Primos Absolutos

SAMUEL CASTRO ROJAS
JAHNN CARDEY GÓMEZ GARZÓN

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS Y LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2012

Primos Absolutos

SAMUEL CASTRO ROJAS
JAHNN CARDEY GÓMEZ GARZÓN

Trabajo de grado en modalidad de seminario de grado como requisito parcial para optar al título de Matemático y Licenciado en Matemáticas

Director:
Dr. CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS Y LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2012

Nota de Aceptación

Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte

Mg. Maribel Del Carmen Díaz Noguera

Jurado

Mat. Freddy William Bustos Rengifo

Jurado

Popayán, 25 de abril, 2012

Dedicatoria

A mi Madre Maria Del Pilar Garzón V. A mi Padre Jesús Antonio Gómez y a mis hermanos. Por brindarme su apoyo, durante estos años, estó es un fruto de su esfuerzo, sacrificio y dedicación, muchas gracias.

Jahnn Cardey Gómez Garzón

Agradecimientos

Agradecemos a Dios por darnos la fortaleza y sabiduría para poder culminar con éxito esta etapa de nuestra vida, a nuestras familias por brindarnos el apoyo necesario durante este proceso.
A nuestro director, el Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte, porque con su apoyo, motivación, conocimientos y dedicación fue posible finalizar este proyecto y crecer en varios aspectos de nuestras vidas.
A nuestros Jurados Maribel Díaz Noguera y Freddy William Bustos por brindarnos un espacio para presentar los avances del trabajo y sus valiosos aportes en este proceso.
Al profesor Diego Ruiz por sus aportes y a todos nuestros compañeros, amigos que durante estos años estuvieron brindándonos todo su apoyo.
A Marcela Andrade por su valiosa compañía, y apoyo incondicional (Jahnn).

Jahnn Cardey Gómez Garzón y Samuel Castro Rojas

Índice general

Introducción

A través de la historia de las matemáticas el estudio de los números primos ha atraído la atención de los matemáticos y aficionados de todo el mundo ya que tienen una extraña distribución sobre la recta numérica en la cual hay lugares (intervalos) donde abundan y otros donde escasean, muchas personas los denominan misteriosos porque no existe una regla que determine su ubicación específica. En los últimos años ha existido un interés sobre los números primos cuyos dígitos se pueden reordenar para producir otros números primos.

En este trabajo se considera una clase especial de números primos denominados primos absolutos o primos permutables.

Un primo absoluto es un número natural que es primo y después de cualquier permutación de sus dígitos (en representación decimal) el número obtenido sigue siendo primo.

En [2], [3], [5], [6] y [7] se presentan algunos conceptos y resultados básicos relacionados con el tema. Como resultado del análisis y estudio en el seminario de grado denominado ***primos absolutos*** se presenta este informe que estructura y unifica lo hallado en los artículos de estudio. Este contiene resultados, ejemplos y tablas que muestran en forma clara el desarrollo del tema.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Conceptos y notación

En esta sección se presentan algunas definiciones básicas y ejemplos relacionados con la temática desarrollada en este informe.

Definición 1.1. *Sea m un entero positivo, un conjunto de m enteros $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ se llama un* ***sistema completo de residuos módulo m (SRC)****, si ningún par de ellos son congruentes módulo m, es decir:*

$$a_i \not\equiv a_j \pmod{m}, \text{ para } i, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ con } i \neq j$$

Teorema 1.1. *Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ es un sistema completo de residuos módulo m, b cualquier entero y k un entero primo relativo con m entonces $\{ka_1 + b, ka_2 + b, \ldots, ka_m + b\}$ también es un sistema completo de residuos módulo m.*

Ejemplo 1.1. El conjunto $\{\ 10,\ -4,\ -13,\ 18,\ 24\ \}$ es un sistema completo de residuos módulo 5, el cual se comporta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}10 &\equiv 0(\text{mód } 5),\\ -4 &\equiv 1(\text{mód } 5),\\ -13 &\equiv 2(\text{mód } 5),\\ 18 &\equiv 3(\text{mód } 5),\\ 24 &\equiv 4(\text{mód } 5).\end{aligned}$$

Teorema 1.2. *(Teorema de Euler) Sean m y a enteros, con $m > 0$, si $\text{mcd}(a, m) = 1$ entonces*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1(\text{mód } m),$$

donde ϕ es la función indicatriz de Euler, es decir

$$\phi(m) := |\{a : 1 \leq a \leq m, \text{mcd}(a, m) = 1\}|.$$

Corolario 1.1. *(Teorema de Fermat) Si p es un número primo y $\text{mcd}(a, p) = 1$ entonces*

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mód } p).$$

Por el Teorema de Euler, el conjunto

$$\left\{k \in \mathbb{Z}^+ : a^k \equiv 1(\text{mód } m)\right\} \subseteq \mathbb{Z}^+ \tag{1.1}$$

es no vacío, con lo que se garantiza que dicho conjunto tiene elemento mínimo (único).

Definición 1.2. *Sean m y a enteros tales que $m > 0$, $\text{mcd}(a, m) = 1$. El elemento mínimo del conjunto (1.1) se llama el orden de a módulo m y se denota $\text{Ord}_m(a)$, es decir*

$$\text{Ord}_m(a) := \textit{mín}\left\{k \in \mathbb{Z}^+ : a^k \equiv 1(\text{mód } m)\right\}.$$

Éste entero positivo tiene la siguiente propiedad:

Para $k \in \mathbb{Z}^+$, $a^k \equiv 1(\text{mód } m)$ si y sólo si $\text{Ord}_m(a)$ divide a k.

Definición 1.3. ***Raíz primitiva*** *Sean m y a, con $m > 0$, si $\mathrm{Ord}_m(a) = \phi(m)$ entonces a se llama una raíz primitiva módulo m. En particular, si p es un número primo y $\mathrm{Ord}_p(a) = p - 1$ entonces a es una raíz primitiva módulo p.*

Ejemplo 1.2. 3 es raíz primitiva módulo 7. En efecto $\mathrm{Ord}_7(3) = 6$ ya que $3^1 \equiv 3 \pmod{7}$, $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$, $3^3 \equiv 6 \pmod{7}$, $3^4 \equiv 4 \pmod{7}$, $3^5 \equiv 5 \pmod{7}$, $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ y $\phi(7) = 6$, luego $\mathrm{Ord}_7(3) = 6 = \phi(7)$.

Teorema 1.3. *Dado un entero $b \geq 2$, todo entero positivo k se escribe de manera única en la forma $k = c_{n-1}b^{n-1} + c_{n-2}b^{n-2} + \ldots + c_1 b + c_0$, con $c_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c_j < b$ y $c_{n-1} \neq 0$. Para indicar esta igualdad se escribe $k = (c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1 c_0)_b$ y es la representación de k en la base b.*

Ejemplo 1.3. El número 158 tiene representación única en base 4 de la siguiente forma: $2 * 4^3 + 1 * 4^2 + 3 * 4 + 2 = 158$. Luego $(2132)_4$ es la representación de 158 en la base 4.

Notación 1.1. La expresión $B_n\,(a, b, i) := a \cdot R_n + (b - a)10^i$, con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$ y $n, i \in \mathbb{Z}$, representa un número en el cual a aparece $(n - 1)$ veces, b una sola vez en la posición i-esima, con $0 \leq i \leq n - 1$, contando de derecha a izquierda y n es el número de cifras decimales.
Si $i = 0$ se usa la notación $B_n\,(a, b) := aaa\ldots aaab$.

Ejemplo 1.4. La expresión $B_9\,(3, 7)$ representa al número 333333337 compuesto de *9* cifras donde el 3 aparece 8 veces y el 7 una vez al final.

CAPÍTULO 2

Resultados iniciales

2.1. Definiciones

Comenzamos presentando la definición de primo absoluto, repunit y algunos ejemplos

Definición 2.1. *Un **primo absoluto**, también conocido como **primo permutable**, es un número natural que es primo y después de cualquier permutación de sus dígitos (en representación decimal) el número obtenido sigue siendo primo.*

Ejemplo 2.1. En [7] se establece que los primos absolutos menores que 1000 son:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7$$

$$11,\ 13,\ 17,\ 31,\ 37,\ 71,\ 73,\ 79,\ 97$$

$$113,\ 131,\ 311,\ 337,\ 373,\ 733,\ 199,\ 919,\ 991$$

en donde se observa que a excepción del 2 y el 5 los restantes primos absolutos contienen en su representación algunos de los cuatro dígitos 1, 3, 7 y 9.

Definición 2.2. *Sean b, n enteros positivos, $b \geq 2$. Un* ***repunit*** R_n^b *es un número conformado por n copias del dígito 1 en base b. En particular si $b = 10$ se usa la notación R_n sin escribir la base como es usual en nuestro sistema numérico natural. Así*

$$R_n := \frac{10^n - 1}{10 - 1} = 1 \ldots 1_{(n-veces)} \quad , \text{ para } n \geq 1.$$

Ejemplo 2.2. La siguiente es una lista de los *primeros repunits*

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \\ R_2 &= 11 \\ R_3 &= 111 \\ R_4 &= 1111 \\ &\vdots \\ R_n &= 1 \ldots 1_{(n\ veces)}. \end{aligned}$$

Los primos repunits son un subconjunto trivial de primos absolutos.

Ejemplo 2.3. Según [6] y [9] como primos repunits se conocen:

$$R_2 = 11, \quad R_{19} = 1111111111111111111, \quad R_{23}, \quad R_{317}, \quad R_{1031},$$

y en [10] se tiene como posibles primos repunits [1] a: $\quad R_{49081}, \quad R_{86453}, \quad R_{109297} \quad y \quad R_{270343}.$

En [10] se ha conjeturado que existen infinitos primos repunits.

2.2. Candidatos a primos absolutos

En esta sección se presentan tres lemas que permiten reducir el número de candidatos a primos absolutos.

[1] Un posible primo repunit es un repunit R_n, donde n es primo, del cual se cree que es primo pero no se tiene una prueba.

Lema 2.1. *Todo primo absoluto, excepto el 2 y el 5, está formado sólo por dígitos que pertenecen al conjunto* $\{1, 3, 7, 9\}$.

Demostración. Supongamos que un primo absoluto contiene alguno de los dígitos 0, 2, 4, 5, 6 u 8. Luego, al realizar el cambio de dígitos mediante alguna permutación, se tiene alguno de los dígitos 0, 2, 4, 5, 6 u 8 en la última posición, dando como resultado un número natural múltiplo de 2 o de 5. Esto permite obtener un número natural que no es primo, por lo tanto el supuesto inicial es falso y el lema queda probado.

□

Lema 2.2. *Un primo absoluto no contiene todos los dígitos 1,3,7 y 9 al mismo tiempo.*

Demostración. Sea N un número cuya representación decimal contiene todos los dígitos 1, 3, 7 y 9 .

Vamos a mover estos cuatro dígitos a la derecha hasta obtener un número natural

$$N_0 = C_1 ... C_{n-4}7931 = L * 10^4 + 7931,$$

donde la notación $C_1 ... C_n$ se utiliza para denotar el número

$$C_1 10^{n-1} + C_2 10^{n-2} + ... + C_{n-1}10 + C_n, \text{ con } 0 \leq C_i < 10 \text{ para } i = 1, \ldots, n \text{ ,}$$

es decir que los C_i son los dígitos decimales de N. De las $4! = 24$ posibles permutaciones del número 7931 se obtiene:

$$\begin{array}{llll}
1379 \equiv 0 \pmod 7, & 3179 \equiv 1 \pmod 7, & 7139 \equiv 6 \pmod 7, & 9137 \equiv 2 \pmod 7, \\
1397 \equiv 4 \pmod 7, & 3197 \equiv 5 \pmod 7, & 7193 \equiv 4 \pmod 7, & 9173 \equiv 3 \pmod 7, \\
1739 \equiv 3 \pmod 7, & 3719 \equiv 2 \pmod 7, & 7319 \equiv 4 \pmod 7, & 9317 \equiv 0 \pmod 7, \\
1793 \equiv 1 \pmod 7, & 3791 \equiv 4 \pmod 7, & 7391 \equiv 6 \pmod 7, & 9371 \equiv 5 \pmod 7, \\
1937 \equiv 5 \pmod 7, & 3917 \equiv 4 \pmod 7, & 7913 \equiv 3 \pmod 7, & 9713 \equiv 4 \pmod 7, \\
1973 \equiv 6 \pmod 7, & 3971 \equiv 2 \pmod 7, & 7931 \equiv 0 \pmod 7, & 9731 \equiv 3 \pmod 7.
\end{array}$$

De lo anterior se toman los siguientes K_i

$$K_0 = 7931 \equiv 0(\text{mód } 7),$$
$$K_1 = 1793 \equiv 1(\text{mód } 7),$$
$$K_2 = 9137 \equiv 2(\text{mód } 7),$$
$$K_3 = 7913 \equiv 3(\text{mód } 7),$$
$$K_4 = 7193 \equiv 4(\text{mód } 7),$$
$$K_5 = 1937 \equiv 5(\text{mód } 7),$$
$$K_6 = 7139 \equiv 6(\text{mód } 7),$$

los cuales tienen residuos diferentes en la división por 7, de aquí

$$K_i \equiv i(\text{mód } 7), \text{ con } \quad i = 0, ..., 6,$$

forman un sistema completo de residuos módulo 7.
Sea $N_i = L*10^4 + K_i \equiv L*10^4 + i(\text{mód } 7), \quad i = 0, ..., 6$. Los 7 enteros $N_i = L \times 10^4 + K_i$, para $i = 0, ..., 6$, también forman un sistema completo de residuos módulo 7 (Teorema 1.1), por tanto uno de ellos es un múltiplo de 7, lo cual garantiza en forma general la existencia de un número N_i que al dividirlo por 7 de residuo cero.
Dado que estos números enteros pueden obtenerse a partir de N mediante una permutación de sus dígitos, se concluye que N no es un primo absoluto. De esta manera ningún primo absoluto contiene todos los dígitos 1, 3, 7 y 9 al mismo tiempo.

□

Lema 2.3. *Ningún primo absoluto contiene tres dígitos $\boldsymbol{a}$ y dos dígitos $\boldsymbol{b}$ simultáneamente, siempre que $\boldsymbol{a}$ sea distinto de $\boldsymbol{b}$.*

Demostración. Supongamos que un entero N contiene los dígitos a, a, a, b, b en su representación con $a \neq b$. Mediante permutaciones de los dígitos de N se obtiene

$$N_{i,j} = C_1...C_{n-5}aaaaa + (b - a)(10^i + 10^j), \text{con } \ 4 \geq i > j \geq 0.$$

De aquí los enteros que se generan de $(10^i + 10^j)$,con $4 \geq i > j \geq 0$, son

$$\begin{array}{ll} 10^4+10^0, & 10^4+10^1, \\ 10^4+10^2, & 10^4+10^3, \\ 10^3+10^0, & 10^3+10^1, \\ 10^3+10^2, & 10^2+10^0, \\ 10^2+10^1, & 10^1+10^0, \end{array}$$

así los enteros:

$$\left(10^4+10^1\right),\left(10^3+10^2\right),\left(10^3+10^1\right),\left(10^2+10^0\right),\left(10^1+10^0\right),\left(10^4+10^0\right),\left(10^4+10^2\right),$$

dan residuos diferentes en la división por 7, que son respectivamente 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, formando un sistema completo de residuos módulo 7.

A continuación se muestran los posibles valores para $(b-a)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$ y $a \neq b$,

$$\begin{array}{ll} 1-3=-2, & 7-1=\ 6, \\ 1-7=-6, & 7-3=\ 4, \\ 1-9=-8, & 7-9=-2, \\ 3-1=\ 2, & 9-1=\ 8, \\ 3-7=-4, & 9-3=\ 6, \\ 3-9=-6, & 9-7=\ 2. \end{array}$$

De aquí se tiene que $(b-a) \in \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8\}$, luego $(b-a)$ es primo relativo con 7 para todo $a,b \in \{1,3,7,9\}$ y $a \neq b$. Así del Teorema 1.1 se tiene que los enteros

$$(b-a)\left(10^4+10^1\right), (b-a)\left(10^3+10^2\right),\ (b-a)\left(10^3+10^1\right),\ (b-a)\left(10^2+10^0\right),$$
$$(b-a)\left(10^1+10^0\right),\ (b-a)\left(10^4+10^0\right) \text{ y } (b-a)\left(10^4+10^2\right),$$

forman un sistema completo de residuos módulo 7, al igual que por el Teorema 1.1 los siguientes enteros también forman un sistema completo de residuos módulo 7

$$N_{4,1} = C_1 ... C_{n-5} aaaaa + (b-a)(10^4 + 10^1),$$
$$N_{3,2} = C_1 ... C_{n-5} aaaaa + (b-a)(10^3 + 10^2),$$
$$N_{3,1} = C_1 ... C_{n-5} aaaaa + (b-a)(10^3 + 10^1),$$
$$N_{2,0} = C_1 ... C_{n-5} aaaaa + (b-a)(10^2 + 10^0),$$
$$N_{1,0} = C_1 ... C_{n-5} aaaaa + (b-a)(10^1 + 10^0),$$
$$N_{4,0} = C_1 ... C_{n-5} aaaaa + (b-a)(10^4 + 10^0),$$
$$N_{4,2} = C_1 ... C_{n-5} aaaaa + (b-a)(10^4 + 10^2).$$

De aquí existe un $N_{i,j}$ que es un múltiplo de 7.

Por lo tanto queda demostrado que ningún primo absoluto contendrá tres dígitos a y dos dígitos b simultáneamente, con $a \neq b$.

□

Los anteriores resultados permiten concluir, hasta el momento, que un primo absoluto N debe contener en su representación solamente los dígitos 1,3,7 y 9, pero estos no pueden aparecer todos al mismo tiempo ni tampoco aparecer tres dígitos a y dos dígitos b en su representación con $a \neq b$ y $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$. O sea que los primos absolutos, dependiendo de la cantidad de sus dígitos toman una de las siguientes formas

1. Si la cantidad de dígitos es cuatro, las posibilidades son:

   a) $aaab$

   b) $aabb$

   c) $aabc$

2. Si la cantidad de dígitos es cinco, las posibilidades son:

   a) $aaaab$

   b) $aabbc$

   c) $aaabc$

3. Si la cantidad de dígitos es seis, las posibilidades son:

   a) $aaaaab$

   b) $aabbcc$

   c) $aaaabc$

4. Si la cantidad de dígitos es mayor que seis, las posibilidades son:

   a) $aaa \ldots ab$

   b) $aaa \ldots abc$

Donde $a, b, c \in \{1, 3, 7, 9\}$ y $a \neq b \neq c$.

Es con base en esto que se diseñaron las tablas de la siguiente sección.

2.3. Confirmación de que no existen primos absolutos de 4, 5 o 6 dígitos

Basados en los lemas presentados hasta el momento, se muestran las siguientes tablas, donde se verifica que no existen primos absolutos de 4, 5 o 6 dígitos. Cada tabla está compuesta de 4 columnas, la primera contiene el número candidato a primo absoluto, la segunda indica si el número tiene divisores o no; de no tener, en la tercera columna aparece una permutación del candidato de la columna 1 que no es primo, en la cuarta columna se tendrá algún divisor para este nuevo número de la columna 3.

Nota 2.1. En la primera columna de las siguientes tablas aparecen candidatos a primos absolutos de la forma que se indican en la descripción al final de cada una de ellas. Por ejemplo en la Tabla 1 solamente aparece el entero 1113 y se excluyen sus permutaciones.

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
1113	3	-	-
1117	no tiene	1711	29
1137	3	-	-
3331	no tiene	3133	13
3337	47	-	-
3317	31	-	-
7771	19	-	-
7773	3	-	-
7731	3	-	-
1133	11	-	-
1177	11	-	-
3377	11	-	-
1119	3	-	-
1179	3	-	-
7779	3	-	-
7719	3	-	-
9991	97	-	-
9997	13	-	-
9917	47	-	-
1199	11	-	-
7799	11	-	-
1139	17	-	-
3339	3	-	-
3319	no tiene	3193	31

Tabla 1. Candidatos a primos absolutos de 4 dígitos, de la forma

$aaab, aabb, aabc$, con $a, b, c \in \{1, 3, 7, 9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
9993	3	-	-
9913	23	-	-
3399	3	-	-
3379	31	-	-
7739	71	-	-
9937	19	-	-

Tabla 2. Continuación de la Tabla 1.

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
11113	no tiene	13111	7
11117	no tiene	11711	7
11119	no tiene	11191	19
11137	7	-	-
11179	7	-	-
11139	3	-	-
11337	3	-	-
11339	17	-	-
11773	61	-	-
11779	no tiene	11797	47
11993	67	-	-
11997	3	-	-
33331	no tiene	33313	7
33337	17	-	-
33339	3	-	-

Tabla 3. Candidatos a primos absolutos de 5 dígitos, de la forma $aaaab, aabbc, aaabc$, con $a, b, c \in \{1, 3, 7, 9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
33317	no tiene	33137	13
33319	11	-	-
33379	29	-	-
33771	3	-	-
33779	17	-	-
33991	19	-	-
33997	no tiene	33979	11
77771	83	-	-
77773	no tiene	77737	11
77779	13	-	-
77713	no tiene	77173	229
77719	no tiene	77179	113
77739	3	-	-
77991	3	-	-
77993	23	-	-
99991	no tiene	99919	163
99993	3	-	-
99997	19	-	-
99913	11	-	-
99937	37	-	-
99917	41	-	-

Tabla 4. Continuación de la Tabla 3.

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
111113	23	-	-
111117	3	-	-
111119	no tiene	111911	17
333331	no tiene	333313	149
333337	no tiene	333373	389
333339	3	-	-
777771	3	-	-
777773	709	-	-
777779	113	-	-
999991	17	-	-
999993	3	-	-
999997	757	-	-
113377	11	-	-
117799	11	-	-
337799	11	-	-
113399	11	-	-
111137	13	-	-
333317	19	-	-
777713	733	-	-
111139	7	-	-
333319	7	-	-
999913	19	-	-
111179	73	-	-
777719	167	-	-

Tabla 5. Candidatos a primos absolutos de 6 dígitos, de la forma

$aaaaab, aabbcc, aaaabc$, con $a, b, c \in \{1, 3, 7, 9\}$

NUMERO	DIVISOR	PERMUTACION	DIVISOR
999917	no tiene	999179	199
333379	43	-	-
777739	487	-	-
999937	113	-	-

Tabla 6. Continuación de la Tabla 5.

De las anteriores tablas se concluye que no existen primos absolutos de 4, 5 o 6 dígitos.

2.4. Caracterización de un primo absoluto

Para candidatos a primos absolutos que contienen más de 6 dígitos en su representación se muestra el siguiente lema, cuyo resultado se usa en la demostración del Teorema 2.1.

Notación 2.1. En la expresión $N = c_1c_2c_3...c_{n-6}aaaaab_{(n)}$, los enteros a, b y c_i con $1 \leq i \leq n-6$, corresponden a un dígito de la representación que toma algún valor en el conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$ teniendo en cuenta las condiciones de los lemas expuestos hasta el momento. El subíndice n indica la cantidad de dígitos del entero N.

Lema 2.4. *Si $N = c_1c_2c_3...c_{n-6}aaaaab$ es un primo absoluto de n dígitos, entonces $K = c_1c_2c_3...c_{n-6}$ es divisible por 7.*

Demostración. Si N es un primo absoluto entonces permutando los últimos 6 dígitos de N obtenemos los enteros $N_i = K \times 10^6 + a \times R_6 + (b-a) \times 10^i$ para $0 \leq i \leq 5$, que también son primos y tienen la siguiente forma

$$N_0 = K \times 10^6 + aaaaab, \qquad N_3 = K \times 10^6 + aabaaa,$$
$$N_1 = K \times 10^6 + aaaaba, \qquad N_4 = K \times 10^6 + abaaaa,$$
$$N_2 = K \times 10^6 + aaabaa, \qquad N_5 = K \times 10^6 + baaaaa.$$

Como $(b-a) \in \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8\}$, $(b-a)$ es primo relativo con 7 y las potencias 10^i con $0 \leq i \leq 5$ son incongruentes entre si módulo 7 e incongruentes con cero módulo 7:

$$
\begin{aligned}
10^0 &\equiv 1(\text{mód } 7), & 10^3 &\equiv 6(\text{mód } 7),\\
10^1 &\equiv 3(\text{mód } 7), & 10^4 &\equiv 4(\text{mód } 7),\\
10^2 &\equiv 2(\text{mód } 7), & 10^5 &\equiv 5(\text{mód } 7),
\end{aligned}
$$

igualmente ocurre con los enteros $(b-a)\times 10^i$. De lo anterior se concluye que $K \times 10^6 + a \times R_6$ es múltiplo de 7, ya que de lo contrario, existe un entero $(b-a)\times 10^i$ que tiene residuo opuesto módulo 7 y se obtiene un N_i el cual es divisible por 7, y esto es imposible ya que los enteros N_i para $0 \leq i \leq 5$ son primos.
Además $R_6 = 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \equiv 1+2+3+4+5+6 = 21 \equiv 0(\textit{mód } 7)$ y por tanto $a \times R_6$ es múltiplo de 7 y así mismo $K \times 10^6$, y como 7 es primo relativo con 10^6 entonces K es divisible por 7.

□

El siguiente teorema permite mostrar que los números primos absolutos tienen una forma específica a menos que sea repunit. Presentada la demostración de este teorema se muestran ejemplos de los primeros primos absolutos menores que mil en esta nueva escritura.

Teorema 2.1. *Cada primo absoluto N o es un Repunit o puede ser obtenido por una permutación de cifras de los enteros*

$$B_n(a,b) = a...ab = a \cdot R_n + (b-a),$$

donde a y b son dígitos diferentes obtenidos del conjunto $\{1,3,7,9\}$.

Demostración. Sea n el número de cifras decimales de N no Repunit, podemos suponer que $n > 6$.
De los tres primeros lemas se tiene que N es representado con algunos de los dígitos 1, 3, 7 y 9 solamente pero no contiene en su representación decimal todos los dígitos 1, 3, 7 y 9, además ningún primo absoluto contiene tres dígitos a y dos dígitos b simultáneamente, luego nos quedan dos posibilidades:

1. Que una permutación de N sea de la forma $N = a \ldots ab$.

2. Que una permutación de N contenga tres dígitos diferentes del conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$, de la siguiente forma $N = aaaa....abc$.

Se demuestra que la última representación no es posible; para ello supongamos que N es un primo absoluto.

Sean: $N_1 = aa...acaaaaab$ y $N_2 = aa...abaaaaac$, permutaciones de N, las cuales también son primos absolutos. Por el Lema 2.4 los enteros $a...ac_{(n-6)}$ y $a...ab_{(n-6)}$ son divisibles por 7. Así su diferencia $b - c$, también es divisible por 7.

A continuación se muestra quién es $b - c$, con $b, c \in \{1, 3, 7, 9\}$.

$$\begin{array}{ll}
1-3=-2, & 7-1=\ 6, \\
1-7=-6, & 7-3=\ 4, \\
1-9=-8, & 7-9=-3, \\
3-1=\ 2, & 9-1=\ 8, \\
3-7=-4, & 9-3=\ 6, \\
3-9=-3, & 9-7=\ 2.
\end{array}$$

De lo anterior se tiene que $(b - c) \in \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8\}$ para todo $b, c \in \{1, 3, 7, 9\}$, luego $b - c$ no es divisible por 7, y esto es una contradicción.

Luego $N = aaaa....abc$ no es un primo absoluto.

Por lo tanto N en su representación decimal está escrito con 1 o 2 dígitos, si es con un dígito N debe ser un Repunit primo y si está escrito con dos dígitos, solamente debe ser de la forma descrita en la posibilidad (1), es decir N es una permutación de $a \ldots ab$; de nuevo es necesario el uso del Lema 2.3 para garantizar que un dígito aparece una sola vez.

$\square$

Hasta aquí se ha probado que si existe un primo absoluto no repunit con n cifras, una de sus permutaciones debe ser de la forma $a \ldots ab$ con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$ y $a \neq b$, la cual se denota $B_n(a, b)$.

En [6] se muestra que $B_n(a,b)$ se puede expresar como $a \cdot R_n + (b-a)$. En el siguiente ejemplo se ilustra cómo los primos absolutos conocidos $B_n(a,b)$ toman la forma $a \cdot R_n + (b-a)$, con $a \neq b$

Ejemplo 2.4. A continuación se muestran los primos absolutos conocidos mayores que 11 y menores que 1000 expresados de la siguiente manera $B_n(a,b) = a...ab = a \cdot R_n + (b-a)$

$$\begin{aligned}
13 &= 1 \cdot R_2 + (3-1)\\
31 &= 3 \cdot R_2 + (1-3)\\
17 &= 1 \cdot R_2 + (7-1)\\
71 &= 7 \cdot R_2 + (1-7)\\
37 &= 3 \cdot R_2 + (7-3)\\
73 &= 7 \cdot R_2 + (3-7)\\
79 &= 7 \cdot R_2 + (9-7)\\
97 &= 9 \cdot R_2 + (7-9)\\
113 &= 1 \cdot R_3 + (3-1)\\
337 &= 3 \cdot R_3 + (7-3)\\
991 &= 9 \cdot R_3 + (1-9)
\end{aligned}$$

La escritura $a \times R_n + (b-a)$ sólo aplica para enteros de la forma $B_n(a,b) = a...ab$, no aplica a permutaciones de $B_n(a,b)$, observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. Sean 311 y 131, fácilmente se puede verificar que son permutaciones del primo absoluto 113 y no se pueden expresar de la forma $B_n(a,b) = a \times R_n + (b-a)$, observemos la forma más aproximada de estos números a la escritura mencionada.

$$\begin{aligned}
311 &= 3 \times R_3 + (-22)\\
131 &= 1 \times R_3 + (\ \ 20)
\end{aligned}$$

-22 y 20 nunca se podrán expresar de la forma $b-a$ para $a,b \in \{1,3,7,9\}$.

CAPÍTULO 3

Candidatos a primos absolutos de la forma $B_n(a,b)$, con $a,b \in \{1,3,7,9\}$ y $n \geq 7$

En este capítulo se presentan algunos resultados que permiten mostrar un procedimiento que acota el valor de n, para el cual $B_n(a,b)$, con $a,b \in \{1,3,7,9\}$, no es primo absoluto. Adicionalmente se presenta otro resultado que permite descartar algunas parejas (a,b) para las cuales $B_n(a,b)$, con $a,b \in \{1,3,7,9\}$ y $n > 3$, no es primo absoluto.

3.1. Posibilidades de n para un primo absoluto $B_n(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$

En esta sección se presentan dos resultados, el primero es un criterio de divisibilidad para repunits que se usa en la demostración del Lema 3.2 el cual permite determinar bajo unas condiciones especiales algunas propiedades que debe tener n para que $B_n(a,b)$, con $a,b \in \{1,3,7,9\}$, sea candidato a primo absoluto.

3.1.1. Condición de divisibilidad para un repunit

Lema 3.1. *Sean R_n un Repunit y $p>5$ un número primo. $R_n \equiv 0 (\text{mód } p)$ si y sólo si $n \equiv 0(\text{mód } \operatorname{Ord}_p(10))$.*

Demostración. Por definición de Repunit se tiene que $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$ de donde $10^n = 9 \cdot R_n + 1$.

$(\Rightarrow)$

Si $R_n \equiv 0(\text{mód } p)$ entonces $9 \cdot R_n \equiv 9 \cdot 0(\text{mód } p)$, luego $10^n = 9 \cdot R_n + 1 \equiv 1(\text{mód } p)$, por tanto $10^n \equiv 1(\text{mód } p)$, de aquí $\operatorname{Ord}_p(10)$ divide a n, esto es $n \equiv 0(\text{mód } \operatorname{Ord}_p(10))$.

$(\Leftarrow)$

Si $n \equiv 0(\text{mód } \operatorname{Ord}_p(10))$ entonces $\operatorname{Ord}_p(10)$ divide a n, luego existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = k \cdot \operatorname{Ord}_p(10)$. Ahora como $9 \cdot R_n = 10^n - 1$ entonces $9 \cdot R_n = (10^{\operatorname{Ord}_p(10)})^k - 1 \equiv 0(\text{mód } p)$, de aquí p divide a $9 \cdot R_n$, pero como $p > 3$ entonces p divide a R_n, esto es $R_n \equiv 0(\text{mód } p)$. $\square$

3.1.2. Lema fundamental para primos absolutos

Lema 3.2. *Sean $B_n(a,b)$ un primo absoluto y $p > 5$ un número primo tal que $n \geq p-1$. Si 10 es raíz primitiva módulo p y $\operatorname{mcd}(a,p) = 1$, entonces n es un múltiplo de $p-1$.*

Demostración. Sean $B_n(a,b)$ un primo absoluto, p un primo tal que $n \geq p-1$ y $B_i = aR_n + (b-a)10^i = a10^{p-1}R_{n-p+1} + aR_{p-1} + (b-a)10^i$, con $0 \leq i \leq p-2$, números primos que se obtienen a partir de $B_n(a,b)$ permutando las $p-1$ últimas cifras decimales. Sea $L = a10^{p-1}R_{n-p+1} + aR_{p-1}$.

Como $(b-a) \in \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8\}$, $(b-a)$ es relativamente primo con p, y las potencias 10^i, con $0 \leq i \leq p-2$, son incongruentes con cero módulo p e incongruentes entre si módulo p ($10^j \not\equiv 10^k(\text{mód } p)$ *para todo* j,k *con* $0 \leq j,k \leq p-2$ y $j \neq k$), entonces los enteros $(b-a) \cdot 10^i$ tienen la misma propiedad.

Ya que los números $(b-a) \cdot 10^i$ con $0 \leq i \leq p-2$ tienen residuos diferentes de cero y distintos entre sí módulo p, $L = a10^{p-1}R_{n-p+1} + aR_{p-1}$ es divisible por p; de no ser así se obtendrá de L un residuo diferente de cero módulo p el cual tiene su inverso aditivo en $(b-a)\cdot 10^i$ para algún i con $0 \le i \le p-2$. De esta forma se obtiene un B_i que es divisible por p, lo cual es una contradicción.

Ahora probemos que aR_{p-1} es divisible por p.

Por hipótesis $\mathrm{mcd}(a,p) = 1$, de donde se obtiene $\mathrm{mcd}(a\cdot 10^{p-1},p) = 1$. Por otro lado $9\cdot R_{p-1} = 10^{p-1}-1$ y $\mathrm{Ord}_p(10) = p-1$ entonces $9\cdot R_{p-1} \equiv 0(\text{mód } p)$, es decir p divide a 9 ó a R_{p-1} y como $p \neq 3$ (10 es raíz primitiva módulo p), entonces p divide a R_{p-1}. Luego $aR_{p-1} \equiv 0(\text{mód } p)$.

Ahora, como p divide a L y divide a aR_{p-1}, pero no divide a $a\cdot 10^{p-1}$, entonces p divide a R_{n-p+1}, es decir que $R_{n-p+1} \equiv 0(\text{mód } p)$ y usando el Lema 3.1 se tiene que $n-p+1 \equiv 0(\text{mód } \mathrm{Ord}_p(10))$. Como $\mathrm{Ord}_p(10) = p-1$ entonces $n-p+1 = n-(p-1) \equiv 0(\text{mód } (p-1))$, de donde $n \equiv 0(\text{mód } (p-1))$ y por lo tanto $p-1$ divide a n.

□

El anterior lema es importante porque nos permite identificar para qué valores de n, $B_n(a,b)$ no es primo absoluto, y esto se puede evidenciar de la siguiente manera: dado un primo p para el cual 10 sea raíz primitiva y un entero $B_n(a,b)$ con al menos $p-1$ cifras, una condición necesaria para que $B_n(a,b)$ sea primo absoluto es que el número de sus cifras sea divisible por $p-1$. Por ejemplo, 10 es raíz primitiva módulo 17, entonces $B_n(a,b)$ con $n \ge 16$ no es primo absoluto si n no es múltiplo de 16. Entonces no existen primos absolutos con 16 cifras o más si el número de cifras no es múltiplo de 16. A continuación se verifica que no existen primos absolutos para $7 \le n \le 16$, se emplea el Lema 3.2 con $p = 7$ pero se tiene la dificultad cuando $a = 7$ ó $n = 12$ por eso este rango de n tiene un análisis especial.

3.2. No existen primos absolutos de n cifras decimales, con $7 \leq n \leq 16$

Lema 3.3. *Los enteros $B_n(a,b)$, con $a \neq b$ no son primos absolutos para todo n con $7 \leq n \leq 16$.*

Demostración. La prueba se divide en dos casos.

$\boxed{\textit{Caso 1}}$ Se analiza $B_n(a,b)$ con $a \in \{1,3,9\}$, $b \in \{1,3,7,9\}$ y $7 \leq n \leq 16$.

Si se toma $p = 7$ se verifican las hipótesis del Lema 3.2, porque $n \geq p-1 = 6$, 10 es raíz primitiva módulo 7 y el $\mathrm{mcd}(a,7) = 1$. Entonces solo en los casos en que n es múltiplo de 6, es posible que los enteros $B_n(a,b)$, con $a \in \{1,3,9\}$, $b \in \{1,3,7,9\}$ sean primos absolutos. Como aquí se considera que $7 \leq n \leq 16$, quedan por verificar los enteros $B_{12}(a,b)$ con $a \in \{1,3,9\}$, $b \in \{1,3,7,9\}$.

Los siguientes argumentos no buscan diseñar un método para encontrar permutaciones de $B_{12}(a,b)$ que no sea números primos, sino mostrar que alguna permutación de éste no es un número primo.

Sea $B_{12}(a,b,i)$ cualquier permutación de $B_{12}(a,b)$ que tiene la siguiente forma:

$$B_{12}(a,b,i) = a \cdot R_{12} + (b-a) \cdot 10^i, \text{ donde } 0 \leq i \leq 11.$$

Dado que $R_{12} \equiv 0 (\text{mód } 3)$ entonces $a \cdot R_{12} \equiv 0 (\text{mód } 3)$, con lo que $B_{12}(a,b,i) \equiv 0 (\text{mód } 3)$ si y sólo si $b \equiv a (\text{mód } 3)$, así $(a,b) \in \{(1,7),(3,9),(9,3)\}$, de donde se concluye que $B_{12}(1,7)$, $B_{12}(3,9)$ y $B_{12}(9,3)$ son divisibles por 3.

Por otro lado se tiene que $R_{12} \equiv 7 (\text{mód } 17)$. En la Tabla 7 se observan los residuos de las potencias 10^i con $0 \leq i \leq 11$ módulo 17 .

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$10^i (\text{mód } 17)$	1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3

Tabla 7: Residuos de las potencias 10^i con $0 \leq i \leq 11$ módulo 17.

Dado que $\text{mcd}(b-a, 17) = 1$ siempre hay solución para las congruencias

$$a \cdot R_{12} + (b-a) \cdot X \equiv 0 (\text{mód } 17).$$

Además como 10 es raíz primitiva módulo 17, las soluciones a las congruencias se pueden escribir como potencias de 10.

En la Tabla 7 se muestra que las soluciones para las congruencias mencionadas con (a, b) en $\{(1,3),(1,9),(3,1),(3,7),(9,1),(9,7)\}$, se obtienen con potencias de 10 que usan exponentes entre 0 y 11. Es decir que se puede seleccionar i de tal forma que:

$$B_{12}(a, b, i) = a \cdot R_{12} + (b-a) \cdot 10^i \equiv 0 (\text{mód } 17).$$

La Tabla 8 muestra los valores de i necesarios para obtener un $B_{12}(a, b, i)$ el cual es divisible por 3 ó 17, donde $B_{12}(a, b, i)$ es alguna permutación de $B_{12}(a, b)$ con $a \in \{1, 3, 9\}$ y $b \in \{1, 3, 7, 9\}$.

a$\diagdown$ b	1	3	7	9
1	$---$	$\langle 7 \rangle$	$*$	$\langle 3 \rangle$
3	$\langle 10 \rangle$	$---$	$\langle 8 \rangle$	$*$
9	$\langle 1 \rangle$	$*$	$\langle 5 \rangle$	$---$

Tabla 8: Se muestran los valores de i, de tal forma que $B_{12}(a, b, i)$ es divisible por 3 ó 17.

Así $B_{12}(a, b, i) = a \cdot R_{12} + (b-a) \cdot 10^i \equiv 0 (\text{mód } 3)$ ó $B_{12}(a, b, i) = a \cdot R_{12} + (b-a) \cdot 10^i \equiv 0 (\text{mód } 17)$, donde i toma valores de la tabla anterior de acuerdo a la siguiente simbología

- Si el símbolo es $*$ entonces $B_{12}(a,b,i) \equiv 0(\text{mód } 3)$ para todo i con $0 \leq i \leq 11$.

- Si el símbolo es $\langle m \rangle$ entonces $B_{12}(a,b,i) \equiv 0(\text{mód } 17)$ para $i = m$.

Caso 2 Se analiza $B_n(7,b)$ con $b \in \{1,3,9\}$ y $7 \leq n \leq 16$.

En este caso se pretende buscar ejemplos para determinar que los enteros $B_n(7,b)$ con $b \in \{1,3,9\}$ y $7 \leq n \leq 16$ no son primos absolutos. Para esto, se consideran las permutaciones de $B_n(7,b)$. Sea $B_n(7,b,i)$ quien represente todas las permutaciones de $B_n(7,b)$, para $b \in \{1,3,9\}$ y $7 \leq n \leq 16$ de la siguiente forma:

$$B_n(7,b,i) = 7R_n + (b-7) \cdot 10^i, \text{ donde } 0 \leq i \leq n-1.$$

Esta prueba consiste en buscar valores de i de tal forma que $B_n(7,b,i)$ sea divisible por 17. No se tiene la situación del caso anterior ya que las potencias de 10 que nos interesan no se pueden obtener para $7 \leq i \leq 15$, por eso se recurre a primos como 19 y 29 para completar la prueba.

La Tabla 9 muestra los residuos de $7R_n$ módulo 17, módulo 19 y módulo 29, con $7 \leq n \leq 16$; la Tabla 10 muestra los residuos de 10^i módulo 17; la Tabla 11 muestra los residuos de 10^i módulo 19 y la Tabla 12 muestra los residuos de 10^i módulo 29.

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$7R_n(\text{mód } 17)$	5	6	16	14	11	15	4	13	1	0
$7R_n(\text{mód } 19)$	13	4	9	2	8	11	3	18	16	15
$7R_n(\text{mód } 29)$	6	9	10	20	4	18	13	21	14	2

Tabla 9: Residuos de $7R_n$ módulo 17, módulo 19 y módulo 29, con $7 \leq n \leq 16$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$10^i(\text{mód } 17)$	1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12

Tabla 10: Residuos de 10^i módulo 17, con $0 \leq i \leq 15$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^i(\text{mód } 19)$	1	10	5	12	6	3	11	15	17

i	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$10^i(\text{mód } 19)$	18	9	14	7	13	16	8	4	2

Tabla 11: Residuos de 10^i módulo 19, con $0 \leq i \leq 17$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$10^i(\text{mód } 29)$	1	10	13	14	24	8	22	17	25	18	6	2	20	26

i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$10^i(\text{mód } 29)$	28	19	16	15	5	21	7	12	4	11	23	27	9	3

Tabla 12: Residuos de 10^i módulo 29, con $0 \leq i \leq 27$.

Con los resultados de Las Tablas 9 y 10, y variando b en el conjunto $\{1, 3, 9\}$ y $7 \leq n \leq 16$ se buscaron los valores de i que verificara la siguiente congruencia

$$7R_n + (b - 7) \cdot 10^i \equiv 0(\text{mód } 17).$$

Como para algunos valores de n y de b no se encontró el i que cumpliera la anterior congruencia, fue necesario el uso de la Tabla 11 y 12, y los números primos 19 y 29, para completar la Tabla 13. Esta última contiene los valores de $i,\ b$ y n necesarios para que $B_n(7, b, i)$ no sea un primo y por tanto los enteros $B_n(7, b)$ con b en $\{1, 3, 9\}$ y $7 \leq n \leq 16$ no son primos absolutos.

b	$b-7$	n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-6		$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\{2\}$	$\langle 8\rangle$	$\|2\|$	$\|1\|$	$\|5\|$	$\langle 11\rangle$	$\|3\|$
3	-4		$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\|2\|$	$\langle 9\rangle$	$\|8\|$	$\langle 0\rangle$	$\langle 8\rangle$	$\langle 12\rangle$	$\|9\|$
9	2		$\langle 5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 6\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\|7\|$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\|1\|$	$\|6\|$	$\{14\}$

Tabla 13: Contiene los valores de i, donde $B_n(7,b,i) \equiv 0(\text{mód } 17)$ ó $B_n(7,b,i) \equiv 0(\text{mód } 19)$ ó $B_n(7,b,i) \equiv 0(\text{mód } 29)$

Simbología:

- Si el símbolo es $\langle m\rangle$ entonces $B_n(7,b,i) \equiv 0(\text{mód } 17)$ para $i = m$.
- Si el símbolo es $\|m\|$ entonces $B_n(7,b,i) \equiv 0(\text{mód } 19)$ para $i = m$.
- Si el símbolo es $\{m\}$ entonces $B_n(7,b,i) \equiv 0(\text{mód } 29)$ para $i = m$.

$\square$

A continuación se presentan dos ejemplos que permiten dar claridad sobre los resultados presentados en el Lema 3.3.

Ejemplo 3.1. En el caso 1 del Lema 3.3, se observa que para $a = 3$ y $b = 7$, el entero $B_{12}(3,7)$ no es primo absoluto. De la Tabla 8 se toma el valor $i = 8$ y se verifica que la permutación $B_{12}(3,7,8) = 3 \cdot R_{12} + (7-3) \cdot 10^8 = 333733333333 \equiv 0(\text{mód } 17)$, es decir que 17 divide a 333733333333.

Ejemplo 3.2. En el Caso 2 del Lema 3.3, para $b = 3$ y $n = 9$ se tiene que: $B_9(7,3,i) = 7R_9 + (3-7) \cdot 10^i \quad 0 \leq i \leq 8$. Luego de la tabla 13, para $b = 3$ y $n = 9$, se tiene que $i = 4$ así $7R_9 \equiv 16(\text{mód } 17)$ y $-4 \cdot 10^4 \equiv -16(\text{mód } 17)$. Luego, $B_9(7,3,4) = 7R_9 + (3-7) \cdot 10^4 \equiv 0(\text{mód } 17)$, es decir que la permutación $B_{12}(7,3,4) = 777737777 \equiv 0(\text{mód } 17)$.
Por lo tanto 17 divide a 777737777.

Otra forma de demostrar el Lema 3.3 es tomar todos los enteros $B_n(a, b)$ con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$ y $7 \leq n \leq 16$ y hallar su respectivo divisor no trivial, si no lo tiene se busca una permutación la cual posea un divisor no trivial. En las siguientes tablas se muestran los candidatos a ser primos absolutos empezando en $n = 7$ hasta llegar a $n = 16$.

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
1111113	3	-	-
3333331	no tiene	3313333	41
1111117	7	-	-
7777771	29	-	-
1111119	3	-	-
9999991	no tiene	9999919	173
3333337	7	-	-
7777773	3	-	-
3333339	3	-	-
9999993	3	-	-
7777779	3	-	-
9999997	7	-	-

Tabla 14. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_7(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
11111113	13	-	-
33333331	no tiene	33333313	13
11111117	no tiene	11111711	13
77777771	17	-	-
11111119	no tiene	11111191	13
99999991	7	-	-
33333337	37	-	-
77777773	19	-	-
33333339	3	-	-
99999993	3	-	-
77777779	41	-	-
99999997	1297	-	-

Tabla 15. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_8(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
111111113	no tiene	111111311	223
333333331	17	-	-
111111117	3	-	-
777777771	3	-	-
111111119	7	-	-
999999991	67	-	-
333333337	29	-	-
777777773	no tiene	777777737	11
333333339	3	-	-
999999993	3	-	-
777777779	3319	-	-
999999997	71	-	-

Tabla 16. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_9(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
1111111113	3	-	-
3333333331	673	-	-
1111111117	23	-	-
7777777771	499	-	-
1111111119	3	-	-
9999999991	19	-	-
3333333337	191	-	-
7777777773	3	-	-
3333333339	3	-	-
9999999993	3	-	-
7777777779	3	-	-
9999999997	13	-	-

Tabla 17. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_{10}(a, b)$ con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
11111111113	no tiene	11111111311	17
33333333331	307	-	-
11111111117	1021	-	-
77777777771	151	-	-
11111111119	43	-	-
99999999991	83	-	-
33333333337	37	-	-
77777777773	29	-	-
33333333339	3	-	-
99999999993	3	-	-
77777777779	13	-	-
99999999997	17	-	-

Tabla 18. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_{11}(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
111111111113	461	-	-
333333333331	19	-	-
111111111117	3	-	-
777777777771	3	-	-
111111111119	79	-	-
999999999991	757	-	-
333333333337	269	-	-
777777777773	no tiene	777777777737	529
333333333339	3	-	-
999999999993	3	-	-
777777777779	17	-	-
999999999997	5507	-	-

Tabla 19. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_{12}(a, b)$ con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
1111111111113	3	-	-
3333333333331	523	-	-
1111111111117	7	-	-
7777777777771	no tiene	7777777777717	241
1111111111119	3	-	-
9999999999991	31	-	-
3333333333337	7	-	-
7777777777773	3	-	-
3333333333339	3	-	-
9999999999993	3	-	-
7777777777779	3	-	-
9999999999997	7	-	-

Tabla 20. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_{13}(a, b)$ con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
11111111111113	13	-	-
33333333333331	607	-	-
11111111111117	419	-	-
77777777777771	23	-	-
11111111111119	107	-	-
99999999999991	7	-	-
33333333333337	23	-	-
77777777777773	2579	-	-
33333333333339	3	-	-
99999999999993	3	-	-
77777777777779	5347	-	-
99999999999997	839	-	-

Tabla 21. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_{14}(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
111111111111113	1163	-	-
333333333333331	181	-	-
111111111111117	3	-	-
777777777777771	3	-	-
111111111111119	7	-	-
999999999999991	653	-	-
333333333333337	19	-	-
777777777777773	no tiene	777777777777737	11
333333333333339	3	-	-
999999999999993	3	-	-
777777777777779	23	-	-
999999999999997	599	-	-

Tabla 22. Candidatos a primos absolutos de la forma

$B_{15}(a, b)$ con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$

NÚMERO	DIVISOR	PERMUTACIÓN	DIVISOR
1111111111111113	3	-	-
3333333333333331	199	-	-
1111111111111117	19	-	-
7777777777777771	997	-	-
1111111111111119	3	-	-
9999999999999991	643	-	-
3333333333333337	59	-	-
7777777777777773	3	-	-
3333333333333339	3	-	-
9999999999999993	3	-	-
7777777777777779	3	-	-
9999999999999997	13	-	-

Tabla 23. Candidatos a primos absolutos de la forma $B_{16}(a, b)$ con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$.

3.3. Si $B_n(a, b)$ es primo absoluto entonces n es múltiplo de 11088

En esta sección se presenta un teorema el cual permite determinar que si existe un primo absoluto $B_n(a, b)$, con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$, éste debe contener por lo menos 11088 dígitos o un múltiplo de él.

Teorema 3.1. *Sea N un primo absoluto diferente de un repunit, que contiene $n > 3$ dígitos en su representación decimal. Entonces n es un múltiplo de 11088.*

Demostración. Del Lema 3.3 se asume que $n > 16$, además para $p = 17$ se tiene que 10 es una raíz primitiva, $\operatorname{mcd}(a, 17) = 1$ para todo $a \in \{1, 3, 7, 9\}$ y $n \geq 16$, por tanto por el Lema 3.2 es posible que los enteros $B_n(a, b)$ sean primos absolutos, cuando n es múltiplo de 16 con $n \geq 32$.
Al repetir el argumento anterior para $p \in \{19, 23, 29\}$, donde 10 es raíz primitiva módulo p, se obtiene que n también es múltiplo de 18, 22 y 28 respectivamente. De aquí $\operatorname{mcm}(16, 18, 22, 28) = 11088$ también divide a n. Por lo tanto n es múltiplo de 11088.

□

En [7] se encuentra que usando los números primos $p =$47, 59, 61, 97, 167, 179, 263, 383, 503, 863, 887, 983, donde 10 es raíz primitiva módulo p, se puede probar que el número de dígitos n de un primo absoluto $B_n(a, b)$ es divisible por (321.653.308.662.329.838.581.993.760).
Además mediante el uso de números primos p, donde 10 es raíz primitiva módulo p, con $7 \leq p \leq 10^5$, es posible demostrar que si $B_n(a, b)$ es primo absoluto entonces n debe ser mayor que $6 \cdot 10^{175}$.

3.4. Posibilidades de las parejas (a, b) para que $B_n(a, b)$ sea primo absoluto.

El siguiente teorema permite reducir a la mitad el número de parejas (a, b), para las cuales $B_n(a, b)$, con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$ posiblemente es un primo absoluto.

Teorema 3.2. *Si $n > 3$ y $B_n(a, b)$ es un primo absoluto entonces la pareja (a, b) es diferente de $(9, 7), (9, 1), (1, 7), (7, 1), (3, 9), (9, 3)$.*

Demostración. Para $n > 3$ se prueba que los enteros $B_n(a, b)$ no son primos absolutos con $(a, b) \in \{(9, 7), (9, 1), (1, 7), (7, 1), (3, 9), (9, 3)\}$.

Esta prueba se realiza en cuatro casos de la siguiente manera:

Caso 1 $(a, b) = (9, 7)$.

Supongamos que $B_n(9, 7)$ es primo absoluto, por el Teorema 3.1, n es múltiplo de 11088, entonces se lo puede expresar como $n = u \cdot 2^m$, donde u es impar mayor que 1 y $m \geq 4$. Luego tomando $r = 2^m$, se obtiene que el número $B_n(9, 7) = 9R_n - 2 \cdot 10^r = 10^n - 1 - 2 \cdot 10^r = (10^n + 1) - 2 \cdot (10^r + 1) = (10^{u \cdot r} + 1) - 2 \cdot (10^r + 1) = ((10^r)^u + 1) - 2 \cdot (10^r + 1)$ pero $((10^r)^u + 1) = (10^r + 1) \cdot [(10^r)^{u-1} - (10^r)^{u-2} + \ldots - (10^r)^1 + 1]$.

Así $B_n(9, 7) = (10^r + 1) \cdot \{[(10^r)^{u-1} - (10^r)^{u-2} + \ldots - (10^r)^1 + 1] - 2\}$. De aquí $9R_n - 2 \cdot 10^r$ es compuesto y este número se obtiene por una permutación de dígitos de $B_n(9, 7)$, esto contradice el hecho de que $B_n(9, 7)$ es primo absoluto. Por lo tanto no existen primos absolutos de la forma $B_n(9, 7)$.

Caso 2 $(a, b) = (9, 1)$.

Sea $B_n(9, 1) = 9R_n + (1 - 9) \cdot 10^0 = 9R_n - 8 \cdot 10^0 = 10^n - 9$, como n es par $10^n - 9 = (10^{\frac{n}{2}} - 3) \cdot (10^{\frac{n}{2}} + 3)$.

Por tanto $B_n(9, 1)$ es compuesto.

Caso 3 $(a, b) \in \{(1, 7), (7, 1)\}$.

- $(a, b) = (1, 7)$

  Supongamos que $B_n(1, 7)$ es primo absoluto, por el Teorema 3.1, n es múltiplo de 11088, luego n es divisible por 3.

  En $B_n(1, 7) = 111 \ldots 17$, la suma de sus dígitos es $(n - 1) + 7 = n + 6$ y siendo $n + 6$ divisible por 3 entonces $B_n(1, 7)$ es divisible por 3, esto es una contradicción con el supuesto que $B_n(1, 7)$ es primo absoluto. De aquí $B_n(1, 7)$ no es primo absoluto.

- $(a, b) = (7, 1)$

  Supongamos que $B_n(7, 1)$ es primo absoluto, por el Teorema 3.1, n es múltiplo de 11088, luego n es divisible por 3.

  Para $B_n(7, 1) = 777 \ldots 71$, la suma de sus dígitos es $7(n - 1) + 1 = 7n - 6$ y siendo $7n - 6$ divisible por 3 entonces $B_n(7, 1)$ es divisible por 3, esto contradice el supuesto inicial. Por tanto $B_n(7, 1)$ no es primo absoluto.

De lo anterior los enteros $B_n(1, 7)$ y$B_n(1, 7)$ no son primos absolutos.

$\boxed{\textit{Caso 4}}$ $(a, b) \in \{(3, 9), (9, 3)\}$.

Claramente $B_n(3, 9)$ y $B_n(9, 3)$ no son primos.

Así, no existen primos absolutos de la forma $B_n(9, 7), B_n(9, 1), B_n(1, 7),$
$B_n(7, 1), B_n(3, 9), B_n(9, 3)$ con $n \geq 3$.

$\square$

Este teorema permite concluir que si $B_n(a, b)$ es primo absoluto, entonces (a, b) es un elemento del siguiente conjunto: $\{(1, 3), (1, 9), (3, 1), (3, 7), (7, 3), (7, 9)\}$

CAPÍTULO 4

Conclusiones

En este capítulo se destacan los resultados y conclusiones más importantes relacionados con el tema de nuestra monografía.

1. Mediante el uso de números primos p, con $7 \leq p \leq 10^5$ donde 10 es raíz primitiva, se puede mostrar que si existe un primo absoluto distinto de los conocidos, este debe ser mayor que $6 \cdot 10^{175}$.

2. Si N es un primo absoluto no repunit, con n dígitos, entonces N debe ser de la forma $B_n(a,b) = a \cdot R_n + (b-a)$; con $(a,b) \in \{(1,3),(1,9),(3,1),(3,7),(7,3),(7,9)\}$.

3. Si N es un primo absoluto no repunit, con n dígitos, entonces $n = 11088 \cdot k$; con $k \in \mathbb{Z}^+$.

4. Con referencia a los primos repunits que son un subconjunto trivial de los primos absolutos, solo se conocen a $R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317}, R_{1031}$, quedan pendientes por confirmar hasta el momento, $R_{49081}, R_{86453}, R_{109297}, R_{270343}$.

5. Del análisis realizado sobre el tema, se conjetura que no existen primos absolutos no repunits mayores que 1000. La conjetura de Artin dice que existen infinitos primos para los cuales 10 es raíz primitiva. Si se demuestra esta conjetura y se usa este resultado en el Lema 3.2 y el Teorema 3.1, será posible demostrar que no existen primos absolutos diferentes a los presentados en este informe.

6. Un problema abierto es analizar quiénes y cómo son los primos absolutos en otras bases diferentes a la decimal y que relación tienen con las propiedades descritas en este informe.

Para nuestra formación como matemáticos consideramos de gran importancia los siguientes aspectos

7. La elaboración de este trabajo de grado nos fortaleció en los procesos de investigación, análisis y escritura de textos matemáticos, además se recordaron conceptos y resultados básicos aprendidos en el transcurso de nuestra carrera.

8. El uso de programas de cálculo computacional, como MuPAD, es de gran utilidad para verificar resultados, realizar investigaciones experimentales y cálculos que de manera usual serían difíciles de obtener.

9. El estudio de los primos absolutos se puede abordar como una aplicación de la teoría de números elemental, específicamente con la teoría de las congruencias, raíces primitivas y divisibilidad.

APÉNDICE A

Algoritmos en MuPAD

En esta parte se describen en detalle los algoritmos, implementados en MuPAD, que utilizamos para verificar varios resultados que permitieron descartar candidatos a primos absolutos de la forma $B_n(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$, $a \neq b$ y para $4 \leq n \leq 16$. Como es de notar estos cálculos son tediosos a la hora de realizarlos manualmente, pero con la ayuda un software especializado como MuPAD, los resultados se obtienen de una forma efectiva.
Los siguientes algoritmos quedan planteados para que quien éste interesado y cuente con recursos computacionales más potentes y avanzados pueda extender los resultados hasta el momento conocidos.

Algoritmo 1(Generar Repunits de n dígitos)

```
Repunit:=proc(n)
 begin
   (10^n-1)/9;                              (1)
 end proc;
```

Entrada: Un entero positivo n (cantidad de dígitos del repunit).

Descripción: El algoritmo hace la siguiente operación:

(1) Evalúa n en $(\frac{10^n - 1}{9})$.

Salida: $111\ldots111$ el valor corresponde a un repunit de n dígitos

Algoritmo 2(Generar enteros de la forma $B_n(a,b)$)

```
Tnab:=proc(n,a,b)
 begin
   a*Repunit(n)+(b-a);                          (1)
 end proc;
```

Entrada: Tres enteros positivos caracterizados así:

n es la cantidad de dígitos del entero $B_n(a,b)$.

a es un entero positivo que aparecerá $n-1$ veces en la representación.

b es un entero positivo que aparece una vez en la última posición de la representación.

Descripción: El algoritmo hace la siguiente operación:

(1) llama al algoritmo $Repunit(n)$ lo multiplica por a, luego le suma b y le resta a.

Salida: $aaaaaa\ldots aaab$ un entero $B_n(a,b)$ de n dígitos.

Algoritmo 3(Obtener los factores de $B_n(a,b)$, con $n \in [li, ls]$)

```
Factortnab:=proc(li,ls)
local AB,n,ab;
 begin
  AB:=[[1,3],[3,1],[1,7],[7,1],[1,9],[9,1],[3,7],[7,3],[3,9],[9,3],
  [7,9],[9,7]];                                                      (1)
  for n from li to ls do                                             (2)
   for ab in AB do                                                   (3)
```

```
    print(n,ab,ifactor(Tnab(n,ab[1],ab[2])));                    (4)
  end for;
 end for;
end proc;
```

Entrada: Dos enteros positivos caracterizados así:

li indica el valor donde algoritmo empieza a realizar procedimientos.

ls indica el valor hasta donde el algoritmo termina de realizar procedimientos.

Descripción: El algoritmo hace la siguiente operación:

- (1) Al conjunto AB le asigna las parejas ab con $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$ y $a \neq b$.
- (2) Es un contador que a n le asigna el valor li e inicia el recorrido hasta ls.
- (3) Es un contador que a ab le asigna parejas que están en el conjunto AB en el mismo orden que en el procedimiento (1).
- (4)
  - (*1)Llama al algoritmo Tnab(n,a,b) donde a y b son la primera y la segunda componente de (a,b). Luego calcula los factores primos de Tnab(n.a,b) mediante el procedimiento ifactor y finalmente imprime los valore n, la pareja (a,b) y los factores de Tnab(n,a,b).
  - (*2) repite el proceso (*1) cada ab que pertenece al conjunto AB.
  - (*3) el contador para n se incrementa en 1, y realiza los procesos (*1), (*2) y (*3), hasta que $n = ls$.

Salida:

$$\begin{cases} 16 & (a) \\ [7,9] & (b) \\ 310361749795464943 & (c) \end{cases}$$

(a) El valor n para $B_n(a,b)$.

(b) La pareja (a,b) en $B_n(a,b)$ con $a,b \in \{1,3,7,9\}$ y $a \neq b$.

(c) Los factores primos de $B_n(a,b)$.

Algoritmo 4 (Residuo de $(a \cdot R_n)$ módulo p)

```
arnmodp:=proc(p,a)
local L,e,n;
begin
L:=[]; e:=numlib::order(10,p);                    (1)
for n from 1 to e do                              (2)
L:=[op(L),[n,(a*Repunit(n)) mod p]];              (3)
end_for;
end_proc;
```

Entrada: Ingresan dos valores, p un número primo distinto de 2 y 5, y $a \in \{1,3,7\}$

Descripción: El algoritmo hace las siguientes operaciones:

(1) Inicia una lista vacía llamada L y a la variable e le asigna $\mathrm{Ord}_p(10)$.

(2) Inicia un ciclo con el contador n desde 1 hasta e.

(3) A la lista L le va adicionando una pareja donde la primera componente contiene el valor n y la segunda componente contiene el residuo de $a \cdot R_n$ módulo p(se llama al procedimiento Repunit). Al finalizar el contador n se incrementa una unidad y repite las ordenes de (3) hasta que $n = e$.

Salida: [$[1,(a\cdot R_1) \bmod p], [2,(a\cdot R_2) \bmod p], \ldots, [e,(a\cdot R_e) \bmod p]$]

Algoritmo 5 (Residuo de $((a-b) * 10^i)$ módulo p)

```
abmodp:=proc(p,a,b)
```

```
local R, e, i;
begin
R:=[]; e:=numlib::order(10,p)-1;                    (1)
for i from 0 to e do                                (2)
R:=[op(R),[i,((a-b)*10^i) mod p]];                  (3)
end_for;
end_proc;
```

Entrada: ingresan tres valores, un número primo p distinto de 2 y 5, y $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$

Descripción: El algoritmo hace las siguientes operaciones:

(1) Inicia una lista vacía llamada R y a la variable e le asigna $\mathrm{Ord}_p(10) - 1$.

(2) Inicia un ciclo con el contador i desde 1 hasta e.

(3) A la lista R le va adicionando una pareja donde la primera componente contiene el valor i y la segunda componente contiene el residuo de $((a - b) * 10^i)$ módulo p. Al finalizar el contador i se incrementa una unidad y repite las ordenes de (3) hasta que $i = e$.

Salida: $[\ [1, ((a-b)*10^1) \bmod p], [2, ((a-b)*10^2) \bmod p], \ldots, [e, ((a-b)*10^e) \bmod p]\ ]$

Algoritmo 6(Parejas (n, i) tal que p divide a $B_n(a, b, i)$)

```
Bndiv:=proc(p,a,b)
local R, L, S, e, i, j, T, t1, t2, U, u1, u2;
begin
R:=abmodp(p,a,b);L:=arnmodp(p,a);S:=[];e:=nops(R);          (1)
for i from 1 to e do                                        (2)
U:=R[i]; u1:=U[1]; u2:=U[2];                                (3)
for j from 1 to e do                                        (4)
T:=L[j]; t1:=T[1]; t2:=T[2];                                (5)
if u2=t2 then if u1<t1 then S:=[op(S),[t1,u1]];             (6)
```

```
end_if; end_if;
end_for; end_for;
print(S);                                                    (7)
end_proc;
```

Entrada: Ingresan tres valores, un número primo p distinto de 2 y 5, y $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$

Descripción: El algoritmo hace la siguiente operación:

(1) A la lista R le asigna el procedimiento abmodp(p,a,b)(ver algoritmo 5), a la lista L le asigna el procedimiento arnmodp(p,a), inicia una lista vacía S y a la variable e le asigna el número de elementos de la lista R.

(2) Se inicia un ciclo con el contador i desde 1 hasta e.

(3) A la variable U le asigna la pareja de la i-esima posición de la lista R, a la variable u1 se le asigna la primera componente de la pareja U y a la variable u2 se le asigna la segunda componente de la pareja U.

(4) Se inicia un ciclo con el contador j desde 1 hasta e.

(5) A la variable T le asigna la pareja de la j-esima posición de la lista L, a la variable t1 se le asigna la primera componente de la pareja T y a la variable t2 se le asigna la segunda componente de la pareja T.

(6) Se tienen dos condiciones Si u2=t2 entonces, si u1<t1 entonces a la lista S se le adiciona la pareja [t1,u1].

(7) Genera toda la lista S de las parejas que cumplen las anteriores condiciones.

Salida: $[[n_0, i_0], [n_1, i_1], [n_2, i_2], \ldots]$ de tal forma que p divide a $B_n(a, b, i)$, donde n e i son la primera y segunda componente respectivamente de cada una de las parejas de la lista anterior.

Bibliografía

[1] Apóstol T. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, España (1980).

[2] Bhargava T. N., Doyle P. H. *On the existence of absolute primes.* Mathematics Magazine, Vol 47, N° 4, (1974), p 233.

[3] Boal Jan, Bevis Jean. *Permutable primes.* Mathematics Magazine, Vol 55, N° 1, (1982) pp 38-41.

[4] Gordillo E., Méndez R., Rubiano G. *Teoría de Números para principiantes.* Unibiblos, Colombia (1999).

[5] Johnson A. W. *Absolute primes.* Mathematics Magazine, Vol 50, (1977), pp 100-103.

[6] Mavlo Dmitry. *Absolute prime numbers.* The Mathematical Gazette, Vol 79, N° 485 (1995), pp 299-304.

[7] Slinko A. M. *Absolute primes.* Página de world wide wed. [Online]. Disponible: http://91.121.118.218/simon/OEIS/archive_in_pdf/Absolute_Primes.pdf, 19 de febrero de 2010.

[8] Trujillo C. *Utilización del computador en la enseñanza y la investigación en teoría de números; Factorización de Repunits: ejemplo típico.* Matemáticas - enseñanza universitaria, Vol 1, N° 2 (1990), pp 45-59.

[9] Chris Caldwell. *The prime glossary, permutable prime.* Página de world wide wed. [Online]. Disponible: http://primes.utm.edu/glossary/xpage/PermutablePrime.html, 19 de febrero de 2010.

[10] Chris Caldwell. *The prime glossary, repunit.* Página de world wide wed. [Online]. Disponible: http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=Repunit, 14 de junio de 2010.