que $\lambda_f(a) \leq t_0$. [2]

De la definición de reordenamiento, se tiene que $f^*(t_0) \leq a$, con lo cual se llega a una contradicción.

(b) Si $f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)} = \infty$.
Suponga que $f^*(0)$ no es continua a la derecha de 0. Como la función f^* decrece, entonces

$$\lim_{t\to 0+} f^*(t) = \sup_{t>0} f^*(t) =: a < f^*(0) = +\infty,$$

esto indica que para todo $t > 0$, $f^*(t) < a$. Como la función λ_f decrece, entonces $\lambda_f(a) \leq \lambda_f(f^*(t)) \leq t$, lo cual implica que $\lambda_f(a) \leq 0$.

Por definición de reordenamiento $f^*(0) \leq a$, lo cual es una contradicción.

Se ha probado que $\lim_{t\to 0+} f^*(t) = \infty$, lo que en este lema significa que la función es continua a la derecha del punto 0.

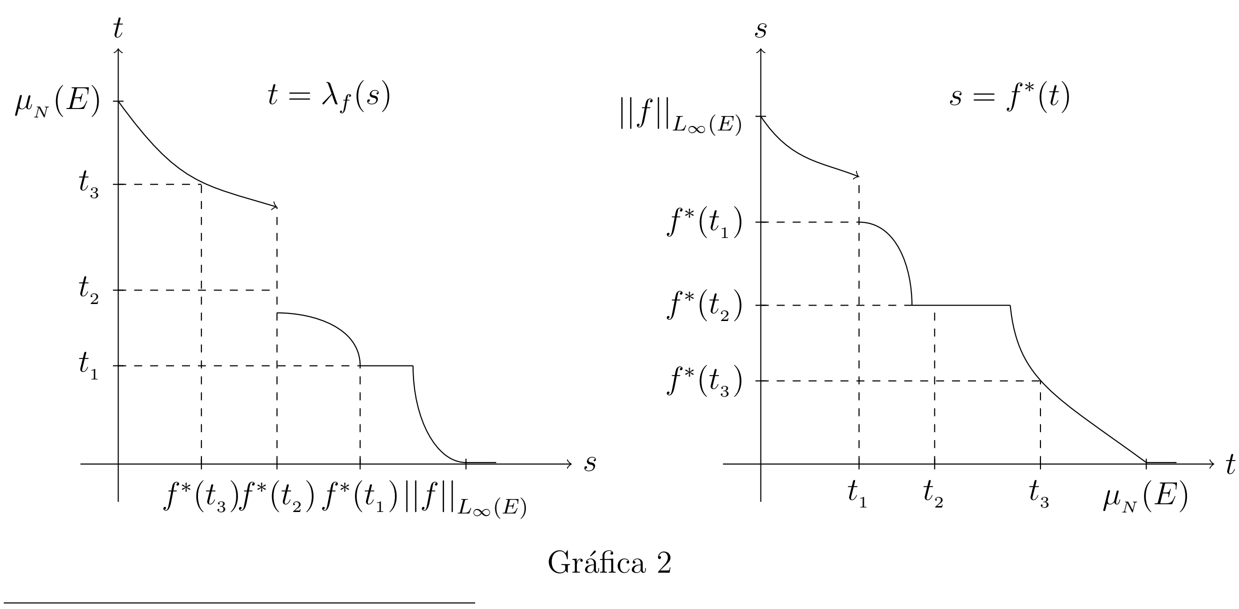
■

La siguiente gráfica ilustra que:

$$\lambda_f(f^*(t_1)) = t_1, \quad \lambda_f(f^*(t_2)) < t_2, \quad \lambda_f(f^*(t_3)) = t_3.$$

Este hecho muestra que la función f^* puede ser discontinua y puede ser tal que

$$\lambda_f(f^*(t)) < t.$$



Gráfica 2

[2]Dado el conjunto $I = \{t : t > t_0\}$, entonces $t_0 = \inf I$. Además si para todo $t \in I$, $\lambda_f(a) < t$ entonces $\lambda_f(a) \leq t_0$.

Ejemplo 2.1.6 *Sea $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible en E. Para que f^* sea continua es necesario y suficiente que*

$$\forall\, t_1,\, t_2 :\ 0 < t_1 < t_2 < +\infty, \quad \mu_{_N}\{x \in E : t_1 < |f(x)| \le t_2\} > 0.$$

Si $R(\lambda_f)$ es el recorrido de la función λ_f y $(0,+\infty) \smallsetminus R(\lambda_f) \neq \emptyset$, entonces este complemento es la unión de una cantidad finita o numerable de semi-intervalos en los cuales f^* es constante (ver gráfica 2). En consecuencia el problema sobre la continuidad de f^* surge solamente en los puntos de $R(\lambda_f)$.

$$\text{Sea } t_0 \in R(\lambda_f),\ \ s_1 = \inf\{s :\ \lambda_f(s) = t_0\}\ \ s_2 = \sup\{s :\ \lambda_f(s) = t_0\}\,.$$

Se mostrará entonces que:

$$f^*(t_0 - 0) - f^*(t_0) = s_2 - s_1. \tag{2.2}$$

Recuerde que $f^*(t_0 + 0) = f^*(t_0)$, (ver lema 2.1.5 inciso 5).

Ahora debido al decrecimiento de λ_f, $\ f^*(t_0) = \inf\{s :\ \lambda_f(s) \le t_0\} = s_1$.

Además para $t < t_0$ se tiene $\lambda_f(f^*(t)) \le t < t_0$ (ver lema 2.1.5 inciso 4).

Por esto y el decrecimiento de λ_f se sigue que $f^*(t) \ge s_2$ cuando $t \to t_0 - 0$, es decir $f^*(t_0 - 0) \ge s_2$.

De otra parte para todo $s > s_2$ se tiene $\lambda_f(s) < t_0$ y por lo tanto

$$f^*(\lambda_f(s)) \ge \inf_{t<t_0} f^*(t) = f^*(t_0 - 0).$$

Pero

$$f^*(\lambda_f(s)) = \inf\{\sigma :\ \lambda_f(\sigma) \le \lambda_f(s)\} \le s.$$

En consecuencia para todo $s > s_2$ se satisface que $s \ge f^*(t_0 - 0)$, lo que implica que $s_2 \ge f^*(t_0 - 0)$. Es decir $f^*(t_0 - 0) = s_2$ y es válida la fórmula 2.2.

De lo anterior se deduce que, para la continuidad de $f^*(t_0)$ en los puntos $t_0 \in R(\lambda_f)$ es necesario y suficiente que el valor t_0 lo tome la función λ_f solamente en un punto, lo que significa el decrecimiento estricto de la función de distribución. Esta exigencia es equivalente a que para todo $s_1, s_2 :\ 0 < s_1 < s_2 < \infty$,

$$\mu_{_N}\{x \in E :\ s_1 < |f(x)| \le s_2\} = \lambda_f(s_1) - \lambda_f(s_2) > 0.$$

Lema 2.1.7 *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, f y f_k $(k \in \mathbb{N})$ funciones medibles no negativas en E y además p.c.t $x \in E$, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, y $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$. Entonces para todo $t \in [0, +\infty)$,*

$$f_k^*(t) \leq f_{k+1}^*(t) \leq f^*(t) \ \ y \ \ \lim_{k\to\infty} f_k^*(t) = f^*(t).$$ [3]

Demostración.
De acuerdo con el lema 1.3.14 se tiene que:

$$\{s \in [0, +\infty) : \lambda_{f_k}(s) \leq t\} \supset \left\{s \in [0, +\infty) : \lambda_{f_{k+1}}(s) \leq t\right\} \supset \{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) \leq t\}.$$

En consecuencia,

$$f_k^*(t) \leq f_{k+1}^*(t) \leq f^*(t).$$

Defínase $g(t) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k^*(t)$, entonces por una parte se tiene que $g(t) \leq f^*(t)$; y por otra parte, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_k^*(t) \leq g(t)$.

Puesto que la función λ_{f_k} decrece,

$$\lambda_{f_k}[g(t)] \leq \lambda_{f_k}[f_k^*(t)] \leq t.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{f_k}[g(t)] = \lambda_f[g(t)] \leq t,$$

y de acuerdo a la definición de reordenamiento, $f^*(t) \leq g(t)$.
De esta forma $g(t) = f^*(t)$. ∎

Consecuencia 2.1.8 *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible en E y $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función continua y creciente. Entonces*

$$[g(|f|)]^* = g(f^*),$$

En particular para $p > 0$, $(|f|^p)^* = (f^*)^p$.

Definición 2.1.9 *Dos funciones $f, g : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ se denominan equimedibles si tienen la misma función de distribución, esto es, si:*

$$\textit{Para todo } t \geq 0 \ \lambda_f(t) = \lambda_g(t).$$

Lema 2.1.10 *Sea $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Entonces f y f^* son equimedibles.*

---

[3] *De este lema se sigue que si para casi todo $x \in E$, $|f(x)| \leq |g(x)|$. Entonces para $t \in [0, \infty)$, $f^*(t) = g^*(t)$.*

Demostración.
Observe que para $s \geq 0$ la condición $f^*(s) > t$, es equivalente a que $s < \lambda_f(t)$ En efecto,

$$f^*(s) > t \quad \Rightarrow \quad s < \lambda_f(t).$$

Si para todo $t > 0$ tal que $\lambda_f(t) \leq s$. Entonces de la definición de reordenamiento se tiene que $f^*(s) \leq t$.

Recíprocamente si $s < \lambda_f(t)$ entonces debido a la continuidad por la derecha de λ_f, existe un $t_1 > t$ tal que $s < \lambda_f(t_1)$. Es decir,

$$t_1 \notin \{\tau \in [0, \infty) : \lambda_f(\tau) \leq s\} \quad \text{y}$$

$$f^*(s) \geq t_1 > t.$$

De aquí se sigue, que

$$\begin{aligned} \mu\{s \in [0,\infty) : f^*(s) > t\} &= \mu\{s \in [0,\infty) : s < \lambda_f(t)\} = \mu\,[0, \lambda_f(t)) \\ &= \lambda_f(t) = \mu_N\{x \in E : |f(x)| > t\}. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1.11 *Sea $0 < p \leq \infty$, $E \subset \mathbb{R}^N$ y f una función medible en E. Entonces*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|f^*\|_{L_p(0,\infty)} = \|f^*\|_{L_p(0,\,\mu_N(E))}. \tag{2.3}$$

Demostración.
Notese ante todo que la segunda igualdad de la ecuación (2.3) se sigue del lema 2.1.5. Para $p = \infty$ según el lema 2.1.5 y las propiedades del $\sup\limits_{x\in E} vrai\,|f(x)|$ se tiene:

$$\|f^*\|_{L_\infty(0,\infty)} = f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

Sea ahora $0 < p < \infty$. Considérese inicialmente la función f que satisface las condiciones del lema 1.3.6. Entonces de acuerdo con el lema se tiene:

$$\int\limits_E |f(x)|^p\,dx = \sum_{k=1}^{m} a_k^p\,\mu_N(E_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k^p(c_k - c_{k+1}) = \int\limits_0^\infty [f^*(t)]^p\,dt.$$

Para cualquier función f medible sobre E, considérese la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde las funciones f_k satisfacen que:

$$p.c.t\ x \in E, \ \ f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \ \text{ y } \ \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

De acuerdo con el lema 2.1.7 se tiene que:

$$\forall t \in [0,\, \infty), \ \ f_k^*(t) \leq f_{k+1}^*(t) \ \text{ y } \ \lim_{k\to\infty} f_k^*(t) = f^*(t).$$

Por esto pasando al límite cuando $k \to \infty$ en la igualdad,

$$\int_E |f_k(x)|^p \, dx \; = \; \int_0^\infty (f_k^*(t))^p \, dt,$$

y usando el teorema de Levi se obtiene lo deseado. ■

Ejemplo 2.1.12 *Usando el resultado* $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ *para* $p > 0$*, es fácil demostrar que la demostración del teorema 2.1.11 para* $0 < p < \infty$ *se puede reducir al caso* $p = 1$*.*

El caso $p = 1$ es el teorema 2.1.11.
Supóngase $0 < p < \infty$ y simbolize $g(x) := |f(x)|^p$. Como $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ para $p > 0$, se tiene que

$$\int\limits_E |f(x)|^p \, dx = \int\limits_E g(x) \, dx = \int\limits_0^\infty g^*(t) \, dt = \int\limits_0^\infty (f^*(t))^p \; dt.$$

Ejemplo 2.1.13 *Sean* $E \subset \mathbb{R}^N$*,* f *una función medible sobre* E *y* φ *una función continua en* $[0, \infty)$*. Entonces:*

$$\int\limits_E \varphi(|f(x)|) \, dx \; = \; \int\limits_0^\infty \varphi[f^*(t)] \, dt.$$

Supongamos inicialmente que la función φ crece monotonamente en $[0, \infty)$ y $\varphi(0) = 0$. Defínase $\psi(x) := \varphi(|f(x)|)$, entonces según la consecuencia 2.1.8 $\psi^*(t) = \varphi(f^*(t))$ esto significa según teorema 2.1.11 (caso $p = 1$) que:

$$\int\limits_E \varphi(|f(x)|) \, dx = \int\limits_E |\psi(x)| \, dx = \int\limits_0^\infty \psi^*(t) \, dt = \int\limits_0^\infty \varphi[f^*(t)] \, dt = \int\limits_0^{\mu_N(E)} \varphi[f^*(t)] \, dt.$$

El caso general se puede consultar en ([3] pags 39-43).

Consecuencia 2.1.14 *Para todo subconjunto medible* F *de* E *se satisface:*

$$\|f\|_{L_p(F)} \leq \|f^*\|_{L_p(0,\, \mu_N(F))} \, . \tag{2.4}$$

Demostración.
Sea χ_F la función característica del conjunto F. Entonces

$$f\chi_F \; \leq \; f \; \text{ en } \; E,$$

lo que significa que

$$(f\chi_F)^* \; \leq \; f^*.$$

De acuerdo con la propiedad (3) del lema 2.1.5 y el teorema 2.1.11,

$$\|f\|_{L_p(F)} \; = \; \|f\chi_F\|_{L_p(E)} \; = \; \|(f\chi_F)^*\|_{L_p(0,\, \mu_N(E))} \; \leq \; \|f^*\|_{L_p(0,\, \mu_N(F))} \, .$$ ■

Consecuencia 2.1.15 *Para las funciones f y g medibles sobre E,*

$$\|fg\|_{L_p(E)} \leq \|f^*g^*\|_{L_p(0,\,\mu_N(E))}\,.$$

Demostración.
Inicialmente considérese el caso $p=1$.
Como en la demostración del teorema 1.3.15, es suficiente demostrar la desigualdad anterior para funciones f que satisfacen las condiciones del lema 1.3.6, es decir $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \chi_{E(k)}$ así:

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L_1(E)} &= \int_E \left|\sum_{k=1}^{m} a_k\, \chi_{E(k)}\, g(x)\right| dx \leq \int_E \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\, \chi_{E(k)}|g(x)|\right) dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} a_k \int_{E_k} |g(x)|\, dx \leq \sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{\mu_N(E_k)} g^*(t)\, dt \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{\infty} \chi_{(0,\,\mu_N E_k)} g^*(t)\, dt \leq \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\, \chi_{(0,\,\mu_N E_k)}\right) g^*(t)\, dt \\
&\leq \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Para $0 < p < \infty$ entonces de acuerdo con la consecuencia 2.1.8,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L_p(E)} &= \|\,|f|^p\,|g|^p\,\|_{L_1(E)}^{\frac{1}{p}} \leq \|(|f|^p)^*\,(|g|^p)^*\,\|_{L_1(0,\,\mu_N(E))}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|(f^*)^p\,(g^*)^p\,\|_{L_1(0,\,\mu_N(E))}^{\frac{1}{p}} \leq \|f^*\,g^*\|_{L_p(0,\,\mu_N(E))}\,.
\end{aligned}$$

Para $p=\infty$ se utiliza el teorema de Riesz: [4]

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L_\infty(E)} &= \lim_{k\to\infty} \|fg\|_{L_\infty(E\cap B_k)} = \lim_{k\to\infty}\lim_{p\to\infty} \|fg\|_{L_p(E\cap B_k)} \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\lim_{p\to\infty} \|f^*\,g^*\|_{L_p(0,\,\mu_N(E\cap B_k))} \leq \lim_{k\to\infty} \|f^*\,g^*\|_{L_\infty(0,\,\mu_N(E\cap B_k))} \\
&\leq \|f^*\,g^*\|_{L_\infty(0,\,\mu_N(E))}\,.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.1.16 *Sean $f,g : E \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Entonces para $t_1,\, t_2 \in [0,\,\infty)$,*

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2), \tag{2.5}$$

$$(fg)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1)g^*(t_2). \tag{2.6}$$

[4]**Teorema de Riesz:** Si $\mu_N(E) < \infty$, $f \in L_p(E)$. Entonces $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_{L_\infty(E)}$

Demostración.
Supóngase que $a := f^*(t_1), \;\; b := g^*(t_2)$.
Si se satisface que:

$$|f(x) + g(x)| \; > \; a + b, \quad |f(x)g(x)| \; > \; ab$$

entonces

$$|f(x)| \; > \; a \quad \text{o} \quad |g(x)| \; > \; b.$$

Por esto teniendo en cuenta la propiedad (4) del lema 2.1.5 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\lambda_{f+g}(a+b) &= \mu_{_N} \{x \in E : |f(x) + g(x)| > a + b\} \\
&\leq \mu_{_N} (\{x \in E : |f(x)| > a\} \cup \{x \in E : |g(x)| > b\}) \\
&\leq \mu_{_N} \{x \in E : |f(x)| > a\} + \mu_{_N} \{x \in E : |g(x)| > b\} \\
&\leq \lambda_f(a) + \lambda_f(b) \leq \lambda_f(f^*(t_1)) + \lambda_f(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2.
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
\lambda_{fg}(ab) &= \mu_{_N} \{x \in E : |f(x)g(x)| > ab\} \\
&\leq \mu_{_N} (\{x \in E : |f(x)| > a\} \cup \{x \in E : |g(x)| > b\}) \\
&\leq \mu_{_N} \{x \in E : |f(x)| > a\} + \mu_{_N} \{x \in E : |g(x)| > b\} \\
&\leq \lambda_f(a) + \lambda_f(b) \leq \lambda_f(f^*(t_1)) + \lambda_f(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, según la definición de reordenamiento

$$\begin{aligned}
(f+g)^* (t_1 + t_2) &\leq a + b = f^*(t_1) + g^*(t_2). \\
(fg)^* (t_1 + t_2) &\leq ab = f^*(t_1)g^*(t_2).
\end{aligned}$$ ■

Observaciones 2.1.17

1. La desiguladad (2.5) puede tener lugar la igualdad, por ejemplo para $f = g$ en E se tiene que

$$(f+g)^* (t_1 + t_2) = (2f)^* (t_1 + t_2) = 2f^*(t_1 + t_2) = f^*(t_1 + t_2) + g^*(t_1 + t_2).$$

2. El anterior lema muestra que los reordenamientos no son aditivos, dificultando el trabajo para los espacios que mas adelante se definirán en términos de f^*.

2.2 Espacios de Marcinkiewicz

Definición 2.2.1 *Sea $0 < p \leq \infty$, $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible.*
Para $0 < p < \infty$ se dice que la función $f \in M_p(E)$, si

$$\|f\|^{(1)}_{M_p(E)} := \sup_{t\in[0,\infty)} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} < \infty; \tag{2.7}$$

para $p = \infty$,

$$M_\infty(E) \equiv L_\infty(E) \quad y \quad \|f\|^{(1)}_{M_\infty(E)} := \|f\|_{L_\infty(E)}\,. \tag{2.8}$$

El espacio $M_p(E)$ para $0 < p < \infty$ también se denomina espacio $L_p(E)$ débil.

Más adelante se verificará que $M_p(E)$ con las operaciones de adición y multiplicación por escalar es espacio lineal.

Ejemplo 2.2.2 *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$, $0 < p \leq \infty$ y χ_F la función característica del conjunto de medida finita $F \subset E$. Entonces*

$$\|\chi_F\|_{M_p(E)} = \|\chi_F\|_{M_p(F)} = [\,\mu_N(F)]^{\frac{1}{p}}\,.$$

En efecto,

$$\lambda_{\chi_F}(t) = \mu_N\{x \in E : \chi_F(x) > t\} = \mu_N\{x \in F : 1 > t\} = \begin{cases} \mu_N(F) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\|\chi_F\|_{M_p(E)} = \|\chi_F\|_{M_p(F)} = \sup_{t\geq 0} t\left[\lambda_{\chi_F}(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\in(0,1)} t\,[\,\mu_N(F)]^{\frac{1}{p}} = [\,\mu_N(F)]^{\frac{1}{p}}\,.$$

Lema 2.2.3

1. Supóngase que $0 < p \leq \infty$, $f \in M_p(E)$ y $g \approx f$ en E. Entonces $\lambda_g = \lambda_f$ en $[0, \infty)$ y $g \in M_p(E)$; además $\|g\|^{(1)}_{M_p(E)} = \|f\|^{(1)}_{M_p(E)}$.
2. Si $\mu_N(E) = 0$ entonces para cualquier función $f : E \to \mathbb{C}$, $\lambda_f = 0$ en $[0, \infty)$ y $\|f\|^{(1)}_{M_p(E)} = 0$.

Demostración.

1. Sea $f \in M_p(E)$ entonces $\|f\|^{(1)}_{M_p(E)} < \infty$ y como $g \approx f$ en E entonces de acuerdo a las propiedades de la función λ_f se satisface que $\lambda_g \equiv \lambda_f$. Así:

$$\|g\|^{(1)}_{M_p(E)} = \sup_{t\geq 0} t\,[\lambda_g(t)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\geq 0} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} = \|f\|^{(1)}_{M_p(E)} < \infty.$$

Esto es, $g \in M_p(E)$ y $\|f\|_{M_p(E)} = \|g\|_{M_p(E)}\,.$

2. Considerando que $0 < \lambda_f(t) \leq \mu_{_N}(E) = 0$, entonces $\lambda_f = 0$ en $[0, \infty)$ para cualquier función f. Luego,

$$\|f\|_{M_p(E)} = \sup_{t \geq 0} t \left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

■

Lema 2.2.4 *Supóngase que $\mu_{_N}(E) > 0$. Para que $\|f\|_{M_p(E)}^{(1)} = 0$ es necesario y suficiente que la función f sea equivalente a la función 0 sobre E.*

Demostración.
Supóngase inicialmente que $\|f\|_{M_p(E)}^{(1)} = 0$; es decir

$$\|f\|_{M_p(E)}^{(1)} = \sup_{t \geq 0} t \left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Entonces para todo $t > 0$,

$$\mu_{_N} \{x \in E : |f(x)| > t\} = \lambda_f(t) = 0$$

y

$$\{x \in E : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_f(0) = \mu_{_N} \{x \in E : |f(x)| > 0\} = \mu_{_N} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{k}\right\} \right) = 0.$$

Es decir para todo $x \in E$ con $|f(x)| \geq 0$ implica que para casi todo $x \in E$, $f(x) = 0$ o sea $f \approx 0$ en E.

Ahora supóngase que $f \approx 0$ en E. Entonces para todo $t \geq 0$,

$$\mu_{_N} \{x \in E : |f(x)| > t\} = \lambda_f(t) = 0.$$

Esto indica que

$$\|f\|_{M_p(E)}^{(1)} = \sup_{t \geq 0} t \left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

■

La siguiente proposición ilustra la relación que existe entre los espacios de Marcinkiewicz y de Lebesgue.

Proposición 2.2.5 *Sean* $0 < p < \infty,\ \gamma \in \mathbb{R},\ r > 0.$

1. *La función* $|x|^\gamma \in M_p(B_r)$ *si y sólo si* $\gamma \geq -\frac{N}{p}$, *(para los espacios* $L_p(B_r),\ \gamma > -\frac{N}{p}$*).*

2. *La función* $|x|^\gamma \in M_p({}^cB_r)$ *si y sólo si* $\gamma \leq -\frac{N}{p}$, *(para los espacios* $L_p({}^cB_r),\ \gamma < -\frac{N}{p}$*).*

3. *La función* $|x|^\gamma \in M_p(\mathbb{R}^N)$ *si y sólo si* $\gamma = -\frac{N}{p}$, *(para todo* $\gamma \in \mathbb{R}$ $|x|^\gamma \notin L_p(\mathbb{R}^N)$*).*

Para convencerse de esto es suficiente utilizar la definición del espacio de Marcinkiewicz y la escritura explícita para la función de distribución de $|x|^\gamma$ considerada en B_r, ${}^cB_r$ o en $\mathbb{R}^N$. Detalladamente:

Caso 1: $\gamma < 0$.
De acuerdo al ejemplo 1.3.4 la función $\lambda_{|x|^\gamma}$ en el dominio de B_r es:

$$\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \upsilon_N r^N & \text{si } 0 \leq t < r^\gamma \\ 0 & \text{si } t \geq r^\gamma. \end{cases}$$

Entonces $|x|^\gamma \in M_p(B_r)$ cuando $\sup\limits_{t\geq 0} t\left[\lambda_{|x|^\gamma}\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$, es decir:

1. Para $0 \leq t < r^\gamma$ se tiene $\sup\limits_{0\leq t<r^\gamma} t\left[\upsilon_N r^N\right]^{\frac{1}{p}} = (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, r^{\gamma+\frac{N}{p}} < \infty.$

2. Para $t \geq r^\gamma$ se tiene $\sup\limits_{t\geq r^\gamma} t\left[\upsilon_N t^{\frac{N}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{p}} = \sup\limits_{t\geq r^\gamma} (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, t^{1+\frac{N}{\gamma p}}$
   Si $1 + \frac{N}{\gamma p} > 0$ entonces $\sup\limits_{t\geq r^\gamma} (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, t^{1+\frac{N}{\gamma p}} = \infty.$
   Si $1 + \frac{N}{\gamma p} = 0$ entonces $\sup\limits_{t\geq r^\gamma} (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, t^{0} = (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}} < \infty.$
   Si $1 + \frac{N}{\gamma p} < 0$ entonces $\sup\limits_{t\geq r^\gamma} (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, t^{1+\frac{N}{\gamma p}} = (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, r^{1+\frac{N}{\gamma p}} < \infty.$
   Luego $|x|^\gamma \in M_p(B_r)$ únicamente cuando $1 + \frac{N}{\gamma p} \leq 0$ es decir $\gamma \geq -\frac{N}{p}$.

Caso 2: $\gamma = 0$.
La función λ_1 en el dominio de B_r es:

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} \upsilon_N r^N & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Entonces $1 \in M_p(B_r)$ porque

$$\sup_{t\geq 0} t\,[\lambda_1(t)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{0\leq t<1} t\left[\upsilon_N r^N\right]^{\frac{1}{p}} = (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, r^{\frac{N}{p}} < \infty.$$

Caso 3: $\gamma > 0$.

La función $\lambda_{|x|^\gamma}$ en el dominio de B_r es:

$$E_t = \{x \in B_r : |x|^\gamma > t\} = \left\{x \in B_r : |x| > t^{\frac{1}{\gamma}}\right\} = \left\{|x| < r \wedge |x| > t^{\frac{1}{\gamma}}\right\}$$

Si $t^{\frac{1}{\gamma}} < r$ entonces $t^{\frac{1}{\gamma}} < |x| < r$, así $E_t = B_r \setminus B_{t^{\frac{1}{\gamma}}}$.

Si $t^{\frac{1}{\gamma}} > r$ entonces $E_t = \emptyset$.

En consecuencia,

$$\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \upsilon_N \left(r^N - t^{\frac{N}{\gamma}}\right) & \text{si } 0 < t < r^\gamma \\ 0 & \text{si } t \geq r^\gamma. \end{cases}$$

Entonces $|x|^\gamma \in M_p(B_r)$ porque

$$\sup_{t>0} t\left[\lambda_{|x|^\gamma}(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{0<t<r^\gamma} t\left[\upsilon_N\left(r^N - t^{\frac{N}{\gamma}}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}}\, r^{\gamma+\frac{N}{p}} < \infty.$$

Por consiguiente $|x|^\gamma \in M_p(B_r)$ únicamente cuando $\gamma \geq -\frac{N}{p}$.

Para los espacios $L_p(B_r)$ se utilizan coordenadas esféricas generalizadas:

$x_N = \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{N-2} \sin\varphi_{N-1}$,
$x_{N-1} = \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{N-2} \cos\varphi_{N-1}$,
$\vdots$
$x_2 = \rho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$,
$x_1 = \rho \sin\varphi_1$.

Donde $\rho > 0$, $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$ y para todo $k \geq 2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_k < \frac{\pi}{2}$.

El módulo del jacobiano J es $|J| = \rho^{N-1}(\sin^{N-2}\varphi_1)(\sin^{N-3}\varphi_2)\cdots(\sin\varphi_{N-1})$.

Luego

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_r} |x|^{\gamma p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \rho^{\gamma p}\rho^{N-1}(\sin^{N-2}\varphi_1)(\sin^{N-3}\varphi_2)\cdots(\sin\varphi_{N-1})\, d\rho\, d\varphi_{N-1} d\varphi_{N-2}\cdots d\varphi_1\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_0^r \rho^{\gamma p+N-1}\, d\rho \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{N-2}\varphi_1)(\sin^{N-3}\varphi_2)\cdots(\sin\varphi_{N-1}) d\varphi_{N-1} d\varphi_{N-2}\cdots d\varphi_1\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \upsilon_N\left[\int_0^r \rho^{\gamma p+N-1}\, d\rho\right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

Donde $\upsilon_{_N}$ es el volúmen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$.
(En [2] pag. 39) se verifica que $\upsilon_{_N}$ es igual a las integrales donde intervienen los senos y cosenos que aparecen en J.

Obsérvese además que la última integral converge si:
$-\gamma p - N + 1 < 1$ es decir $\gamma > -\frac{N}{p}$.

Mediante razonamientos similares al anterior se procede para $|x|^\gamma$ en ${}^cB_r$.

En $\mathbb{R}^N$ sólo se debe verificar $\gamma < 0$, ya que en los demás casos la función $\lambda_{|x|\gamma}(t) = \infty$. Lo que implica que $|x|^\gamma \notin M_p(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia:

$$\||x|^\gamma\|_{M_p(\mathbb{R}^N)} = \sup_{t>0} t \left[\lambda_{|x|^\gamma}(t)\right]^{\frac{1}{p}},$$

pero

$$\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ \upsilon_{_N} t^{\frac{N}{\gamma}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\||x|^\gamma\|_{M_p(\mathbb{R}^N)} = \sup_{t>0} t \left[\upsilon_{_N} t^{\frac{N}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{p}} = (\upsilon_{_N})^{\frac{1}{p}} \sup_{t>0} t^{1+\frac{N}{\gamma p}}.$$

1. Si $1 + \frac{N}{\gamma p} > 0$. Entonces $\gamma < -\frac{N}{p}$, lo que indica que $\sup_{t>0} t^{1+\frac{N}{\gamma p}} = +\infty$.

2. Si $1 + \frac{N}{\gamma p} = 0$. Entonces $\sup_{t>0} t^{1+\frac{N}{\gamma p}} < +\infty$.

3. Si $1 + \frac{N}{\gamma p} < 0$. Entonces $\sup_{t>0} t^{-\left(1+\frac{N}{\gamma p}\right)} = +\infty$.

Esto indica que para $0 < p < \infty$, $|x|^\gamma \in M_p(\mathbb{R}^N)$ si $\gamma = -\frac{N}{p}$.

En cambio para $L_p(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma \, dx = \int_{B_r} |x|^\gamma \, dx + \int_{{}^cB_r} |x|^\gamma \, dx.$$

De donde se deduce que $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma \, dx$ diverge pues sin importar el valor de γ converge sólo una de las siguientes integrales $\int_{B_r} |x|^\gamma \, dx$ o $\int_{{}^cB_r} |x|^\gamma \, dx$.

Los espacios de Marcinkiewicz pueden normarse de diferentes formas, algunas de las cuales conllevan a normas equivalentes. A continuación se presenta una segunda forma de normalizar estos espacios.

Definición 2.2.6 *Sea $0 < p \leq \infty$ y $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Se dice que $f \in M_p(E)$ si:*

$$\|f\|^{(2)}_{M_p(E)} := \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{t\in[0,\mu_N(E))} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty. \tag{2.9}$$

Para $p = \infty$ se considera $t^{\frac{1}{p}} \equiv 1$.

Lema 2.2.7 *Las definiciones 2.2.1 y 2.2.6 son equivalentes y además para $f \in M_p(E)$,*

$$\|f\|^{(1)}_{M_p(E)} \equiv \|f\|^{(2)}_{M_p(E)}. \tag{2.10}$$

Demostración.
Para $p = \infty$ la igualdad (2.10) se tiene de las siguientes igualdades:

$$\|f\|^{(2)}_{M_\infty(E)} = \sup_{t\in[0,\infty)} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)} = \|f\|^{(1)}_{M_\infty(E)};$$

Es decir $\|f\|^{(2)}_{M_\infty(E)} = \|f\|^{(1)}_{M_\infty(E)}$.

Sea $0 < p < \infty$ y f una función que satisface las condiciones del lema 1.3.6. Entonces según dicho lema,

$$\forall t \in [a_m, \infty], \quad \lambda_f(t) = 0 \ \text{ y}$$

$$\forall t \in [a_{k-1}, a_k), \ k \in \{1, 2, \cdots, m\} \ \lambda_f(t) = \sum_{l=k}^{m} \mu_N(E_l).$$

Así se tiene que:

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\substack{0\leq t<a_k\\1\leq k\leq m}} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{1\leq k\leq m} a_k \left(\sum_{l=k}^{m} \mu_N E_l\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{1\leq k\leq m} a_k\,(c_k)^{\frac{1}{p}}\\ &= \sup_{\substack{c_{k+1}\leq t<c_k\\1\leq k\leq m}} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).\end{aligned}$$

Para cualquier función f medible en E considérese la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones f_k que satisfacen:

$$p.c.t \ x \in E, \quad f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \ \text{ y } \ \lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t).$$

Entonces de los lemas 1.3.14 y 2.1.7 se tiene que para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\lambda_{f_k}(t) \leq \lambda_{f_{k+1}}(t), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_{f_k}(t) = \lambda_f(t) \ \text{ y } \ f^*_k(t) \leq f^*_{k+1}(t), \ \lim_{k\to\infty} f^*_k(t) = f^*(t).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,\infty)} t\left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} &= \sup_{t\in[0,\infty)} \lim_{k\to\infty} t\left[\lambda_{f_k}(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} t\left[\lambda_{f_k}(t)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f_k^*(t) = \sup_{t\in[0,\infty)} \lim_{k\to\infty} t^{\frac{1}{p}} f_k^*(t) \\ &= \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).\end{aligned}$$

■

Observación 2.2.8 *Si la función λ_f es continua y decrece estrictamente, entonces $f^*(t) = \lambda_f^{-1}(t)$ y la igualdad (2.10) para $0 < p < \infty$, considerando el lema 2.1.5 puede obtenerse de manera sencilla sustituyendo $\lambda_f(t)$ por s:*

$$\sup_{t\in[0,\infty)} t\left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{s\in(0,\lambda_f(0))} \lambda_f^{-1}(s) s^{\frac{1}{p}} = \sup_{s\in(0,\mu_N(E))} s^{\frac{1}{p}} f^*(s).$$

Observación 2.2.9 *Debido a la igualdad (2.10) en adelante se simbolizará:*

$$\|f\|_{M_p(E)} \equiv \|f\|^{(1)}_{M_p(E)} \equiv \|f\|^{(2)}_{M_p(E)}.$$

Ejemplo 2.2.10 *Si para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x) := g(|x|)$, donde la función g está definida sobre $[0,\infty)$, continua y estrictamente decreciente sobre $[0,\infty)$.*
Entonces $f^*(0) = \lim\limits_{t\to+0} g(t)$ y para $t \in [0,\infty)$,

$$f^*(t) = g\left(\left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\frac{1}{N}}\right). \tag{2.11}$$

En efecto, como g es una función positiva, continua y estrictamente decreciente, entonces para todo $t > 0$

$$g^*(t) = \lambda_g^{-1}(t) = \left(g^{-1}\right)^{-1}(t) = g(t).$$

Luego, para todo $t > 0$, $g^*(t) = g(t)$.
Ahora

$$f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} = \|g\|_{L_\infty(0,\infty)} = g^*(0) = \lim_{t\to+0} g^*(t) = \lim_{t\to+0} g(t).$$

Además para todo $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}f^*(t) &= \inf\left\{s \geq 0 : \lambda_f(s) \leq t\right\} = \inf\left\{s \geq 0 : \upsilon_N \left[\lambda_g(s)\right]^N \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{s \geq 0 : s \geq g^*\left(\left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\frac{1}{N}}\right)\right\} = g^*\left(\left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\frac{1}{N}}\right).\end{aligned}$$

Es decir

$$f^*(t) = g\left(\left(\upsilon_N^{-1}t\right)^{\frac{1}{N}}\right).$$

De la igualdad 2.11 y la equivalencia de las normas, se sigue un resultado que muestra la existencia de funciones en M_p para un dominio en particular pero que no pertenecen al respectivo espacio de Marcinkiewicz en el complemento de dicho dominio.

Proposición 2.2.11 *Sean* $0 < p < \infty,\ -\infty < \gamma < \infty,\ r > 0$ *y*

$$f_\gamma(x) := \begin{cases} (1 + |\ln|x||)^\gamma & si\ \ x \in \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\} \\ 0 & si\ \ x = 0. \end{cases}$$

Entonces:

1. *Para todo* $\gamma \in \mathbb{R},\ f_\gamma \in M_p(B_r)$ *y* $f_\gamma \notin M_p(^cB_r)$.
2. *Para todo* $x \in \mathbb{R}^N,\ |x|^{-\frac{N}{p}} f_\gamma(x) \in M_p(B_r)$ *y* $M_p(^cB_r)$ *si y sólo si* $\gamma \leq 0$ $\left(|x|^{-\frac{N}{p}} f_\gamma(x) \in L_p(\mathbb{R}^N) \text{ si y sólo si } \gamma < -\dfrac{1}{p}\right)$.

Para verificar el inciso 1 se consideran los siguientes casos:

Caso 1: $\gamma < 0$.
Obsérvese que $f_\gamma(x) = (1 + |\ln|x||)^\gamma = g(|x|)$, donde $g(u) := (1 + |\ln u|)^\gamma,\ u > 0$. Entonces para utilizar la igualdad 2.11 basta conocer donde $g(|x|)$ es decreciente. Para ello se usará el criterio de la primera derivada,

Sea $u = |x|$, entonces $u \geq 0$ y

$$g(u) = \begin{cases} (1 + |\ln u|)^\gamma & \text{si } \ u > 0 \\ 0 & \text{si } \ u = 0. \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g'(u) &= \gamma\,(1 + |\ln u|)^{\gamma-1}\,|\ln u|' = \gamma\,(1 + |\ln u|)^{\gamma-1}\,(\ln u \cdot sgn(\ln u))'\,[5] \\ &= \gamma\,(1 + |\ln u|)^{\gamma-1}\,\frac{sgn(\ln u)}{u}. \end{aligned}$$

o sea

$$g'(u) = \begin{cases} \frac{\gamma(1+|\ln u|)^{\gamma-1}}{u} & \text{si } \ u > 1 \\ \frac{-\gamma(1+|\ln u|)^{\gamma-1}}{u} & \text{si } \ 0 < u \leq 1. \end{cases}$$

[5]

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

lo que indica que para $u > 1$ la función $g(u)$ es decreciente y para $0 < u \leq 1$ la función $g(u)$ es creciente.
Ahora se debe considerar dominios de B_r y ${}^cB_r$. Para el primer dominio se tiene en cuenta que:
(a) Si $0 < r \leq 1$ entonces $0 < u < r \leq 1$, lo que implica que $g(u) = (1 - \ln u)^\gamma$ es creciente. En este caso se utiliza la función $-g(u)$ que es decreciente y positiva, entonces se utiliza el ejemplo 1.3.3.
Así,

$$\lambda_{f_\gamma}(t) = \lambda_{-f_\gamma}(t) = \upsilon_N \left[\lambda_{-g}(t)\right]^N = \upsilon_N \left[\lambda_g(t)\right]^N .$$

Para calcular $\lambda_g(t)$ se considera el conjunto,

$$\begin{aligned} E_t &:= \{u < r : g(u) > t\} = \{u < r : (1 - \ln u)^\gamma > t\} = \left\{u < r : (1 - \ln u) < t^{\frac{1}{\gamma}}\right\} \\ &= \left\{u < r : \ln u > 1 - t^{\frac{1}{\gamma}}\right\} = \left\{u < r : u > e^{1 - t^{\frac{1}{\gamma}}}\right\} = \left\{e^{1 - t^{\frac{1}{\gamma}}} < u < r\right\}. \end{aligned}$$

Esto es $\lambda_g(t) = (r - e^{1-t^{\frac{1}{\gamma}}})$ y en consecuencia $\lambda_{f_\gamma}(t) = \upsilon_N (r - e^{1-t^{\frac{1}{\gamma}}})^N$.
Resta verificar que $f_\gamma(x) \in M_p(B_r)$, para ello se utiliza la función de distribución.

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_p(B_r)} &= \sup_{0 < t < \upsilon_N r^N} t\left[\lambda_{f_\gamma}(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{0 < t < \upsilon_N r^N} t\left[\upsilon_N (r - e^{1-t^{\frac{1}{\gamma}}})^N\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}} \sup_{0 < t < \upsilon_N r^N} t\left[r - e^{1-t^{\frac{1}{\gamma}}}\right]^{\frac{N}{p}} \leq (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}} \sup_{0 < t < \upsilon_N r} t r^{\frac{N}{p}} \leq \infty \end{aligned}$$

En consecuencia $f_\gamma \in M_p(B_r)$.

(b) Si $1 < r$ entonces:
Para $0 < u \leq 1$ se está en el caso inmediatamente anterior.
Para $1 < u < r$ se tiene que $g(u) = (1 + \ln u)^\gamma$ es decreciente. En este caso se tienen las condiciones del ejemplo 2.11, es decir:

$$f^*(t) = g\left(\left(\upsilon_N^{-1} t\right)^{\frac{1}{N}}\right) = \left(1 + \left|\ln \upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right|\right)^\gamma$$

y en consecuencia,

$$\|f_\gamma\|_{M_p(B_r)} := \sup_{t \in (0, \mu_N(B_r))} t^{\frac{1}{p}} f_\gamma^*(t) = \sup_{0 < t < \upsilon_N r^N} t^{\frac{1}{p}} \left(1 + \left|\ln \upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right|\right)^\gamma = (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Caso 2: $\gamma \geq 0$.
Razonamientos similares muestran que $f_\gamma(x) \in M_p(B_r)$.

Falta probar que para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, $f_\gamma \notin M_p({}^cB_r)$.
Para ello se consideran los siguientes casos:
Caso 1: $\gamma < 0$.
De acuerdo con los resultados obtenidos para f_γ en B_r, se tiene que:

1. $g(u)$ es decreciente para $u > 1$.

2. $g(u)$ es creciente para $0 < u \leq 1$.

Para 1. se tienen las condiciones del ejemplo 2.11, es decir:

$$f^*(t) = g\left(\left(\upsilon_N^{-1}t\right)^{\frac{1}{N}}\right) = \left(1 + \left|\ln \upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right|\right)^{\gamma} \text{ y}$$
$$\forall t > 0,\ \left(f_\gamma \chi_{{}^cB_r}\right)^*(t) = f_\gamma^*(t + r).$$

En consecuencia,

$$\|f_\gamma\|_{M_p({}^cB_r)} := \left\|f_\gamma \chi_{{}^cB_r}\right\|_{M_p(\mathbb{R}^N)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} t^{\frac{1}{p}} \left(f_\gamma \chi_{{}^cB_r}\right)^*(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}} t^{\frac{1}{p}} f_\gamma^*(t+r)$$
$$= \sup_{\upsilon_N r^N < t < \infty} t^{\frac{1}{p}} \left(1 + \left|\ln \upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right|\right)^{\gamma} = \infty.$$

En 2. se utiliza la función $-g(u)$ decreciente y positiva (ver ejemplo 1.3.3) y se procede igual que en (a) para f_γ en B_r; con lo que se obtiene que $\|f_\gamma\|_{M_p({}^cB_r)} = \infty$.

En consecuencia $f_\gamma \notin M_p({}^cB_r)$.

Caso 2: $\gamma \geq 0$.
Razonamientos similares muestran que $f_\gamma(x) \notin M_p({}^cB_r)$.

Para verificar que $|x|^{-\frac{N}{p}} f_\gamma(x) \in M_p(\mathbb{R}^N)$ con $\gamma \leq 0$, se tiene en cuenta que:

1. Si para casi todo $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$ y $g(x) \in M_p(E)$ entonces $f(x) \in M_p(E)$.
   Esto hecho se deduce de las propiedades de la función de distribución λ_f:
   Si para casi todo $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$ entonces para todo $t \geq 0$, $\lambda_f(t) \leq \lambda_g(t)$, de lo cual $t\left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} \leq t\left[\lambda_g(t)\right]^{\frac{1}{p}}$ para $p > 0$ y pasando al supremo respecto a t se tiene
   $$\sup_{t\geq 0} t\left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{t\geq 0} t\left[\lambda_g(t)\right]^{\frac{1}{p}} < \infty;$$
   es decir $f \in M_p(E)$.

2. $|x|^\gamma \in M_p(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si $\gamma = -\frac{N}{p}$ (ver ejemplo 2.2.5).

Caso 1: $\gamma \leq 0$.
Obsérvese que,

$$|x|^{-\frac{N}{p}} f_\gamma(x) \leq |x|^{-\frac{N}{p}} \in M_p(\mathbb{R}^N),$$

Así $|x|^{-\frac{N}{p}} f_\gamma(x) \in M_p(\mathbb{R}^N)$.

Caso 2: $\gamma > 0$.
Se debe verificar para que valores de x la función $f(x) = |x|^{-\frac{N}{p}} f_\gamma(x)$ es decreciente. Para ello se utiliza el criterio de la primera derivada y mediante cálculos similares a los de la función f_γ se tiene:

$$g'(u) = \begin{cases} u^{-\frac{N}{p}-1} (1+\ln u)^{\gamma-1} \left(-\frac{N}{p}(1+\ln u)+\gamma\right) & \text{si } u > 1 \\ u^{-\frac{N}{p}-1} (1-\ln u)^{\gamma-1} \left(-\frac{N}{p}(1-\ln u)-\gamma\right) & \text{si } 0 < u \leq 1, \end{cases}$$

lo que indica que para $u > 1$ la función $g(u)$ es creciente y para $0 < u \leq 1$ la función $g(u)$ es decreciente.

1. Si $0 < r \leq 1$ entonces $0 < u < r \leq 1$, lo que implica que $g(u) = u^{-\frac{N}{p}} (1-\ln u)^\gamma$ es decreciente; en este caso se tienen las condiciones del ejemplo 2.11, es decir:

$$f^*(t) = g\left(\upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right) = \left(\upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right)^{\frac{N}{p}} \left(1 + \left|\ln\left(\upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right)\right|\right)^\gamma.$$

   Luego

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_p(B_r)} &= \sup_{t \in (0, \mu_N(B_r))} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{0 < t < \upsilon_N r^N} t^{\frac{1}{p}} \left(\upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right)^{\frac{N}{p}} \left[1 + \left|\ln\left(\upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right)\right|\right]^\gamma \\ &= (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}} \sup_{0 < t < \upsilon_N r^N} \left(1 + \left|\ln \upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right|\right)^\gamma = \infty. \end{aligned}$$

   Usando los resultados obtenidos para f_γ en ${}^cB_r$ se tiene que

$$\|f\|_{M_p({}^cB_r)} = (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}} \sup_{\upsilon_N r^N < t < \infty} \left(1 + \left|\ln \upsilon_N^{-\frac{1}{N}} t^{\frac{1}{N}}\right|\right)^\gamma = \infty.$$

2. Si $1 < r$ entonces:
   Para $0 < u \leq 1$ se llega al caso anterior.
   Para $1 < u < r$ se tiene que $g(u) = u^{-\frac{N}{p}}(1+\ln u)^\gamma$ es creciente y se calcula la función de distribución para la función $-g(u)$ que es decreciente y positiva (ver ejemplo 1.3.3).

De lo expuesto se deduce que $|x|^{-\frac{N}{p}} f_\gamma(x) \in M_p(B_r)$ y $M_p({}^cB_r)$ si y sólo si $\gamma \leq 0$.

Para los espacios $L_p(\mathbb{R}^N)$ se usan coordenadas esféricas generalizadas al igual que en el ejemplo 2.2.5:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[|x|^{-\frac{N}{p}} (1+|\ln|x||)^{\gamma}\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \upsilon_N \left[\int_0^\infty \rho^{-1} (1+|\ln\rho|)^{\gamma p}\, d\rho\right]^{\frac{1}{p}} = \upsilon_N \left[\int_{-\infty}^\infty (1+|u|)^{\gamma p}\, du\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2^{\frac{1}{p}}\upsilon_N \left[\int_0^\infty (1+u)^{\gamma p}\, du\right]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}\upsilon_N \left[\int_1^\infty v^{\gamma p}\, dv\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Obsérvese que la última integral converge cuando $-\gamma p > 1$, es decir si $\gamma < -\frac{1}{p}$.

2.3 Relación entre los espacios $M_p(E)$ y $L_p(E)$.

Los resultados que se muestran a continuación evidencian la similitud que las propiedades de $M_p(E)$ tienen con respecto a $L_p(E)$. Incluso en ciertos casos las constantes en las respectivas desiguladades coinciden.

Teorema 2.3.1 *Si $\mu_N(E) < \infty$ donde $f : E \to \mathbb{C}$ es una función medible. Entonces*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{M_p(E)} = \|f\|_{M_\infty(E)} \equiv \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

Demostración.
Considérese $f \in M_p(E)$. Entonces,

$$\|f\|_{M_p(E)} = \sup_{0<t<\mu_N(E)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Ahora para todo $t_k > 0$ se tiene que

$$t_k^{\frac{1}{p}} f^*(t_k) \le \sup_{0<t<\mu_N(E)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \le [\mu_N(E)]^{\frac{1}{p}} f^*(0),$$

haciendo tender p a infinito

$$f^*(t_k) \le \lim_{p\to\infty} \sup_{0<t<\mu_N(E)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \le f^*(0),$$

y como f^* es continua por la derecha, resulta que $f^*(t_k) = f^*(0)$ cuando $t_k \to 0$. Así,

$$f^*(0) \le \lim_{p\to\infty} \sup_{0<t<\mu_N(E)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \le f^*(0).$$

Es decir, $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{M_p(E)} = f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)}$, o sea $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{M_p(E)} = \|f\|_{M_\infty(E)}$. ∎

El siguiente resultado muestra que la constante en la desiguladad coincide con la desiguladad en $L_p(E)$ (ver consecuencia 1.2.11).

Teorema 2.3.2 *Sean $0 < p < q \leq \infty$, $\mu_N(E) < \infty$ y $f \in M_q(E)$. Entonces $f \in M_p(E)$, es decir*

$$M_q(E) \subset M_p(E) \ \ y$$
$$\|f\|_{M_p(E)} \leq [\mu_N(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{M_q(E)}.$$

Observaciones 2.3.3

1. La constante $[\mu_N(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ es exacta.
2. Para $\mu_N(E) < \infty$, se tiene que a mayor indice p, "menor" es el espacio $M_p(E)$. Por eso $M_\infty(E)$ es el más "pequeño"; o sea para todo $p > 0$, $L_\infty(E) \equiv M_\infty(E) \subset M_p(E)$.
3. Si $\mu_N(E) = \infty \; 0 < p < q \leq \infty$ el resultado puede fallar; considérese por ejemplo la función $f(x) = |x|^{-\frac{N}{q}}$ en $\mathbb{R}^N$. Claramente $f \in M_q(\mathbb{R}^N)$ pero $f \notin M_p(\mathbb{R}^N)$.

Demostración.
Sea $f \in M_q(E)$, entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_{M_p(E)} &= \sup_{t\in(0,\mu_N(E))} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{0<t<\mu_N(E)} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} t^{\frac{1}{q}} f^*(t) \\ &\leq \sup_{0<t<\mu_N(E)} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{0<t<\mu_N(E)} t^{\frac{1}{q}} f^*(t) = [\mu_N(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{M_q(E)}.\end{aligned}$$ ■

Teorema 2.3.4 *Sea $h \in \mathbb{R}^N$ y f una función medible en $E + h$ [6]. Entonces*

$$\|f(\cdot + h)\|_{M_p(E)} = \|f\|_{M_p(E+h)}.$$

En particular,

$$\|f(\cdot + h)\|_{M_p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{M_p(\mathbb{R}^N)}.$$

(Invarianza de la $M_p(E)$-norma respecto al desplazamiento).

Demostración.

1. Para $p = \infty$ se tiene que $M_\infty(E) \equiv L_\infty(E)$ y $L_\infty(E)$ es invariante respecto a su norma.

[6] $E + h := \{y \in E + h : y = x + h, \, x \in E\}$

2. Para $0 < p < \infty$ obsérvese que:

$$\|f(\cdot + h)\|_{M_p(E)} = \sup_{t>0} t \left[\lambda_{f(\cdot+h)}(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t \left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{M_p(E+h)}.$$

Puesto que

$$\lambda_{f(\cdot+h)}(t) = \mu_{_N}\{x \in E : |f(x+h)| > t\} = \mu_{_N}\{y \in E+h : |f(y)| > t\} = \lambda_f(t).$$

■

Teorema 2.3.5 (Desigualdad multiplicativa) *Sean $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$. Entonces*

$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \|f\|_{M_{p_1}(E)}^{1-\theta} \|f\|_{M_{p_2}(E)}^{\theta} \quad y$$
$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \left(\frac{p(p_2 - p_1)}{(p-p_1)(p_2-p)}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{M_{p_1}(E)}^{1-\theta} \|f\|_{M_{p_2}(E)}^{\theta};$$

donde el número $\theta \in (0,1)$ se define de la igualdad $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$.

Observación 2.3.6 *Las constantes en las desigualdades anteriores son exactas.*

Para la prueba (véase [1], pags 59-60).

Los siguientes dos resultados muestran que, en cierto sentido los espacios $M_p(E)$ son "intermedios" entre dos espacios de Lebesgue.

Teorema 2.3.7 *Sean $0 < p < \infty$ y $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible. Entonces*

$$L_p(E) \subset M_p(E). \tag{2.12}$$

Además para toda función $f \in L_p(E)$,

$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \|f\|_{L_p(E)}. \tag{2.13}$$

Demostración.
Puesto que la función f^* decrece para todo $t \geq 0$,

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_0^\infty [f^*(s)]^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_0^t [f^*(s)]^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} \geq t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Pasando al supremo respecto a $t \in [0, \infty)$ y de acuerdo con la definición 2.2.6 se obtiene (2.13). La inclusión (2.12) se sigue de (2.13).

■

Teorema 2.3.8 *Sean* $0 < p < \infty$, $0 < \epsilon < p$ *y* $\mu_{_N}(E) < \infty$. *Entonces*

$$M_p(E) \subset L_{p-\epsilon}(E). \tag{2.14}$$

Demostración.
De acuerdo al teorema 2.1.11,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{p-\epsilon}(E)} &= \|f^*\|_{L_{p-\epsilon}(0,\mu_{_N}(E))} = \left\| t^{\frac{1}{p}} f^*(t) t^{-\frac{1}{p}} \right\|_{L_{p-\epsilon}(0,\mu_{_N}(E))} \\ &\leq \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \left\| t^{-\frac{1}{p}} \right\|_{L_{p-\epsilon}(0,\mu_{_N}(E))} = \left[\frac{p}{\epsilon} \left[\mu_{_N}(E)\right]^{\frac{\epsilon}{p}} \right]^{\frac{1}{p-\epsilon}} \|f\|_{M_p(E)}.\end{aligned}$$

De aquí se sigue (2.14). ∎

Observación 2.3.9 *Las contenencias* $L_p(B_r) \subset M_p(B_r) \subset L_{p-\epsilon}(B_r)$ *son estrictas.*

En efecto, al igual que las condiciones que se obtuvieron para que $|x|^\gamma \in L_p(B_r)$ en el ejemplo 2.2.5, $|x|^\gamma \in L_{p-\epsilon}(B_r)$ cuando $-\gamma(p-\epsilon) - N + 1 < 1$, es decir $\gamma > -\frac{N}{p-\epsilon}$. Entonces se tiene que:

$$|x|^\gamma \in \begin{cases} M_p(B_r), & \text{si } \gamma \geq -\frac{N}{p} \\ L_p(B_r), & \text{si } \gamma > -\frac{N}{p} \\ L_{p-\epsilon}(B_r), & \text{si } \gamma > -\frac{N}{p-\epsilon}. \end{cases}$$

De donde se deduce que:

1. Para $\gamma = -\frac{N}{p}$, la función $|x|^{-\frac{N}{p}} \in M_p(B_r)$ pero $|x|^{-\frac{N}{p}} \notin L_p(B_r)$.
2. La desiguladad $-\frac{N}{p} < -\frac{N}{p-\epsilon}$ es estricta, esto indica que $M_p(B_r) \subset L_{p-\epsilon}(B_r)$ estrictamente.

Proposición 2.3.10 *Para cualquier conjunto* $E \subset \mathbb{R}^N$ *de medida no nula la inclusión (2.12) y si* $\mu_{_N}(E) < \infty$ *la inclusión (2.14) son estrictas.*

Demostración.
Caso 1: $L_p(E) \subset M_p(E)$ **estrictamente**.

1. Supóngase inicialmente que $E := B_r$. Entonces
   $|x|^{-\frac{N}{p}} \notin L_p(B_r)$, pero $|x|^{-\frac{N}{p}} \in M_p(B_r)$ ver proposición 2.2.5 (inciso 3).
2. Sea E cualquier conjunto en $\mathbb{R}^N$ de medida positiva. Entonces
   considérese el conjunto $E_0 \subset E$ de medida positiva y finita. Se particiona E_0 en

conjuntos disjuntos E_k, $k \in \mathbb{N}$: $E_0 = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ y $\mu_{_N}(E_k) = 2^{-k}\mu_{_N}(E_0)$.

Se define la función f haciendo para todo $x \in E_k$ y $k \in \mathbb{N}$, $f(x) := 2^{\frac{k}{p}}\chi_{E_k}$. Entonces

$$\|f\|^p_{L_p(E)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu_{_N}(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{_N}(E_0) = \infty.$$

Es decir $f \notin L_p(E)$.

Ahora, según la definición de f, se está en las condiciones del lema 2.1.3 y para $m = \infty$ se tiene

$$c_k := \sum_{l=k}^{\infty} \mu_{_N}(E_l) = \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l}\mu_{_N}(E_0) = 2^{-k+1}\mu_{_N}(E_0).$$

Simbolizando $e_k := \left(2^{-k}\mu_{_N}(E_0),\, 2^{-k+1}\mu_{_N}(E_0)\right)$, $k \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{M_p(E)} &:= \sup_{0<t<\mu_N(E_0)} t\,[f^*(t)]^p = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in e_k} 2^k\, t \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} 2^k\, 2^{-k+1}\mu_{_N}(E_0) = 2\mu_{_N}(E_0) < \infty,\end{aligned}$$

Es decir $f \in M_p(E)$.

Caso 2: $M_p(E) \subset L_{p-\epsilon}(E)$ **estrictamente**.

1. Si $E := B_r$. Entonces
   $-\frac{N}{p-\frac{\epsilon}{2}} < -\frac{N}{p}$ lo que implica que $f(x) := |x|^{-\frac{N}{p-\frac{\epsilon}{2}}} \notin M_p(B_r)$ (proposición 2.2.5).

   Pero $f \in L_{p-\epsilon}(B_r)$, lo que se verifica usando coordenadas esféricas generalizadas:

   $$\|f\|^{p-\epsilon}_{L_p(B_r)} := \int_{B_r} |x|^{-\frac{N(p-\epsilon)}{p-\frac{\epsilon}{2}}}\, dx = (\upsilon_{_N})^{\frac{1}{p-\epsilon}} \int_0^r \rho^{-N-1-\frac{N}{p-\frac{\epsilon}{2}}}\, d\rho.$$

   Obsérvese que la última integral converge cuando $-N-1-\frac{N}{p-\frac{\epsilon}{2}} > -1$, es decir si $\epsilon > 0$.

2. Sea ahora E arbitrario (medible). Razonando similarmente al punto 2 del caso 1 se define, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in E_k$, $f(x) := 2^{\frac{k}{p-\frac{\epsilon}{2}}}\chi_{E_k}$ (en lugar de $f(x) := 2^{\frac{k}{p}}\chi_{E_k}$).

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\|f\|^{p-\epsilon}_{L_{p-\epsilon}(E)} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k(p-\epsilon)}{p-\frac{\epsilon}{2}}}\mu_{_N}(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k(p-\epsilon)}{p-\frac{\epsilon}{2}}}\, 2^{-k}\mu_{_N}(E_0)\\ &= \mu_{_N}(E_0)\sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k(p-\epsilon)}{p-\frac{\epsilon}{2}}-k} = \mu_{_N}(E_0)\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k\epsilon}{2p-\epsilon}} < \infty\end{aligned}$$

La última serie es geométrica de razón $2^{-\frac{\epsilon}{2p-\epsilon}} < 1$ (convergente).

Ahora igual que en el caso anterior f satisface las condiciones del lema 2.1.3 y para $m = \infty$ se tiene:

$$\begin{aligned}\|f\|^{p}_{M_p(E)} &= \sup_{0<t<\mu_{_N}(E_0)} t\,[f^*(t)]^p = \sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{t\in e_k} 2^{\frac{kp}{p-\frac{\epsilon}{2}}}\, t\\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{\frac{kp}{p-\frac{\epsilon}{2}}}\, 2^{-k+1}\mu_{_N}(E_0) = \mu_{_N}(E_0)\sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{\frac{kp}{p-\frac{\epsilon}{2}}-k+1}\\ &= \mu_{_N}(E_0)\sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{\frac{k\epsilon}{2p-\epsilon}+1} = \infty.\end{aligned}$$

Es decir, $f \notin M_p(E)$.

■

Teorema 2.3.11 *Para $0 < p < \infty$ la expresión $\|\cdot\|_{M_p(E)}$ es semicuasinorma en $M_p(E)$.*

Demostración.

1. Para toda función $f \in M_p(E)$ se tiene

$$\|f\|_{M_p(E)} = \sup_{t>0} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

2. Considérese ahora cualquier función $f \in M_p(E)$ y $a \in \mathbb{C}$; entonces para todo $t \geq 0$:
   (a) Si $a \neq 0$ entonces de acuerdo a 1.3 (inciso 4),

$$\sup_{t\in[0,\infty)} t\,[\lambda_{af}(t)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\in[0,\infty)} t\left[\lambda_f\left(\frac{t}{|a|}\right)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{s\in[0,\infty)} |a| s\,(\lambda_f(s))^{\frac{1}{p}}$$

   y según la definición 2.2.1,

$$\|af\|_{M_p(E)} = |a|\,\|f\|_{M_p(E)}\,.$$

   (b) Si $a = 0$ el resultado es trivial.

3. Si $f, g \in M_p(E)$, entonces de acuerdo con el lema 2.2.3, para todo $t \in [0, \infty)$

$$(f+g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right);$$

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}}(f+g)^*(t) &\leq \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}}\left[f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\left[\sup_{s\in[0,\infty)} s^{\frac{1}{p}} f^*(s) + \sup_{s\in[0,\infty)} s^{\frac{1}{p}} g^*(s)\right]\end{aligned}$$

y según la definición 2.2.6,

$$\|f+g\|_{M_p(E)} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\|f\|_{M_p(E)} + \|g\|_{M_p(E)}\right).$$

4. La condición $\|f\|_{M_p(E)} = 0$ implica que $f \approx 0$ sobre E, por esto $\|\cdot\|_{M_p(E)}$ no es cuasinorma.

De esta forma $\|\cdot\|_{M_p(E)}$ es semicuasinorma. ■

Teorema 2.3.12 *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible, $0 < p \leq \infty$. Entonces los espacios $M_p(E)$ son completos.*

Demostración.
Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión fundamental en $M_p(E)$, es decir para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in M_p(E)$ y

$$\|f_k - f_m\|_{M_p(E)} = \sup_{t\in[0,\infty)} t\,\mu_N\{x \in E : |f_k(x) - f_m(x)| > t\}^{\frac{1}{p}} \to 0; \quad k, m \to \infty. \tag{2.15}$$

En particular para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\mu_N\{x \in E : |f_k(x) - f_m(x)| > t\} \to 0.$$

Es decir la sucesión es fundamental en el sentido de la convergencia en medida.

Dada la completitud del espacio de funciones medibles respecto a la convergencia en medida, existe una función f medible en E tal que $f_k \underset{\mu_N}{\rightharpoonup} f$ sobre E [7].

La relación (2.15) significa que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}:\ \forall k, m \geq M,\ \forall t \in [0, \infty),$$

[7] Supóngase que para casi todo $x \in E$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, f son finitas y medibles. Si para todo $\sigma > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu_N\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$. Entonces se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida hacia f, cuando $n \to \infty$ y se simboliza $f \underset{\mu_N}{\rightharpoonup} f$.

$$t\,\mu_{_N}\left\{x\in E : |f_k(x)-f_m(x)|>t\right\}^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $m\to\infty$ se tiene: [8]

$$t\,\mu_{_N}\left\{x\in E : |f_k(x)-f(x)|>t\right\}^{\frac{1}{p}}\le t\,\varliminf_{n\to\infty}\,\mu_{_N}\left\{x\in E : |f_k(x)-f_m(x)|>t\right\}^{\frac{1}{p}}\le\epsilon\,^{9}$$

y esto significa que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\|f_k-f\|_{M_p(E)}\le\epsilon$; o sea $f_k\to f$ en $M_p(E)$. ∎

Notas 2.3.13

1. Como $\|f\|_{M_p(E)}=0$ implica que $f\approx 0$, entonces el elemento neutro en el espacio lineal $M_p(E)$ es toda función que se anula en casi todas partes. Sea

$$\widetilde{\theta}:=\left\{f:E\to\mathbb{C} : f(x)=0,\ p.c.t\ x\in E\right\}.$$

2. El espacio de las clases de equivalencia $\widetilde{M_p}(E)=M_p(E)/\widetilde{\theta}$, consiste en las clases $\widetilde{f}$ de subconjuntos de $M_p(E)$ tales que en una clase se encuentran todas las funciones que difieren a lo sumo en un conjunto de medida cero.

Observación 2.3.14 *Para $0<p<\infty$, $\widetilde{M_p}(E)$ son espacios cuasibanach.*

Es constumbre no hacer diferencia entre $\widetilde{M_p}(E)$ y $M_p(E)$. En adelante por $M_p(E)$ se entenderá $\widetilde{M_p}(E)$.

La última definión para $M_p(E)$ que se presenta a continuación, es quizá una de las más relevalentes para $M_p(E)$; con ella el espacio es de Banach.

Definición 2.3.15 *Sea $1<p\le\infty$ y $f:E\to\mathbb{C}$ una función medible. Se dice que $f\in M_p(E)$ si*

$$\|f\|^{(3)}_{M_p(E)}:=\sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_{_N}(F)]^{-\frac{1}{p'}}\int\limits_F |f(x)|\,dx\right\}<\infty. \tag{2.16}$$

El supremo se toma respecto a todos los subconjuntos medibles F del conjunto E.

[8] Hemos utilizado el siguiente análogo del teorema de Fatou, el cual es válido incluso si $f_k\to f$ sobre E en medida: Si la función f y para todo $k\in\mathbb{N}$ las funciones f_k son medibles y además $f_k\to f$ sobre E en medida. Entonces para todo $t\ge 0$,

$$\mu_{_N}\left\{x\in E : |f(x)|>t\right\}\le\varliminf_{k\to\infty}\,\mu_{_N}\left\{x\in E : |f_k(x)|>t\right\}.$$

[9] Dada una sucesión $\{a_n\}$, el mínimo de todos los límites de subsucesiones se llama límite inferior de $\{a_n\}$ y se nota: $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Del siguiente lema se deduce que para $1 < p \leq \infty$, el espacio $M_p(E)$ es de Banach.

Lema 2.3.16 *Para $1 < p \leq \infty$ las definiciones 2.2.1, 2.2.6 y 2.3.15 son equivalentes y además para toda $f \in M_p(E)$,*

$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} \leq p' \|f\|_{M_p(E)} . \tag{2.17}$$

En particular,

$$\|f\|_{M_\infty(E)} = \|f\|^{(3)}_{M_\infty(E)} \ \left(= \|f\|_{L_\infty(E)}\right).$$

Demostración.
Se va a considerar lo siguiente:

1. Si $\|f\|_{M_p(E)} = 0$. Entonces f es equivalente a 0 sobre E (ver lema 2.2.4) y las desigualdades (2.17) son triviales.

2. Supóngase que $\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} > 0$. Entonces para cualquier conjunto medible $F \subset E$,

$$\int\limits_F |f(x)|dx \leq [\,\mu_{_N}(F)]^{-\frac{1}{p'}} \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} .$$

   En particular para todo $t \in [0, \infty)$, considérense los conjuntos $E_t := \{x \in E : |f(x)| > t\}$ y defínase $F := E_t$. Entonces según con la definición de λ_f se tiene:

$$\int\limits_{E_t} |f(x)|\,dx \leq [\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p'}} \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} .$$

   De otra parte, puesto que para todo E_t, $|f(x)| > t$ entonces

$$\int\limits_{E_t} |f(x)|\,dx \geq t\,\mu_{_N}(E_t) = t\,\lambda_f(t).$$

   Esto significa que

$$t\lambda_f(t) \leq [\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p'}} \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} .$$

   Puesto que $\lambda_f(t) > 0$ para $t < \|f\|_{L_\infty(E)}$ (ver lema 1.3.7), entonces para todo $t \in [0, \mu_{_N}(E))$,

$$t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} = t\,[\lambda_f(t)]^{1-\frac{1}{p'}} \leq \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} .$$

   Finalmente, pasando al supremo respecto a $t \in [0, \mu_{_N}(E))$, se obtiene la desigualdad izquierda de (2.17).

3. Sea ahora $\|f\|_{M_p(E)} \equiv \|f\|^{(2)}_{M_p(E)} < \infty$. Entonces de acuerdo con la desigualdad (2.4), para cualquier conjunto $F \subset E$ de medida positiva,

$$\int_F |f(x)|\,dx \leq \int_0^{\mu_N(F)} f^*(t)\,dt = \int_0^{\mu_N(F)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) t^{-\frac{1}{p}}\,dt$$

$$\leq \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \int_0^{\mu_N(F)} t^{-\frac{1}{p}}\,dt = p'\,[\mu_N(F)]^{\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{M_p(E)}\,,$$

De aquí dividiendo entre $[\,\mu_N(F)]^{\frac{1}{p'}}$ y pasando al supremo respecto a F, se obtiene la desigualdad derecha de (2.17).

El caso donde la medida de F es cero el resultado es trivial.

■

Observación 2.3.17 *Para $0 < p \leq 1$, $\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} = [\,\mu_N(E)]^{-\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{L_1(E)}$ y la definición 2.3.15 no es equivalente a las definiciones 2.2.1 y 2.2.6, lo que se sigue de los lemas 2.3.7, 2.3.8 y la proposición 2.3.10.*

En efecto, obsérvese que $\|f\|^{(3)}_{M_p(E)}$ tiene sentido cuando $\mu_N(E) < \infty$ y además,

1. Para $0 < p < 1$ se tiene que $p' = \frac{p}{p-1} < 0$ y

$$\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} = \sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_N(F)]^{-\frac{1}{p'}} \int_F |f(x)|\,dx\right\} = [\,\mu_N(E)]^{-\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{L_1(E)}\,.$$

2. Para $p = 1$, $p' := \infty$ y $\|f\|^{(3)}_{M_1(E)} = \|f\|_{L_1(E)}$, de donde se deduce que $M_1(E) = L_1(E)$.

Lo anterior muestra que para $0 < p \leq 1$ los espacios $M_p(E)$ con esta definición coinciden con $L_p(E)$, en contradicción con las contenencias estrictas que se tienen entre $M_p(E)$ y $L_p(E)$ dadas las definiciones 2.2.1, 2.2.6 y proposición 2.3.10. Es por ello que en la definición de $\|f\|^{(3)}_{M_p(E)}$ se considera solamente el caso $p > 1$.

Teorema 2.3.18 *Para $1 < p \leq \infty$ la expresión $\|\cdot\|^{(3)}_{M_p(E)}$ es norma en $M_p(E)$.*

Demostración.
Sean $a \in \mathbb{C}$ y $f, g \in M_p(E)$, entonces

1. Para una función $f \in M_p(E)$

$$\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} := \sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_N(F)]^{-\frac{1}{p'}}\int\limits_F |f(x)|\,dx\right\} \geq 0.$$

2. Para $a \in \mathbb{C}$ y $f \in M_p(E)$

$$\begin{aligned}\|af\|^{(3)}_{M_p(E)} &:= \sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_N(F)]^{-\frac{1}{p'}}\int\limits_F |af(x)|\,dx\right\} = |a|\sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_N(F)]^{-\frac{1}{p'}}\int\limits_F |f(x)|\,dx\right\}\\ &= |a|\,\|f\|^{(3)}_{M_p(E)}\,.\end{aligned}$$

3. Para $f+g \in M_p(E)$

$$\begin{aligned}\|f+g\|^{(3)}_{M_p(E)} &:= \sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_N(F)]^{-\frac{1}{p'}}\int\limits_F |f(x)+g(x)|\,dx\right\}\\ &\leq \sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_N(F)]^{-\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_F |f(x)|\,dx + \int\limits_F |g(x)|\,dx\right)\right\}\\ &\leq \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} + \|g\|^{(3)}_{M_p(E)}\,.\end{aligned}$$

O sea $\|\cdot\|^{(3)}_{M_p(E)}$ es una norma. ∎

Observación 2.3.19

La completitud respecto a $\|\cdot\|^{(3)}_{M_p(E)}$ se sigue de la desigualdad (2.17) y de la completitud respecto a la cuasinorma $\|\cdot\|_{M_p(E)}$.

El presente trabajo concluye con la siguiente aplicación de la teoría hasta aquí desarrollada para las clases $M_p(E)$. Esta aplicación muestra en particular la relevancia de considerar clases mas amplias que $L_p(E)$.

2.4 Desigualdad de O'Neil para convoluciones

En la teoría de los espacios de Lebesgue es conocida la desigualdad de Young para convoluciones:
Sean $1 \leq p \leq q \leq \infty,\; f \in L_r(\mathbb{R}^N),\; g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$.
Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$ existe la convolución $f * g \in L_q\left(\mathbb{R}^N\right)$ y

$$\|f*g\|_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^N)}\,\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}\,. \tag{2.18}$$

Además en los casos:

1. Para $p = 1$, $r = q$.

2. Para $p = q$, $r = 1$.

3. Para $q = \infty$, $r = p'$.

La desigualdad 2.18 es en cierto sentido "inmejorable". Sin embargo, para el caso $1 < p < q < \infty$ la desigualdad 2.18 puede ser precisada.

Teorema 2.4.1 (O'Neil) *Sean $1 < p < q < \infty$ y el número r se define mediante la igualdad $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$, entonces para $f \in M_r(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ se tiene que para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$ existe la convolución $(f * g)(x)$ y para cierta constante $c > 0$ dependiente de p, q y N,*

$$\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leq c \|f\|_{M_r(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} . \tag{2.19}$$

Puesto que bajo estas suposiciones $r < \infty$ y la inclusión $L_r\left(\mathbb{R}^N\right) \subset M_r\left(\mathbb{R}^N\right)$ es estricta, entonces puede suceder que la desigualdad 2.18 no permita concluir que es finita la expresión $\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}^N)}$ o incluso no permita concluir la existencia de la convolución, en tanto que la desigualdad 2.19 permitiría hacerlo.

La demostración de este teorema puede hallarse en [9].

Apéndice

A continuación se ilustra mediante un ejemplo la sucesión $\{f_k\}$ a la que se hace referencia en el capítulo 1.

$f_k = \dfrac{|[\,2^k|f(x)|\,]|}{2^k}\chi_{_{E(k)}}(x)\,$, donde $E(k) := \{x \in E : |x| \le k,\ |f(x)| \le k\}$.

Sea $E = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$. Es claro que para todo $x \ge 0$, $f(x) \ge 0$.

1. Para $k = 1$ se tiene:

$f_1(x) \ = \ \dfrac{|[\,2\sqrt{x}\,]|}{2}\chi_{_{E(1)}}(x)\,$, donde $E(1) \ := \ \{x \in E : 0 \le x \le 1,\ 0 \le \sqrt{x} \le 1\} \ = \ [0, 1]$.

Así,

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} |[\,2\sqrt{x}\,]|, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Obsérvese que:

$$0 \le x \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le \sqrt{x} \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le 2\sqrt{x} \le 2\,.$$

Luego $|[\,2\sqrt{x}\,]|$ puede tomar los valores $0, 1$ o 2.

(a) $0 \le x < \dfrac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le \sqrt{x} < \dfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le 2\sqrt{x} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |[\,2\sqrt{x}\,]| = 0$

(b) $\dfrac{1}{4} \le x < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{1}{2} \le \sqrt{x} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \le 2\sqrt{x} < 2 \qquad \Rightarrow \qquad |[\,2\sqrt{x}\,]| = 1$

(c) $x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |[\,2\sqrt{x}\,]| = 2$.

Así,

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } \ \frac{1}{4} \le x < 1 \\ 1, & \text{si } \ x = 1 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

2. Para $k = 2$ se tiene:

$f_2(x) \;=\; \dfrac{|[\,4\sqrt{x}\,]|}{4}\chi_{_{E(2)}}(x)\,,$ donde $E(2) \;:=\; \{x \in E : 0 \le x \le 2,\; 0 \le \sqrt{x} \le 2\} \;=\; [0,2].$
Así,

$$f_2(x) = \frac{1}{4}\begin{cases} |[\,4\sqrt{x}\,]|, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Obsérvese que

$$0 \le x \le 2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le 4\sqrt{x} \le 4\sqrt{2}\,.$$

Luego $|[\,4\sqrt{x}\,]|$ toma cada uno de los valores $0, 1, 2, 3, 4$ o 5.

$$\begin{array}{lllllllll}
(a)\; 0 \le x < \frac{1}{16} & \Rightarrow & 0 \le \sqrt{x} < \frac{1}{4} & \Rightarrow & 0 \le 4\sqrt{x} < 1 & \Rightarrow & |[\,4\sqrt{x}\,]| = 0 \\
(b)\; \frac{1}{16} \le x < \frac{1}{4} & \Rightarrow & \frac{1}{4} \le \sqrt{x} < \frac{1}{2} & \Rightarrow & 1 \le 4\sqrt{x} < 2 & \Rightarrow & |[\,4\sqrt{x}\,]| = 1 \\
(c)\; \frac{1}{4} \le x < \frac{9}{16} & \Rightarrow & \frac{1}{2} \le \sqrt{x} < \frac{3}{4} & \Rightarrow & 2 \le 4\sqrt{x} < 3 & \Rightarrow & |[\,4\sqrt{x}\,]| = 2 \\
(d)\; \frac{9}{16} \le x < 1 & \Rightarrow & \frac{3}{4} \le \sqrt{x} < 1 & \Rightarrow & 3 \le 4\sqrt{x} < 4 & \Rightarrow & |[\,4\sqrt{x}\,]| = 3 \\
(e)\; 1 \le x < \frac{25}{16} & \Rightarrow & 1 \le \sqrt{x} < \frac{5}{4} & \Rightarrow & 4 \le 4\sqrt{x} < 5 & \Rightarrow & |[\,4\sqrt{x}\,]| = 4 \\
(f)\; \frac{25}{16} \le x < \frac{36}{16} & \Rightarrow & \frac{5}{4} \le \sqrt{x} < \frac{6}{4} & \Rightarrow & 5 \le 4\sqrt{x} < 6 & \Rightarrow & |[\,4\sqrt{x}\,]| = 5.
\end{array}$$

Así,

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } \frac{1}{16} \le x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} \le x < \frac{9}{16} \\ \frac{3}{4}, & \text{si } \frac{9}{16} \le x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \le x < \frac{25}{16} \\ \frac{5}{4}, & \text{si } \frac{25}{16} \le x < 2 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

3. Para $k = 3$ se tiene:
$f_3(x) \;=\; \dfrac{|[\,8\sqrt{x}\,]|}{4}\chi_{_{E(3)}}(x)\,,$ donde $E(3) \;:=\; \{x \in E : 0 \le x \le 3,\; 0 \le \sqrt{x} \le 3\} \;=\; [0,3].$
Así,

$$f_3(x) = \frac{1}{8}\begin{cases} |[\,8\sqrt{x}\,]|, & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Obsérvese que:

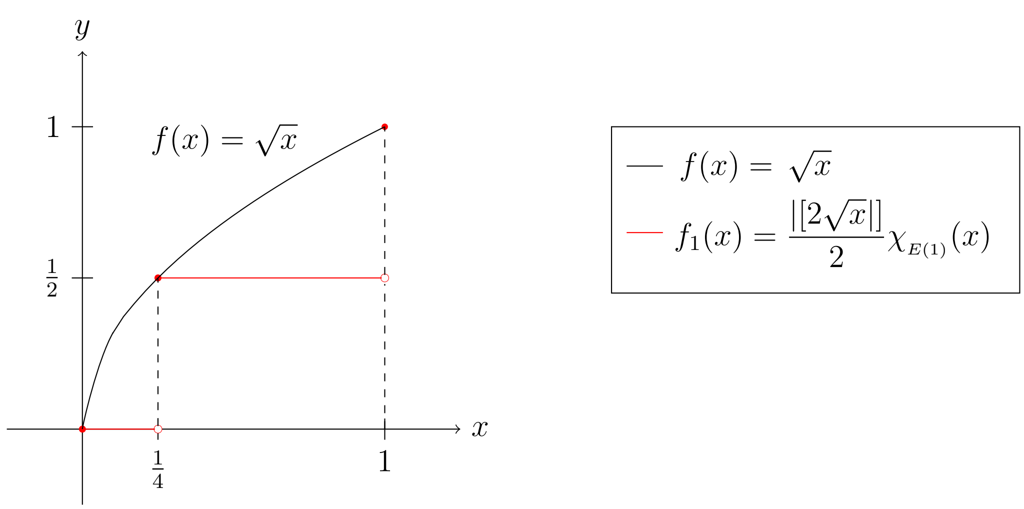
$$0 \le x \le 3 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le 8\sqrt{x} \le 8\sqrt{3}\,.$$

Luego $|[\,8\sqrt{x}\,]|$ toma cada uno de los valores $0, 1, \cdots, 12$ o 13.

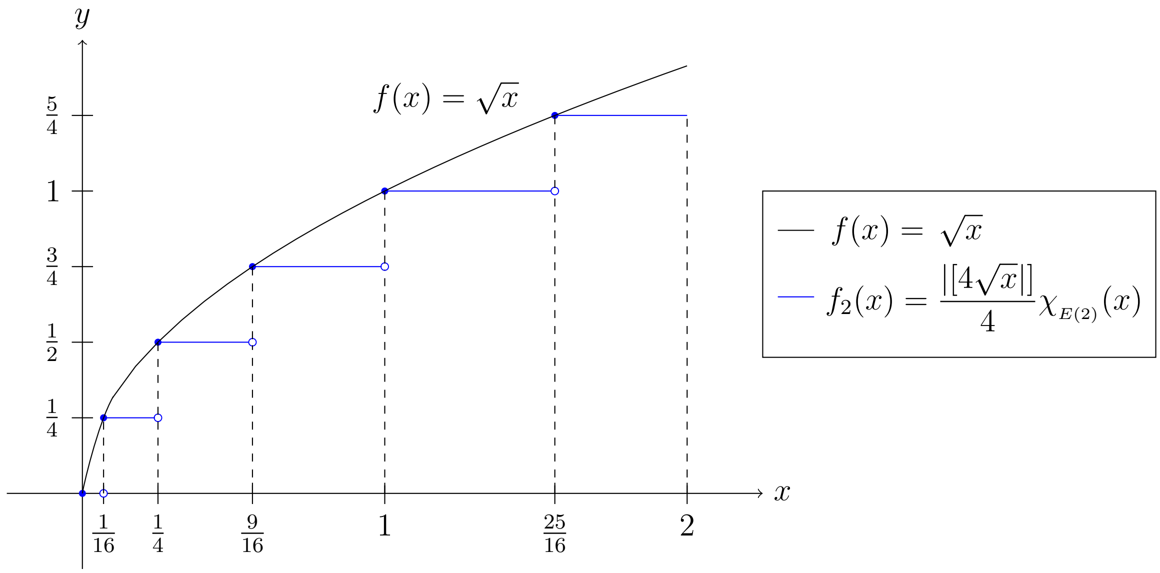
$$\begin{array}{llllllll}
(a) & 0 \le x < \dfrac{1}{64} & \Rightarrow & 0 \le \sqrt{x} < \dfrac{1}{8} & \Rightarrow & 0 \le 8\sqrt{x} < 1 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 0 \\
(b) & \dfrac{1}{64} \le x < \dfrac{1}{16} & \Rightarrow & \dfrac{1}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{1}{4} & \Rightarrow & 1 \le 8\sqrt{x} < 2 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 1 \\
(c) & \dfrac{1}{16} \le x < \dfrac{9}{64} & \Rightarrow & \dfrac{1}{4} \le \sqrt{x} < \dfrac{3}{8} & \Rightarrow & 2 \le 8\sqrt{x} < 3 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 2 \\
(d) & \dfrac{9}{64} \le x < \dfrac{1}{4} & \Rightarrow & \dfrac{3}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & 3 \le 8\sqrt{x} < 4 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 3 \\
(e) & \dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{25}{64} & \Rightarrow & \dfrac{1}{2} \le \sqrt{x} < \dfrac{5}{8} & \Rightarrow & 4 \le 8\sqrt{x} < 5 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 4 \\
(f) & \dfrac{25}{64} \le x < \dfrac{36}{64} & \Rightarrow & \dfrac{5}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{6}{8} & \Rightarrow & 5 \le 8\sqrt{x} < 6 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 5 \\
(g) & \dfrac{36}{64} \le x < \dfrac{49}{64} & \Rightarrow & \dfrac{6}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{7}{8} & \Rightarrow & 6 \le 8\sqrt{x} < 7 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 6 \\
(h) & \dfrac{49}{64} \le x < 1 & \Rightarrow & \dfrac{7}{8} \le \sqrt{x} < 1 & \Rightarrow & 7 \le 8\sqrt{x} < 8 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 7 \\
(i) & 1 \le x < \dfrac{81}{64} & \Rightarrow & 1 \le \sqrt{x} < \dfrac{9}{8} & \Rightarrow & 8 \le 8\sqrt{x} < 9 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 8 \\
(j) & \dfrac{81}{64} \le x < \dfrac{100}{64} & \Rightarrow & \dfrac{9}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{10}{8} & \Rightarrow & 9 \le 8\sqrt{x} < 10 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 9 \\
(k) & \dfrac{100}{64} \le x < \dfrac{121}{64} & \Rightarrow & \dfrac{10}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{11}{8} & \Rightarrow & 10 \le 8\sqrt{x} < 11 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 10 \\
(l) & \dfrac{121}{64} \le x < \dfrac{144}{64} & \Rightarrow & \dfrac{11}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{12}{8} & \Rightarrow & 11 \le 8\sqrt{x} < 12 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 11 \\
(m) & \dfrac{144}{64} \le x < \dfrac{169}{64} & \Rightarrow & \dfrac{12}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{13}{8} & \Rightarrow & 12 \le 8\sqrt{x} < 13 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 12 \\
(n) & \dfrac{169}{64} \le x < \dfrac{196}{64} & \Rightarrow & \dfrac{13}{8} \le \sqrt{x} < \dfrac{14}{8} & \Rightarrow & 13 \le 8\sqrt{x} < 14 & \Rightarrow & |[8\sqrt{x}]| = 13\,.
\end{array}$$

Así,

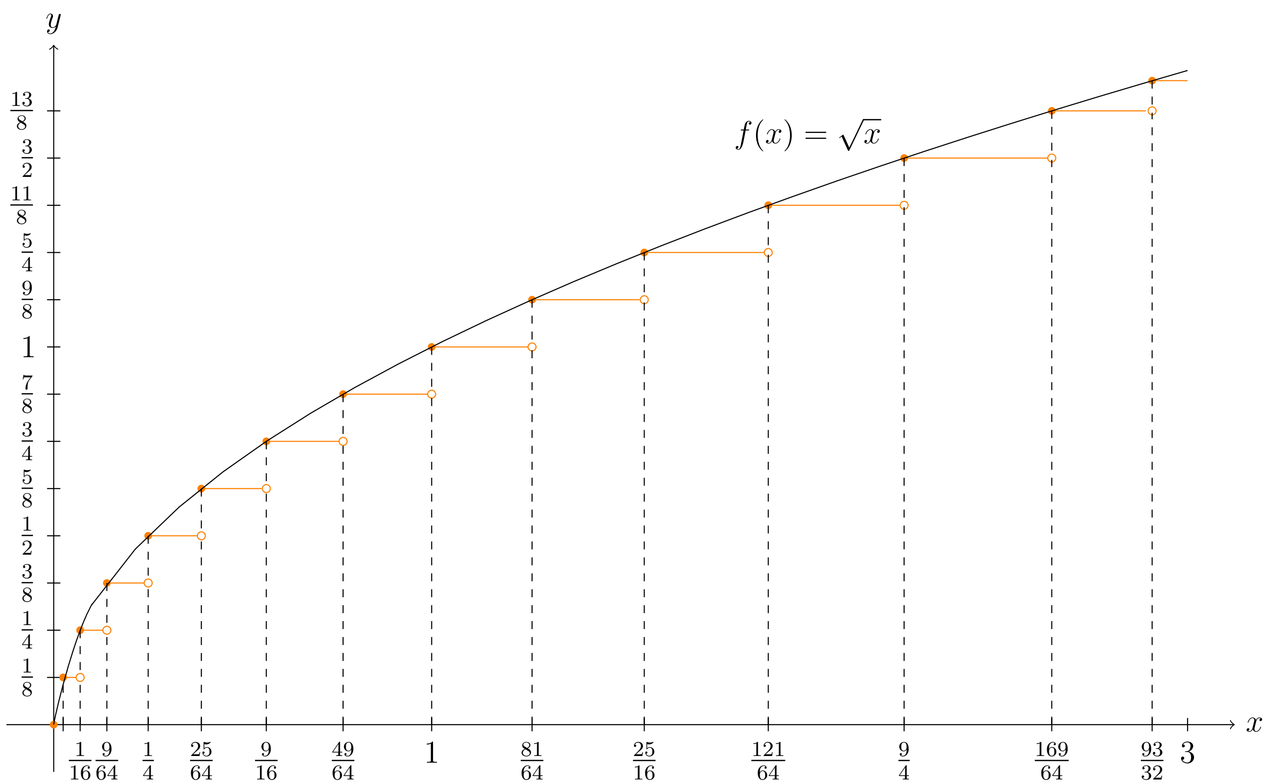
$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si } \frac{1}{64} \le x < \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4}, & \text{si } \frac{1}{16} \le x < \frac{9}{64} \\ \frac{3}{8}, & \text{si } \frac{9}{64} \le x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} \le x < \frac{25}{64} \\ \frac{5}{8}, & \text{si } \frac{25}{64} \le x < \frac{9}{16} \\ \frac{3}{4}, & \text{si } \frac{9}{16} \le x < \frac{49}{64} \\ \frac{7}{8}, & \text{si } \frac{49}{64} \le x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \le x < \frac{81}{64} \\ \frac{9}{8}, & \text{si } \frac{81}{64} \le x < \frac{25}{16} \\ \frac{5}{4}, & \text{si } \frac{25}{16} \le x < \frac{121}{64} \\ \frac{11}{8}, & \text{si } \frac{121}{64} \le x < \frac{9}{4} \\ \frac{3}{2}, & \text{si } \frac{9}{4} \le x < \frac{169}{64} \\ \frac{13}{8}, & \text{si } \frac{169}{64} \le x < \frac{93}{32} \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$



Gráfica 1

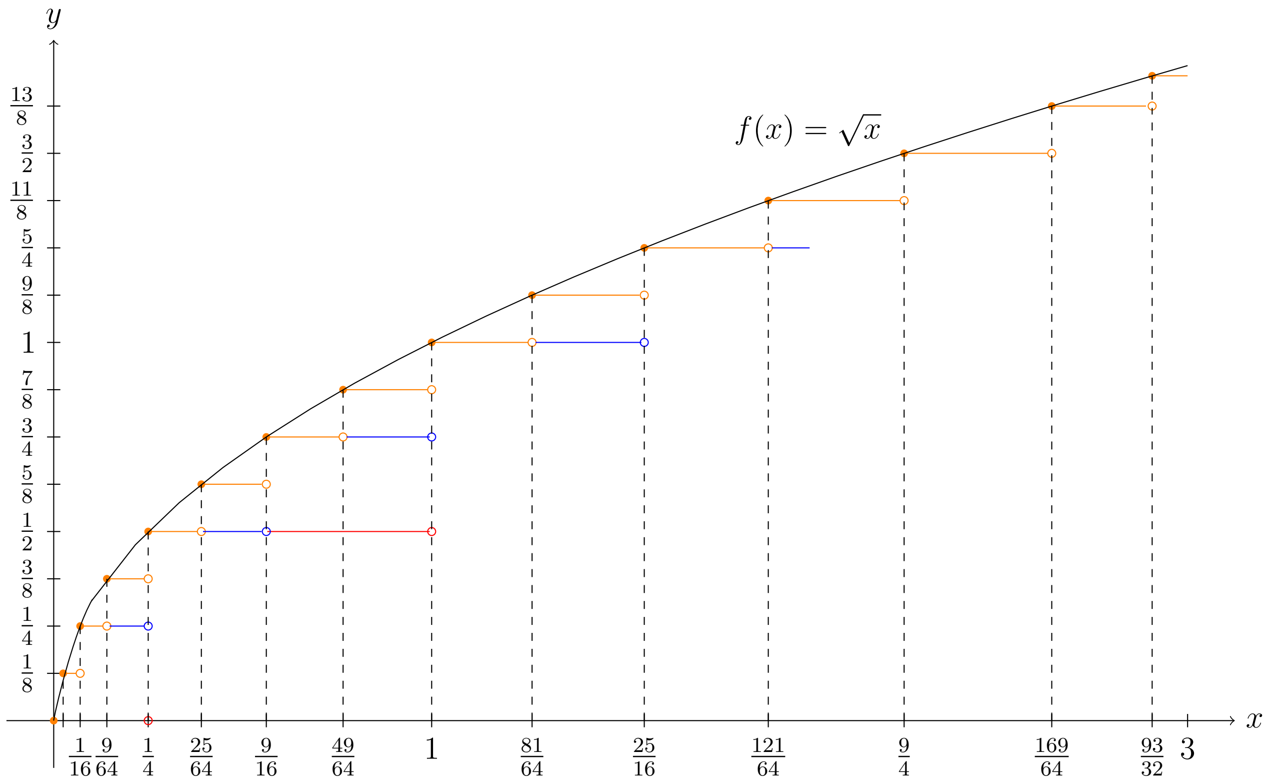


Gráfica 2



Gráfica 3

En la gráfica 4 se observa que $f_1 \leq f_2 \leq f_3$; además se cumple que
$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.


y
x
f(x) = √x
13/8
3/2
11/8
5/4
9/8
1
7/8
3/4
5/8
1/2
3/8
1/4
1/8
1/16
9/64
1/4
25/64
9/16
49/64
1
81/64
25/16
121/64
9/4
169/64
93/32
3

Gráfica 4

Bibliografía

[1] Burenkov, V.I. *Espacios Funcionales. Desigualdades integrales Fundamentales, relacionadas con los espacios Lp*. Primera edición, Editorial U.D.N. Moscú, 1989

[2] Burenkov, V.I. *Espacios Funcionales. Espacios L_p*. Editorial U.D.N. Moscú, 1987

[3] Burenkov, V.I, Goldman, M.L. *Recomendaciones metodológicas para el estudio del curso Espacios Funcionales*. Editorial U.D.N. Moscú, 1992

[4] Guillermo Restrepo. *Teoría de la Integración*. Primera edición, Editorial Universidad del Valle, Cali Colombia, 2004

[5] Hardy, G.H. Littlewood, J.E. *Inequalities*. Primera edición, Editorial CUP. New York, 1934

[6] Kolmogorov, A.N. Fomin, S.V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Tercera edición, Editorial Mir, Moscú, 1978

[7] Kudriávtsev, L.D. *Curso de Análisis Matemático*. Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú, 1983

[8] Natanson, I.P. *Theory of functions of a real variable*. Tomos I y II. Editorial Frederick Ungar Publishing Co New York, 1964

[9] O'Neil R. *Convolution operators and $L(p, q)$ spaces*. Duke Math J. 1963

[10] P.L. Ulyánov, M.I. Dyáchenko. *Análisis Real. Medida e Integración*. Editorial Addison-Wesley Madrid, 2000

[11] Wheeden, R.L, Zigmund, A. *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis*. Editorial M. Dekker, 1977

[12] http:// www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/Dabrhens.pdf