FORMULACIÓN DÉBIL Y DE GALERKIN DE LA ECUACIÓN BIDIMENSIONAL DE POISSON

EIDER YESID PERDOMO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2011

FORMULACIÓN DÉBIL Y DE GALERKIN DE LA ECUACIÓN BIDIMENSIONAL DE POISSON

EIDER YESID PERDOMO

TRABAJO DE GRADO

En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director

Dr. RAMIRO MIGUEL ACEVEDO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2011

Nota de aceptación

Director

Dr. Ramiro Miguel Acevedo

Comité evaluador

Gerardo Loaiza

Paulo Navia

Fecha de sustentación: Popayán, 14 de marzo de 2011

Este trabajo está dedicado a mi madre Luz Elvira, a mis hermanos Edwar, Sonia, Lorena y Danielita. A Javier, mis sobrinos y demás familiares.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la oportunidasd de culminar un sueño más en mi vida y de haber tenido el privilegio de contar con la valiosa, paciente e innegable colaboración del Dr. Ramiro Miguel Acevedo, director de este trabajo quien no sólo compartió conmigo sus conocimientos sino que me instruyó para ser mejor persona y un buen profesional.

A los profesores Gerardo Loaiza y Paulo Navia miembros del comité de seguimiento por todas sus sugerencias y aportes.

A la Universidad del Cauca y a todos los profesores que estuvieron en este proceso de formación profesional.

A mis amigos y a todas aquellas personas que de alguna forma colaboraron en la realización del presente trabajo.

Introducción

La relación del análisis numérico y el análisis funcional con otros campos de la matemática como el cálculo de variaciones, las EDPs, la teoría de aproximación, el estudio profundo de la teoría de elementos finitos y en otras tantas áreas, han hecho del análisis funcional y del análisis numérico instrumentos indispensables en la solución general de problemas particulares de éstos campos y sus aplicaciones a las ciencias naturales y a la ingeniería. En este trabajo se muestra la necesidad de abordar algunos conceptos específicos del análisis funcional para estudiar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, y en particular de ecuaciones tipo Poisson.

Una buena razón para estudiar determinadas EDPs, es que, por una parte, son modelos muy aproximados de fenómenos físicos básicos y por otra parte, que son el inicio de la teoría clásica de EDPs. Esta teoría es la base común de otras muchas disciplinas de la física y de las matemáticas. Muchos de los conceptos y teoremas propios de la mencionada teoría fueron generados a fines del siglo XVIII y comienzos del XIX y llevan asociados los nombres de eminentes matemáticos de este periodo histórico tales como: Euler, Bernouilli, Fourier, Gauss, Riemann, Green, Laplace, Poisson, Dirichlet y Lagrange entre otros. Las funciones generalizadas (conocidas después como distribuciones) fueron introducidas por el Matemático Ruso Sergei Lvóvich Sóbolev en 1935 para soluciones débiles y además desarrolladas por Laurent Schwartz en los años 40, quien formalizó una teoría general de distribuciones. Es en este ámbito que se extiende el concepto de derivada para un tipo de funciones más amplio que la clase de funciones continuas y debido a esto es que se puede definir la clase de espacios de Banach $W_p^m(\Omega)$ llamados Espacios de Sóbolev donde $\mathbb{R}^n \supset \Omega - abierto, 1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, los cuales juegan un papel importante en la Teoria de las ecuaciones diferenciales y la física matemática. En particular, si $p = 2$, los espacios $W_p^m(\Omega)$ se denotan por $H^m(\Omega)$ y tienen la cualidad de ser espacios de Hilbert.

Tres aspectos importantes de la teoría de soluciones débiles de EDPs son los siguientes:

- En contraste con una solución clásica de una EDP, una solución débil requiere de “menor regularidad”, es decir se necesita que la solución posea derivadas parciales de menor orden que el orden de la ecuación. Esto se debe básicamente a que se usa el concepto de derivada generalizada.

- Al analizar una EDP a través de su forma débil, esta se transforma en una ecuación variacional planteada en un espacio funcional adecuado (Espacio de Sóbolev), lo cual permite hacer uso de la amplia teoría del análisis funcional.

- La ecuación variacional de la EDP, reducida a un subespacio finito dimensional del espacio de Sóbolev correspondiente, permite el uso de métodos numéricos que permiten calcular la solución de forma aproximada.

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Repaso de Cálculo Vectorial 1

1.2. Elementos de Análisis Funcional 16

1.3. Medida de Lebesgue 29

1.4. Espacios L^p 33

2. Espacios de Sobolev **38**

2.1. Diferenciación Débil 39

2.2. Definición y Propiedades Principales 42

2.2.1. El espacio $H^1(\Omega)$ 42

2.3. Teoremas de Densidad 46

2.4. Espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ 72

3. Teorema de la Traza y Fórmulas de Green **75**

3.1. Teoremas de la traza 75

3.2. Fórmulas de Green 87

4. Formulación variacional y de Galerkin de la ecuación de Poisson **90**

4.1. Condiciones de Frontera Dirichlet 90

4.2. Condiciones de Frontera Neumann 94
4.3. Formulación de Galerkin 98
4.3.1. Esquema de Galerkin para una formulación variacional abstracta 98

Bibliografía **104**

Notaciones

$\mathbb{R}$	Campo ordenado de los números reales
$\mathbb{R}^2$	$\{(x_1,x_2) : x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{N}$	Conjunto de enteros positivos
$\emptyset$	Conjunto vacio
sign	Función signo
$\overline{\Omega}$	Adherencia del conjunto Ω
$B(x_0,r)$	Bola abierta, centrada en x_0 y de radio $r > 0$
$c.t.p$	En casi todo punto
Ω	Conjunto abierto, acotado de $\mathbb{R}^2$
$\partial\Omega$	Frontera de Ω
$\nabla \cdot F$	Divergencia de F
∇v	Gradiente de v
Δv	Laplaciano de v
μ	Medida (de Lebesgue) del conjunto Ω
$supp\,\phi$	Soporte de la función ϕ
$C^k(\Omega)$	Espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en Ω
$C_0(\Omega)$	Espacio de funciones continuas de soporte compacto en Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω
$\iint_\Omega f\,dxdy$	Integral de Lebesgue de la función f sobre Ω
$f * g$	Convolución de f y g
$\|\Omega\|$	Medida del conjunto Ω
$V \subset\subset \Omega$	Abierto V fuertemente incluido en Ω, es decir $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset \Omega$
$\square$	Culminación de una demostración.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Repaso de Cálculo Vectorial

Una forma de relacionar el cálculo diferencial vectorial con el cálculo integral vectorial es por medio de los importantes Teoremas de Green y Gauss, entre otros. Se destacan algunas aplicaciones físicas de estos teoremas para el estudio de la electricidad y el magnetismo, la hidrodinámica, la conducción del calor y las ecuaciones diferenciales. Para el desarrollo de este trabajo es necesario abordar dichos Teoremas (Teoremas de Green y de la Divergencia), pero antes, recordemos algunos conceptos.

Definición 1.1.1. *Consideremos una curva plana parametrizada*

$$C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)) | \, t \in [a,b]\},$$

donde $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *es una función vectorial continua.*

1. *Se dice que C es cerrada si* $\alpha(a) = \alpha(b)$.

2. *Se dice que C es simple, si para todo* $t_1, t_2 \in (a,b]$, *se cumple*

$$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2.$$

Definición 1.1.2. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *un conjunto acotado y supongamos que su frontera* $\partial\Omega$ *es una curva parametrizada*

$$\partial\Omega := \{\alpha(t) = (x(t), y(t)) | t \in [a,b]\}.$$

1. *Decimos que $\partial\Omega$ es suave si $\alpha \in C^1([a,b])$ y $\alpha(t)' \neq (0,0)$ para todo $t \in [a,b]$. Es decir, si $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ poseen primeras derivadas continuas en todo $t \in [a,b]$ las cuales no se anulan simultaneamente.*

2. *Decimos que $\partial\Omega$ es de suave a trozos, si existe una partición $a = t_0 < ... < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$, tal que $\partial\Omega$ es suave en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., n$.*

El siguiente resultado fue publicado por primera vez en 1928 por el físico matemático inglés George Green $(1793 - 1841)$. Dicho resultado relaciona una integral de línea alrededor de una curva plana simple cerrada $\partial\Omega$ con una integral doble ordinaria sobre la región plana Ω acotada por $\partial\Omega$. En este trabajo mientras no se diga lo contrario, se entenderá que la integral de línea a lo largo de la curva $\partial\Omega$ tiene orientación positiva. Es decir, la dirección determinada por una parametrización $\alpha(t)$ de $\partial\Omega$, hace que la región Ω permanezca a la *izquierda* conforme el punto $\alpha(t)$ traza la curva de la frontera $\partial\Omega$.

Teorema 1.1.1 (De Green para regiones simplemente conexas). *Sea $\partial\Omega$ una curva cerrada, simple, suave a trozos, que acota la región Ω en el plano. Supongamos que las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son continuas y que tienen derivadas parciales de primer orden, continuas en Ω. Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{1.1}$$

Demostración. Ver [3, Teorema 11.10]. □

El teorema de la Divergencia es el análogo multidimensional del teorema fundamental del Cálculo. Relaciona una cantidad definida sobre la frontera, con otra definida sobre el interior del dominio. Aunque usualmente el teorema de la divergencia es presentado en conjuntos del espacio tridimensional, solamente describiremos los resultados en dos dimensiones, ya que el objetivo del trabajo es analizar la ecuación de Poisson bidimensional. Consideramos las siguientes observaciones y definiciones las cuales serán necesarios para la demostración del mencionado teorema.

Definición 1.1.3. *Sea*

$$\partial\Omega := \{\alpha(t) = (x(t), y(t)) | t \in [a,b]\}.$$

Si $\partial\Omega$ es suave, para cada $t \in [a,b]$, el vector tangente unitario a $\partial\Omega$ en $\alpha(t)$ está definido por

$$\tau = \tau(\alpha(t)) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Además, el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ en $\alpha(t)$ está dado por

$$\nu = \nu(\alpha(t)) = (\nu_1, \nu_2) := \tau \times k. \tag{1.2}$$

La notación ν_1^u, ν_2^u indica (respectivamente) la primera y segunda componente del vector normal unitario exterior ν_u.

Observación 1.1.1. *Sea $i \in \{1,..,n\}$ y consideremos la función longitud de arco*

$$s(t) := \int_{t_{i-1}}^{t} \|\alpha'(u)\| du \qquad \forall t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Aplicando el Teorema fundamental del cálculo se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| > 0 \qquad \forall t \in (t_{i-1}, t_i),$$

pues $\alpha'(t) \neq (0,0)$.

Definición 1.1.4. *Sea ϕ un campo escalar definido y acotado en $\partial\Omega$. La integral de línea de ϕ con respecto a la longitud de arco a lo largo de $\partial\Omega$ se define por*

$$\int_{\partial\Omega} \phi ds = \int_{b}^{a} \phi(\alpha(t))\|\alpha'(t)\| dt \qquad \forall t \in [a,b],$$

siempre que exista la integral del lado derecho de la igualdad anterior.

Ahora, sea

$$\partial\Omega := \{\alpha(t) = (x(t), y(t)) | t \in [a,b]\}$$

una curva suave a trozos. Así, existe una partición $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$, tal que $\partial\Omega$ es suave en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,...,n$. Por lo tanto $\alpha'(t) \neq (0,0)$, para todo $t \in (t_{i-1}, t_i)$ y así el vector tangente unitario

$$\tau = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j, \tag{1.3}$$

existe para todo $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Luego para cada, $t \in [a,b]$ (salvo quizás en los extremos de los subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$) existe el vector tangente unitario a $\partial\Omega$ en $\alpha(t)$ y está dado por (1.3).

La igualdad (1.3), *nos permite expresar el vector normal unitario exterior a* $\partial\Omega$ *en términos de la longitud de arco. En efecto, de* (1.2) *y* (1.3) *se sigue*

$$\nu = \left(\frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j + 0k\right) \times k = \frac{dy}{ds}i - \frac{dx}{ds}j = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right). \tag{1.4}$$

Observación 1.1.2. *Sean* $F = (P,Q)$ *y* $\tau(\alpha(t)) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$. *Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} (F \cdot \tau) ds = \int_{\partial\Omega} F \cdot d\alpha =: \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy.$$

Es decir, la integral de línea del campo vectorial F *a lo largo de* $\partial\Omega$ *coincide con la integral de línea del campo escalar* $F \cdot \tau$ *a lo largo de* $\partial\Omega$.

Teorema 1.1.2 (De la Divergencia). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un dominio (abierto y conexo) acotado con frontera* $\partial\Omega$ *que satisface las condiciones del teorema de Green, y vector normal exterior unitario* ν. *Sea* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $F \in C^1(\overline{\Omega})$. *Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, ds = \iint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dxdy, \tag{1.5}$$

donde ν *es el vector normal unitario exterior a* $\partial\Omega$ *y* $\nabla \cdot F$ *es la divergencia de* F.

Demostración. Sean $F = (P,Q)$ y $t \in [a.b]$. Ahora, al sustituir (1.4) y F en (1.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds &= \int_b^a (P(\alpha(t)), Q(\alpha(t))) \cdot \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right)\right) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_b^a \left(-Q(\alpha(t))\frac{dx}{dt} + P(\alpha(t))\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \int_{\partial\Omega} -Qdx + Pdy. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Así, aplicando el teorema de Green a la expresión del lado derecho de la igualdad anterior se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, ds = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy. \tag{1.7}$$

La función escalar $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ que aparece en (1.7), es precisamente la divergencia de F. Por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, ds = \iint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dxdy.$$

$\square$

Teorema 1.1.3 (Gauss-Green). *Supongamos que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$. *Entonces*

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\Omega} u\nu_1 ds \tag{1.8}$$

y

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial y} dxdy = \int_{\partial\Omega} u\nu_2 ds \tag{1.9}$$

Demostración. Sea $F = (u,0)$. La divergencia de F viene dada por

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (0)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Así, aplicando el Teorema de la Divergencia se tiene que

$$\iint_\Omega \nabla \cdot F\, dxdy = \iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\Omega} (u,0)\cdot(\nu_1,\nu_2) ds = \int_{\partial\Omega} u\nu_1 ds.$$

De manera análoga se tiene (1.9). □

Teorema 1.1.4 (Integración por partes). *Sea* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. *Entonces*

$$\iint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x} dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} v\, dxdy + \int_{\partial\Omega} uv\nu_1 ds \tag{1.10}$$

y

$$\iint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial y} dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial y} v\, dxdy + \int_{\partial\Omega} uv\nu_2 ds \tag{1.11}$$

Demostración. Apliquemos el Teorema (1.1.3) a la función uv. Esto es

$$\iint_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\Omega} uv\nu_1 ds,$$

entonces

$$\iint_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} v) dxdy = \int_{\partial\Omega} uv\nu_1 ds.$$

Luego

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} v\, dxdy = -\iint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x} dxdy + \int_{\partial\Omega} uv\nu_1 ds.$$

De manera análoga se obtiene (1.11). □

Teorema 1.1.5. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *como en el Teorema de la Divergencia y* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.

1. Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces

$$\iint_\Omega (\nabla \cdot u) v \, dxdy = -\iint_\Omega u \cdot \nabla v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu) v \, ds. \tag{1.12}$$

2. (**Primera identidad de Green**). Si $v \in C^1(\overline{\Omega})$ y $w \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$\iint_\Omega v \Delta w \, dxdy = -\iint_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \nu} \, ds. \tag{1.13}$$

3. (**Segunda identidad de Green**). Si $v, w \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$\iint_\Omega (v\Delta w - w\Delta v) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} (v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu}) \, ds. \tag{1.14}$$

Demostración. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ satisface las hipótesis del Teorema de la Divergencia. Sean $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.

1. Reemplazando $F = vu$ en (1.5), se tiene

$$\iint_\Omega \nabla \cdot (vu) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} (vu) \cdot \nu \, ds. \tag{1.15}$$

   Ahora, haciendo uso de la identidad

$$\nabla \cdot (vu) = \nabla v \cdot u + v(\nabla \cdot u),$$

   y sustituyendo en (1.15), se tiene que

$$\iint_\Omega \{\nabla v \cdot u + v(\nabla \cdot u)\} \, dxdy = \int_{\partial\Omega} (vu) \cdot \nu \, ds,$$

   por lo tanto

$$\iint_\Omega v(\nabla \cdot u) \, dxdy = -\iint_\Omega u \cdot \nabla v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu) v \, ds,$$

   puesto que $(vu) \cdot \nu = (u \cdot \nu) v$.

2. Haciendo $u := \nabla w$ en (1.12) se tiene

$$\iint_\Omega (\nabla \cdot (\nabla w)) v \, dxdy = -\iint_\Omega (\nabla w) \cdot \nabla v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} (\nabla w \cdot \nu) v \, ds. \tag{1.16}$$

   Ahora, recordando que $\Delta w := \nabla \cdot (\nabla w)$ y $\frac{\partial w}{\partial \nu} := \nabla w \cdot \nu$, sustituimos en (1.16) y así,

$$\iint_\Omega v \Delta w \, dxdy = -\iint_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \nu} \, ds.$$

3. Esta identidad se deduce de (1.13) intercambiando w por v, es decir

$$\iint_{\Omega} w\Delta v\, dxdy = -\iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w\, dxdy + \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds. \tag{1.17}$$

Ahora restando (1.17) de (1.13) se tiene que

$$\iint_{\Omega} (v\Delta w - w\Delta v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu})\, ds.$$

□

A continuación presentamos un resultado para funciones suaves. Este resultado será generalizado posteriormente para una clase más general de funciones.

Lema 1.1.1 (Desigualdad de poincaré para funciones suaves). *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, acotado. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $v \in C^1(\overline{\Omega})$ que satisface $v = 0$ en $\partial\Omega$ se tiene,*

$$\int_{\Omega} |v|^2\, dxdy \le C \int_{\Omega} |\nabla v|^2\, dxdy \tag{1.18}$$

Demostración. Puesto que Ω es acotado, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \le x \le b \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Sea $v \in C^1(\Omega)$ y denotemos por $\tilde{v}$ la extensión por cero de v a todo $\mathbb{R}^2$. Claramente $\tilde{v}$ es continua en Ω y en $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$. Demostremos que v es continua en $\partial\Omega$. En efecto, dado $z_0 = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ veamos que $\tilde{v}$ es continua en z_0. Es decir, probemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\left[(x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta\right]$$

entonces

$$\|\tilde{v}(x,y)\| < \varepsilon.$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Puesto que $v \in C^1(\overline{\Omega})$ y $v(x_0, y_0) = 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left[(x,y) \in \overline{\Omega} \wedge \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta\right] &\Rightarrow \|v(x,y)\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \|\tilde{v}(x,y)\| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Además,

$$\begin{aligned}\left[(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega}\wedge\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\right]&\Rightarrow\tilde{v}(x,y)=0\\&\Rightarrow\|\tilde{v}(x,y)\|<\varepsilon.\end{aligned}\tag{1.20}$$

En conclusión, de (1.19) y (1.20) deducimos que $\tilde{v}$ es continua en z_0 y por ser $z_0\in\partial\Omega$ cualquiera, se tien que $\tilde{v}$ es continua en $\partial\Omega$. Asi,

$$\tilde{v}\in C(\mathbb{R}^2).$$

Ahora, sea $z=(x_1,y_1)\in\Omega$. Así, por ser $\tilde{v}$ continua

$$v(z)=\tilde{v}(z)=\int_a^{x_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}(t,y_1)dt.$$

Luego, por desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|v(z)|^2&\leq\left(\int_a^{x_1}dt\right)\left(\int_a^{x_1}\left|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}(t,y_1)\right|^2dt\right)\\&=(x_1-a)\int_a^{x_1}\left|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}(t,y_1)\right|^2dt\\&\leq(b-a)\int_a^{b}\left|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}(t,y_1)\right|^2dt.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Ahora, integrando sobre Ω en ambos lados de (1.21) se tiene

$$\int_\Omega|v(z)|^2dz\leq(b-a)\int_\Omega\int_a^b\left|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}(t,y_1)\right|^2dtdz.$$

Luego, intercambiando el orden de integración con respecto a t y z (teorema de Fubini) se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega|v(z)|^2dz&\leq(b-a)\int_a^b\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x}(t,y_1)\right|^2dz\right)dt\\&=(b-a)^2\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right|^2\right)dz\\&\leq(b-a)^2\left(\int_\Omega|\nabla v(z)|^2dz\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que

$$\int_\Omega|v(z)|^2dz\leq C\int_\Omega|\nabla v(z)|^2dz,$$

donde $C=(b-a)^2$ y así concluye la demostración.

$\square$

El objetivo principal en este trabajo es analizar una formulación variacional (ver capitulo más adelante) de la ecuación bidimensional de Poisson. Para obtener dicha formulación es necesario expresar la ecuación de Posisson en forma integral. La Ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial (EDP), puesto que las derivadas que aparecen en ella son derivadas parciales. Una solución clásica de la ecuación de Poisson es una función $w:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ de clase $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ que satisface

$$\begin{cases} -\Delta w &= f \quad \text{en } \Omega, \\ w &= g \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.22}$$

donde f y g son funciones conocidas. Generalmente se supone que Ω es un dominio (abierto y conexo) acotado en $\mathbb{R}^2$.

A continuación se realiza un breve análisis para el caso homogéneo de la ecuación de Poisson (es decir cuando $g=0$), en el cual se deduce la forma integral de dicha ecuación. Este análisis nos dará una idea de lo que se pretende realizar en los capítulos posteriores, donde se hará de manera más rigurosa en los espacios funcionales adecuados.

Consideremos la ecuación homogénea de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta w &= f \quad \text{en } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.23}$$

El siguiente teorema muestra la forma integral de dicha ecuación.

Teorema 1.1.6. *Sea $w\in C^2(\overline{\Omega})$. Si w es una solución clásica de* (1.23), *entonces w pertenece al conjunto*

$$X:=\left\{v\in C^1(\overline{\Omega}) : v=0 \quad en \quad \partial\Omega\right\} \tag{1.24}$$

y además, satisface la ecuación

$$\iint_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\, dxdy=\iint_\Omega fv\, dxdy \qquad \forall v\in X. \tag{1.25}$$

Demostración. Supongamos que w es una solución clásica de (1.23). Claramente $w\in X$, puesto que $w\in C^2(\overline{\Omega})\subset C^1(\overline{\Omega})$ y además, w satisface la segunda ecuación de (1.23).

Para verificar (1.25), tomemos $v \in X$ cualquiera. Multiplicando por v a ambos lados de la primera ecuación de (1.23), se tiene $-(\Delta w)v = fv$ en Ω. Integrando sobre Ω en ambos lados de esta igualdad, se sigue

$$-\iint_\Omega (\Delta w)v \, dxdy = \iint_\Omega fv \, dxdy,$$

de donde, aplicando la primera identidad de Green, se obtiene

$$\iint_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dxdy - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \nu} \, ds = \iint_\Omega fv \, dxdy.$$

Como $v \in X$, $v = 0$ en $\partial\Omega$ y así, la segunda integral del lado izquierdo de la igualdad anterior es nula, con lo cual se deduce (1.25). □

El Teorema 1.1.6 demuestra que toda solución clásica $w \in C^2(\overline{\Omega})$ de la ecuación de Poisson homogénea (1.23), es también solución del problema:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } w \in X \text{ que satisface:} \\ &\iint_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dxdy = \iint_\Omega fv \, dxdy \qquad \forall v \in X. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Por esta razón, el problema (1.26) es llamado *la forma integral de la ecuación de Poisson homogénea* (1.23).

El recíproco del Teorema 1.1.6 es también cierto. Para demostrarlo, se requiere del siguiente lema. Aquí $C_0^\infty(\Omega)$ denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto incluido en Ω.

Lema 1.1.2. *Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $g \in C(\Omega)$. Si se cumple*

$$\iint_\Omega gv \, dxdy = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

entonces $g(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Demostración. Ver [11, lema 3.3.9]. □

Teorema 1.1.7. *Sea $f \in C(\Omega)$. Si $w \in C^2(\overline{\Omega})$ es solución del problema* (1.26)*, entonces w es una solución clásica de* (1.23).

Demostración. Sea $w \in X$ una solución de (1.26) y sea $v \in X$ cualquiera. En virtud de la primera identidad de Green y recordando que $v = 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que

$$\iint_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dxdy = -\iint_\Omega (\Delta w) v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = -\iint_\Omega (\Delta w) v \, dxdy.$$

Sustituyendo está igualdad en (1.26), se tiene

$$-\iint_\Omega (\Delta w) v \, dxdy = \iint_\Omega f v \, dxdy \qquad \forall v \in X,$$

lo cual es equivalente a

$$\iint_\Omega (\Delta w + f) \, v \, dxdy = 0 \quad \forall v \in X.$$

Puesto que $\Delta w + f$ es continua y $C_0^\infty(\Omega) \subset X$, usando el Lema 1.1.2, se concluye que $-\Delta w = f$. Por último, dado que $w = 0$ en $\partial\Omega$, esta última igualdad muestra que w es solución clásica de (1.23). $\square$

Observación 1.1.3. *Podemos ver que la forma integral* (1.26) *solamente exige que la solución w sea de clase $C^1(\overline{\Omega})$, a diferencia de la formulación clásica* (1.23) *que requiere que w sea de clase $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. En consecuencia, es más probable encontrar soluciones de* (1.26) *que soluciones clásicas de* (1.23), *dado que las soluciones clásicas exigen mayor regularidad* [1].

El problema (1.26) puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } w \in X \text{ que satisface} \\ &\qquad B(w,v) = F(v) \quad \forall v \in X, \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde

$$B(w,v) = \iint_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dxdy \quad y \quad F(v) = \iint_\Omega f v \, dxdy.$$

El problema (1.27) tiene la estructura de los llamados *problemas variacionales*, que serán estudiados en la sección 1.2. Sin embargo, un problema variacional exige que el espacio X donde se formula el problema, sea un espacio de Hilbert, lo cual en el caso particular del espacio X definido por (1.24) no se verifica como se verá a continuación mediante el siguiente ejemplo.

[1] En el contexto de ecuaciones diferenciales parciales, el término regularidad está relacionado con el número de derivadas que posee una función. Entre mayor sea el número de estas derivadas, la función será más regular.

Observación 1.1.4. *En este trabajo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Para analizar el siguiente ejemplo, consideramos a Ω como la bola unitaria en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 1.1.1. *El objetivo de este ejemplo, es probar que el espacio X definido por* (1.24) *y dotado con el producto interior*

$$\langle w, v\rangle = \iint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dxdy, \tag{1.28}$$

el cual induce la norma

$$\|v\| = \left(\iint_{\Omega} |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

no es completo y por lo tanto no es un espacio de Hilbert. Sea $\Omega = (-1,1)$ y definamos

$$u_n(x) = \begin{cases} -x-1 & si \quad -1 < x < -\frac{1}{n} \\ (\frac{n}{2})x^2 - 1 + \frac{1}{2n} & si \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ x-1 & si \quad \frac{1}{n} < x < 1. \end{cases} \tag{1.29}$$

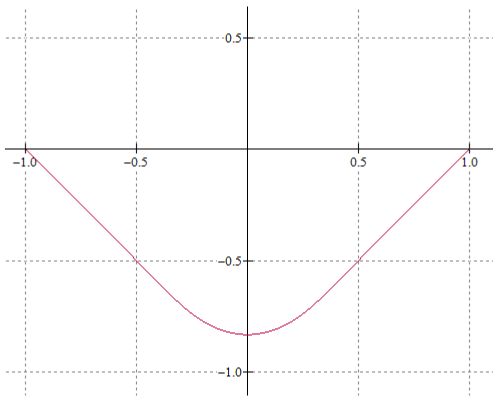

Figura 1.1: Función $u_2(x)$.

Calculando el gradiente de u_n se tiene

$$\nabla u_n(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -1 < x < \frac{1}{n} \\ nx & si \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{n} < x < 1. \end{cases} \tag{1.30}$$

Ahora, demostremos que ∇u_n es una sucesión de cauchy en X. Es decir, probemos que para todo $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_m\| = \left(\int_{-1}^{1} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \mathbb{N}.$$

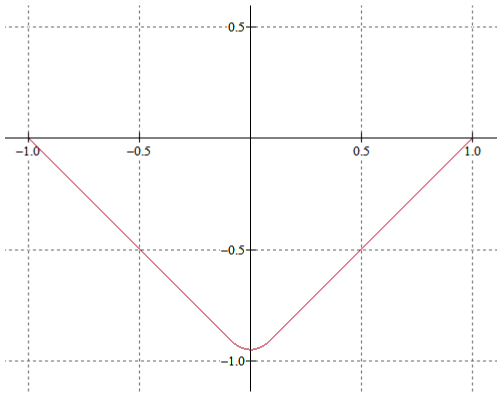

Figura 1.2: Función $u_{10}(x)$.

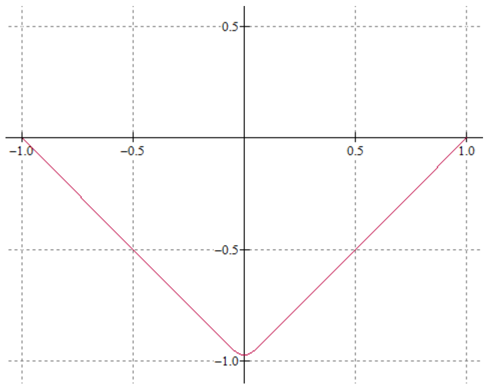

Figura 1.3: Función $u_{20}(x)$.

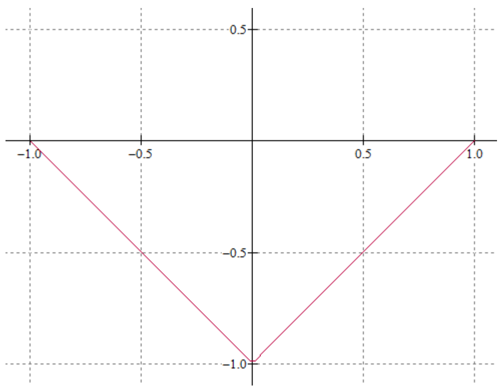

Figura 1.4: Función $u_{50}(x)$.

Supongamos que $m > n$, entonces $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ y $-\frac{1}{m} > -\frac{1}{n}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|^2 &= \int_{-1}^{1} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx \\
&= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx \\
&+ \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx \\
&= \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx + \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Ahora, calculemos cada una de las integrales.

1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\,dx &= \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} (\nabla u_n - \nabla u_m)^2\,dx \\
&= \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} (nx-(-1))^2\,dx \\
&= \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} (nx+1)^2\,dx \\
&= n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} x^2dx + 2n\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} xdx + \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} dx \\
&= -\frac{n^2}{3m^3} + \frac{1}{3n} + \frac{n}{m^2} - \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\,dx &= \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} (\nabla u_n - \nabla u_m)^2\,dx \\
&= \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} (nx-mx)^2\,dx \\
&= n^2\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} x^2dx - 2nm\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} x^2dx + m^2\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} x^2dx \\
&= \frac{2n^2}{3m^3} - \frac{4n}{3m^2} + \frac{2}{3m}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\,dx &= \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (\nabla u_n - \nabla u_m)^2\,dx \\
&= \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (nx-1)^2\,dx \\
&= n^2\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} x^2dx - 2n\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} xdx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} dx \\
&= \frac{1}{3n} - \frac{n^2}{3m^3} + \frac{n}{m^2} - \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Sumando $1,2$ *y* 3 *se tiene que*

$$\|u_n - u_m\|^2 = \frac{2n}{3m^2} - \frac{4}{3m} + \frac{2}{3n}.$$

Como $m > n$ tenemos que $1 > \frac{n}{m}$. Así,

$$\|u_n - u_m\|^2 = \frac{2}{3n} + \frac{2}{3m}\left(\frac{n}{m} - 2\right) < \frac{2}{3n} + \frac{2}{3m}(1-2) = \frac{2}{3n} - \frac{2}{3m} < \frac{2}{3n}.$$

Luego

$$\|u_n - u_m\| < \sqrt{\frac{2}{3n}} < \frac{2}{n}. \tag{1.31}$$

Ahora, por propiedad arquimediana $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \varepsilon N > k$. Luego, tomamos $k = 1$ lo cual implica que $\varepsilon > \frac{1}{N}$. Así, si $n > N$ entonces se tiene que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \varepsilon. \tag{1.32}$$

Por lo tanto de (1.31) *y* (1.32) *se deduce*

$$\|u_n - u_m\| = \left(\int_{-1}^{1} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N.$$

Resta probar que ∇u_n no converge en X. En efecto, sea v una función de X y sea w la función discontinua, idéntica a -1 para $x < 0$ y 1 para $x \geq 0$. De la desigualdad de Minkowski se tiene

$$\left(\int_{-1}^{1} (v-w)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-1}^{1} (v - \nabla u_n)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-1}^{1} (\nabla u_n - w)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puesto que v es una función continua, es distinta de la función w, luego la integral del miembro de la izquierda es diferente de cero. Además,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} (\nabla u_n - w)^2\, dx = 0.$$

Por eso, $\displaystyle\int_{-1}^{1} (v - \nabla u_n)^2\, dx$ no puede tender a cero cuando $n \to \infty$. Esto implica que el espacio X no es completo pues la sucesión de Cauchy $\nabla u_n(x)$ no converge a $v \in X$ cuando $n \to \infty$. En conclusión X no es un espacio de Hilbert.

Ahora, dado que X no es un espacio de Hilbert no es posible aplicar la teoria de los problemas variacionales al problema (1.25). Este inconveniente se soluciona completando el espacio X, es decir, se muestra que X está contenido en un espacio el cual es completo.

1.2. Elementos de Análisis Funcional

Los resultados presentados en esta sección son clásicos y pueden ser encontrados en la mayoría de los textos de análisis funcional. En particular, el material aquí presentado sigue muy de cerca los textos de Kreyszig [12], Brézis [4], y el artículo divulgativo de Gabriel Gatica [8]. En esta sección presentaremos algunos conceptos y resultados del análisis funcional, que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo.

A lo largo del capítulo H representa un *Espacio de Hilbert real*, es decir H es un espacio vectorial real con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$, que es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_H := \langle\cdot,\cdot\rangle_H^{1/2}$. Siempre que no haya lugar a confusión, de ahora en adelante la norma $\|\cdot\|_H$, se denotará simplemente por $\|\cdot\|$.

Toda función $f : H \to \mathbb{R}$ es llamada un funcional. Un funcional f es llamado lineal, si cumple

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in H,$$

y es llamado acotado si existe $M > 0$ tal que

$$|f(v)| \leq M\|v\| \qquad \forall v \in H.$$

El conjunto de los funcionales lineales y acotados sobre H, es un espacio vectorial real llamado **Espacio Dual** de H, el cual se denota H'. Sobre H', se define la norma

$$\|f\|_{H'} := \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|},$$

llamada **norma dual**. H' es un espacio de Banach con esta norma ([6, Teorema 2.10-4]). Toda aplicación $T : H \to W$ entre espacios de Hilbert H y W, es llamada **operador**. En particular, dado que $\mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert, todo funcional es un operador. El concepto de *operador lineal acotado* es análogo al de funcional lineal acotado. Es decir, $T : H \to W$ es lineal, si

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in H,$$

y acotado, si existe $M > 0$ tal que

$$\|T(v)\|_W \leq M\|v\|_H \quad \forall v \in H.$$

Un subespacio U de H es cerrado, si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in N} \subseteq U$ tal que $x_n \to x \in H$, se tiene que $x \in U$. El siguiente resultado, llamado *Teorema de la Mejor Aproximación*, nos muestra una importante propiedad de los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert.

Teorema 1.2.1. *Sea $U \neq \emptyset$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, y sea $x \in H$ tal que $x \notin U$, entonces existe un único $z \in U$ (llamado la mejor aproximación de x en U) tal que $\forall x \in H$*

$$\|x-z\| = inf\,\{\|x-v\| : v \in U\}\,.$$

Demostración. Ver [6, Teorema 3.3-1]. □

Dado un subespacio U de H,

$$U^{\perp} = \{x \in H : \langle x, v\rangle = 0 \quad \forall v \in U\}$$

es un subespacio vectorial de H, llamado *Ortogonal de U*.

Observación 1.2.1. *Dado un subespacio U de H,*

$$U \cap U^{\perp} = \{0\}\,.$$

En general la unión de dos subespacios, no es un subespacio, y de hecho, la propiedad que falla es la cerradura de la suma. Esto nos lleva al concepto de *suma de subespacios*.

Definición 1.2.1. *Sean U y V subespacios de H. Decimos que H es la suma directa de U y V, y se escribe*

$$H = U \oplus V,$$

si cada $w \in H$ tiene una única representación $w = u + v$ donde $u \in U, v \in V$. Entonces V es llamado un complemento algebráico de U en H, y viceversa.

Todo espacio de Hilbert se puede escribir como una suma directa de un subespacio cerrado y su ortogonal, tal como se ve en el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2 (Descomposición Ortogonal). *Sea U cualquier subespacio cerrado de H. Entonces*

$$H = U \oplus V,$$

donde $V = U^{\perp}$

Demostración. Ver [6, Teorema 3.3-4]. $\square$

Corolario 1.2.1. *Sea $U \neq \emptyset$ un subespacio cerrado propio de un espacio de Hilbert H. Entonces, existe $\overline{y} \in H$, $\overline{y} \neq 0$, tal que $\overline{y} \in U^{\perp}$.*

Demostración. Por el teorema de descomposición ortogonal se sabe que $H = U \oplus U^{\perp}$. Ahora, supongamos que $U^{\perp} = \{0\}$, luego $H = U \oplus \{0\} = U$ con lo cual se contradice el hecho de que U es propio. $\square$

Los funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert tienen representaciones simples, es decir, se puede asociar un funcional lineal acotado con cada elemento de un espacio con producto interno. Sin embargo, el reciproco no es cierto en general. El siguiente teorema, establece que el reciproco es válido en espacios de Hilbert.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea f un funcional lineal acotado en un espacio H. Existe entonces un único $u \in H$ tal que*

$$f(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H \tag{1.33}$$

y además

$$\|f\|_{H'} = \|u\|_H \tag{1.34}$$

Demostración. Esta demostración sigue las ideas de [8, Teorema 6.8].
Caso 1: *f es el funcional nulo $(f(v) = 0,$ para todo $v \in H)$.* Basta tomar $u = 0$, ya que en tal caso $f(v) = 0 = \langle 0, v \rangle$ para todo $v \in H$ y $\|f\|_{H'} = 0 = \|u\|$.
Caso 2: $f \in H'$, $f \neq 0$. Demostraremos que:

i. Existe un único $u \in H$, que satisface (1.33).

ii. Si $u \in H$ verifica (1.33) entonces se cumple (1.34).

En efecto:

i. • **Existencia**

Sea

$$U = \{v \in H : f(v) = 0\}.$$

Dado que f es no nulo se tiene que $U \neq H$. Además, dados $x, y \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0.$$

Luego $\alpha x + \beta y \in U$, lo que muestra que U es subespacio propio de H.

Ahora probemos que U es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en U y $x \in H$ tal que $x_n \to x$. Veamos que $x \in U$. En efecto, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in U$ entonces $f(x_n) = 0$, luego $f(x_n) = 0 \to 0$. Por otro lado, como $x_n \to x$ y $f \in H'$ se tiene que $f(x_n) \to f(x)$. Así, por unicidad del límite se tiene que $f(x) = 0$, es decir $x \in U$. En consecuencia, U es subespacio cerrado de H.

En virtud del corolario 1.2.1, existe $w \in H$ tal que $w \neq 0$ y $w \in U^{\perp}$. Dado que $U \cap U^{\perp} = \{0\}$, entonces $w \notin U$ y por lo tanto $f(w) \neq 0$. Mostremos que $u := \frac{m}{\|m\|^2}$, donde $m = \frac{w}{f(w)}$, satisface (1.33). Para ello, en primer lugar, deduzcamos que

$$v - f(v)m \in U \qquad \forall v \in H.$$

En efecto, para cualquier $v \in H$ se tiene:

$$\begin{aligned}
f(v - f(v)m) &= f(v) - f(f(v)m) \\
&= f(v) - f(m)f(v) \\
&= f(v) - f\left(\frac{w}{f(w)}\right)f(v) \\
&= f(v) - \frac{f(w)}{f(w)}f(v) = 0,
\end{aligned}$$

lo que muestra que $v - f(v)m \in U$. Ahora bien, puesto que $m \in U^{\perp}$, entonces para cada $v \in H$, se tiene

$$0 = \langle m, v - f(v)m \rangle = \langle m, v \rangle - \langle m, f(v)m \rangle$$

$$= \langle m, v \rangle - f(v) \langle m, m \rangle$$

$$= \langle m, v \rangle - f(v) \|m\|^2.$$

Luego

$$f(v) \|m\|^2 = \langle m, v \rangle \qquad \forall v \in H$$

o equivalentemente,

$$f(v) = \left\langle \frac{m}{\|m\|^2}, v \right\rangle \qquad \forall v \in H.$$

Es decir $u := \frac{m}{\|m\|^2}$ satisface (1.33).

• **unicidad**

Sean $u_1, u_2 \in H$ tales que

$$f(v) = \langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Así,

$$\langle u_1 - u_2, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H.$$

En particular

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0,$$

lo que implica

$$u_1 = u_2.$$

ii. Sea $v \in H$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce

$$|f(v)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Así, si $v \neq 0$, se tiene

$$\frac{|f(v)|}{\|v\|} \leq \|u\|.$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|} \leq \|u\|.$$

De otro lado

$$\|f\|_{H'} = \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|} \geq \frac{\langle u,u\rangle}{\|u\|} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|,$$

con lo cual,

$$\|u\| \leq \|f\|_{H'}.$$

En consecuencia

$$\|f\|_{H'} = \|u\|.$$

$\square$

El conjunto de operadores lineales y acotados de H en W se denota $\mathscr{L}(H,W)$. Puede probarse que $\mathscr{L}(H,W)$ es un espacio vectorial normado, con norma

$$\|T\|_{\mathscr{L}(H,W)} = \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_H} \qquad \forall v \in H.$$

Observación 1.2.2. *El Teorema de Representación de Riesz induce un operador*

$$R : H' \to H,$$

definido por

$$f(v) = \langle R(f), v\rangle \quad \forall v \in H \, y \, f \in H'. \tag{1.35}$$

Nóte que el mismo Teorema de representación de Riesz garantiza

$$\|R(f)\| = \|f\|_{H'} \quad \forall f \in H'. \tag{1.36}$$

El operador R es llamado Operador de Riesz.

Definición 1.2.2. *Sean H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \to \mathbb{R}$. Se dice que B es una* ***forma bilineal*** *sobre H si:*

1. $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u,w) + \beta B(v,w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v, w \in H.$

2. $B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u,v) + \beta B(u,w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v, w \in H.$

Ejemplo 1.2.1. *Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$B(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

B así definida es una forma bilineal. En efecto, sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}
B(x, \alpha y + \beta z) &= B((x_1, x_2), (\alpha y_1, \alpha y_2) + (\beta z_1, \beta z_2)) \\
&= B((x_1, x_2), (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2)) \\
&= x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) - x_2(\alpha y_1 + \beta z_1) \\
&= \alpha(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \beta(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\
&= \alpha B(x,y) + \beta B(x,z).
\end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x,z) + \beta B(y,z)$.

Observación 1.2.3. *La forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'} : H' \times H' \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\langle f, g \rangle_{H'} := \langle R(f), R(g) \rangle_H \tag{1.37}$$

define un producto interior en H'. En efecto

1. *$\langle f, g \rangle_{H'} \geq 0$, puesto que $\langle R(f), R(g) \rangle_H$ es un producto interno en H. Por el mismo argumento se tiene que $\langle f, f \rangle_{H'} = 0$ sii $f = 0$.*

2.

$$\begin{aligned}
\langle f, g + h \rangle_{H'} &= \langle R(f), R(g+h) \rangle_H \\
&= \langle R(f), R(g) + R(h) \rangle_H \\
&\leq \langle R(f), R(g) \rangle_H + \langle R(f), R(h) \rangle_H \\
&= \langle f, g \rangle_{H'} + \langle f, h \rangle_{H'}.
\end{aligned}$$

3. *$\langle f, g \rangle_{H'} = \langle R(f), R(g) \rangle_H = \langle R(g), R(f) \rangle_H = \langle g, f \rangle_{H'}$.*

4.

$$\begin{aligned}\langle \alpha f, g\rangle_{H'} &= \langle R(\alpha f), R(g)\rangle_H \\ &= \langle \alpha R(f), R(g)\rangle_H \\ &= \alpha \langle R(f), R(g)\rangle_H \\ &= \alpha \langle f, g\rangle_{H'}.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle_{H'} &= \langle R(f), R(f)\rangle_H \\ &= \|R(f)\|_H^2 \\ &= \|f\|_{H'}^2.\end{aligned}$$

Es decir, la norma inducida por este producto interior es precisamente la norma dual. En consecuencia, H' es un espacio de Hilbert con el producto interior (1.37).

Se dice además que una forma bilineal B es acotada si existe $M > 0$ tal que

$$|B(v,w)| \leq M\|v\|\,\|w\| \quad \forall v,w \in H.$$

Dada una forma bilineal $B : H \times H \to \mathbb{R}$ acotada, para cada $u \in H$ definimos

$$A(u) : H \to \mathbb{R},$$

dada por

$$A(u)(v) := B(u,v). \tag{1.38}$$

Para cada $u \in H$, $A(u)$ definido como antes, es un funcional lineal y acotado. En efecto

i. A(u) es lineal. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in H$, entonces

$$\begin{aligned}A(u)(\alpha x + \beta y) &= B(u, \alpha x + \beta y) \\ &= \alpha B(u,x) + \beta B(u,y) \\ &= \alpha A(u)(x) + \beta A(u)(y)\end{aligned}$$

ii. A(u) es acotada Como B es una forma bilineal acotada, existe $M > 0$ tal que:

$$\frac{|B(u,v)|}{\|v\|} \leq M\|u\| \quad \forall u,v \in H; v \neq 0.$$

Así,

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{\|v\|} \leq M\|u\| \quad \forall u \in H,$$

o equivalentemente

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|A(u)(v)|}{\|v\|} \leq M\|u\| \quad \forall u \in H$$

luego $A(u)$ es acotada.

En conclusión, por ser $A(u)$ lineal y acotada, $A(u) \in H'$. De acuerdo a lo anterior A define un operador de H en H', es decir $A : H \to H'$ donde $A(u) \in H'$ está definido por (1.38), para todo $u \in H$.

El operador A es lineal y acotado, en efecto

i. A es lineal

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in H$, entonces para cada $v \in H$ se tiene

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y)(v) &= B(\alpha x + \beta y, v) \\ &= \alpha B(x,v) + \beta B(y,v) \\ &= \alpha A(x)(v) + \beta A(y)(v), \end{aligned}$$

es decir

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

ii. A es acotado

Como $A(u) \in H'$, existe $M > 0$ tal que

$$\frac{\|A(u)(v)\|}{\|v\|} \leq M \qquad \forall v \in H; v \neq 0. \tag{1.39}$$

Por lo tanto,

$$\|A\|_{\mathscr{L}(H,H')} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\|A(u)(v)\|_{H'}}{\|v\|_H} \leq M \qquad \forall v \in H.$$

Luego A es acotado.

En conclusión, por **i** y **ii**, $A \in \mathscr{L}(H,H')$.

Definición 1.2.3. *Sea $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que B es definida positiva si*

$$B(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0,$$

*y además es H-**elíptica** (o simplemente elíptica cuando H está claro) si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$B(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Es fácil ver que toda forma bilineal elíptica es definida positiva.

Un principio del Análisis Funcional Lineal, que provee en ciertas circunstancias la existencia y unicidad de una solución para un problema variacional abstracto, es el Teorema de Lax-Milgram. Dicho Teorema también puede usarse para problemas definidos en espacios de dimensión finita y, por consiguiente, es útil en la teoría de la aproximación.

Teorema 1.2.4 (Teorema de Lax-Milgram). *Sea $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y elíptica. Para todo $f \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que*

$$B(u,v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Además,

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H'}$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de elipticidad de B.

Observación 1.2.4. *Si B además de cumplir las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, es tambien simétrica, es decir,*

$$B(u,v) = B(v,u) \qquad \forall u,v \in H.$$

Entonces, $B(\cdot,\cdot)$ es un producto interior sobre H que satisface

$$\alpha\|u\|^2 \leq B(u,u) \leq M\|u\|^2.$$

En consecuencia, la norma inducida por $B(\cdot,\cdot)$ es equivalente a $\|\cdot\|$ y por lo tanto H es de Hilbert con el producto interior $B(\cdot,\cdot)$. Así, el resultado del Teorema de Lax-Milgram, es consecuencia del Teorema de representación de Riesz.

Demostración. Sea $A \in \mathscr{L}(H,H')$ el operador lineal asociado a la forma bilineal B. De (1.38) se tiene

$$B(u,v) = A(u)(v) \quad \forall v \in H.$$

Luego, hallar $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = f(v)$$

es equivalente a encontrar $u \in H$ tal que

$$A(u)(v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Ahora, si usamos el operador de Riesz, por (1.35) el problema es equivalente a encontrar $u \in H$ tal que

$$R(A(u)) = R(f),$$

o bien encontrar $u \in H$ tal que $T(u) = R(f)$ donde

$$T := RA : H \to H. \tag{1.40}$$

Así, demostrar el Teorema de Lax-Milgram equivale a probar que T definido por (1.40) es un operador biyectivo con inversa. Para ello, primero mostremos que T es lineal y acotado. T es lineal, puesto que R y A son lineales. Para verificar que T es acotado, notemos que para $u \in H$ cualquiera, por (1.36) se tiene que

$$\|T(u)\| = \|R(A(u))\| = \|A(u)\|_{H'}.$$

Luego, por (1.39) deducimos que

$$\|T\| \leq M.$$

En conclusión T es lineal, acotado y por lo tanto continuo. Ahora probemos que T es un operador biyectivo.

1. **T es inyectivo.** Sea $u \in H$. Como B es elíptica, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|u\|^2 \leq B(u,u)$. Luego, por (1.38)

$$\alpha\|u\|^2 \leq A(u)(u) = \langle R(A(u)), u\rangle = \langle T(u), u\rangle\,. \tag{1.41}$$

Así, por desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\alpha\|u\|^2 \leq \|T(u)\|\|u\|.$$

Luego[2]

$$\alpha\|u\| \leq \|T(u)\| \qquad \forall u \in H. \tag{1.42}$$

Esta última desigualdad implica que para todo $u \in H$

$$T(u) = 0 \Longrightarrow u = 0.$$

Lo que muestra que T es inyectivo.

2. **T es sobreyectivo.**

Para probar que T es sobreyectivo se procede de la siguiente forma.

Paso 1. Probar que $T(H)$ es subespacio cerrado de H.

Paso 2. Probar que $T(H)^{\perp} = \{0\}$.

Paso 3. Aplicar el teorema de descomposición ortogonal.

En efecto.

Paso 1. Sean $T(v), T(w) \in T(H)$, donde $T(H) = \{T(v) : v \in H\}$. Como T es lineal, se tiene que $T(v) + T(w) = T(v+w)$ con $v+w \in H$, es decir $T(v)+T(w) \in H$. Ahora, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T(v) \in T(H)$, entonces $\alpha T(v) = T(\alpha v)$ con $\alpha v \in H$, es decir $\alpha T(v) \in T(H)$. Así se tiene que $T(H)$ es un subespacio de H.

Para demostrar que $T(H)$ es cerrado, sean $\{T(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(H)$ y $w \in H$ tales que $T(v_n) \to w$, cuando $n \to \infty$. De (1.42) se tiene

$$\alpha\|v_n - v_m\| \leq \|T(v_n - v_m)\| = \|T(v_n) - T(v_m)\| \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

lo cual indica que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de cauchy, puesto que $\{T(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy al ser convergente.

Como H es de Hilbert, existe $v \in H$ tal que $v_n \to v$ cuando $n \to \infty$. Además por ser T continuo

$$\lim_{n\to+\infty} T(v_n) = T(v).$$

[2]La desigualdad (1.42) es trivial si $u = 0$

Por unicidad del límite se tiene que $w = T(v)$. Es decir $w \in T(H)$ y por lo tanto $T(H)$ es un subespacio cerrado de H.

Paso 2. Sea

$$T(H)^{\perp} := \{v \in H : \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall w \in T(H)\}.$$

Así, si $v \in T(H)^{\perp}$ se sigue que $\langle T(u), v \rangle = 0$ para todo $u \in H$. En particular para $u = v$ se tiene que $\langle T(v), v \rangle = 0$ y en consecuencia, por (1.41) se deduce que

$$\alpha \|v\|^2 \leq \langle T(v), v \rangle = 0,$$

es decir $v = 0$. Por lo tanto

$$T(H)^{\perp} = \{0\}.$$

Paso 3. Finalmente haciendo uso del Teorema 1.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} H &= T(H) \oplus T(H)^{\perp} \\ &= T(H). \end{aligned}$$

Con lo cual deducimos que T es sobreyectivo. En conclusión T es biyectivo y así tiene inversa. Ahora, existe un único $u \in H$ tal que

$$T(u) = R(f) \Longleftrightarrow u = T^{-1}(R(f)).$$

Por (1.42)

$$\alpha \|u\| \leq \|T(T^{-1}(R(f)))\| = \|R(f)\|.$$

Así, por (1.36)

$$\alpha \|u\| \leq \|f\|_{H'},$$

es decir

$$\alpha \|u\| \leq \|f\|_{H'}.$$

Por lo tanto

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H'}.$$

□

1.3. Medida de Lebesgue

Existen varios precedentes de la medida de Lebesgue de un sunconjunto de la recta real. Uno de los más cercanos es el llamado contenido de un conjunto, introducido por C.Jordan en la década de $1880-1890$. A partir de 1900 Henri Lebesgue elaboró su teoría de la medida en su tesis que publicó en un artículo en 1902. Siguió el concepto del contenido de Jordan pero admitiendo uniones numerables de intervalos en las definiciones de su medida exterior e interior. El propio H.Lebesgue (1910), J.Radon (1913), M.Frechét (1913) y C.Carathéodory (1914) fueron extendiendo las ideas iniciales hasta construir la teoría general de la medida conocida actualmente. La medida de Lebesgue generaliza una forma de describir la longitud o volumen de ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3.1. *Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es llamada σ-algebra si*

1. $\emptyset\,, \mathbb{R}^n \in \mathscr{A}$,
2. *Si* $A \in \mathscr{A}$ *entonce* $\mathbb{R}^n - A \in \mathscr{A}$,
3. *Si* $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{A}$ *entonces* $\bigcup\limits_{i\in I} A_i\,, \bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$, *para I numerable.*

Teorema 1.3.1. *Existe una σ-algebra $\mathscr{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y una función*

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$$

con las siguientes propiedades

i. *Todo subconjunto abierto y cerrado de $\mathbb{R}^n$ pertenece a $\mathscr{A}$.*

ii. *Si B es una bola en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mu(B)$ es igual al volumen n-dimensional de B. En general, si Ω es un conjunto de frontera suave a trozos entonces $\mu(\Omega)$ es el volumen de Ω.*

iii. *Si $\{\mathscr{A}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{A}$ es una familia numerable (finita o infinita) de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i) \qquad \textit{(Aditividad numerable).} \tag{1.43}$$

iv. *Si $A \subseteq B$, donde $B \in \mathscr{A}$ y $\mu(B) = 0$, entonces $A \in \mathscr{A}$ y $\mu(A) = 0$.*

Observación 1.3.1. **i.** *Los conjuntos en $\mathscr{A}$ son llamados conjuntos Lebesgue medibles y μ es llamada la medida de Lebesgue n-dimensional.*

ii. *Si $\Omega = \{x_0\}$ en $\mathbb{R}^2$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\mu(\Omega) = 0$. En efecto sea $\{x_0\} \subset \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, luego $\mu(\{x_0\}) \leq \mu\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$. Así,*

$$0 \leq \mu(\{x_0\}) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{1.44}$$

de donde se obtiene el resultado.

iii. *Deducimos de* (1.43) *que $\mu(\emptyset) = 0$, y*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i) \qquad \textit{(Subaditividad numerable)}, \tag{1.45}$$

para cualquier colección numerable de conjuntos medibles $\{\mathscr{A}_i\}_{i \in I}$.

iv. *Si alguna propiedad se cumple en todas partes de $\mathbb{R}^n$, excepto quizá para un conjunto medible $A \subset \mathscr{A}$, con medida de Lebesgue igual a cero, decimos que la propiedad se cumple en casi todo punto (c.t.p) con respecto a la medida μ.*

Ejemplo 1.3.1. *Sean $\mathscr{A} = P(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Definimos para $A \subset \mathbb{R}$*

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

Veamos que δ_{x_0} es una medida.

i. *$\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$. Como $x_0 \notin A$ se tiene que $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$.*

ii. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos dos a dos. Ahora, dado que los subconjuntos son disjuntos dos a dos, x_0 puede pertenecer a lo mas a un conjunto A_{i_0}. Consideremos los dos casos siguientes.*

Caso 1 *Existe $i_0 \in I$ tal que $x_0 \in A_{i_0}$, luego*

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1 = \delta_{x_0}(A_{i_0}) + \delta_{x_0}(A_i) \qquad \textit{donde } i_0 \neq i.$$

Caso 2 *Para todo $i \in I$ se tiene que $x_0 \notin A_i$, luego*

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 0 = \sum_{i\in I} \delta_{x_0}(A_i).$$

*De **i** y **ii** se tiene que δ_{x_0} es medida.*

Funciones medibles e integración

Definición 1.3.2. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde Ω es un conjunto Lebesgue medible. Decimos que f es una función medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in \Omega : f(x) > a\} \in \mathscr{A}. \tag{1.46}$$

Ejemplo 1.3.2. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $f(x) = c$ para todo $x \in \Omega$, entonces f es medible. En efecto, el conjunto*

$$f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in \Omega : f(x) = c > a\} = \begin{cases} \Omega, & si \;\; a < c \\ \\ \emptyset, & si \;\; a \geq c \end{cases}$$

donde Ω y $\emptyset$ son conjuntos medibles. Entonces (1.46) *está en $\mathscr{A}$.*

En particular, si f es continua entonces es medible, pues la imagen inversa del abierto (a,∞) en $\mathbb{R}$ sería abierto en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto medible ya que los abiertos de $\mathbb{R}^n$ son medibles.

Observación 1.3.2. *El conjunto de funciones medibles tiene estructura de espacio vectorial. Si dos funciones, f y g son medibles entonces la suma y el producto también es medible.*

Definición 1.3.3. ***Función característica***. *Dado un conjunto A, se define la función característica de A como*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Definición 1.3.4. ***Función Simple***. *Una función* $s : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, es llamada una función simple, si se puede escribir como una combinación lineal finita de funciones características de subconjuntos de A. Es decir*

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k} \quad \forall x \in \Omega.$$

con $c_k \in \mathbb{R}, A_k \subseteq \Omega$*,* A_k *disjuntos y medibles.*

Toda función característica es simple. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.3. *La función* $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es simple pues se puede observar como la siguiente combinación lineal finita de funciones características de conjuntos medibles de* $\mathbb{R}$*.*

$$\chi_{\mathbb{Q}} = 1.\chi_{(\mathbb{Q})} + 0.\chi_{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})},$$

donde $1,0 \in \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*.*

Definición 1.3.5. ***Integral de Lebesgue***.

1. *Para funciones simples tenemos*

$$\int_X s d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k),$$

   donde estamos suponiendo que $\mu(A_k) < \infty$*.*

2. *Para una función medible y positiva*

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f \right\},$$

   donde el supremo puede ser ∞*.*

Ejemplo 1.3.4. *Sea* $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función simple del ejemplo* 5*. Vemos que*

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} d\mu = \int_{\mathbb{R}} 1.\chi_{(\mathbb{Q})}(x) + \int_{\mathbb{R}} 0.\chi_{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})} = 0,$$

pues $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ *al ser* $\mathbb{Q}$ *un conjunto numerable.*

Integral de Lebesgue para funciones de signo arbitrario.

Si $f : X \to R$, es medible, entonces se puede escribir $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ := \text{máx}(f,0)$ es la parte positiva de f y $f^- := \text{máx}(-f,0)$ es la parte negativa de f. Puede demostrarse que f^+, f^- son funciones medibles positivas.

Observación 1.3.3. *1.* $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$.

2. $f^+ - f^- = f$.

3. $f^+ + f^- = |f|$.

Definición 1.3.6. *Se dice que f es integrable si $\int f^+ < \infty$ o $\int f^- < \infty$, y escribimos*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Observación 1.3.4. *Si f es medible y $f = f^+ - f^-$, entonces*

$$\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Así que f será integrable sii $\int |f| dx < \infty$.

Teorema 1.3.2 (De Fatou). *Asumamos que las funciones $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, f son no negativas e integrables. Sea $f := \liminf_{k\to\infty} f_k$ entonces*

$$\int_{\Omega} f dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \, dx.$$

Teorema 1.3.3 (Convergencia Monótona). *Asumamos que las funciones $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ son medibles con*

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \cdots$$

Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f_k dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

1.4. Espacios L^p

En esta sección se estudiarán algunos conceptos de los espacios L^p, los cuales se encuentran con detalle en Brézis [4]. En lo que sigue, Ω designa un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, medible.

Proposición 1.4.1 (Desigualdad de young). *Si a, b son números reales no negativos entonces*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

siempre que $1 < p, q < \infty$ *y*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

A q se le llama el conjugado de p.

Observación 1.4.1. *El conjugado de* $p = 2$ *es* $q = 2$. *Para* $p = 1$, *consideramos* $q := \infty$ *y recíprocamente, para* $p = \infty$, $q := 1$.

Se dice que una función f tiene soporte compacto $(f \in C_0)$, si la adherencia del conjunto donde no es nula es un conjunto compacto. Técnicamente se define el soporte de una función f cualquiera, como sigue:

$$Supp f = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}.$$

Por fuera del *supp f* la función se anula.

Definición 1.4.1. *Decimos que* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *si* f *es una funcion integrable sobre todo subconjunto compacto de* Ω*.*

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Se denota $L^p(\Omega)$ al espacio

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \text{f medible y} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \quad \text{c.t.p. en } \Omega \right\}.$$

Se puede demostrar ([4, Teorema IV.7]) que $L^p(\Omega)$ es un espacio normado con norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < +\infty.$$

Si $f, g \in L^p(\Omega)$, decimos que $f = g$, si $f(x) = g(x)$ en c.t.p en Ω.

Para $p = \infty$ denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ el espacio de las clases de funciones acotadas sobre Ω, es decir,

$$L^\infty(\Omega) := \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y existe} \quad C \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| < C \text{ c.t.p. en } \Omega \},$$

el cual es un espacio de Banach ([4, Teorema IV.7,Teorema IV.8]), con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C \geq 0 : |f(x)| < C \quad \text{c.t.p en } \Omega \}.$$

Observación 1.4.2. *Si* Ω *es un conjunto abierto acotado, entonces* $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para* $0 < q \leq p \leq +\infty$. *Cuando* $p = 2$, $L^2(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*

En este trabajo, denotaremos el producto interno y la norma en $L^2(\Omega)$ por

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Observación 1.4.3. *Si definimos*

$$L^2(\Omega)^2 := \left\{\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2 : u_1, u_2 \in L^2(\Omega)\right\}, \tag{1.47}$$

entonces, fácilmente se demuestra que $L^2(\Omega)^2$ con el producto interior

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{L^2(\Omega)^2} := \int_\Omega u(x,y)v(x,y)dxdy, \tag{1.48}$$

es un espacio de Hilbert.

Proposición 1.4.2. *Si φ es una funcion continua e infinitamente diferenciable con soporte compacto ($f \in C_o^\infty$) entonces $\varphi \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \le p < \infty$.*

Teorema 1.4.1. ***(Densidad)*** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto arbitrario. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \le p \le \infty$.*

Demostración. Ver [4, Corolario IV.23] □

Teorema 1.4.2. ***(Desigualdad de Hölder)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le p \le +\infty$ y q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Sea $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y es válida la desigualdad*

$$\left|\int_\Omega fg d\mu\right| \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [1, Teorema 2.3].

□

Observación 1.4.4. *En $L^2(\Omega)$ la desigualdad de Hölder es llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Teorema 1.4.3. ***(Desigualdad de Minkowsky)*** *Sean $f, g \in L_p(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$, entonces $f+g \in L_p(\Omega)$ y además,*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \le \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [1, Teorema 2.4].

$\square$

Teorema 1.4.4. ***(Teorema de Fubini)*** *Sea $f \in L^1(\Omega \times F)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$, con Ω y F conjuntos medibles; entonces*

1. *$f(x,y)$ es integrable en F como función de y, c.t.p $x \in \Omega$.*
2. *$\int_F f(x,y)dy$ es integrable en Ω como función de x.*
3. *$f(x,y)$ es integrable en Ω como función de x, c.t.p $y \in F$.*
4. *$\int_\Omega f(x,y)dx$ es integrable en F como función de y y además son válidas las igualdades*

$$\int_\Omega \left(\int_F f(x,y)dy \right) dx = \int_F \left(\int_\Omega f(x,y)dx \right) dy = \iint_{\Omega \times F} f(x,y)dxdy. \tag{1.49}$$

Nótese que como consecuencia del teorema de fubini, si al menos una de las integrales

$$\int_\Omega \left(\int_F |f(x,y)|\,dy \right) dx, \qquad \int_F \left(\int_\Omega |f(x,y)|\,dx \right) dy$$

es finita, entonces existen las tres integrales de (1.49) y además (1.49) es válida. Generalmente el siguiente teorema está dado para una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\Omega)$. En este trabajo lo enunciamos para una familia de funciones de $L^1(\Omega)$.

Teorema 1.4.5. ***Convergencia dominada***

Sea $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$una familia de funciones de $L^1(\Omega)$. Supongamos que

1. *$f_\varepsilon(x) \to f(x)$ c.t.p. en Ω si $\varepsilon \to 0$.*
2. *Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$*

$$|f_\varepsilon(x)| \leq g(x) \quad c.t.p \quad en \quad \Omega.$$

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Teorema 1.4.6. *Sea* f_n *una sucesión en* $L^p(\Omega)$ *y* $f \in L^p(\Omega)$*, tales que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Entonces existe una subsucesión f_{n_k} *tal que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \text{ c.t.p. en } \quad \Omega.$$

El siguiente teorema generaliza el lema 1.1.2

Teorema 1.4.7. *Sea* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\int_\Omega fu = 0$ *para todo* $u \in C_0^\infty(\Omega)$*, entonces* $f = 0 \quad$ *c.t.p. en* Ω*.*

Demostración. Ver [11, Corolario 4.2.2].

□

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

En este capítulo vamos a definir los Espacios de Sobolev (algunos), los cuales son espacios funcionales usados en la formulación variacional de ecuaciones diferenciales parciales. Recordemos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto, acotado y $C_0^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones infinitamente diferenciables sobre Ω.

Motivación para la definición de derivada débil.

Supongamos que $v \in C^1(\bar{\Omega})$ y sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Se puede ver por medio de la integración por partes (Teorema 1.4) que

$$\iint_\Omega v\frac{\partial \phi}{\partial x}dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\phi dxdy \tag{2.1}$$

y

$$\iint_\Omega v\frac{\partial \phi}{\partial y}dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial y}\phi dxdy. \tag{2.2}$$

En efecto, para demostrar (2.1) notemos que la fórmula de integración por partes (1.10), implica

$$\iint_\Omega v\frac{\partial \phi}{\partial x}dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\phi dxdy + \int_{\partial\Omega} v\phi \nu_1 = -\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\phi dxdy,$$

donde la última igualdad se debe a que ϕ se anula en $\partial\Omega$. De igual forma, usando (1.11), se prueba (2.2).

Notemos que si v no tuviera derivada clásica, el lado derecho de (2.1) no tendría sentido. Este problema se puede resolver si reemplazamos $\frac{\partial v}{\partial x}$ por una función w_1 que satisfaga la igualdad. A continuación se generaliza el concepto de diferenciación (algunas veces llamada *diferenciación fuerte*).

2.1. Diferenciación Débil

Definición 2.1.1. *Sea $v \in L^2(\Omega)$. Decimos que v es diferenciable en el sentido débil, si existen funciones $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$ tales que para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, se tiene*

$$\iint_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = -\iint_\Omega w_1 \phi dxdy \tag{2.3}$$

y

$$\iint_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial y} dxdy = -\iint_\Omega w_2 \phi dxdy. \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto abierto tal que*

$$\Omega = R_1 \cup R_2 \cup \{y = x : 0 < x < 1\},$$

donde

$$R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x, 0 < x < 1\right\} \quad y \quad R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x, 0 < x < 1\right\}.$$

Definamos

$$u(x,y) = \begin{cases} 1+x, & (x,y) \in R_1 \\ 0, & y = x, \quad 0 < x < 1 \\ 1+x, & (x,y) \in R_2 \end{cases}$$

y veamos que u es diferenciable en el sentido débil. Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Calculemos

$$\iint_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = \iint_{R_1} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy + \iint_{R_2} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy. \tag{2.5}$$

1. $\displaystyle\iint_{R_1} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = \iint_{R_1} (1+x) \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy.$

   Aplicando integración por partes

$$\iint_{R_1} (1+x) \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = -\iint_{R_1} 1 \cdot \phi dxdy + \int_{\partial R_1} (1+x) \phi \nu_1 ds,$$

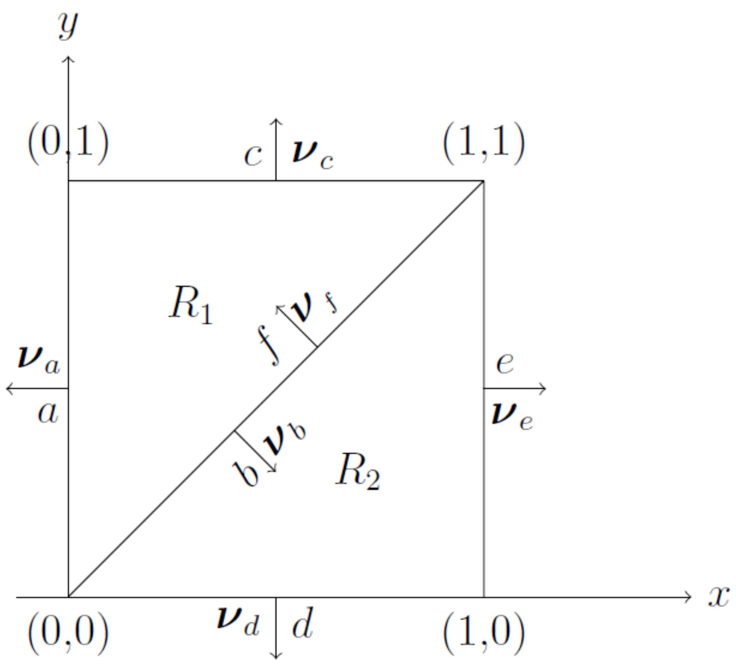

Figura 2.1: Región de integración.

donde

$$\begin{aligned}\int_{\partial R_1}(1+x)\phi\nu_1 ds &= \int_a(1+x)\phi\nu_1^a ds+\int_b(1+x)\phi\nu_1^b ds+\int_c(1+x)\phi\nu_1^c ds\\ &= \int_b(1+x)\phi\nu_1^b ds.\end{aligned}$$

Luego, parametrizando b

$$b=\{(0,0)+t((1,1)-(0,0)):0\leq t\leq 1\}=\{(t,t):0\leq t\leq 1\},$$

tenemos que

$$\int_{\partial R_1}(1+x)\phi\nu_1 ds=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1(1+t)\phi(t,t)\|(1,1)\|dt=\int_0^1(1+t)\phi(t,t)dt.$$

Por lo tanto,

$$\iint_{R_1}(1+x)\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy=-\iint_{R_1}1\cdot\phi dxdy+\int_0^1(1+t)\phi(t,t)dt. \qquad (2.6)$$

2. $\displaystyle\iint_{R_2}u\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy=\iint_{R_2}(1+y)\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy.$

Aplicando integración por partes

$$\iint_{R_2} (1+y)\frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = \int_{\partial R_2} (1+y)\phi \nu_1 ds,$$

donde

$$\begin{aligned}\int_{\partial R_2} (1+y)\phi \nu_1 ds &= \int_d (1+y)\phi \nu_1^d ds + \int_e (1+y)\phi \nu_1^e ds + \int_f (1+y)\phi \nu_1^f ds \\ &= \int_f (1+y)\phi \nu_1^f ds.\end{aligned}$$

Luego, parametrizando f

$$f = \{(1,1)+t((0,0)-(1,1)) : 0 \leq t \leq 1\} = \{(1-t,1-t) : 0 \leq t \leq 1\},$$

tenemos que

$$\int_{\partial R_2} (1+y)\phi \nu_1 ds = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (2-t)\phi(1-t,1-t)\|(-1,-1)\|dt = -\int_0^1 (2-t)\phi(1-t,1-t)dt.$$

Haciendo la sustitución $s = 1-t$ se tiene

$$\iint_{R_2} (1+y)\frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = -\int_1^0 (1+s)\phi(s,s)(-ds) = -\int_0^1 (1+t)\phi(t,t)dt. \tag{2.7}$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.6) *y* (2.7) *en* (2.5) *se tiene que*

$$\iint_{\Omega} u\frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = -\iint_{R_1} 1\cdot\phi dxdy.$$

En conlusión $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ es la primera derivada parcial débil de u respecto a x. Análogamente se obtiene la primera derivada parcial débil de u respecto a y dada por $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ y así u es diferenciable en el sentido débil.

Lema 2.1.1. *Dada una función $v \in L^2(\Omega)$, existe a lo más una función $w_1 \in L^2(\Omega)$ y una función $w_2 \in L^2(\Omega)$ que verifican* (2.3) *y* (2.4).

Demostración. Supongamos que existen funciones $w_1, w_1' \in L^2(\Omega)$ que satisfacen (2.3), luego para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, se tiene

$$\iint_{\Omega} v\frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = -\iint_{\Omega} w_1 \phi dxdy$$

y

$$\iint_{\Omega} v\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy = -\iint_{\Omega} w_1'\phi dxdy.$$

Entonces

$$-\iint_{\Omega} w_1\phi dxdy = -\iint_{\Omega} w_1'\phi dxdy,$$

de donde

$$\iint_{\Omega}\left(w_1 - w_1'\right)\phi dxdy = 0 \qquad \forall\phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Por Teorema 1.4.7 tenemos que

$$\left(w_1 - w_1'\right) = 0 \qquad \text{c.t.p en} \quad \Omega,$$

por lo tanto

$$w_1 = w_1' \qquad \text{c.t.p en} \quad \Omega.$$

Análogamente se prueba la unicidad de $w_2 \in L^2(\Omega)$.

$\square$

Definición 2.1.2. *Si $v \in L^2(\Omega)$ es diferenciable en el sentido débil, las funciones w_1,w_2 que satisfacen* (2.3) *y* (2.4) *son llamadas respectivamente la primera derivada parcial débil de v respecto a x y la primera derivada parcial débil de v respecto a y, las cuales de ahora en adelante se denotarán por*

$$w_1 := \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ó} \quad D_1 v, \quad w_2 := \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ó} \quad D_2 v.$$

Observación 2.1.1. *Si v es diferenciable en el sentido clásico y sus derivadas parciales pertenecen a $L^2(\Omega)$, entonces las derivadas clásica y débil de v coinciden.*

2.2. Definición y Propiedades Principales

2.2.1. El espacio $H^1(\Omega)$

Definición 2.2.1. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ está definido por*

$$H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)\right\},$$

donde $\frac{\partial v}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial v}{\partial y}$ *son las derivadas parciales débiles de v. Notemos que*

$$H^1(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)^2\right\}.$$

Proposición 2.2.1. *El espacio* $H^1(\Omega)$ *dotado del producto interior*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \iint_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy \tag{2.8}$$

y con la norma inducida

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

es un espacio de Hilbert.

Observación 2.2.1.

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^2} \\ &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D_1 u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D_2 u\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Demostración. Primero veamos que (2.8) es un producto interior en $H^1(\Omega)$.

i. $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\langle u, u\rangle = 0$ sii $u = 0$.

$$\begin{aligned} \langle u, u\rangle &= \iint_\Omega (u(x,y)u(x,y) + \nabla u(x,y) \cdot \nabla u(x,y))\, dxdy \\ &= \iint_\Omega \left(|u(x,y)|^2 + \|\nabla u(x,y)\|^2\right) dxdy \geq 0. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\langle u, u\rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \langle u, u\rangle = \iint_\Omega \left(|u(x,y)|^2 + \|\nabla u(x,y)\|^2\right) dxdy = 0 \\ \Rightarrow \left(|u(x,y)|^2 + \|\nabla u(x,y)\|^2\right) \sim 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ \Rightarrow \left(|u(x,y)|^2 + \|\nabla u(x,y)\|^2\right) = 0 \quad \text{c.t.p en} \quad \Omega \\ \Rightarrow u = 0 \quad \text{c.t.p en} \quad \Omega. \end{aligned}$$

Ahora, si $u = 0$ es fácil ver que $\langle u, u\rangle = 0$.

ii. Sean $u, v, w \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\langle u+v,w\rangle &= \iint_\Omega \left((u(x,y)+v(x,y))\,w(x,y)+\nabla(u(x,y)+v(x,y))\cdot\nabla(w(x,y))\right)dxdy\\
&= \iint_\Omega \left(u(x,y)w(x,y)+v(x,y)w(x,y)+(\nabla u(x,y)+\nabla v(x,y))\cdot\nabla w(x,y)\right)dxdy\\
&= \iint_\Omega (u(x,y)w(x,y)+\nabla u(x,y)\cdot\nabla w(x,y))\\
&\qquad + (v(x,y)w(x,y)+\nabla v(x,y)\cdot\nabla w(x,y))\,dxdy\\
&= \iint_\Omega (u(x,y)w(x,y)+\nabla u(x,y)\cdot\nabla w(x,y))\,dxdy\\
&\qquad + \iint_\Omega (v(x,y)w(x,y)+\nabla v(x,y)\cdot\nabla w(x,y))\,dxdy\\
&= \langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle\,.
\end{aligned}$$

iii. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $u,v\in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u,v\rangle &= \iint_\Omega (\alpha u(x,y)v(x,y)+\nabla(\alpha u(x,y))\cdot\nabla v(x,y))\,dxdy\\
&= \iint_\Omega (\alpha u(x,y)v(x,y)+\alpha\nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y))\,dxdy\\
&= \alpha\iint_\Omega (u(x,y)v(x,y)+\nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y))\,dxdy\\
&= \alpha\langle u,v\rangle\,.
\end{aligned}$$

iv. $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle u,v\rangle &= \iint_\Omega (u(x,y)v(x,y)+\nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y))\,dxdy\\
&= \iint_\Omega (v(x,y)u(x,y)+\nabla v(x,y)\cdot\nabla u(x,y))\,dxdy\\
&= \langle v,u\rangle\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (2.8) es producto interior sobre $H^1(\Omega)$. Ahora, resta probar que $H^1(\Omega)$ es completo con la norma inducida por (2.8).

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Entonces, para todo $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n-u_m\|_{H^1(\Omega)}<\varepsilon \qquad \forall n,m\geq N.$$

Esto es

$$\left\{\|u_n-u_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_n-\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \qquad \forall n,m\geq N,$$

y así $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$ y en $L^2(\Omega)^2$ respectivamente. Luego, por ser $L^2(\Omega)$ un espacio de Hilbert, existen u, w_1, w_2 en $L^2(\Omega)$ tales que u_n converge a u y $\frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}$ convergen a w_1, w_2 respectivamente, cuando $n \longrightarrow \infty$. Además, como ∇u_n es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)^2$, existe $\nabla u \in L^2(\Omega)^2$ tal que $\nabla u_n \to \nabla u$ cuando $n \to \infty$. Así, para toda función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se cumple que

$$\iint_\Omega u_n\phi \longrightarrow \iint_\Omega u\phi, \quad \iint_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x}\phi \longrightarrow \iint_\Omega w_1\phi \quad y \quad \iint_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial y}\phi \longrightarrow \iint_\Omega w_2\phi,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. En efecto,

$$\left|\iint_\Omega u_n\phi - \iint_\Omega u\phi\right| = \left|\iint_\Omega (u_n - u)\phi\right| \leq \iint_\Omega |(u_n - u)\phi|\,.$$

Luego, por desigualdad de Schwarz

$$\left|\iint_\Omega u_n\phi - \iint_\Omega u\phi\right| \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto

$$\left|\iint_\Omega u_n\phi - \iint_\Omega u\phi\right| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\iint_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x}\phi \longrightarrow \iint_\Omega w_1\phi \quad y \quad \iint_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial y}\phi \longrightarrow \iint_\Omega w_2\phi.$$

Ahora, por definición de derivada débil de u_n, para toda función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\iint_\Omega u_n \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x}\phi dxdy \tag{2.11}$$

y

$$\iint_\Omega u_n \frac{\partial \phi}{\partial y} dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial y}\phi dxdy. \tag{2.12}$$

Así, por unicidad del límite de u_n, para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se deduce que

$$\iint_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy = -\iint_\Omega w_1\phi dxdy$$

y

$$\iint_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial y} dxdy = -\iint_\Omega w_2\phi dxdy.$$

Luego, u es diferenciable en el sentido débil, donde w_1 y w_2 son sus derivadas parciales débiles. En consecuencia, dado que $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$ se tiene que $u \in H^1(\Omega)$. Además, como $u_n \to u$ y $\nabla u_n \to \nabla u$ cuando $n \longrightarrow \infty$, se concluye que $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

$\square$

2.3. Teoremas de Densidad

Mediante el estudio de ciertos teoremas, lemas, proposiciones y observaciones, en está sección verificaremos la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Esto nos permitirá demostrar varias propiedades de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ en dicho espacio. Comenzamos introduciendo una clásica e importante herramienta, la cual servirá para extender cierta clase de funciones.

Observación 2.3.1. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y $\varepsilon > 0$, se define el conjunto Ω_ε como*

$$\Omega_\varepsilon := \{w = (x,y) \in \Omega : dist(w, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Definición 2.3.1. *1. La función $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (denominada molificador estándar)está definida por*

$$\eta(w) := \begin{cases} Cexp\left(\frac{1}{|w|^2-1}\right), & si\,|w| < 1 \\ 0, & si\,|w| \geq 1, \end{cases} \tag{2.13}$$

donde la constante C se selecciona de tal manera que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \eta\, dxdy = 1.$$

2. Para cada $\varepsilon > 0$, se define la función $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ como

$$\eta_\varepsilon(w) := \frac{1}{\varepsilon^2}\eta\left(\frac{w}{\varepsilon}\right),$$

la cual satisface

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \eta_\varepsilon dxdy = 1 \quad , \quad supp\eta_\varepsilon \subset (B(0,0),\varepsilon).$$

Observación 2.3.2. *1. Si $u \in \Omega_\varepsilon$ entonces $B(u,\varepsilon) \subseteq \Omega$. En efecto, dado $z \in B(u,\varepsilon)$ se tiene que*

$$\|u - z\| < \varepsilon. \tag{2.14}$$

Puesto que $\mathbb{R}^2 = \Omega \cup \partial\Omega \cup ext(\Omega)$, entonces para deducir que $z \in \Omega$, es suficiente verificar que los casos $z \in \partial\Omega$, $z \in ext(\Omega)$ conducen a una contradicción.

i. *Si $z \in \partial\Omega$ entonces*

$$\|u - z\| \geq dist(u, \partial\Omega) > \varepsilon,$$

lo cual contradice (2.14).

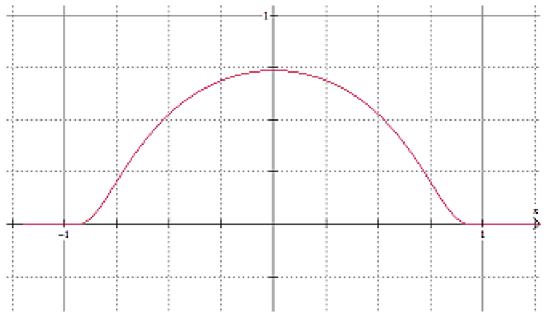

Figura 2.2: Molificador en $\mathbb{R}$.

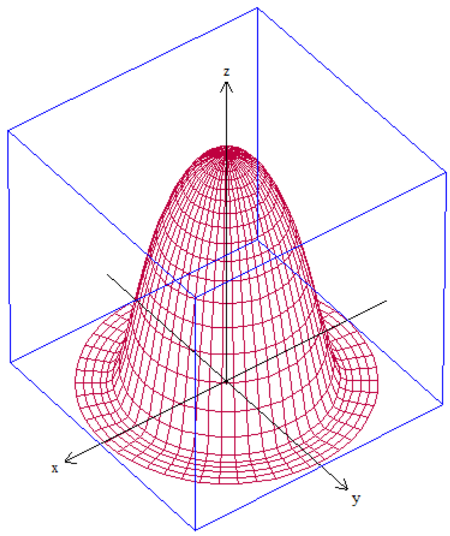

Figura 2.3: Molificador en $\mathbb{R}^2$.

ii. *Si $z \in ext(\Omega)$ entonces*

$$\|u - z\| \geq dist(u, ext(\Omega)) = dist(u, \partial\Omega) > \varepsilon,$$

lo cual, nuevamente contradice (2.14).

De lo anterior se sigue que $z \in \Omega$.

2. *Sean $u \in \Omega_\varepsilon$ y $v \in B((0,0),\varepsilon)$. Entonces*

$$u - v \in \Omega.$$

En efecto, si $v \in B((0,0),\varepsilon)$ se tiene que $\|v\| < \varepsilon$. Así,

$$\|u - (u - v)\| < \varepsilon.$$

Luego, $u - v \in B(u,\varepsilon)$ y así por 1 se tiene que $u - v \in \Omega$.

Definición 2.3.2 (Convolución). *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. La función $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, definida para casi todo $x \in \mathbb{R}^2$ como*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y)dy,$$

se denomina la convolución de f y g y se denota por $h = f * g$.

Proposición 2.3.1. *Sean $f \in C^k_0(\mathbb{R}^2)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (k natural). Entonces*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^2).$$

En particular, si $f \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Demostración. Ver [4, Proposición IV.20.]

□

Definición 2.3.3. *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable, se define su molificación como*

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \qquad en \quad \Omega_\varepsilon,$$

es decir

$$f^\varepsilon(w_1) := \iint_\Omega \eta_\varepsilon(w_1 - w_2) f(w_2) dw_2 \qquad \forall w_1 \in \Omega_\varepsilon.$$

Lema 2.3.1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente integrable. Entonces,*

$$f^\varepsilon(w_1) = \iint_{B((0,0),\varepsilon)} \eta_\varepsilon(w_2) f(w_1 - w_2) dw_2$$

para $w_1 \in \Omega_\varepsilon$.

Demostración. Sea $\widetilde{f}$ la extensión de f por cero a todo $\mathbb{R}^2$. La demostración se realizará mediante un cambio de variables. Sean

$$h(z) = \eta_\varepsilon(z)\widetilde{f}(w_1 - z) \quad \text{y} \quad g(w_2) = w_1 - w_2$$

con $|\det Dg(w_2)| = 1$. Luego,

$$h(g(w_2)) = \eta_\varepsilon(w_1 - w_2)\widetilde{f}(w_2).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f^\varepsilon(w_1) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \eta_\varepsilon(w_1 - w_2)\widetilde{f}(w_2)dw_2 \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(g(w_2))\,|\det Dg(w_2)|\,dw_2 \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(z)dz \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \eta_\varepsilon(z)\widetilde{f}(w_1 - z)dz \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \eta_\varepsilon(w_2)\widetilde{f}(w_1 - w_2)dw_2 \\
&= \iint_{B((0,0),\varepsilon)} \eta_\varepsilon(w_2)\widetilde{f}(w_1 - w_2)dw_2 \\
&= \iint_{B((0,0),\varepsilon)} \eta_\varepsilon(w_2)f(w_1 - w_2)dw_2,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene debido a que $w_1 - w_2 \in \Omega$ (Ver observación 2.3.2).

□

Teorema 2.3.1. ***(Propiedades de los molificadores)***

i. $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

ii. $f^\varepsilon \to f$ *c.t.p cuando* $\varepsilon \to 0$.

iii. *Si* $f \in C(\Omega)$, *entonces* $f^\varepsilon \to f$ *uniformemente sobre subconjuntos compactos de* Ω.

iv. *Si* $f \in L^2_{Loc}(\Omega)$ *entonces* $f^\varepsilon \to f$ *en* $L^2_{Loc}(\Omega)$.

Demostración. Una demostración de este resultado puede ser encontrada en Evans. Ver [7, Teorema 6, C.4.]

□

Teorema 2.3.2. *Supongamos que $u \in H^1(\Omega)$ y sea $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ en Ω_ε. Entonces*

1. $D_1 u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D_1 u$, $D_2 u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D_2 u \quad en \quad \Omega_\varepsilon$.

2. $$u^\varepsilon \to u \quad en \quad H^1_{loc}(\Omega), \quad cuando \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.15}$$

Demostración. 1. Probemos que

$$D_1 u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D_1 u \quad \text{en} \quad \Omega_\varepsilon. \tag{2.16}$$

En efecto, sea $w_1 \in \Omega_\varepsilon$. Usando la definición de u^ε, se tiene

$$\begin{aligned} D_1 u^\varepsilon(w_1) &= \lim_{h\to 0} \frac{u^\varepsilon(w_1+he_1) - u^\varepsilon(w_1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \iint_\Omega \left[\frac{\eta_\varepsilon(w_1+he_1-w_2) - \eta_\varepsilon(w_1-w_2)}{h} \right] u(w_2) dw_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ahora, por definición de $D_1\eta_\varepsilon$ se tiene que

$$D_1\eta_\varepsilon(w_1-w_2) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\eta_\varepsilon(w_1+he_1-w_2) - \eta_\varepsilon(w_1-w_2) \right].$$

Luego,

$$D_1\eta_\varepsilon(w_1-w_2)u(w_2) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\eta_\varepsilon(w_1+he_1-w_2) - \eta_\varepsilon(w_1-w_2) \right] u(w_2). \tag{2.18}$$

Por lo anterior, existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, se tiene

$$\left| \frac{1}{h} \left[\eta_\varepsilon(w_1+he_1-w_2) - \eta_\varepsilon(w_1-w_2) \right] u(w_2) - D_1\eta_\varepsilon(w_1-w_2)u(w_2) \right| \leq 1.$$

Así, para $|h| < \delta$ se sigue

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{h} \left[\eta_\varepsilon(w_1+he_1-w_2) - \eta_\varepsilon(w_1-w_2) \right] u(w_2) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \left[\eta_\varepsilon(w_1+he_1-w_2) - \eta_\varepsilon(w_1-w_2) \right] u(w_2) - D_1\eta_\varepsilon(w_1-w_2)u(w_2) \right| \\ &+ \left| D_1\eta_\varepsilon(w_1-w_2)u(w_2) \right| \\ &\leq 1 + \left| D_1\eta_\varepsilon(w_1-w_2)u(w_2) \right| \\ &= 1 + \left| D_1\eta_\varepsilon(w_1-w_2) \right| \left| u(w_2) \right|. \end{aligned}$$

Sea $g(w_2) := 1 + |D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2)|$. Probemos que

$$\iint_\Omega |g(w_2)|\,|u(w_2)| < +\infty.$$

En efecto, usando la desigualdad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega |g(w_2)|^2\,dw_2 &= \iint_\Omega (1 + |D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2)|)^2\,dw_2 \\
&\leq 2\iint_\Omega \left(1 + |D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2)|^2\right) dw_2 \\
&= 2\iint_\Omega 1 dw_2 + 2\iint_\Omega |D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2)|^2\,dw_2 \\
&\leq 2|\Omega| + 2\iint_{\mathbb{R}^2} |D_1\eta_\varepsilon(w)|^2\,dw \\
&= 2|\Omega| + 2\iint_{B((0,0),\varepsilon)} |D_1\eta_\varepsilon(w)|^2\,dw \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Así, dado que $u \in H^1(\Omega)$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue

$$\iint_\Omega |g(w_2)u(w_2)|\,dw_2 \leq \left(\iint_\Omega |g(w_2)|^2\,dw_2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_\Omega |u(w_2)|^2\,dw_2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Ahora, por teorema de la convergencia dominada, de (2.17) y (2.18) se obtiene

$$D_1u^\varepsilon(w_1) = \iint_\Omega D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2)u(w_2)dw_2. \tag{2.19}$$

Resta demostrar que

$$\iint_\Omega D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2)u(w_2)dw_2 = (\eta_\varepsilon * D_1u)(w_1), \tag{2.20}$$

para lo cual definimos la función $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(w_2) := \eta_\varepsilon(w_1 - w_2).$$

Claramente $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Además $supp\phi \subseteq \Omega$, en efecto, fijamos $w_1 \in \Omega_\varepsilon$ y dado que $supp\eta_\varepsilon \subseteq B((0,0),\varepsilon)$ se tiene que

$$supp\phi \subseteq \left\{w_2 \in \bar{\Omega} : w_1 - w_2 \in B((0,0),\varepsilon)\right\} = \left\{w_2 \in \bar{\Omega} : |w_1 - w_2| < \varepsilon\right\} := A.$$

Luego, si $w_2 \in A$ entonces $w_2 \notin \partial\Omega$ puesto que

$$dist(w_1, \partial\Omega) > \varepsilon.$$

Entonces,

$$A = \{w_2 \in \Omega : |w_1 - w_2| < \varepsilon\},$$

con lo cual

$$supp\phi \subseteq \Omega,$$

y así

$$\phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ahora, hacemos $w_1 = (s,t)$ y $w_2 = (\widetilde{s},\widetilde{t})$. Así,

$$\phi(\widetilde{s},\widetilde{t}) = \eta_\varepsilon(g(\widetilde{s},\widetilde{t})),$$

donde la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por

$$g(\widetilde{s},\widetilde{t}) = (s - \widetilde{s}, t - \widetilde{t}).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} D_1\phi(w_2) &= D_1\eta_\varepsilon\left(g\left(\widetilde{s},\widetilde{t}\right)\right)\frac{\partial}{\partial\widetilde{s}}(g_1(\widetilde{s},\widetilde{t})) + D_2\eta_\varepsilon(g(\widetilde{s},\widetilde{t}))\frac{\partial}{\partial\widetilde{s}}(g_2(\widetilde{s},\widetilde{t})) \\ &= -D_1\eta_\varepsilon(g\left(\widetilde{s},\widetilde{t}\right)) \\ &= -D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2). \end{aligned}$$

Luego,

$$\iint_\Omega D_1\eta_\varepsilon(w_1 - w_2)u(w_2)dw_2 = -\iint_\Omega D_1\phi(w_2)u(w_2)dw_2.$$

Puesto que $u \in H^1(\Omega)$, entonces de la igualdad anterior y usando la definición de derivada débil se sigue que

$$\begin{aligned} D_1u^\varepsilon(w_1) &= \iint_\Omega \phi(w_2)D_1u(w_2)dw_2 \\ &= \iint_\Omega \eta_\varepsilon(w_1 - w_2)D_1u(w_2)dw_2 \\ &= (\eta_\varepsilon * D_1u)(w_1), \end{aligned}$$

lo que demuestra (2.20). Así, de (2.19) y (2.20) se deduce

$$D_1u^\varepsilon(w_1) = (\eta_\varepsilon * D_1u)(w_1) \quad \forall w_1 \in \Omega_\varepsilon,$$

lo que prueba (2.16). Razonando de la misma forma que antes, se demuestra que

$$D_2u^\varepsilon = (\eta_\varepsilon * D_2u) \quad \text{en} \quad \Omega_\varepsilon. \tag{2.21}$$

2. Sea un conjunto abierto $V \subset\subset \Omega$. De (2.16) se tiene

$$(D_1 u^{\varepsilon}) = (D_1 u)^{\varepsilon}.$$

Luego, del Teorema 2.3.1 usando (iv)

$$D_1 u^{\varepsilon} \to D_1 u \quad \text{en} \quad L^2(V) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.22}$$

De manera análoga, de (2.21) se deduce

$$D_2 u^{\varepsilon} \to D_2 u \quad \text{en} \quad L^2(V) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.23}$$

Además, en virtud de la Observación 2.2.1, se tiene

$$\|u^{\varepsilon} - u\|^2_{H^1(V)} = \|u^{\varepsilon} - u\|^2_{L^2(V)} + \|D_1 u^{\varepsilon} - D_1 u\|^2_{L^2(V)} + \|D_2 u^{\varepsilon} - D_2 u\|^2_{L^2(V)}.$$

La propiedad (iv) del Teorema 2.3.1 muestra que el primer término del lado derecho de la igualdad anterior converge a cero si $\varepsilon \to 0$. De igual forma, los dos términos restantes convergen a cero si $\varepsilon \to 0$, gracias a 2.22 y 2.23. En consecuencia,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u^{\varepsilon} - u\|_{H^1(V)} = 0.$$

Dado que $V \subset\subset \Omega$ es cualquiera, la igualdad anterior implica 2.15.

$\square$

Observación 2.3.3. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^{\infty}(\Omega)$. Si $supp f \cap \partial\Omega = \emptyset$ entonces*

$$supp f \subseteq \Omega.$$

En efecto, si $supp f \cap \partial\Omega = \emptyset$ entonces $supp f \subseteq (\partial\Omega)^c$. Además, por definición

$$supp f \subseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
supp f &\subseteq (\Omega \cup \partial\Omega) \cap (\partial\Omega)^c \\
&= (\Omega \cap \partial\Omega^c) \cup (\partial\Omega \cap \partial\Omega^c) \\
&= \Omega \cap \partial\Omega^c \\
&= \Omega \cap (\Omega \cup (\overline{\Omega})^c) \\
&= (\Omega \cap \Omega) \cup (\Omega \cap (\overline{\Omega})^c) \\
&= \Omega.
\end{aligned}$$

Este resultado se usará en la demostración de la parte 2 del siguiente lema.

Lema 2.3.2. *Sean $V \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $g : V \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(v) := v + \varepsilon e_2$ donde $\varepsilon > 0$ es fijo. Si $\widehat{V} := g(V)$, entonces*

1. $\partial\widehat{V} = \{g(v) : v \in \partial V\}$.

2. *Si $\phi \in C_0^\infty(V)$, entonces $\psi := (\phi \circ g^{-1}) \in C_0^\infty(\widehat{V})$.*

3. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto tal que $\overline{\widehat{V}} \subseteq \Omega$ y $u \in H^1(\Omega)$, entonces*

$$u_\varepsilon := (u \circ g) \quad \in H^1(V)$$

y

$$D_1 u_\varepsilon(w) = D_1 u(g(w)), \quad D_2 u_\varepsilon(w) = D_2 u(g(w)) \qquad c.t.p \quad w \in V.$$

Demostración. 1. Sea $A := \{g(v) : v \in \partial V\}$.

Paso 1. Demostraremos que $\partial\widehat{V} \subseteq \mathbf{A}$. Dado $\widehat{v} \in \partial\widehat{V}$, existe $\widehat{v_n} \in \widehat{V}$ tal que $\widehat{v_n} \to \widehat{v}$. Así,

$$\begin{aligned} \widehat{v_n} \in \widehat{V} \quad &\Rightarrow \quad \widehat{v_n} \in g(V) \\ &\Rightarrow \quad \widehat{v_n} = v_n + \varepsilon e_2, \quad v_n \in V \\ &\Rightarrow \quad v_n = \widehat{v_n} - \varepsilon e_2, \quad v_n \in V. \end{aligned}$$

Luego, si $v := \widehat{v} - \varepsilon e_2$, se tiene

$$v = \widehat{v} - \varepsilon e_2 = \lim_{n\to\infty} \widehat{v_n} - \varepsilon e_2 = \lim_{n\to\infty} v_n,$$

de donde $v \in \overline{V}$. Además, si $v \in V$, entonces $g(v) \in \widehat{V}$. Luego, siendo que

$$g(v) = g(\widehat{v} - \varepsilon e_2) = \widehat{v}$$

deducimos que $\widehat{v} \in \widehat{V}$. Así, $\widehat{v} \in \widehat{V} \cap \partial\widehat{V}$ lo cual, dado que g es continua con inversa continua, contradice que $\widehat{V}$ es abierto. En consecuencia, $v \in \overline{V} \backslash V = \partial V$. Por lo tanto,

$$\widehat{v} = g(v) \in A.$$

Paso 2. Probemos que $\mathbf{A} \subseteq \partial\widehat{V}$. Sea $g(v) \in A$. Entonces,

$$g(v) = v + \varepsilon e_2, \quad v \in \partial V.$$

Luego, existe $v_n \in V$ tal que $v_n \to v$. Así,

$$\begin{aligned} v_n \in V \quad &\Rightarrow \quad v_n \in g^{-1}(\widehat{V}) \\ &\Rightarrow \quad v_n = \widehat{v_n} - \varepsilon e_2, \quad \widehat{v_n} \in \widehat{V} \\ &\Rightarrow \quad \widehat{v_n} = v_n + \varepsilon e_2, \quad \widehat{v_n} \in \widehat{V}. \end{aligned}$$

Luego, si $\widehat{v} := v + \varepsilon e_2$, se tiene

$$\widehat{v} = v + \varepsilon e_2 = \lim_{n \to +\infty} v_n + \varepsilon e_2 = \lim_{n \to \infty} \widehat{v_n},$$

de donde $\widehat{v} \in \overline{\widehat{V}}$. Además, si $\widehat{v} \in \widehat{V}$, entonces $g^{-1}(\widehat{v}) \in V$. Luego, siendo que

$$g^{-1}(\widehat{v}) = g^{-1}(v + \varepsilon e_2) = v,$$

deducimos que $v \in V$. Así, $v \in V \cap \partial V$ lo cual contradice que V es abierto. En consecuencia, $\widehat{v} \in \partial \widehat{V}$. Por lo tanto $v = g^{-1}(\widehat{v})$ y así,

$$g(v) = \widehat{v} \in \partial \widehat{V}.$$

2. Se puede observar que $\psi \in C^\infty(\widehat{V})$ dado que es una composición de funciones C^∞. Resta probar que $\operatorname{supp}\psi \subseteq \widehat{V}$. En virtud de la Observación 2.3.3, basta probar que

$$supp\psi \cap \partial \widehat{V} = \emptyset. \tag{2.24}$$

Supongamos lo contrario, es decir que existe $\widehat{v} \in supp\psi \cap \partial \widehat{V}$. Entonces,

$$\widehat{v} \in \partial \widehat{V} = \{g(w) : w \in \partial V\} = \{w + \varepsilon e_2 : w \in \partial V\}$$

y

$$\widehat{v} \in \overline{\left\{\widehat{w} \in \widehat{V} : \psi(\widehat{w}) \neq 0\right\}} = \overline{\left\{\widehat{w} \in \widehat{V} : \phi(\widehat{w} - \varepsilon e_2) \neq 0\right\}}.$$

Así,

$$\widehat{v} = v + \varepsilon e_2, \quad v \in \partial V$$

y además, existe una sucesión $\widehat{v_n} \in \widehat{V}$ tal que $\phi(\widehat{v_n} - \varepsilon e_2) \neq 0$ y $\widehat{v_n} \to \widehat{v}$. Ahora, sea $v_n := \widehat{v_n} - \varepsilon e_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{v_n} \to \widehat{v} \quad &\Rightarrow \quad \widehat{v_n} - \varepsilon e_2 \to \widehat{v} - \varepsilon e_2 \\ &\Rightarrow \quad v_n \to v \\ &\Rightarrow \quad v \in supp\phi \qquad (\phi(v_n) \neq 0) \\ &\Rightarrow \quad v \in V. \qquad (\phi \in C_0^\infty(V)). \end{aligned}$$

Luego,

$$v \in V \cap \partial V$$

es decir,

$$V \cap \partial V \neq \emptyset$$

lo cual contradice que V es abierto. En conclusión, se obtiene (2.24) y así

$$supp\psi \subseteq \widehat{V}.$$

3. Sean $\phi \in C_0^\infty(V)$ y $\phi^\varepsilon(w) := \phi(w+\varepsilon e_2)$ para todo w en $\overline{V}$. Entonces,

$$\iint_V u_\varepsilon(w)D_1\phi(w)dw = \iint_V u(w+\varepsilon e_2)D_1\phi(w)dw = \iint_{\widehat{V}} u(\widehat{w})D_1\phi(\widehat{w}-\varepsilon e_2)d\widehat{w},$$

donde $\widehat{V} := g(V)$. Teniendo en cuenta la definición de ϕ^ε y el resultado del punto anterior se deduce que

$$\begin{aligned} \iint_{\widehat{V}} u(\widehat{w})D_1\phi(\widehat{w}-\varepsilon e_2)d\widehat{w} &= \iint_{\widehat{V}} u(\widehat{w})D_1\phi^{-\varepsilon}(\widehat{w})d\widehat{w} \\ &= -\iint_{\widehat{V}} D_1u(\widehat{w})\phi^{-\varepsilon}(\widehat{w})d\widehat{w} \\ &= -\iint_{\widehat{V}} D_1u(\widehat{w})\phi(\widehat{w}-\varepsilon e_2)d\widehat{w} \\ &= -\iint_V D_1u(w+\varepsilon e_2)\phi(w)dw. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\iint_V u_\varepsilon(w)D_1\phi(w) = -\iint_V D_1u(w+\varepsilon e_2)\phi(w)dw \quad \forall\phi \in C_0^\infty(V)$$

y así,

$$D_1u_\varepsilon(w) = D_1u(w+\varepsilon e_2) \quad \forall w \in V.$$

Además,

$$\begin{aligned} \iint_V |D_1u(w+\varepsilon e_2)|^2 &= \iint_{\widehat{V}} |D_1u(\widehat{w})|^2 \\ &\leq \iint_\Omega |D_1u(\widehat{w})|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_1u(w+\varepsilon e_2) \in L^2(V)$$

y así, $D_1 u_\varepsilon \in L^2(V)$. De igual forma, se demuestra que $D_2 u_\varepsilon \in L^2(V)$. En conclusión,

$$u_\varepsilon \in H^1(V).$$

$\square$

El resultado de densidad que se demostrara más adelante exige que $\partial\Omega$ tenga una propiedad particular, más exactamente que $\partial\Omega$ sea de clase C^1. Este concepto se precisa en la siguiente definición

Definición 2.3.4. *Decimos que $\partial\Omega$ es de clase C^1, si para todo $u = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que*

$$\widetilde{B} := \Omega \cap B(u,r) = \{(x,y) \in B(u,r) : y > \gamma(x)\}. \tag{2.25}$$

y

$$V = \partial\Omega \cap B(u,r) = \{(x,y) \in B(u,r) : y = \gamma(x)\}. \tag{2.26}$$

De manera intuitiva, $\widetilde{B}$ está completamente contenida a un lado de $\partial\Omega$.

Observación 2.3.4. *La figura* 1 *es un ejemplo de una curva de clase C^1 y por lo tanto el vector normal exterior unitario ν existe para todo u en $\partial\Omega$, mientras la figura* 2 *no es de clase C^1 pues para todo $r > 0$, $\widetilde{B}$ está contenida completamente en Ω y no a un lado de $\partial\Omega$ como lo requiere la definición. Así, los vectores ν y ν' existen y son normales a la curva $\partial\Omega$ pero no son vectores normales exteriores a $\partial\Omega$ en u.*

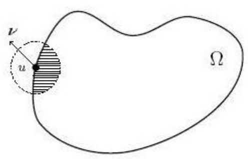

Fig 1. Curva regular

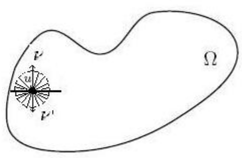

Fig 2. Curva no regular

Observación 2.3.5 (Aplanar la frontera). *Sean $\partial\Omega$ de clase C^1 y $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Sea*

$$V := \Omega \cap B(\mathbf{z}_0, r) = \{\mathbf{z} = (x,y) \in B(\mathbf{z}_0, r) : y > \gamma(x)\}.$$

Definamos la función $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\Phi(\mathbf{z}) = (\Phi_1(\mathbf{z}), \Phi_2(\mathbf{z})) = (x, y - \gamma(x)) \qquad \forall \mathbf{z} = (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Luego, para $\mathbf{z} = (x, \gamma(x)) \in \partial\Omega \cap B(\mathbf{z}_0, r)$ se tiene que

$$\Phi(\mathbf{z}) = \Phi(x, \gamma(x)) = (x, 0).$$

Es decir,

$$\Phi(\partial\Omega \cap B(\mathbf{z}_0, r)) = \{(x,0) : (x, \gamma(x)) \in B(\mathbf{z}_0, r)\}.$$

Por lo anterior se dice que Φ "aplana"la frontera $\partial\Omega$ cerca de $\mathbf{z}_0$. Además, si se define la función $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\Psi(\mathbf{z}) = (\Psi_1(\mathbf{z}), \Psi_2(\mathbf{z})) = (x, y + \gamma(x)) \qquad \forall \mathbf{z} = (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

se tiene que $\Phi = \Psi^{-1}$. En efecto, para todo $\mathbf{z} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$(\Phi \circ \Psi)(\mathbf{z}) = \Phi(x, y + \gamma(x)) = (x,y) = \mathbf{z}$$

y

$$(\Psi \circ \Phi)(\mathbf{z}) = \Psi(x, y - \gamma(x)) = (x,y) = \mathbf{z}.$$

Proposición 2.3.2. *Sea $\partial\Omega$ de clase C^1. Entonces existe un número finito de conjuntos abiertos $(\chi_i)_{i=0}^N$ de $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\overline{\chi_0} \subseteq \Omega, \quad \overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} \chi_i.$$

Además, si B es la bola unitaria, es decir:

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < 1\right\},$$

para todo $i \in \{1, .., N\}$, existe una función biyectiva ψ_i tal que ψ_i, ψ_i^{-1} son de clase C^1 y

$$\psi_i(\chi_i \cap \Omega) \subseteq B \cap \mathbb{R}^2_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y > 0\right\} = B^+ \tag{2.27}$$

y

$$\psi_i(\chi_i \cap \partial\Omega) \subseteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y = 0\right\}. \tag{2.28}$$

Demostración. Sea $\partial\Omega$ de clase C^1. Entonces, para cada $z \in \partial\Omega$ existe $r_z > 0$ y $\gamma_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que satisface (2.25) y (2.26). Puesto que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{z\in\partial\Omega} B(z, r_z),$$

por la compacidad de $\partial\Omega$, existen $z_i \in \partial\Omega$, $(i = 1, 2, .., N)$ tales que $r_i := r_{z_i} > 0$,

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, r_i).$$

Así, tomando $\chi_0 \subset\subset \Omega$ y definiendo

$$B(z_i, r_i) := \chi_i,$$

se deduce que

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} \chi_i.$$

Sea $i \in \{1, 2, .., N\}$. Sean $\gamma_i := \gamma_{z_i}$ y

$$\alpha_i := \sup_{(x,y)\in B(z_i,r_i)} |x|.$$

Claramente $\alpha_i > 0$. Definamos $\psi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi_i(x, y) := \left(\frac{x}{2\alpha_i}, y - \gamma_i(x)\right).$$

En consecuencia, usando (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned}
\psi_i(\Omega \cap B(z_i, r_i)) &= \left\{\left(\frac{x}{2\alpha_i}, y - \gamma_i(x)\right) : (x, y) \in \Omega \cap B(z_i, r_i)\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{x}{2\alpha_i}, y - \gamma_i(x)\right) : (x, y) \in B(z_i, r_i), y > \gamma_i(x)\right\} \\
&\subseteq \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : |\widetilde{x}| < 1, \widetilde{y} > 0\}.
\end{aligned}$$

Además, usando (2.26) se sigue:

$$\begin{aligned}
\psi_i(\partial\Omega \cap B(z_i, r_i)) &= \left\{\left(\frac{x}{2\alpha_i}, y - \gamma_i(x)\right) : (x, y) \in \partial\Omega \cap B(z_i, r_i)\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{x}{2\alpha_i}, 0\right) : (x, y) \in B(z_i, r_i), y = \gamma_i(x)\right\} \\
&\subseteq \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : |\widetilde{x}| < 1, \widetilde{y} = 0\}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado de clase C^1 y $z = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Además, r y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son respectivamente el número positivo y la función de clase C^1 garantizados por la definición de conjunto clase C^1 (ver definición 1.1.2); es decir r y γ son tales que*

$$\Omega \cap B(z,r) = \{(x,y) \in B(z,r) : y > \gamma(x)\}$$

y

$$\partial\Omega \cap B(z,r) = \{(x,y) \in B(z,r) : y = \gamma(x)\}.$$

Por último $V := \Omega \cap B(z, \frac{r}{2})$ y para cada $w \in \overline{V}$, $\varepsilon > 0$, se denotará $w^\varepsilon := w + \varepsilon e_2$, donde $e_2 = (0,1)$. Entonces,

1. *Existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que*

$$w^\varepsilon \in \Omega \cap B(z,r) \qquad \forall w \in \overline{V}, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

2. *Sea $\phi \in C^1(\Omega)$. Si definimos $\phi^\varepsilon : \overline{V} \to \mathbb{R}$ por*

$$\phi^\varepsilon(w) = \phi(w^\varepsilon) = \phi(w + \varepsilon e_2), \qquad \forall w \in \overline{V}, \tag{2.29}$$

entonces

$$D_1\phi^\varepsilon(w) = D_1\phi(w + \varepsilon e_2) \quad y \quad D_2\phi^\varepsilon(w) = D_2\phi(w + \varepsilon e_2) \quad \forall w \in \overline{V}. \tag{2.30}$$

Demostración. 1. En primer lugar observamos que

$$\overline{V} \subseteq \overline{\Omega} \cap \overline{B\left(z, \frac{r}{2}\right)}.$$

Ahora, sean $w = (x,y) \in \overline{V}$, $w^\varepsilon = (x, y+\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon - z\| &\leq \|w^\varepsilon - w\| + \|w - z\|, \quad \forall w \in \overline{V} \\ &\leq \varepsilon + \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Así, si $\varepsilon < \frac{r}{2}$ se tiene

$$\|w^\varepsilon - z\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \qquad \forall \varepsilon < \frac{r}{2} =: \varepsilon_0.$$

En consecuencia,

$$w^\varepsilon \in B(z,r) \qquad \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Por otro lado, si $w=(x,y)\in\overline{V}$, siendo que

$$\overline{V}\subseteq\overline{\Omega}\cap\overline{B\left(z,\frac{r}{2}\right)}\subseteq\overline{\Omega}\cap B(z,r)=(\Omega\cap B(z,r))\cup(\partial\Omega\cap B(z,r)).$$

se tiene que $y\geq\gamma(x)$ y así,

$$y+\varepsilon>y\geq\gamma(x),$$

lo que implica que, para todo $\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$w^{\varepsilon}=(x,y+\varepsilon)\in\{(\hat{x},\hat{y})\in B(z,r):\hat{y}>\gamma(\hat{x})\}=\Omega\cap B(z,r).$$

2. Sean $w=(x,y)\in\overline{V}$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} g(w) &:= w+\varepsilon e_2 \\ &= (x,y+\varepsilon) \\ &=: (g_1(w),g_2(w)). \end{aligned}$$

Claramente $g\in C^{\infty}(\overline{V})$, $Dg(w)=I$ para todo $w\in\overline{V}$ y además

$$\phi^{\varepsilon}(w)=\phi(g(w))\quad\forall w\in\overline{V}.$$

En virtud de la regla de la cadena

$$D\phi^{\varepsilon}(w)=D\phi(g(w))Dg(w).$$

Luego,

$$D\phi^{\varepsilon}(w)=[D_1\phi(g(w))\quad D_2\phi(g(w))]\cdot I=[D_1\phi(g(w))\quad D_2\phi(g(w))],$$

de donde se obtiene el resultado.

□

Lema 2.3.3. *Sea $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1\leq p<\infty$. Entonces, la traslación de u por h denotada como $(\tau_h u)(x)=u(x+h)$ satisface*

$$\lim_{h\to 0}\|\tau_h u-u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=0.$$

Demostración. Ver [4, Lema IV.4.]. □

Lema 2.3.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ acotado de clase C^1 y V como en la Proposición 2.3.3. Sean $u \in H^1(\Omega)$, $\delta > 0$. Para cada $z = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$, existen $r > 0$, $v^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$ tales que*

$$\|v^\varepsilon - u\|_{H^1(V)} \leq \delta.$$

Demostración. Realizamos la demostración procediendo de la siguiente forma.

Paso 1. Sean $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $u_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_\varepsilon(w) := u(w^\varepsilon) \qquad \forall w \in \overline{V}.$$

Ahora, definimos

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(w_1) &:= (\eta_\varepsilon * u_\varepsilon)(w_1) \\ &= \iint_{\overline{V}} \eta_\varepsilon(w_1 - w_2) u_\varepsilon(w_2) dw_2 \qquad \forall w_1 \in \overline{V}. \end{aligned}$$

Mostremos que $v^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$. En efecto, sea $\widetilde{u}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x,y) := \begin{cases} u_\varepsilon(x,y), & \text{si } (x,y) \in \overline{V} \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin \overline{V}. \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{u}_\varepsilon(x,y)|^2 dxdy &= \iint_{\overline{V}} |u_\varepsilon(x,y)|^2 dxdy \\ &= \iint_{\overline{V}} |u(x, y+\varepsilon)|^2 dxdy \\ &\leq \iint_{\Omega} |u(x,y)|^2 dxdy < +\infty. \end{aligned}$$

Es decir, $\widetilde{u}_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^2)$ y así $\widetilde{u}_\varepsilon \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Luego,

$$\widetilde{v} := \eta_\varepsilon * \widetilde{u}_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

(ver Proposición 2.3.1). Además, si $w_1 = (x_1, y_1) \in \overline{V}$, entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(w_1) &= (\eta_\varepsilon * \widetilde{u}_\varepsilon)(w_1) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \eta_\varepsilon(w_1 - w_2) \widetilde{u}_\varepsilon(w_2) dw_2 \\ &= \iint_{\overline{V}} \eta_\varepsilon(w_1 - w_2) u_\varepsilon(w_2) dw_2 \\ &= (\eta_\varepsilon * u_\varepsilon)(w_1) \\ &= v^\varepsilon(w_1). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$v^\varepsilon = \widetilde{v}|_{\overline{V}},$$

lo cual muestra que

$$v^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V}).$$

Paso 2. Afirmamos que

$$v^\varepsilon \to u \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0, \quad \text{en} \quad H^1(V). \tag{2.31}$$

En efecto, dado que

$$\|v^\varepsilon - u\|^2_{H^1(V)} = \|v^\varepsilon - u\|^2_{L^2(V)} + \|D_1 v^\varepsilon - D_1 u\|^2_{L^2(V)} + \|D_2 v^\varepsilon - D_2 u\|^2_{L^2(V)}, \tag{2.32}$$

analizamos lo siguientes puntos.

i. Del primer término del lado derecho de la igualdad anterior se tiene

$$\|v^\varepsilon - u\|_{L^2(V)} \leq \|v^\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2(V)} + \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(V)}. \tag{2.33}$$

Observemos que el primer término del lado derecho de la desigualdad anterior converge a cero cuando $\varepsilon \to 0$. En efecto, como $\widetilde{u_\varepsilon} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y $\widetilde{v} = \eta_\varepsilon * \widetilde{u_\varepsilon}$ (Paso 1), por Teorema 2.1 (parte iii)

$$\widetilde{v} \to \widetilde{u_\varepsilon} \qquad \text{en} \quad L^2(\overline{V}).$$

Luego,

$$\|\widetilde{v} - \widetilde{u_\varepsilon}\|_{L^2(\overline{V})} = \|v^\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2(V)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.34}$$

Ahora, para analizar el segundo término a la derecha de la desigualdad en (2.33) observemos que

$$u_\varepsilon(w) := u(w + \varepsilon e_2) = u(w + h) = (\tau_h u)(w)$$

donde $h := \varepsilon e_2 \to 0$ sii $\varepsilon \to 0$. Luego, por Lema 2.3.3 se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(V)} = \lim_{h \to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^2(V)} = 0. \tag{2.35}$$

Por lo tanto, de 2.34 y 2.35 se tiene en 2.33 que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|v^\varepsilon - u\|_{L^2(V)} = 0. \tag{2.36}$$

ii. Analicemos el segundo término del lado derecho de la desigualdad (2.32). Notemos que

$$\|D_1 v^\varepsilon - D_1 u\|_{L^2(V)} \leq \|D_1 v^\varepsilon - D_1 u_\varepsilon\|_{L^2(V)} + \|D_1 u_\varepsilon - D_1 u\|_{L^2(V)}. \tag{2.37}$$

Primero observamos que, dado el conjunto $A := \Omega \cap B(z, \frac{3r}{4})$ donde $V \subset A$ y en virtud de la Proposición 2.3.3 (parte 1), existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$w^\varepsilon \in \Omega \cap B(z,r) \qquad \forall w \in \bar{A}, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Ahora, puesto que $u_\varepsilon \in H^1(A)$ (ver Lema 2.3.2, parte 3) se tiene que $D_1 u_\varepsilon \in L^2(A)$ y así $D_1 u_\varepsilon \in L^2_{loc}(A)$. Luego, por Teorema 2.3.2 (parte 1) se deduce que

$$D_1 v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D_1 u_\varepsilon \quad \text{en} \quad A_\varepsilon.$$

Así, por Teorema 2.3.1 (parte iii) se tiene que

$$D_1 v^\varepsilon \to D_1 u_\varepsilon \quad \text{en} \quad L^2_{loc}(A) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Puesto que $V \subset A$, lo anterior implica

$$\|D_1 v^\varepsilon - D_1 u_\varepsilon\|_{L^2(V)} \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.38}$$

Ahora, para analizar el segundo término a la derecha de (2.37) notamos que

$$D_1 u_\varepsilon(w) = D_1 u(w + \varepsilon e_2) = D_1 u(w+h) = (\tau_h D_1 u)(w),$$

donde $h := \varepsilon e_2 \to 0$ sii $\varepsilon \to 0$. Luego, por Lema 2.3.3 se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|D_1 u_\varepsilon - D_1 u\|_{L^2(V)} = \lim_{h \to 0} \|\tau_h D_1 u - D_1 u\|_{L^2(V)} = 0. \tag{2.39}$$

Por lo tanto, de (2.38) y (2.39)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|D_1 v^\varepsilon - D_1 u\|_{L^2(V)} = 0. \tag{2.40}$$

De forma similar se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|D_2 v^\varepsilon - D_2 u\|_{L^2(V)} = 0. \tag{2.41}$$

Luego, de (2.36), (2.40) y (2.41) se deduce que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|v^\varepsilon - u\|^2_{H^1(V)} = 0,$$

es decir, se obtiene (2.31).

□

Para la demostración del siguiente teorema se necesita un resultado clásico del análisis que se puede observar en [14, Teorema 16.3]. Para nuestro trabajo, dicho resultado se dará como una definición.

Definición 2.3.5. *Sean* $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_N \subseteq \mathbb{R}^2$ *conjuntos abiertos y acotados. Una partición de la unidad asociada a* $\{V_i\}_{i=0}^N$ *es un conjunto* $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ *de funciones*

$$\zeta_i : V := \bigcup_{i=0}^{N} V_i \to \mathbb{R} \qquad \textit{tales que}$$

1. $\zeta_i \in C_0^\infty(V_i)$ *para* $i = 1, \ldots, N$.
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} \zeta_i(x) = 1 \qquad \forall x \in V.$

Nota 2.3.1. *Si* $\zeta \in C^\infty(V_i)$, $w \in H^1(V_i)$ *entonces* $w\zeta \in H^1(V_i)$. *Además,*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\zeta w) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} w + \zeta \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.42}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}(\zeta w) = \frac{\partial \zeta}{\partial y} w + \zeta \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2.43}$$

En efecto, sea $\phi \in C_0^\infty(V_i)$. *Entonces,* $\zeta\phi \in C_0^\infty(V_i)$ *y así:*

$$\begin{aligned}
\iint_{V_i} w \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\phi + \zeta \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dxdy &= \iint_{V_i} w \frac{\partial}{\partial x}(\zeta\phi) dxdy \\
&= -\iint_{V_i} \frac{\partial w}{\partial x} \zeta\phi dxdy.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\iint_{V_i} w\zeta \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy &= -\iint_{V_i} w \frac{\partial \zeta}{\partial x}\phi dxdy - \iint_{V_i} \frac{\partial w}{\partial x}\zeta\phi dxdy \\
&= -\iint_{V_i} \left(w \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\zeta \right) \phi dxdy.
\end{aligned}$$

Así, puesto que $\phi \in C_0^\infty(V_i)$ *es cualquiera, se tiene*

$$\frac{\partial}{\partial x}(w\zeta) = w\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\zeta,$$

ya que

$$w\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\zeta \in L^2(V_i).$$

De manera similar se obtiene (2.43).

Teorema 2.3.3 (Densidad). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado de clase C^1. Supongamos que $u \in H^1(\Omega)$. Entonces existe $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que*

$$u_m \to u \qquad en \quad H^1(\Omega). \tag{2.44}$$

Demostración. Sean $\delta > 0$ y $z = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Puesto que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{z\in\partial\Omega} B\left(z, \frac{r}{2}\right),$$

y $\partial\Omega$ es compacta, existen z_i, r_i, $i = 1, .., N$ tales que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B\left(z_i, \frac{r_i}{2}\right).$$

Así, por Lema 2.3.4, $v_i \in C^\infty(\overline{V_i})$, donde

$$V_i := \Omega \cap B\left(z_i, \frac{r_i}{2}\right)$$

tales que

$$\|v_i - u\|_{H^1(V_i)} \leq \delta.$$

Ahora, tomamos un conjunto abierto $V_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{N} V_i$. Por el Teorema 2.3.2, existe una función $v_0 \in C^\infty(\overline{V_0})$ que satisface

$$\|v_0 - u\|_{H^1(V_0)} \leq \delta.$$

Sea $\{\zeta_i\}_{i=0}^{N}$ una partición de la unidad asociada a la familia de conjuntos abiertos $\{V_i\}_{i=0}^{N}$. Así, $\zeta_i \in C_0^\infty(V_i)$ para todo $i = 0, 1, .., N$. Luego $\zeta_i v_i \in C_0^\infty(V_i)$ y por lo tanto, si $\widetilde{\zeta_i v_i}$ denota la extensión por cero de $\zeta_i v_i$ a todo $\mathbb{R}^2$, se tiene que $\widetilde{\zeta_i v_i} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y así,

$$\widetilde{v} := \sum_{i=0}^{N} \widetilde{\zeta_i v_i} \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Sea

$$v := \widetilde{v}\Big|_{\overline{\Omega}}.$$

Así, $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y además tomando $u = \sum_{i=0}^{N} \zeta_i u$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|v-u\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{i=0}^{N} \widetilde{\zeta_i v_i} - \sum_{i=0}^{N} \zeta_i u \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{N} \left(\widetilde{\zeta_i v_i} - \zeta_i u \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \left\| \widetilde{\zeta_i v_i} - \zeta_i u \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \|\zeta_i v_i - \zeta_i u\|_{L^2(V_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \|\zeta_i (v_i - u)\|_{L^2(V_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \left[\|\zeta_i\|_{L^2(V_i)} \|v_i - u\|_{L^2(V_i)} \right],
\end{aligned}$$

así, dado que $\zeta_i \in C_0^\infty(V_i)$, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|v-u\|_{L^2(\Omega)} &\leq K_1 \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{L^2(V_i)} \\
&\leq K_1 \sum_{i=0}^{N} \delta \\
&= K_1 (N+1) \delta.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Procediendo como antes, deducimos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\|\frac{\partial}{\partial x}(v-u)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{N}\widetilde{\zeta_i v_i}-\sum_{i=0}^{N}\zeta_i u\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\|\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\zeta_i v_i}-\zeta_i u\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\zeta_i v_i}-\zeta_i u\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=0}^{N}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_i v_i-\zeta_i u\right)\right\|_{L^2(V_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{N}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta_i(v_i-u)\right]\right\|_{L^2(V_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{N}\left\|\zeta_i\frac{\partial}{\partial x}(v_i-u)+\frac{\partial\zeta_i}{\partial x}(v_i-u)\right\|_{L^2(V_i)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N}\left[\left\|\zeta_i\frac{\partial}{\partial x}(v_i-u)\right\|_{L^2(V_i)}+\left\|\frac{\partial\zeta_i}{\partial x}(v_i-u)\right\|_{L^2(V_i)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{N}\left[\|\zeta_i\|_{L^2(V_i)}\left\|\frac{\partial}{\partial x}(v_i-u)\right\|_{L^2(V_i)}+\left\|\frac{\partial\zeta_i}{\partial x}\right\|_{L^2(V_i)}\|v_i-u\|_{L^2(V_i)}\right] \\
&\leq C\sum_{i=0}^{N}\left[\left\|\frac{\partial}{\partial x}(v_i-u)\right\|_{L^2(V_i)}+\|v_i-u\|_{L^2(V_i)}\right] \\
&\leq 2C\sum_{i=0}^{N}\|v_i-u\|_{H^1(V_i)} \\
&\leq 2C\sum_{i=0}^{N}\delta \\
&= K_2(N+1)\delta.
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Por último, razonando igual que en la anterior deducción se obtiene

$$
\left\|\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq K_3(N+1)\delta. \tag{2.47}
$$

En resumen, hemos obtenido las siguientes estimaciones:

$$
(2.45),(2.46),(2.47).
$$

Luego, se tiene que para todo $\delta > 0$ existe $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq K\delta,$$

donde

$$K = \text{máx}\{K_1(N+1), K_2(N+1), K_3(N+1)\}.$$

En particular, si $m \in \mathbb{Z}^+$ es cualquiera y hacemos $\delta = \frac{1}{m}$, se tiene que existe $v_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$\|v_m - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{K}{m}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m - u\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

$\square$

Ahora, definiremos el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ el cual será de gran importancia en capítulos posteriores para problemas con condiciones en la frontera.

Definición 2.3.6. *El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está definido como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.*

Observación 2.3.6. *De la definición anterior se deduce que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$.*

Dado que $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, es también un espacio de Hilbert. Es decir, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4. *El espacio $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno* (2.8) *de $H^1(\Omega)$.*

Demostración. Por definición $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ (el cual es un espacio de Hilbert), por lo tanto es tambien un espacio de Hilbert.

$\square$

En el próximo capítulo se introduce el importante concepto de traza, el cual da sentido a restricciones de funciones en $H^1(\Omega)$ a la frontera $\partial\Omega$. En dicho capítulo demostraremos, que las funciones de $H_0^1(\Omega)$ tienen traza nula.

A continuación, presentamos un importante resultado el cual nos permitirá observar la equivalencia existente entre la norma de $H^1(\Omega)$ y la seminorma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^2} := \iint_\Omega |\nabla v|^2\, dxdy$ en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Proposición 2.3.5 (Desigualdad de Poincaré). *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ acotado. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $v \in H_0^1(\Omega)$*

$$\iint_\Omega |v|^2\, dxdy \leq C\left(\iint_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dxdy + \iint_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 dxdy\right).$$

Demostración. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Dado que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ (ver definición), existe una sucesión $v_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$v_n \to v \qquad \text{en} \quad H^1(\Omega).$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|^2_{H^1(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \iint_\Omega |v_n - v|^2\, dxdy + \iint_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dxdy + \iint_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 dxdy = 0.$$

Ahora, puesto que

$$v_n \to v \qquad \text{en} \quad H^1(\Omega),$$

se deduce que

$$v_n \to v \qquad \text{en} \quad L^2(\Omega), \qquad \frac{\partial v_n}{\partial x} \to \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{en} \quad L^2(\Omega), \qquad \frac{\partial v_n}{\partial y} \to \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

Luego, por la continuidad de la norma de $L^2(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_\Omega |v_n|^2 &\quad\to\quad \iint_\Omega |v|^2 \\ \iint_\Omega \left|\frac{v_n}{\partial x}\right|^2 &\quad\to\quad \iint_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 \\ \iint_\Omega \left|\frac{v_n}{\partial y}\right|^2 &\quad\to\quad \iint_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Lema 1.1.1 (desigualdad de Poincaré para funciones suaves)

$$\iint_\Omega |v_n|^2\, dxdy \leq C\left(\iint_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|^2 dxdy + \iint_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial y}\right|^2 dxdy\right).$$

Así, haciendo que $n \to \infty$, se tiene:

$$\iint_\Omega |v|^2\,dxdy \leq C\left(\iint_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dxdy + \iint_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 dxdy\right).$$

$\square$

Observación 2.3.7. *A partir de la desigualdad de Poincaré se deduce que las normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^2}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, a partir de*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left[\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right],$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sqrt{C}\sqrt{\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&= \sqrt{C}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^2}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^2},$$

se deduce

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^2} \\
&\leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^2} \\
&= (C+1)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^2}.
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{C+1}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^2},$$

de donde se deduce la equivalencia entre las mencionadas normas en $H_0^1(\Omega)$.

2.4. Espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$

Para generalizar las fórmulas de Green es necesario definir el espacio $H^2(\Omega)$, el cual es de Hilbert. La demostración de la completitud de $H^2(\Omega)$ es similar a la de $H^1(\Omega)$, por lo que omitimos su prueba.

Definición 2.4.1. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$. El espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ esta definido por*

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in H^1(\Omega) \right\}.$$

El espacio $H^2(\Omega)$ esta dotado de la norma

$$\begin{aligned} \|v-u\|^2_{H^2(\Omega)} &= \|v-u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D_1 v - D_1 u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D_2 v - D_2 u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|D_{11} v - D_{11} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D_{12} v - D_{12} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D_{21} v - D_{21} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D_{22} v - D_{22} u\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

A continuación se realiza la demostración de densidad en $H^2(\Omega)$, pero antes presentamos la versión del Lema 2.3.4 en $H^2(\Omega)$.

Lema 2.4.1. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y acotado de clase C^1, $u \in H^2(\Omega)$ y $\delta > 0$. Para cada $z = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$, existen $r > 0$ y $v^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$ tales que*

$$\|v^\varepsilon - u\|_{H^2(V)} \leq \delta,$$

donde

$$V := \Omega \cap B(z, \frac{r}{2}).$$

Demostración. Al igual que en el Lema 2.3.4 se deduce que $v^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$, donde

$$v^\varepsilon(w_1) := (\eta_\varepsilon * u_\varepsilon)(w_1) \qquad \forall w_1 \in \overline{V}.$$

Asi, resta demostrar que

$$v^\varepsilon \to u \qquad \text{en} \quad H^2(V) \qquad \text{si} \quad \varepsilon \to 0.$$

En primer lugar notemos que

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon-u\|^2_{H^2(V)} &= \|v^\varepsilon-u\|^2_{L^2(V)} + \|D_1 v^\varepsilon - D_1 u\|^2_{L^2(V)} + \|D_2 v^\varepsilon - D_2 u\|^2_{L^2(V)} \\ &+ \|D_{11} v^\varepsilon - D_{11} u\|^2_{L^2(V)} + \|D_{12} v^\varepsilon - D_{12} u\|^2_{L^2(V)} + \|D_{21} v^\varepsilon - D_{21} u\|^2_{L^2(V)} + \|D_{22} v^\varepsilon - D_{22} u\|^2_{L^2(V)}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Gracias al Lema 2.3.4 (parte 2) los tres primeros términos de la igualdad anterior convergen a cero cuando $\varepsilon \to 0$. Luego, falta demostrar que los términos restantes convergen a cero cuando $\varepsilon \to 0$. En efecto, para la estimación del cuarto término, notemos que

$$\|D_{11}v^{\varepsilon} - D_{11}u\|_{L^2(V)} \leq \|D_{11}v^{\varepsilon} - D_{11}u_{\varepsilon}\|_{L^2(V)} + \|D_{11}u_{\varepsilon} - D_{11}u\|_{L^2(V)},$$

donde

$$u_{\varepsilon}(w) := u(w^{\varepsilon}) \in H^2(A),$$

y $A := \Omega \cap B(z, \frac{3r}{4})$. Teniendo en cuenta que por el Teorema 2.3.2, se tiene

$$\begin{aligned} D_{11}v^{\varepsilon} &= D_1(\eta_{\varepsilon} * D_1 u_{\varepsilon}) \\ &= \eta_{\varepsilon} * (D_1(D_1 u_{\varepsilon})) \\ &= \eta_{\varepsilon} * D_{11}u_{\varepsilon} \qquad \text{en} \quad A_{\varepsilon}, \end{aligned}$$

se deduce que

$$D_{11}v^{\varepsilon} \to D_{11}u_{\varepsilon} \qquad \text{en} \quad L^2(V) \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.50}$$

Por otro lado, puesto que $D_{11}u \in L^2(V)$, haciendo uso del Lema 2.3.3 (procediendo como en la deducción de (2.39)) se obtiene

$$D_{11}u_{\varepsilon} \to D_{11}u \qquad \text{en} \quad L^2(V) \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.51}$$

En conclusión, de (2.50) y (2.51)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|D_{11}v^{\varepsilon} - D_{11}u\|_{L^2(V)} = 0.$$

De manera similar se deduce la convergencia a cero del resto de términos y asi se concluye la demostración.

□

Teorema 2.4.1 (Densidad en H^2). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto acotado de clase C^1. Supongamos que $u \in H^2(\Omega)$. Entonces, existe $u_m \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ tal que*

$$u_m \to u \quad \textit{en} \quad H^2(\Omega), \qquad \textit{cuando} \quad m \to \infty. \tag{2.52}$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ y $z = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Procediendo como en la demostración del Teorema 2.3.3 y usando el Lema 2.4.1, para $i = 0, 1, 2, .., N$, existen abiertos $V_i \subseteq \Omega$ y $v_i \in C^\infty(\overline{V_i})$ tales que

$$\|v_i - u\|_{H^2(V_i)} \leq \delta.$$

Razonando de manera análoga al resto de la demostración del Teorema 2.3.3, se deducen las desigualdades:

$$\|v - u\|_{L^2(\Omega)} \leq K_1(N+1)\delta \qquad \left\|\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq K_2(N+1)\delta$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq K_3(N+1)\delta \qquad \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq K_4(N+1)\delta$$

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq K_5(N+1)\delta \qquad \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq K_6(N+1)\delta$$

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq K_7(N+1)\delta,$$

de donde, se obtiene (2.52), por ser $\delta > 0$ cualquiera.

□

Capítulo 3

Teorema de la Traza y Fórmulas de Green

En este capítulo vamos a generalizar las identidades de Green para funciones suaves en los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$, para así obtener en el capítulo 4 las formulaciones variacionales de la ecuación de Poisson con diferentes tipos de condición en la frontera. Por tal motivo, es necesario discutir la posibilidad de asignar valores a lo largo de la frontera $\partial\Omega$ para una función $u \in H^1(\Omega)$, asumiendo que $\partial\Omega$ es C^1. Ahora, si $u \in C(\overline{\Omega})$, entonces claramente u tiene valores en $\partial\Omega$ en el sentido usual. El problema es que una función $u \in H^1(\Omega)$ esta en $L^2(\Omega)$, por lo cual no toma valores en un conjunto de medida cero, es decir $u \in H^1(\Omega)$ no va a tomar valores en $\partial\Omega$ por ser esta de medida bidimensional igual a cero. Además, en general las funciones de $H^1(\Omega)$ no son continuas por lo cual podemos cambiar su valor sobre $\partial\Omega$ sin que esto afecte en algo a la función como tal. En conclusión, el Teorema de la traza nos permite darle sentido a las funciones de $H^1(\Omega)$ sobre $\partial\Omega$.

3.1. Teoremas de la traza

Para problemas de valor de frontera es necesario darle sentido a la restricción de una función $v \in H^1(\Omega)$ sobre la frontera $\partial\Omega$. Para entender esta idea, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.1. *Sea Ω el disco unitario en $\mathbb{R}^2$, definido así.*

$$\Omega = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Haciendo uso de coordenadas polares se tiene

$$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

y

$$\partial\Omega = \{(1,\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *y consideremos su restricción a* $\partial\Omega$ *como sigue*

$$\begin{aligned}
u(1,\theta)^2 &= u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^2 \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2)dr \\
&= \int_0^1 \left(2ru(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2 + 2r^2 u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial u}{\partial r}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right) dr \\
&= 2\int_0^1 \left(ru(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2 + r^2 u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\left[\nabla u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\right]\right) dr \\
&\leq 2\int_0^1 \left(ru(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2 + r^2 \left|u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\left|\nabla u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\right|\right) dr \\
&\leq 2\int_0^1 \left(ru(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2 + r^2 \left|u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\left|\nabla u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\left|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\right|\right) dr \\
&= 2\int_0^1 \left(ru(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2 + r^2 \left|u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\left|\nabla u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\right) dr \\
&\leq 2\int_0^1 \left(u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2 + \left|u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\left|\nabla u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\right) rdr.
\end{aligned}$$

Integrando respecto a θ*, la anterior desigualdad, se tiene:*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} u(1,\theta)^2 d\theta &\leq 2\int_0^1\int_0^{2\pi} \left[u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^2 + \left|u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\left|\nabla u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right|\right] rdrd\theta \\
&= 2\iint_\Omega \left[u(x,y)^2 + |u(x,y)||\nabla u(x,y)|\right] dxdy.
\end{aligned}$$

Ahora, definimos la integral

$$\int_{\partial\Omega} u(r,\theta)^2 d\theta := \int_0^{2\pi} u(1,\theta)^2 d\theta.$$

Luego aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u(r,\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} u(1,\theta)^2 &\leq 2\iint_\Omega u(x,y)^2 dxdy + 2\iint_\Omega |u(x,y)||\nabla u(x,y)|\, dxdy \\
&\leq 2\iint_\Omega u(x,y)^2 dxdy + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\left(\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\left(\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\partial\Omega} u(r,\theta)^2 d\theta \leq 2\|u\|_{L^2(\Omega)} \left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tag{3.1}$$

Ahora, teniendo en cuenta la desigualdad $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \leq (2a+2b)^{\frac{1}{2}}$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\left(\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \quad + \quad & \left(\iint_\Omega u(x,y)^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq \quad & \left(2 \iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, dxdy + 2 \iint_\Omega u(x,y)^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \\
= \quad & \left(2 \iint_\Omega |\nabla u|^2 \, dxdy + 2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
= \quad & \sqrt{2} \left(\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, dxdy + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De (3.1) *y lo anterior se deduce que*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u(r,\theta)^2 d\theta \quad \leq \quad & 2\sqrt{2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, dxdy + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
= \quad & 2\sqrt{2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \\
= \quad & \sqrt{8}\|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\partial\Omega} u(r,\theta)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad \leq \quad & \sqrt[4]{8}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} \\
\leq \quad & \sqrt[4]{8}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} \\
= \quad & \sqrt[4]{8}\|u\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\left(\int_{\partial\Omega} u(r,\theta)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt[4]{8}\|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.2}$$

La integral del lado izquierdo de (3.2) es una integral sobre $\partial\Omega$, que corresponde a la norma de u en un espacio funcional llamado $L^2(\partial\Omega)$. A continuación se presenta la definición de este espacio funcional. De una manera sintética el Teorema de la Traza nos permitirá establecer una desigualdad de la forma

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega),$$

para lo cual primero debemos establecer esta desigualdad para el caso en que u es $C^\infty(\overline{\Omega})$ donde Ω es el conjunto $\mathbb{R}^2_+$ dado en la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *El conjunto $\mathbb{R}^2_+$ esta definido por*

$$\mathbb{R}^2_+ := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\right\}$$

Lema 3.1.1. *Para todo $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$*

$$\|v(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)}$$

Demostración. Sea $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Del teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\int_0^z \frac{\partial}{\partial y}[v(x,y)]^2\,dy = [v(x,z)]^2 - [v(x,0)]^2\,.$$

Así,

$$[v(x,0)]^2 = [v(x,z)]^2 - \int_0^z \frac{\partial}{\partial y}[v(x,y)]^2\,dy.$$

Haciendo que $z \longrightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} [v(x,0)]^2 &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}[v(x,y)]^2\,dy \\ &= -2\int_0^\infty v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} |v(x,0)|^2 &\leq 2\int_0^\infty |v(x,y)|\left|\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right|dy \\ &\leq \int_0^\infty \left[|v(x,y)|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right|^2\right]dy. \end{aligned}$$

Ahora, integrando respecto a x se deduce

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}[v(x,0)]^2\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \left[|v(x,y)|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right|^2\right]dydx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2_+}\left[|v(x,y)|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right|^2\right]dxdy. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \\ &\leq \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2_+)}. \end{aligned}$$

□

Definición 3.1.2. *Sea Ω un abierto de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Se define*

$$L^2(\partial\Omega) := \left\{ v : \partial\Omega \to \mathbb{R}, v \text{ es medible y} \int_{\partial\Omega} |v|^2\, dx < +\infty \right\}$$

Nota 3.1.1 (Equivalencia de normas). *$L^2(\partial\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} := \left\{ \int_{\partial\Omega} |v|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Además, si $\{\chi_i\}_{i=0}^N$ es el cubrimiento garantizado por la Proposición 2.3.2 y $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{\chi_i\}_{i=0}^N$, es decir

$$\phi_i \in C_0^\infty(\chi_i) \quad , \phi_i \geq 0 \quad \sum_{i=0}^{N} \phi_i = 1 \quad \text{en una vecindad de} \quad \overline{\Omega},$$

entonces la norma (3.3) *es equivalente con*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} := \left\{ \sum_{i=0}^{N} \|(\phi_i v \circ \psi_i^{-1})(x,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Ver [15, Lema 2.19]).

Teorema 3.1.1 (Desigualdad de trazas). *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 y sea*

$$\widetilde{\gamma}_0 : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

tal que

$$\widetilde{\gamma}_0(v) := v\Big|_{\partial\Omega}.$$

Entonces, existe $C > 0$ tal que

$$\|\widetilde{\gamma}_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Demostración. Sea $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Como $\partial\Omega$ es de clase C^1, la proposición (2.3.2), garantiza que existen abiertos χ_i y funciones ψ_i $(i = 1, \cdots, N)$ que satisfacen (2.27) y (2.28). Sean $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ una partición de la unidad subordinada a $\{\chi_i\}_{i=0}^N$ y

$$w_i := (\phi_i v \circ \psi_i^{-1})\Big|_{B^+} \qquad \forall i = 1, .., N,$$

la cual pertenece a $H^1(B^+)$, puesto que la composición ϕ_i, ψ_i^{-1} son suaves. Además, teniendo en cuenta que $supp\, w_i$ es cerrado y dado que

$$supp\, w_i \subset \overline{B^+} \subset \overline{B(0,1)} \subset B(0,2),$$

se deduce que el $supp\, w_i$ es acotado. Ahora, verificamos que $\widetilde{w}_i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widetilde{w}_i := \begin{cases} w_i(x,y), & \text{si} \quad (x,y) \in B^+ = \mathbb{R}^2_+ \cap B(0,1), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \backslash B^+, \end{cases}$$

pertenece a $H^1(\mathbb{R}^2_+)$. En efecto, sean $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$, $K = supp\, w_i$ y $K_1 = K \cap supp\, \phi$. Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ tal que $\psi \equiv 1$ en K_1. Luego,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2_+} \widetilde{w}_i \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \iint_{B^+} w_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= \iint_{K_1} w_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= \iint_{K_1} w_i \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= \iint_{B^+} w_i \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= \iint_{B^+} w_i \frac{\partial}{\partial x}(\psi\phi) - \iint_{B^+} w_i \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
&= \iint_{B^+} w_i \frac{\partial}{\partial x}(\psi\phi) - \iint_{K_1} w_i \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
&= \iint_{B^+} w_i \frac{\partial}{\partial x}(\psi\phi) \\
&= -\iint_{B^+} \frac{\partial w_i}{\partial x} \psi\phi \\
&= -\iint_{K_1} \frac{\partial w_i}{\partial x} \phi \\
&= -\iint_{\mathbb{R}^2_+} \widetilde{\frac{\partial w_i}{\partial x}} \phi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \widetilde{w}_i}{\partial x} = \widetilde{\frac{\partial w_i}{\partial x}} \in L^2(\mathbb{R}^2_+).$$

Así,

$$\widetilde{w}_i \in H^1(\mathbb{R}^2_+).$$

A continuación demostraremos que existen constantes $C_i > 0$ que dependen de ϕ_i, ψ_i tal que

$$\|\widetilde{w}_i\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)} \leq C_i \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}_i\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2_+)} &= \|\widetilde{w}_i\|^2_{H^1(B^+)} \\ &= \|w_i\|^2_{H^1(B^+)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|w_i\|^2_{L^2(B^+)} &= \iint_{B^+} \left|\phi_i(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 \left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 dxdy \\ &\leq \widetilde{C} \iint_{B^+} \left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 dxdy \\ &= \widetilde{C} \iint_{B^+} \left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 \left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right| \left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|^{-1} dxdy \\ &\leq C_1 \iint_{B^+} \left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 \left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right| dxdy \\ &= C_1 \iint_{\chi_i \cap \Omega} |v(x,y)|^2 dxdy \\ &\leq C_1 \iint_{\Omega} |v(x,y)|^2 dxdy \\ &= C_1 \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|v\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial w_i}{\partial x}\right\|^2_{L^2(B^+)} &= \iint_{B^+} \left|\frac{\partial}{\partial x}(\phi_i(\psi_i^{-1}(x,y))v(\psi_i^{-1}(x,y)))\right|^2 dxdy \\ &= \iint_{B^+} \left|\phi_i(\psi_i^{-1}(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y)) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 dxdy \\ &\leq \iint_{B^+} \left|\phi_i(\psi_i^{-1}(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 \\ &+ 2\iint_{B^+} \left|\phi_i(\psi_i^{-1}(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right| \left|\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))v(\psi_i^{-1}(x,y))\right| \\ &+ \iint_{B^+} \left|\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 dxdy \\ &\leq \widetilde{C}_1 \iint_{B^+} \left|\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2 + \widetilde{C}_2 \iint_{B^+} \left|\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right| \left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right| \\ &+ \widetilde{C}_3 \iint_{B^+} \left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|^{-1}=1$, el último término de la desigualdad anterior es igual a

$$\widetilde{C}_1\iint_{B^+}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|^{-1}$$

$$+\widetilde{C}_2\iint_{B^+}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right|\left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|^{-1}$$

$$+\widetilde{C}_3\iint_{B^+}\left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|^{-1}.$$

Así, puesto que $\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|^{-1}$ es acotado y por teorema de cambio de variables se deduce que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial w_i}{\partial x}\right\|^2_{L^2(B^+)} &\leq D_1\iint_{B^+}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|\\
&+ D_2\iint_{B^+}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(\psi_i^{-1}(x,y))\right|\left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|\\
&+ D_3\iint_{B^+}\left|v(\psi_i^{-1}(x,y))\right|^2\left|det\ \ D\psi_i^{-1}(x,y)\right|\\
&= D_1\iint_{\chi_i\cap\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right|^2dxdy+D_2\iint_{\chi_i\cap\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right|\left|v(x,y)\right|dxdy\\
&+ D_3\iint_{\chi_i\cap\Omega}\left|v(x,y)\right|^2dxdy\\
&\leq D_1\iint_{\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right|^2dxdy+D_2\iint_{\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right|\left|v(x,y)\right|dxdy\\
&+ D_3\iint_{\Omega}\left|v(x,y)\right|^2dxdy\\
&\leq D_1\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+D_2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}+D_3\|v\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leq D_1\|v\|^2_{H^1(\Omega)}+D_2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}+D_3\|v\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&= C_2\|v\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde

$$C_2=(D_1+D_2+D_3).$$

De lo anterior se deduce que

$$\left\|\frac{\partial w_i}{\partial x}\right\|^2_{L^2(B^+)}\leq C_2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{3.7}$$

y de forma similar se obtiene

$$\left\| \frac{\partial w_i}{\partial y} \right\|^2_{L^2(B^+)} \leq C_3 \|v\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3.8}$$

En conclusión, de (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) se obtiene (3.4), donde $C_i = \text{máx}\{C_1, C_2, C_3\}$. Por otro lado, del Lema (3.1.1) se tiene

$$\|\widetilde{w}_i(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\widetilde{w}_i\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)}. \tag{3.9}$$

Así, de (3.9) y (3.4) se deduce

$$\|\widetilde{w}_i(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_i \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Luego, usando la equivalencia de normas en $L^2(\partial\Omega)$ (ver observación 3.1.1), se tiene

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\gamma}_0\|^2_{L^2(\partial\Omega)} &\leq C \sum_{i=1}^{N} \|(\phi_i v \circ \psi_i^{-1})(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= C \sum_{i=1}^{N} \|\widetilde{w}_i(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{N} C_i^2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &= \left(C \sum_{i=1}^{N} C_i^2 \right) \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado.

□

Puesto que $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$, la aplicación $\widetilde{\gamma}_0$ puede extenderse por continuidad a una aplicación lineal y continua

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega).$$

Teorema 3.1.2 (De la traza). *Sea Ω un conjunto abierto, acotado y tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Entonces, existe un operador lineal acotado*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

tal que

$$\gamma_0(v) = v\Big|_{\partial\Omega} \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

En particular, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}. \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Demostración. Sea $v \in H^1(\Omega)$. Entonces, existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$\|\phi_n - v\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por teorema anterior (desigualdad de trazas)

$$\|\widetilde{\gamma}_0(\phi_n - \phi_m)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|\phi_n - \phi_m\|_{H^1(\Omega)},$$

donde el término a la derecha de la desigualdad anterior converge a cero cuando $n,m \to \infty$. Así, existe $z \in L^2(\partial\Omega)$ tal que

$$\widetilde{\gamma}_0(\phi_n) \to z \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Ahora, definiendo $\gamma_0(v) := z$ y haciendo uso del Teorema anterior (desigualdad de trazas)

$$\begin{aligned}
\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \|z\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\gamma}_0(\phi_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} C\|\phi_n\|_{H^1(\Omega)} \\
&= C\|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.1.1. *De ahora en adelante usaremos la siguiente notación:*

$$u\Big|_{\partial\Omega} := \gamma_0(u) \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Asi, por ejemplo, si $u, v \in H^1(\Omega)$, en lugar de escribir

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v),$$

escribiremos

$$\int_{\partial\Omega} uv.$$

Observación 3.1.2. *El rango de la función traza es denso en* $L^2(\partial\Omega)$*, es decir, el espacio*

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \left\{ \gamma_0(u) = u\Big|_{\partial\Omega} : u \in H^1(\Omega) \right\}$$

es denso en $L^2(\partial\Omega)$ *(ver [11, Observación 4.3.17]).*

A continuación se presenta el teorema de la traza definido sobre el espacio $H^2(\Omega)$.

Teorema 3.1.3 (De la traza en H^2). *Sea* Ω *un conjunto abierto, acotado y tal que* $\partial\Omega$ *es de clase* C^1*. Existe un operador lineal acotado*

$$\gamma_1 : H^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

tal que

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} \quad si \quad u \in H^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ *(*ν *es el vector normal exterior unitario a* $\partial\Omega$*). En particular, existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|\gamma_1(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2} \qquad \forall u \in H^2.$$

Demostración. Sea $u \in H^2(\Omega)$. Entonces $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in H^1(\Omega)$. Así, haciendo uso del teorema de la traza para $H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma_1 u(x,y) &= \nabla u(x,y) \cdot \nu(x,y) \\
&= \nu_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \nu_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\
&= \nu_1(x,y)\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + \nu_2(x,y)\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y),
\end{aligned}$$

para casi todo $(x,y) \in \partial\Omega$ (considerando a $\partial\Omega$ como conjunto de una dimensión). Asi, $\gamma_1 u$ está bien definida para todo $u \in H^2(\Omega)$. Además, en virtud de la continuidad de γ_0, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |\gamma_1 u(x,y)|^2 \, ds &= \int_{\partial\Omega} \left| \nu_1(x,y)\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + \nu_2(x,y)\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) \right|^2 ds \\
&\leq 2\int_{\partial\Omega} \left| \nu_1(x,y)\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) \right|^2 ds + 2\int_{\partial\Omega} \left| \nu_2(x,y)\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) \right|^2 ds \\
&\leq 2\int_{\partial\Omega} \left| \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) \right|^2 ds + 2\int_{\partial\Omega} \left| \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) \right|^2 ds \\
&\leq 2\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Asi,

$$\int_{\partial\Omega} |\gamma_1 u(x,y)|^2 \, ds \leq C\|u\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Es decir,

$$\|\gamma_1 u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} ds \leq C\|u\|^2_{H^2(\Omega)},$$

con lo cual concluye la demostración.

$\square$

Observación 3.1.3. *De ahora en adelante usaremos la siguiente notación:*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} := \gamma_1(u) \qquad \forall u \in H^2(\Omega).$$

Además, si $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H^2(\Omega)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_1(v) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}.$$

Observación 3.1.4. *Dado que $u \in H^1_0(\Omega)$, existe $\phi_m \in C^\infty_0(\Omega)$ tal que*

$$\phi_m \to u \qquad en \qquad H^1(\Omega).$$

Así, por la continuidad del operador traza se tiene

$$\gamma_0(\phi_m) \to \gamma_0(u) \qquad en \qquad L^2(\partial\Omega).$$

Pero,

$$\gamma_0(\phi_m) = \phi_m\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

con lo cual

$$\gamma_0(\phi_m) \to 0 \qquad en \qquad L^2(\partial\Omega).$$

Así, por unicidad del límite

$$\gamma_0(u) = 0 \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

Observación 3.1.5. *De la obsrevación anterior se deduce que $H^1_0(\Omega) \subseteq Ker(\gamma_0)$. Se puede probar que $Ker(\gamma_0) \subseteq H^1_0(\Omega)$ (ver [13, Teorema 2.2.4]).*

3.2. Fórmulas de Green

El Teorema de la traza nos permite generalizar las fórmulas de Green (1.13), (1.14) para funciones de $H^1(\Omega)$.

Teorema 3.2.1 (Integración por partes). *Sea Ω un conjunto abierto, acotado, de clase C^1. Si u, v son funciones de $H^1(\Omega)$, se tiene*

$$\iint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy = -\iint_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x}dxdy + \int_{\partial\Omega} uv\nu_1 ds \tag{3.10}$$

y

$$\iint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial y}dxdy = -\iint_\Omega v\frac{\partial u}{\partial y}dxdy + \int_{\partial\Omega} uv\nu_2 ds, \tag{3.11}$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

Demostración. Recordemos que (3.10) y (3.11) han sido establecidas para funciones de clase C^1 en la fórmula de integración por partes (Teorema 1.1.4). Sean $u, v \in H^1(\Omega)$. Por la densidad de $C^\infty(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ (ver Teorema 2.3.3), existen $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C^\infty(\overline{\Omega})$ convergen en $H^1(\Omega)$ a u y v respectivamente. De la integración por partes tenemos que

$$\iint_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial x}dxdy = -\iint_\Omega v_n\frac{\partial u_n}{\partial x}dxdy + \int_{\partial\Omega} u_n v_n \nu_1 ds \tag{3.12}$$

y

$$\iint_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial y}dxdy = -\iint_\Omega v_n\frac{\partial u_n}{\partial y}dxdy + \int_{\partial\Omega} u_n v_n \nu_2 ds. \tag{3.13}$$

Podemos pasar al límite cuando $n \to \infty$ en los dos primeros términos de (3.12) donde u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, v_n, $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ convergen respectivamente a u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, v, $\frac{\partial v}{\partial x}$ en $L^2(\Omega)$ y obtener:

$$\iint_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial x}dxdy \to \iint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy \qquad \iint_\Omega v_n\frac{\partial u_n}{\partial x}dxdy \to \iint_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x}dxdy. \tag{3.14}$$

Para pasar al límite en la última integral de (3.12), usamos la continuidad de la función traza $\gamma_\circ$, la cual permite verificar que $\gamma_\circ(u_n)$ (respectivamente $\gamma_\circ(v_n)$) converge a $\gamma_\circ(u)$ (respectivamente $\gamma_\circ(v)$) en $L^2(\partial\Omega)$. Es decir, teniendo en cuenta que

$$\int_{\partial\Omega} u_n v_n \nu_1 ds = \int_{\partial\Omega} \gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n)\nu_1 ds$$

se puede demostrar que

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n)\nu_1 ds \to \int_{\partial\Omega} \gamma_\circ(u)\gamma_\circ(v)\nu_1 ds. \tag{3.15}$$

En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Omega} [\gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(u)\gamma_\circ(v)]\, \nu_1 ds \right| &\leq \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(u)\gamma_\circ(v)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} \nu_1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \, \|\gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(u)\gamma_\circ(v)\|_{L^2(\partial\Omega)},
\end{aligned}$$

donde $|\partial\Omega|$ es la medida de Lebesgue unidimensional de $\partial\Omega$. Luego, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(u)\gamma_\circ(v)\|_{L^2\partial\Omega} &= \|\gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(v_n)\gamma_\circ(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ \|\gamma_\circ(v_n)\gamma_\circ(u) - \gamma_\circ(u)\gamma_\circ(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&= \|\gamma_\circ(v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_\circ(u_n) - \gamma_\circ(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ \|\gamma_\circ(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq C_1 \|\gamma_\circ(u_n) - \gamma_\circ(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\gamma_\circ(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(v)\|_{L^2(\partial\Omega)},
\end{aligned}$$

se deduce que

$$\|\gamma_\circ(u_n)\gamma_\circ(v_n) - \gamma_\circ(u)\gamma_\circ(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por lo tanto se obtiene (3.15) y así, de (3.14), (3.10) se deduce para funciones $u, v \in H^1(\Omega)$. De manera análoga se obtiene (3.11).

□

Teorema 3.2.2. *Sea Ω un conjunto abierto acotado de clase C^1.*

1. ***(Primera identidad de Green)****. Si $v \in H^1(\Omega)$ y $u \in H^2(\Omega)$ entonces*

$$\iint_\Omega v\Delta u dxdy = -\iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \tag{3.16}$$

2. ***(Segunda identidad de Green)****. Si $u, v \in H^2(\Omega)$ entonces*

$$\iint_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds.$$

Demostración. 1. Sean $v \in H^1(\Omega)$ y $u \in H^2(\Omega)$. Usando los teoremas de densidad (Teorema 2.3.3, Teorema 2.4.1) en $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$, existen sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(\overline{\Omega})$ tales que

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad H^2(\Omega) \qquad \text{y} \qquad v_n \to v \quad \text{en} \quad H^1(\Omega). \tag{3.17}$$

Además, en virtud de la primera identidad de Green para funciones suaves (Teorema 1.1.5) se tiene que

$$\iint_\Omega v_n \Delta u_n = -\iint_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla v_n) + \int_{\partial\Omega} v_n \frac{\partial u_n}{\partial \nu}.$$

Para concluir (3.16), basta deducir que

a) $\displaystyle\iint_\Omega v_n \Delta u_n \to \iint_\Omega v\Delta u.$

b) $\displaystyle\iint_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla v_n) \to \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$

c) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} v_n \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \to \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}.$

Para demostrar *a*), notemos que usando (3.17), se deduce

$$\begin{aligned}\iint_\Omega v_n \Delta u_n = \iint_\Omega v_n \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right) dxdy &\to \iint_\Omega v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy \\ &= \iint_\Omega v\Delta u dxdy.\end{aligned}$$

De igual forma,

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v_n = \iint_\Omega \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y}\frac{\partial u_n}{\partial y}\right) dxdy &\to \iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy,\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Y así, usando la continuidad de γ_0 y γ_1 se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v_n \frac{\partial u_n}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(v_n)\gamma_1(u_n) \quad &\to \quad \int_{\partial\Omega} \gamma_0(v)\gamma_1(u) \\ &= \quad \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}.\end{aligned}$$

2. Intercambiando u por v en la primera identidad de Green se obtiene

$$\iint_\Omega u\Delta v dxdy = -\iint_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u) dxdy + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds. \tag{3.18}$$

Asi, restando (3.18) de (3.16) se obtiene el resultado.

□

Capítulo 4

Formulación variacional y de Galerkin de la ecuación de Poisson

Para probar que los problemas de EDPs con valores en la frontera están bien planteados es decir, que tienen solución única y que depende continuamente de los datos, consideramos la formulación variacional presentada en el capítulo 1, ahora definida sobre los espacios de Sobolev, cuyas propiedades se estudiaron en los capítulos 1 y 2. En las siguientes secciones analizaremos las formulaciones variacionales para la ecuación de Poisson con diferentes tipos de condición en la frontera.

4.1. Condiciones de Frontera Dirichlet

Inicialmente consideremos el siguiente problema con valor en la frontera:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde Ω es un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y la función $f \in L^2(\Omega)$. A continuación observamos como se deduce la formulación variacional de (4.1) haciendo uso de las identidades de Green estudiadas en el capítulo anterior.

Paso 1. Establecimineto de la Formulación variacional. En este paso proponemos una formulación variacional del problema (4.1). Es decir, se desea hallar una forma bilineal B, una operador lineal L y un espacio de Hilbert H apropiado tal que (4.1) es equivalente a:

$$\begin{aligned}&\text{Encontrar } u\in H \text{ tal que}\\ &B(u,v)=L(v) \quad \forall v\in H.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Multiplicando la primera ecuación de (4.1) por una función $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene

$$-(\Delta u)\phi = fv\phi \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{4.3}$$

Ahora, integrando sobre Ω en ambos lados de la igualdad anterior y aplicando la primera identidad de Green (Teorema 3.2.2) se deduce

$$\iint_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi\, dxdy - \int_{\partial\Omega}\phi\frac{\partial u}{\partial\nu}ds = \iint_\Omega f\phi\, dxdy. \tag{4.4}$$

Puesto que $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ la ecuación (4.4) viene dada por

$$\iint_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi\, dxdy = \iint_\Omega f\phi\, dxdy \quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{4.5}$$

Ahora, dado $v\in H_0^1(\Omega)$ existe $\phi_m\in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\phi_m\to v \qquad \text{en} \quad H^1(\Omega).$$

Así, a partir de (4.5) obtenemos

$$\iint_\Omega(\nabla u\cdot\nabla\phi_m)dxdy = \iint_\Omega f\phi_m dxdy.$$

Haciendo que $m\to\infty$ en la igualdad anterior se deduce

$$\begin{aligned}\iint_\Omega(\nabla u\cdot\nabla\phi_m)dxdy &= \iint_\Omega\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\phi_m}{\partial x}dxdy+\iint_\Omega\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\phi_m}{\partial y}dxdy\\ &\longrightarrow \iint_\Omega\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dxdy+\iint_\Omega\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dxdy\\ &= \iint_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v)dxdy.\end{aligned} \tag{4.6}$$

y

$$\iint_\Omega f\phi_m dxdy \longrightarrow \iint_\Omega fvdxdy. \tag{4.7}$$

Luego, de (4.6) y (4.7) la formulación variacional para (4.1) queda determinada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&\text{Encontrar } u\in H_0^1(\Omega) \text{ tal que}\\ &\iint_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v)dxdy = \iint_\Omega fvdxdy \quad \forall v\in H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{4.8}$$

El siguiente paso verifica que la solución de (4.8) tiene solución única.

Paso 2. Solución de la formulación variacional. En primer lugar definimos $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},\ L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$B(u,v) = \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dxdy \quad \text{y} \quad L(v) = \iint_\Omega fvdxdy. \tag{4.9}$$

Así, el problema (4.8) puede escribirse como:

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.10}$$

En consecuencia, para demostrar existencia y unicidad de solución de (4.8), debemos verificar que B y L satisfacen las hipótesis del teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.2.4). A continuación verificamos estas hipótesis.

i. B es bilineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
B(\alpha u + \beta v, w) &= \iint_\Omega (\nabla(\alpha u + \beta v) \cdot \nabla w)\, dxdy \\
&= \iint_\Omega (\alpha \nabla u + \beta \nabla v) \cdot \nabla w dxdy \\
&= \iint_\Omega (\alpha \nabla u \cdot \nabla w) dxdy + \iint_\Omega (\beta \nabla v \cdot \nabla w) dxdy \\
&= \alpha \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w) dxdy + \beta \iint_\Omega (\nabla v \cdot \nabla w) dxdy \\
&= \alpha B(u,w) + \beta B(v,w).
\end{aligned}$$

De igual forma se obtiene el resultado respecto a la segunda componente.

ii. B es acotada. Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz verificamos que B es acotada sobre $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| = \left| \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dxdy \right| &\leq \iint_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v|\, dxdy \\
&= \iint_\Omega \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right| dxdy \\
&\leq \iint_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right| dxdy \\
&\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se da puesto que

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall w \in H^1(\Omega).$$

iii. B es elíptica. Haciendo uso de la desigualdad de Poincaré (ver proposición 2.3.5), para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$B(v,v) = \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dxdy = \iint_\Omega |\nabla u|^2 \, dxdy \geq \frac{1}{C} \iint_\Omega |v|^2 \, dxdy = \frac{1}{C} \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

De lo anterior se tiene que B una forma bilineal, acotada y elíptica. Ahora, veamos que L es un operador lineal acotado.

i. L es lineal.

$$\begin{aligned} L(\alpha u + \beta w) &= \iint_\Omega f(\alpha u + \beta w) dxdy \\ &= \iint_\Omega f(\alpha u) dxdy + \iint_\Omega f(\beta w) dxdy \\ &= \alpha \iint_\Omega f u dxdy + \beta \iint_\Omega f w dxdy \\ &= \alpha L(u) + \beta L(w). \end{aligned}$$

ii. L es acotado.

$$\begin{aligned} |L(v)| = \left| \iint_\Omega f v dxdy \right| &\leq \iint_\Omega |f v| \, dxdy \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

De todo lo anterior y puesto que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, todas la hipótesis del teorema de Lax-Milgram se satisfacen y así podemos concluir que existe una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulación variacional (4.8).

Paso 3. Equivalencia de ecuaciones. Este paso consiste en verificar que la solución de (4.8) es también solución del problema con valor en la frontera (4.1). Para realizarlo usamos la primera identidad de Green que nos llevó a la formulación variacional asumiendo que la solución u de (4.8) pertenece a $H^2(\Omega)$ y que el conjunto Ω es de clase C^1. Así, para $v \in H_0^1(\Omega)$ de la primera identidad de Green se tiene que

$$\iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dxdy = - \iint_\Omega v \Delta u dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \tag{4.11}$$

Luego, reemplazando (4.11) en (4.8) y teniendo en cuenta que $v=0$ en $\partial\Omega$ se deduce que

$$-\iint_\Omega v\Delta u dxdy = \iint_\Omega fvdxdy \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto,

$$\iint_\Omega (f+\Delta u)vdxdy = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

lo cual implica por Teorema 1.4.7 que $f+\Delta u = 0$ en casi toda parte en Ω [1] y así

$$-\Delta u = f \qquad \text{c.t.p en} \quad \Omega.$$

Ahora, dado que $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que $u=0$ en $\partial\Omega$ (ver Observación 3.1.4). Se presenta a continuación el Teorema cuya demostración se obtiene teniendo en cuenta los tres pasos analizados anteriormente.

Teorema 4.1.1. *Sean Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$. Existe una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la formulación variacional*

$$\iint_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v)dxdy = \iint_\Omega fvdxdy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.12}$$

Además, si $u \in H^2(\Omega)$, entonces u es solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad en\,\Omega, \\ u &= 0 \quad en\,\partial\Omega. \end{cases}$$

4.2. Condiciones de Frontera Neumann

Consideremos el siguiente problema de valor en la frontera

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde Ω es un conjunto abierto (no necesariamente acotado) del espacio $\mathbb{R}^2$, $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$. La ecuación (4.13) es una variante del Laplaciano donde hemos agregado un término de orden cero (es decir, que no esta afectado por derivadas). La formulación variacional para estudiar (4.13) es bastante diferente de la presentada en la anterior sección en cuanto al

[1] Dado que $u \in H^2(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$ se sigue que $f+\Delta u \in L^2(\Omega)$.

tratamiento de las condiciones en la frontera. A continuación presentamos los tres pasos que conforman el análisis de la formulación variacional de (4.13).

Paso 1. Obtención de la formulación débil. Sea $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Multiplicando por v a ambos lados de la primera ecuación de (4.13), se tiene

$$(-\Delta u + u)v = fv \qquad \text{en} \quad \Omega.$$

Integrando sobre Ω en ambos lados de la anterior igualdad y aplicando la primera identidad de Green, se sigue

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega fv &= \iint_\Omega -(\Delta u)v + \iint_\Omega uv \\
&= \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v + \iint_\Omega uv \\
&= \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} gv + \iint_\Omega uv \\
&= \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) - \int_{\partial\Omega} gv.
\end{aligned}$$

La igualdad anterior queda determinada de la siguiente forma

$$\iint_\Omega fv = \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) - \int_{\partial\Omega} gv \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.14}$$

Ahora, dado $v \in H^1(\Omega)$ existe $\phi_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$\phi_m \to v \quad \text{en} \quad H^1(\Omega).$$

Así, a partir de (4.14) obtenemos

$$\iint_\Omega f\phi_m = \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi_m + u\phi_m) - \int_{\partial\Omega} g\phi_m.$$

Haciendo que $m \to \infty$ en la igualdad anterior y notando que

1. $\iint_\Omega f\phi_m \to \iint_\Omega fv$
2. $\iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi_m + u\phi_m) \to \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)$
3. $\int_{\partial\Omega} g\phi_m \to \int_{\partial\Omega} gv,$

se obtiene:
$$\iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) = \iint_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv.$$
De lo anterior, la formulación variacional propuesta para (4.13) queda determinada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ &\iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) = \iint_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Paso 2. Solución de la formulación débil. En este paso verificamos que la formulación variacional (4.15) tiene única solución. Para esto hacemos uso del teorema de Lax-Milgram cuyas hipótesis se verifican definiendo $B : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$B(u,v) = \iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \quad \text{y} \quad L(v) = \iint_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv.$$

De manera similar que en el paso 2 del problema con condiciones frontera Dirichlet, se prueba que B es una forma bilineal, acotada y que L es lineal. Resta demostrar que B es elíptica y que L es acotado. En efecto,

$$\begin{aligned} B(v,v) &= \iint_\Omega (\nabla v \cdot \nabla v + vv) \\ &= \iint_\Omega (|\nabla v|^2 + |v|^2) \\ &= \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Ahora, probemos que L es un operador lineal acotado, para lo cual hacemos uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y del teorema de la traza:

$$\begin{aligned} |L(v)| = \left| \iint_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \right| &\leq \iint_\Omega |fv| + \int_{\partial\Omega} |gv| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &= K\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

De lo anterior y puesto que $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, se satisfacen todas las condiciones del teorema de Lax-Milgram. Así, garantizamos la existencia de una única solución $u \in H^1(\Omega)$ de la formulación variacional (4.15).

Paso 3. Equivalencia con la ecuación.

En este paso asumimos que la solución u de la formulación variacional (4.15) pertenece a $H^2(\Omega)$ y que Ω es de clase C^1. Ahora, de la primera identidad de Green (Teorema 3.2.2) se tiene que

$$\iint_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)dxdy = -\iint_\Omega v\Delta u dxdy + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds + \iint_\Omega uvdxdy. \tag{4.16}$$

Así, sustituyendo (4.16) en (4.15) se obtiene

$$-\iint_\Omega v\Delta u dxdy + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds + \iint_\Omega uvdxdy = \iint_\Omega fvdxdy + \int_{\partial\Omega} gvdxdy \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Es decir,

$$\iint_\Omega (\Delta u - u + f)vdxdy = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g\right) vds. \tag{4.17}$$

Ahora, si tomamos $v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$, el término a la derecha de la igualdad anterior se hace cero. Así

$$\iint_\Omega (\Delta u - u + f)vdxdy = 0 \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

y por Teorema 1.4.7

$$\Delta u - u + f = 0 \qquad \text{c.t.p en} \quad \Omega.$$

Por lo tanto,

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{c.t.p en} \quad \Omega.$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g\right) vds = 0 \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Asi, por densidad de $C^\infty(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ la anterior igualdad queda determinada de la siguiente forma

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g\right) vds = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ahora, por densidad de $\gamma_0(H^1(\Omega))$ en $L^2(\partial\Omega)$ (ver observación 3.1.2) y puesto que $\frac{\partial u}{\partial \nu} - g$ es ortogonal a $\gamma_0(H^1(\Omega))$, se deduce que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - g = 0 \quad \text{c.t.p} \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Los pasos anteriormente analizados garantizan la demostración del siguiente resultado.

Teorema 4.2.1. *Sean* Ω *un conjunto abierto acotado de clase* C^1 *de* $\mathbb{R}^2$*,* $f \in L^2(\Omega)$ *y* g *la función traza sobre* $\partial\Omega$ *de una función de* $H^1(\Omega)$*. Entonces, existe una unica solución* $u \in H^1(\Omega)$ *de la formulación variacional* (4.15)*. Además,* $u \in H^2(\Omega)$ *y es la solución de* (4.13) *en el sentido de que*

$$-\Delta u + u = f \quad c.t.p \quad en \quad \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad c.t.p \quad en \quad \partial\Omega.$$

4.3. Formulación de Galerkin

En esta sección presentamos el método de **Galerkin** el cual es la base para varios métodos numéricos usados para aproximar la solución de las formulaciones variacionales estudiadas anteriormente.

4.3.1. Esquema de Galerkin para una formulación variacional abstracta

Para introducir el método de Galerkin, consideramos la estructura general de una formulación variacional introducida en el Capítulo 1. Es decir, si H es un espacio de Hilbert real, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, acotada, elíptica y $L : H \to \mathbb{R}$ un operador lineal acotado, consideramos el problema variacional de encontrar $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H, \tag{4.18}$$

el cual tiene solución única por el teorema de Lax-Milgram. El esquema de Galerkin de (4.18) consiste en plantear este problema pero en un subespacio $H_m \subseteq H$ de dimensión finita m, es decir el problema (4.18) queda determinado como: Encontrar $u_m \in H_m$ tal que

$$B(u_m, v_m) = L(v_m) \quad \forall v_m \in H_m. \tag{4.19}$$

La solución del esquema de Galerkin (4.19) se calcula resolviendo un sistema matricial como se demuestra en el siguiente lema.

Lema 4.3.1. *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $H_m \subseteq H$ *un subespacio de dimensión finita* m*. Además, si* B *es una forma bilineal acotada elíptica sobre* H *y* L *es un operador lineal acotado sobre* H*, entonces, el esquema de Galerkin* (4.19) *tiene solución única. Además, esta solución* *puede obtenerse resolviendo un sistema lineal con una matriz definida positiva (y simétrica si B es simétrica)*

Demostración. La existencia y unicidad de la solución $u_m \in H_m$ del problema (4.19) se sigue del teorema de Lax-Milgram aplicado en H_m. Ahora, colocamos el problema en una forma más simple reduciendolo a un sistema lineal de ecuaciones. En efecto, sea $\{e_1,...,e_m\}$ una base de H_m. Entonces, existen escalares $\alpha_1,...,\alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j.$$

Luego, el problema (4.19) es equivalente a encontrar $\alpha_1,...,\alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, v_m\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j B(e_j, v_m) = L(v_m) \qquad \forall v_m \in H_m. \tag{4.20}$$

En particular para $v_m = e_i$ donde $i \in \{1,..,m\}$, el problema se propone de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } \alpha_1,...,\alpha_m \in \mathbb{R} \text{ tales que} \\ &\sum_{j=1}^{m} \alpha_j B(e_j, e_i) = L(e_i) \qquad \forall i \in \{1,..,m\}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ahora, definiendo la matriz $A = (a_{ij})_{m\times m}$ y los vectores $\alpha = (\alpha_j)_{m\times 1}$, $L = (l_i)_{m\times 1}$, donde

$$a_{ij} = B(e_j, e_i) \quad \text{y} \quad l_i = L(e_i).$$

La formulación variacional (4.20) se puede escribir como:

$$\begin{gathered} \text{Hallar } \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ tal que} \\ A\alpha = L. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Mostremos ahora que la matriz A es definida positiva, lo cual es posible gracias a la elipticidad de la forma bilineal B. En efecto, sea $\alpha \neq 0$. Entonces

$$\alpha^{\top} A \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_m a_{1m} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_m a_{2m} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \ldots + \alpha_m a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 B(e_1, e_1) + \alpha_2 B(e_2, e_1) + \ldots + \alpha_m B(e_m, e_1) \\ \alpha_1 B(e_1, e_2) + \alpha_2 B(e_2, e_2) + \ldots + \alpha_m B(e_m, e_2) \\ \vdots \\ \alpha_1 B(e_1, e_m) + \alpha_2 B(e_2, e_m) + \ldots + \alpha_m B(e_m, e_m) \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \begin{pmatrix} B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, e_1\right) \\ B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, e_2\right) \\ \vdots \\ B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, e_m\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, e_1\right) + \alpha_2 B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, e_2\right) + \cdots + \alpha_m B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, e_m\right) \\ &= B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, \alpha_1 e_1\right) + B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, \alpha_2 e_2\right) + \cdots + B\left(\sum_{j=1}^{m} u_j e_j, \alpha_m e_m\right) \\ &= B\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j\right) \geq \nu \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \right\|^2 > 0. \end{aligned}$$

En conclusión, por ser A definida positiva, A es no singular y así (4.22) tiene solución única.

$\square$

El error entre la solución exacta $u \in H$ y la solución aproximada $u_m \in H_m$ puede acotarse por la distancia de u al espacio finito dimensional H_m. Por lo tanto, el error dependerá de lo bien que el subespacio vectorial H_m aproxime el espacio vectorial original H.

Lema 4.3.2 (Lema de Céa). *Sean H un espacio de Hilbert y $\{H_m\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H. Además, sea $L : H \to \mathbb{R}$ un operador lineal acotado y*

$B : H\times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada elíptica, es decir existen $M > 0$, $\nu > 0$ tales que

$$|B(v,w)| \leq M\,\|v\|\,\|w\| \quad \forall v,w \in H$$

y

$$B(u,u) \geq \nu\,\|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Si u es la solución de (4.18) *y u_m la solución de* (4.19)*. Entonces,*

$$\|u-u_m\| \leq \frac{M}{\nu}\inf_{v_m\in H_m}\|u-v_m\|. \tag{4.23}$$

Demostración. En primer lugar, notemos que (4.18) y (4.19) implican:

$$B(u,v_m) = L(v_m) \quad , \quad B(u_m,v_m) = L(v_m) \qquad \forall v_m \in H_m$$

y asi,

$$B(u-u_m,v_m) = B(u,v_m) - B(u_m,v_m) = L(v_m) - L(v_m) = 0 \quad \forall v_m \in H_m.$$

En particular,

$$B(u-u_m,v_m-u_m) = 0 \qquad \forall v_m \in H_m.$$

Ahora, usando la elipticidad de B se tiene que para todo $v_m \in H_m$ se cumple

$$\begin{aligned}
\nu\|u-u_m\|^2 &\leq B(u-u_m,u-u_m)\\
&= B(u-u_m,u-v_m+v_m-u_m)\\
&= B(u-u_m,u-v_m) + B(u-u_m,v_m-u_m)\\
&= B(u-u_m,u-v_m).
\end{aligned}$$

Luego, dado que B es acotada, de lo anterior se deduce

$$\nu\|u-u_m\|^2 \leq M\|u-u_m\|\|u-v_m\|.$$

La desigualdad anterior es trivial si $u = u_m$. Ahora, supondiendo que $\|u-u_m\| \neq 0$ se tiene que

$$\|u-u_m\| \leq \frac{M}{\nu}\|u-v_m\| \quad \forall v_m \in H_m.$$

Luego, tomando el infimo con respecto a $v_m \in H_m$ en la desigualdad anterior se obtiene el resultado.

□

Lema 4.3.3. *Asumiendo que existe un subespacio $Q \subset H$ denso en H, además de un operador $I_m : H \to H_m$ (llamado operador interpolación) tal que*

$$\lim_{m\to\infty} \|v - I_m(v)\| = 0 \quad \forall v \in Q. \tag{4.24}$$

Entonces, la solución u_m del esquema de Galerkin (4.19) *converge a la solución u de la formulación variacional* (4.18)*, es decir,*

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\| = 0.$$

Demostración. Sea $u \in H$ la solución de la formulación variacional (4.18) y $\varepsilon > 0$ cualquiera. Sean $\nu, M > 0$ tales que (4.23) se verifica. Por densidad de Q en H existe $v \in Q$ tal que

$$\|u - v\| < \frac{\nu}{2M}\varepsilon. \tag{4.25}$$

Además, de (4.24) existe $N > 0$ tal que $m \geq N$ implica

$$\|v - I_m(v)\| < \frac{\nu}{2M}\varepsilon. \tag{4.26}$$

Así, del lema de Céa y de (4.25), (4.26) se tiene que para $m \geq N$ se cumple

$$\begin{aligned}
\|u - u_m\| &\leq \frac{M}{\nu} \inf_{v\in H_m} \|u - v\| \\
&\leq \frac{M}{\nu} \|u - I_m(v)\| \qquad \forall v \in Q \\
&\leq \frac{M}{\nu} \left[\|u - v\| + \|v - I_m(v)\|\right] \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\| = 0.$$

□

Observación 4.3.1. *A partir del Lema anterior se deduce que para encontrar soluciones de la formulación variacional de Galerkin que aproximen a la solución de una formulación variacional de un problema es necesario definir operadores de interpolación que satisfacen* (4.24)*. En el caso particular de formulaciones variacionales de EDP (como las estudiadas en las secciones 4.1 y 4.2), los espacios finito dimensionales más populares H_m, del espacio de Sobolev*

$H^1(\Omega)$, son llamados Espacios de elementos finitos de Lagrange y el operador de interpolación es llamado operador de interpolación de Lagrange. Estos espacios de elementos finitos están formados por funciones contínuas, que son polinomios a trozos y constituyen la base de un método numérico muy importante para calcular soluciones de EDP llamado Método de elementos finitos. Los aspectos teóricos y computacionales de este método constituyen hoy en día un área de gran interes en la matemática aplicada, por lo cual pueden ser objeto de un trabajo futuro.

Conclusiones

1. Se estudiaron las principales propiedades de los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$. En particular se demostró que las funciones infinitamente diferenciables son densas en estos espacios.

2. Se demostraron los teoremas de trazas para $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$, que permiten restringir, en cierto sentido, funciones en estos espacios a $\partial\Omega$.

3. En virtud de la densidad de funciones $C^\infty(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$, y de los teoremas de las trazas, se generalizaron las identidades de Green para funciones suaves en estos espacios.

4. Se dedujeron las formulaciones variacional y de Galerkin de la ecuación de Poisson donde garantizamos existencia y unicidad de solución gracias al teorema de Lax-Milgram.

5. Bajo ciertas hipótesis se demostró la convergencia del método de Galerkin.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ADAMS, ROBERT. *Sobolev Spaces.* Academic Press. New York. 1975.

[2] APOSTOL, TOM. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté. Barcelona. 1988.

[3] APOSTOL, TOM. *Calculus Vol.II.* Editorial Reverté. Colombia. 1988.

[4] BRÉZIS, HAIM. *Análisis funcional.* Alianza Editorial. Madrid. 1984.

[5] BURENKOV V.I. *Sobolev Spaces on Domains.*

[6] E. KREYSZIG. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley Sons. USA. 1978.

[7] EVANS, LAWRENCE C. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 1998.

[8] GATICA, N. GABRIEL *Algunos Aspectos Básicos del Método de Elementos Finitos.* Articulo Divulgativo. Cubo Matemática Educacional, vol.1, $n^\circ 1$, pp.129-162. Chile. 1999.

[9] GILBARG, DAVID; TRUDINGER, NEIL S. *Elliptic Partial Differential Equations Of Second Order.* Springer. Alemania. 1977.

[10] GOCKENBACH, MARK S. *Understandig and implementing the finite element method.* Philadelphia: SIAM. 2006.

[11] GREGOIRE, ALLAIRE *Numerical Analysis and Optimization.* Oxford University Press Inc. New York. 2007.

[12] KOLMOGOROV, A.N. FOMIN, SV. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Editorial Nauka. Moscú. 1989.

[13] S. KESAVAN. *Topics in Functional Analysis and Aplications.* John Wiley Sons. New Delhi, india. 1989.

[14] MUNKRES, R. JAMES. *Analysis on Manifolds.* Addison Wesley. Redwood city. 1995.

[15] STEINBACH, OLAF. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems.* Springer. New York. USA. 1995.