COMPARACIÓN DE LA DERIVADA GENERALIZADA Y LA DERIVADA DÉBIL SEGÚN S.L. SOBÓLEV

JULIÁN EDUARDO HOYOS OROZCO
ARY FABIÁN VOLVERÁS ESPINOSA

Director
Mg. JHON JAIRO PÉREZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES,
EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA

2010

COMPARACIÓN DE LA DERIVADA GENERALIZADA Y LA DERIVADA DÉBIL SEGÚN S.L. SOBÓLEV

JULIÁN EDUARDO HOYOS OROZCO
ARY FABIÁN VOLVERÁS ESPINOSA

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director
Mg. JHON JAIRO PÉREZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA

2010

Nota de aceptación

Director

Mg Jhon Jairo Pérez

Comité evaluador

Ph.D Francisco Enríquez

Ph.D Ramiro Acevedo

Fecha de sustentación: Popayán, 31 mayo de 2010

Este trabajo se hizo posible gracias a Dios y a todas aquellas personas que nos brindaron su apoyo y paciencia durante el proceso. También agradecemos de todo corazón a nuestros padres y amigos por haber confiado siempre en nosotros

Agradecimientos

Al profesor Jhon Jairo Pérez por su valiosa colaboración.

A los miembros del comité de seguimiento por todos sus aportes.

A la Universidad del Cauca.

A todos aquellas personas que de una u otra forma colaboraron en la realización del presente trabajo.

Índice general

Introducción

Es bien conocido que el concepto clásico de derivada resulta insuficiente para abordar problemas prácticos, en particular en la física teórica y la física matemática. Así, la resolución de problemas con condiciones iniciales y de frontera para ciertas ecuaciones diferenciales, requiere de métodos y teorías mas avanzadas que las que proporciona el cálculo diferencial.

Ciertas idealizaciones propias de la física, tales como densidad de una carga puntual, densidad de un punto material, impulso instantáneo, etc, encuentran un tratamiento riguroso solamente bajo el enfoque de la teoría de funciones generalizadas y las llamadas distribuciones de crecimiento lento. Es justo en este ámbito formalizado por Laurent Schwartz (1915-2002) que es posible extender la noción de derivada para un tipo de funciones mas amplio, que la clase de funciones continuas.

En los años 30 del siglo XX, el matemático ruso Serguei Lvóvich Sóbolev introdujo y estudió los espacios seminormados $W_p^l(\Omega)$ $(\mathbb{R}^n \supset \Omega - abierto,\ 1 \leq p \leq \infty,\ l \in \mathbb{N})$, llamados en la actualidad espacios de Sóbolev, que juegan un papel fundamental en la teoría de las ecuaciones diferenciales y la física matemática. Para definir la clase W_p^l, (donde el índice $l \in \mathbb{N}$ refleja la suavidad de las funciones) es indispensable extender el concepto de derivada. Esto se hace a partir de ciertas representaciones integrales: se hace posible entonces definir la derivada generalizada según Sóbolev para funciones localmente Lebesgue - sumables. Esta última clase es mucho mas amplia que la clase de funciones continuas.

Las dos generalizaciones de diferenciación arriba descritas tienen la particularidad de coincidir con la diferenciación clásica, en el caso de funciones con suficiente suavidad. No obstante, existen diferencias sustanciales entre ellas.

En el programa de matemáticas no se cuenta con un curso formal sobre estos tópicos, los cuales en opinión de los autores del presente trabajo, revisten especial interés. Estas razones motivaron a los autores a profundizar en dicha temática, con el fin de establecer ciertas similitudes y diferencias entre estas tres nociones.
El trabajo tendrá como eje principal el análisis funcional, concretamente los espacios de Hilbert, la teoría de las funciones generalizadas y la noción de derivada en el sentido de S.L. Sóbolev, conceptos ampliamente utilizados en la teoría de las ecuaciones diferenciales y en la física matemática.

Para el desarrollo del trabajo se hacen necesarios ciertos conceptos específicos del análisis matemático, tales como la teoría de funcionales lineales, los espacios de Hilbert, y los espacios de funciones de prueba.
El objetivo general de este trabajo es estudiar la derivada generalizada y la derivada débil según S.L. Sóbolev, y algunos de los objetivos específicos son:

- Estudiar elementos de la teoría de las funciones generalizadas.
- Analizar las propiedades fundamentales de la derivada generalizada y la derivada débil en el sentido de S.L. Sóbolev.
- Establecer diferencias y similitudes entre estos dos modelos de diferenciación.
- Estudiar la relación entre la derivada clásica y las derivadas generalizadas.

Notaciones

$\mathbb{R}$	campo ordenado de los números reales
$\mathbb{C}$	campo de los números complejos
$\mathbb{R}^N$	$\{(x_1, x_2, ..., x_N) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, ..., N\}$
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{N}_0$	conjunto de enteros no negativos :$\{0, 1, 2, \cdots\}$
$\overline{\Omega}$	adherencia del conjunto Ω
$B\,(x_0, r)$	bola abierta, centrada en x_0, y de radio $r > 0$
$\dot{\forall}$	para casi todo
$m\,(\Omega)$	medida (de Lebesgue) del conjunto Ω
$Supp\,f$	soporte de la función f
$C^k(\Omega)$	espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en $\Omega\ \subset\ \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0$
$C_0(\Omega)$	espacio de funciones continuas de soporte compacto en Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω
$\int_\Omega f(x)\,dx$	integral de Lebesgue de la función f sobre Ω
$\rightrightarrows$	convergencia uniforme
$\square$	culminación de una demostración

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo abordaremos de manera esencial las definiciones necesarias y algunos teoremas fundamentales de la teoría de espacios lineales, los cuales son la principal herramienta usada en esta tesis.

Los resultados expuestos en esta sección son considerados auxiliares, algunos de estos serán citados sin demostración, pero con su respectiva referencia bibliográfica.

Definición 1. *Sea H un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*
Una norma es una función

$$\|.\|_H : H \to [0, \infty)$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in H$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \|\alpha x\|_H = |\alpha| \, \|x\|_H$;

2. $\forall x, y \in H \quad \|x + y\|_H \leq \|x\|_H + \|y\|_H$;

3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_H$, *($0_H$ es el neutro aditivo de H).*

Definición 2. *Un espacio lineal H dotado de una norma se llama espacio normado, y se denota $(H, \|.\|_H)$.*

Ejemplo 1. *Para $1 \leq p < \infty$, en el espacio de sucesiones*

$$l_p := \left\{ x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad x_j \in \mathbb{C} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\},$$

definimos la norma

$$\|x\|_{l_p} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es facil ver que $\left(l_p, \|.\|_{l_p}\right)$ *es espacio normado (Ver [7] Tomo II, Pág. 430).*

Para $p = \infty$ *el espacio* l_∞ *consta de sucesiones acotadas. La norma se define como:*

$$\|x\|_{l_\infty} := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|.$$

Nota 1. *En adelante consideraremos a* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *un conjunto medible según Lebesgue.*

Ejemplo 2. *Sea* $1 \leq p < +\infty$. *El conjunto*

$$L_p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad medible \quad y \quad \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Es facil ver que $\left(L_p(\Omega), \|.\|_{L_p(\Omega)}\right)$ *es un espacio normado con la norma definida mediante:*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Si $p = \infty$, $L_\infty(\Omega)$ *consta de todas las funciones medibles según Lebesgue* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que son esencialmente acotadas en* Ω, *es decir, que* f *es acotada en* Ω *excepto (posiblemente) en un subconjunto de medida cero. La norma en* $L_\infty(\Omega)$ *es la norma del supremo esencial:*

$$\sup_{x \in \Omega} vrai |f(x)| := \inf_{T \in \Omega : m(T) = 0} \sup_{x \in \Omega \setminus T} |f(x)|.$$

$L_\infty(\Omega)$ *es espacio normado (Ver [8], Pág. 155).*

Definición 3. *Sean* $(H, \|.\|_H)$ *un espacio normado y* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* H.

1. *La sucesión* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *se dice convergente a* $x \in H$ *si* $\forall\epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall j > n_0 \quad \|x_j - x\|_H < \epsilon$.

2. *La sucesión* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *se dice de Cauchy (o fundamental) si* $\forall\epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall j, k > n_0 \quad \|x_j - x_k\|_H < \epsilon$.

Si $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *converge a* $x \in H$ *se escribe* $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x$, *o bién* $x_j \to x$ *en* H $(j \to \infty)$. *Es claro que* $x_j \to x$ *en* H $(j \to \infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to\infty} \|x_j - x\|_H = 0$.
Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero en algunos espacios no toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 4. *Decimos que un espacio lineal normado* $(H, \|.\|_H)$ *es completo si toda sucesión de cauchy converge en* $(H, \|.\|_H)$.
Un espacio lineal normado completo se llama espacio de Banach.

Ejemplo 3. *Los espacios* $\left(l_p, \|.\|_{l_p}\right)$ *y* $\left(L_p(\Omega), \|.\|_{L_p(\Omega)}\right)$ *con* $1 \le p \le \infty$ *son espacios de Banach (Ver [8], Pág. 163).*

Definición 5. *(***Producto Interior***) Un producto interior sobre el espacio lineal* H, *es una función* $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, *con las siguientes propiedades:*

1. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y* $\forall x, y, z \in H \quad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle$.

2. $\forall\, x, y \in H \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad$ *(*$\overline{\langle .,. \rangle}$ *es el conjugado complejo de* $\langle .,. \rangle$ *).*

3. $\forall\, x \in H \quad \langle x, x\rangle \ge 0$.

4. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_H$.

Un espacio lineal H *dotado de un producto interior se llama espacio euclídeo, y se denota* $(H, \langle . \rangle)$.

Definición 6. *(***Espacio de Hilbert***)*

Si $(H, \langle . \rangle)$ es espacio lineal con producto interior y es completo bajo la norma inducida por el producto interior, decimos entonces que H es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 4. *El conjunto*

$$L_2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad medible \quad y \quad \int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

es un espacio Hilbert, con el producto interior dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) \, dx,$$

donde $f, g \in Ł_2(\Omega)$ (Ver [6], Pág. 426).

Definición 7. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definimos el soporte de f por*

$$Supp\, f := \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}.$$

Es decir, el soporte de la función f es el "mayor" conjunto cerrado donde la función no se anula.

Ejemplo 5. *Sea la función*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ 1 + x & si \quad -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El soporte de $h(x)$ es el segmento $[-1, 1]$.

Observaciones.

1. Por fuera del $Supp\, f$ la función se anula.

2. Si $Supp\, f$ es acotado entonces se dice que f es una función de soporte compacto. Así la función h del ejemplo 5 es de soporte compacto.

3. f es de soporte compacto si y sólo si $f(x) = 0$ fuera de algún compacto.

Ejemplo 6. *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin (a,b) \\ e^{-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2}} & si \quad a < x < b \end{cases}$$

f así definida es de soporte compacto: Supp $f = [a,b]$.

Al conjunto de funciones continuas en $\mathbb{R}$ y de soporte compacto lo denotaremos como $C_0(\mathbb{R})$.

Definición 8. *Sea $\mathbb{R} \supseteq \Omega$-medible. Una función f definida sobre Ω se denomina localmente integrable en Ω, si es absolutamente integrable en cualquier compacto K de Ω. Se simboliza $f \in L_1^{loc}(\Omega)$. Es decir $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ si $\forall K \subset \Omega$, K- compacto, se tiene que:*

$$\int_K |f(x)|\, dx < \infty.$$

Es claro que si $f \in L_1(\mathbb{R})$, entonces $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$; el recíproco es falso, por ejemplo la función $f(x) = \sin(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, pero $f \notin L_1(\mathbb{R})$.

Ejemplo 7. *Sea $a \in \mathbb{R}$, a fijo. La función*

$$h_a(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x < a \\ \\ 1, & si \quad x \geq a \end{cases}$$

pertenece a $L_1^{loc}(\mathbb{R})$. La función $h_a(x)$ se llama función de Heaviside centrada en $x = a$.

La función $g(x) = \dfrac{1}{x} \notin L_1^{loc}(\mathbb{R})$, ya que la integral impropia de $|g(x)|$ es indeterminada o no es finita en cualquier intervalo que contenga al punto cero.

1.1. Funcionales lineales y operadores lineales

Definición 9. *Sea X un conjunto no vacío y supongamos que en la totalidad de todas las sucesiones $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, de elementos de X, distinguimos una clase de sucesiones, llamadas convergentes, y a toda sucesión convergente le hacemos corresponder un elemento $x \in X$, llamado limite de la sucesión. Si en este caso se cumple las tres condiciones:*

1. *cada sucesión de elementos del conjunto X puede tener no más de un límite;*

2. *toda sucesión del tipo $\{x, x, x, ..., x, ...\}$ es convergente y el elemento x es su limite;*

3. *toda subsucesión de una sucesión convergente es también convergente y tiene el mismo limite,*

entonces el conjunto X lo llamamos espacio con convergencia.
Si la sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en X converge al elemento $x \in X$, la denotaremos de manera usual es decir, $x_j \to x$ en X $(j \to \infty)$.

Definición 10. *Un espacio lineal X sobre $\mathbb{C}$ se llama espacio lineal con convergencia, si es un espacio con convergencia, respecto de la cual las operaciones de sumación de los elementos del espacio y de su multiplicación por un número son continuas esto significa que para cualesquiera sucesiones convergentes $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de X, que tienen por limites $x, y \in X$ respectivamente, y cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ la sucesión $\{\alpha x_j + \beta y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es también convergente y converge a $\alpha x + \beta y$. Además, si $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión numérica y $\lambda_j \to \lambda$ en $\mathbb{C}$ $(j \to \infty)$, entonces $\lambda_j x \to \lambda x$ en $\mathbb{C}$ $(j \to \infty)$ para cualquier $x \in X$.*

Como espacios lineales con convergencia pueden indicarse los espacios lineales normalizados; no obstante, existen espacios lineales con convergencia en los cuales no se puede introducir una norma, como por ejemplo el espacio lineal [1] $L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

[1] Decimos que una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones en $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ converge a f en $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ si para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, la sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L_1(K)$

Definición 11. *Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$, el funcional F de X en $\mathbb{C}$ se llama funcional lineal sobre X si*

$$\forall x, y \in X,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \ F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y).$$

El conjunto D_F de todos los $x \in X$ para los cuales ésta definida F se llama campo de definición del funcional F; en general no se impone $D_F = X$; sin embargo siempre admitiremos que D_F es un subespacio lineal de X.
En adelante, la acción del funcional lineal F sobre el elemento $x \in X$ la denotaremos $F(x) = (F, x)$ y se lee F actuando sobre x. Con esta notación diremos que F es lineal sobre X si: $\forall x, y \in X,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \ (F, \lambda x + \mu y) = \lambda(F, x) + \mu(F, y)$.

Ejemplo 8. *Definamos el funcional:*

$$\begin{array}{rccl} \delta: & C(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & (\delta, f) = f(0) \end{array}$$

δ es un funcional lineal sobre $C(\mathbb{R})$, conocido como función delta de Dirac centrada en $x = 0$.

Ejemplo 9. *Sea $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, definamos el funcional $T_f : C_0^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante la fórmula*

$$(T_f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx.$$

T_f esta bién definido, ya que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \ \leq \ \int_a^b |f(x) g(x)|\, dx \leq \sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

donde $Supp\, g \subseteq [a, b]$.

T_f es lineal sobre $C_0^\infty(\mathbb{R})$. En efecto:

$$\begin{aligned} \forall g, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (T_f, \alpha g + \beta h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\alpha g(x) + \beta h(x)\right] dx \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(x) dx \\ &= \alpha(T_f, g) + \beta(T_f, h). \end{aligned}$$

Definición 12. *Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$ con convergencia. Un funcional F de X en $\mathbb{C}$ se denomina continuo en X,*
si $x_j \to x$ $(j \to \infty)$ implica que $(F, x_j) \to (F, x)$, $(j \to \infty)$.

Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$ con convergencia, la colección de todos los funcionales lineales y continuos (de X en $\mathbb{C}$) se llama espacio dual de X y se denota X'.

Definición 13. *Sean H un espacio normado sobre $\mathbb{C}$, y F un funcional lineal sobre H. Se dice que F es acotado sobre H si existe una constante $M > 0$ tal que:*

$$\forall x \in H, \quad |(F, x)| \leq M \|x\|_H .$$

La constante M se llama una cota del funcional lineal F.

Teorema 1.1. *Sea H un espacio normado sobre $\mathbb{C}$, y F un funcional lineal sobre H, entonces F es continuo sobre H si y sólo si F es acotado sobre H .*

Demostración. Suficiencia.
Supongamos que F es acotado sobre H , es decir existe $M > 0$ tal que $|(F, x)| \leq M \|x\|_H$ para todo $x \in H$.
Si $x_j \to x$ *en* H $(j \to \infty)$, entonces $\|x_j - x\|_H \to 0$ $(j \to \infty)$.
Además :
$|(F, x_j) - (F, x)| = |(F, x_j - x)| \leq M \|x_j - x\|_H \to 0$ $(j \to \infty)$.
Por lo tanto tenemos que :
$(F, x_j) \to (F, x)$, $(j \to \infty)$, entonces F es continuo sobre H.
Necesidad.
Supongamos que F es continuo y no acotado sobre H, por el no acotamiento de F, existe $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión no nula de elementos de H tal que :

$$|(F, x_j)| \geq 8^j \|x_j\|_H$$

Definamos la sucesión $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ como sigue:
$y_j = \dfrac{x_j}{2^j \|x_j\|_H}$, $(j = 1, 2, ...)$. Entonces $\|y_j\|_H = \dfrac{\|x_j\|_H}{2^j \|x_j\|_H} = \dfrac{1}{2^j} \to 0$ $(j \to \infty)$.

Ahora veamos que:

$$(F, y_j) = \left(F, \frac{x_j}{2^j \left\| x_j \right\|_H}\right) = \frac{1}{2^j \left\| x_j \right\|_H}(F, x_j) \geq \frac{8^j \left\| x_j \right\|_H}{2^j \left\| x_j \right\|_H} = 4^j \to \infty \quad (j \to \infty)$$

lo cual es una contradicción ya que F es un funcional continuo sobre H. □

Observación 1. *Sea H un espacio normado y F un funcional lineal continuo sobre H. Si $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$ donde $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de H y $x \in H$ entonces*

$$(F, x) = \sum_{j=1}^{\infty} (F, x_j).$$

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^{j} x_k \to x$ *en* H $\;, j \to \infty$, dado que F es un funcional lineal y continuo, tenemos que:

$$\left(F, \sum_{k=1}^{j} x_k\right) = \sum_{k=1}^{j} (F, x_k) \;\; y \;\; \left(F, \sum_{k=1}^{j} x_k\right) \to (F, x) \quad j \to \infty. \tag{1.1}$$

Es decir:

$$\lim_{j \to \infty} \left(F, \sum_{k=1}^{j} x_k\right) = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{j} (F, x_k) = (F, x).$$

□

Teorema 1.2. *Sea H un espacio normado sobre $\mathbb{C}$. Si F es un funcional lineal acotado sobre H, entonces*

$$M := \sup_{x \in H, x \neq o_H} \frac{|(F, x)|}{\|x\|_H} \qquad \textit{es una cota para } F.$$

Demostración. Como F es un funcional acotado sobre H, luego existe una constante $K > 0$ tal que:

$\forall x \in H \quad |(F, x)| \leq K \|x\|_H$.

Si $x \neq o_H$, $\frac{|(F,x)|}{\|x\|_H} \leq K \frac{\|x\|_H}{\|x\|_H}$ luego $\frac{|(F,x)|}{\|x\|_H} \leq K$ es decir existe $\sup_{x \in H, x \neq o_H} \frac{|(F, x)|}{\|x\|_H}$.

Sea $M = \sup_{x \in H, x \neq o_H} \frac{|(F, x)|}{\|x\|_H}$, entonces $\forall x \in H \setminus \{0_H\}$ $\frac{|(F,x)|}{\|x\|_H} \leq M$.

Luego:

$$\forall x \neq o_H, \; |(F, x)| \leq M \|x\|_H.$$

Es decir M es una cota para F. □

Definición 14. *Sea H_1 y H_2 espacios lineales sobre $\mathbb{C}$. El operador $\mathfrak{T}$ de H_1 en H_2 es lineal si:*

$$\forall x, y \in H_1, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \mathfrak{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathfrak{T}(x) + \beta \mathfrak{T}(y).$$

Es claro que un funcional lineal es un operador lineal (con $H_2 = \mathbb{C}$). Además las definiciones de continuidad y acotación para un operador son análogas a las definiciones de funcional lineal continuo y funcional lineal acotado que se han dado anteriormente. En adelante la acción del operador $\mathfrak{T}$ sobre el elemento $x \in H$ la denotaremos por $\mathfrak{T}x$.

Definición 15. *Sean H_1 y H_2 espacios normados.*
El operador $\mathfrak{T}$ de H_1 en H_2 se dice cerrado en $D_{\mathfrak{T}} \subseteq H_1$ sí:

$$x_j \to x \text{ en } H_1 \quad (\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset D_{\mathfrak{T}}) \text{ y } \mathfrak{T}x_j \to y \text{ en } H_2, \; j \to \infty \text{ implica } x \in D_{\mathfrak{T}}, \; \mathfrak{T}x = y.$$

Ejemplo 10. *Sean $H_1 = H_2 = C\,[0,1]$, definimos el operador $\mathfrak{T}$ como sigue:*

$$\mathfrak{T}f = f', \text{ donde } D_{\mathfrak{T}} = C^1\,[0,1]\,.$$

Donde la norma para cualquier $f \in C^1\,[0,1]$ está definida como: $\|f\|_{C[0,1]} := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $C^1\,[0,1]$, tal que $f_j \rightrightarrows f$ en $[0,1]$ y $f_j' \rightrightarrows g$ en $[0,1]$ $j \to \infty$, debido a que la norma del $\sup$ en $C\,[0,1]$ implica la convergencia uniforme en $[0,1]$, además por el teorema fundamental del cálculo tenemos los siguiente:

$$f_j(x) = \int_0^x f_j'(t)\,dt + f_j(0) \rightrightarrows \int_0^x g(t)\,dt + f(0) \quad j \to \infty.$$

Pero $f_j \rightrightarrows f$ en $[0,1]\,,$ $j \to \infty$. Por lo tanto

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt + f(0),$$

lo que implica que f es una primitiva de g, es decir diferenciable sobre $[0,1]$, y además que $\mathfrak{T}f = f' = g$. Así el operador $\mathfrak{T}$ es cerrado en $C^1\,[0,1]$.
(Mas adelante se dara un ejemplo de un operador no cerrado.)

1.2. Algunas propiedades de los espacios L_P

Antes de enunciar ciertos resultados relacionados con los espacios L_P, presentaremos 2 teoremas a conocer que hacen parte de la teoría de integración y que serán importantes en el transcurso de nuestro trabajo.

Teorema 1.3. ***(Convergencia dominada de Lebesgue)*** *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L_1(\Omega)$. Supongamos que:*

1. $\dot{\forall} x \in \Omega, \quad f_j(x) \to f(x), \quad j \to \infty.$

2. *Existe una función $g \in L_1(\Omega)$ tal que:* $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \dot{\forall} x \in \Omega, \quad |f_j(x)| \leq g(x).$

Entonces $f \in L_1(\Omega)$ y $\|f_j - f\|_{L_1(\Omega)} \to 0, \quad j \to \infty$ (Ver [4], Pág. 116).

Teorema 1.4. ***(Teorema de Fubini)*** *Sea $f \in L_1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ donde $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}$, con Ω_1 y Ω_2 conjuntos medibles. Entonces*

1. $\dot{\forall} x \in \Omega_1 \quad f(x,y)$ *es integrable en Ω_2 como función de y.*

2. $\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)dy$ *es integrable en Ω_1 como función de x.*

3. $\dot{\forall} x \in \Omega_2 \quad f(x,y)$ *es integrable en Ω_1 como función de x.*

4. $\int\limits_{\Omega_1} f(x,y)dx$ *es integrable en Ω_2 como función de y. Además son válidas las igualdades*

$$\int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f(x,y)dx \right) dy = \iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)dxdy. \tag{1.2}$$

Consecuencia 1. ***(Teorema de Tonelli)*** *Si al menos una de las integrales*

$$\int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} |f(x,y)|\, dy \right) dx, \qquad \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

es finita, entonces existen las tres integrales de (1,2) y además (1,2) es válida, (Ver [4], Pág. 202).

Definición 16. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$; *decimos que* q *es el conjugado de* p *si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para $p = 1$ *consideramos* $q := \infty$ *y recíprocamente, para* $p = \infty$, $q := 1$.

Teorema 1.5. ***(Desigualdad de Hölder)*** *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$ *y* q *el conjugado de* p. *Si* $f \in L_p(\Omega)$ *y* $g \in L_q(\Omega)$, *entonces* $fg \in L_1(\Omega)$ *y es válida la desigualdad*

$$\left| \int_{\Omega} fg \, dx \right| \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)} \quad (Ver\ [5],\ Pág.\ 22).$$

De esta desigualdad se tiene una consecuencia importante.

Consecuencia 2. *Sean* $0 < p \leq q \leq +\infty$, $E \subset \mathbb{R}$, $m(E) < +\infty$. *Si* $f \in L_q(E)$, *entonces* $f \in L_p(E)$, *es decir* $L_q(E) \subset L_p(E)$ *y se verifica la desigualdad:*

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_q(E)} \quad (Ver\ [5],\ Pág.\ 24).$$

Teorema 1.6. ***(Desigualdad de Minkowsky)***

Sean $f, g \in L_p(\Omega)$, $\ 1 \leq p \leq +\infty$, *entonces* $f + g \in L_p(\Omega)$ *y además,*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} . \tag{1.3}$$

Demostración. Veamos primero los casos para $p = 1$ *y* $p = \infty$.

Si $p = 1$ entonces:

$$\|f+g\|_{L_1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f+g| \ dx \leq \int_{\Omega} (|f|+|g|) \, dx = \int_{\Omega} |f| \, dx + \int_{\Omega} |g| \, dx = \|f\|_{L_1(\Omega)} + \|g\|_{L_1(\Omega)} .$$

Si $p = \infty$, entonces:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L_\infty(\Omega)} &= \sup_{x\in\Omega} vrai \, |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} vrai \, (|f(x)|+|g(x)|) \\ &\leq \sup_{x\in\Omega} vrai \, |f(x)| + \sup_{x\in\Omega} vrai \, |g(x)| = \|f\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g\|_{L_\infty(\Omega)} . \end{aligned}$$

Finalmente si $1 < p < \infty$, y $\|f+g\|_{L_p(\Omega)} = 0$, (1.3) es trivial.
Supongamos que $\|f+g\|_{L_p(\Omega)} > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{L_p(\Omega)} &= \int\limits_\Omega |f+g|^p \, dx \leq \int\limits_\Omega (|f|+|g|)\,(|f+g|)^{p-1} \, dx \\
&= \int\limits_\Omega |f|\,(|f+g|)^{p-1} \, dx + \int\limits_\Omega |g|\,(|f+g|)^{p-1} \, dx.
\end{aligned}$$

Ahora por la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{L_p(\Omega)} &\leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L_q(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L_q(\Omega)} \\
&= \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right) \left(\int\limits_\Omega |f+g|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right) \left(\int\limits_\Omega |f+g|^{p} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right) \|f+g\|^{\frac{p}{q}}_{L_p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Luego, $\|f+g\|^{p-\frac{p}{q}}_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}$; pero $p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p\left(\frac{1}{p}\right) = 1$.
Por lo tanto se cumple (1.3). □

Teorema 1.7. *Sea $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ tal que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int\limits_\Omega f\varphi dx = 0$, entonces $\dot{\forall} x \in \Omega$ $f = 0$ (Ver [1], Pág. 59).*

Antes de la demostración del teorema (1.8) enunciaremos dos resultados que serán útiles en el transcurso de la misma; uno de ellos llamado el teorema de densidad (Ver [8], Pág. 79) y el otro teorema de Lusin (Ver [8], Pág. 83).

Teorema(densidad). Sea $\mathbf{S}$ *la clase de todas las funciones simples medibles de Ω en $\mathbb{C}$ que son nulas salvo en un conjunto de medida finita. Si $1 \leq p < \infty$, entonces* $\mathbf{S}$ *es denso en $L_p(\Omega)$.*

Teorema (Lusin). Supongamos que f es una función medible real en Ω, tal que $f = 0$ salvo en un conjunto de medida finita . Dado $\epsilon > 0$ existe una función $g \in C_0(\Omega)$ talque $f = g$ salvo en un conjunto de medida menor que ϵ. Además se tiene que:

$$\sup_{x\in\Omega} |g(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Teorema 1.8. *El espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$; es decir*

$$\forall f \in L_p(\Omega), \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists g \in C_0(\Omega) : \quad \|f - g\|_{L_p(\Omega)} < \epsilon.$$

Demostración. Sean $h \in L_p(\Omega)$ y $\epsilon > 0$. Por el teorema de densidad existe $s \in \mathbf{S}$ (clase de todas las funciones simples medibles de Ω en $\mathbb{C}$ que son nulas salvo en un conjunto de medida finita) tal que :

$$\|s - h\|_{L_p(\Omega)} < \epsilon.$$

Ahora por el teorema de Lusin, existe $g \in C_0(\Omega)$ tal que $g(x) = s(x)$ salvo en un conjunto $E \quad (E \subset \Omega)$ de medida menor que $\left(\dfrac{\epsilon}{2\sup_{x\in\Omega}|s(x)|}\right)^p$ y además

$$\sup_{x\in\Omega} |g(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |s(x)| .$$

Dado que

$|g(x)| \leq \sup\limits_{x\in\Omega} |g(x)| \leq \sup\limits_{x\in\Omega} |s(x)| \quad$ y $\quad |s(x)| \leq \sup\limits_{x\in\Omega} |s(x)|$, tenemos:

$$|g(x) - s(x)| \leq |g(x)| + |s(x)| \leq 2\sup_{x\in\Omega} |s(x)| ,$$

de lo cual se sigue que:

$$\|g - s\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_E |g(x) - s(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\sup_{x\in\Omega} |s(x)| \, [m(E)]^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\|g - h\|_{L_p(\Omega)} = \|g - s + s - h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|g - s\|_{L_p(\Omega)} + \|s - h\|_{L_p(\Omega)} < 2\epsilon.$$

□

Lema 1. *Sea* $1 \leq p \leq +\infty$. *Si* $f \in L_p(\mathbb{R})$, *entonces* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Demostración. Es claro que si K es compacto, entonces $m(K) < +\infty$ y según la consecuencia 2 de la desigualdad de Hölder $\forall K$ compacto, $\forall p \geq 1$, $L_p(K) \subset L_1(K)$ es decir , si $f \in L_p(K)$ entonces $f \in L_1(K)$, además tenemos que:

$$\|f\|_{L_1(K)} \leq (m(K))^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(K)} < (m(K))^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Por tanto para $1 \leq p \leq +\infty$, si $f \in L_p(\mathbb{R})$ entonces $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. □

Teorema 1.9. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *un abierto arbitrario . Entonces* $C_0^\infty(\Omega)$ *es denso en* $L_p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$. *(Ver [2], Pág. 71).*

1.3. Espacio de funciones de prueba

Definición 17. *Diremos que la sucesión* $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *converge a la función* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *si :*

1. *Existe un segmento* $[a, b]$ *fuera del cual las funciones* φ *y* φ_j $j = 1, 2, \cdots$ *se anulan.*
2. *Para todo* $k \in \mathbb{N}_0$, *la sucesión de derivadas de orden* k, $\left\{\varphi_j^{(k)}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente en dicho segmento, (*$j \to \infty$*) hacia la función* φ *y a sus correspondientes derivadas* $\varphi^{(k)}$, *respectivamente.*

Dotado de esta convergencia, el conjunto de funciones $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *constituye un espacio lineal con convergencia que lleva el nombre de espacio de funciones de prueba y se simboliza* $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{D}$.

Ejemplo 11. *Sea* $a \in \mathbb{R}$*-fijo.*
Consideremos la función φ *definida de la siguiente forma:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & si \quad |x| < a \\ 0 & si \quad |x| \geq a \end{cases}$$

esta función está en $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Mostremos primero que para $k \in \mathbb{N}_0$*-fijo,* $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{e^{\frac{-a^2}{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)^k} = 0$. *Sea* $u = \dfrac{1}{a^2-x^2}$,

si $x \to a^-$, $u \to +\infty$, *entonces*

$$\lim_{x \to a^-} \frac{e^{\frac{-a^2}{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)^k} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u^k}{e^{a^2 u}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Aplicando k *veces la regla de L Hôpital tenemos que:* $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{u^k}{e^{a^2 u}} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{k}{a^{2k} e^{a^2 u}} = 0.$
Es decir

$$\lim_{x \to a^-} \frac{e^{\frac{-a^2}{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)^k} = 0. \tag{1.4}$$

Análogamente para $k \in \mathbb{N}_0$*-fijo* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{e^{\frac{-a^2}{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)^k} = 0.$
Como $\varphi(x) = 0$ *para* $|x| > a$, *entonces para todo* $k \in \mathbb{N}_0$ $\varphi^k(x) = 0, \;\; |x| > a$.
Ahora probemos por inducción que:

$$\varphi^k(x) = P_k(x) \frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2k}} \quad si \quad |x| < a \ ,$$

donde P_k *es un polinomio de grado* $3k-2$.

Para $k = 1 : \varphi'(x) = -2a^2 x \dfrac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^2}$.

Caso $k = 2 : \varphi''(x) = (6x^4 a^2 + 2a^6) \dfrac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^4}$.
Supongamos que el resultado es válido para $k = m$:
$\varphi^{(m)}(x) = r_m(x) \dfrac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2m}}$ *donde* $r_m(x)$ *es un polinomio de grado* $3m-2$.

Probemos que se cumple para $k = m + 1$.

$$\begin{aligned}
(\varphi^{(m)}(x))' &= \left(\frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2m}} r_m(x)\right)' \\
&= \frac{(a^2-x^2)^{2m} r_m'(x) + 4mx(a^2-x^2)^{2m-1} r_m(x)}{[(a^2-x^2)^{2m}]^2} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} - \frac{2a^2 x r_m(x)}{(a^2-x^2)^{2(m+1)}} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2(m+1)}} \Big(r_m'(x)(a^2-x^2)^2 + 4mx(a^2-x^2) r_m(x) - 2a^2 x r_m(x) \Big) \\
&= \frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2(m+1)}} P_{m+1}(x),
\end{aligned}$$

donde P_{m+1} *es un polinomio de grado* $3m + 1$, *por el principio de inducción matemática hemos probado, que:*

$$\varphi^{(k)}(x) = P_k(x) \frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2k}} \quad si \ \ |x| < a \ ,$$

Nuevamente por inducción matemática respecto a $k \in \mathbb{N}_0$ *mostremos que* $\varphi^{(k)}(a)$ *y* $\varphi^{(k)}(-a)$ *existen y valen cero.*

Para $k = 1 : \varphi'(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{-(a + x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{a^2 - x^2}$,

este limite es cero ya que $\lim\limits_{x \to a^-} (x + a) = 2a$ *y* $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{e^{\frac{-a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2 - x^2)} = 0$, *es decir* $\varphi'(a^-) = 0$.

Un procedimiento análogo al anterior muestra que $\varphi'(a^+) = 0$, *luego* $\varphi'(a) = 0$.

Para $k = 2 : \varphi''(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{\varphi'(x) - \varphi'(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{2a^2 x(a + x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2 - x^2)^3}$,

este limite es cero ya que $\lim\limits_{x \to a^-} 2a^2 x(x + a) = 4a^4$ *y* $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2 - x^2)^3}$, *es decir* $\varphi''(a^-) = 0$.

Similarmente, $\varphi''(a^+) = 0$, *luego* $\varphi''(a) = 0$.

Supongamos que el resultado es valido para $k = m$, *es decir* $\varphi^{(m)}(a) = 0$.

Probemos que se cumple para $k = m + 1$

$$\varphi^{(m+1)}(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{\varphi^m(x) - \varphi^m(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{-(a + x) P_k(x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2 - x^2)^{2m+1}}.$$

Este último limite es cero ya que $(a + x) P_k(x)$ *está acotado en cualquier entorno de* a *y* $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2 - x^2)^{2m+1}} = 0$, *luego* $\varphi^{m+1}(a^-) = 0$. *De manera similar se muestra que*

$\varphi^{m+1}(a^+) = 0$, por lo tanto $\varphi^{m+1}(a) = 0$, por el principio de inducción matemática hemos probado, que: $\varphi^{(k)}(a) = 0$. De igual manara se muestra que $\varphi^{(k)}(-a) = 0$. Por lo tanto tenemos que: $\varphi^{(k)}(a) = 0 = \varphi^{(k)}(-a)$.

Hemos asi demostrado que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(x)\dfrac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2k}} & si \quad |x| < a \\ 0 & si \quad |x| \geq a \end{cases}$$

Por lo tanto se ha probado que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo 12. *Consideramos la sucesión $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R})$:*

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{j}e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & si \quad |x| < a \\ 0 & si \quad |x| \geq a \end{cases},$$

y probemos que $\varphi_j \to 0 \;\; en \;\; \mathcal{D}, \;\; j \to +\infty$.

En efecto, debido a que $-\frac{a^2}{a^2-x^2} \leq -1$ y que e^x es una función creciente tenemos que:

$$\left| \frac{1}{j} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} \right| \leq \frac{e^{-1}}{j} = \frac{1}{je} \to 0 \quad j \to \infty. \tag{1.5}$$

Procedemos de manera similar al ejemplo ejemplo anterior, para mostrar que las funciones $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y que:

$$\varphi_j^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{j}\frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2n}}P_{3n-2}(x) & si \quad |x| \leq a \\ 0 & si \quad |x| \geq a \end{cases}, \tag{1.6}$$

donde Supp $\varphi_j = [-a, a]$ y $P_{3n-2}(x)$ es un polinomio de grado $3n-2$, además

$$\left| \frac{1}{j} \frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2n}} P_{3n-2}(x) \right| \leq \frac{1}{j} R \to 0 \quad j \to \infty. \tag{1.7}$$

Donde R es el $\sup \frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2n}}P_{3n-2}(x)$ en $[-a, a]$ ya que $\frac{e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)^{2n}}P_{3n-2}(x)$ es continua en $[-a, a]$, luego tenemos que $\varphi_j^{(n)} \rightrightarrows 0$, sobre $[-a, a]$.

De (1.5) y (1.7) podemos concluir que $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}$, $j \to \infty$.

Definición 18. *Se llama función generalizada sobre $\mathcal{D}$ a todo funcional lineal y continuo definido sobre $\mathcal{D}$.*

Ejemplo 13. *Sea $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Podemos definir una función generalizada (que denotaremos con la misma letra) mediante la expresión:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (f, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx. \tag{1.8}$$

Por el ejemplo 9 tenemos que este funcional está bien definido y es lineal sobre $\mathcal{D}$. Además, si $\varphi_j \to \varphi \quad (j \to \infty)$ en $\mathcal{D}$ entonces en particular, $\varphi_j \rightrightarrows \varphi$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |(f,\varphi_j) - (f,\varphi)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|\varphi_j(x) - \varphi(x)|\,dx \\ &= \int_b^a |f(x)|\,|\varphi_j(x) - \varphi(x)|\,dx \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_j(x) - \varphi(x)| \int_b^a |f(x)|\,dx \to 0, \quad j \to \infty, \end{aligned}$$

donde Supp $\varphi \subseteq [a,b]$. En este sentido toda función localmente integrable puede considerarse como una función generalizada. Toda función generalizada representada de la forma (1.8) se llama **regular** *y un funcional no regular se llama* **singular**.

Ejemplo 14. *Definimos el funcional*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \qquad (\delta, \varphi) := \varphi(0). \tag{1.9}$$

Este funcional no puede ser representado en la forma (1.8) cualquiera que sea la función f localmente integrable en $\mathbb{R}$. En efecto supongamos que existe $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ tal que:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Sea $a \in \mathbb{R}$-fijo. Consideremos la función φ definida de la siguiente forma:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & si \quad |x| < a \\ 0 & si \quad |x| \geq a \end{cases}.$$

Esta función está en $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Para f *y* φ, *y por (1.9) tenemos que:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = (\delta,\varphi) = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \tag{1.10}$$

Además como $m([-a,a]) = 2a < +\infty$, *entonces por la consecuencia de la desigualdad de Hölder tenemos que,* $\forall p \geq 1$ $L_p([-a,a]) \subset L_1([-a,a])$ *y se cumple la desigualdad:*

$$\|f\|_{L_1([-a,a])} = \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \leq (2a)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p([-a,a])}$$

Ahora en la parte derecha de la desigualdad tiende a cero cuando a *tiende a cero, luego*

$$\lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0.$$

Ahora $e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} \leq e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ *si* $|x| \leq a$, *entonces*

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx\right| \leq \frac{1}{e}\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx.$$

De la misma manera la parte derecha de la desigualdad tiende a cero cuando a *tiende a cero. Por tal razón el primer miembro de (1.10) tiende a cero cuando* a *tiende a cero , mientras que* $\dfrac{1}{e}$ *es distinto de cero.*

Por lo tanto el funcional δ *no puede ser expresado en la forma (1.8).*

El funcional δ *es lineal y continuo. En efecto,*

$$\forall \varphi,\psi \in \mathcal{D},\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}\ \ (\delta,\alpha\varphi+\beta\psi) = (\alpha\varphi+\beta\psi)(0) = \alpha\varphi(0)+\beta\psi(0) = (\delta,\alpha\varphi)+(\delta,\beta\psi).$$

Si $\varphi_j(x) \to \varphi(x)$, $(j \to \infty)$ *en* $\mathcal{D}$ *entonces* $\varphi_j(0) \to \varphi(0)$ $\;j \to \infty$; *por lo tanto*

$$(\delta,\varphi_j) = \varphi_j(0) \to \varphi(0) = (\delta,\varphi)\ \ j \to \infty.$$

Así δ *es una función generalizada singular.*

Sea $a \in \mathbb{R}$, a *fijo. El funcional definido como:*

$$(\delta_a,\varphi) := \varphi(a),$$

es una función generalizada que se llama función Delta de Dirac centrada en el punto $x = a$.

Otro ejemplo de función generalizada singular corresponde al valor principal de $\frac{1}{x}$ $\left(v.p.\frac{1}{x}\right)$. La integral impropia de la función $\frac{1}{x}$ no existe en cualquier intervalo que contenga el origen. Sin embargo, para cada función $\varphi \in \mathcal{D}$ existe y es finita la integral en el sentido del valor principal según Cauchy (Ver [5], pág 14) :

$$\left(v.p.\frac{1}{x}, \varphi\right) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right].$$

$\left(v.p.\frac{1}{x}\right)$ *esta bien definido, en efecto, sea $a > 0$ y supongamos que supp $\varphi \subset [-a, a]$; entonces*

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right] \\
&+ \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{a} \frac{\varphi(0)}{x} dx \right] \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \log|x| \Big|_{-a}^{-\epsilon} + \log|x| \Big|_{\epsilon}^{a} \right\}.
\end{aligned}$$

Como $\left\{ \log|x| \Big|_{-a}^{-\epsilon} + \log|x| \Big|_{\epsilon}^{a} \right\} = \log|-\epsilon| - \log|-a| + \log|a| - \log|\epsilon| = 0,$ *entonces;*

$$\left(v.p.\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx. \tag{1.11}$$

Ahora por el teorema del valor medio para derivadas tenemos que existe c entre x y 0 tal que

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| = |\varphi'(c)| \leq M,$$

donde $M = \sup_{x \in [-a,a]} |\varphi'(x)|$, *ya que φ' es continua y de soporte compacto en $[-a, a]$, entonces* $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ *está acotada, luego* $\int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx < \infty$. *Es decir* $\left(v.p.\frac{1}{x}\right)$ *define un funcional sobre $\mathcal{D}$.*

Ahora probemos que el $\left(v.p.\frac{1}{x}\right)$ *es una función generalizada sobre* $\mathcal{D}$.

Es lineal, debido a la linealidad de la integral.

Y continuo, en efecto supongamos que $\varphi_j \to \varphi$ *en* $\mathcal{D},\ j \to \infty$.

$$\begin{aligned}\left(v.p.\frac{1}{x}, (\varphi_j - \varphi)\right) &= \int_{-a}^{a} \frac{(\varphi_j(x) - \varphi(x)) - (\varphi_j(0) - \varphi(0))}{x}\, dx \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{(\varphi_j(x) - \varphi_j(0)) - (\varphi(x) - \varphi(0))}{x}\, dx\end{aligned}$$

Ahora por el teorema del valor medio para derivadas tenemos que:

$$\left(v.p.\frac{1}{x}, (\varphi_j - \varphi)\right) = \int_{-a}^{a} \frac{x(\varphi_j'(c_{(x)}) - \varphi'(c_{(x)}))}{x}\, dx = \int_{-a}^{a} (\varphi_j'(c_{(x)}) - \varphi'(c_{(x)}))\, dx,$$

donde supp $\varphi_j \subset [-a, a]$ *y* $c_{(x)}$ *está entre* x *y 0.*

Como $\varphi_j \to \varphi$ *en* $\mathcal{D},\ j \to \infty$, *entonces* $\varphi_j' \rightrightarrows \varphi'$ *en* $[-a, a]$, *luego*

$$\int_{-a}^{a} (\varphi_j'(c_{(x)}) - \varphi'(c_{(x)}))\, dx \to 0 \quad j \to \infty.$$

Por tanto $\lim\limits_{j\to\infty} \left(v.p.\frac{1}{x}, \varphi_j\right) = \left(v.p.\frac{1}{x}, \varphi\right)$, *ahora supongamos que existe* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \left(v.p.\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Entonces por (1.11)

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx,$$

donde supp $\varphi \subset [-a, a]$. *Sea* ψ *arbitraria en* $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ *tal que* $\varphi(x) = x\psi(x)$. *Entonces*

$$\int_{-a}^{a} f(x)x\psi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{x\psi(x) - 0\psi(0)}{x}\, dx = \int_{-a}^{a} \psi(x)\, dx.$$

Esto es

$$\int_{-a}^{a} \left(f(x)x\psi(x) - \psi(x)\right)\, dx = \int_{-a}^{a} \psi(x)(f(x)x - 1)\, dx = 0.$$

Pero por Teorema 1.7, tomando a $\Omega = (-a, a)$*, tenemos que* $xf(x) - 1 = 0$*, lo que implica que*

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\dot{\forall} x \in \mathbb{R}$*, pero* $\frac{1}{x} \notin L_1^{loc}(\mathbb{R})$*, esto contradice nuestro supuesto que* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$*.*
Lo cual quiere decir que $\left(v.p.\frac{1}{x} \right)$ *define una función generalizada singular.*

Observación 2. *Sobre el conjunto de funciones generalizadas se definen las operaciones de adición y multiplicación por escalares de manera natural: Sean* f, g *elementos de* $\mathcal{D}'$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g, \varphi) := \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)$*. Así el conjunto de funciones generalizadas constituye el espacio dual de* $\mathcal{D}$*, que denotaremos por* $\mathcal{D}'$*.*

Definición 19. *Sea* $f \in \mathcal{D}'$*. Se dice que* f *se reduce a cero en un intervalo* (a, b)*, si* $(f, \varphi) = 0$ *para cualquier* $\varphi \in \mathcal{D}$ *tal que supp* $\varphi \subseteq (a, b)$*.*

Ejemplo 15. *Sea* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *que no contiene al origen. Entonces* $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ *tal que Supp* $\varphi \subset (a, b)$ *tenemos que* $\varphi(0) = 0$*. Luego*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = 0.$$

Es decir la función delta de Dirac se reduce a cero en cualquier intervalo que no contenga al origen.

Definición 20. $f, g \in \mathcal{D}'$*, son iguales si* $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (f, \varphi) = (g, \varphi)$*.*

Definición 21. (convergencia débil)
Se dice que la sucesión $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ *converge débilmente a* $f \in \mathcal{D}'$, $(f_j \to f \, en \, \mathcal{D}', \, j \to \infty)$ *si:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \lim_{j \to \infty} (f_j, \varphi) = (f, \varphi).$$

En este caso, diremos que f es el límite débil de $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$*.*

Ejemplo 16. *Sea*

$$f_j(x) = \frac{\sqrt{j} e^{-\frac{jx^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Esta es una sucesión de funciones continuas, por tanto definen una sucesión de funciones generalizadas regulares.

Probemos que la sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ *converge débilmente a la función delta de Dirac. En efecto* $\forall\varphi \in \mathcal{D}$ *tenemos que:*

$$(f_j,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{j}e^{-\frac{jx^2}{4}}\varphi(x)}{2\sqrt{\pi}}dx = \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sqrt{j}e^{-\frac{jx^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}[\varphi(0)+\varphi(x)-\varphi(0)]dx. \tag{1.12}$$

Donde supp $\varphi \subset [-a,a]$, *haciendo el cambio de variable* $z = \frac{x\sqrt{j}}{2}$ *en (1.12) obtenemos*

$$(f_j,\varphi) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-a\sqrt{j}}{2}}^{\frac{a\sqrt{j}}{2}} e^{-z^2}dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{-a\sqrt{j}}{2}}^{\frac{a\sqrt{j}}{2}} e^{-z^2}\left[\varphi\left(\frac{2z}{\sqrt{j}}\right)-\varphi(0)\right]dz. \tag{1.13}$$

En la primera integral de (1.13) tenemos que:

$$\int\limits_{\frac{-a\sqrt{j}}{2}}^{\frac{a\sqrt{j}}{2}} e^{-z^2}dz \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}, \quad j\to\infty. \tag{1.14}$$

Aplicando el teorema del valor medio para derivadas, existe $c_{(j,z)} \in (0,\frac{2z}{\sqrt{j}})$ *(que depende de j y z), tal que:*

$$\varphi\left(\frac{2z}{\sqrt{j}}\right)-\varphi(0) = \frac{2z}{\sqrt{j}}\varphi'(c_{(j,z)}).$$

Así en la segunda integral de (1.13) tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{-a\sqrt{j}}{2}}^{\frac{a\sqrt{j}}{2}} e^{-z^2}\left[\varphi\left(\frac{2z}{\sqrt{j}}\right)-\varphi(0)\right]dz \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{-a\sqrt{j}}{2}}^{\frac{a\sqrt{j}}{2}} e^{-z^2}2z\varphi'(c_{(j,z)})\,dz, \tag{1.15}$$

donde la integral de la parte derecha de (1.15) es cero debido a que φ' *está acotada en* $\left[\frac{-a\sqrt{j}}{2},\frac{a\sqrt{j}}{2}\right]$ *y además* $\int\limits_{\frac{-a\sqrt{j}}{2}}^{\frac{a\sqrt{j}}{2}} e^{-z^2}2z\,dz$ *es cero.*

Por lo tanto la primera integral de (1.15) es cero.

Remplazando (1.15) en (1.13) cuando j tiende a infinito, y por (1.14), tenemos que:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D} \quad (f_j,\varphi)\to(\delta,\varphi)=\varphi(0), \quad j\to\infty.$$

Es decir δ *es el limite débil de* $\left\{\frac{\sqrt{j}e^{-\frac{jx^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Proposición 1. *Si el límite débil de una sucesión de funciones generalizadas existe, entonces este es único.*

Demostración. Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de D',donde f, g son los limites débiles de $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, tales que:

$\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \lim\limits_{j\to\infty}(f_j, \varphi) = (f, \varphi)$ y $\lim\limits_{j\to\infty}(f_j, \varphi) = (g, \varphi)$.

Luego, tenemos que; $\lim\limits_{j\to\infty}|(f_j - f, \varphi)| = 0$ y $\lim\limits_{j\to\infty}|(f_j - g, \varphi)| = 0$,

$$\begin{aligned} 0 \le |(f, \varphi) - (g, \varphi)| &= |(f, \varphi) - (f_j, \varphi) + (f_j, \varphi) - (g, \varphi)| = |(f_j - f, \varphi) + (f_j - g, \varphi)| \\ &\le |(f_j - f, \varphi)| + |(f_j - g, \varphi)| \ \to 0 \quad j \to \infty. \end{aligned}$$

Entonces $\forall\varphi \in \mathcal{D},\ (f, \varphi) = (g, \varphi)$, por lo tanto $f = g$. □

Proposición 2. *La operación del paso al límite es lineal.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C};\ f, g \in \mathcal{D}'$ tales que:

$\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \lim\limits_{j\to\infty}(f_j, \varphi) = (f, \varphi)$ y $\lim\limits_{j\to\infty}(g_j, \varphi) = (g, \varphi)$. Entonces

$\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \lim\limits_{j\to\infty}(\alpha f_j + \beta g_j, \varphi) = \lim\limits_{j\to\infty}[\alpha(f_j, \varphi) + \beta(g_j, \varphi)] = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi) = (\alpha f + \beta g, \varphi)$.

En consecuencia, $\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \lim\limits_{j\to\infty}(\alpha f_j + \beta g_j, \varphi) = (\alpha f + \beta g, \varphi)$. □

Observación 3. *La convergencia de una serie infinita en $\mathcal{D}'$ la definimos como la convergencia de la sucesión de las sumas parciales,es decir,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\ ,\ \ f_k \in \mathcal{D}',\ k = 1, 2, .. \tag{1.16}$$

La suma $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} f_j$ se llama suma parcial del k-ésimo orden $(k = 1, 2, ...)$ de la serie (1.16). Esta serie se dice convergente, si $S_k \to f$ en $\mathcal{D}',\ k \to \infty$.

La función generalizada f se llama suma de la serie (1.16); y se denota $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$.

Si $f \in \mathcal{D}'$, $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k \in \mathcal{D}'$, entonces

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} \quad (f, \varphi) = \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{j} f_k, \varphi\right) = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}(f_k, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}(f_k, \varphi)\,.$$

Proposición 3. *Sea* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* $\mathcal{D}'$ *y supongamos que para cualquier función* $\varphi \in \mathcal{D}$ *existe el límite de la sucesión numérica* (f_j, φ) *y* $F(\varphi) = \lim\limits_{j\to\infty}(f_j, \varphi)$. *Entonces* F *es una función generalizada.*

Demostración. F es lineal:

Por la linelidad de cada $f_j \in \mathcal{D}'$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\forall\varphi,\psi \in \mathcal{D},\ \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ \ F(\alpha\varphi+\beta\psi) &= \lim_{j\to\infty}(f_j, \alpha\varphi+\beta\psi) = \lim_{j\to\infty}(f_j,\alpha\varphi) + \lim_{j\to\infty}(f_j,\beta\psi)\\ &= F(\alpha\varphi)+F(\beta\psi).\end{aligned}$$

F es continuo:

Supongamos que $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}$ cuando $k\to\infty$. Por la continuidad de cada f_j, $j\in\mathbb{N}$ tenemos que:

$$F(\varphi_k) = \lim_{j\to\infty}(f_j,\varphi_k) \to \lim_{j\to\infty}(f_j,\varphi) = F(\varphi), \quad k\to\infty.$$

Por lo tanto F es lineal y continuo, es decir $F\in\mathcal{D}'$. □

Teorema 1.10. *Si* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *la cual converge en casi toda parte a una función* f *en* $\mathbb{R}$, *y existe una función* $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *tal que* $|f_j| \leq g$ *para todo* $j\in\mathbb{N}$, *entonces* $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *y* $f_j \to f$ *en* $\mathcal{D}'$, $j\to\infty$.

Demostración. Aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 1.3) tenemos que: $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ y además,

$$\forall\varphi\in\mathcal{D},\quad \lim_{j\to\infty}(f_j,\varphi) = \lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi(x)dx = (f_j,\varphi).$$

Por lo tanto f es el límite débil de $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. □

Proposición 4. *Dada* $f\in\mathcal{D}'$ *y* $\mu\in C^\infty(\mathbb{R})$ *se define el funcional* μf *mediante la relación:*

$$\forall\varphi\in\mathcal{D},\ \ (\mu f,\varphi) := (f,\mu\varphi).$$

Así definida, $\mu f \in \mathcal{D}'$, *donde la expresión del miembro derecho tiene sentido, ya que* $\mu\varphi\in\mathcal{D}$.

Demostración. Verifiquemos que μf es una función generalizada.

μf es lineal:

$$\begin{aligned} \forall\varphi,\psi\in\mathcal{D},\ \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ \ (\mu f,\alpha\varphi+\beta\psi) &= (f,\mu(\alpha\varphi+\beta\psi))=(f,\mu\alpha\varphi)+(f,\mu\beta\psi)\\ &= \alpha(f,\mu\varphi)+\beta(f,\mu\psi)=\alpha(\mu f,\varphi)+\beta(\mu f,\psi). \end{aligned}$$

μf es continua:

Probemos primero que, si $\varphi_j\to\varphi$ en $\mathcal{D}$, entonces $\mu\varphi_j\to\mu\varphi$ en $\mathcal{D}$, cuando $j\to\infty$.

Como $\varphi_j\to\varphi$ en $\mathcal{D}$, cuando $j\to\infty$, luego existe $[a,b]$ donde $Supp\,\varphi_j$ *y* $Supp\,\varphi$ están contenidos en dicho segmento.

Además $Supp\,\mu\varphi_j\subseteq Supp\,\mu\bigcap Supp\,\varphi_j\subseteq Supp\,\varphi_j\subseteq[a,b]\ \ \forall j=1,2...$

Lo anterior también se cumple para el $Supp\,\mu\varphi$. Luego tanto el $Supp\,\mu\varphi_j$, como $Supp\,\mu\varphi$ están contenidos en $[a,b]$, es decir $\mu\varphi$ y $\mu\varphi_j$ se anulan fuera de $[a,b]\ \ \forall j\in\mathbb{N}$.

Ahora como, $\varphi_j^{(m)}\rightrightarrows\varphi^{(m)}$ en $[a,b]\ \ \forall m\in\mathbb{N}_0$, tenemos que

$\forall\epsilon\geq 0$, existe $N_m\in\mathbb{N}$ tal que si $j\geq N_m$, $\forall x\in[a,b]$ $\left|\varphi_j^{(m)}-\varphi^{(m)}\right|<\epsilon$.

Consideremos a $\epsilon^*=\dfrac{\epsilon}{2^m m(m+1)M}$, con $M=\max\{M_0,M_1,...,M_k\}$, donde $M_i=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|\mu^{(i)}(x)\right|$, $i=0,1...k$, es decir $\forall\epsilon\geq 0$, existe $N^*=\max\{N_0,N_1,...,N_m\}$ tal que si $N^*\geq j,\forall x\in[a,b]$ tenemos que $\left|\varphi_j^{(m)}-\varphi^{(m)}\right|<\epsilon^*$.

Ahora probemos que $(\mu\varphi_j)^{(m)}\rightrightarrows(\mu\varphi)^{(m)}$ en $[a,b]$.

$$\begin{aligned} \left|(\mu\varphi_j)^{(m)}-(\mu\varphi)^{(m)}\right| &\leq \left|\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}\mu^{(t)}\varphi_j^{(m-t)}-\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}\mu^{(t)}\varphi^{(m-t)}\right|\\ &\leq \sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}\left|\mu^{(t)}\right|\left|\varphi_j^{(m-t)}-\varphi^{(m-t)}\right|. \end{aligned}$$

Dado que que $\sum\limits_{t=0}^{m}\dbinom{m}{t}=2^m$ y $\sum\limits_{t=0}^{m}\dbinom{m}{t}$ tiene m+1 términos, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}\left|\mu^{(t)}\right|\left|\varphi_j^{(m-t)}-\varphi^{(m-t)}\right| &\leq 2^m(m+1)M\sum_{t=0}^{m}\left|\varphi_j^{(m-t)}-\varphi^{(m-t)}\right|\\ &< 2^m(m+1)M\left(\frac{m\epsilon}{2^m m(m+1)M}\right)<\epsilon. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que $\forall\epsilon \geq 0$, existe $N^* \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq N^*$, $\forall x \in [a,b]$
$\left|(\mu\varphi_j)^{(m)} - (\mu\varphi)^{(m)}\right| < \epsilon$.
Es decir $(\mu\varphi_j)^{(m)} \rightrightarrows (\mu\varphi)^{(m)}$ en $[a,b]$. Con ello hemos probado que $\mu\varphi_j \to \mu\varphi$ en $\mathcal{D}$, cuando $j \to \infty$.
Ahora veamos que μf es continuo:
$(\mu f, \varphi_j) = (f, \mu\varphi_j) \to (f, \mu\varphi) = (\mu f, \varphi), \quad j \to \infty.$
Por lo tanto se ha probado que μf es una función generalizada. $\square$

Sean $h \in \mathbb{R}$, donde h es fijo y $f \in C(\mathbb{R})$. La translación $\tau_h f$ de una función f, la definimos de la siguiente manera:
$\tau_h f(x) := f(x-h)$, $x \in \mathbb{R}$, *observemos que la traslación $\tau_h f$ cumple lo siguiente:*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad (\tau_h f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x+h)\,dx = (f, \tau_{-h}\varphi).$$

Definición 22. *Sea $f \in \mathcal{D}'$ y $h \in \mathbb{R}$. La traslación $\tau_h f$:*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad (\tau_h f, \varphi) := (f, \tau_{-h}\varphi) = (f(x), \varphi(x+h)).$$

Define una función generalizada.

Ejemplo 17. *Sea $\delta \in \mathcal{D}'$ y $\forall\varphi \in \mathcal{D}$, tenemos que:*
$(\tau_h\delta, \varphi) = (\delta, \tau_{-h}\varphi) = \varphi(h) = (\delta_h, \varphi)$, *luego* $\tau_h\delta = \delta_h$.

Sean $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $f \in C(\mathbb{R})$. La composición $a^* f(x) := f(ax)$, $x \in \mathbb{R}$, cumple que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (a^* f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)\,dx = |a|^{-1}(f, (a^{-1})^*\varphi),$$

donde $(a^{-1})^*\varphi(x) = \varphi(\frac{x}{a})$.

Definición 23. *Sea $f \in D'$, y sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $a^* f$ dada de la siguiente manera:*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad (a^* f, \varphi) := |a|^{-1}(f, (a^{-1})^*\varphi),$$

define una función generalizada.

Ejemplo 18. *Sean* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *y* $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$. *La función generalizada* $a^* f$ *está dada por*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (a^* f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)\, dx = |a|^{-1}\, (f, (a^{-1})^* \varphi).$$

Capítulo 2

Propiedades Fundamentales de la Derivada Generalizada y la Derivada Débil Según S.L. Sóbolev.

2.1. Propiedades de la derivada generalizada

En esta sección estudiaremos algunas operaciones del cálculo aplicadas a las funciones generalizadas. Es claro que existen funciones , por ejemplo las funciones discontinuas que no tienen derivada en el sentido clásico (en $\mathbb{R}$); sin embargo, si estas funciones son tratadas como funciones generalizadas es posible extender el concepto de derivada a dichas funciones. Empezamos con el concepto de derivación en $\mathcal{D}'$.

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, tenemos que $f' \in C(\mathbb{R})$; pero el espacio de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ está contenido en el espacio de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}$; luego f' es una función localmente integrable. Por lo anterior podemos definir la función generalizada f' mediante la expresión:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (f', \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\, dx \quad , \tag{2.1}$$

donde la integral en (2.1) converge gracias a que $f' \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$*; además integrando por partes en (2.1), por ser la función* $\varphi \in \mathcal{D}$ *tenemos que*

$$(f',\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx,$$

donde $f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$ *ya que* φ *es de soporte compacto. Este hecho motiva el siguiente concepto.*

Definición 24. *Sea* f *una función generalizada. Se llama derivada de la función generalizada* f *al funcional sobre* $\mathcal{D}$*, denotado como* f' *y determinado por la igualdad*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \ (f',\varphi) := -(f,\varphi'). \tag{2.2}$$

De la igualdad (2.2) tenemos que para hallar el valor del funcional f' *en cualquier elemento* φ *que pertenece a* $\mathcal{D}$*, sólo debemos calcular el valor del funcional* f *en el elemento* φ' *en* $\mathcal{D}$.

Lema 2. *El funcional* f' *definido mediante la fórmula (2.2) es lineal y continuo.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y* $\varphi, \phi \in \mathcal{D}$, donde f es lineal y continuo. Entonces:

$$\begin{aligned}(f',\alpha\varphi+\beta\phi) &= -\left(f,(\alpha\varphi+\beta\phi)'\right) = -\left(f,\alpha\varphi'+\beta\phi'\right)\\ &= -\alpha\left(f,\varphi'\right) - \beta\left(f,\phi'\right) = \alpha\left(f',\varphi\right) + \beta\left(f',\phi\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto f' es lineal.
Si $g_n \to g$ en $\mathcal{D}$ cuando $n \to \infty$, entonces en virtud de la convergencia en el espacio lineal $\mathcal{D}$ tenemos que $g_n' \to g'$ en $\mathcal{D}$ para $n \to \infty$. Luego:

$$(f',g_n) = -\left(f,g_n'\right) \to -\left(f,g'\right) = \left(f',g\right),\ n \to \infty.$$

Por lo tanto f' es continuo.
Hemos probado que f' es lineal y continuo, es decir que $f' \in \mathcal{D}'$. □

Del anterior lema podemos decir que f' *es una función generalizada.*

Ejemplo 19. *Como* $\operatorname{sen} x \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$*, la función generalizada de seno es:*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \ (sen, \varphi) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} sen\, x\, \varphi(x)\, dx, \tag{2.3}$$

La derivada de esta función generalizada según (2.2) es:

$$\begin{aligned}(sen', \varphi) = -(sen, \varphi') &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} sen\, x\, \varphi'(x)\, dx = -[sen\, x\, \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} cos\, x\, \varphi(x)\, dx],\\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} cos\, x\varphi(x)\, dx = (cos, \varphi).\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $\forall\varphi \in \mathcal{D}\ (sen', \varphi) = (cos, \varphi)$ *es decir (ver def* (20)*)* $sen' = cos$.

Ejemplo 20. *Consideremos la función de Heaviside.*

La derivada de la función de Heaviside en $\mathbb{R}$*, en el sentido habitual está dada por:*

$$h_a'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq a \\ \\ \nexists & si \quad x = a \quad . \end{cases}$$

Pero la derivada de esta función en el sentido de las funciones generalizadas está dada por [1]

$$\begin{aligned}(h_a', \varphi) = -(h_a, \varphi') &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_a'\varphi'(x)\, dx = -\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -\varphi(x)\Big|_a^{+\infty},\\ &= -\varphi(+\infty) + \varphi(a) = (\delta_a, \varphi).\end{aligned}$$

Se usó el hecho de que φ *es de soporte compacto, entonces* $\varphi(x) \to 0,\ x \to +\infty$*. Así,* $\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \ (h_a', \varphi) = (\delta_a, \varphi)$ *es decir* $h_a' = \delta_a$.

Es natural preguntarse que las derivadas tanto en el sentido habitual, como en el sentido de las funciones generalizadas son análogas.

Resulta que la derivada clásica de una función continuamente derivable en $\mathbb{R}$ *considerada*

[1] Donde $\varphi(+\infty) := \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

como funcional sobre $\mathcal{D}$, coincide con la derivada de dicha función en el sentido de las funciones generalizadas. Sin embargo, el recíproco de esta afirmación es falso, como se muestra a continuación.

Sea

$$x_+ := \begin{cases} x, & si \quad x > 0 \\ 0, & si \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

Como $x_+ \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, luego la función generalizada es:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ (x_+, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} x_+\, \varphi(x)\, dx, \tag{2.4}$$

la derivada de esta función generalizada según (2.2) es:

$$\begin{aligned} (x'_+, \varphi) &= -(x_+, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} x_+ \varphi'(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)\, dx = -x\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\varphi(x)\, dx = (h, \varphi). \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ $(x'_+, \varphi) = (h, \varphi)$ es decir $x'_+ = h$, que coincide con la derivada usual de x'_+, pero $x'_+ \notin C^1(\mathbb{R})$.

Proposición 5. *Toda función generalizada f admite derivadas de todo orden, y además*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ (f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}\, . \tag{2.5}$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{D}'$ *y* $\varphi \in \mathcal{D}$.

Para $n = 0, 1$. (2.5) se cumple trivialmente ya que cualquier función generalizada admite una derivada:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi').$$

Caso $n = 2$: $(f'', \varphi) = ((f')', \varphi) = -(f', \varphi') = (-1)^2 (f, \varphi'') = (f, \varphi'')$.

Supongamos que el resultado es válido para $n = k$: $(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)})$.

Probemos que se cumple para $n = k + 1$.

$$(f^{(k+1)}, \varphi) = ((f^{(k)})', \varphi) = -(f^{(k)}, \varphi') = (-1)(-1)^k (f, (\varphi^{(k)})') = (-1)^{k+1} (f, \varphi^{(k+1)}).$$

Por el principio de inducción matemática hemos probado que:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \ (f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}),\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}\ .$$

$\square$

Nota 2. *La derivación en $\mathcal{D}'$ es lineal, es decir:*
Si $f, g \in \mathcal{D}'$ y $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $((f+g)', \varphi) = (f' + g', \varphi)$.
En efecto:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \ ((f+g)', \varphi) = -(f+g, \varphi') = -(f, \varphi') - (g, \varphi') = (f', \varphi) + (g', \varphi) = (f' + g', \varphi).$$

Proposición 6. *Es válida la fórmula (regla de Leibniz):*

$$\forall f \in \mathcal{D}',\ \forall \mu \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ \ (\mu f)' := \mu' f + \mu f'.$$

Demostración. Recordemos que, si $f \in \mathcal{D}$ y $\mu \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $(\mu f, \varphi) = (f, \mu\varphi)$.

$$\begin{aligned} ((\mu f)', \varphi) = &= -(\mu f, \varphi') = -(f, \mu\varphi'), \\ &= -(f, (\mu\varphi)' - \mu'\varphi) = (f, \mu'\varphi) - (f, (\mu\varphi)') = (\mu' f, \varphi) - (f, (\mu\varphi)'), \\ &= (\mu' f, \varphi) + (f', (\mu\varphi)) = (\mu' f, \varphi) + (\mu f', \varphi), \\ &= (\mu' f + \mu f', \varphi). \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 21. *1) Calcular $(x^3 + 1)\delta'$.*
2) Calcular $x\delta^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Solución.

1) Sea $\varphi \in \mathcal{D}$, luego

$$\begin{aligned} ((x^3+1)\delta', \varphi) &= (\delta', (x^3+1)\varphi) = -(\delta, ((x^3+1)\varphi)') = -(\delta, (3x^2)\varphi + (x^3+1)\varphi'), \\ &= -[(\delta, 3x^2\varphi) + ((\delta, (x^3+1)\varphi')] = -[3(\delta, x^2\varphi) + (\delta, x^3\varphi') + (\delta, \varphi')] \\ &= -[3(\varphi(0)0) + (\varphi'(0)0) + \varphi'(0)] = -\varphi'(0) = -(\delta, \varphi') = (\delta', \varphi). \end{aligned}$$

Luego, $(x^3+1)\delta' = \delta'$.

2) Para $k=1$ *tenemos que:*

$$(x\delta', \varphi) \;=\; (\delta', x\varphi) = -(\delta, (x\varphi)') = -(\delta, \varphi + x\varphi') = -(\delta, \varphi).$$

luego $x\delta' = -\delta$.

Si $k=2$,

$$(x\delta'', \varphi) \;=\; (\delta'', x\varphi) = (\delta, (x\varphi)'') = (\delta, \varphi' + x\varphi'' + \varphi') = -2(\delta', \varphi).$$

En general, $\forall k \in \mathbb{N}$ *tenemos que:* $x\delta^k = -k\delta^{k-1}$.

Ejemplo 22. *Calculemos para la función de Heaviside:* $h'_a, h''_a, \ldots, h_a^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Solución. $\forall \varphi \in D$:

$(h'_a, \varphi) = -(h_a, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_a(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_a^{+\infty} = \varphi(a)$,

dado que φ *es de soporte compacto.*

Así $\forall \varphi \in D \quad (h'_a, \varphi) = (\delta_a, \varphi)$, *esto es* $h'_a = \delta_a = \varphi(a)$,

$(h''_a, \varphi) = (-1)^2(h_a, \varphi'') = \int\limits_a^{+\infty} \varphi''(x)dx = \varphi'(x)\Big|_a^{+\infty} = -\varphi'(a)$.

Luego $h''_a = \delta'_a = -\varphi'(a)$.

En general, $\forall k \in \mathbb{N}$ $h_a^{(k)} = \delta_a^{(k-1)} = (-1)^{(k-1)}\varphi(a)$, *lo cual puede mostrarse fácilmente por inducción.*

Ejemplo 23. *Calcular:* $\delta\,'$, $\delta\,''$, $\ldots, \delta^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Solución. $\forall \varphi \in D$,

$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$.

$(\delta'', \varphi) = (-1)^2(\delta, \varphi'') = \varphi''(0)$.

En general $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $\;(\delta^k, \varphi) = (-1)^k(\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k\varphi^{(k)}(0)$.

Ejemplo 24. *Sean* $a \in \mathbb{R} - fijo$, $a \neq 0$ *y* $f \in C(\mathbb{R})$. *Sea* $g(x) = f(ax)$, *luego* $g \in C(\mathbb{R})$, *por tanto* g *define una función generalizada. Calculemos su primera derivada.*

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D},\; (g', \varphi) &= -(g, \varphi') = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(x)f(ax)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} af'(ax)\varphi(x)\,dx = (af'(ax), \varphi(x)),\end{aligned}$$

luego $\forall\varphi \in \mathcal{D}$ $(g', \varphi) = (af'(ax), \varphi(x))$ *es decir* $f'(ax) = af'(ax)$.

Definición 25. *Sean* f *una función generalizada,* $a \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$*. Luego*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D},\ \left((f(ax))^{'}, \varphi\right) := (af'(ax), \varphi), \tag{2.6}$$

donde $(f(ax))^{'}$ *define una función generalizada.*

Lema 3. *Sean* $f_j \in \mathcal{D}', f \in \mathcal{D}'$ *y* $\forall\varphi \in \mathcal{D}$ $\lim\limits_{j\to\infty}(f_j, \varphi) = (f, \varphi)$*. Entonces* $\forall\varphi \in \mathcal{D}$ $\lim\limits_{j\to\infty}(f_j', \varphi) = (f', \varphi)$.

Demostración. En efecto, supongamos que la sucesión de funciones generalizadas $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{D}'$. Entonces, $\forall\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene

$$\left(f_j', \varphi\right) = -(f_j, \varphi') \to -(f, \varphi') = (f', \varphi) \qquad j \to \infty.$$

Por lo tanto, $f_j' \to f'$ en $\mathcal{D}'$ cuando $j \to \infty$.

□

De el anterior lema tenemos que, para toda sucesión de funciones generalizadas convergente en $\mathcal{D}'$ *la derivada de la función límite es igual al límite débil de la sucesión de las derivadas.*

Nota 3. *Como consecuencia del lema anterior tenemos que toda serie convergente de funciones generalizadas puede ser derivada término a término cualquier número de veces:*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Rightarrow f^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}. \tag{2.7}$$

Cuando se trata de series de funciones, la igualdad en (2.7) no siempre se tiene, ya que en ese caso se deben requerir condiciones adicionales, como la convergencia uniforme de la serie de las derivadas, para poder asegurar que ésta converge a la derivada de la suma de la serie.

Ejemplo 25. *La sucesión de funciones generalizadas regulares* $\left\{\frac{sen(jx)}{j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *tiende a la función generalizada nula* $0 \in \mathcal{D}$ *cuando* $j \to \infty$*, dado que la sucesión de funciones converge uniformemente a la función nula,*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad \lim_{j\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(jx)}{j}, \varphi\right) = (0, \varphi) = 0.$$

Entonces, dado que la derivación es continua en $\mathcal{D}'$ y de (2.6) tenemos,

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad \lim_{j\to\infty}\left(\left(\frac{\operatorname{sen}(jx)}{j}\right)', \varphi\right) = \lim_{j\to\infty}\left(\cos(jx), \varphi\right) = (0, \varphi) = 0.$$

Es decir la sucesión de funciones generalizadas $\{\cos(jx)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a la función generalizada nula cuando $j \to \infty$.

Observemos que en el sentido habitual no existe $\lim\limits_{j\to\infty} cos(jx)$.

Similarmente $\lim\limits_{j\to\infty} \operatorname{sen}(jx) = 0$. Tomando sucesivas derivadas tenemos que:

$$\lim_{j\to\infty}(cos(jx), \varphi) = -\lim_{j\to\infty}(jsen(jx), \varphi) = \lim_{j\to\infty}(j^2cos(jx), \varphi) = ... = \lim_{j\to\infty}(j^n \operatorname{sen}(jx), \varphi) = (0, \varphi),$$

$$\lim_{j\to\infty}(sen(jx), \varphi) = -\lim_{j\to\infty}(jcos(jx), \varphi) = -\lim_{j\to\infty}(j^2sen(jx), \varphi) = ... = \lim_{j\to\infty}(j^n \cos(jx), \varphi) = (0, \varphi).$$

Es decir $\lim\limits_{j\to\infty} j^n \cos(jx) = 0 = \lim\limits_{j\to\infty} j^n \operatorname{sen}(jx)$.

Sea $f \in C(\mathbb{R})$ cuya derivada clásica es continua a trozos [2] en $\mathbb{R}$, con discontinuidades de salto en los puntos $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = S$, ella define una función generalizada regular, debido a que toda función continua se puede ver como una función generalizada (Si $f \in C(\mathbb{R})$ entonces $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$), cuya derivada está dada por

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad (f', \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx;$$

donde supp $\varphi \subset [a, b]$. En efecto, Sea $\{c_k\}_{k=1}^t$ el conjunto de puntos de S donde f es discontinua en $[a, b]$,

(consideramos $a_1 = a \quad y \quad a_k = b$).

Integrando por partes en cada uno de los segmentos [3] $[a_k, a_{k+1}]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}(f', \varphi) &= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^t \int_{c_k}^{c_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\, dx - \sum_k^t \left[f(c_{k+1} - 0)\varphi(c_{k+1}) - f(c_k + 0)\varphi(c_k)\right].\end{aligned}$$

[2] Decimos que una función g es continua a trozos en $\mathbb{R}$ si existe una partición $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que la función g es continua en cada uno de los intervalos (x_{k-1}, x_k) y son finitos los limites $g(x_k+0) = \lim\limits_{x\to x_k^+} g(x)$ y $g(x_k - 0) = \lim\limits_{x\to x_k^-} g(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. En particular en cada segmento g tiene un número finito de estos puntos.

[3] Una función continua a trozos en un segmento es integrable sobre dicho segmento.

Como $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, de ahí que cada una de las integrales de la primera suma existen y son finitas.
Por tanto la primera suma es finita, también por ser f continua tenemos que $f(c_k+0) = f(c_k-0) \quad k = 1,2,...,t$ por lo cual la segunda suma se anula. Entonces, la derivada en el sentido de las funciones generalizadas de la función f es una función generalizada regular definida por:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}\,, \qquad (f',\varphi) = \sum_k^t \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{df}{dx}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx}\varphi(x)\,dx,$$

donde $\frac{df}{dx}$ es la derivada en el sentido clásico de la función f.
Ahora consideramos que f es una función continua y diferenciable a trozos, con discontinuidades en los puntos $\{c_k\}_{k=1}^t$, donde $f(c_k+0)-f(c_k-0) = f_k$, la derivada de la función generalizada f regular que ella define satisface que:

$$\begin{aligned}
(f',\varphi) &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= \sum_k^t \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx + \sum_k^t [f(c_k+0)\varphi(c_k) - f(c_k-0)\varphi(c_k)] \\
&= \int\limits_{-\infty}^{-\infty} \frac{df}{dx}\varphi(x)\,dx + \sum_k^t f_k\varphi(a_k).
\end{aligned}$$

Ejemplo 26. *Calculemos $f''(x)$, donde*

$$f(x) = \begin{cases} \cos\, x & si \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & si \quad |x| \geq \frac{\pi}{2}\ , \end{cases}$$

la derivada clásica en los puntos $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ no existe. En efecto

$$f'_-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h-\frac{\pi}{2}) - f(-\frac{\pi}{2})}{h} = 0,$$

$$f'_+\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h-\frac{\pi}{2}) - f(-\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos\,(h-\frac{\pi}{2}) - \cos\,(-\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\text{sen}\,(h)}{h} = 1,$$

análogamente

$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h+\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = 0,$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h+\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(h+\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{h} = -1.$$

Luego la derivada en el sentido clásico de f está dada por

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \textit{si} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \textit{si} \quad |x| > \frac{\pi}{2} \\ \textit{no existe} & \textit{si} \quad x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

Como f es continua en $\mathbb{R}$, la derivada en el sentido de funciones generalizadas es

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \textit{si} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \textit{si} \quad |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} ,$$

Como f' es derivable en $\mathbb{R}$ excepto en los puntos $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y además $f'(-\frac{\pi}{2}+0) - f'(-\frac{\pi}{2}-0) = 1-0 = 1$ y $f'(\frac{\pi}{2}-0) - f'(\frac{\pi}{2}+0) = 1-0 = 1$ entonces

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \delta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right),$$

donde

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \begin{cases} -\cos x & \textit{si} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \textit{si} \quad |x| > \frac{\pi}{2} \\ \textit{no existe} & \textit{si} \quad x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases} ,$$

es la segunda derivada de la función f y δ es la función Delta de Dirac.

Teorema 2.1. *Sea f es una función generalizada tal que $f' = 0$, entonces f es una función generalizada constante.*

Demostración. Primero observemos que una condición necesaria y suficiente para que $\varphi \in \mathcal{D}$ sea la derivada de una función $\psi \in \mathcal{D}$ es que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$. En efecto, si $\varphi = \psi'$,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Entonces

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{-a}^{a} \varphi(t)\,dt = \psi(t)\Big|_{a}^{-a} = 0, \tag{2.8}$$

donde *supp* $\varphi \subset [-a, a]$.

Ahora asumamos que $\varphi \in \mathcal{D}$ es tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0, \tag{2.9}$$

Y definamos

$$\psi(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Mostremos que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dado que φ es infinitamente diferenciable, entonces ψ también lo es. Ahora por $(2,9)$ y como $\psi \in C_0(\mathbb{R})$, existe $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq b.$$

Es decir la función ψ tiene soporte compacto. Por tanto $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y además $\varphi = \psi'$.

Observemos que para cada función $\varphi \in \mathcal{D}$, se tiene

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = (1, \varphi) = C_\varphi \in \mathbb{R},$$

donde $(1, \varphi)$ corresponde a la función generalizada regular definida por la función constante $f = 1$ actuando sobre $\varphi \in \mathcal{D}$ y $C_\varphi = (1, \varphi)$ es un número real que depende de la función φ. Para probar el teorema, tomemos una función arbitraria $\psi \in \mathcal{D}$ con la propiedad $C_\psi = (1, \psi) = 1$. Observemos que $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \varphi = [\varphi - M\psi] + M\psi; \quad M \in \mathbb{R}$, en particular tomemos

$$M = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = (1, \varphi).$$

Como $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, entonces la función $\mu = \varphi - M\psi \in \mathcal{D}$. Luego $\varphi = \mu + M\psi$.

Ahora

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(x) - M\psi(x)\right)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx + M\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = M - M = 0.$$

Entonces existe $\phi \in \mathcal{D}$ tal que $\mu = \phi'$. Ahora por hipótesis tenemos que $f' = 0$, luego

$$0 = (f', \phi) = -(f, \phi') = -(f, \mu) = (f, \varphi - M\psi) = -(f, \varphi) + M(f, \psi).$$

Por lo cual

$$(f, \varphi) = M(f, \psi).$$

Sea T la constante dada por $T = (f, \psi)$. Como $M = (1, \varphi)$, entonces $(f, \varphi) = T(1, \varphi)$. Así $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (f, \varphi) = (T, \varphi)$. Por lo tanto $f = T$. □

De lo anterior resulta que si dos funciones generalizadas f, g tienen la misma derivada $f' = g'$, entonces sólo difieren en una constante.

2.2. Propiedades de la derivada débil según Sóbolev

En la sección anterior vimos que toda función generalizada admite derivadas de todo orden; sin embargo cuando se trata de una función localmente integrable sobre $\mathbb{R}$ podemos ver que su derivada en el sentido de funciones generalizadas no necesariamente está en $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ (ver ejemplo 28). Ahora si consideramos una función $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$, vemos que integrando por partes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}f(x)\varphi(x)dx.$$

En realidad esta igualdad nos lleva a otra generalización de la noción de diferenciación, ya que para algunas funciones su derivada clásica no existe en $\mathbb{R}$, pero existe una función $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx.$$

Ejemplo 27. *Sea* $f(x) = |x|$*, entonces* $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\varphi'(x)\,dx &= \int_{-a}^{a} |x|\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{0} x\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{a} x\varphi'(x)\,dx \\
&= \underbrace{-\,x\varphi(x)|_{-a}^{0}}_{0} + \int_{-a}^{0} \varphi(x)\,dx + \underbrace{x\varphi(x)|_{0}^{a}}_{0} - \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} sgn\, x\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Donde supp $\varphi \subset [-a, a]$ *y* $sgn\, x$ *es la función signo dada por*

$$sgn\, x := \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

El anterior ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 26. *Sean* $n \in \mathbb{N}$*,* $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$*. Supongamos que:*

$$\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx. \tag{2.10}$$

Entonces decimos que g *es una derivada débil según Sóbolev de orden* n *de la función* f *en* $\mathbb{R}$*, y la denotaremos*[4] *por* $\mathcal{D}_w^n f$*;* $\mathcal{D}_w^1 f \equiv \mathcal{D}_w f$*.*

En adelante usaremos la expresión "derivada débil" para referirnos a este tipo de derivada.

Ejemplo 28. *Sea n=1. Calculemos una derivada débil de la función* $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$*.*

[4]La letra w es tomada del ingles weak, que en español significa débil.

$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{-a}^{a} f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-a}^{0} 0\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{a} x\varphi'(x)\,dx \\
&= \int_{-a}^{0} 0\varphi(x)\,dx + x\varphi(x)\Big|_0^a - \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\varphi(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Donde h es la función de Heaviside y $supp\,\varphi \subset [-a,a]$.

Teorema 2.2. (**Unicidad de la derivada débil**)

Sean $n \in \mathbb{N}$, $f, g, u \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ tales que $g = \mathcal{D}_w^n f$, y $u = \mathcal{D}_w^n f$ en $\mathbb{R}$.

Entonces $\dot{\forall} x \in \mathbb{R}$ g=u.

Demostración. Por definición tenemos que $\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx$ *y*
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi(x)dx$. Luego

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi(x)dx.$$

De ahi que

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (g-u)(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Por el teorema 1.7 tenemos que $\dot{\forall} x \in \mathbb{R}$, $g = u$. □

Lema 4. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y f una función definida en $\mathbb{R}$, tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ la derivada clásica $\frac{d^n f}{dx^n}$ existe y es continua en $\mathbb{R}$. Entonces $\frac{d^n f}{dx^n} = \mathcal{D}_w^n f$ en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Mostremos para el caso $n = 1$. Supongamos que $Supp\,\varphi \subset [a, b]$.
Integrando por partes tenemos:

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx \;=\; f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx$$
$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx.$$

Dado que $\frac{df}{dx}$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces $\frac{df}{dx} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, y por tanto $\frac{df}{dx} = \mathcal{D}_w f$.
En general integrando por partes n veces y teniendo en cuenta que *supp* $\varphi^{(k)} \subset [a, b]$ es compacto para $k = 1, 2, 3, ..., n$ tenemos que:

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n}\varphi(x)\,dx.$$

Como $\frac{d^n f}{dx^n}$ es continua, entonces $\frac{d^n f}{dx^n} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, y por tanto $\frac{d^n f}{dx^n} = \mathcal{D}_w^n f$. $\square$

Observación 4. *En el lema anterior la continuidad de la derivada clásica de la función f es esencial. Por ejemplo la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{x^2}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$, tiene por derivada clásica la función $2x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$ si $x \neq 0$, y $f'(0) = 0$, pero esta no es la derivada débil de f en $\mathbb{R}$ ya que $2x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$ no es localmente integrable sobre $\mathbb{R}$. En efecto, supongamos que, $f' \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ es decir $\forall K \subset \mathbb{R}$, K compacto, se tiene que: $\int\limits_K |f'(x)|\,dx < \infty$, en particular para $K = [0{,}1]$ tenemos que: $\int\limits_0^1 |f'(x)|\,dx < \infty$.*

$$\int\limits_0^1 \left|2x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right| dx \geq \left|\int\limits_0^1 \left|2x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x^2}\right| dx - \int\limits_0^1 \left|\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right| dx\right|, \qquad (2.11)$$

donde la segunda integral de (2.11) existe debido a que $2x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x^2}$ es continua en $[0, 1]$. Ahora en la tercera integral de (2.11) tenemos que:
Dado $x \in (a_j, b_j) = \left(\sqrt{\frac{3}{3j+1}}, \sqrt{\frac{3}{3j-1}}\right)$ tenemos que $\left|cos\frac{\pi}{x^2}\right| \geq \frac{1}{2}$.

Los intervalos (a_j, b_j) *son disjuntos dos a dos, además* $A = \bigcup_{i=2}^{\infty} (a_j, b_j) \subset (0,1)$, *luego*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| \frac{2\pi}{x} cos \frac{\pi}{x^2} \right| dx \geq \int\limits_A \left| \frac{2\pi}{x} cos \frac{\pi}{x^2} \right| dx &\geq \pi \int_A \frac{1}{x}\, dx = \pi \sum_{j=2}^{\infty} \int\limits_{b_j}^{a_j} \frac{1}{x}\, dx = \pi \sum_{j=2}^{\infty} ln\, x \Big|_{b_j}^{a_j} \\
&= \pi \sum_{j=2}^{\infty} ln \left(\sqrt{\frac{3}{3j-1}} \right) - ln \left(\sqrt{\frac{3}{3j+1}} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \sum_{j=2}^{\infty} ln \left(\frac{3j+1}{3j-1} \right) \geq \frac{\pi}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{3j-1}.
\end{aligned}$$

Donde en la ultima igualdad, la serie diverge luego,

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{2\pi}{x} cos \frac{\pi}{x^2} \right| dx = +\infty\, .$$

Lo cual es una contradicción ya que hemos supuesto que la primera integral de (2.11) converge.

Proposición 7. *Si* $f_1, f_2 \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *y existen las derivadas débiles* $g_1 = \mathcal{D}_w^n f_1,\ g_2 = \mathcal{D}_w^n f_2$, *entonces* $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ *existe* $\mathcal{D}_w^n(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ *y* $\mathcal{D}_w^n(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{D}_w^n f_1 + c_2 \mathcal{D}_w^n f_2$.

Demostración. $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx &= c_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx + c_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx \\
&= (-1)^n c_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) \varphi(x)\, dx + (-1)^n c_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) \varphi(x)\, dx \\
&= (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)) \varphi(x)\, dx \\
&= (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

donde $g = c_1 g_1 + c_2 g_2 \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, ya que para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}$,
$\int\limits_K |(c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x))|\, dx \leq |c_1| \int\limits_K |g_1(x)|\, dx + |c_2| \int\limits_K |g_2(x)|\, dx < +\infty.$
Es decir $g = \mathcal{D}_w^n(c_1 f_1 + c_2 f_2)$. $\square$

Observación 5. *Notemos que si* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *tiene derivada débil* $\mathcal{D}_w^n f$ *sobre* $\mathbb{R}$, *entonces* $\mathcal{D}_w^n f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Lema 5. *Sea* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *tal que* $\mathcal{D}_w f = 0$. *Entonces existe una constante* A *tal que* $\dot{\forall} x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A$.

Demostración. En la demostración del teorema 2.1 vimos que dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = c,$$

donde c es un número real que depende de la función φ. Sea $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ una función fija tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\, dx = 1$. Entonces la diferencia de funciones $\varphi_0 = \varphi - c\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, y es tal que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - c\varphi_1(x))\, dx \quad &= \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx - c\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\, dx \\
&= \quad c - c = 0.
\end{aligned}$$

Así que φ_0 es la derivada en el sentido clásico de una función de $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_0 = \psi'$ (ver teorema 2.1), en consecuencia podemos ver que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_0(x) + c\varphi_1(x))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_0(x)\, dx + c\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi'(x)\, dx + c\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)\, dx = 0 + c\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)\, dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx\right) A = \int_{-\infty}^{+\infty} A\varphi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

donde $A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)\, dx$. Es decir

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - A)\varphi(x)\, dx = 0.$$

Luego por el teorema 1.7, tenemos que

$$\dot{\forall} x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - A = 0.$$

$\square$

El anterior lema es útil para analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 29. *Mostremos que la derivada $(sgn\, x)'_w$ no existe en $\mathbb{R}$.*
En efecto, supongamos que $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ es la derivada débil de sgn x.
Si suponemos que $g = 0$, entonces por el lema 6 tenemos que sgn x es una función constante en $\mathbb{R}$, pero esto es falso ya que la función sgn x no es constante.
Supongamos que $g \neq 0$. Luego $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} sgn\, x\varphi'(x)\, dx &= \int_{-a}^{a} sgn\, x\varphi'(x)\, dx \\ &= \int_{-a}^{0} -\varphi'(x)\, dx + \int_0^a \varphi'(x)\, dx \\ &= -\varphi(x)\Big|_{-a}^{0} + \varphi(x)\Big|_0^a = -2\varphi(0)\,, \end{aligned}$$

donde Supp $\varphi \subset [-a, a]$. Es decir,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} sgn\, x\varphi'(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx = -2\varphi(0). \tag{2.12}$$

Sea $h(x) = x$ y $\varphi(x) = h(x)\psi(x)$, donde $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Es claro que
($\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ya que $h(x)\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$). Luego por (2.12)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\psi(x)\, dx = 2x\psi(x)\Big|_0 = 0.$$

Observemos que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, $\int_k |xg(x)|\ dx < +\infty$ ya que la función $|h(x)| = |x|$ está acotada en K y $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, es decir $xg(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Como ψ es cualquier elemento en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ la expresión, $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\psi(x)\, dx = 0$ implica que
$\dot{\forall} x \in \mathbb{R}$, $xg(x) = 0$, por el teorema 1.7, pero $h(x) = x \neq 0$, entonces $\dot{\forall} x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, lo cual contradice nuestro supuesto.

Observación 6. *Para cada* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *la derivada* $f^{(n)}$ *existe en el sentido de las funciones generalizadas, es decir ,* $f^{(n)} \in \mathcal{D}'$.

Notemos que $(sgn\ (x))' = 2\delta(x)$ *en el sentido de las funciones generalizadas. Desde este punto de vista la derivada débil* $\mathcal{D}_w^n f$ *de una función* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *si y sólo si , la derivada generalizada* $f^{(n)}$ *es una función generalizada regular es decir, es un funcional representado por una función* $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$*:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (f^{(n)}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx \ .$$

Esta función g *es la derivada débil de* f *de orden* n *sobre* $\mathbb{R}$.

En el siguiente teorema sólo demostraremos la necesidad, ya que para la demostración de la suficiencia se necesitan conceptos adicionales que no hemos abordado en nuestro trabajo, y que estarían fuera de los objetivos del mismo.
(Ver [3] pág 22).

Teorema 2.3. *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. *La función* g *es una derivada débil de la función* f *de orden* n *sobre* $\mathbb{R}$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de funciones de* $C^\infty(\mathbb{R})$, *tal que* ψ_j *converge a* f *en* $L_1^{loc}(\mathbb{R})$, *y* $\frac{d^n\psi_j}{dx^n}$ *converge a* g *en* $L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Demostración. Como $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi_j(x)}{dx^n}\varphi(x)\, dx.$$

Ahora observemos que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_j(x) - f(x)| \left|\varphi^{(n)}(x)\right| dx \\
&= \int_a^b |\psi_j(x) - f(x)| \left|\varphi^{(n)}(x)\right| dx \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \int_a^b |\psi_j(x) - f(x)|\ dx,
\end{aligned}$$

donde $supp\, \varphi \subset [a,b]$. La última expresión tiende a cero cuando j tiende a infinito dado que $\psi_j \to f \;\; en \;\; L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Así, hemos mostrado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx \quad j \to \infty. \tag{2.13}$$

Además $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi_j(x)}{dx^n}\varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\psi_j(x)}{dx^n} - g(x) \right| |\varphi(x)|\, dx \\
&= \int_a^b \left| \frac{d\psi_j(x)}{dx^n} - g(x) \right| |\varphi(x)|\, dx \\
&\leq \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \int_a^b \left| \frac{d\psi_j(x)}{dx^n} - g(x) \right| dx.
\end{aligned}$$

donde $supp\, \varphi \subset [a,b]$. La última expresión tiende a cero cuando j tiende a infinito dado que $\frac{d^n\psi_j}{dx^n} \to g \;\; en \;\; Ł_1^{loc}(\mathbb{R})$. Así que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_w^n f_j(x)\varphi(x)\, dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx, \quad j \to \infty. \tag{2.14}$$

En consecuencia de (2.13) y (2.14) tenemos que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx;$$

es decir $\mathcal{D}_w^n f = g$.

$\square$

En el ejemplo 10 del capítulo I vimos que el operador definido como

$$\begin{array}{rccc}
\mathcal{T}: & C^1[a,b] & \longrightarrow & C[a,b] \\
 & f & \mapsto & \mathcal{T}f = f'
\end{array},$$

es un operador cerrado. Ahora definamos el operador Γ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccc}
\Gamma: & C^1[a,b] & \longrightarrow & L_1^{loc}[a,b] \\
 & f & \mapsto & \Gamma f = f'.
\end{array},$$

Mostremos con un ejemplo que este operador no es cerrado.

Ejemplo 30. *Sean* $[a,b]=[-1,1]\,,\ f(x)=|x|$, *y* $f_j(x)=\left(x^2+\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\ j\in\mathbb{N}$.
Tenemos que

$$\forall x\in[-1,1]\,,\quad \lim_{j\to\infty}\left(x^2+\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{2}}=|x|\,.$$

Además $\forall j\in\mathbb{N},\ \frac{1}{j}\leq 1$, *por tanto* $\forall j\in\mathbb{N},\ \left(x^2+\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{2}}\leq x^2+1\in L_1([-1,1])$.
Entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (teorema 1.3),
$f_j\to f\ \ (j\to\infty)$ *en* $L_1([-1,1])$.
Por otra parte $f_j'(x)=\frac{x}{\left(x^2+\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{2}}}\to\frac{x}{|x|}=sgn\,x,\ \ x\neq 0\ \ (j\to\infty)$.
Tengamos en cuenta que $\frac{|x|}{\left(x^2+\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{2}}}\leq x^2+1$. *Entonces nuevamente por el teorema 1.3 tenemos que* $f_j'\to sgn\,x\ (j\to\infty)$ *en* $L_1([-1,1])$. *Es decir* $f_j\to f$ *y* $f_j'\to sgn\,x\ (j\to\infty)$ *en* $L_1^{loc}([-1,1])$; *pero* $g(x)=|x|\notin C^1([-1,1])$.
Esto quiere decir que Γ *no es cerrado.*

Denotemos por $G_w(\mathbb{R})$ *al conjunto de todas las funciones de* $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *que tienen derivada débil de orden n, y consideremos el operador*

$$\begin{array}{rccl}\mathcal{D}_w^n: & G_w & \longrightarrow & L_1^{loc}(\mathbb{R})\,,\\ & f & \mapsto & \mathcal{D}_w^n f=g\,.\end{array}$$

Mostremos que este operador es cerrado en $G_w(\mathbb{R})$, *es decir que si una sucesión de funciones*
$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset G_w(\mathbb{R})$ *y las funciones* $f,g\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *son tales que*

$$f_j\to f\ \ en\ \ L_1^{loc}(\mathbb{R}),\ \ \mathcal{D}_w^n\,f_j\to g\ \ en\ \ L_1^{loc}(\mathbb{R})\ \ (j\to\infty),$$

entonces $f\in G_w(\mathbb{R})$ *y* $\mathcal{D}_w^n\,f=g$.

Teorema 2.4. *Sean* $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *y* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *tal que* $f_j\to f\ \ (j\to\infty)$. *Suponga que existe las derivadas débiles* $\mathcal{D}_w^n\,f_j\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *y que* $\mathcal{D}_w^n\,f_j\to g\in L_1^{loc}(\mathbb{R})\ \ (j\to\infty)$. *Entonces* $g=\mathcal{D}_w^n\,f$. *Es decir el operador* $\mathcal{D}_w^n$ *es un operador cerrado en* $G_w(\mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos que la sucesión de funciones $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset G_w(\mathbb{R})$ y las funciones $f,g\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ son tales que

$$f_j\to f\ \ en\ \ L_1^{loc}(\mathbb{R}),\ \ \mathcal{D}_w^n\,f_j\to g\ \ en\ \ L_1^{loc}(\mathbb{R})\ \ (j\to\infty).$$

Entonces por definición tenemos que

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_w^n\, f_j(x)\varphi(x)\,dx.$$

Ahora supongamos que $Supp\ \varphi \subset [a,b]$. $\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_j(x)-f(x)|\left|\varphi^{(n)}(x)\right|\,dx \\
&= \int_a^b |f_j(x)-f(x)|\left|\varphi^{(n)}(x)\right|\,dx \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]}\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \int_a^b |f_j(x)-f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

El último término de esta desigualdad tiende a cero cuando j tiende a infinito. Es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx, \quad j\to\infty. \tag{2.15}$$

Además, $\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_w^n f_j(x)\varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{D}_w^n f_j(x)-g(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\
&= \int_a^b |\mathcal{D}_w^n f_j(x)-g(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]}|\varphi(x)| \int_a^b |\mathcal{D}_w^n f_j(x)-g(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

El último término de esta desigualdad tiende a cero cuando j tiende a infinito, esto es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_w^n f_j(x)\varphi(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx, \quad j\to\infty. \tag{2.16}$$

De (2.15) y (2.16) tenemos que:

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx;$$

es decir $g = \mathcal{D}_w^n f$. $\square$

Observación 7. *Reescribiendo el teorema 2.4 tenemos que si* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones de* $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *y si las funciones* $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *tales que* $\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *se cumple que*

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \quad y$$
$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx,$$

entonces g *es una derivada débil de orden* n *sobre* $\mathbb{R}$ *de la función* f.

Corolario 2.5. *Si la sucesión de funciones* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L_p(\mathbb{R}),\ 1 < p < \infty$, *converge débilmente*[5] *a* $f \in L_p(\mathbb{R})$, *y la sucesión de derivadas débiles* $\{\mathcal{D}_w^n f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L_p(\mathbb{R})$ *converge débilmente a* $g \in L_p(\mathbb{R})$, *entonces* f *tiene derivada débil de orden* n *y* $\mathcal{D}_w^n f = g$.

Demostración. Por el Lema 2 tenemos que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, f, g y $\{\mathcal{D}_w^n f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ están en $L_1^{loc}(\mathbb{R})$. De la hipótesis tenemos que:

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{y}$$
$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_w^n f_j(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx.$$

De la segunda igualdad,

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_w^n f_j(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx.$$

Hemos probado que se cumplen las condiciones del teorema anterior; luego $\mathcal{D}_w^n f = g$. $\square$

Proposición 8. *Sean* $1 \le p \le +\infty$. *y* q *el conjugado de* p. *Si* $f, \frac{df}{dx} \in L_p^{loc}(\mathbb{R})$ *y* $g, \frac{dg}{dx} \in L_q^{loc}(\mathbb{R})$, *entonces* $\mathcal{D}_w(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$.

Demostración. Caso I. $1 < p < +\infty$.
Para todo $\mathbb{R} \supset K$-compacto, por la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$\int_K |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_{L_p(K)}\|g\|_{L_q(K)} < +\infty,$$

[5] Donde la convergencia débil es la convergencia en $\mathcal{D}'$

es decir $fg \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Ahora integrando por partes y ya que $\varphi' \in D$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (fg)(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_a^b (fg)(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= (fg)(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d(fg)(x)}{dx}\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(fg)(x)}{dx}\varphi(x)\,dx, \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

donde *supp* $\varphi \subset [a,b]$. Dado que las derivadas de f y g existen en $\mathbb{R}$ tenemos que:

$$\frac{d(fg)(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}.$$

Nuevamente por la desigualdad de Hölder y para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$ tenemos que

$$\int_K \left|\frac{df(x)}{dx}g(x)\right| dx \leq \left\|\frac{df(x)}{dx}\right\|_{L_p(K)} \|g\|_{L_q(K)} < +\infty \quad y$$

$$\int_K \left|f(x)\frac{dg(x)}{dx}\right| dx \leq \|f\|_{L_p(K)} \left\|\frac{dg(x)}{dx}\right\|_{L_q(K)} < +\infty.$$

Esto implica que $\frac{df(x)}{dx}g(x)$ y $f(x)\frac{dg(x)}{dx}$ están en $L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Luego de (2.17) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f\,g)(x)\varphi'(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(fg)(x)}{dx}\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}\right)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Esto es,

$$\mathcal{D}_w(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}.$$

<u>Caso II</u>. $p = 1$

Para todo $\mathbb{R} \supset K$-compacto tenemos que:

$$\int_K |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L_1(K)} \|g\|_{L_\infty(K)} < +\infty.$$

Así $fg \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Supongamos que *supp* $\varphi \subset [a,b]$. Integrando por partes, debido a que φ' es de soporte compacto, tenemos

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (fg)(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_a^b (fg)(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= (fg)(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d(fg)(x)}{dx}\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(fg)(x)}{dx}\varphi(x)\,dx. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Dado que las derivadas de f y g existen en $\mathbb{R}$, se verifica la igualdad:

$$\frac{d(fg)(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}.$$

Como $f, \frac{df}{dx} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ y $g, \frac{dg}{dx} \in L_\infty(\mathbb{R})$, entonces para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$,

$$\int_K \left| \frac{df(x)}{dx} g(x) \right| dx \leq \left\| \frac{df}{dx} \right\|_{L_1(K)} \|g\|_{L_\infty(K)} < +\infty \quad y$$

$$\int_K \left| f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right| dx \leq \|f\|_{L_1(K)} \left\| \frac{dg}{dx} \right\|_{L_\infty(K)} < +\infty,$$

Esto implica que $\frac{df(x)}{dx}g(x)$ y $f(x)\frac{dg(x)}{dx}$ están en $L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Luego de (2.18) se sigue que

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f\,g)(x)\varphi'(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(fg)(x)}{dx}\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \right) \varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\mathcal{D}_w(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}.$$

□

Observación 8. *Si* $f, \frac{df}{dx} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *y* $g, \frac{dg}{dx} \in C(\mathbb{R})$, *entonces* $\mathcal{D}_w(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$.

Aunque los conceptos expuestos en el presente trabajo ilustran el caso unidimensional, ellos pueden ser extendidos al caso N-dimensional de manera natural. Por ejemplo, para el caso en que una función $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^N)$*, decimos que* f *tiene una derivada débil en* $\mathbb{R}^N$ *de orden* α *según Sóbolev si existe* $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi^{(|\alpha|)}(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)\,dx. \tag{2.19}$$

Llamaremos multi-índice, a todo elemento $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$*:* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) : \alpha_k \in \mathbb{N}_0$ *;* $k = 1, \ldots, n$*. El número* $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$*, se llama módulo del multi-índice,* *y* $\varphi^{(|\alpha|)} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$*, es decir* $\varphi^{(|\alpha|)}$ *es la derivada de orden* $|\alpha|$ *de la función* φ *en el sentido clásico. La derivada débil de la función* f *la notamos por*

$$\mathcal{D}_w^\alpha f \equiv \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_w.$$

Ahora veamos con un ejemplo que las derivadas débiles de orden $|\alpha| \geq 2$ *pueden existir sin necesidad que existan las derivadas débiles de orden menor a* $|\alpha|$*. En efecto, consideremos el espacio* $\mathbb{R}^2$ *y sea* $f(x, y) = sgn\ x + sgn\ y$*.*
Por el ejemplo 28 las derivadas débiles $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_w$ *y* $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_w$ *no existen, pero*

$$\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)_w = 0.$$

En efecto, observemos que

$$f(x,y) = \begin{cases} -2 & si \quad x < 0,\ x < 0 \\ 2 & si \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \quad . \end{cases}$$

Entonces por la continuidad de las derivadas parciales de $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *tenemos que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x \partial y}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} f(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\right)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-a}^{0}\left(\int_{-a}^{0} -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)\,dx\right)\,dy + \int_{0}^{a}\left(\int_{0}^{a} 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)\,dx\right)\,dy$$

$$= -2\int_{-a}^{0}\left(\frac{\partial\varphi(0,y)}{\partial y}-\frac{\partial\varphi(-a,y)}{\partial y}\right)\,dy + 2\int_{0}^{a}\left(\frac{\partial\varphi(a,y)}{\partial y}-\frac{\partial\varphi(0,y)}{\partial y}\right)\,dy$$

$$= 2\left[-\varphi(0,0)+\varphi(0,-a)+\varphi(-a,0)-\varphi(-a,a)+\varphi(a,a)-\varphi(a,0)-\varphi(0,a)+\varphi(0,0)\right]$$

$$= 2\left[\varphi(0,-a)+\varphi(-a,0)-\varphi(-a,a)+\varphi(a,a)-\varphi(a,0)-\varphi(0,a)\right],$$

donde supp φ *está contenido en el cubo* $[-a,a]\times[-a,a]$ *. Todas las expresiones en la última igualdad son cero debido a que los puntos* $(0,-a),(-a,0),(-a,a),(a,a),(a,0),(0,a)$ *están fuera del soporte de* φ*. Así que* $g = 0$ *es una derivada débil en* $\mathbb{R}^2$ *de orden dos de* $f(x,y) = sgn\ x + sgn\ y$*. Pero si para* $n \geq 2$ *y* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *existe* $\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}\right)_w$*, para algún* $j = 1,2,...,n$*. Entonces* $\forall m < n$ *también existe* $\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}\right)_w$ *sobre* $\mathbb{R}^N$*. La demostración de este resultado se puede ver en [7] , Pág. 26. Por lo tanto en el caso unidimensional tenemos que para* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ y\ f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$*, si* $\mathcal{D}_w^n f$ *existe sobre* $\mathbb{R}$*, entonces* $\forall m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m < n$ *la derivada débil* $\mathcal{D}_w^m f$ *también existe sobre* $\mathbb{R}$*.*

Observación 9. 1. *Para cada* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *la derivada* $f^{(n)}$ *existe en el sentido de las funciones generalizadas, es decir ,* $f^{(n)} \in \mathcal{D}'$*.*

2. *Si* $f, f^{(n)}$ *son funciones generalizadas regulares, entonces* $\mathcal{D}_w^n f = f^{(n)}$*.*

3. *Si* $f \in C^n(\mathbb{R})$*, entonces* $\frac{d^n f}{dx^n}$*,* $f^{(n)}$ *y* $\mathcal{D}_w^n f$ *coinciden.*

Bibliografía

[1] ADAMS, Robert Sobólev Spaces. *Academic Press, New York, 1975.*

[2] BRÉZIS, Haim Análisis Funcional. *Alianza Editorial, París,1983.*

[3] BURENKOV V.I Sobólev Spaces on Domains. *Disponible en la pagina (www.lib.homelinux.org)*

[4] DE BARRA, G Introduction to Measure Theory. *Editorial Van Nostrand Reinhold company, New York 1974.*

[5] DÍAZ, J.E. OSCAR, M.D. Transformación Integral de Fourier para Funciones de los Espacios $L_1(\mathbb{R}^n)$ y $L_2(\mathbb{R}^n)$. *Trabajo de grado. Universidad del Cauca (2008)*

[6] KOLMOGÓROV, A.N. FOMIN, SV Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. *Editorial Nauka. Moscú, 1989.*

[7] KUDRIÁVTSEV, L.D. Curso de Análisis matemático. *Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú, 1983.*

[8] HONIG Chaim S A Integral de Lebesgue e Suas Aplicacoes. *Editorial Copyright, Rio de janeiro, 1977.*

[9] SCHWARTZ, Laurent Théorie des distributions *Editorial Hermann, Paris, 1966.*