LOS SEMIGRUPOS DE LAS ECUACIONES DEL CALOR Y DE SCHRÖDINGER

Luz Ayda Muñoz M.

Livio Antonio Angulo C.

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Programa de Matemáticas

Popayán

2012

LOS SEMIGRUPOS DE LAS ECUACIONES DEL CALOR Y DE SCHRÖDINGER

Luz Ayda Muñoz M.
Livio Antonio Angulo C.

Trabajo de Grado
En modalidad de Seminario de Grado, presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático.

Directora
Aida Patricia González N.

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Programa de Matemáticas
Popayán
2012

Nota de aceptación

____

____

____

Directora: ____________________________

Dra. Aida Patricia González N.

Jurado: ____________________________

Dr. Ramiro Miguel Acevedo M.

Jurado: ____________________________

Dr. Willy Will Sierra A.

Fecha de sustentación: Popayán, 05 de octubre de 2012

Agradecimientos

A Dios, por brindarnos la dicha de la salud y bienestar físico y espiritual.

A nuestros padres, por su esfuerzo, amor y apoyo incondicional, durante nuestra formación tanto personal como profesional.

A nuestros docentes, por brindarnos su guía y sabiduría en el desarrollo de este trabajo.

Finalmente a todas las personas que de una u otra manera contribuyeron a la realización y culminación de esta etapa en nuestra vida.

Índice general

Introducción

El trabajo tendrá como eje principal el estudio de los semigrupos de las ecuaciones del calor y de Schrödinger. En este estudio se hará una revisión de la teoría de semigrupos, el espacio de Schwartz y la transformada integral de Fourier para funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$, en el espacio de Schwartz y en $\boldsymbol{S}'$. Con relación a los semigrupos de las ecuaciones del calor y de Schrödinger se enunciarán y demostrarán algunas propiedades que serán utilizadas en el estudio del problema de Cauchy en los espacios apropiados.

A nivel de motivación consideramos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = au(t), \quad \text{con} \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde a es una constante en los reales y $u(t)$ es la función solución a encontrar, que se puede interpretar como la densidad de una población en un determinado tiempo t. Para deducir la ecuación diferencial se supone que la razón de cambio de la población es directamente proporcional a la población existente.

Para encontrar soluciones al problema (1), utilizamos una de las técnicas de ecuaciones diferenciales ordinarias que está asociada a ecuaciones de variables separables y así podemos obtener la solución

$$u(t) = u_0 e^{at}. \tag{2}$$

Si consideramos en el modelo anterior una población adicional distinta y asumimos que estas dos poblaciones son independientes entre sí, entonces $u(t)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$ y el nuevo problema se puede representar de la siguiente forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad \text{con} \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

donde A es una matriz diagonal que está en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Este problema se puede llevar al problema (1) considerando que las componentes de $u(t)$ satisfacen $u_1'(t) = a_{11}u_1(t), u_1(0) = u_0^{(1)}$ y $u_2'(t) = a_{22}u_2(t), u_2(0) = u_0^{(2)}$ y así obtenemos la correspondiente solución de (3) a partir de (1), esto es

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0^{(1)} e^{a_{11}t} \\ u_0^{(2)} e^{a_{22}t} \end{pmatrix}.$$

También podemos considerar la solución de (3) análoga a la expresión dada en (2) con la siguiente modificación

$$u(t) = e^{tA}u_0 = e^{tA} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

donde e^{tA} se define como

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

siempre que dicha serie “converja”.

Cabe señalar que en este, como es un problema donde están involucradas dos funciones a encontrar (dos tipos distintos de poblaciones), se puede asumir que $u_1(t)$ representa la densidad de la población 1 y $u_2(t)$ representa la densidad de la población 2.

Para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}$ es convergente utilizaremos el siguiente teorema

Teorema 0.1. *(Criterio de convergencia para series de matrices). Si $\{A_k\}$ es una sucesión de matrices $n\times n$ tales que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ converge, entonces la serie de matrices $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ también converge.*

Demostración. Ver [1, Pág.240].

Vale la pena señalar que el teorema anterior es válido también para matrices de tamaño $n \times m$.

Consideramos $A_k = \frac{(tA)^k}{k!}$ con A en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Puesto que $\left\|\frac{(tA)^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|(tA)\|^k}{k!}$ y la serie numérica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|(tA)\|^k}{k!}$ converge para todo número real $\|(tA)\|$, por el criterio de comparación la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{(tA)^k}{k!}\right\|$ también es convergente; luego del Teorema (0.1) se sigue que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}$ converge para toda matriz A en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Ahora, si se asume que las poblaciones en el problema (3) no son independientes, es decir, las poblaciones interactúan, por ejemplo la población 1 es presa (alimento) de la población 2 (predador), el modelo de nuestro nuevo problema será el siguiente

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad \text{con} \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{5}$$

con A una matriz en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

La solución de este problema está dada por (4) que, a diferencia del problema (3), no se puede calcular de manera directa. Existen técnicas que nos permiten hacer estos calculos, dichas técnicas dependen de las propiedades de la matriz A. Por ejemplo, si la matriz A puede diagonalizarse, entonces existe una matriz C no singular tal que $D = C^{-1}AC$ es una matriz diagonal, luego $A = CDC^{-1}$ y $A^k = CD^kC^{-1}$. Así,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} CD^kC^{-1} = C(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k)C^{-1} = Ce^{tD}C^{-1}.$$

Para el caso en que A es cualquier matriz de tamaño $n \times n$ (diagonalizable o no) existe un método práctico que fue desarrollado por E.J. Putzer conocido como el método de Putzer para determinar e^{tA}.

Otro problema interesante que difiere de los anteriores, resulta cuando la función densidad $u(t)$ depende de la posición en la región donde habita la población, es decir, la función $u(x,t)$ determina la densidad de la población en la posición x y en el instante t. Ahora bien, para poblaciones que se reproducen de forma continua y que se extienden por una región de manera aleatoria (como es el caso de las moléculas y los microrganimos en la biología) una descripción adecuada a este comportamiento la hace la ecuación lineal del calor, es por ello que dicha ecuación está asociada a un modelo de difusión.

El problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor es

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{6}$$

Un modelo que por su interés matemático incluiremos en este trabajo es la ecuación lineal de Schrödinger

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta u \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{7}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

A partir de la función de onda $u(x,t)$, solución de la ecuación de Schrödinger, se podrán obtener los valores medios de las distintas magnitudes observables asociadas a un sistema, así como la probabilidad de encontrar a las partículas en distintos puntos del espacio.

Para encontrar y/o establecer propiedades de la solución a estos nuevos problemas surgen varias preguntas tales como

¿Tendría sentido definir dichas soluciones de forma similar a la de los anteriores problemas, es decir, $u(x,t) = e^{t\Delta}u_0(x)$ en el caso de la ecuación del calor y $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$ para el caso de la ecuación de Schrödinger?, ¿Cómo definir los operadores $e^{t\Delta}$ y $e^{it\Delta}$?, ¿En qué tipo de espacios están bien definidos estos operadores y qué propiedades tienen?.

Para dar respuesta a algunas de estas preguntas es necesario abordar el estudio de los espacios de Schwartz, de la transformada de Fourier y la teoría de semigrupos, que van a ser de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación mencionaremos algunas definiciones y resultados relacionados con el espacio de Schwartz, su dual $\boldsymbol{S'}$ y la transformada de Fourier en dichos espacios.

1.1. Espacio de Schwartz, $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$

Definición 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ si*

1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índices se tiene que $\|f\|_{\alpha,\beta} < \infty$, donde*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \left\|(\cdot)^\alpha D^\beta f\right\|_\infty := \sup_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|,$$

con $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta f(x) := \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$ y $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$. En el caso $\beta = (0, \cdots, 0)$, $D^\beta f := f$.

Definición 1.2. *Una sucesión $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ en $S(\mathbb{R}^n)$ converge a $f \in S(\mathbb{R}^n)$ si $\|f_k - f\|_{\alpha,\beta} \to 0$, cuando $k \to \infty$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.*

El conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ dotado de esta convergencia se denomina espacio de Schwartz y se denotará por $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$.

Propiedades: Sean $f, g \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n), \alpha$ multi-índice, L un operador diferencial y $P(x)$ cualquier polinomio. Entonces,

- $D^\alpha f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$
- $P(\cdot)f(\cdot) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$
- $L(P(\cdot)f(\cdot)) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$
- $P(\cdot)L(f(\cdot)) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$

Proposición 1.1. *Sea* $1 \leq p \leq +\infty$*, entonces* $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.2. *Sea* $1 \leq p < +\infty$*, entonces* $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Ver [7, Pág.21].

1.2. La Trasformada de Fourier definida para funciones de $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ y algunas de sus propiedades.

La transformada de Fourier es un elemento muy importante en nuestro trabajo, pues nos ofrece técnicas que facilitan el desarrollo de nuestra teoría, además la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz tiene la propiedad interesante de ser un automorfismo, esta propiedad permite extender la definición de la transformada de Fourier a funciones generalizadas pertenecientes al espacio dual $\boldsymbol{S}'$ del espacio de Schwartz.

Daremos a continuación la definición de transformada de Fourier.

Definición 1.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se definen la transformada directa e inversa de Fourier de f, mediante las fórmulas*

$$F_{x\to\xi}\left[f(x)\right](\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx \overbrace{=}^{not} \hat{f}(\xi),$$

$$F^{-1}_{x\to\xi}\left[f(x)\right](\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx \overbrace{=}^{not} \check{f}(\xi),$$

siempre que dichas fórmulas tengan sentido y donde $\langle \xi, x\rangle$ representa el producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Notemos que si $f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

de donde

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.1}$$

Así,

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Entonces podemos concluir que si $f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ es bien definida y además $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, la transformada de Fourier es un operador de $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Propiedad 1. (Transformada de la derivada) Sean $f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ y α multi-índice, entonces

$$F_{x\to\xi}\left[D^\alpha f(x)\right] = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi),\ \text{donde}\ \ \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \text{ y }\ \xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}\cdot \xi_2^{\alpha_2}\cdots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Propiedad 2. (Derivada de la transformada) Sean $f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ y α multi-índice, entonces $D^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\ \left[(\cdot)^\alpha f\right]^\wedge(\xi)$.

Observación

- De (1.1) y la propiedad 1, se tiene

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\| D^\alpha f \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

  Así a mayor suavidad de f, mayor es la rapidez con que $\hat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$.

- De (1.1) y la propiedad 2 tenemos

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| D^\alpha \hat{f}(\xi) \right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\| (\cdot)^\alpha f(\cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

  Esto es, a mayor velocidad con que $f \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, mayor es la suavidad de $\hat{f}(\xi)$.

De las observaciones anteriores se puede concluir que la transformada directa e inversa de Fourier son operadores de $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

Propiedad 3.

- Para $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ dotado con la norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$ F es una isometría de $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ en si mismo, esto es, si $f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(x) \right|^2 dx.$$

- Si $f, g \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} dx.$$

- La Transformada inversa es el operador inverso de la Transformada de Fourier en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir,

$$F^{-1} = (F)^{-1}.$$

Demostración. Ver [3, Cap.6].

1.3. Dual de $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{S}'$

Para los matemáticos de los últimos años, las funciones generalizadas son un tema muy importante tanto a nivel teórico como aplicado. El concepto de función generalizada surgió de la necesidad de dar soporte matemático a ciertos pensamientos idealizados en la física, con el fin de extender la noción clásica de función.

Definición 1.4. *Sea $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz. Las aplicaciones del espacio lineal $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ en el conjunto de números complejos, reciben el nombre de* ***funcionales*** *definidos sobre $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ o simplemente funcionales. El valor del funcional f en $\varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ se designa mediante (f, φ) y se lee "f actuando sobre φ".*

Los funcionales f, g son iguales $(f = g)$ si y sólo si para todo $\varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, $(f, \varphi) = (g, \varphi)$. Por otra parte f se llama **funcional lineal**, si para todo $\varphi, \phi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple la igualdad

$$(f, \alpha\varphi + \beta\phi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \phi).$$

Definición 1.5. *El funcional f definido sobre el espacio de Schwartz se denomina* ***continuo****, si para cada sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ convergente a $\varphi_0 \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, se cumple que*

$$\lim_{k\to\infty} (f, \varphi_k) = (f, \varphi_0).$$

Definición 1.6. *Todo funcional lineal y continuo definido sobre $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, recibe el nombre de* ***función generalizada****. El espacio lineal dual (con las operaciones estandar de adición y multiplicación por escalar) de todos estos funcionales lineales y continuos se denota por $\boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^n) := \boldsymbol{S}'$.*

Definición 1.7. *Operadores lineales y continuos sobre* $\boldsymbol{S'}$.
Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\boldsymbol{S'}$ *y* $f \in \boldsymbol{S'}$. *Se dice que* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a* f *y se nota* $f_k \to f$, *cuando* $k \to \infty$ *si*

$$\forall\varphi \in \boldsymbol{S} \ \lim_{k\to\infty}(f_k,\varphi) = (f,\varphi).$$

Definición 1.8. *El operador* $A : \boldsymbol{S'} \longrightarrow \boldsymbol{S'}$ *es lineal si*

$$\forall f, g \in \boldsymbol{S'} \ y \ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{C} : A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$$

Definición 1.9. *Se dice que el operador* $A : \boldsymbol{S'} \longrightarrow \boldsymbol{S'}$ *es* ***continuo***, *si* $f_k \to f$ *implica que* $Af_k \to Af$, *cuando* $k \to \infty$ *en* $\boldsymbol{S'}$.

A continuación mostraremos que mediante una identificación se tiene que $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ está contenido en $\boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^n)$. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, T_f de $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{C}$ dado por

$$(T_f,\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \tag{1.2}$$

satisface que

- T_f es lineal: sean $\varphi, \psi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}(T_f, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\alpha\varphi + \beta\psi)(x)dx \\ &= \alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx + \beta\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx \\ &= \alpha(T_f,\varphi) + \beta(T_f,\psi).\end{aligned}$$

- T_f es un funcional continuo: sea $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión tal que $\varphi_k \to \varphi_0$, cuando $k \to \infty$, en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}(T_f, \varphi_k) &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x)\varphi_k(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_0(x)dx \\
&= (T_f, \varphi_0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T_f \in \boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^n)$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.
Obsérvese que la función definida de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $S'(\mathbb{R}^n)$ es inyectiva.

1.4. La Trasformada de Fourier para elementos de $\boldsymbol{S}'$ y algunas de sus propiedades.

1.4.1. Operador de transformada de Fourier de las funciones generalizadas.

Teniendo en cuenta la propiedad 3 y usando la identificación T_f para $f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\langle T_f, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)dx = \left\langle T_{\hat{f}}, \varphi \right\rangle.$$

Si denotamos T_f simplemente como f tendríamos que $\langle f, \hat{\varphi}\rangle = \left\langle \hat{f}, \varphi \right\rangle$, lo cual motiva la siguiente definición.
Para $f \in \boldsymbol{S}'$ se define transformada de Fourier de f al funcional $\hat{f}$ definido según la fórmula

$$\forall \varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n), (F(f), \varphi) = (\hat{f}, \varphi) := (f, \hat{\varphi}).$$

Probemos que $\hat{f} \in \boldsymbol{S}'$, es decir que $\hat{f}$ es lineal y continuo. En efecto, sean $f \in \boldsymbol{S}'$ $\varphi, \phi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$(\hat{f}, \alpha\varphi + \beta\phi) = (f, (\alpha\varphi + \beta\phi)\widehat{\ }) = (f, \alpha\widehat{\varphi} + \beta\widehat{\phi}) = \alpha(\hat{f}, \varphi) + \beta(\hat{f}, \phi).$$

Además sean $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi_0 \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$. Si $\varphi_k \longrightarrow \varphi_0$ en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(\hat{f}, \varphi_k) = (f, \widehat{\varphi_k}) \longrightarrow (f, \widehat{\varphi_0}) = (\hat{f}, \varphi_0), \text{ cuando } k \longrightarrow +\infty, \tag{1.3}$$

dado que si $\varphi_k \to \varphi_0$ en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{\varphi_k} \to \widehat{\varphi_0}$ en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$.
Esto es, $(\hat{f}, \varphi_k) \longrightarrow (\hat{f}, \varphi_0)$, cuando $k \longrightarrow +\infty$. Hemos probado hasta aquí, que $\hat{f} \in \boldsymbol{S}'$.
Probemos ahora que F (operador transformada de Fourier) es un operador lineal y continuo de $\boldsymbol{S}'$ en $\boldsymbol{S}'$. En efecto, sean $f, g \in \boldsymbol{S}', \varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n), \alpha, \gamma \in \mathbb{C}$. Luego

$$((\alpha f + \gamma g)\widehat{\ }, \varphi) = (\alpha f + \gamma g, \hat{\varphi}) = \alpha(f, \hat{\varphi}) + \gamma(g, \hat{\varphi}) = \alpha(\hat{f}, \varphi) + \gamma(\hat{g}, \varphi). \tag{1.4}$$

Es decir, F es lineal.
Además, sean $f_k \in \boldsymbol{S}'$, para cada $k \in \mathbb{N}, f \in \boldsymbol{S}'$. Supongamos que $f_k \longrightarrow f$ en $\boldsymbol{S}'$, es decir

$$\forall \varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)\ (f_k, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi), \text{ cuando } k \longrightarrow +\infty.$$

Ahora,

$$(\hat{f}_k, \varphi) = (f_k, \hat{\varphi}) \longrightarrow (f, \hat{\varphi}) = (\hat{f}, \varphi), \text{ cuando } k \longrightarrow +\infty.$$

Por lo tanto $(\hat{f}_k, \varphi) \longrightarrow (\hat{f}, \varphi)$, cuando $k \longrightarrow +\infty$. Por lo anterior F es un operador lineal y continuo de $\boldsymbol{S}'$ en $\boldsymbol{S}'$.

1.4.2. Transformada de Fourier para funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Hemos probado que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$, de esta manera existe la transformada de Fourier para las funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en el sentido de $\boldsymbol{S}'$ y además existe dicha transformación en el sentido habitual.

Introduciremos una notación que nos permite distinguirlas.

1. La transformada habitual

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx \overbrace{=}^{not} \hat{f}_s(\xi),$$

donde la letra s hace referencia a "strong"que significa fuerte, por ello la llamaremos transformada fuerte de Fourier.

2. Dado que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $T_f \in \boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^n)$. Así la transformada en el sentido de $\boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^n)$ viene dada por

$$\forall \varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n), (\hat{f}, \varphi) := (f, \hat{\varphi}) \overbrace{=}^{not} (\hat{f}_w, \varphi),$$

si denotamos por f a T_f.

Donde la letra w hace referencia a "weak"que significa débil, por ello la llamaremos transformada débil de Fourier.

Veamos ahora la relación que existe entre las transformadas débil y fuerte para funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f}_s = \hat{f}_w$ en el sentido de $\boldsymbol{S}'$.*

Demostración. Ver [2, Pág 48].

1.4.3. Transformada de Fourier para funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset \boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe $\hat{f}_w$ en el sentido de $\boldsymbol{S}'$, definida de la siguiente manera

$$\forall \varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n), (\hat{f}_w, \varphi) = (f, \hat{\varphi}).$$

Pero nos preguntamos entonces ¿qué sucede con la transformada fuerte de Fourier? Para dar respuesta a esta pregunta debemos observar que la definición anterior de transformada fuerte de Fourier puede carecer de sentido, puesto que en general si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, no necesariamente $\left|e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)\right| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo la función

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, \ si \ \ |x| > 1 \\ \\ 0, \ si \ \ |x| \leq 1, \end{cases}$$

está en $L^2(\mathbb{R})$ pero no en $L^1(\mathbb{R})$. Esta situación hace necesario otro mecanismo para definir $\hat{f}_s$ con $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.1. *Para todo $\varphi, \psi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, es válida la fórmula*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_s(\xi)\overline{\widehat{\varphi_s}(\xi)}d\xi.$$

Como para $z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = |z|^2$, entonces para $\varphi, \psi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}_s(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

es decir,

$$\forall \varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{\varphi}_s\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

La expresión anterior es llamada la igualdad de Parseval. Además esta indica que F_s es una isometría en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, en el sentido de la métrica inducida por la norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Recordemos también que F_s, F_s^{-1} son inversas en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir,

$$\forall \varphi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n), F_s\left[F_s^{-1}(\varphi)\right] = F_s^{-1}\left[F_s(\varphi)\right] = \varphi.$$

El siguiente teorema permite definir la transformada fuerte de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con la ayuda de la transformada de Fourier en $\boldsymbol{S}$ (dado que el espacio de Schwartz es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$).

Teorema 1.2. ***(Plancherel)*** *Supóngamos que* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. *Sea* $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$. *Si* $\lim\limits_{m\to+\infty} \varphi_m = f$ *en* L^2, *entonces* $\{\hat{\varphi}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *y* $\{\check{\varphi}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *convergen en* L^2, *cuando* $m \to +\infty$. *Haciendo* $\hat{f}_s := \lim\limits_{m\to+\infty} \hat{\varphi}_m$ *en* L^2 *y* $\check{f}_s := \lim\limits_{m\to+\infty} \check{\varphi}_m$ *en* L^2, *estos límites no dependen de la escongencia de la sucesión* $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

2. *Es válida la igualdad de Parseval:*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \left\| \hat{f}_s \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\| \check{f}_s \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

3. F_s *y* F_s^{-1} *transforma* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *de manera biunívoca y son inversas entre sí en* $L^2(\mathbb{R}^n)$*; es decir,*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), F_s\left[F_s^{-1}(f)\right] = F_s^{-1}\left[F_s(f)\right] = f.$$

4. *Las transformaciones débil de Fourier (en el sentido de* $\boldsymbol{S'}$ *) y fuerte (en el sentido de* L^2*) coinciden en* $\boldsymbol{S'}$.

Demostración. Ver [2, Pág.50].

Capítulo 2

Introducción a la teoría de semigrupos

A continuación presentaremos una introducción a la teoria de C_0-**Semigrupo**, comenzaremos con algunas definiciones y ejemplos. Posteriormente se enunciaran algunos teoremas clásicos de la teoría de semigrupos.
En adelante a menos que se diga lo contrario V denotará un espacio de Banach.

Definición 2.1. *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *una familia de operadores lineales acotados en* V*. Se dice que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un* C_0-***Semigrupo*** *si cumple que*

1. $S(0) = I$*, donde* I *es la identidad en* V*.*

2. $S(t+s) = S(t)S(s), \ \ \forall t, s \geq 0.$

3. *Para cada* $u \in V, \ \ S(t)u \longrightarrow u$ *(convergencia en* V*) cuando* $t \downarrow 0.$

Nótese que el término C_0, hace referencia a la continuidad del semigrupo en $t = 0$. Por otro lado la segunda propiedad es llamada propiedad de semigrupo donde $S(t)S(s)$ se entiende como la composición de operadores. La tercera propiedad está relacionada con la continuidad de $S(t)$ con respecto a t.

Asociado a los C_0-Semigrupos está lo que se conoce como el generador infinitesimal.

Definición 2.2. *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-Semigrupo en* V. ***El generador infinitesimal*** *del semigrupo es el operador lineal* A *definido por*

$$Au = \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A) \tag{2.1}$$

con

$$D(A) = \left\{ u \in V / \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t} \quad \textit{existe} \right\}. \tag{2.2}$$

El siguiente ejemplo mostrará la relación de semigrupos y el operador exponencial, el cual en algunos casos nos permite expresar la solución de problemas de valor inicial.

Ejemplo

Si A es un operador lineal acotado en V (V espacio de Banach arbitrario), entonces $S(t) := e^{tA}$ define un C_0-Semigrupo, donde e^{tA} se define mediante la serie

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \cdots,$$

la cual está bien definida gracias a que el operador A es acotado.

Recordemos que si $A : V \longrightarrow V$ es un operador lineal y acotado se define la norma de A como

$$\|A\| := \sup_{u\neq 0_V} \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_V} < +\infty \tag{2.3}$$

Obsérvese que la norma definida anteriormente satisface las siguientes propiedades

Si A y B son operadores lineales y acotados, entonces

- $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

- Si $A = B$ tenemos que $\|A^2\| \leq \|A\|^2$, en general $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$, para $k = 2, 3...$, en donde A^k se entiende como la composición de A consigo mismo k-veces.

Veamos que $S(t) = e^{tA}$ satisface las propiedades de C_0-Semigrupo en V.

1. $S(0) = e^{0A} = I + 0A + \frac{(0A)^2}{2!} + \cdots = I$
2. Como $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ y $S(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(sA)^j}{j!}$, entonces

$$S(t)S(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(sA)^j}{j!} \right).$$

   Ahora tomando $j = m - k > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} S(t)S(s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(tA)^k}{k!} \frac{(sA)^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m! t^k A^k s^{m-k} A^{m-k}}{k!(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k s^{m-k} A^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (s+t)^m A^m = S(t+s). \end{aligned}$$

3. Veamos que $S(t)u \longrightarrow u$ cuando $t \downarrow 0$, donde $S(t)u = e^{tA}u$

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA}u - u\right\|_V &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} u - Iu \right\|_V = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} u \right\|_V \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{(tA)^k}{k!} u \right\|_V \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|(tA)^k\right\|}{k!} \|u\|_V \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} \|u\|_V . \end{aligned}$$

   Tomando $j = k - 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} \|u\|_V \leq |t| \, \|A\| \, \|u\|_V \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j \|A\|^j}{j!} = |t| \, \|u\|_V \, \|A\| \, e^{|t|\|A\|} \longrightarrow 0,$$

   cuando $t \downarrow 0$.

   Así hemos probado que $\left\|e^{tA}u - u\right\|_V \longrightarrow 0,$ cuando $t \downarrow 0$, con lo que se verifican las tres condiciones de la definición de C_0-Semigrupo para e^{tA}.

Veamos ahora, que el generador infinitesimal de e^{tA} es A, esto es, para cualquier $u_0 \in V$ se verifica que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t} = Au_0.$$

En efecto

$$\left\| \frac{e^{tA}u_0 - u_0}{t} - Au_0 \right\|_V = \left\| Au_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{k!} u_0 - Au_0 \right\|_V = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{k!} u_0 \right\|_V$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^{k-1} \|A\|^k}{k!} \|u_0\|_V \leq |t| \, \|A\|^2 \|u_0\|_V \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} = |t| \, \|A\|^2 \|u_0\|_V \, e^{|t|\|A\|} \longrightarrow 0,$$

cuando $t \downarrow 0$.

En el siguiente ejemplo mostraremos que el operador traslación en un espacio apropiado define un C_0-Semigrupo cuyo generador es un operador no acotado.

Ejemplo

Sea V el espacio de todas las funciones uniformemente continuas y acotadas en $\mathbb{R}$ con la norma del supremo. Se define $S(t)f(x) = f(t+x)$ (Operador traslación), entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ define un C_0-Semigrupo en V.

Primero mostraremos que V con la norma del supremo es un espacio de Banach.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en V, entonces $\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$ cuando $n, m \longrightarrow +\infty$, es decir,

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_\epsilon \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}, \;\; |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \tag{2.4}$$

Como para cada $x \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$,

$$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) := L_x$$

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada x en $\mathbb{R}$ le asigna L_x, y mostremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f cuando $n \to +\infty$.

Por (2.4) se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq n_\epsilon \quad \text{y} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Luego por la continuidad de la norma tenemos que,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m \geq n_\epsilon \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Así,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

por lo tanto $\|f - f_n\| \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Demostremos ahora que f es uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}$.

La función límite, f, es uniformemente continua. En efecto, para $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que f_n es uniformemente continua, es decir,

$$\exists \delta_\epsilon(n) > 0 : |x - y| < \delta_\epsilon(n) \Rightarrow \ |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.5}$$

y como $\{f_n\}$ converge a f, cuando $n \to \infty$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $n^* \geq N$ tenemos que existe $\delta_\epsilon(n^*)$ que satisface (2.5). Por lo tanto si $|x - y| < \delta_\epsilon(n^*)$ entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(y)| + |f_{n^*}(y) - f(y)| < \epsilon.$$

Por otro lado, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \epsilon + M_n, \text{si } n \geq N.$$

Así, f es acotada, de donde $f \in V$, lo que prueba que V es un espacio de Banach.

Mostraremos que los operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ con $S(t)f(x) = f(t + x)$, definidos en V son lineales y acotados.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in V$.

1. **Linealidad**.

   $S(t)(\alpha f+\beta g)(x) = (\alpha f+\beta g)(t+x) = \alpha f(t+x)+\beta g(t+x) = \alpha S(t)f(x)+\beta S(t)g(x)$

2. **Acotación**.

$$\|S(t)f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |S(t)f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(t+x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|$$

   luego

$$\|S(t)\| = \sup_{f\in V, f\neq 0} \frac{\|S(t)f\|}{\|f\|} \leq 1.$$

Verifiquemos que el operador traslación define un C_0-Semigrupo

1. $S(0)f(x) = f(0+x) = f(x)$ (Identidad en V)

2. $S(t+s)f(x) = f(t+s+x) = S(t)f(s+x) = S(t)S(s)f(x)$.

3. Dado $g \in V$,

$$\|S(t)g - g\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |S(t)g(x) - g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+t) - g(x)| \ \to 0 \text{ cuando } t \downarrow 0.$$

   Es decir para cada $g \in V$ se cumple que $S(t)g \to g$ cuando $t \downarrow 0$.

Determinemos el generador infinitesimal del semigrupo asociado a los operadores de traslación.

Notemos que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)f(x) - f(x)}{t} = D^+ f(x), \text{ siempre que dicho límite exista,}$$

donde D^+ es la derivada por derecha de la función f.

Así podemos ver que, si $f \in D(A)$, entonces $D^+ f$ existe para cada punto, además es acotada y uniformemente continua.

Usando la fórmula de Taylor tenemos que

$$\frac{f(x)-f(x-t)}{t} = D^{+}f(x-t) + \frac{o(t)}{t} \to D^{+}f(x) \text{ cuando } t \downarrow 0$$

por la continuidad de $D^{+}f$. Por lo tanto,

$$D^{-}f(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x)-f(x-t)}{t} = D^{+}f(x)$$

existe en todo punto y además $D^{-}f = D^{+}f$. Se sigue que f es diferenciable en todo punto. Así,

$D(A) = \{f \in V / f'$ existe en todo punto y f' es uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}\}$

y

$$Af = \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} = f'$$

Teorema 2.1. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-Semigrupo en V. Existe $M \geq 1$ y w tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{tw}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Observación. Cuando $t = 0$ $\|S(t)\| = \|I\|$ y $\|Ix\| \leq \|I\|\,\|x\|$ de donde $\|x\| \leq \|I\|\,\|x\|$, es decir $1 \leq \|I\| \leq M$ lo cual explica que $M \geq 1$.

Demostración. Ver [7, Pág.175].

Teorema 2.2. *Sean $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-Semigrupo en V, sea A su generador infinitesimal y $u \in D(A)$, entonces*

$$S(t)u \in C^1([0,\infty); V) \cap C([0,\infty); D(A)) \text{ y}$$

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au.$$

Demostración. Sea $u \in D(A)$

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t)u = \frac{S(h)S(t)u - S(t)u}{h} = \frac{S(h+t)u - S(t)u}{h} = \frac{S(t)S(h)u - S(t)u}{h}$$

$$= S(t)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) \to S(t)Au, \text{ cuando } h \downarrow 0.$$

Luego para todo $u \in D(A), S(t)u \in D(A)$. Además $AS(t)u = S(t)Au = D^+S(t)u$.

Por otro lado

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right).$$

Ahora

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right) + \left(S(t-h) - S(t)\right)Au.$$

Así,

$$\left\|\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au\right\| \leq \left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right)\right\| + \left\|\left(S(t-h) - S(t)\right)Au\right\|.$$

Pero

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right)\right\| \leq Me^{wt}\left\|\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right\| \to 0 \text{ cuando } h \downarrow 0$$

y

$$\begin{aligned}
\|(S(t-h)-S(t))Au\| &= \|S(t-h)Au - S(t)Au\| \\
&= \|S(t-h)Au - S(t-h)S(h)Au\| \\
&\leq \|S(t-h)\|\,\|Au - S(h)Au\| \\
&\leq Me^{tw}\,\|S(h)Au - Au\| \to 0, \text{cuando } \; h \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Así $D^{-}S(t)u = S(t)Au = D^{+}S(t)u$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au.$$

Por otro lado como $S(t)u$ es continua en V, entonces también lo es en $D(A)$. Esto completa la demostración del teorema.

Observemos que si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-Semigrupo, con generador infinitesimal A, entonces puede mostrarse que $u(t) = S(t)u_0$ define la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad \text{con} \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

siempre que $u_0 \in D(A)$. Esto muestra que existe una estrecha relación entre los semigrupos de operadores y las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Antes de enunciar el siguiente lema notemos que [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(S(\tau) - S(t))u\, d\tau &= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} S(\tau)u\, d\tau - \int_t^{t+h} S(t)u\, d\tau\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} S(\tau)u\, d\tau - [(t+h)S(t)u - tS(t)u]\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} S(\tau)u\, d\tau - hS(t)u\right] \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\, d\tau - S(t)u. \end{aligned}$$

Lema 2.1. *Para todo $u \in V$, se tiene la siguiente igualdad*

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\, d\tau = S(t)u.$$

[1] Las integrales correponden a la integral de Bochner, para mayor detalle ver *Fundamentos de Análisis Matemático*, B. Cascales y S. Troyanski, Universidad de Murcia 2007.

Demostración.

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\,d\tau - S(t)u\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (S(\tau)u - S(t))u\,d\tau\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|S(\tau)u - S(t)u\|\,d\tau.$$

Como $S(\delta)S(t)u \to S(t)u$ cuando $\delta \downarrow 0$, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta^*(\epsilon) > 0$ tal que si $|\delta| < \delta^*$ entonces $\|S(\delta)S(t)u - S(t)u\| < \epsilon$.

Es decir, $\|S(t+\delta)u - S(t)u\| < \epsilon$ siempre que $o < \delta < \delta^* = h$, por lo tanto si $\tau = t+\delta$ se tiene que $0 < \tau - t = \delta < h$, que es equivalente a tener $\|\tau - t\| < h$, con h suficientemente pequeño implica que $\|S(\tau)u - S(t)u\| < \epsilon$.

De donde

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)ud\tau - S(t)u\right\| < \epsilon \text{ y así obtenemos el resultado.}$$

A continuación presentaremos algunas propiedades del generador infinitesimal de un C_0-Semigrupo, para ello usaremos las siguientes definiciones.

Definición 2.3. *Sean V y W espacios de Banach, A un operador lineal (con $D(A) \subset V$) tal que $A : D(A) \longrightarrow W$.*

1. *Diremos que A es un operador* ***acotado*** *si existe $C > 0$ tal que*

$$\|Au\|_W \leq C\|u\|_V \text{, para cada } u \in D(A)$$

   de lo contrario se dice que A es no acotado.

2. *Diremos que A es un operador* ***densamente definido*** *si $\overline{D(A)} = V$.*

3. *Diremos que A es un operador* ***cerrado*** *si para toda sucesión $\{v_n\} \subseteq V$ tal que $v_n \to v$, cuando $n \to \infty$ y $Av_n \to u$, $n \to \infty$ se tiene que*

$$v \in D(A) \text{ y } Av = u.$$

Teorema 2.3. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en V. Entonces para todo $u \in V$,*

$$\int_0^t S(\tau)u\,d\tau \in D(A) \qquad y \;\; A\left(\int_0^t S(\tau)u\,d\tau\right) = S(t)u - u.$$

Demostración. Dado $h > 0$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)u\,d\tau &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t (S(\tau+h)u - S(\tau)u)\,d\tau\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(\tau+h)u\,d\tau - \int_0^t S(\tau)u\,d\tau\right].\end{aligned}$$

De aqui, haciendo $y = \tau + h$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)u\,d\tau &= \frac{1}{h}\left[\int_h^{t+h} S(y)u\,dy - \int_0^t S(\tau)u\,d\tau\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_h^t S(\tau)u\,d\tau + \int_t^{t+h} S(\tau)u\,d\tau - \int_0^h S(\tau)u\,d\tau - \int_h^t S(\tau)u\,d\tau\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} S(\tau)u\,d\tau - \int_0^h S(\tau)u\,d\tau\right].\end{aligned}$$

Ahora por el Lema 2.1

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\,d\tau - \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,d\tau = S(t)u - S(0)u = S(t)u - u,$$

de donde

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)u\,d\tau \;\;\text{existe},$$

es decir,

$$\int_0^t S(\tau)u\,d\tau \in D(A).$$

Además por la definición de generador infinitesimal

$$A\left(\int_0^t S(\tau)u\,d\tau\right) = S(t)u - u.$$

Corolario 2.1. *Si A es el generador infinitesimal de un C_0-Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, entonces A es cerrado y densamente definido.*

Demostración. Sea $u \in V$. Entonces

$$\int_0^h S(\tau)u\, d\tau \in D(A),$$

por el Teorema 2.3 y por el Lema 2.1 tenemos que

$$\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\, d\tau \to S(0)u = u,$$

así $D(A)$ es denso en V.

Probemos ahora que A es un operador cerrado; supongamos $v_n \in D(A)$ tal que $v_n \to v$ en V y además $Av_n \to u$ en V, debemos mostrar que $v \in D(A)$ y que $Av = u$.

Obsérvese que

$$\frac{S(h)v - v}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(h)v_n - v_n}{h}$$

además como

$$\frac{d(S(t)v_n)}{dt} = S(t)Av_n,$$

integrando respecto a t tenemos

$$\int_0^h \frac{d(S(t)v_n)}{dt} dt = \int_0^h S(t)Av_n\, dt$$

y

$$S(h)v_n - S(0)v_n = \int_0^h S(t)Av_n\, dt$$

de donde

$$\frac{S(h)v - v}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(h)v_n - v_n}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Av_n\, d\tau.$$

Pero como $Av_n \to u$ se sigue que

$$\frac{S(h)v - v}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\, d\tau \to u \text{ cuando } h \to 0.$$

Esto es $v \in D(A)$ y $Av = u$. Con lo cual se finaliza la prueba.

Este corolario implica que si un operador no acotado genera un C_0-Semigrupo entonces dicho operador debe ser cerrado y densamente definido.

Teorema 2.4. *Si dos C_0-Semigrupos $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ tienen el mismo generador infinitesimal A, entonces ellos son identicos.*

Demostración. Para $u \in D(A)$ y $t > 0$, consideremos la siguiente función

$$F(s) = S_1(t-s)S_2(s)u.$$

Del Teorema 2.2, podemos afirmar que

$$\frac{dF(s)}{ds} = -AS_1(t-s)S_2(s)u + S_1(t-s)AS_2(s)u = 0$$

de donde la función $F(s)$ es constante, y así $F(t) = F(0)$. Luego

$$S_1(t-t)S_2(t)u = S_1(t)S_2(0)u$$

$$S_1(0)S_2(t)u = S_1(t)S_2(0)u$$

$$S_2(t)u = S_1(t)u, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Pero como $D(A)$ es denso en V entonces $S_2(t)u = S_1(t)u$, para todo $u \in V$ y para todo $t \geq 0$, lo que prueba el resultado.

El siguiente corolario establece una relación entre el operador exponencial y los semigrupos.

Corolario 2.2. *Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-Semigrupo con A un generador infinitesimal acotado entonces $S(t) = e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$.*

Definición 2.4. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-Semigrupo. Decimos que es un **Semigrupo contractivo** (Semigrupo de contracción), si se cumple que $\|S(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.*

Teorema 2.5. *(**Hille-Yosida**) Un operador lineal no acotado A en un espacio de Banach V es el generador infinitesimal de un Semigrupo contractivo, si y sólo si,*

1. *A es cerrado.*

2. *A es densamente definido.*

3. *Para todo $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado y $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

Demostración. Ver [7, Pág 178]

Definición 2.5. *Sea $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ una familia de operadores definidos en un espacio de Hilbert H que satisfacen las siguientes propiedades*

1. *Para todo $t \in \mathbb{R}, T(t) : H \longrightarrow H$ es una isometría; lo que implica*

$$\|T(t)f\|_H = \|f\|_H \text{, para todo } f \in H.$$

2. *$T(t)T(s) = T(t+s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

3. *$T(0) = I$, con I la identidad en H.*

4. *Fijando $f \in H$, la función $\phi_f : \mathbb{R} \to H$ definida por $\phi_f(t) = T(t)f$ es una función continua.*

*Entonces $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es llamado un **grupo unitario de operadores**.*

Ejemplo

En este ejemplo consideraremos una vez más el operador traslación del que ya probamos que define un C_0-Semigrupo en un espacio de Banach V adecuado (funciones uniformemente continuas y acotadas en $\mathbb{R}$). Ahora si lo definimos en el espacio de Hilber $L^2(\mathbb{R})$, se puede demostrar que define un grupo unitario de operadores y además que describe la solución $u(x,t) = T(t)f(x)$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

A continuación enunciaremos un teorema conocido como teorema de M.H. Stone que nos permite caracterizar los grupos unitarios de operadores.

Teorema 2.6. ***(M.H Stone)*** *La familia de operadores $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ definidos en un espacio de Hilbert H es un grupo unitario de operadores si y sólo si existe un operador A autoadjunto (no necesariamente acotado) tal que*

$$T(t) = e^{itA}$$

si se considera $D(A)$ el dominio del operador A, el cual es denso en H, y $f \in D(A)$, entonces tenemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} = iAf.$$

Demostración. Ver [15].

Otros resultados que serán de gran utilidad en el desarrollo del siguiente capítulo son enunciados seguidamente

Definición 2.6 (Convolución). *Formalmente la* ***convolución*** *de dos funciones f y g se define como la función*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

siempre y cuando dicha integral exista.

Dicha función satisfase las siguientes propiedades

Propiedades Sean f y g funciones para las cuales los términos que aparecen a continuación esten definidos.

1. Si α es un multi-índice,

$$D^{\alpha}(f * g) = D^{\alpha} f * g = f * D^{\alpha} g.$$

2. $f * g = g * f$.

3. $(f * g)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

4. $(f * g)\check{\ }(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \check{f}(\xi)\check{g}(\xi)$

Obsérvese que de la primera propiedad, si f es $|\alpha|$-veces diferenciable independiente de que g lo sea se tiene que

$$D^{\alpha}(f * g) = D^{\alpha} f * g.$$

En el caso que g sea diferenciable del mismo orden, tendremos la otra igualdad.
Para consultar las demostraciones de estas propiedades ver [3, Cap. 6].

Teorema 2.7 (Desigualdad de Young)**.** *Supongamos que $p, q, r \in [1, +\infty]$ cumplen que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ con la estimación*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostracion ver [4, Pág. 17].

Capítulo 3

El semigrupo de la Ecuación del Calor

En este capítulo consideraremos el problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u \quad \text{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Para dar solución a este problema vamos a utilizar fuertemente la teoría desarrollada en el primer capítulo, inicialmente supondremos que nuestras funciones $u(x,t)$ pertenecen al espacio de Schwartz. En tal caso para resolver dicho problema vamos a aplicar propiedades de la transformada de Fourier y utilizaremos resultados de la convolución y de aproximaciones de la identidad. Comenzaremos con la siguiente definición

Definición 3.1 (Aproximación de la identidad). *Para cada $a > 0$ sea $\varphi_a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y supongase que cumplen las siguientes propiedades*

1. $\varphi_a(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

2. $\|\varphi_a\|_1 = 1 \ \ \forall a > 0.$

3. *Para todo* $r > 0$

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_{|x| \geq r} \varphi_a(x)dx = 0,$$

en este caso decimos que $\{\varphi_a\}$ es una aproximación de la identidad.

Es necesario mostrar que tal objeto existe. Con el siguiente teorema se prueba tal existencia.

Teorema 3.1. *Sea* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\varphi(x) \geq 0 \ \forall x$ *y* $\|\varphi\|_1 = 1$. *Entonces la familia de funciones*

$$\varphi_s(x) = \left(\frac{1}{s}\right)^n \varphi\left(\frac{x}{s}\right) \ \text{con } s \in (0, \infty),$$

es una aproximación de la identidad.

Demostración. ver [6, Cap. 7].

El siguiente teorema justifica el nombre de aproximación de la identidad.

Teorema 3.2. *Para toda* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ *se cumple que*

$$\lim_{a \downarrow 0} \|f * \varphi_a - f\|_p = 0$$

Demostración ver [4].

Volviendo al problema de valor inicial (3.1) y haciendo uso de las propiedades de la transformada de Fourier podemos escribir nuestro problema inicial de la siguiente forma

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) \quad \text{con} \quad t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) \quad \xi - \text{parámetro}, \end{cases} \tag{3.2}$$

que es un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual resolvemos con una de las técnicas asociada a las variables separables, para así obtener la siguiente expresión para la solución

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi).$$

Por otro lado si $g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, se puede probar que $\hat{g}(\xi) = (2t)^{\frac{n}{2}}e^{-t|\xi|^2}$, lo cual permite escribir $e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$ en términos de la transformada de Fourier. En ese caso tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t) &= (2t)^{-\frac{n}{2}}\hat{g}(\xi)\hat{u}_0(\xi)\\ &= (2t)^{-\frac{n}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(g*u_0)\widehat{\ }(\xi)\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(g*u_0)\widehat{\ }(\xi).\end{aligned}$$

Ahora si aplicamos transformada inversa de Fourier a la anterior igualdad obtenemos que la solución de (3.1) está dada por

$$\begin{aligned}u(x,t) &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(g*u_0)(x)\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}*u_0)(x)\\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)dy.\end{aligned}$$

La expresión anterior está bien definida debido a que $u_0 \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$.
Consideremos la función $K(x)$ llamada el núcleo del calor, definida por

$$K(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

que es una función infinitamente diferenciable, integrable, acotada y además

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x)dx = 1.$$

Ahora si definimos

$$K_t(x) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}K(\frac{x}{\sqrt{t}}) = (4t\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

se puede probar que su transformada de Fourier viene dada de la siguiente manera

$$\hat{K}_t(\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-t|\xi|^2}$$

y que además $\{K_t : t > 0\}$ es una aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$, ya que satisface las condiciones del Teorema (3.1) con $\varphi(x) = k(x)$ y $s = \sqrt{t}$.

A $K_t(x)$ se le conoce como *solución fundamental* de la ecuación del calor, y además se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_t(x)|\, dx = (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = 1 \text{ (tomando } u = x/2\sqrt{t}).$$

Esto es, $\|K_t\|_1 = 1$, para todo $t > 0$.

Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$T_t f(x) = (K_t * f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \sqrt{t} y) e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy,$$

la última igualdad se obtiene haciendo el cambio de variable $u = \frac{y-x}{\sqrt{t}}, t > 0$. Para $t = 0$ se define $T_0 f = f$.

Obsérvese que, por la desigualdad de Young, $T_t f$ está bien definida para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. En particular para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$(T_t f)\widehat{\ }(\xi) = (K_t * f)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{K}_t(\xi) \hat{f}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi),$$

y dado que el operador transformada es inyectivo, usando la definición de transformada inversa de Fourier, podemos escribir a $T_t f(x)$ de la siguiente forma

$$T_t f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi) e^{\langle x, \xi \rangle} dx.$$

A continuación enunciaremos un teorema que nos proporciona propiedades importantes asociadas a la familia de operadores $\{T_t\}_{t \geq 0}$.

Teorema 3.3. *La familia de operadores* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *satisface las siguientes propiedades*

1. *C_0-Semigrupo: Dicha familia es un C_0-Semigrupo en $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$.*
2. *Generador infinitesimal: el operador Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el generador infinitesimal de $\{T_t\}_{t\geq 0}$.*
3. *Propiedad conservativa y de positividad: $T_t 1 = 1$ y si $f \geq 0$ entonces $T_t f \geq 0$ para todo $t \geq 0$.*
4. *Propiedad de contractividad: para todo $t \geq 0$ y $1 \leq p \leq \infty$,*
$$\|T_t f\|_p \leq \|f\|_p .$$
5. *Propiedad de continuidad fuerte en L^p: para todo $1 \leq p < \infty$ y todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la aplicación $t \longrightarrow T_t f$ es continua de $[0, \infty)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
6. *Propiedad de simetría: para todo $t \geq 0$, T_t es un operador autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir:*
$$\int_{\mathbb{R}^n} T_t f(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) T_t g(x) dx.$$

Demostración

1. Dicha familia es un C_0-Semigrupo en el espacio de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.
La linealidad de estos operadores se obtiene gracias a las propiedades de convolución, la acotación se sigue de la continuidad del operador T_t que se probará más adelante. A continuación probaremos las tres condiciones de la definición de semigrupo.
   - $T_0 f = f$ por definición.

- Propiedad de semigrupo: $T_{t_1+t_2}f = T_{t_1}(T_{t_2}f)$

  Inicialmente haremos la prueba para funciones f en el espacio de Schwartz. Usando las propiedades de la transformada de Fourier respecto a la convolución tenemos que

$$
\begin{aligned}
(T_{t_1+t_2}f(\xi))\widehat{\ } &= (K_{t_1+t_2} * f)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi)^{n/2}(K_{t_1+t_2})\widehat{\ }\hat{f}(\xi) \\
&= e^{-(t_1+t_2)|\xi|^2}\hat{f}(\xi) = e^{-t_1|\xi|^2}(e^{-t_2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)) \\
&= (2\pi)^{n/2}\widehat{K}_{t_1}(\xi)(2\pi)^{n/2}\widehat{K}_{t_2}(\xi)\hat{f}(\xi) \\
&= (K_{t_1} * (K_{t_2} * f))\widehat{\ }(\xi).
\end{aligned}
$$

  Por la inyectividad del operador transformada de Fourier en $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$
T_{t_1+t_2}f(x) = (K_{t_1} * (K_{t_2} * f))(x) = (K_{t_1} * (T_{t_2}f))(x) = (T_{t_1}(T_{t_2}f(x))
$$

  Por otro lado, veamos que para cada $t \geq 0$ T_t es un operador continuo, esto es, dado $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\{\varphi_n\}$ una sucesión en $L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_n \to f$ entonces $T_t\varphi_n \to T_tf$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\|T_t\varphi_n - T_tf\|_p &= \|K_t * \varphi_n - K_t * f\|_p \text{ (prop. convolución)} \\
&= \|K_t * (\varphi - f)\|_p \text{ (Desig. de Young)} \\
&\leq \|K_t\|_1 \|\varphi_n - f\|_p \\
&= \|\varphi_n - f\|_p \to 0, \text{cuando } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

  Ahora bien, como $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ y T_t es un operador continuo entonces la propiedad de semigrupo se satisface para funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$.

- Veamos que para un f fijo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, $T_t f \to f$, cuando $t \downarrow 0$, en efecto,

  dado que K_t es una aproximación de la identidad tenemos que

$$\lim_{t\downarrow 0} \|K_t * f - f\|_p = \lim_{t\downarrow 0} \|T_t f - f\|_p = 0.$$

2. Para probar que el generador infinitesimal del semigrupo del calor es el operador Laplaciano, definiremos $u(x,t) = T_t f(x)$, usaremos el resultado del Teorema (2.2) y la propiedad del operador derivada respecto a la convolución.

   Sea A el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$, veamos que A coincide con el operador Laplaciano. Como

$$\Delta K_t(x) = \frac{1}{2(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{|x|^2}{2t^2} - \frac{n}{t} \right] e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{3.4}$$

   entonces

$$\begin{aligned} \Delta u(x,t) &= \Delta[K_t * f](x) = [\Delta K_t * f](x) \\ &= \frac{1}{2(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{|y-x|^2}{2t^2} - \frac{n}{t} \right] e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

   Dado que el generador infinitesimal de un C_0-Semigrupo es único (Teorema 1.5.4) y además $\frac{d}{dt}(T_t f) = AT_t f$ entonces $A = \Delta$.

3. *Propiedad conservativa y de positividad*

   La primera igualdad se obtiene de forma inmediata haciendo el siguiente cambio de variable $u = \frac{y-x}{2\sqrt{t}}$, esto es

$$T_t 1 = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} 1dy = \frac{(2\sqrt{t})^n}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2} du = \frac{1}{(\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = 1.$$

   Con respecto a la positividad de $T_t f$ es clara dado que K_t es siempre positiva.

4. *Propiedad de contratividad:* Utilizando la desigualdad de Young (Teorema 2.7) con $r = p$ y $q = 1$ tenemos que

$$\|T_t f\|_p = \|K_t * f\|_p \le \|f\|_p \|K_t\|_1 = \|f\|_p .$$

Podemos decir entonces que $\{T_t\}_{t\ge 0}$ es un semigrupo contractivo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p < \infty$.

5. *Propiedad de continuidad fuerte en L^p*

Para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la aplicación $t \to T_t f$ es continua de $[0, +\infty)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Veamos que para un f fijo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $T_t f \to T_{t_0} f$, si $t \to t_0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \|T_t f - T_{t_0} f\|_p &= \lim_{t\to t_0} \|K_t * f - K_{t_0} * f\|_p \\
&= \lim_{t\to t_0} \|(K_t - K_{t_0}) * f\|_p \\
&\le \lim_{t\to t_0} \|(K_t - K_{t_0})\|_1 \|f\|_p \\
&= \lim_{t\to t_0} \left\| (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} - (4t_0\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t_0}} \right\|_1 \|f\|_p \\
&= \left\| \lim_{t\to t_0} (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} - (4t_0\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t_0}} \right\|_1 \|f\|_p = 0.
\end{aligned}$$

6. *Propiedad de simetría*

Para probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_t f(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) T_t g(x) dx,$$

se usa el Teorema de Fubini y se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} T_t f(x) g(x) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy) g(x) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(x) dx) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) T_t g(y) dy.
\end{aligned}$$

A continuación enunciaremos una proposición que es muy importante ya que garantiza la existencia de la solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor, también dice que la solución es $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ a pesar de que su dato inicial es una función en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 3.1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ y $u(x,t) = T_t f(x)$ entonces $u(x,t)$ es una función $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ y es solución del siguiente problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \textit{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Demostración.
Como Δ es el generador infinitesimal de $\{T_t\}_{t\geq 0}$, por el Teorema (2.2) se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial T_t f}{\partial t}(x,t) = \Delta T_t f(x) = \Delta u(x,t).$$

Además $u(x,0) = T_0 f(x) = f(x)$.
Dado que $K_t(x)$ es infinitamente diferencible se obtiene $u(x,t)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$.
En este momento estamos en condiciones de responder parte de las preguntas que se plantearon al inicio de este trabajo, esto gracias a los resultados del Teorema(3.3) y a la proposición anterior.

- ¿Tendría sentido definir la solución de la ecuación del calor de forma similar a la de los problemas planteados en la introducción de este trabajo, es decir, $u(x,t) = e^{t\Delta} u_0(x)$?
  Si, pues sabemos que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un C_0-Semigrupo cuyo generador infinitesimal es Δ de donde $T_t f = e^{t\Delta} f$, así que por la proposición (3.1) se sigue que $u(x,t) = T_t u_0 = e^{t\Delta} u_0(x)$ es la única solución del problema de valor inicial (3.1), además recordemos que para los problemas planteados a manera de motivación en la introducción de

este trabajo se definió $u(t) = e^{tA}u_0$ como su única solución (para A un número real o A una matriz cuadrada).

Nótese que en dichos problemas se define $e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$, mientras que para la ecuación del calor no es posible definir el operador $e^{t\Delta}$ como una serie dado que no tiene sentido la expresión $e^{t\Delta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t\Delta)^k}{k!}$.

- ¿Cómo definir el operador $e^{t\Delta}$?

  Si consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u \quad \text{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

  el operador $e^{t\Delta}$ asigna a u_0 la solución u del problema anterior, es decir,

$$e^{t\Delta}u_0(x) := u(x,t).$$

  Por otro lado si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ podemos definir $e^{t\Delta}$ como

$$e^{t\Delta}f(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy.$$

  Las definiciones anteriores para $e^{t\Delta}$ con $1 \leq p < \infty$ son equivalentes, dado que

$$u(x,t) = e^{t\Delta}u_0(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy,$$

  para $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

- ¿En qué tipo de espacio está bien definido dicho operador y qué propiedades tiene?

  Para que la expresión anterior tenga sentido es suficiente que el operador $e^{t\Delta}$ esté definido en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$; este operador cuenta con muy buenas propiedades que enunciaremos a continuacion

1. La familia de operadores $\left\{e^{t\Delta}\right\}_{t\geq 0}$ es un C_0-Semigrupo contractivo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ cuyo generador infinitesimal es el Δ.

2. El operador T_t es un operador continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

3. Para todo $1 \leq p < \infty$ y todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la aplicación $t \longrightarrow e^{t\Delta}f$ es continua de $[0, \infty)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

4. Para todo $t \geq 0$, $e^{t\Delta}$ es un operador autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{t\Delta}f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{t\Delta}g(x)dx.$$

5. La función $u(x,t) = e^{t\Delta}u_0$ con $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ es una función $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ y además es solución del siguiente problema de valor inicial
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \text{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Para el caso de la ecuación del calor no homogénea
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t) \quad \text{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.5}$$

una solución se puede determinar usando el principio de Duhamel, esto es, si consideramos la función definida por
$$w(x,s) = T_{t-s}u(x,s), \quad 0 \leq s \leq t$$

con $u(x,t)$ una solución de (3.5),

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s}(x,s) &= -\Delta T_{t-s}u(x,s) + T_{t-s}\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\\ &= -\Delta T_{t-s}u(x,s) + T_{t-s}\Delta u(x,s) + T_{t-s}f(x,s)\\ &= T_{t-s}f(x,s).\end{aligned}$$

Integrando respecto a s desde 0 hasta t, tenemos que

$$w(x,t) - w(x,0) = \int_0^t T_{t-s}f(x,s)ds$$

es decir,

$$u(x,t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s}f(x,s)ds = e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(x,s)ds \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}f(y,s)dyds. \tag{3.7}$$

Obsérvese que si en (3.5) el dato inicial es identicamente cero entonces la solución esta dada por

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}f(y,s)dyds. \tag{3.8}$$

A continuación introduciremos un teorema que nos dá condiciones bajo las cuales podemos garantizar la existencia de solución del siguiente problema

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t) \quad \text{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\\ u(x,0) = 0.\end{cases} \tag{3.9}$$

Teorema 3.4. *Sea u dada por (3.8) y $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ con soporte compacto, entonces*

- $u \in {}^1C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t) \quad con \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$
- $u(x,t) \to 0$, *cuando* $(x,t) \to (x_0,0)$, *para cada punto* $x_0 \in \mathbb{R}^n, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$.

Demostración Ver [10, Pág 50].

Considerando los teoremas de existencia de solución del problemas de Cauchy asociados a la ecuación del calor homogénea (3.1) y no homogénea (con dato inicial identicamente cero) (3.9) se puede garantizar la existencia de solución para el siguiente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t) \quad \text{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Considerando la función

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

donde $u_1(x,t), u_2(x,t)$ son soluciones de (3.1) y (3.9) respectivamente.

Obsérvese que la afirmación anterior tambien se ve reflejada en (3.7) en donde el primer término de esta expresión es la solución del problema homogéneo con dato inicial distinto de cero y el segundo término es la solución del problema no homogéneo con dato inicial identicamente cero.

Hasta aquí hemos discutido la existencia de la solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor (homogénea y no homogénea), pero es natural preguntarnos ¿será única esta solución?, ¿bajo que condiciones se garantiza unicidad de la solución ?

El siguiente teorema nos permite dar respuestas a las anteriores preguntas.

Teorema 3.5. ***(Unicidad para el problema de Cauchy)***

Sea $T > 0$, *supongamos que* $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *y* $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$. *Entonces el problema*

---

[1] $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) = \left\{ u : u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \right\}$

(3.9) admite a lo sumo una solución clásica $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *dentro de la clase de funciones que, para ciertas constantes positivas* A *y* a*, verifican*

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Ver[10, Pág. 59]

Capítulo 4

El semigrupo de la Ecuación de Schrödinger

En este capítulo estudiaremos el semigrupo para la ecuación de Schrödinger, cuyo problema de Cauchy asociado es el siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta u \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Para dar solución a este problema de ecuaciones en derivadas parciales, supondremos inicialmente que las funciones $u(x,t)$ pertenece a los espacios de Schwartz; usaremos la transformada de Fourier en $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S}'$ con algunas de sus propiedades.

Tomando transformada de Fourier respecto a la variable espacial $x \in \mathbb{R}^n$ en (4.1) se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} = -i\,|\xi|^2\,\hat{u}(\xi,t) \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{4.2}$$

La solución de este problema de ecuaciones ordinarias, con parámetro ξ se puede escribir como

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi).$$

Considerando $g(x) = e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$ probaremos que $\hat{g}(\xi) = \tilde{C}_n(2t)^{n/2}e^{-it|\xi|^2}$ con $\tilde{C}_n = e^{in\frac{\pi}{4}}$.
Obsérvese que la función g no pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$, pero si a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto no es posible calcular su tranformada de Fourier en dichos espacios, así que lo haremos en el sentido de $\boldsymbol{S'}$.
Dado que g esta en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, usando la identificación, existe una función generalizada $T_g \in \boldsymbol{S'}$. De donde $\hat{T}_g \in \boldsymbol{S'}$, por otra parte de existir una función $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, tal que $T_h = \hat{T}_g$ entonces podemos decir que $\hat{g} = h$ en el sentido de $\boldsymbol{S'}$.
Luego de esta observación podemos determinar la transformada de Fourier para la función g de la siguiente manera

$$\hat{g}(\xi) = (e^{\frac{i|x|^2}{4t}})\hat{}(\xi) = \lim_{\epsilon \to 0}[(e^{\frac{(i+\epsilon)|x|^2}{4t}})\hat{}(\xi)] \text{ en } \boldsymbol{S'}$$

y

$$e^{\frac{(i+\epsilon)|x|^2}{4t}} \in L^1(\mathbb{R}^n), \text{ con } (e^{\frac{(i+\epsilon)|x|^2}{4t}})\hat{}(\xi) = [2(\epsilon + i)t]^{n/2}e^{-(\epsilon+i)t|\xi|^2}$$

entonces tomando límite cuando $\epsilon \to 0$ obtenemos que

$$(e^{\frac{i|x|^2}{4t}})\hat{}(\xi) = \tilde{C}_n(2t)^{n/2}e^{-it|\xi|^2}.$$

Luego $e^{-it|\xi|^2} = C_n(2t)^{-n/2}\hat{g}(\xi)$ con $C_n = e^{-in\frac{\pi}{4}}$, así la solución del problema (4.2) está dada por la siguiente expresión

$$\hat{u}(\xi, t) = C_n(2t)^{-n/2}\widehat{g}(\xi)\widehat{u_0}(\xi) = (4\pi it)^{-n/2}(g * u_0)\hat{}(\xi).$$

Teniendo en cuenta los análisis que se han hecho hasta el momento definiremos la siguiente familia de operadores

$$\begin{aligned} T(t)u_0(x) &:= (C_n(4\pi t)^{-n/2}e^{\frac{i|.|^2}{4t}} * u_0)(x) \\ &= C_n(4\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}}u_0(y)dy = u(x,t) \end{aligned}$$

Donde el operador $T(t)$ con $t \in \mathbb{R}$, definido en un espacio funcional H adecuado, le asigna a $u_0(x)$ la expresión dada por una candidata a solución $u(x,t)$ del problema de valor inicial (4.1).

Observación. De la definición del operador $T(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{T}(t)u_0(\xi) &= ((C_n(4\pi t)^{-n/2}e^{\frac{i|.|^2}{4t}} * u_0))\widehat{\ }(\xi) \\ &= C_n(4\pi t)^{-n/2}(2\pi)^{n/2}(e^{\frac{i|.|^2}{4t}})\widehat{\ }(\xi)\hat{u}_0(\xi) \\ &= (e^{-it|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi)). \end{aligned}$$

Así,

$$T(t)u_0 = (e^{-it|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi))\check{\ }(x).$$

La buena definición de estos operadores se probará más adelante, inicialmente de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, posteriormente de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y finalmente en el teorema (4.2) se probará de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ con p el conjugado de q y $1 \leq p \leq 2$. Para demostrar dicho teorema es necesario el siguiente resultado

Teorema 4.1. ***(Teorema de interpolación de Riesz-Thorin)***
Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, y $0 < \theta < 1$, p y q tales que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \ \text{(combinación convexa.)}$$

Si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \quad \text{para } f \in L^{p_0}$$

y

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1} \quad \textit{para } f \in L^{p_1},$$

entonces

$$\|Tf\|_{q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p} \quad \textit{para } f \in L^{p}.$$

Demostración. Ver[4, Pág. 16]

A continuación se enunciará y probará ciertas propiedades que satisface la familia de operadores $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$.

Teorema 4.2. *La familia de operadores $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ satisface las siguientes propiedades*

1. *Grupo unitario: La familia $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es un grupo unitario de operadores en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Generador infinitesimal: El operador $i\Delta = i\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ es el generador infinitesimal del grupo $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$.*
3. *Propiedad de continuidad: Si $t \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $1 \leq p \leq 2$ entonces tenemos que*

$$T(t) : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$$

es continuo y

$$\|T(t)f\|_{q} \leq c\,|t|^{-n/2(1/p-1/q)} \|f\|_{p}.$$

Demostración.

1. Grupo unitario de operadores en $L^2(\mathbb{R}^n) = H$

- Para todo $t \in \mathbb{R}$, $T(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es una isometría, en efecto, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|T(t)f\|_2 &= \left\|(e^{-it|\xi|^2}\hat{f}(\xi))\check{\ }(\cdot)\right\|_2 \\
&= \left\|e^{-it|\cdot|^2}\hat{f}(\cdot)\right\|_2 \text{ (igualdad de Parseval)} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-it|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-it|\xi|^2}\right|^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= \left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 .
\end{aligned}$$

- Veamos que $T(t+s)f = T(t)T(s)f$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $t, s \in \mathbb{R}$ (Propiedad de grupo).

$$\begin{aligned}
T(t)T(s)f &= T(t)(e^{-is|\xi|^2}\hat{f})\check{\ }(x) \\
&= (e^{-it|\xi|^2}(e^{-is|\xi|^2}\hat{f}))\check{\ }(x) \\
&= (e^{-i(t+s)|\xi|^2}\hat{f})\check{\ }(x) \\
&= T(t+s)f.
\end{aligned}$$

- $T_0 f = f$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$T_0 f = (e^{-i0|\xi|^2}\hat{f})\check{\ }(x) = f$$

- Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ fija, la función $\phi_f : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ definida por $\phi_f(t) = T(t)f$ es una función continua, esto es describe una curva en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nótese que por la propiedad de grupo es suficiente probar que la función ϕ es continua en $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\|T(t)f - f\|_2^2 &= \|(T(t)f - f)\hat{}\|_2^2 \\
&= \left\|(T(t)f)\hat{} - \hat{f}\right\|_2^2 \\
&= \left\|e^{-it|\cdot|^2}\hat{f} - \hat{f}\right\|_2^2 \\
&= \left\|(e^{-it|\cdot|^2} - 1)\hat{f}\right\|_2^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|(e^{-it|\xi|^2} - 1)\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|(e^{-it|\xi|^2} - 1)\right|^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \to 0, \text{ cuando } t \to 0.
\end{aligned}$$

Lo anterior se obtiene por el teorema de la convergencia dominada.

Así podemos concluir que $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es un grupo unitario de operadores.

2. Generador infinitesimal.

   Definiendo

$$L_t(x) = C_n(4\pi t)^{-n/2} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$$

   entonces,

$$\Delta L_t(x) = \frac{C_n}{2(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{in}{t} - \frac{|x|^2}{2t^2}\right] e^{\frac{i|x|^2}{4t}}, \tag{4.3}$$

   luego si $u(x,t) = T(t)f$ tenemos que

$$\begin{aligned}
i\Delta u(x,t) &= i\Delta[L_t * f](x) = [i\Delta L_t * f](x) \\
&= \frac{C_n}{2(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{-i\,|x-y|^2}{2t^2} - \frac{n}{t}\right] e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} f(y)dy \\
&= [\frac{\partial L_t}{\partial t} * f](x,t) = \frac{\partial}{\partial t}[L_t * f](x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t).
\end{aligned}$$

Se ha probado que $\frac{\partial T}{\partial t}(t)f = i\Delta T(t)f$ de donde $i\Delta$ es el generador infinitesimal del grupo unitario de operadores $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{t\infty}$, Obsérvese que para el cálculo anterior se usó el teorema (2.2) y el hecho de que las familias de operadores $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ definidas por

$$S_0(t) = T(t),\ t \geq 0$$

$$S_1(t) = T(-t),\ t \geq 0,$$

son C_0-semigrupo cuyos generadores infinitesimal coinciden y son $i\Delta$.

3. Propiedad de continuidad.

   Para realizar esta prueba utilizaremos la desigualdad de Young y el teorema de Riesz-Thorin.

   Sean $q_0 = \infty, p_0 = 1, p_1 = q_1 = 2$, $0 < \theta < 1$, p y q tales que

$$\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2},$$

   de donde

$$\frac{2}{q} = \theta \ \text{ y } \ 1 - \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

   Ahora, dado que $T(t)$ es una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos que en particular

$$\|T(t)f\|_2 \leq \|f\|_2 \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Por otro lado usando la desigualdad de Young, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T(t)f\|_\infty &= \left\| C_n(4\pi t)^{-n/2} e^{\frac{i|.|^2}{4t}} * f \right\|_\infty \\
&\leq \left\| C_n(4\pi t)^{-n/2} e^{\frac{i|.|^2}{4t}} \right\|_\infty \|f\|_1 \\
&\leq \widetilde{c}\, |t|^{-n/2} \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Por el teorema de Riesz-Thorin obtenemos que para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|T(t)f\|_q \leq (\widetilde{c}\,|t|^{-n/2})^{1-\theta}\,\|f\|_p = c\,|t|^{-n/2(1/p-1/q)}\,\|f\|_p\,,$$

por lo tanto $T(t)$ es un operador lineal continuo definido de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$, esto es,

$$T(t) : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n) \;\text{ con }\; \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1,\; 1 \leq p \leq 2.$$

Esto finaliza la demostración de las propiedades.

Obsérvese que por la propiedad (1) del Teorema (4.2) y por el Teorema de Stone (2.6) podemos garantizar la existencia de un operador A autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que la familia de operadores $\{T(t)\}_{t-\infty}^{\infty}$ verifica la siguiente igualdad

$$T(t) = e^{itA},\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entendiéndose lo anterior en el siguiente sentido

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} = iAf, \quad f \in D(A),$$

es decir, iA coincide con el generador infinitesimal del grupo de operadores $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$, pero por la propiedad (2) del Teorema (4.2) tenemos que $iA = i\Delta$, así

$$T(t) = e^{it\Delta},\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

A continuación enunciaremos algunos teoremas relacionados con la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger homogénea, cuyas demostraciones se omitiran, pues requieren de un estudio detallado de los espacios de Sobolev, el cual no es objeto de estudio en este trabajo.

Teorema 4.3. ***(Existencia del problema de Cauchy homogéneo)*** *Sea $T > 0$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $u \in L^\infty([0,T]; L^2 \cap L^p)$ dada por $u(x,t) := e^{it\Delta}u_0$, entonces $u(x,t)$ es* *solución del siguiente problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta u \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T], \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Demostración Ver [12, pág.17]

Teorema 4.4. ***(Unicidad del problema de Cauchy homogéneo)*** *Sea $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $T^* > 0$, si u y v en $L^\infty([0,T^*]; L^2 \cap L^p)$ son soluciones del siguiente problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta u \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T^*] \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

entonces $u = v$.

Demostración Ver [12, pág.18].

Despues de los anteriores resultados es posible dar respuesta a algunas de las preguntas planteadas al inicio de este trabajo relacionadas con la ecuación y el semigrupo de Schrödinger.

- ¿Tendría sentido definir la solución de la ecuación de Schrödinger de forma similar a la de los problemas planteados en la introducción de este trabajo, es decir, $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$?

  La respuesta es parcial, pues inicialmente se probó que $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es un grupo unitario de operadores cuyo generador infinitesimal es $i\Delta$, luego el teorema de Stone nos permitió escribir $T(t)u_0 = e^{it\Delta}u_0$, finalmente se puede afirmar que $u(x,t) = T(t)u_0 = e^{it\Delta}u_0$ es una solución del problema (4.1), bajo las condiciones que plantea el Teorema (4.3) para $u(x,t)$.

Recordemos además que para los problemas planteados a manera de motivación en la introducción de este trabajo se definió $u(t) = e^{tA}u_0$ como su única solución (para A un número real o A una matriz cuadrada).

- ¿Cómo definir el operador $e^{it\Delta}$?

  El operador $e^{it\Delta}$ está definido para todo $t \neq 0$ por la siguiente expresión

  $$e^{it\Delta}f := \frac{C_n}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy.$$

  Si consideramos el problema de valor inicial

  $$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta u \quad \text{con} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

  el operador $e^{it\Delta}$ asigna a u_0 una solución u del problema anterior, es decir,

  $$e^{it\Delta}u_0(x) := u(x,t),$$

  siempre y cuando u cumpla con las condiciones del Teorema (4.3).

- ¿En qué tipo de espacio está bien definido dicho operador y qué propiedades tiene?

  El operador $e^{it\Delta}$ está bien definido de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p \leq 2$ y satisface las propiedades enunciadas en el teorema (4.2).

Capítulo 5

Conclusiones

A modo de conclusión, luego de realizar este trabajo acerca de las ecuaciones del calor y de Schrödinger pudimos observar

- Si bien las ecuaciones del calor y de Schrödinger son muy parecidas, difieren de una constante i, describen fenomenos físicos muy distintos.

- Aunque la metodología de convertir un problema de EDP a uno de EDO utilizando la técnica de la transformada de Fourier en los espacios de Schwartz, fue usada para resolver los problemas de Cauchy asociados a las ecuaciones de calor y de Schrödinger; pudimos observar que dichas soluciones tienen propiedades muy distintas, por ejemplo, para el problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor tenemos que con la expresión

$$u(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy := e^{t\Delta}u_0(x)$$

  se define un C_0-Semigrupo $\left\{e^{t\Delta}\right\}_{t\geq 0}$, cuyo generador infinitesimal es Δ y donde estos operadores están definidos en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$; mientras que para el problema de Cauchy asociado a la ecuación del Schrödinger tenemos que con

$$u(x,t) := \frac{C_n}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy := e^{it\Delta} u_0(x)$$

se define un grupo unitario de operadores $\left\{e^{it\Delta}\right\}_{t=-\infty}^{\infty}$, cuyo generador infinitesimal es $i\Delta$ y donde estos operadores se definen de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $1 \leq p \leq 2$.

- La ecuación del calor es irreversible en el tiempo, pues existe el semigrupo $\left\{e^{t\Delta}\right\}_{t\geq 0}$, lo que no sucede con la ecuación de Schrördinger, ya que para esta última conocemos el grupo $\left\{e^{it\Delta}\right\}_{t=-\infty}^{\infty}$.

- Otro hecho que podemos destacar del operador $e^{t\Delta}$, asociado a la ecuación del calor, es su enorme efecto regularizante, ya que si el dato inicial u_0 no es suave, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, la solución del problema de Cauchy es siempre una función suave, está en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$.

- Por otro lado para garantizar la existencia de una solución para el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger es necesario imponer condiciones tanto en el dato inicial u_0 como en $u(x,t) := e^{it\Delta}u_0$; lo que no sucede con el problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor en donde las condiciones sólo se imponen al dato inicial.

Bibliografía

[1] APOSTOL T. *Cálculus Vol.2*. Editorial Reverté, Colombia S.A. 1998.

[2] DIAZ JESÚS, MOLINA OSCAR. *Transformación Integral de Fourier para funciones de los espacios* $L_1(\mathbb{R}^n)$ *y* $L_2(\mathbb{R}^n)$. Trabajo de grado. Universidad del Cauca, 2008.

[3] DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO. *Análise de Fourier e equacões diferenciais parciais*. Editorial Impa, 2005.

[4] DUOANDIKOETXEA J. *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Math vol 29. AMS. Providence, 2001.

[5] EDELSTEIN KESHET. *Mathematical Models in Biology*. Editorial Society For Industrial Applied, 2005.

[6] IORIO R.J, MAGHALES V. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge Board, 2001.

[7] KESAVAN S. *Topics in functional analysis and applications*. Editorial Halsted Press, 1989.

[8] KOLMOGOROV A.N, FOMIN S.V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Editorial Nauka. Moscú, 1989.

[9] KUDRIAVTSEV L.D. *Curso de Análisis Matemático.* Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú, 1983.

[10] LAWRENCE C. E. *Partial Differential Equations* Graduate Studies in Math vol 19. AMS. Providence, 1998.

[11] LINARES F, PONCE G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Felipe Linares e Gustavo Ponce, 2006.

[12] RODNEY JARAMILLO *El problema de Cauchy para la ecuacíón de Schrödinger no lineal en H^s, $s = 1, 2$.* Tesis de Maestria en Matematicas. Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[13] STEIN E. M. *Singular Integrals and differenciability properties of functions.* Princeton Univ. Press. Princeton, 1970.

[14] SULEM CATHERINE, SULEM PIERE LUIS. *The Nonlinear Schrödinger Equation.* Editorial Springer, 1999.

[15] YOSIDA K. *Functional Analysis, (6th edition).* Springer-Verlag, 1980.