FRACCIONES CONTINUAS Y EL PROBLEMA DE LA AFINACIÓN

Pablo Alexander Galvis Pérez

17032059

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Programa de Matemáticas

Popayán

2012

FRACCIONES CONTINUAS Y EL PROBLEMA DE LA AFINACIÓN

Pablo Alexander Galvis Pérez

17032059

Trabajo de Grado

En modalidad de Seminario de Grado, presentado como requisito parcial

para optar al título de Matemático.

Director

Freddy William Bustos Rengifo

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Programa de Matemáticas

Popayán

2012

Nota de aceptación

____

____

____

Director: Mat. Freddy William Bustos Rengifo

Jurado: Mg. Maribel del Carmen Díaz Noguera

Jurado: Esp. Hebert Vivas

Fecha de sustentación: Popayán, 17 de Octubre de 2011

En memoria de Rosa María Campo.
Tu humildad y corazón fue siempre
tu diario de vida.

Agradecimientos

A mis padres: Instructor Carlos Antonio Galvis Torres y Rosmary Pérez Campo, por el amor y los principios que me han dado. Por el apoyo constante en mi vida y mis estudios, y por la compresión y paciencia de saber esperar el agradecimiento de su hijo que los ama tanto.

A mis hermanos: Oscar David, Jhon Freddy, Juan Carlos y Andrey por su amor y confianza, y por todos los momentos que hemos pasado juntos, sabiendo ser para mí, motivo de apoyo para seguir hacia adelante. Los amo mucho.

A mi amigo: Francisco Javier Muñoz Bolaños que fue la persona que dio un gran aporte a este trabajo con su sabiduría y paciencia. Le tengo un gran aprecio y espero demostrárselo cada día de mi vida.

A mis familiares: por el gran cariño que me tienen y del cual son correspondidos.

A mi profesor Freddy William Bustos por su acompañamiento en este trabajo y por último a los pacientes: quienes son los que realmente me han dado las enseñanzas que utilizaré para el bien de mi prójimo.

Pablo Alexander Galvis Pérez

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está escrito para lectores con conocimientos básicos en matemáticas y, sobre todo, para quienes sienten interés por las relaciones entre la música y la matemática. Diseñado de forma práctica y sencilla, pretende por un lado familiarizar al lector a través de un recorrido por determinados temas, conceptos, teoremas y demostraciones, con la teoría de las fracciones continuas. Aquí se indican las principales propiedades y características de este tipo de fracciones.

En este sentido, empezamos por destacar que uno de los aspectos esenciales de la teoría de las fracciones continuas es que ellas permiten representar un número real mediante una notación alternativa a la representación decimal. En cuanto a sus aplicaciones, continuamos señalando que dicha teoría posibilita la solucion de algunas ecuaciones diofánticas. Además, indicamos que una de las ventajas de las fracciones continuas, es que ofrecen las mejores aproximaciones de números irracionales por medio de números racionales.

Una vez que hemos abordado estos aspectos, nos dirigimos a la formulación del *problema de la afinación* en el que las fracciones continuas desempeñarán un papel fundamental. Por lo tanto a nivel matemático la importancia del estudio de las fracciones continuas consiste en sus determinaciones prácticas. Así pues, este trabajo se compone de dos capítulos. En el primero abordamos el concepto de fracciones continuas. Tal incursión implica trabajar hasta con diversos temas tales como: los números reales, aproximaciones racionales, sucesiones, límites de sucesiones, irracionales cuadráticos, ecuaciones lineales, la famosa Ecuación de Pell y fundamentalmente el concepto de convergentes. Este capítulo intenta, en resumen, llamar la atención sobre la importancia de las fracciones continuas, dado que al parecer por regla general, esta teoría no es asumida con la profundidad que merece.

En la segunda fase de nuestro trabajo presentamos un acercamiento a la relación entre música y matemáticas realizando el planteamiento del problema de la afinación desde el punto de vista matemático. Para llevar a cabo esta formulación realizamos matemáticamente la construcción de algunas de las escalas musicales más relevantes de la música occidental, dando lugar a una singular participación de las fracciones continuas en la solución -no definitiva- a esta problemática.

CAPÍTULO 1

FRACCIONES CONTINUAS Y ALGUNAS APLICACIONES.

En este capítulo vamos a estudiar las *fracciones continuas simples*, sus propiedades más importantes y algunas de sus aplicaciones.

Definición 1.0.1. ***Fracción continua***

Una fracción continua es una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}}$$

donde los a_i y los b_i son números complejos.

1.1. Fracción continua finita

Definición 1.1.1. ***Fracciones continuas simples***
Si todos los b_i de la anterior expresión son 1, a_0 es un entero arbitrario y todos los a_i con $i \geq 1$ son enteros positivos, decimos que la fracción es una fracción continua simple. Por lo tanto una fracción continua simple tiene la forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

donde los a_i son enteros y $a_i > 0$ para $i \geq 1$.

Dado que una fracción continua simple se identifica completamente por los a_i, llamaremos entonces a estos a_i los términos de la fracción continua simple. Si el número de términos de una fracción continua simple es finito, decimos que la fracción es una *fracción continua simple finita* en caso contrario decimos que la fracción es una *fracción continua simple infinita.*
Únicamente vamos a estudiar fracciones continuas simples, por lo tanto cuando hablemos de fracciones continuas, asumiremos que ellas son simples aunque no lo mencionemos explícitamente.
La fracción continua finita

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

se representa con la notación $[a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$ y es simplemente un número racional lo que se comprueba efectuando las operaciones indicadas. El recíproco de esta afirmación también es cierto, es decir tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1.1. *Todo número racional puede expresarse como una fracción continua simple finita.*

Demostración.
Dado cualquier fracción racional $r = \dfrac{p_0}{p_1}$ tal que $(p_0, p_1) = 1$ [1] y $p_1 > 0$, aplicando el algoritmo de la división tenemos

$$\begin{aligned}
p_0 &= p_1a_0 + p_2 \quad \text{con} \quad a_0, p_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad 0 \leq p_2 < p_1 \\
p_1 &= p_2a_1 + p_3 \quad \text{con} \quad a_1, p_3 \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad 0 \leq p_3 < p_2 \\
p_2 &= p_3a_2 + p_4 \quad \text{con} \quad a_2, p_4 \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad 0 \leq p_4 < p_3 \\
&\vdots \\
p_i &= p_{i+1}a_i + p_{i+2} \quad \text{con} \quad a_i, p_{i+2} \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad 0 \leq p_{i+2} < p_{i+1},
\end{aligned} \tag{1}$$

observamos que

$$p_{i+2} < p_{i+1} < p_i < ... < p_3 < p_2 < p_1,$$

entonces los p_i conforman una sucesión decreciente de enteros no negativos, esto es, el proceso debe terminar en un número finito de pasos. Consideremos p_{n+2} el primer residuo tal que $p_{n+2} = 0$, luego

$$\begin{aligned}
p_{n-1} &= p_na_{n-1} + p_{n+1} \quad \text{con} \quad 0 < p_{n+1} < p_n \\
p_n &= p_{n+1}a_n + p_{n+2} \quad \text{con} \quad p_{n+2} = 0.
\end{aligned}$$

[1] A lo largo de este trabajo usaremos la notación (a,b) para referirnos al máximo común divisor de los enteros a y b.

Si escribimos x_i en lugar de $\dfrac{p_i}{p_{i+1}}$ para todos los valores de i en el rango $0 \leq i \leq n$, entonces las ecuaciones (1) se transforman en:

$$x_i = \frac{p_i}{p_{i+1}} = \frac{p_{i+1}a_i + p_{i+2}}{p_{i+1}} = a_i + \frac{p_{i+2}}{p_{i+1}} = a_i + \cfrac{1}{\cfrac{p_{i+1}}{p_{i+2}}} = a_i + \frac{1}{x_{i+1}}; \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (2)$$

además $p_{n+1} = 1$ por ser el mcd de p_0 y p_1, en consecuencia $x_n = \dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \dfrac{1 \cdot a_n + 0}{1} = a_n$

De (1) y (2) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{p_1} &= a_0 + \frac{p_2}{p_1} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{p_1}{p_2}}, \quad \text{donde} \quad a_0 < \frac{p_0}{p_1} \quad \text{y} \quad 0 < p_2 < p_1 \\
\frac{p_1}{p_2} &= a_1 + \frac{p_3}{p_2} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{p_2}{p_3}}, \quad \text{donde} \quad a_1 < \frac{p_1}{p_2} \quad \text{y} \quad 0 < p_3 < p_2 \\
\frac{p_2}{p_3} &= a_2 + \frac{p_4}{p_3} = a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{p_3}{p_4}}, \quad \text{donde} \quad a_2 < \frac{p_2}{p_3} \quad \text{y} \quad 0 < p_4 < p_3 \\
&\vdots \\
\frac{p_{n-1}}{p_n} &= a_{n-1} + \frac{p_n}{p_{n-1}} = a_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-1}}{p_n}}, \quad \text{donde} \quad a_{n-1} < \frac{p_{n-1}}{p_n} \quad \text{y} \quad 0 < p_{n+1} < p_n \\
\frac{p_n}{p_{n+1}} &= a_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{p_1} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} \quad (3) \\
&= [a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n].
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Nota 1.1.1. *Una consecuencia de la anterior construcción de la fracción continua correspondiente al número racional r, es que como en cada i tenemos $x_i = \dfrac{p_i}{p_{i+1}} = a_i + \dfrac{p_{i+2}}{p_{i+1}}$ con $0 < p_{i+2} < p_{i+1}$ entonces $a_i = \lfloor x_i \rfloor$* [2].

Ejemplo 1. *Expresemos el número racional $\dfrac{31}{12}$ como una fracción continua simple finita.*

Solución: Usando el algoritmo de la división tenemos:

$$
\begin{aligned}
31 &= 12(2) + 7 \\
12 &= 7(1) + 5 \\
7 &= 5(1) + 2 \\
5 &= 2(2) + 1 \\
2 &= 1(2) + 0,
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\frac{31}{12} &= 2 + \frac{7}{12} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{7}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{7}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$\frac{31}{12} = [2, 1, 1, 2, 2].$$

Ejemplo 2. *Expresar el número racional $\dfrac{64}{13}$ como una fracción continua simple finita.*

Solución:

[2] $a_i = \lfloor x_i \rfloor$ expresa que a_i es la parte entera de x_i

$$64 = 13(4) + 12$$
$$13 = 12(1) + 1$$
$$12 = 1(12) + 0.$$
$$\frac{64}{13} = 4 + \frac{12}{13} = 4 + \frac{1}{\frac{13}{12}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{12}} = [4, 1, 12]$$

Ejemplo 3. *Expresemos el número racional* $-\frac{81}{57}$ *como una fracción continua simple finita.*

Solución: Simplificando $-\frac{81}{57}$ tenemos $-\frac{27}{19}$

$$-27 = 19(-2) + 11$$
$$19 = 11(1) + 8$$
$$11 = 8(1) + 3$$
$$8 = 3(2) + 2$$
$$3 = 2(1) + 1$$
$$2 = 1(2) + 0,$$

$$\begin{aligned}
-\frac{27}{19} &= -2 + \frac{11}{19} = -2 + \frac{1}{\frac{19}{11}} = -2 + \frac{1}{1 + \frac{8}{11}} = -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{8}}} = -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{8}}} \\
&= -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{3}}}} = -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}}} = -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}} \\
&= -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}.
\end{aligned}$$

Así,

$$-\frac{27}{19} = [-2, 1, 1, 2, 1, 2]$$

Del anterior teorema deducimos, en definitiva, que todo número racional está representado por una fracción continua simple finita, y, por otra parte, toda fracción continua simple finita representa un número racional. La pregunta que podríamos hacernos es,¿un número racional puede estar representado por diferentes fracciones continuas simples?, o, ¿la fracción continua que representa a un determinado número racional es única? . Esto lo resolvemos mediante la siguiente nota y un teorema de unicidad.

Nota 1.1.2. *1. Si* $a_n > 1$ *entonces* $a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \dfrac{1}{1}$ *y* $\dfrac{p}{q} = [a_0, a_1, ..., a_n] = [a_0, a_1, ..., a_{n-2}, a_{n-1} - 1, 1]$

2. Si $a_n = 1$ *entonces* $a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n} = a_{n-1} + \dfrac{1}{1} = a_{n-1} + 1$ *y* $\dfrac{p}{q} = [a_0, a_1, ..., a_n] = [a_0, a_1, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$.

Ejemplo 4. *Expresemos* $-\dfrac{63}{11}$ *como fracción continua simple.*

$$-\frac{63}{11} = -6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [-6, 3, 1, 2]$$

Escribiendo el último término en la forma $2 = 1 + 1$, observamos también que,

$$-\frac{63}{11} = -6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = [-6, 3, 1, 1, 1]$$

Con el siguiente teorema veremos que la representación de un número racional en fracciones continuas solo admite las dos representaciones descritas.

Teorema 1.1.2. ***(Unicidad)*** *Si* $[a_0, a_1, ..., a_j] = [b_0, b_1, ..., b_n]$ *y si* $a_j > 1$ *y* $b_n > 1$ *entonces* $j = n$ *y* $a_i = b_i$ *para* $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Demostración.

Para cada i con $i = 1, 2, ..., n$ sea $x_i = [a_i, a_{i+1}, ..., a_j]$ y $y_i = [b_i, b_{i+1}, ..., b_n]$; observamos que

$$x_i = [a_i, a_{i+1}, ..., a_j] = a_i + \frac{1}{[a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_j]} = a_i + \frac{1}{x_{i+1}},$$

de aquí tenemos $x_i > a_i$ y $x_i > 1$ para $i = 1, 2, ..., j-1$ y $x_j = a_j$.

Entonces $a_i = \lfloor x_i \rfloor$ para todos los valores de i en el rango $0 \leq i \leq j$.

Además, con $y_i = [b_i, b_{i+1}, ..., b_n] = b_i + \dfrac{1}{[b_{i+1}, b_{i+2}, ..., b_n]} = b_i + \dfrac{1}{y_{i+1}}$ (4)

tenemos $y_i > b_i$ y $y_i > 1$ para $i = 1, 2, ..., n-1$ y $y_n = b_n$.

Entonces $b_i = \lfloor y_i \rfloor$ para todos los valores de i en el rango $0 \leq i \leq n$.

Como las fracciones continuas simples iniciales son iguales, es decir $x_0 = [a_0, a_1, ...a_j] = [b_0, b_1, ..., b_n] = y_0$ obtenemos que $a_0 = b_0$.

Comprobemos que

$$x_i = y_i \quad \text{y} \quad a_i = b_i \quad \text{implican que} \quad x_{i+1} = y_{i+1} \quad \text{y} \quad a_{i+1} = b_{i+1}.$$

Veamos

$$a_i + \frac{1}{x_{i+1}} = x_i = y_i = b_i + \frac{1}{y_{i+1}},$$
$$\frac{1}{x_{i+1}} = x_i - a_i = y_i - b_i = \frac{1}{y_{i+1}},$$
$$x_{i+1} = y_{i+1},$$

luego,

$$a_{i+1} = [x_{i+1}] = [y_{i+1}] = b_{i+1}.$$

Concluimos por inducción que para todo entero $i \geq 0$ tenemos $x_i = y_i$ y $a_i = b_i$.
Veamos ahora que $j = n$ (es decir, tienen la misma longitud).
Supongamos que $j < n$; como $x_j = y_j$ y $a_j = b_j$, por (2) se tiene que $x_j = a_j = b_j < y_j$, así $x_j < y_j$ es una contradicción con $x_j = y_j$.

El proceso es análogo si consideramos $n < j$, por lo tanto $j = n$. Así llegamos a que $a_j = b_n$ y $j = n$.

■

Conclusiones.

- Según el teorema anterior la representación de un número racional es única salvo lo referido en la nota 1.1.2.
- Hemos garantizado una correspondencia uno a uno entre los números racionales con las fracciones continuas simples finitas.

1.2. Fracción continua infinita

Ya demostramos que cada fracción continua finita representa un número racional y viceversa. Ahora, vale preguntarnos ¿Qué representa una fracción continua infinita? y ¿Es posible representar un número irracional mediante una fracción continua simple?. La respuesta a la última pregunta es sí como veremos a continuación pero necesitamos presentar otros resultados para este propósito.

Teorema 1.2.1. *Todo número irracional puede ser expresado como una fracción continua simple infinita.*

Demostración.

Sea x_0 un número irracional, x_0 puede ser expresado en la forma $x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + (x_0 - \lfloor x_0 \rfloor)$, entonces $0 < x_0 - \lfloor x_0 \rfloor < 1$ y nombrando $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$, $\dfrac{1}{x_1} = x_0 - \lfloor x_0 \rfloor$ tenemos

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

Si $x_1 \in \mathbb{Q}$, por el teorema 1.1.1 , x_0 puede ser expresado como una fracción continua finita luego x_0 sería un número racional (contradicción con la hipótesis). Por lo tanto x_1 no está en $\mathbb{Q}$.

Además $x_1 > 1$ pues $0 < \dfrac{1}{x_1} < 1$, de aquí que x_1 puede ser expresado como

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{con} \quad a_1 = \lfloor x_1 \rfloor \quad \text{y} \quad x_2 > 1 \quad \text{siendo} \quad x_2 \quad \text{irracional.}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, en el paso i-ésimo obtenemos

$$x_i = a_{i+1} + \frac{1}{x_{i+1}} \quad \text{con} \quad a_i = \lfloor x_i \rfloor \qquad \text{y} \quad x_{i+1} > 1 \quad \text{siendo} \quad x_{i+1} \quad \text{irracional.}$$

Por lo tanto

$$x_0 = [a_0, a_1, ..., a_i, ...].$$

■

El Teorema 1.2.1. nos garantiza la representación de cualquier número irracional en una fracción continua infinita, miremos algunos ejemplos

Ejemplo 5 *Expresemos* $\sqrt{26}$ *como una fracción continua simple infinita.*

Para $x = \sqrt{26}$ tenemos:

Como $\quad 5 < \sqrt{26} < 6$, entonces $\lfloor \sqrt{26} \rfloor = 5$, $\quad$ luego $\qquad x = \sqrt{26} = 5 + (\sqrt{26} - 5)$

$$\begin{aligned}
\sqrt{26} &= 5 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt{26}-5)}} = 5 + \cfrac{1}{\sqrt{26}+5} = 5 + \cfrac{1}{10 + (\sqrt{26}-5)} = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{26}-5}}} \\
&= 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{(\sqrt{26}+5)}}
\end{aligned}$$

Puesto que la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{26}+5}$ vuelve a aparecer tenemos,

$$\sqrt{26} = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{26}-5}}}}$$

y continuando así, obtenemos

$$\sqrt{26} = [5, 10, 10, 10, ...] = [5, \overline{10}].$$

La barra sobre el número diez indica que este se repite indefinidamente.

Uno de los números que ha marcado la historia de las matemáticas es el número π. Existen fracciones continuas para este número irracional que no son simples, pero es más complejo su cálculo y notación, por ejemplo

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{9+\cfrac{25}{11+\cfrac{36}{13+\cfrac{49}{\ddots}}}}}}}}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1}{6+\cfrac{9}{6+\cfrac{25}{6+\cfrac{49}{6+\cfrac{81}{6+\cfrac{121}{\ddots}}}}}}$$

Ejemplo 6 *Expresemos π como una fracción continua simple infinita.*

Para $x = \pi$ tenemos:

Como $3 < \pi < 4$, entonces $\lfloor \pi \rfloor = 3$, luego $\pi = 3 + (\pi - 3)$ con $0 < \pi - 3 < 1$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\pi-3)}} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{(\pi-3)} > 1$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\left(\cfrac{1}{\pi-3} - 7\right)} \quad \text{donde} \quad 7 < \frac{1}{(\pi-3)} < 8$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \left(\cfrac{22 - 7\pi}{\pi - 3}\right)}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\left(\cfrac{\pi - 3}{22 - 7\pi}\right)}} \quad \text{donde} \quad 15 < \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} < 16$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \left(\cfrac{\pi - 3}{22 - 7\pi} - 15\right)}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \left(\cfrac{106\pi - 333}{22 - 7\pi}\right)}}$$
$$\ddots$$

y continuando así, obtenemos

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...],$$

en este caso no hay una regularidad en los términos.

Una de las razones por las cuales las fracciones continuas simples son importantes es que ellas pueden ser utilizadas para obtener aproximaciones racionales de números irracionales. Introduciremos un nuevo concepto al que llamaremos *convergente*. El nombre de convergente no es gratuito, pues va asociado a una sucesión que converge.

1.3. Convergentes

Definición 1.3.1. ***(convergentes)*** *Dada una fracción continua simple* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *que puede ser finita o infinita, definimos sus convergentes o reducidas como los* *números racionales* $C_i = [a_0, a_1, ..., a_{i-1}, a_i]$ *donde* i *es algún entero no negativo.*

Ejemplo 7. Consideremos la fracción continua finita $[2, 4, 1, 6]$. Sus convergentes son

$$\begin{aligned}
C_0 &= [2] = 2\\
C_1 &= [2,4] = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}\\
C_2 &= [2,4,1] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}} = \frac{11}{5}\\
C_3 &= [2,4,1,6] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}} = \frac{75}{34}
\end{aligned}$$

Observamos que en el caso de una fracción continua simple finita $[a_0, a_1, a_, ..., a_n]$ su última convergente C_n es simplemente el número racional representado por dicha fracción.

Ejemplo 8. Consideremos la fracción continua simple infinita $[3, \overline{2, 6}]$ donde la barra sobre los enteros 2 y 6 indica que ellos se repiten indefinidamente. Una fracción de esta forma se llama *periódica* (esto será objeto de estudio más adelante), los términos 2 y 6 forman el periodo. Las convergentes tercera y cuarta de esta fracción son

$$\begin{aligned}
C_3 &= [3,2,6,2] = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{627}{181}\\
C_4 &= [3,2,6,2,6] = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}}} = \frac{1351}{390}.
\end{aligned}$$

Cuando a partir de la fracción continua $[a_0, a_1, ..., a_n]$ calculamos sus convergentes C_n, observamos que

$$\begin{aligned}
C_0 &= [a_0] = \frac{a_0}{1} \\
C_1 &= [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{[a_1]} \\
C_2 &= [a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2]} \\
C_3 &= [a_0, a_1, a_2, a_3] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, a_2]},
\end{aligned}$$

y en general, para $n \geq 1$ tenemos que

$$C_n = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_n]}.$$

Si denotamos con $\langle a_0, a_1, ..., a_n \rangle$ al resultado de realizar las operaciones necesarias para obtener el numerador de $[a_0, a_1, ..., a_n]$, obtenemos para las convergentes $C_i = \frac{p_i}{q_i}$,

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0 = \langle a_0 \rangle \\
p_1 &= a_0 a_1 + 1 = \langle a_0, a_1 \rangle \\
p_2 &= a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2 = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
q_0 &= 1 \\
q_1 &= a_1 = \langle a_1 \rangle \\
q_2 &= a_1 a_2 + 1 = \langle a_1, a_2 \rangle \\
q_3 &= a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,
\end{aligned}$$

es decir que para $i = 1, 2, 3, ...$ q_i se calcula en la misma forma en la que se calcula p_{i-1};
además, si $C_n = \dfrac{\langle a_0, a_1, ..., a_n\rangle}{\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle}$ entonces

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_{n+1}]} = a_0 + \frac{1}{\frac{\langle a_1, a_2, ..., a_{n+1}\rangle}{\langle a_2, a_3, ..., a_{n+1}\rangle}} \\ &= a_0 + \frac{\langle a_2, a_3, ..., a_{n+1}\rangle}{\langle a_1, a_2, ..., a_{n+1}\rangle} \\ &= \frac{a_0 \langle a_1, a_2, ..., a_{n+1}\rangle + \langle a_2, a_3, ..., a_{n+1}\rangle}{\langle a_1, a_2, ..., a_{n+1}\rangle} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que para $n \geq 1$, el denominador q_n de C_n se obtiene realizando para los términos a_1, a_2,..., a_n las mismas operaciones que realizamos sobre los términos a_0, a_1,...,a_{n-1} para obtener el numerador p_{n-1}. En símbolos, si $p_{n-1} = \langle a_0, a_1, ..., a_{n-1}\rangle$ entonces $q_n = \langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ o equivalentemente

$$C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\langle a_0, a_1, ..., a_n\rangle}{\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle}.$$

Observando solo los numeradores tenemos

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 = \langle a_0\rangle \\ p_1 &= a_0a_1 + 1 = \langle a_0, a_1\rangle \\ p_2 &= a_0a_1a_2 + a_0 + a_2 = a_0(a_1a_2 + 1) + a_2 = a_0 \langle a_1, a_2\rangle + \langle a_2\rangle \\ p_3 &= a_0 \langle a_1, a_2, a_3\rangle + \langle a_2, a_3\rangle \end{aligned}$$

Para $n \geq 2$, si $p_n = a_0 \langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle + \langle a_2, a_3, ..., a_n\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_{n+1}]} = \frac{\langle a_0, a_1, ..., a_{n+1}\rangle}{\langle a_0, a_1, ..., a_{n+1}\rangle} \\ &= \frac{a_0 \langle a_1, a_2, ..., a_{n+1}\rangle + \langle a_2, a_3, ..., a_{n+1}\rangle}{\langle a_1, a_2, ..., a_{n+1}\rangle}, \end{aligned}$$

en donde observamos que

$$p_{n+1} = a_0 \langle a_1, a_2, ..., a_{n+1} \rangle + \langle a_2, a_3, ..., a_{n+1} \rangle .$$

Concluimos entonces que para $n \geq 2$,

$$p_n = a_0 \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle + \langle a_2, a_3, ..., a_n \rangle .$$

Dada esta relación de recurrencia y la forma general de las convergentes encontramos que para $n \geq 2$ tenemos

$$C_n = \frac{\langle a_0, a_1, ..., a_n \rangle}{\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle} = \frac{a_0 \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle + \langle a_2, a_3, ..., a_n \rangle}{a_1 \langle a_2, a_3, ..., a_n \rangle + \langle a_3, a_4, ..., a_n \rangle}.$$

A continuación trabajaremos sobre el símbolo $\langle a_0, a_1, ..., a_n \rangle$ para establecer una propiedad que nos permitirá reescribir la última relación de una forma más conveniente; inicialmente simplificaremos la notación.

Sean x_0, x_1,..., x_n números (enteros o incluso reales), para $i \geq 0$, $1 \leq j \leq n - i$, $\langle x_i, x_{i+j} \rangle$ es el numerador de

$$x_i + \cfrac{1}{x_{i+1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{i+j}}}},$$

también tiene sentido $\langle x_{i+j}, x_i \rangle$ que es el numerador de

$$x_{i+j} + \cfrac{1}{x_{i+j-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_i}}}.$$

Con esta notación la i-esima convergente de $[a_0, a_1, ..., a_n]$ viene dada por

$$C_i = \frac{p_i}{q_i} = \frac{\langle a_0, a_i \rangle}{\langle a_1, a_i \rangle} = \frac{a_0 \langle a_1, a_i \rangle + \langle a_2, a_i \rangle}{a_1 \langle a_2, a_i \rangle + \langle a_3, a_i \rangle}.$$

Demostremos ahora que para todo $n \geq 1$,

$$\langle a_0, a_n \rangle = \langle a_n, a_0 \rangle .$$

Verifiquemos para $n = 1$,

$$a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \qquad\qquad a_1 + \frac{1}{a_0} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_0}$$

y observamos que los numeradores son iguales, es decir

$$\langle a_0, a_1 \rangle = \langle a_1, a_0 \rangle .$$

Para $n = 2$, tenemos

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_1 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1},$$

entonces $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle = a_0 a_1 a_1 + a_0 + a_2$;
por otro lado

$$a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}} = a_2 + \frac{a_0}{a_1 a_0 + 1} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_1 a_0 + 1},$$

es decir

$$\langle a_2, a_1, a_0 \rangle = a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0.$$

Por lo tanto

$$\langle a_0, a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_1, a_0 \rangle .$$

Supongamos ahora que para todo $k \leq n$, $i \geq 0$, $1 \leq j \leq k$ tenemos

$$\langle a_i, a_{i+j} \rangle = \langle a_{i+j}, a_i \rangle .$$

Es decir, que lo propuesto es válido para todas las listas con a lo sumo $n+1$ números. verifiquemos que

$$\langle a_0, a_{n+1} \rangle = \langle a_{n+1}, a_0 \rangle$$

$$
\begin{aligned}
\langle a_0, a_{n+1}\rangle &= a_0 \langle a_1, a_{n+1}\rangle + \langle a_2, a_{n+1}\rangle \\
&= a_0 \langle a_{n+1}, a_1\rangle + \langle a_{n+1}, a_2\rangle \\
&= a_0(a_{n+1} \langle a_n, a_1\rangle + \langle a_{n-1}, a_1\rangle) + a_{n+1} \langle a_n, a_2\rangle + \langle a_{n-1}, a_2\rangle \\
&= a_{n+1}(a_0 \langle a_n, a_1\rangle + \langle a_n, a_2\rangle) + a_0 \langle a_{n-1}, a_1\rangle + \langle a_{n-1}, a_2\rangle \\
&= a_{n+1}(a_0 \langle a_1, a_n\rangle + \langle a_2, a_n\rangle) + a_0 \langle a_1, a_{n-1}\rangle + \langle a_2, a_{n-1}\rangle \\
&= a_{n+1} \langle a_0, a_n\rangle + \langle a_0, a_{n-1}\rangle \\
&= a_{n+1} \langle a_n, a_0\rangle + \langle a_{n-1}, a_0\rangle \\
&= \langle a_{n+1}, a_0\rangle .
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es válido para todo $n \geq 1$.

Con base en el resultado anterior obtenemos la siguiente interesante relación entre numeradores

$$
\begin{aligned}
p_n &= \langle a_0, a_n\rangle = \langle a_n, a_0\rangle = a_n \langle a_{n-1}, a_0\rangle + \langle a_{n-2}, a_0\rangle \\
&= a_n \langle a_0, a_{n-1}\rangle + \langle a_0, a_{n-2}\rangle \\
&= a_n p_{n-1} + p_{n-2}
\end{aligned}
$$

Análogamente para los denominadores obtenemos $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Nota 1.3.1. *Si $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ es la convergente n-ésima de una fracción continua simple $[a_0, a_1, ...]$ y definimos además $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_{-2} = 0$, $q_{-2} = 1$, entonces se tienen las fórmulas de recurrencia*

$$
\begin{aligned}
p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\
q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Teorema 1.3.1. *Sean x un número real y $\dfrac{p_i}{q_i}$ la i-ésima convergente de su fracción* *continua. Consideremos la sucesión* $\{x_i\}$ *definida mediante*

$$x = x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + \frac{1}{x_1} \quad y \quad x_n = \lfloor x_n \rfloor + \frac{1}{x_{n+1}} \quad para \qquad n \geq 1.$$

Entonces para cualquier n *para el que exista* $x_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{x_{n+2}}$ *tenemos*

$$x = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Demostración:

De acuerdo a las demostraciones de los teoremas 1.1.1 y 1.2.1 se sigue que $\lfloor x_n \rfloor = a_n$ (los términos de la fracción continua) para todo n, luego usamos inducción sobre n para demostrar este resultado.

Para $n = -1$ tenemos $x = x_0 = \dfrac{x_0(1) + 0}{x_0(0) + 1} = \dfrac{x_0 p_{-1} + p_{-2}}{x_0 p_{-1} + p_{-2}}$.

Para $n = 0$ tenemos $x = a_0 + \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 a_0 + 1}{x_1} = \dfrac{x_1 p_0 + p_{-1}}{x_1 q_0 + q_{-1}}$.

Para $n = 1$ tenemos $x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{x_2}} = a_0 + \dfrac{x_2}{x_2 a_1 + 1} = \dfrac{x_2 a_0 a_1 + x_2}{x_2 a_1 + 1} = \dfrac{x_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{x_2 a_1 + 1} = \dfrac{x_2 p_1 + p_0}{x_2 q_1 + q_0}$.

Supongamos que el teorema es cierto para n, y comprobemos que se cumple para $n + 1$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{x_{n+1}p_n - \dfrac{p_n}{x_{n+2}} + p_{n-1} + \dfrac{p_n}{x_{n+2}}}{x_{n+1}q_n - \dfrac{q_n}{x_{n+2}} + q_{n-1} + \dfrac{q_n}{x_{n+2}}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{x_{n+2}x_{n+1}p_n - p_n}{x_{n+2}}\right) + p_{n-1} + \dfrac{p_n}{x_{n+2}}}{\left(\dfrac{x_{n+2}x_{n+1}q_n - q_n}{x_{n+2}}\right) + q_{n-1} + \dfrac{q_n}{x_{n+2}}} \\
&= \frac{p_n \cdot \left(\dfrac{x_{n+2}x_{n+1} - 1}{x_{n+2}}\right) + p_{n-1} + \dfrac{p_n}{x_{n+2}}}{q_n \cdot \left(\dfrac{x_{n+2}x_{n+1} - 1}{x_{n+2}}\right) + q_{n-1} + \dfrac{q_n}{x_{n+2}}} \\
&= \frac{(p_n \cdot a_{n+1} + p_{n-1}) + \dfrac{p_n}{x_{n+2}}}{(q_n \cdot a_{n+1} + q_{n-1}) + \dfrac{q_n}{x_{n+2}}} \\
&= \frac{p_{n+1} + \dfrac{p_n}{x_{n+2}}}{q_{n+1} + \dfrac{q_n}{x_{n+2}}} = \frac{x_{n+2}p_{n+1} + p_n}{x_{n+2}q_{n+1} + q_n}.
\end{aligned}$$

Entonces por el principio de inducción matemática la fórmula es valida para n.

■

Por lo anterior podemos extender la notación de fracciones continuas simples para el caso en el que el último término es un número real cualquiera. La expresión $[a_0, a_1, ..., a_n, y]$ con $y > 1$ representa

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{y}}}},$$

y según la demostración anterior esto es igual

$$\frac{p_n y + p_{n-1}}{q_n y + q_{n-1}},$$

donde los $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ son la última y penúltima convergentes de $[a_0, a_1, ..., a_n]$.

Ejemplo 9. *Tomemos el caso en el que* $x = \pi$

Segun los calculos que se hicieron para el desarrollo de π en fracciones continuas llegamos a un momento donde

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\pi - 3)}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \left(\cfrac{1}{\pi - 3} - 7\right)} = 3 + \cfrac{1}{7 + \left(\cfrac{22 - 7\pi}{\pi - 3}\right)} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{\pi - 3}{22 - 7\pi}}},$$

luego $[3, 7, \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}] = \dfrac{\left(\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}\right) 22 + 3}{\left(\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}\right) 7 + 1}$ donde $\frac{22}{7}$ y $\frac{3}{1}$ son las respectivas convergentes C_2 y C_1 del desarrollo de π.

Haciendo los respectivos cálculos para $[3, 7, \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}]$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}\right) 22 + 3}{\left(\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}\right) 7 + 1} &= \frac{\frac{22\pi - 66}{22 - 7\pi} + 3}{\frac{7\pi - 21}{22 - 7\pi} + 1} \\
&= \frac{22\pi - 66 + 66 - 21\pi}{7\pi - 21 + 22 - 7\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Este fue un ejemplo de aplicación del anterior teorema, ahora miraremos algunos que tienen que ver con el cálculo de las convergentes.

Ejemplo 10. *Evaluemos las convergentes de la fracción continua* $[3, 4, 1, 2, 2]$.

Elaboramos la tabla siguiente:

i	-2	-1	0	1	2	3	4
a_i			3	4	1	2	2
p_i	0	1	3	13	16	45	106
q_i	1	0	1	4	5	14	33
C_i			3	$\frac{13}{4}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{45}{14}$	$\frac{106}{33}$

El valor de la fracción continua es la última convergente en este caso es C_4, es decir $[3, 4, 1, 2, 2] = \dfrac{106}{33}$.

Ejemplo 11. *Determinemos las primeras 5 convergentes de la fracción continua siguiente* $[5, 1, 1, 3, 5, ...]$.

Solución.

i	-2	-1	0	1	2	3	4
a_i			5	1	1	3	5
p_i	0	1	5	6	11	39	206
q_i	1	0	1	1	2	7	37
C_i			5	6	$\frac{11}{2}$	$\frac{39}{7}$	$\frac{206}{37}$

Vamos a deducir algunas propiedades de las convergentes que nos permitan precisar el significado de una fracción continua infinita y nos mostrarán cómo se pueden usar las convergentes de una fracción para encontrar aproximaciones de un número irracional.

Teorema 1.3.2. *Si* $C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ *es la i-ésima convergente de una fracción continua simple, entonces para todo* n *para el cual exista el* C_n*, se tiene*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$$

Demostración.

La demostración es por inducción sobre n. Si $n = 0$ tenemos

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = (-1) = (-1)^{0+1}$$

puesto que $p_0 = a_0$ y por definición $p_{-1} = 1$ y $q_{-1} = 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para $n = k$, esto es $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$.

Por fórmulas $(*)$ tenemos

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\ &= -(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) \\ &= -(-1)^{k+1} = (-1)^{k+2}, \end{aligned}$$

y por el principio de induccion matemática se tiene el resultado para todo $n \geq 0$.

■

Corolario 1.3.1. *Para todo n para el cual exista la convergente C_n, se cumple que*

$$C_n - C_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Demostración.

Del Teorema 1.2.3. tenemos las fórmulas $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$, dividamos esta expresión por $q_n q_{n-1}$, esto es

$$\frac{p_n q_{n-1}}{q_n q_{n-1}} - \frac{p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}},$$

$$C_n - C_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}},$$

obteniendo el resultado deseado.

■

Corolario 1.3.2. *Para todo n para el cual exista la convergente C_n, se cumple que,* $(p_n, q_n) = 1$.

Demostración.

Usando el Teorema 1.2.3. podemos expresar 1 como combinación lineal entera de p_n y q_n, esto es

$$p_n \frac{q_{n-1}}{(-1)^{n+1}} - q_n \frac{p_{n-1}}{(-1)^{n+1}} = 1.$$

Como (p_n, q_n) es el menor entero positivo que puede ser expresado como una combinación lineal de p_n y q_n se tiene que $(p_n, q_n) = 1$.

*

Teorema 1.3.3. *Si* $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ *es la n-ésima convergente de la fracción continua simple* $[a_0, a_1, ...]$ *entonces*

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n \cdot a_n,$$

es decir

$$C_n - C_{n-2} = \frac{(-1)^n \cdot a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

Demostración. Por el teorema 1.3.1. tenemos

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} - p_{n-2} a_n q_{n-1} - p_{n-2} q_{n-2} \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = a_n (-1)^n. \end{aligned}$$

Además,

$$\frac{p_n q_{n-2}}{q_n q_{n-2}} - \frac{p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{(-1)^n \cdot a_n}{q_n q_{n-2}},$$

así,

$$C_n - C_{n-2} = \frac{(-1)^n \cdot a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

■

Con el siguiente teorema daremos un resultado que tiene que ver con los q_n de las convergentes, esto es, que generan una sucesión creciente.

Teorema 1.3.4. *Si* $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ *es la convergente n-ésima de la fracción continua simple* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *entonces para todo* n *para el cual exista la convergente* C_n*,*

$$q_n \geq q_{n-1} (*)$$

y la desigualdad es estricta para $n > 1$*.*

Demostración. Demostremos que $q_n - q_{n-1} \geq 0$, en efecto, como

$$q_n - q_{n-1} = a_n q_{n-1} + q_{n-1} = (a_n - 1) q_{n-1} + q_{n-2}$$

Como para todo $n > 1$ se tiene que $a_n \geq 1$ equivalente a $a_n - 1 \geq 0$ y $q_n > 0$ deducimos que $q_n - q_{n-1} \geq 0$

■

Corolario 1.3.3. *Para todo n para el cual exista la convergente $\dfrac{p_n}{q_n}$, se cumple que, $q_n \geq n$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre n. Para $n = 0$ es trivial, consideremos para $n = 1$ la desigualdad se reduce a $q_1 = a_1 \geq 1$ que es verdadero puesto que $a_i \geq 1$ para todo $i \geq 1$.
Supongamos que la desigualdad es cierta para todo $k < n$ y demostremos que se cumple para $n = k$. Como $q_n \geq q_{n-1} \geq n-1$ para todo $n > 1$, obtenemos $q_n > n-1$ lo que es equivalente a $q_n \geq n$.

$\blacksquare$

Ejemplo 12. *Verifiquemos los Teoremas 1.3.2 y 1.3.3 para la fracción continua* $[3, 6, 1, 2]$.

Solución. Para el teorema 1.3.2

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$$

i	-2	-1	0	1	2	3
a_i			3	6	1	2
p_i	0	1	3	19	22	63
q_i	1	0	1	6	7	20
C_i			3	$\frac{19}{6}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{63}{20}$

Si $n = 0$

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 3(0) - 1(1) = -1 = (-1)^{0+1}.$$

Si $n = 1$

$$p_1q_0 - p_0q_1 = 19(1) - 3(6) = 1 = (-1)^{1+1}.$$

Si $n = 2$

$$p_2q_1 - p_1q_2 = 22(6) - 19(7) = -1 = (-1)^{2+1}.$$

Si $n = 3$

$$p_3q_2 - p_2q_3 = 67(7) - 22(20) = 1 = (-1)^{3+1}.$$

Para el teorema 1.3.3. verificamos con $n = 3$

$$p_3q_1 - p_1q_3 = 63(6) - 19(20) = -2 = (-1)^3 \cdot 2 = (-1)^3 \cdot a_3.$$

Hemos visto que las convergentes de una fracción continua simple dada, ya sea finita o infinita, son siempre fracciones continuas simples finitas, por lo que cada una de ellas es un número racional. Ahora veremos que cumplen una característica muy particular y es que las convergentes que tienen índices pares forman una sucesión creciente y las que tienen índices impares forman una sucesión decreciente.

Teorema 1.3.5. *Las convergentes de índice impar* $(C_{2k+1}; k \in \mathbb{N})$ *de una fracción continua simple forman una sucesión decreciente y las convergentes de índice par* $(C_{2k}; k \in \mathbb{N})$ *forman una sucesión creciente. También se cumple que toda convergente impar es menor que toda convergente par. En particular nos interesa este resultado para las fracciones continuas infinitas.*

Demostración.

- Veamos que $\{C_{2k+1}\}$ es una sucesión decreciente, es decir $C_{2k+1} < C_{2k-1}$, para $k \geq 1$.

  Como
  $$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n \cdot a_n,$$
  y
  $$C_n - C_{n-2} = \frac{(-1)^n \cdot a_n}{q_n q_{n-2}}.$$
  en particular para $n = 2k+1$ tenemos
  $$C_{2k+1} - C_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1}}{q_{2k+1} q_{2k-1}}.$$
  Por otro lado tenemos que $q_n q_{n-2} > 0$ y $a_n > 0$.

  Entonces para todo $k \geq 1$,
  $$\frac{(-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1}}{q_{2k+1} q_{2k-1}} < 0$$
  o lo que es lo mismo $C_{2k+1} - C_{2k-1} < 0$, es decir $C_{2k+1} < C_{2k-1}$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto los C_{2k+1} forman una sucesión decreciente.

- Veamos que los $\{C_{2k}\}$ forman una suceción creciente, es decir que $C_{2k-2} < C_{2k}$, para $k \geq 1$.

  Como
  $$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n \cdot a_n$$
  y
  $$C_n - C_{n-2} = \frac{(-1)^n \cdot a_n}{q_n q_{n-2}},$$
  en particular para $n = 2k$ tenemos
  $$C_{2k} - C_{2k-2} = \frac{(-1)^{2k} \cdot a_{2k}}{q_{2k} q_{2k-2}}.$$

Y ahora concluimos que para todo $k \geq 1$,

$$\frac{(-1)^{2k} \cdot a_{2k}}{q_{2k}q_{2k-2}} > 0$$

o lo que es lo mismo $C_{2k} - C_{2k-2} > 0$, es decir $C_{2k-2} < C_{2k}$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto los C_{2k} forman una sucesión creciente.

- Ahora bien consideremos dos enteros positivos cualesquiera r y s, entonces pueden ocurrir tres cosas $r > s$, $r = s$ o $r < s$. Por el corolario 1.3.1 para cualquier entero t $C_{2t} - C_{2t-1}$ luego $C_{2t} < C_{2t-1}$. Ahora,

  (i) Si $r = s$ entonces $C_{2r} < C_{2s-1}$.

  (ii) Si $r > s$ entonces $C_{2r} < C_{2r-1} < C_{2s-1}$ ya que las convergentes impares forman una sucesión decreciente, así $C_{2r} < C_{2s-1}$.

  (iii) Si $r < s$ entonces $C_{2r} < C_{2s} < C_{2s-1}$ ya que las convergentes pares forman una sucesión creciente, así $C_{2r} < C_{2s-1}$.

  Es decir, para dos enteros positivos cualesquiera r y s se comprobo que $C_{2r} < C_{2s-1}$; podemos concluir que toda convergente par es menor que toda convergente impar.

■

Observaciones

- La sucesión C_{2k} es una sucesión creciente, monótona y acotada superiormente por cualquier C_{2k+1}, en particular por C_1, por lo tanto tiene límite.
- Análogamente la sucesión C_{2k+1} es decreciente, monótona y acotada inferiormente en particular por C_0, por lo tanto tiene un límite.

- Veamos como los dos limites anteriores coinciden. Dado que por el corolario 1.3.1 $0 \leq C_n - C_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$, y el último término tiende a 0 si n crece entonces

$$\lim_{n\to\infty} C_n - C_{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} = 0,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_{n-1}.$$

El siguiente teorema me garantiza que toda fracción continua simple infinita representa un número irracional.

Teorema 1.3.6. *El limite a x garantizado por el teorema anterior es un número irracional.*

Demostración. Por los teoremas anteriores tenemos que

$$C_1 < C_3 < C_5 < ... < x < ... < C_4 < C_2 < C_0$$

luego para cualquier valor n, x siempre esta entre C_n y C_{n+1}, por lo tanto

$$0 < |x - C_n| < |C_{n+1} - C_n| = \frac{1}{q_{n+1} q_n}.$$

Supogamos que x fuera un número racional $x = \dfrac{a}{b}$ con $b > 0$. De la desigualdad anterior tenemos,

$$0 < \left| \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_n},$$

y por lo tanto

$$0 < |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_{n+1}}.$$

Escogiendo n suficientemenete grande para que $b < q_{n+1}$, lo cual es imposible por que los enteros q_n crece con n, tedriamos que el entero $|aq_n - bp_n|$ estaría entre 0 y

1 lo cual es imposible. Luego necesariamente x es un número irracional.

Teorema 1.3.7. *Sea x un número irracional representado por la fracción continua simple infinita $x = [a_0, a_1, a_2, ...]$. Si $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ es la convergente n-ésima de la fracción continua, entonces*

$$\lim_{n \to \infty} C_n = x,$$

y esto implica

(i) $x > C_n$, *si n es par.*

(ii) $x < C_n$, *si n es impar.*

Demostración. Por teorema 1.3.4. las convergentes pares forman una sucesión creciente de números racionales que es acotada por cualquier convergente impar, entonces existe

$$\lim_{n \to \infty} C_n$$

y es mayor que toda convergente par

$$C_2 < C_4 < ... < \lim_{n \longrightarrow \infty} C_{2n}.$$

Análogamente, las convergentes impares forman una sucesión decreciente de números racionales que es acotada por cualquier convergente par, entonces existe

$$\lim_{n \to \infty} C_{2n-1}$$

y es menor que toda convergente impar, es decir

$$\lim_{n \to \infty} C_{2n-1} < ... < C_5 < C_3 < C_1;$$

Por las observaciones del teorema 1.3.5 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n} = \lim_{n\to\infty} C_{2n-1}.$$

Como $\{C_{2n}\}$ y $\{C_{2n-1}\}$ son subsucesiones de la sucesión $\{C_n\}$ entonces si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} C_n,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n} = \lim_{n\to\infty} C_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Demostremos ahora que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} C_n = x.$$

Sea $x = [a_0, a_1, ..., a_n, x_n]$ donde $x_n = [a_{n+1}, ...]$ entonces

$$\begin{aligned}
x - C_{n-1} &= x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\
&= \frac{q_{n-1}(x_n p_{n-1} + p_{n-2}) - p_{n-1}(x_n q_{n-1} + q_{n-2})}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}} \\
&= \frac{q_{n-1}x_n p_{n-1} + q_{n-1}p_{n-2} - q_{n-1}x_n p_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}} \\
&= -\frac{(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}};
\end{aligned}$$

esta última fracción tiende a cero conforme n tiende al infinito (pues q_n es creciente y x_n es positivo), de aquí que $x - C_{n-1}$ tiende a cero conforme n crece.

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} C_{n-1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} C_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} [a_0, a_1, a_4, ..., a_n] = [a_0, a_1, a_2, ...]$$

■

Conclusiones

- Con este último teorema tenemos garantizada la correspondencia uno a uno de los números reales con el conjunto de todas las fracciones continuas simples, ya sean finitas o infinitas.
- Las convergentes de una fracción continua son una herramienta fundamental, pues permiten aproximar números reales mediante números racionales.

1.4. Aproximación para números irracionales

Una de las razones por las cuales las fracciones continuas son importantes es que ellas pueden ser utilizadas para obtener aproximaciones de números reales. A continuación presentamos algunos resultados tendientes a explicar como encontrar dichas aproximaciones.

Teorema 1.4.1. *Sea* $x = [a_0, a_1, ...]$. *Si* $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ *es la convergente n-ésima de la fracción continua simple, entonces:*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|$$

es decir, cada convergente de una fracción continua simple está más cercana al valor de la fracción continua que la convergente precedente.

Demostración. Sea $x = [a_0, a_1, ..., a_n, x_{n+1}]$ donde $x_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$, entonces

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}, \\
x(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) &= x_{n+1}p_n + p_{n-1}, \\
xx_{n+1}q_n + xq_{n-1} &= x_{n+1}p_n + p_{n-1}, \\
x_{n+1}(xq_n - p_n) &= -xq_{n-1} + p_{n-1}, \\
xq_n - p_n &= -\frac{xq_{n-1}}{x_{n+1}} + \frac{p_{n-1}}{x_{n+1}}, \\
x - \frac{p_n}{q_n} &= -\frac{xq_{n-1}}{x_{n+1}q_n} + \frac{p_{n-1}}{x_{n+1}q_n}, \\
x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{-xq_{n-1} + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n}, \\
x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{q_{n-1}(-xq_{n-1} + p_{n-1})}{q_{n-1}(x_{n+1}q_n)}, \\
x - \frac{p_n}{q_n} &= \left(\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right)\left(\frac{-xq_{n-1} + p_{n-1}}{q_{n-1}}\right), \\
x - \frac{p_n}{q_n} &= \left(\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right)\left(-x + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right), \\
\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right|\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.
\end{aligned}
$$

Como $x_{n+1} > 1$ y $q_n \geq q_{n-1}$ para todo $n \geq 2$ entonces $\left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right| < 1$, por lo tanto

$$
\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|,
$$

que es lo que buscábamos garantizar.

■

Teorema 1.4.2. *Si* $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ *es la n-ésima convergente de la fracción continua simple cuyo valor es* x*, entonces*

$$
\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.
$$

Demostración. Por el corolario 1.3.1.

$$C_{n+1} - C_n = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n+1}q_n},$$

así

$$|C_{n+1} - C_n| = \frac{1}{q_{n+1}q_n};$$

por el teorema 1.3.6, x está entre C_n y C_{n+1} y por el teorema 1.3.7., x está más cerca de C_{n+1} que de C_n por lo tanto

$$|x - C_n| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}. \qquad (*)$$

Como

$$q_{n+1} \geq q_n,$$

multiplicando por $q_n > 0$ en esta desigualdad tenemos

$$q_{n+1}q_n \geq q_n^2,$$

entonces

$$\frac{1}{q_{n+1}q_n} \leq \frac{1}{q_n^2},$$

por lo tanto

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

$\blacksquare$

Teorema 1.4.3. *Si* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *es la* n*-ésima convergente de la fracción continua para el número irracional* x*, y* $\dfrac{a}{b}$ *es un número racional con denominador positivo tal que* $\left| x - \dfrac{a}{b} \right| < \left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right|$*, entonces* $b > q_n$*. De hecho, si* $|xb - a| < |xq_n - p_n|$ *para algún* $n \geq 0$*, entonces* $b \geq q_{n+1}$*.*

Demostración. Primero demostremos que la segunda parte del teorema implica la primera. Supongamos que la primera parte es falsa de modo que hay un número irracional $\frac{a}{b}$ tal que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \quad \text{con} \quad b \le q_n.$$

El producto de estas desigualdades da $|xb - a| < |xq_n - p_n|$. Pero la segunda parte del teorema dice que esto implica $b \ge q_{n+1}$, de donde obtenemos que $q_{n+1} \le b \le q_n$, de modo que se tiene una contradiccion, pues $q_n < q_{n+1}$ para $n \ge 0$.
Para demostrar la segunda parte del teorema se procede nuevamente mediante un argumento indirecto, supongamos que $|xb - a| < |xq_n - p_n|$ y $b < q_{n+1}$. Consideremos las ecuaciones lineales en w y y,

$$wq_n + yq_{n+1} = b, \qquad wp_n + yp_{n+1} = a$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnita cuya matriz de coeficientes tiene determinante $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^{n+2}$. En consecuencia, este sistema tiene soluciones enteras únicas w, y. Es más ni w ni y son cero. Por que si $w = 0$ entonces $b = yq_{n+1}$, lo cual implica que $y \neq 0$, de hecho $y > 0$ y $b \ge q_{n+1}$, en contradicción con $b < q_{n+1}$.
Si $y = 0$ entonces $a = wp_n$, $b = wq_n$ y

$$|xb - a| = |xwq_n - wp_n| = |w|\,|xq_n - p_n| \ge |xq_n - p_n|$$

puesto que $|w| \ge 1$, y una vez más se tiene una contradicción.

A continuación demostraremos que w y y tiene signos opuestos. Primero, si $y < 0$, entonces $xq_n = b - yq_{n+1}$ muestra que $x > 0$. Segundo, si $y > 0$, entonces $b < q_{n+1}$ implica que $b < yq_{n+1}$ y , por tanto xq_n es negativo, de donde $x < 0$. Ahora, dado que x esta entre dos convergentes consecutivas tenemos que $xq_n - p_n$

y $xq_{n+1} - p_{n+1}$ tienen signos opuestos y de aquí que $w(xq_n - p_n)$ y $y(xq_{n+1} - p_{n+1})$ tiene el mismo signo. A partir de las ecuaciones que definen a w y y se obtiene $xb - a = w(xq_n - p_n) + y(xq_{n+1} - p_{n+1})$ y dado que los términos de la derecha tienen el mismo signo, obtenemos

$$\begin{aligned} |xb - a| &= |w(xq_n - p_n) + y(xq_{n+1} - p_{n+1})| \\ &= |w(xq_n - p_n)| + |y(xq_{n+1} - p_{n+1})| \\ &> |w(xq_n - p_n)| = |w|\,|xq_n - p_n| \geq |xq_n - p_n| \end{aligned}$$

Esto es una contradicción que indica que debe ser $b \geq q_{n+1}$ quedando demostrado el teorema.

$\blacksquare$

Teorema 1.4.4. *Denotemos por x cualquier número irracional. Si existe un número racional $\frac{a}{b}$ con $b \geq 1$ tal que*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2},$$

entonces $\frac{a}{b}$ es igual a una de las convergentes del desarrollo en fracciones continuas de x.

Demostración. Es suficiente con demostrar el resultado en el caso que $(a, b) = 1$. Sean $\frac{p_n}{q_n}$ las convergentes del desarrollo en fracciones continuas de x y supongamos que $\frac{a}{b}$ no es una convergente. Las desigualdades $q_n \leq b < q_{n+1}$ determinan un entero n. Debido al teorema 12, la desigualdad $|xb - a| < |xq_n - p_n|$ es imposible para este n.

Por lo tanto, se tiene

$$|xq_n - p_n| \leq |xb - a| < \frac{1}{2b},$$

de donde

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2bq_n}.$$

Aplicando el hecho de que $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$ y de que $bp_n - aq_n$ es un entero, se encuentra que

$$\frac{1}{bq_n} \leq \frac{|bp_n - aq_n|}{bq_n} = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2}, \text{ así}$$

$$\frac{1}{bq_n} < \frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2}$$

Esto implica que $b < q_n$ lo cual es una contradicción pues $b > q_n$.

■

Observaciones

- Como los q_i conforman una sucesión creciente, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $\dfrac{1}{q_N^2} < \epsilon$, además para todo $n \geq N$ tenemos que $\dfrac{1}{q_n^2} < \dfrac{1}{q_N^2} < \epsilon$.

- Si un número irracional es expresado como una fracción continua simple infinita, es posible obtener aproximaciones por medio de números racionales con cualquier grado de exactitud deseada.

Ejemplo 13. *Encontremos una aproximación correcta a la diez milésima del número irracional representado por la fracción continua* $[1, \overline{2}]$*. Estimar el número irracional representado por dicha fracción continua.*

Solución. Hallando las convergentes tenemos:

i	0	1	2	3	4	5	6
a_i	1	2	2	2	2	2	2
p_i	1	3	7	17	41	99	239
q_i	1	2	5	12	29	70	169

para que sea $\dfrac{1}{q_n^2} < 5 \times 10^{-5}$ basta que sea $q_n^2 > 20000$ es decir, $q_n > 141$.
Observando el cuadro tenemos que $q_6 = 169 > 141$ entonces

$$x \approx \frac{p_6}{q_6} = \frac{239}{169} = 1{,}4142011 \quad \text{aproximadamente es } \sqrt{2}.$$

Una pregunta interesante en cuanto a las fracciones continuas simples infinitas es ¿qué pasa si en determinado momento empieza a repetirse un grupo de términos de la fracción continua simple infinita?. A esta la llamaremos *fracción continua periódica*, y tiene la particularidad que el número que representará será un número irracional cuadrático. A continuación nos referiremos a esta clase de fracciones continuas simples.

1.5. Fracción continua infinita periódica

Un subconjunto importante e interesante de las fracciones continuas infinitas es el conjunto de la fracciones continuas periódicas.

Definición 1.5.1. *(fracción continua periódica) Es una fracción continua en la cual un conjunto de cifras consecutivas se repite infefinidamente. Usamos la notación*

$$[a_1, a_2, ...a_n, \overline{b_1, b_2, ...b_n}],$$

donde la barra agrupa al conjunto de cifras que se repite.

Recordemos que un irracional cuadrático es un número irracional que es una solución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son enteros. Todo irracional cuadrático es un número real que tiene la forma $r + s\sqrt{k}$, donde r y $s \in \mathbb{Q}$, $s \neq 0$ y k es un entero positivo que no es cuadrado perfecto, esto es equivalente a $\dfrac{a + b\sqrt{k}}{c}$ con a, b y c enteros, o $\dfrac{a + \sqrt{q}}{c}$.
Como veremos, las fracciones continuas periódicas difieren de otras fracciones continuas en que ellas representan irracionales cuadráticos, así por ejemplo tenemos:

$$\frac{1 + \sqrt{10}}{3} = [\overline{1, 2, 1}],$$
$$\sqrt{23} = [4, \overline{1, 3, 1, 8}],$$
$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = [0, \overline{1}].$$

La representación en fracción continua de $\dfrac{1 + \sqrt{10}}{3}$ es un ejemplo de una fracción continua periódica pura.

Teorema 1.5.1. *Toda fracción continua periódica representa un irracional cuadrático.*

Demostración.

Sea $[a_0, a_1, ...a_n, \overline{b_0, b_1, ..., b_{m-1}}]$ una fracción continua periódica. Entonces hagamos:

$$x = [a_0, a_1, ...a_n, y] \quad \text{donde} \quad y = [\overline{b_0, b_1, ...b_{m-1}}].$$

Como

$$y = [b_0, b_1, ...b_{m-1}, \overline{b_0, b_1, ...b_{m-1}}],$$

entonces

$$y = [b_0, b_1, ...b_{m-1}, y]. \qquad (8)$$

Sea $C_i = \frac{p_i^{'}}{q_i^{'}}$ la i-ésima convergente de la última fracción continua, entonces

$$y = \frac{yp_m^{'} + p_{m-1}^{'}}{yq_m^{'} + q_{m-1}^{'}},$$

y de aquí se obtiene el siguiente resultado

$$y^2q_m^{'} + yq_{m-1}^{'} = yp_m^{'} + p_{m-1}^{'}$$

$$q_m^{'}y^2 + y(q_{m-1}^{'} - p_m^{'}) - p_{m-1}^{'} = 0 \qquad (9)$$

Esta es una ecuación cuadrática cuyo discriminante es positivo, esto es $(q_{m-1}^{'} - p_m^{'})^2 - 4(q_m^{'})(-p_{m-1}^{'}) = (q_{m-1}^{'} - p_m^{'})^2 + 4(q_m^{'})(p_{m-1}^{'}) > 0$, de aquí se tiene que y es un número irracional cuadrático o bien un número racional, pero lo último queda excluido debido a que la fracción continua es infinita, luego y es un número irracional cuadrático. Supongamos que $y = r + s\sqrt{d}$ con r y s números racionales, $s \neq 0$ y d un entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Si $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ son las últimas convergentes de la fracción $[a_1, a_2, ...a_n]$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= [a_0, a_1, ...a_n, y] \\ &= \frac{yp_n + p_{n-1}}{yq_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{(r + s\sqrt{d})p_n + p_{n-1}}{(r + s\sqrt{d})q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{rp_n + p_{n-1} + s\sqrt{d}}{rq_n + q_{n-1} + s\sqrt{d}} \\ &= \frac{A + B\sqrt{d}}{C + D\sqrt{d}}, \end{aligned}$$

donde A, B, C y D son números racionales. Por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= \frac{(A + B\sqrt{d})(C - D\sqrt{d})}{(C + D\sqrt{d})(C - D\sqrt{d})} \\ &= \frac{AC - AD\sqrt{d} + BC\sqrt{d} - dBD}{C^2 - dD^2} \\ &= \frac{AC - dBD}{C^2 - dD^2} + \frac{(BC - AD)\sqrt{d}}{C^2 - dD^2} \\ &= r^{'} + s^{'}\sqrt{d} \end{aligned}$$

donde $r^{'}$ y $s^{'}$ son números racionales. De esta forma queda demostrado que x es un número irracional cuadrático.

$\blacksquare$

La demostración del anterior teorema da las pautas para encontrar el irracional cuadrático que es representado mediante una fracción continua infinita periódica, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 14. *Determinar el irracional cuadrático representado por cada una de las funciones continuas simples infinitas.*

(i) $[4, 1, \overline{3, 4}]$

Solución

Sea $x = [4, 1, \overline{3, 4}]$, entonces $x = [4, 1, y]$ donde $y = [\overline{3, 4}] = [3, 4, \overline{3, 4}] = [3, 4, y]$. Desarrollando la fracción continua tenemos

$$y = \frac{y(13) + 3}{y(4) + 1}; \quad \text{de aquí se obtiene} \quad y^2 - 3y - \frac{3}{4} = 0$$

Esta ecuación tiene dos raíces, pero tomaremos la que tenga como parte entera el primer término de la fracción periódica $y = [\overline{3, 4}]$, esto es, como $\left\lfloor \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} \right\rfloor = 1$ y $\left\lfloor \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \right\rfloor = 3$ tomamos

$$y = \frac{3}{2} + \sqrt{3}.$$

Las primeras dos convergentes de $[4, 1, y]$ son: $C_0 = 4$, $C_1 = \frac{5}{1}$ entonces

$$x = \frac{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) 5 + 4}{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) 1 + 1} = \frac{23 + 10\sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{5 - 2\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3} + 55}{13}$$

(ii) $[\overline{1, 2, 3}]$

Solución Sea $y = [\overline{1, 2, 3}] = [1, 2, 3, \overline{1, 2, 3}] = [1, 2, 3, y]$, desarrollando la fracción continua tenemos

i	0	1	2
a_i	1	2	3
p_i	1	3	10
q_i	1	2	7
C_i	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{7}$

$$y = \frac{y(10)+3}{y(7)+2} \quad \text{de donde se obtiene} \quad 7y^2 - 8y - 3 = 0$$

Esta ecuación tiene dos raíces, pero tomaremos la que tenga como parte entera el primer término de la fracción continua periódica $y = [\overline{1,2,3}]$, como $\left\lfloor \frac{4-\sqrt{37}}{7} \right\rfloor = -1$ y $\left\lfloor \frac{4+\sqrt{37}}{7} \right\rfloor = 1$ tomamos

$$y = \frac{4+\sqrt{37}}{7}$$

(iii) $[0, \overline{1,2,3}]$

Solución. Sea $x = [0, \overline{1,2,3}]$ donde $y = [\overline{1,2,3}] = \dfrac{4+\sqrt{37}}{7}$ según el ejemplo anterior.

Ahora, las dos primeras convergentes de $[0,1,2,3,y]$ están en la siguiente tabla

i	0	1	2	3
a_i	0	1	2	3
p_i	0	1	2	7
q_i	1	1	3	10
C_i	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$

de donde

$$x = \frac{\left(\dfrac{4+\sqrt{37}}{7}\right)7+2}{\left(\dfrac{4+\sqrt{37}}{7}\right)10+3} = \frac{42+7\sqrt{37}}{61+10\sqrt{37}} \times \frac{61-10\sqrt{37}}{61-10\sqrt{37}}$$

$$x = \frac{-4+\sqrt{37}}{3}$$

Nota 1.5.1. *Ahora podemos preguntarnos si a algún irracional cuadrático le corresponde una fracción continua no periódica. La respuesta nos la da el siguiente teorema.*

Teorema 1.5.2. *Para todo irracional cuadrático, su correspondiente fracción continua es periódica.*

Demostración. Sea x un irracional cuadrático, entonces x se puede escribir de la forma

$x = \dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ donde a, b, c son enteros, b no es cuadrado perfecto y $c \neq 0$;

el entero b no es cuadrado perfecto puesto que x es irracional, entonces multiplicando por $|c|$ tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left(a+\sqrt{b}\right)\cdot |c|}{c \cdot |c|} \qquad \text{y esto es igual a} \\ x &= \frac{ac+\sqrt{bc^2}}{c^2} \qquad \text{si} \qquad c > 0 \\ &\text{y} \\ x &= \frac{-ac+\sqrt{bc^2}}{-c^2} \qquad \text{si} \qquad c < 0. \end{aligned}$$

Si hacemos $v = \pm ac$, $d = bc^2$, $u = \pm c^2$, entonces tenemos que

$$x = \frac{v+\sqrt{d}}{u} \qquad \text{donde } d, v, u \text{ son enteros, } u \neq 0,\ d \text{ no es un cuadrado perfecto y } u | d - v^2 \ .$$

Construimos recursivamente la sucesiones infinitas de enteros v_i, u_i, a_i e irracionales x_i;

Hacemos

$$\begin{aligned} v_0 &= v \\ u_0 &= u \\ x_0 &= \frac{v_0+\sqrt{d}}{u_0} \\ a_0 &= \lfloor x_0 \rfloor \end{aligned}$$

y si conocemos v_i, u_i, x_i y a_i

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= a_i u_i - v_i \\ u_{i+1} &= \frac{d-v_{i+1}^2}{u_i} \\ x_{i+1} &= \frac{v_{i+1}+\sqrt{d}}{u_{i+1}} \\ a_{i+1} &= \lfloor x_{i+1} \rfloor . \end{aligned}$$

Ahora aplicamos inducción para demostrar que los v_i y los u_i son enteros tales que $v_i \neq 0$ y $u_i | d - v_i^2$. Esto se cumple para $i = 0$ y si suponemos que es verdadero en el i-ésimo paso, se observa que $v_{i+1} = a_i u_i - v_i$ es entero, entonces podemos hacer

$$u_{i+1} = \frac{d-v_{i+1}^2}{u_i} = \left(\frac{d-v_i^2}{u_i} + 2a_i v_i - a_i^2 u_i \right);$$

lo último es un entero puesto que por hipótesis inductiva $\frac{d-v_i^2}{u_i}$ es entero. Por otro lado

$u_{i+1} \neq 0$ (pues si $u_{i+1} = 0$ se tendría $d = v_{i+1}^2$ lo cual no puede suceder ya que d no es un cuadrado perfecto).

Además se tiene que $u_i = \dfrac{d-v_{i+1}^2}{u_{i+1}}$ de modo que $u_{i+1} | d - v_{i+1}^2$.

Finalmente, tenemos que, para todo i

$$x_i - a_i = \frac{-a_i u_i + v_i + \sqrt{d}}{u_i} = \frac{\sqrt{d} - v_{i+1}}{u_i} = \frac{d - v_{i+1}^2}{u_i\left(\sqrt{d} + v_{i+1}\right)} = \frac{u_{i+1}}{\sqrt{d} + v_{i+1}} = \frac{1}{x_{i+1}},$$

esto es

$$x_i = a_i + \frac{1}{x_{i+1}},$$

luego $x = x_0 = [a_0, a_1, a_2, ...]$.

De acuerdo al teorema 4, si $\dfrac{p_n}{q_n}$ es la n-ésima convergente tenemos

$$x = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Ahora, para los números $z = \dfrac{s+\sqrt{d}}{t}$ llamamos conjugado [3] de z al número $\overline{z} = \dfrac{s-\sqrt{d}}{t}$. Si despejamos x_n en función de x tenemos

$$x_n = -\left(\frac{x q_{n-2} - p_{n-2}}{x q_{n-1} - p_{n-1}}\right) = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\left(\frac{x - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right),$$

y tomando conjugados en ambos miembros obtenemos

$$\overline{x_n} = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\left(\frac{\overline{x} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\overline{x} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right),$$

de donde cuando $\quad n \longrightarrow \infty \quad$ nos resulta

$$S_n = \left(\frac{\overline{x} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\overline{x} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right) \longrightarrow \left(\frac{\overline{x} - x}{\overline{x} - x}\right) = 1.$$

Dado por ejemplo $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ exite N tal que a partir $n > N$ $|S_n - 1| < \dfrac{1}{2}$ de donde S_n es positivo. Luego existe un $N > 0$ tal que $\overline{x_n} < 0$ para todo $n \geq N$. Como $x_n > 0$, se tiene

$$x_n - \overline{x_n} = \frac{2\sqrt{d}}{u_n} > 0, \quad \text{para todo} \quad n \geq N.$$

Luego $u_n > 0$ y por lo tanto:

$$0 < u_{n+1} u_n = d - v_{n+1}^2 \leq d, \quad \text{para todo} \quad n \geq N.$$

[3] Estos conjugados tienen las mismas propiedades operativas que los conjugados de los números complejos

De esta última desigualdad obtenemos $0 < u_n < d$ para todo $n \geq N$.

También tenemos que para $n > N$:

$$\begin{aligned} u_n u_{n+1} &= d - v_{n+1}^2 \leq d, & \qquad u_n \leq u_n u_{n+1} \leq d \\ v_{n+1}^2 &< v_{n+1}^2 + u_n u_{n+1} = d, & \qquad |v_{n+1}| < \sqrt{d}, \end{aligned}$$

luego el rango de las sucesiones de enteros v_n y u_n son finitas, y por lo tanto existen j y k enteros tales que $j \neq k$ donde $v_j = v_k$ y $u_j = u_k$, por lo tanto $x_j = x_k$, y esto implica

$$x_0 = [a_0, a_1, ..., a_{j-1}, \overline{a_j, a_{j+1}, ..., a_{k-1}}]$$

Luego x es periódica.

■

Ejemplo 15. *Hallemos la expansión de $\sqrt{7}$ como fracción continua.*

Sabemos que $2 < \sqrt{7} < 3$, luego $a_0 = 2$ así $\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{7}-2}}$. Sea

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} \\ &= \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} \\ &= \frac{\sqrt{7}+2}{3}, \end{aligned}$$

luego $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = 1$. De igual manera

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{x_1 - a_1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right) - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{7}-1}$$
$$= \frac{3(\sqrt{7}+1)}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{7}+1}{2},$$

luego $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor = 1$. Continuando este proceso, calculamos el siguiente a_i, para lo cual hacemos

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right) - 1}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{7}-1}$$
$$= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{7}+1}{3},$$

luego $a_3 = \lfloor x_3 \rfloor = 1$. De igual manera sea

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right) - 1}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{7}-2}$$
$$= \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}$$
$$= \sqrt{7}+2,$$

luego $a_4 = \lfloor x_4 \rfloor = 4$. Sea

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{1}{x_4 - a_4} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{7}+2\right) - 4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_5 = x_1$, y a partir de esta posición comienzan a repetirse los valores a_i de donde obtenemos:

$$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}].$$

La barra abarca el periodo del número cuadrático.

Según los teoremas 1.4.4. y 1.5.1. hay una correspondencia entre fracciones continuas periodicas y números irracionales cuadráticos. Uno de lo ejemplos mostrados al principio de la sección de fracciones continuas periodicas es $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3} = [\overline{1, 2, 1}]$. Casos como estos, en los cuales el periodo incluye el primer término de la fracción continua se llaman *fracciones continuas periódicas puras*. Este tipo de fracciones continuas se corresponden con ciertos tipo de irracionales cuadráticos. En concreto tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.5.3. *Sea $x = r + s\sqrt{k}$ un irracional cuadrático y $\bar{x} = r - s\sqrt{k}$ su conjugado. Si $x > 1$ y $-1 < \bar{x} < 0$, entonces la fracción continua que representa a x es una fracción continua periódica pura.*

Demostración.

Tomemos $x > 1$ con $-1 < \overline{x} < 0$. Consideremos $x_0 = x$, $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$ y $x_1 = \dfrac{1}{x_0 - a_0}$ y dado x_i hacemos $a_i = \lfloor x_i \rfloor$, $x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i - a_i}$ para todo entero positivo i.

Tenemos entonces las sucesiones $\{a_i\}$, $\{x_i\}$ y además, $\dfrac{1}{\overline{x_{i+1}}} = \overline{x_i} - a_i$ para algún entero i.

Demostremos por inducción que $x_i > 1$ y $-1 < \overline{x_i} < 0$ para algún i y además $a_i \geq 1$. Para $i = 0$ se tiene el resultado por la hipótesis. Supongamos ahora que se cumple para todo i. Como $x_i = a_i + (x_i - a_i)$ entonces $0 \leq x_i - a_i < 1$ de aquí $x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i - a_i} > 1$ de donde $a_{i+1} = \lfloor x_{i+1} \rfloor \geq 1$. Dado que $\overline{x_i} < 0$ tenemos $\overline{x_i} - a_i < 0$, luego $\overline{x_{i+1}} = \dfrac{1}{\overline{x_i} - a_i} < 0$.

Por otro lado, como $\overline{x_i} = a_i + \dfrac{1}{\overline{x_{i+1}}} < 0$ entonces $\dfrac{1}{\overline{x_{i+1}}} < -a_i \leq -1$, luego $\dfrac{1}{\overline{x_{i+1}}} < -1$ que es equivalente $\overline{x_{i+1}} > -1$; por lo tanto $-1 < \overline{x_{i+1}} < 0$. Concluimos que para todo entero $i \geq 0$ se tiene que $x_i > 1$ y $-1 < \overline{x_i} < 0$.

Dado que $x_i = a_i + \dfrac{1}{x_{i+1}}$ entonces

$$0 < -\frac{1}{\overline{x_{i+1}}} - a_i < 1 \text{ de donde } a_i < -\frac{1}{\overline{x_{i+1}}} < a_i + 1 \text{ y obtenemos} \quad a_i = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x_{i+1}}} \right\rfloor.$$

Ahora bien, x es un irracional cuadrático, de modo que $x_j = x_k$ para algunos enteros j y k con $0 < j < k$. Entonces $\overline{x_j} = \overline{x_k}$ y

$$a_{j-1} = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x_j}} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x_k}} \right\rfloor = a_{k-1}$$
$$x_{j-1} = a_{j-1} + \frac{1}{x_j} = a_{k-1} + \frac{1}{x_k} = x_{k-1}.$$

Así que $x_j = x_k$ implica $x_{j-1} = x_{k-1}$. Reiterando este argumento llegamos a $x_0 = x_{k-j}$ y obtenemos

$$x = x_0 = [\overline{a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-j-1}}]$$

$\blacksquare$

Ejemplo 16. *Verifiquemos el teorema 1.4.4. para cada uno de los irracionales cuadráticos.*

$(i) \quad \dfrac{4+\sqrt{37}}{7}$

Sea $x = x_0 = \dfrac{4+\sqrt{37}}{7} > 1$ y $-1 < \dfrac{4-\sqrt{37}}{7} < 0$ además, $\left\lfloor \dfrac{4+\sqrt{37}}{7} \right\rfloor = 1 = a_0 \geq 1$. cumpliendo con la hipótesis del teorema. Sea

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\left(\frac{4+\sqrt{37}}{7}\right) - 1} \\ &= \frac{7}{-3+\sqrt{37}} \\ &= \frac{7(-3-\sqrt{37})}{-28} \\ &= \frac{3+\sqrt{37}}{4} \end{aligned}$$

donde $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{4} > 1$ y $-1 < \dfrac{3-\sqrt{37}}{4} < 0$ con $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = 2 > 1$.

De igual manera

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{37}}{4}\right) - 2} \\ &= \frac{4}{-5+\sqrt{37}} \\ &= \frac{4(-5-\sqrt{37})}{-12} \\ &= \frac{5+\sqrt{37}}{3} \end{aligned}$$

donde $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{37}}{3} > 1$ y $-1 < \dfrac{5-\sqrt{37}}{3} < 0$ con $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor = 3 > 1.$

De igual manera

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\left(\dfrac{5+\sqrt{37}}{3}\right) - 3} \\ &= \frac{3}{-4+\sqrt{37}} \\ &= \frac{3(-4-\sqrt{37})}{-21} \\ &= \frac{4+\sqrt{37}}{7}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_3 = x_1$ y a partir de esta posición comienzan a repetirse los valores de a_i. Notemos que

$$a_0 = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x_1}} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{\dfrac{3-\sqrt{37}}{4}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3+\sqrt{37}}{7} \right\rfloor = 1$$

$$a_1 = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x_2}} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{\dfrac{5-\sqrt{37}}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5+\sqrt{37}}{4} \right\rfloor = 2$$

$$a_2 = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x_3}} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{\dfrac{4-\sqrt{37}}{7}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+\sqrt{37}}{3} \right\rfloor = 3,$$

de donde obtenemos

$$\frac{4+\sqrt{37}}{7} = [\overline{1,2,3}]$$

(ii) $\quad 2+\sqrt{7}$

Solución.

Como $x > 1$ y $\overline{x} = 2 - \sqrt{7}$ cumple que $-1 < \overline{x} < 0$, entonces la fracción continua que representa a x es una fracción continua periódica pura.
Como $4 \leq 2 + \sqrt{7} < 5$ entonces tenemos

$$\begin{array}{rclcc}
x_0 & = & 2+\sqrt{7} & \text{donde} & a_0 = 4 \\
x_1 & = & \dfrac{1}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{\sqrt{7}+2}{3} & \text{donde} & a_1 = 1 \\
x_2 & = & \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}+1}{2} & \text{donde} & a_2 = 1 \\
x_3 & = & \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{7}+1}{3} & \text{donde} & a_3 = 1 \\
x_4 & = & \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}} = \sqrt{7}+2, & &
\end{array}$$

en este último cálculo llegamos a que $x_4 = \sqrt{7} + 2$ es igual a x_0 determinando así el periodo del irracional cuadrático. Por lo tanto $2 + \sqrt{7} = [\overline{4, 1, 1, 1}]$.

Veremos ahora que cualquier fracción continua periódica pura representa un irracional cuadrático que cumple las condiciones de las hipótesis del teorema 1.4.4.. Mostraremos un ejemplo y luego demostraremos el recíproco de dicho teorema.

Ejemplo 17. *Consideremos la fracción continua periódica pura* $[\overline{3, 1, 2}]$ *y determinemos que número representa*

Sea

$$\alpha = [\overline{3, 1, 2}] = [3, 2, 1, \alpha] = \frac{\alpha p_3 + p_2}{\alpha q_3 + q_2} = \frac{11\alpha + 4}{3\alpha + 1}$$

Esto conduce a la ecuación cuadrática

$$3\alpha^2 - 10\alpha - 4 = 0. \qquad (*)$$

Consideremos ahora el número β que sale como resultado de invertir el periodo del número α en su representación, es decir, el número

$$\beta = [\overline{2,1,3}] = [2,1,3,\beta] = \frac{11\beta+3}{4\beta+1};$$

Esto conduce a la ecuación cuadrática

$$4\beta^2 - 10\beta - 3 = 0.$$

La última ecuación puede escribirse de la forma

$$3\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 - 10\left(-\frac{1}{\beta}\right) - 4 = 0 \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ vemos que la ecuación cuadrática

$$3x^2 - 10x - 4 = 0 \quad (***)$$

tiene como solución $x = \alpha$ y $x = -\dfrac{1}{\beta}$. Estas raíces no pueden ser iguales, ya que ambos α y β son positivos y por lo tanto α y $-\dfrac{1}{\beta}$ tienen signos opuestos. Además $\beta > 1$, y así $-1 < -\dfrac{1}{\beta} < 0$. Esto demuestra que $(*)$, o $(***)$ tiene la raíz positiva α y la raíz negativa $\overline{\alpha} = -\dfrac{1}{\beta}$, donde $-1 < \overline{\alpha} < 0$. Es facil obtener estos resultados numéricamente. La fórmula cuadrática $(*)$ tiene dos raices

$$\alpha = \frac{5+\sqrt{37}}{3} \quad \text{y} \quad \frac{5-\sqrt{37}}{3}.$$

La raíz positiva β de $(**)$ es

$$\beta = \frac{5+\sqrt{37}}{4},$$

y entonces

$$-\frac{1}{\beta} = \frac{-4}{5+\sqrt{37}} = \frac{-4}{5+\sqrt{37}} \cdot \frac{5-\sqrt{37}}{5-\sqrt{37}} = \frac{5-\sqrt{37}}{3},$$

Demostramos entonces que $-\frac{1}{\beta}$ es igual a $\overline{\alpha}$. Por otra parte con tres decimales de aproximación tenemos $\alpha = 3,694 > 1$, y $\overline{\alpha} = -0,361$ que está entre -1 y 0.

Ahora vamos a demostrar el caso general

Teorema 1.5.4. *Si a_0, a_1,...,a_n son enteros positivos, la fracción continua periódica pura $\alpha = [\overline{a_0, a_1, ..., a_n}]$ es mayor que 1 y es la raíz positiva de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros. Además si $\beta = [\overline{a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0}]$ es la fracción continua de α con el periodo invertido, entonces $-\dfrac{1}{\beta} = \overline{\alpha}$ la otra raíz de la ecuación cuadrática. Además, $-1 < \overline{\alpha} < 0$.*

Demostración. Sea $\dfrac{p_n}{q_n}$ la n-ésima convergente de α y sean $\dfrac{p_n^\iota}{q_n^\iota}$ y $\dfrac{p_{n-1}^\iota}{q_{n-1}^\iota}$ respectivamente la n y $n-1$-ésima convergente de β.
Demostremos primero que $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = \dfrac{p_n^\iota}{q_n^\iota}$ y $\dfrac{q_n}{q_{n-1}} = \dfrac{p_{n-1}^\iota}{q_{n-1}^\iota}$. En efecto, como $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ vemos que

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}},$$

y del hecho de que $p_{n-1} = a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}$, tenemos también que

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{p_{n-3}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-2}}{p_{n-3}}},$$

similarmente

$$\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}} = a_{n-2} + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-3}}{p_{n-4}}}$$

y en algún momento obtenemos

$$\frac{p_2}{p_1} = a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{p_1}{p_0}},$$

$$\frac{p_1}{p_0} = a_1 + \frac{1}{a_0}.$$

de donde $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, ..., a_0] = \dfrac{p_n^\iota}{q_n^\iota}$.
De manera similar se encuentra que $\dfrac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, ..., a_1] = \dfrac{p_{n-1}^\iota}{q_{n-1}^\iota}$.

Por lo tanto y dado que el numerador y denominador de una convergente son primos relativos , debemos tener

$$\begin{array}{ll} p_n^\iota = p_n, & p_{n-1}^\iota = q_n, \\ & \qquad\qquad (I) \\ q_n^\iota = p_{n-1}, & q_{n-1}^\iota = q_{n-1}. \end{array}$$

Como $\alpha = [a_1, a_2, ..., a_n, \alpha]$ entonces

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}, \quad (II)$$

donde $\dfrac{p_n}{q_n}$ y $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ son respectivamente la n y $(n-1)$-ésima convergentes de $[\overline{a_0, a_1, ..., a_n}]$.

La ecuación (II) es equivalente con

$$q_n\alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\alpha - p_{n-1} = 0. \quad (II)$$

Invirtiendo el periodo en α obtenemos

$$\beta = [\overline{a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0}] = [a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, \beta],$$

que es equivalente a

$$\beta = \frac{\beta p_n^\iota + p_{n-1}^\iota}{\beta q_n^\iota + q_{n-1}^\iota}, \quad (III)$$

donde $\frac{p_n^\iota}{q_n^\iota}$ y $\frac{p_{n-1}^\iota}{q_{n-1}^\iota}$ son respectivamente la n y $(n-1)$-ésima convergentes de $[\overline{a_n, a_{n-1}, ..., a_0}]$. Sustituyendo (I) en (III) obtenemos

$$\beta = \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + q_{n-1}},$$

este número satiface la ecuación

$$p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\beta - q_n = 0,$$

la cual es equivalente con

$$q_n\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2-(p_n-q_{n-1})\left(-\frac{1}{\beta}\right)-p_{n-1}=0 \quad (IV)$$

Comparando (II) con (IV) concluimos que la ecuación

$$q_nx^2-(p_n-q_{n-1})x-p_{n-1}=0$$

tiene dos raíces: La raíz $x_1=\alpha$, y la raíz $x_2=-\dfrac{1}{\beta}$. Ahora β representa la fracción continua periódica pura $[\overline{a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0}]$, donde a_n, a_{n-1},...,a_0 son enteros positivos; por lo tanto tenemos $\beta>1$, $0<\dfrac{1}{\beta}<1$, y así $-1<-\dfrac{1}{\beta}<0$.
En otras palabras, la raíz $\overline{\alpha}=-\dfrac{1}{\beta}$ esta entre -1 y 0. Esto completa la demostración.

Teorema 1.5.5. *Si k es un entero positivo que no es cuadrado perfecto entonces la fracción continua que representa a $\sqrt{k}$ es una fracción continua periódica cuyo periodo comienza después del primer término, es decir, que tenemos la forma*

$$\sqrt{k}=[a_0,\overline{a_1,a_2,...,a_{n-1},2a_0}]$$

Demostración. Sea $\sqrt{k}=[a_0,a_1,...]$ como $a_0=\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ tenemos que $a_0<\sqrt{k}$, $a_0+\sqrt{k}>1$ y $-1<a_0-\sqrt{k}<0$, entonces por teorema 14 $(a_0+\sqrt{k})$ se representa mediante una fracción continua periódica pura. Por tanto

$$\begin{aligned}
x &= a_0+\sqrt{k}=[\overline{2a_0,a_1,...,a_{n-1}}]\\
\sqrt{k} &= -a_0+[\overline{2a_0,a_1,...,a_{n-1}}]\\
&= -a_0+[2a_0,\overline{a_1,...,a_{n-1},2a_0}]\\
&= [a_0,\overline{a_1,a_2,...,a_{n-1},2a_0}]
\end{aligned}$$

■

Miremos algúnos ejemplos:

- $\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$

$\lfloor\sqrt{13}\rfloor = 3$, así $3+\sqrt{13} > 1$ y $-1 < 3-\sqrt{13} < 0$ y tenemos $3+\sqrt{13} = [\overline{6, 1, 1, 1, 1}] = [6, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ de donde $\sqrt{13} = -3 + [6, \overline{1, 1, 1, 1, 6}] = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$

- $\sqrt{21} = [4, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$

$\lfloor\sqrt{21}\rfloor = 4$, así $4+\sqrt{21} > 1$ y $-1 < 4-\sqrt{41} < 0$ y tenemos $4+\sqrt{21} = [\overline{8, 1, 1, 2, 1, 1}] = [8, \overline{1, 1, 1, 1, 8}]$ de donde $\sqrt{21} = -4 + [8, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}] = [4, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$.

Luego tenemos los siguientes ejemplos

- $\sqrt{34} = [5, \overline{1, 4, 1, 10}]$
- $\sqrt{61} = [7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}]$
- $\sqrt{67} = [8, \overline{5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16}]$
- $\sqrt{29} = [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$
- $\sqrt{43} = [6, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}]$

Si analizamos el periodo de los anteriores ejemplos y eliminamos el último término, observamos que hay una repetición de los términos que se leen de la izquierda hacia el centro cuando se leen de la derecha hacia al centro. Llamaremos *simetría* a esta característica de la expresión que se presenta para racionales cuadráticos de la forma $\sqrt{k}$.

Lema 1.5.1. *Si x un número real mayor que 1 cuya representación en fracciones continuas es $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ entonces la representación en fracciones continuas de $\frac{1}{x}$ es $[0, a_0, a_1, ..., a_n, ...]$*

Demostración. Se tiene $x = [a_0, a_1, a_2, ...]$ y como $x > 1$ entonces $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ luego,

$$\frac{1}{x} = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{[a_0, a_1, ..., a_n, ...]} = [0, a_0, a_1, ...].$$

Teorema 1.5.6. ***Teorema 19.*** *(Simetría) El periodo de cada fracción continua del teorema anterior, sin incluir $2a_0$, es una expresión simétrica, es decir, si k no es cuadrado perfecto la fracción continua para $\sqrt{k}$ es de la forma:*

$$[a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, ..., a_3, a_2, a_1, 2a_0}]$$

Demostración.

Tenemos que $\alpha = \sqrt{k} + a_0 = [2a_0, \overline{a_1, ..., a_{n-1}, 2a_0}] = [\overline{2a_0, a_1, ..., a_{n-1}}]$ Consideremos la misma fracción continua pero con el periodo invertido, es decir $[\overline{a_{n-1}, ..., a_1, 2a_0}](*)$ que representa a $-\frac{1}{\overline{\alpha}}$. Por otro lado, como $\sqrt{k} - a_0 = [0, \overline{a_1, a_2, ..., 2a_0}]$ por el lema 1.5.1 tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{k} - a_0} = [\overline{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 2a_0}].$$

Dado que $\overline{\alpha} = -\sqrt{k} + a_0$, se tiene entonces

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{k} - a_0} = [\overline{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 2a_0}].(**)$$

Comparando $(*)$ y $(**)$ (y recordando el hecho de que el desarrollo de un número es único), vemos que $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$,... .Por lo tanto la fracción continua para $\sqrt{k}$ es necesariamente de la forma $[a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, ..., a_3, a_2, a_1, 2a_0}]$.

■

Los siguientes teoremas permiten determinar fracciones continuas para ciertos irracionales cuadráticos que tienen una forma especial.

Teorema 1.5.7. *Si p es un entero positivo, entonces la fracción continua simple periódica que representa a $\sqrt{p^2+1}$ es $[p,\overline{2p}]$*

Demostración.

Sea p un entero positivo, entonces

$$p=\sqrt{p^2}<\sqrt{p^2+1}\leq\sqrt{p^2+2p+1}=\sqrt{(p+1)^2}=p+1 \quad \text{,de donde} \quad \left\lfloor\sqrt{p^2+1}\right\rfloor=p,$$

así
$$\begin{aligned}\sqrt{p^2+1} &= p+(\sqrt{p^2+1}-p)\\ &= p+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{p^2+1}-p}}\\ &= p+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{p^2+1}+p}{1}}, \quad \text{en este caso } \left\lfloor\sqrt{p^2+1}+p\right\rfloor=2p \quad \text{,luego}\\ &= p+\cfrac{1}{2p+(\sqrt{p^2+1}-p)}\end{aligned} \tag{1.1}$$

Tenemos garantizado por el teorema 1.4.3 que al desarrollar la fracción continua para un número irracional cuadrático, en algún momento se repite por primera vez un x_i, y esto determina el periodo. En este caso $\frac{1}{x_1}=\sqrt{p^2+1}-p=\frac{1}{x_2}$, de donde $x_1=x_2$ y por lo tanto $\sqrt{p^2+1}=[p,\overline{2p}], \quad p>0$.

■

Teorema 1.5.8. *Si p es un entero positivo mayor que 1, entonces la fracción continua periódica que representa a $\sqrt{p^2-1}$ es $[p-1,\overline{1,2(p-1)}]$.*

Demostración.

Sea p un entero positivo tal que $p>1$, entonces $p-1>0$. luego

$$p-1=\sqrt{(p-1)^2}<\sqrt{p^2-1}\leq\sqrt{p^2}=p, \quad \text{de aquí} \quad \left\lfloor\sqrt{p^2-1}\right\rfloor=p-1.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{p^2-1} &= (p-1)+\left(\sqrt{p^2-1}-(p-1)\right)\\
\sqrt{p^2-1} &= (p-1)+\left(\sqrt{p^2-1}+(1-p)\right)\\
&= p-1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{p^2-1}+(1-p)}}\\
&= p-1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{p^2-1}+p-1}{2(p-1)}}\\
&= p-1+\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{\sqrt{p^2-1}+p-1}{2(p-1)}-1\right)}\\
&= p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{p^2-1}+(1-p)}{2(p-1)}}\\
&= p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2(p-1)}{\sqrt{p^2-1}+(1-p)}}}\\
&= p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2(p-1)(\sqrt{p^2-1}-(1-p))}{(\sqrt{p^2-1}+(1-p))(\sqrt{p^2-1}-(1-p))}}}\\
&= p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{p^2-1}-(1-p)}{1}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(p-1)+\left(\sqrt{p^2-1}-(1-p)-2(p-1)\right)}}\\
&= p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(p-1)+(\sqrt{p^2-1}+(1-p))}}
\end{aligned}$$

Tenemos garantizado por el teorema 1.4.3. que al desarrollar la fracción continua para un número irracional cuadrático, en algún momento se repite por primera vez un x_i, y esto determina el periodo. En este caso $\dfrac{1}{x_1} = \sqrt{p^2-1} + (1-p) = \dfrac{1}{x_2}$, de donde $x_1 = x_2$ y por lo tanto$\sqrt{p^2-1} = [p-1, \overline{1, 2(p-1)}]$.

■

Teorema 1.5.9. *Demostrar que si p es un entero positivo, entonces la fracción continua periódica que representa a $\sqrt{p^2+2}$ es $[p, \overline{p, 2p}]$*

Demostración. Sea $p \geq 1$ se tiene

$$p = \sqrt{p^2} < \sqrt{p^2+2} \leq \sqrt{p^2+2p+1} = \sqrt{(p+1)^2} = p+1 \quad \text{de donde} \quad \left\lfloor \sqrt{p^2+2} \right\rfloor = p$$

así

$$\begin{aligned}
\sqrt{p^2+2} &= p + (\sqrt{p^2+2} - p) = p + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{p^2+2}-p}} \\
&= p + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{p^2+2}+p}{2}} = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{\sqrt{p^2+2}-p}{2}} \\
&= p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{\sqrt{p^2+2}+p}} = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{2p + (\sqrt{p^2+2}-p)}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sqrt{p^2+2} = [p, \overline{p, 2p}]$.

■

Miremos algunos ejemplos de los teoremas anteriores

- $\sqrt{17} = \sqrt{4^2+1}$ de aquí $p = 4$, luego $\sqrt{17} = [4, \overline{2 \cdot 4}] = [4, \overline{8}]$.
- $\sqrt{35} = \sqrt{6^2-1}$ de aquí $p = 6$, luego $\sqrt{35} = [6-1, \overline{1, 2 \cdot (6-1)}] = [5, \overline{1, 10}]$.

- $\sqrt{51} = \sqrt{7^2 + 2}$ de aquí $p = 7$, luego $\sqrt{51} = [7, \overline{7, 2 \cdot 7}] = [7, \overline{7, 14}]$.

Teorema 1.5.10. *La n-ésima convergente de $\dfrac{1}{x}$ es el recíproco del $(n-1)$-ésimo convergente de x si x es cualquier número real mayor que 1.*

Demostración.
Sea $x = [a_0, a_1, a_2, ...]$ entonces $\dfrac{1}{x} = [0, a_0, a_1, ...]$. Si $\dfrac{p_n}{q_n}$ y $\dfrac{h_n}{k_n}$ son las convergentes de x y $\dfrac{1}{x}$, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} h_0 = 0, \quad h_1 &= 1, \quad h_2 = a_1, \quad \cdots \quad h_n = a_{n-1}h_{n-1} + h_{n-2} \\ q_0 &= 1, \quad q_1 = a_1, \quad \cdots \quad q_{n-1} = a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_0 = 1, \quad k_1 &= a_0, \quad k_2 = a_0a_1 + 1, \quad \cdots \quad k_n = a_{n-1}k_{n-1} + k_{n-2} \\ p_0 &= a_0, \quad p_1 = a_0a_1 + 1, \quad \cdots \quad p_{n-1} = a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}. \end{aligned}$$

De la anterior recurrencia tenemos que $h_n = q_{n-1}$ y $k_n = p_{n-1}$. Demostremos por inducción el anterior resultado.
Verifiquemos que para $n = 1$ se cumple. En efecto

$$\begin{aligned} h_1 &= a_0h_0 + h_{-1} = a_0(0) + 1 = 1, \\ q_0 &= a_0q_{-1} + q_{-2} = a_0(0) + 1 = 1, \\ & \text{y} \\ k_1 &= a_0k_0 + k_{-1} = a_0(1) + 0 = a_0, \\ p_0 &= a_0p_{-1} + p_{-2} = a_0(1) + 0 = a_0. \end{aligned}$$

Para $n = 2$ tenemos

$$
\begin{aligned}
h_2 &= a_1h_1 + h_0 = a_1(1) + 0 = a_1,\\
q_1 &= a_1q_0 + q_{-1} = a_1(1) + 0 = a_1,\\
&\text{y}\\
k_2 &= a_1k_1 + k_0 = a_1a_0 + 1,\\
p_1 &= a_1p_0 + p_{-1} = a_1a_0 + 1.
\end{aligned}
$$

Lo cual se cumple. Supongamos que se cumple para $n = r$, es decir,

$$
\begin{aligned}
h_r &= a_{r-1}h_{r-1} + h_{r-2},\\
q_{r-1} &= a_{r-1}q_{r-2} + q_{r-3},\\
&\text{y}\\
k_r &= a_{r-1}k_{r-1} + k_{r-2},\\
p_{r-1} &= a_{r-1}p_{r-2} + p_{r-3}.
\end{aligned}
$$

Y demostremos que se cumple para $n = r + 1$,
En efecto por definición tenemos que

$$p_r = a_rp_{r-1} + p_{r-2}$$

$$q_r = a_rq_{r-1} + q_{r-2}$$

Por hipótesis inductiva tenemos $p_{r-1} = k_r, p_{r-2} = k_{r-1}$ y $q_{r-1} = h_r, q_{r-2} = h_{r-1}$, de donde obtenemos $p_r = k_{r+1}$ y $q_r = h_{r+1}$. Luego por principio de inducción matemática se sigue el resultado.

■

Teorema 1.5.11. *Sea d un entero positivo que no sea cuadrado perfecto y sean $\frac{p_n}{q_n}$ las convergentes para el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{d}$. Entonces existe solución de la ecuación $x^2 - dy^2 = \pm 1$ (**Ecuación de Pell**.)*

Demostración. Demostraremos que el desarrollo de $\sqrt{d}$ nos proporciona la solución de la ecuación de Pell.

Dados a_0, a_1,...,a_{n-1}, a_n enteros, entonces

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, ...a_{n-1}, 2a_0}] = [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, \overline{2a_0, a_1, ..., a_{n-1}}] = [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, \alpha_n]$$

donde

$$\alpha_n = \sqrt{d} + a_0. \quad (i)$$

Utilicemos el hecho de que

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_{n-1} p_{n-2} + p_{n-2}}{\alpha_{n-1} q_{n-2} + q_{n-2}}, \quad (2i)$$

donde p_{n-2}, q_{n-2}, p_{n-1} y q_{n-1} se calculan a partir de las dos convergentes $C_{n-2} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $C_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Sustituyendo (i) en $(2i)$ tenemos

$$\sqrt{d} = \frac{(\sqrt{d} + a_0) p_{n-1} + p_{n-2}}{(\sqrt{d} + a_0) q_{n-1} + q_{n-2}};$$

entonces, multiplicando ambos lados por el denominador, obtenemos

$$\sqrt{d}(\sqrt{d} + a_0) q_{n-1} + q_{n-2}\sqrt{d} = (\sqrt{d} + a_0) p_{n-1} + p_{n-2},$$

lo cual es equivalente a

$$dq_{n-1} + (a_0 q_{n-1} + q_{n-2})\sqrt{d} = (a_0 p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}\sqrt{d}.$$

Tenemos entonces una ecuación de la forma $a + b\sqrt{d} = c + d\sqrt{d}$ donde a, b, c, d son números enteros y $\sqrt{d}$ es irracional, y esto implica que $a = c$ y $b = d$, de donde

$$dq_{n-1} = a_0 p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{y} \quad a_0 q_{n-1} + q_{n-2} = p_{n-1}.$$

Resolviendo estas ecuaciones para p_{n-2} y q_{n-2} en términos de p_{n-1} y q_{n-1} tenemos

$$\begin{aligned} p_{n-2} &= dq_{n-1} - a_0 p_{n-1}, \\ q_{n-2} &= p_{n-1} - a_0 q_{n-1}. \end{aligned} \qquad (3i)$$

Por Teorema (5) tenemos

$$p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2} = (-1)^n (4\text{i})$$

Sustituyendo $(3i)$ en $(4i)$

$$p_{n-1}(p_{n-1} - a_0 q_{n-1}) - q_{n-1}(dq_{n-1} - a_0 p_{n-1}) = (-1)^n,$$

esto es,

$$p_{n-1}^2 - Nq_{n-1}^2 = (-1)^n. \quad (5i)$$

Si n es par, la ecuación $(5i)$ se convierte en

$$p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = 1,$$

y por lo tanto una solución particular de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ es

$$x_0 = p_{n-1}, \qquad y_0 = q_{n-1}.$$

Si n es impar, entonces

$$p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = -1,$$

y

$$x_0 = p_{n-1}, \qquad y_0 = q_{n-1}$$

que es una solución particular para la ecuación $x^2 - dy^2 = -1$.

$\blacksquare$

Observaciones

- Si n es impar y queremos una solución para $x^2 - dy^2 = 1$, consideramos que el periodo es el doble del inicial y el procedimiento descrito nos da la solución.
- Por lo anterior, simpre podemos encontrar soluciones particulares para la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$.
- No todas la ecuaciones de la forma $x^2 - dy^2 = -1$ tienen solución. Por ejemplo la ecuación $x^2 - 3y^2 = -1$. es una de ellas.

Teorema 1.5.12. *Sea d un entero positivo que no sea cuadrado perfecto y $\frac{p_i}{q_i}$ la i-ésima convergente en el desarrollo en fracciones continuas de $\sqrt{d}$. Si N es un entero tal que $|N| < \sqrt{d}$ y s, t son enteros positivos con $(s, t) = 1$ que satisfacen $s^2 - dt^2 = N$, entonces $s = p_n$ y $t = q_n$ para algún entero n.*

Demostración.

Sean x y y enteros positivos tales que $(x, y) = 1$ y $x^2 - \rho y^2 = \sigma$ donde $\sqrt{\rho}$ es irracional y $0 < \sigma < \sqrt{\rho}$; σ y ρ número reales.
De $x^2 - \rho y^2 = \sigma$ tenemos

$$(x + \sqrt{\rho}y)(x - \sqrt{\rho}y) = \sigma,$$

dividiendo por y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{(x + \sqrt{\rho}y)}{y} &= \frac{\sigma}{y(x - \sqrt{\rho}y)} \\ \frac{x}{y} - \sqrt{\rho} &= \frac{\sigma}{y(x - \sqrt{\rho}y)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Dado que $\sigma < \sqrt{\rho}$, tenemos

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{\rho} = \frac{\sigma}{y(x - \sqrt{\rho}y)} < \frac{\sqrt{\rho}}{y(x - \sqrt{\rho}y)},$$

$$\frac{\sqrt{\rho}}{y(x-\sqrt{\rho}y)} = \frac{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}}{y\left(\frac{x+\sqrt{\rho}y}{\sqrt{\rho}}\right)} < \frac{1}{\frac{yx}{\sqrt{\rho}}+y^2} = \frac{1}{y^2\left(1+\frac{x}{y\sqrt{\rho}}\right)}. \tag{14}$$

Como $\frac{x}{y} - \sqrt{\rho} > 0$ implica que $\frac{x}{t\sqrt{\rho}} > 1$, entonces

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{\rho}\right| < \frac{1}{2y^2} \quad \text{por} \quad (14).$$

Por el teorema 1.4.1., $\frac{x}{y}$ es una convergente en el desarrollo de fracciones continuas de $\sqrt{\rho}$.

- Si $N > 0$; con $\sigma = N$, $\rho = d$, $x = s$ y $y = t$ el teorema se cumple.

- Si $N < 0$, entonces de $s^2 - dt^2 = -N$ obtenemos $dt^2 - s^2 = -N$, luego

$$t^2 - \left(\frac{1}{d}\right)s^2 = -\frac{N}{d} \quad \text{con} \quad -\frac{N}{d} < \frac{\sqrt{d}}{d} = \sqrt{\frac{1}{d}}$$

hagamos $\sigma = -\frac{N}{d}$ y $\rho = \frac{1}{d}$, de donde $\frac{t}{s}$ es una convergente en el desarrollo de $\frac{1}{\sqrt{d}}$. El teorema 22 nos garantiza que $\frac{s}{t}$ es una convergente en el desarrollo de $\sqrt{d}$.

■

1.6. Aplicaciones de las fracciones continuas

Hemos terminado con la parte teórica de las fracciones continuas simples. Ahora las utilizaremos como herramientas para darle solución a otros problemas matemáticos de una manera sencilla, práctica y eficiente.

Solución de Ecuaciones Diofánticas Lineales.

La teoría de las fracciones continuas puede ser usada para obtener soluciones de una ecuación diofántica lineal.

$$ax + by = c \quad \text{donde} \quad (a, b) = 1. \qquad (*)$$

Llamemos C_n a la última convergente de la fracción continua simple finita $\frac{a}{b}$. Es decir

$$C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}, \text{ donde } (a, b) = 1 \text{ y } p_n = a \text{ y } q_n = b.$$

Del teorema 6 tenemos

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1},$$

como $p_n = a$ y $q_n = b$ entonces

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot p_{n-1} = (-1)^{n+1},$$

y multiplicando por $(-1)^{n+1} \cdot c$ llegamos a

$$a[(-1)^{n+1} \cdot c \cdot q_{n+1}] + b[(-1)(-1)^{n+1} \cdot c \cdot p_{n-1}] = (-1)^{2(n+1)} \cdot c$$
$$a[(-1)^{n+1} \cdot c \cdot q_{n-1}] + b[(-1)^{n+2} \cdot c \cdot p_{n-1}] = c.$$

Entonces una solución particular de la ecuación diofántica $ax + by = c$ es el par:

$$x_0 = [(-1)^{n+1} \cdot c \cdot q_{n-1}] \qquad \text{y} \qquad y_0 = [(-1)^{n+2} \cdot c \cdot p_{n-1}] \qquad (**)$$

Nota 1.6.1. *(i) Si x_0 y y_0 conforman una solución particular de la ecuación $(*)$ entonces la solución general esta dada por:*

$$x = x_0 + bt \qquad y \qquad y = y_0 - at, \text{ con } t \text{ entero}$$

(ii) Si $(a, b) = d$, entonces la solución general de la ecuación diofántica esta dada por

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \qquad y \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \text{ con } t \text{ entero}$$

Ejemplo 18. *Usemos fracciones continuas para determinar la solución general de la ecuación diofántica lineal* $14x + 22y = 50$

Solución.

Dividiendo la ecuación original entre $(14, 22) = 2$ tenemos $7x + 11y = 25$, como $(7, 11) = 1$, existen soluciones de la ecuación diofántica lineal. La fracción continua simple finita que representa a $\frac{7}{11}$ es $[0, 1, 1, 1, 3]$; las convergentes se ven en la siguiente tabla:

i	0	1	2	3	4
a_i	0	1	1	1	3
p_i	0	1	1	2	7
q_i	1	1	2	3	11
C_i	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{11}$

una solución particular de $7x + 11y = 25$ es

$$x_0 = (-1)^{4+1}(25)3 = -75$$
$$y_0 = (-1)^{4+2}(25)2 = 50$$

Comprobando en la ecuación:

$$7(-75) + 11(50) = -525 + 550 = 25$$

Así, por la nota (i) anterior, la solución general de $7x + 11y = 25$ está dada por:

$$x = -75 + 11t$$
$$y = 50 - 7t, \text{ para todo entero } t$$

que por la nota (ii) es solución de $14x + 22y = 50$.

Ejemplo 19. *Usemos fracciones continuas para determinar la solución general de la ecuación diofántica lineal* $18x + 5y = 7$

Solución. Como $(18, 5) = 1$, entonces existen soluciones de la ecuación diofántica lineal. La fracción continua simple finita que representa a $\frac{18}{5}$ es $[3, 1, 1, 2]$. Las convergentes se ven en la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
a_i	3	1	1	2
p_i	3	4	7	18
q_i	1	1	2	5
C_i	3	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{18}{5}$

una solución particular de $18x + 5y = 7$ es

$$x_0 = (-1)^{3+1}(7)2 = 14$$
$$y_0 = (-1)^{3+2}(7)7 = -49$$

Comprobando en la ecuación:

$$18(14) + 5(-49) = 252 - 245 = 7$$

Así, por la nota (i) anterior la solución general de $18x + 5y = 7$ está dada por:

$$x = 14 + 18t$$
$$y = -49 - 5t, \text{ para } t \in Z$$

Ejemplo 20. *Usemos fracciones continuas para determinar la solución general de la ecuación diofántica lineal* $69x + 54y = 387$

Solución.

Dividiendo la ecuación original entre $(69, 54) = 3$ tenemos $23x + 18y = 129$, como $(23, 18) = 1$, existen soluciones de la ecuación diofántica lineal. La fracción continua simple finita que representa a $\frac{23}{18}$ es $[1, 3, 1, 1, 2]$, las convergentes se ven en la siguiente tabla:

i	0	1	2	3	4
a_i	1	3	1	1	2
p_i	1	4	5	9	23
q_i	1	3	4	7	18
C_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{23}{18}$

una solución particular de $23x + 18y = 129$ es

$$x_0 = (-1)^{4+1}(129)7 = -903$$
$$y_0 = (-1)^{4+2}(129)9 = 1161$$

Comprobando en la ecuación:

$$23(-903) + 18(1161) = -20769 + 20869 = 129$$

Así, por la nota (i) anterior la solución general de $23x + 18y = 129$ está dada por:

$$x = -903 + 18t$$
$$y = 1161 - 23t, \text{ para } t \in Z$$

que por la nota (ii) es solución de $69x + 54y = 387$.

Ecuación cuadrática de la forma $x^2 - bx - 1 = 0$

Uso de las fracciones continuas en la solución de ecuaciones cuadráticas. Consideremos la ecuaciones cuadráticas de la forma

$$x^2 - bx - 1 = 0 \text{ con } b > 0,$$

entonces

$$x^2 = 1 + bx,$$
$$x = b + \frac{1}{x},$$

si consideramos $x = x_0$ como en el teorema 13, obtenemos

$$x_0 = b + \frac{1}{x_0}.$$

Por lo expuesto en la sección de fracciones continuas periódicas, sabemos que esta última expresión nos indica que $x = [\overline{b}]$. Por lo tanto $[\overline{b}]$ es la raíz real positiva de la ecuación cuadrática. La otra raíz puede ser obtenida usando la propiedad de que la suma de las raíces es igual a b.

Ejemplo 21. *Encontremos aproximaciones de las raíces de cada ecuación cuadrática usando fracciones continuas, calcular cada raíz con exactitud al centésimo.*

(i) $\quad x^2 - 3x - 1 = 0$

Solución. De $x^2 - 3x - 1 = 0$ obtenemos $\quad x^2 = 1 + 3x$ entonces $x = 3 + \dfrac{1}{x}$ de aquí $[\overline{3}]$ es una raíz positiva. Se pide

$$\frac{1}{q_n^2} < 0,01$$
$$q_n^2 > 100$$
$$q_n > 10$$

veamos las convergentes

i	0	1	2	3
a_i	3	3	3	3
p_i	3	10	33	109
q_i	1	3	10	33

Como $q_3 > 10$ entonces, la convergente que mejor aproxima según lo pedido es $x = \dfrac{109}{33} = 3,3030303.$

Si y es la otra raíz entonces $y + 3,30 = 3$ de donde una aproximación para y es

$y = -0{,}30$

$(ii) \quad x^2 - 6x - 1 = 0;$

Solución. De igual manera, $x^2 = 6x + 1$ entonces $x = 6 + \dfrac{1}{x}$ así $[\overline{6}]$ es una raíz positiva.
Se pide:

$$\frac{1}{q_n^2} < 0,01$$
$$q_n^2 > 100$$
$$q_n > 10$$

veamos los convergentes

i	0	1	2	3
a_i	6	6	6	6
p_i	6	37	228	
q_i	1	6	37	

Como $q_2 > 10$ entonces, la convergente que mejor aproxima según lo pedido es $x = \dfrac{228}{37} = 6,1621621.$

Si y es la otra raíz entonces $y + 6,16 = 3$ de donde una aproximación para y es $y = -0{,}16$

Ejemplo 22. *Determinemos la ecuación cuadrática una de cuyas raíces está representada por la fracción continua simple infinita* $[\overline{1, 2}]$.

Solución.

Sea $x = [\overline{1,2}]$ entonces $x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}$ así $x = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2x+1}{x}} = 1 + \dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{3x+1}{2x+1}$,
de aquí $2x^2 - 2x - 1 = 0$ cuyas raices son $x = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ y $x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.
Si miramos sus partes enteras tenemos que $x = \left\lfloor \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \right\rfloor = -1$ y $x = \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \right\rfloor = 1$. Por lo tanto el número que representa a $[\overline{1,2}]$ es $x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Unidades en el Anillo de Enteros de los Cuerpos Cuadráticos.

En esta última sección emplearemos la teoría de las fracciones continuas desarrolladas en las secciones precedentes para encontrar las soluciones de la *Ecuación de Pell*.

Consideremos el cuerpo númerico $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donde d es un entero positivo que no es cuadrado perfecto; $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ si y solamente si $\alpha = a + b\sqrt{d}$ donde $a,b \in \mathbb{Q}$

Definición 1.6.1. *α es un entero de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ si y solamente si existe $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mónico; tal que $p(\alpha) = 0$.*

Nota 1.6.2. *Los enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ constituyen un anillo (conmutativo con identidad) que es un dominio.*

Definición 1.6.2. *Sea α un entero de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, α es unidad si y solamente si existe otro entero β de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ tal que $\alpha\beta = 1$.*

Nota 1.6.3. *Si $d \equiv 2, 3 \ (mod 4)$, el anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ es $\left\{\alpha = x + y\sqrt{d}; x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ y $\alpha = x + y\sqrt{d}$ es unidad en este anillo si y solo si $x^2 - dy^2 = \pm 1$.*

En el teorema 1.5.10. vimos que existe solución de la ecuación de Pell. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 23. *Resolver* $x^2 - 7y^2 = 1$

Solución. Se tiene que $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$, entonces $n - 1 = 3$ y a partir de la tabla

i	0	1	2	3	4
a_i	2	1	1	1	4
p_i	2	3	5	8	37
q_i	1	1	2	3	14

se tiene que $C_{n-1} = C_3 = \dfrac{8}{3}$.

Por lo tanto $x = 8$ y $y = 3$ es la solución de: $x^2 - 7y^2 = 1$.

Comprobando tenemos: $(8)^2 - 7(3)^2 = 64 - 63 = 1$

Ejemplo 24. *Resolver* $x^2 - 11y^2 = 1$

Solución. Se tiene que $\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}]$, entonces $n - 1 = 1$ y a partir de la tabla

i	0	1	2
a_i	3	3	6
p_i	3	10	63
q_i	1	3	19

se tiene que $C_{n-1} = C_1 = \dfrac{10}{3}$.

Por lo tanto $x = 10$ y $y = 3$ es la solución de: $x^2 - 11y^2 = 1$.

Comprobando tenemos: $(10)^2 - 11(3)^2 = 100 - 99 = 1$.

Ejemplo 25. *Resolver* $x^2 - 29y^2 = 1$

Solución. Se tiene que $\sqrt{29} = [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$, entonces $n-1 = 4$, que es un número par. Las primeras cuatro convergentes son

$$C_0 = \frac{5}{1}, \qquad C_1 = \frac{11}{2}, \qquad C_2 = \frac{16}{3}, \qquad C_3 = \frac{27}{5}, \qquad C_4 = \frac{70}{13}.$$

Pero si reemplazamos $x_0 = 70$, $y_0 = 13$ en $x^2 - 29y^2$ tenemos $70^2 - 2913^2 = -1$ y no es $+1$. Por lo tanto, debemos pasar al siguiente periodo. El próximo período da las convergentes

$$C_5 = \frac{727}{135}, \qquad C_6 = \frac{1524}{283}, \qquad C_7 = \frac{2251}{418}, \qquad C_8 = \frac{3775}{701}, \qquad C_9 = \frac{9801}{1820},$$

y por lo tanto, si tomamos $x_0 = 9801$, $y_0 = 1820$ obtenemos

$$(9801)^2 - 29(1820)^2 = 96059601 - 96059600 = 1.$$

Observaciones

- La solución que genera la n-ésima convergente del número $\sqrt{d}$ para la ecuación $x^2 - dy^2 = \pm 1$ produce los menores enteros que satisface la ecuación.

- Todas las demás soluciones de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ se obtienen a partir de las potencias de

$$\left(p_{n-1} + \sqrt{d}q_{n-1}\right)^n = x_n + \sqrt{d}y_n \quad \text{para todo } n \text{ entero.}$$

  Cada pareja $x = x_n$ y $y = y_n$ es solución de la ecuación de Pell.

Esta última observación la tenemos como un teorema

Teorema 1.6.1. *Si* (x_0, y_0) *es la primera solución de la ecuación* $x^2 - dy^2 = 1$, *entonces todas la soluciones positivas* (x_n, y_n) *pueden obtenerse de la ecuación*

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n \quad \textit{para todo} \quad n \geq 1 \quad (*)$$

Demostración.

Los términos x_n y y_n salen mediante la expansión de $\left(x_0 + \sqrt{d}y_0\right)^n$ y luego se igualan los términos que ésta genera.

Para $n = 1$ se tiene que $x_1 = x_0$ y $y_1 = y_0$.

Veamos que es cierta para $n = 2$. esto nos da

$$x_2 + y_2\sqrt{d} = \left(x_0 + \sqrt{d}y_0\right)^2 = (x_0^2 + dy_0^2) + (2x_0y_0)\sqrt{d},$$

de modo que $x_2 = x_0^2 + dy_0^2$ y $y_2 = 2x_0y_0$. Usando estos valores tenemos

$$\begin{aligned}
x_2^2 - dy_2^2 &= (x_0^2 + dy_0^2)^2 - d(2x_0y_0)^2 \\
&= x_0^4 + 2dx_0^2y_0^2 + d^2y_0^4 - 4dx_0^2y_0^2 \\
&= x_0^4 - 2dx_0^2y_0^2 + d^2y_0^4 \\
&= (x_0^2 - dy_0^2)^2 = 1
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que si x_n y y_n son como en la ecuación $(*)$, entonces $x_n^2 - dy_n^2 = 1$. Nosotros tenemos de $(*)$,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})(x_0 + y_0\sqrt{d})...(x_0 + y_0\sqrt{d}),$$

donde hay n factores d la expresión del lado derecho. Dado que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados, esto nos da

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_0 - y_0\sqrt{d})(x_0 - y_0\sqrt{d})...(x_0 - y_0\sqrt{d}),$$

o

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_0 - y_0\sqrt{d})^n. \quad (**)$$

Por otro lado tenemos el factor $x_n^2 + dy_n^2$ y usando $(*)$ y $(**)$ tenemos:

$$\begin{aligned} x_n^2 - dy_n^2 &= (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) \\ &= (x_0 + y_0\sqrt{d})^n \cdot (x_0 + y_0\sqrt{d})^n \\ &= (x_0^2 - dy_0^2)^n = 1 \end{aligned}$$

Así x_n y y_n son soluciones de la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$.

■

Ejemplo 26. *Hallar las unidades del cuerpo* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Solución: Tenemos que $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$, el periodo es $t = 1$ así $t - 1 = 0$ donde $C_0 = \dfrac{1}{1}$

Entonces

$u_0^1 = 1 + 1\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$ y $u_0^{-1} = -1 + \sqrt{2}$

$u_0^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ y $u_0^{-2} = (u_0^2)^{-1} = 3 - 2\sqrt{2}$

$u_0^3 = (1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$ y $u_0^{-3} = (1 + \sqrt{2})^{-3} = -7 + 5\sqrt{2}$

$u_0^4 = (1 + \sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$ y $u_0^{-4} = (1 + \sqrt{2})^{-4} = 17 - 12\sqrt{2}$

$u_0^5 = (1 + \sqrt{2})^5 = 41 + 29\sqrt{2}$ y $u_0^{-5} = (1 + \sqrt{2})^{-5} = -41 + 29\sqrt{2}$

$u_0^6 = (1 + \sqrt{2})^6 = 99 + 70\sqrt{2}$ y $u_0^{-6} = (1 + \sqrt{2})^{-6} = 99 - 70\sqrt{2}$

$u_0^7 = (1 + \sqrt{2})^7 = 239 + 169\sqrt{2}$ y $u_0^{-7} = (1 + \sqrt{2})^{-7} = -239 + 169\sqrt{2}$

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA DE LA AFINACIÓN MUSICAL

2.1. El problema de la Afinación

[1] Para plantear la problemática de la afinación es necesario llevar a cabo una contextualización [2] que nos permita comprenderla, es decir, abordarla en su conjunto desde una perspectiva bien definida, sin que por ello pretendamos agotarla. Este planteamiento desde luego supone diversas relaciones existentes entre música y matemáticas, así que comencemos por fijar el vocabulario que emplearemos para tal propósito.

[1] Para plantear el problema de la afinación nos hemos basado en ciertos aspectos claves en las valiosas reflexiones de J. Javier Goldáraz Gaínza (profesor de organología y acústica en el conservatorio superior de música de Madrid) en: *Afinación y temperamentos históricos. Madrid: Alianza, 2004*. En esta obra Goldáraz señala con claridad que su interés radica en "desbrozar el contexto histórico en que aparecen los distintos sistemas de afinación y temperamentos" (y se ponen en práctica), concentrándose en los más importantes a nivel de la historia de la música occidental.

[2] Esta contextualización conceptual se realizará dentro del marco de la historia de la música occidental.

Por *nota* (musical) entendemos un concepto referido a un sonido emitido por un instrumento (musical); dicho sonido puede ser representado mediante una frecuencia (según la acústica). Una *escala* es un conjunto de notas escogidas con algún criterio para producir música, o en otros términos, un grupo de notas diferentes y organizadas estratégicamente con las cuales podemos configurar una *melodía* (haciéndolas sonar sucesivamente) o una *armonía* (haciéndolas sonar simultáneamente). Se conoce como *consonancia* la superposición de dos notas las cuales generan un sonido "agradable" al oído. De modo que la *música* surge de combinar en simultaneidad o sucesión una lista finita de notas (elegidas con ciertos paradigmas entre infinitas frecuencias). En este orden de ideas la elección o construcción de una escala es precisamente la problemática de la *afinación*. Ahora bien, enunciemos el interrogante fundamental que expresa la perspectiva desde la que queremos formular el problema al que llamamos *problema de la afinación*: ¿bajo qué criterios, cuántas y cuáles notas deben constituir una escala?, o ¿qué posibilidades tenemos para construir una escala?; la solución a estos interrogantes depende de la manera en que en cada época y pueblo los han enfrentado. También depende de las condiciones de existencia de los pueblos, junto con los medios y conocimientos de que han dispuesto para plantearlos. Bajo esta óptica, las soluciones están determinadas por la historia y, en cuanto históricas, no pueden agotar el problema, pues la historia de la música desde la perspectiva práctica y teórica, es quizá la historia del *problema de la afinación.*

A lo largo de la historia de la música occidental, el asunto de la afinación ha sido asumido y abordado de diferentes formas, es decir, se han formulado diversas soluciones que dependen de cada época.

2.2. Génesis del problema de la afinación en la música occidental

En relación al problema de la afinación en la antiguedad, es Pitágoras (siglo VI a.c) quien lo enfrenta de una manera decisiva. A él se le atribuyen diversos descubrimientos matemático-musicales, como el descubrimiento de las proporciones musicales, la importancia de la aritmética, la teoría de la música de las esferas, etc.; además estaba influenciado por sus conocimientos sobre razones y proporciones de enteros que conllevaron al concepto de medias (aritmética, geométrica y armónica). Pitágoras aplica las matemáticas a un fenómeno particular (acústico) y en esta medida es que da un gran paso en la creación de criterios firmes para construir una escala. Descubrió que manteniendo iguales condiciones de material, grosor y tensión de una cuerda vibrante, al reducir su longitud a la mitad (lo que dobla la frecuencia) el sonido generado era el "más parecido" al sonido generado por la cuerda original. Hoy en día nos referimos a este hecho diciendo que dos sonidos de los cuales uno tiene el doble de frecuencia que el otro, representan la misma nota. Entonces el sonido de frecuencia doble que la de uno dado es el primer *consonante*, así el espacio que hay entre una frecuencia y el doble de la misma comprende y encierra todas las notas, a esto le llamamos *espacio sonoro.*

El término griego *diapasón* se usa para referirse a dicho espacio porque etimológicamente hablando la partícula *dia* significa por, y *pason*, todas. El *diapasón* es conocido como *octava* y será el concepto fundamental a tener en cuenta en este capítulo. El diapasón u octava es estrictamente *"el espacio sonoro a dividir"*, y la distribución de éste permite diferenciar las épocas musicales.

El pensador griego, a través de argumentos aritméticos dividió la octava de tal modo que produjo tres consonancias fundamentales para la música griega. Para comprender esto con mayor precisión, vamos a describir la construcción de la escala pitagórica que conocemos hoy en día como *escala diatónica* y que conduce posteriormente a lo que se denomina *afinación pitagórica.* Así, la propuesta pitagórica en términos de números compromete la asignación de medidas a los intervalos que se hallan dentro de la división de la octava realizada por él, esto es, a las "distancias" que hay entre dos notas musicales. Dedicaremos el siguiente párrafo a precisar la noción de "distancia".

La frecuencia de vibración de una cuerda determina la *altura* del sonido. La altura es un concepto relativo, esto es, de un sonido se puede decir que es más grave o más agudo que otro; un sonido con mayor frecuencia que otro es más agudo. Se conoce como *intervalo* el espacio entre dos frecuencias f_1 y f_2, este concepto es asimilable con el concepto matemático de intervalo de números reales compredido entre los números f_1 y f_2.; cada número en el intervalo (f_1, f_2) representa una frecuencia mayor que f_1 y menor que f_2. Dado lo relativo de la altura, al hablar de frecuencia interesa más que el valor absoluto de las mismas, la distancia entre cada par de ellas. Esta distancia también llamada intervalo, pero a la que nosotros nos referiremos como "longitud de intervalo" se calcula dividiendo la frecuencia mayor entre la menor. Las frecuencias son entonces números reales positivos que se pueden "sumar" mediante productos o "restar" mediante cocientes.[3]

La descripción de la escala la vamos a realizar en dos pasos: el primero consiste en mostrar cómo Pitágoras descubre las tres consonancias fundamentales y en el segundo indicaremos cómo a partir de las consonancias básicas se generan otras cuatro para conformar la *escala diatónica.*

- Pitágoras había experimentado que cuerdas con longitudes[4] de razones 1 : 2,

[3]Esto último es consistente con el isomorfismo que existe entre $(\mathbb{R}^+, *)$ y $(\mathbb{R}, +)$ determinado por la función $f(x) = logx$.

[4]Las demás condiciones en la cuerda vibrante se consideran constantes

2 : 3 y 3 : 4 producían, al hacerlas vibrar, combinaciones de sonidos consonantes y construyó una escala a partir de estas proporciones. Dado que la frecuencia de un sonido es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda que lo produce (Galileo, 1638), la propuesta de Pitágoras la expresamos diciendo que las consonancias elementales con la frecuencia de medida 1 son:

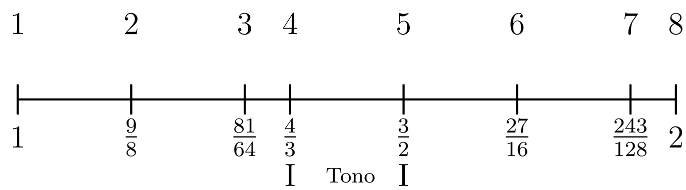
$$\tfrac{4}{3},\ \tfrac{3}{2},\ \text{y } 2$$

Como espacio sonoro consideraremos el intervalo $[1, 2)$ y las notas escogidas en la escala son 1, $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$.
La razón entre 1 y $\frac{4}{3}$ es 3 : 4 y es la misma razón que entre $\frac{3}{2}$ y 2. La razón entre 1 y $\frac{3}{2}$ es de 2 : 3 que es la misma razón que entre $\frac{4}{3}$ y 2. Esto es consecuencia de que $\frac{3}{2}$ es la razón aritmética entre 1 y 2, y $\frac{4}{3}$ es la razón armónica entre 1 y 2.[5]

- En términos de frecuencias, la forma en que Pitágoras obtiene las otras notas resulta de tomar el cociente entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$, es decir $\frac{9}{8}$, y llenar el espacio sonoro $[1, 2)$ con intervalos de longitud $\frac{9}{8}$. La longitud de frecuencia $\frac{9}{8}$ es conocida hoy como *tono*. Entonces las nuevas notas son $\frac{9}{8}$, $\frac{81}{64}$, $\frac{27}{16}$, $\frac{243}{128}$ y la escala está conformada por las notas

Estas notas están presentadas en orden creciente y nos referiremos a ellas de acuerdo a la posición que ocupan en la escala, entonces $\frac{3}{2}$ corresponde a la quinta, $\frac{4}{3}$ corresponde a la cuarta y 2 sería la octava. Esto tiene relación con que el intervalo de frecuencias entre 1 y 2 se conozca como la *octava*, el intervalo entre 1 y $\frac{3}{2}$ como la

[5]Dados los números a y b con $0 < a < b$, su razón aritmética es $\frac{a+b}{2}$ y su razón armónica $\frac{2ab}{a+b}$, entonces $a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b$ y tenemos $\frac{\frac{2ab}{a+b}}{a} = \frac{2b}{a+b} = \frac{b}{\frac{a+b}{2}}$ y $\frac{\frac{a+b}{2}}{a} = \frac{a+b}{2a} = \frac{b}{\frac{2ab}{a+b}}$



quinta y el intervalo entre 1 y $\frac{4}{3}$ como la *cuarta.*

Lo que se ha hecho es distribuir dos tonos entre la primera nota y $\frac{4}{3}$ que es todo lo que cabe, y así mismo entre $\frac{3}{2}$ y 2. Entonces en esta escala con el procedimiento realizado resultan exactamente **siete notas.**

Quedan dos intervalos de razón $\frac{256}{243}$ entre $\frac{81}{64}$ y $\frac{4}{3}$ y entre $\frac{243}{128}$ y 2. Esta razón es aproximadamente igual a la mitad de un tono, y se llama *semitono.*

Hemos explicado por qué inicialmente aparecen siete notas, expliquemos ahora a qué se deben sus nombres, esos que conocemos como Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si. El nombre de las notas musicales se lo debemos a Guido D´Arezzo (955-1050), un monje Benedicto considerado el padre de la música, su aporte a la estructuración de una notación para la música es altamente reconocido. Este monje observó que en un canto gregoriano, el himno a San Juan Bautista (Pablo el diácono, siglo 8), llamado *Ut queant laxis*, las primeras sílabas de cada verso en la primera estrofa tenían un orden ascendente de altura y estaban relacionadas entre si de la misma forma las primeras seis notas de la escala pitagórica, entonces utilizó estas sílabas para nombrar las primeras seis notas. La primera estrofa del himno es la siguiente:

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tuorum

Solve polluti

Labii reatum

Sancte Ioannes.

En el siglo XVI, Anselmo de Flandes, une las iniciales de "**S**ancte **I**oannes" y da nombre *SI* a la séptima nota. Fue en el siglo XVII el francés Giovanni Battista Doni quien decidió cambiar el nombre de la nota Ut debido a su difícil pronunciación en el solfeo llamándola **Do** que es la primer sílaba de su apellido Doni.
Así pues, hallamos en Pitágoras una forma sui generis para enfrentar el problema de la afinación en la que predomina el aspecto racional, y con ello la necesidad de establecer bases sólidas que no dependan de la percepción, sino del intelecto. Bases con pretensiones de universalidad y que aspiraban alcanzar la totalidad, dado que como sabemos, para la tradición pitagórica el *todo* implicaba relaciones numéricas. Para los pitagóricos su pensamiento primordial sobre la música es que ésta, despojada de las cualidades sensibles sólo será aquella instancia definida en razón de relaciones numéricas.

2.3. Escala pitagórica de doce notas

Debemos decir que el contexto musical griego está determinado por un carácter propiamente monódico y diatónico, lo primero se refiere a una sola melodía, y lo segundo a que procedía por tonos. Para la posteridad la escala pitagórica va a tener tanto sus ventajas como sus desventajas en razón de las necesidades sonoras que van surgiendo, los cambios en el mundo musical y las variaciones en el modo de concebir y practicar la música. Bajo esta perspectiva, el número de notas de la escala pitagórica en un momento dado, ya no es capaz de satisfacer las necesidades sonoras, por lo que es necesario incluir nuevas notas al tiempo que se conservan las siete notas que ya abordamos. De este modo, para introducir las *nuevas notas* se dividen los tonos en semitonos teniendo presente que dos semitonos son aproximadamente un tono. Obsérvemelo más de cerca:

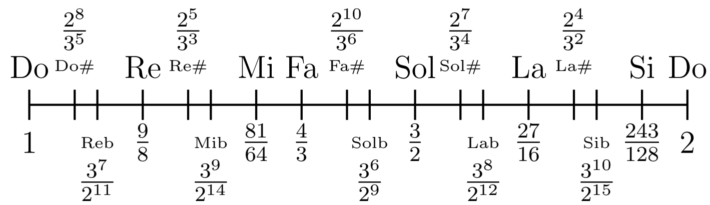
$$\text{Dos semitonos } \tfrac{256}{243} * \tfrac{256}{243} \approx 1,110$$
$$\text{Un tono completo } \tfrac{9}{8} = 1,125.$$

Dado que entre dos tonos consecutivos hay una media geométrica, se podría haber tomado en cuenta la misma media en el intervalo de un tono. Esto nos dividiría un tono en dos intervalos iguales pero nos confrontaría con el número irracional $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, lo que fue evitado por alguna razón desconocida para nosotros. Lo que se planteó frente a ello (en su debido momento histórico) fue incluir en los intervalos de un tono, semitonos desde cada nota hacia la derecha o bien desde cada nota hacia la izquierda. Cuando a partir de una nota se toma un semitono más alto se obtiene una *alteración* de la misma a la que se le llama el *sostenido* (#); cuando este proceso se realiza hacia la izquierda (se reduce), a la *alteración* de la nota se le llama *bemol* (b). Por lo tanto tenemos las siguientes notas

	$Do = 1$	$Do\# = \frac{2^8}{3^5}$
$Reb = \frac{3^7}{2^{11}}$	$Re = \frac{3^2}{2^3}$	$Re\# = \frac{2^5}{3^3}$
$Mib = \frac{3^9}{2^{14}}$	$Mi = \frac{3^4}{2^6}$	
	$Fa = \frac{2^2}{3}$	$Fa\# = \frac{2^{10}}{3^6}$
$Solb = \frac{3^6}{2^9}$	$Sol = \frac{3}{2}$	$Sol\# = \frac{2^7}{3^4}$
$Lab = \frac{3^8}{2^{12}}$	$La = \frac{3^3}{2^4}$	$La\# = \frac{2^4}{3^2}$
$Sib = \frac{3^{10}}{2^{15}}$	$Si = \frac{3^5}{2^7}$	

y asistimos a la génesis de las siguientes escalas

Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si



(escala cromática ascendente)

Si, Sib, La, Lab, Sol , Solb,Fa, Mi, Mib, Re, Reb , Do

(escala cromática descendente)

Calculemos la diferencia entre un bemol y un sostenido dentro de un mismo tono utilizando a las notas Do# y Reb,

$$\frac{\frac{3^7}{2^{11}}}{\frac{2^8}{3^5}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7}$$

Esta cantidad coincide con lo que más adelante llamaremos *comma pitagórico.* Al construir un nueva escala dentro de un tono no se incluyen un sostenido y un bemol puesto que su diferencia es tan pequeña que auditivamente se consideran la misma nota. Por lo tanto a pesar de tener 10 nuevas notas las nuevas escalas que se pueden construir usando sostenidos o bemoles tendrán a lo sumo doce notas.

2.4. Escala cromática

El hecho de que cada frecuencia se identifica con el doble de la misma se puede establecer en los siguientes términos: dados dos números reales positivos a y b decimos que a y b “representan el mismo sonido” si y solo si $a = b2^n$ para algún entero n. La anterior relación definida en los reales positivos es una relación de equivalencia, y el intervalo $[1, 2)$ es un conjunto de representantes. Entonces construir una escala es equivalente a particionar finitamente el intervalo $[1, 2)$.

Debido a lo anterior, una idea para establecer una escala es "cubrir" el intervalo $[1, 2)$ con intervalos determinados por representantes de las potencias de $\frac{3}{2}$.

En términos de notas y escalas, este intento de cubrimiento se describe así:

"Sumando quintas y restando las correspondientes octavas podemos colocar en la octava todos los intervalos. El cálculo de un intervalo dado se reduce a saber de cuántas quintas se compone y cuantas octavas sobrepasa, o sea multiplicar n veces la razón $3 : 2$ y dividir el resultado por m veces $2 : 1$. De esta forma extendemos el cálculo a cualquier número de notas"[6]. También se puede restar quintas y sumar octavas. Pero la anterior tarea resulta infructuosa pues, por más quintas que sumemos jamás llegaremos a la misma nota de partida, o sea, a base de sumar quintas y restar octavas nunca llegaremos al intervalo de octava puesto que $\left(\frac{3}{2}\right)^m \neq 2^n$ para cualesquier m, n (Teorema Fundamental de la Aritmética).

La siguiente tabla muestra que cada nota conocida hasta el momento "representa el mismo sonido" que alguna potencia entera de $\frac{3}{2}$, lo que garantiza que al "sumar quintas y restar octavas" y al "restar quintas y sumar octavas" se recorrerán todas las notas de las escalas cromáticas.

[6] [8]; pag. 50-51

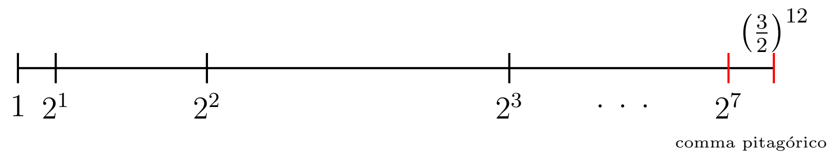
NOTA	FRECUENCIA	EQUIVALENCIA
Do	1	$\left(\frac{3}{2}\right)^0 * 2^0$
Do#	$\frac{2^8}{3^5}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} * 2^3$
Reb	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7 * 2^{-4}$
Re	$\frac{3^2}{2^3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 * 2^{-1}$
Re#	$\frac{2^5}{3^3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} * 2^2$
Mib	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^9 * 2^{-5}$
Mi	$\frac{3^4}{2^6}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 * 2^{-2}$
Fa	$\frac{2^2}{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} * 2^1$
Fa#	$\frac{2^{10}}{3^6}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} * 2^4$
Solb	$\frac{3^6}{2^9}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 * 2^{-3}$
Sol	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1 * 2^0$
Sol#	$\frac{2^7}{3^4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} * 2^3$
Lab	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^8 * 2^{-4}$
La	$\frac{3^3}{2^4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 * 2^{-1}$
La#	$\frac{2^4}{3^2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} * 2^2$
Sib	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{10} * 2^{-5}$
Si	$\frac{3^5}{2^7}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 * 2^{-2}$

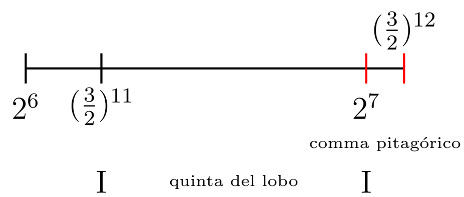
Notas con sostenidos y bemoles

Toda la octava no se puede cubrir con quintas pero doce quintas están muy cerca de siete octavas y las sobrepasan en un pequeño intervalo denominado *comma pitagórico.*

Esto ocurre porque

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} \approx 1.010$$





Al descartar ese pequeño intervalo para terminar el proceso en 2^7, el último intervalo es una quinta deformada conocida como *quinta del lobo*. Esto tiene relación con un sonido desagradable similar al aullido de un lobo.

Una posibilidad (sumando quintas) para construir una escala es

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{3^2}{2^3}, \quad \frac{3^3}{2^4}, \quad \frac{3^4}{2^6}, \quad \frac{3^5}{2^7}, \quad \frac{3^6}{2^9}, \quad \frac{3^7}{2^{11}}, \quad \frac{3^8}{2^{12}}, \quad \frac{3^9}{2^{14}}, \quad \frac{3^{10}}{2^{15}}, \quad \frac{3^{11}}{2^{17}},$$

que ordenadas ascendentemente son

1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$
Do	Reb	Re	Mib	Mi		Solb	Sol	Lab	La	Sib	Si

otra posibilidad (restando quintas) es

$$1, \quad \frac{2^2}{3}, \quad \frac{2^4}{3^2}, \quad \frac{2^5}{3^3}, \quad \frac{2^7}{3^4}, \quad \frac{2^8}{3^5}, \quad \frac{2^{10}}{3^6}, \quad \frac{2^{12}}{3^7}, \quad \frac{2^{13}}{3^8}, \quad \frac{2^{15}}{3^9}, \quad \frac{2^{16}}{3^{10}}, \quad \frac{2^{18}}{3^{11}},$$

que ordenadas ascendentemente son

1	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{2^{13}}{3^8}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{2^{15}}{3^9}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$
Do	Do#		Re#		Fa	Fa#		Sol#		La#	

Para construir una escala en donde las doce notas estén tomadas entre las conocidas hacemos unas sumas de quintas y otras restas para obtener la escala siguiente:

	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Sib	Si
12 Notas pitagóricas	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$

El proceso descrito anteriormente es conocido como *afinación pitagórica* y la escala obtenida es llamada *escala cromática*. La afinación pitagórica respeta las dos consonancias principales (octavas y quintas) pero da lugar a la quinta del lobo y maneja el supuesto de que son iguales dos notas que en realidad son muy parecidas (sostenidos y bemoles). Estos inconvenientes hacen que el problema de la afinación continúe abierto.

2.5. Temperamento igual

La noción de temperamento se refiere a la posibilidad de desajustar cuidadosamente un conjunto de consonancias para que “surjan escalas practicables, llegando a un acuerdo entre consonancias incompatibles para que la práctica sea posible”[7]. En resumen, *temperamento* se refiere al intento de aproximar bajo ciertos criterios todo el conjunto de notas. De modo que las posibilidades de desajustar son múltiples y a su vez los procedimientos para ello. Históricamente han aparecido diversas escalas basadas en distintos temperamentos. Sin embargo, del temperamento que nos vamos ocupar es el que se ha denominado *temperamento igual*, debido a su importancia histórica y a que aún hoy, la mayor parte de la música que se compone se basa en dicho temperamento.

De acuerdo a Goldaráz[8] “Cuando hablamos del temperamento igual nos referimos habitualmente a la división de la octava en doce partes, doce semitonos iguales. Si la afinación justa tiene tonos y semitonos diferentes y la Pitagórica tonos iguales y

[7] [8]; pag. 15-16

[8] [8]; pag. 121

semitonos diferentes, el temperamento igual tiene tonos y semitonos iguales. Se trata de un sistema regular y cíclico con todas las quintas semejantes (-1; 95 cents), sin quinta del lobo y en el que las notas enarmónicas coinciden, Do#=Reb, Sol#=Lab, etc."

Al no tener quinta del lobo y al estar dividido en partes iguales este temperamento posee una ventaja esencial que estriba en permitir la libre modulación[9] a todas las tonalidades, con todos los intervalos practicables a partir de los doce sonidos de la escala habitual. Que todos los intervalos sean practicables significa que podemos variar de notas conservando el fondo melódico "original"; la libre modulación permite coexistir sonidos de diferente altura interpretados ya sea por voces o instrumentos, lo cual implica que una melodía (secuencia de notas) se ejecuta con variaciones o cambios imperceptibles que agradan al oído. Respetando el desarrollo histórico para las escalas se plantea en determinado momento construir una escala en donde los intervalos de frecuencia tengan igual longitud y se conserve la quinta. Es aquí en donde juegan un papel fundamental las fracciones continuas y una de sus propiedades. Recordemos que nosotros podemos aproximar cualquier número real mediante las convergentes; es esta la parte que da una rotunda solución en la construcción, pues para la elección del número de notas en una octava y la posición de la quinta justa necesitamos de una convergente.

Para la construcción de la escala conocida como temperamento igual tendremos en cuenta tres cosas:

1. Dividiremos el espacio sonoro $[1, 2)$ en una cantidad m de subintervalos de igual longitud de frecuencia.

[9]Una pieza musical puede empezar en una tonalidad (darle un origen y un final a la música) y después cambiar a una o varias tonalidades distintas antes de volver a la original. Este cambio de tonalidad se denomina modulación musical.

2. Como el número m será el número de notas en la escala y ya tenemos escalas de doce notas, deseamos que tal número sea al menos 12. Por otro lado m no debe ser un número muy grande puesto que en la práctica las notas serán ubicadas en un instrumento físico que se manipulará con 10 dedos. Además, dada la limitación discriminatoria del oído humano, muchas notas en la escala implicaría que varias de ellas "sonarían igual".

3. Deseamos que la escala construida contenga la frecuencia $\frac{3}{2}$ (la quinta) debido a que despues de la octava es la mejor consonancia. Si no está la quinta, es necesario que esté la mejor aproximación posible a la misma.

Consideremos entonces una cantidad finita de notas ordenadas crecientemente, esto es

$$1 = f_0 < f_1 < f_2 < ... < f_{m-1} < f_m = 2$$

Consideremos que el cociente de cada par de frecuencias consecutivas toma el mismo valor, esto dará al oído una sensación agradable según Galileo y P. Mersenne[10]. Tenemos entonces

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = ... = \frac{f_m}{f_{m-1}} = r$$

Con esto estamos generando una progresión geométrica a la cual se le puede determinar su razón r. Luego

$$f_0 = 1, \quad f_1 = r(1) = r, \quad f_2 = rf_1 = r^2, \quad ... \quad , \quad f_m = r^m = 2,$$

de donde

$$r = \sqrt[m]{2}$$

[10] *Armonía Universal.* Marín Mersenne, 1636.

Dialogos sobre las nuevas ciencias, Galileo 1638.

El trabajo de estos autores tuvo como uno de sus frutos importantes el establecimiento de que la frecuencia al vibrar una cuerda es inversamente proporcional a su longitud.

¿Cuánto ha de valer m? esto es, ¿cuántas notas ha de tener la escala que corresponde al temperamento igual para satisfacer nuestras necesidades sonoras?. Se había dicho que se iba a respetar la quinta, entonces dentro de esa sucesión de notas existirá una, consideremos la k-ésima, tal que,

$$(\sqrt[m]{2})^k = \left(2^{\frac{1}{m}}\right)^k = \frac{3}{2} \quad \text{de donde} \quad 2^{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2} \quad \text{o lo que es equivalente a}$$

$$2^{m+n} = 3^m.$$

La imposibilidad de esta igualdad indica que una escala temperada no puede contener la quinta, entonces buscaremos una escala que contenga una buena aproximación.
Aplicando logaritmos en base dos a ambos lados de la igualdad tenemos

$$\frac{k}{m} = log_2 \frac{3}{2}.$$

Visto así, nuestro problema es entonces encontrar la mejor aproximación racional al número $log_2 \frac{3}{2}$. Para aproximar $log_2 \frac{3}{2}$ usaremos una convergente de la correspondiente fracción continua. Siendo esta $\frac{k}{m}$, su denominador indicará el número de notas en la octava y su numerador la posición que ocupa la quinta (la aproximación a la quinta).
Recordemos que todo número real x tiene asociado una fracción continua simple, en particular un número irracional tiene asociado una fracción continua simple infinita, además siendo C_i las convergentes de dicha fracción tenemos:

$$C_0 < C_2 < C_4 < ... < x < ... < C_5 < C_3 < C_1$$

En cuanto a las propiedades que cumplen las fracciones continuas simples tenemos garantizado (por el teorema 13 que vimos en el primer capítulo) que cualquier fracción con un denominador intermedio entre los denominadores de dos convergentes no mejora la aproximación que da la mayor de ellas. Es decir, que cada

convergente es la mejor aproximación a x entre las fracciones que tienen denominador menor o igual que el de la convergente.
En cuanto a $log_2 \frac{3}{2}$ tenemos que su relación con sus primeras convergentes es:

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{31}{53} < \frac{389}{665} < ... < log_2 \frac{3}{2} < ... < \frac{9126}{15601} < \frac{179}{306} < \frac{24}{41} < \frac{3}{5} < 1$$

Entonces las posibilidades para construir una escala con las condiciones 1 y 3 están restringidas al uso de un número de notas que puede ser 2, 5, 12, 41, 53,. . .
Hasta 5 notas es insuficiente para cubrir razonablemente el intervalo sonoro y con 41 notas el oído no captaría la diferencia entre notas cercanas. Por lo tanto, se recurre a 12 notas por octava. Esta es la razón matemática por la que casi toda la música actual utiliza doce notas.
La nueva escala llamada temperada igual es

	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Sib	Si
Temperamento igual	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$

La aproximación a la frecuencia $\frac{3}{2}$ en esta escala es $2^{\frac{7}{12}}$. La diferencia entre el intervalo $[1, \frac{3}{2}]$ y $[1, 2^{\frac{7}{12}}]$ se calcula a mediados del siglo XIX y es de menos de un Hertz que se supone es el umbral diferencial mínimo para el oido humano. La construccion realizada se basa en el trabajo de Andreas Werckmeister hacia 1700. Werckmeister también construyó y afinó por primera vez un instrumento de teclas de acuerdo a la escala temperada.
Por otro lado “ el compositor alemán Juan Sebastián Bach dictaminó en 1722 que un instrumento de teclado debía ser afinado mediante un sistema llamado “de temperamento igual”, y para demostrarlo compuso una de las obras más maravillosas de todos los tiempos: *El clave bien temperado* (que es una colección de veinticuatro Preludios y Fugas). Bach logró con su obra familiarizar a los músicos y a los amantes

de la música con la incomparable riqueza sonora que se obtiene con el uso ilimitado de toda la gama tonal".[11]

[11]Enrique Arenz, *Juan Sebastian Bach y su obra "El clave bien temperado"*

COMENTARIOS FINALES

1. Hemos presentado las fracciones continuas de forma general mostrando diferentes propiedades y aplicaciones. Relacionamos conceptos básicos de la matemática: número real, aproximación racional e irracional, sucesiones, límites de sucesiones, recursividad entre otros.

2. En las fracciones continuas, el cálculo de las convergentes desempeña un papel muy importante: por ejemplo, cuando se representa un número racional como una fracción continua simple finita, su última convergente es el mismo número racional; cuando de irracionales se trata, cada vez que se halla una nueva convergente, estas se aproximan más al número irracional y son consideradas las mejores aproximaciones racionales.

3. Las fracciones continuas permiten resolver de forma fácil algunas ecuaciones diofánticas.

4. Nos interesa resaltar que los requisitos para comprender este trabajo son relativamente sencillos y que creemos que las fracciones continuas pueden ser trabajadas en alguna medida en la educación secundaria.

5. Hemos construido bajo criterios matemáticos tres escalas (diatónica, cromática y temperada igual) que en nuestra contextualización consideramos como soluciones destacadas a la inagotable problemática de la afinación.

6. Las tres escalas presentadas se basan en lo criterios de consonancia establecidos por Pitágoras, quien postula que la escogencia de los sonido con los que se hace música debe responder más a criterios numéricos que a la subjetividad de la percepción.

7. Este trabajo permite visualizar como una herramienta matemática (las fracciones continuas) da respuesta a una versión de un problema de siglos (la versión del problema de la afinación correspondiente a la música occidental).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Jiménez R., Gordillo E., Rubiano G. *Teoría de números [para principiantes].* Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, Facultad de Ciencias, 2004.

[2] J.H. Davenport. *The Higher Arithmetic*, octava edición, 2008, Cambridge University Press.

[3] Niven y Zuckerman. *Introducción a la teoría de los números* Universidad de Oregon y Washington 1960.

[4] C.D. Olds. *Continued Fractions* San Jose State University 1963.

[5] Alvarez Falcón José María. *Matemáticas y Música: El matrimonio secreto.* **Números**, ISSN 0212-3096, N°. 21, 1991 , págs. 33-44. Sevilla.

[6] Liern Carrión V. *Las fracciones de la Música.* Musymáticas. Suma Número 59 pp 129-134, 2006.

[7] Miyara Federico. *La música de las esferas: de Pitágoras a Xenakis... y más acá.* Apuntes para el coloquio del Departamento de Matemáticas. Universidad del Rosario, Argentina, 2005.

[8] J. Javier Goldaráz Gaínza. *Afinación y Temperamentos Históricos* Conservatorio de Madrid 2004.